การออกแบบตัวควบคุมปรับเทียบและการปรับจูนพารามิเตอร์สำหรับเฮลิโอสแตท

นาย ธนาฒย์ วชิรปราการสกุล

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2550

DESIGN OF CALIBRATING CONTROLLER AND PARAMETER TUNING FOR HELIOSTATS

Mr. Thanart Vachiraprakarnsakul

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering program in Electrical Engineering
Department of Electrical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2007

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การออกแบบตัวควบคุมปรับเทียบและการปรับจูนพารามิเตอร์สำหรับเฮลิโอสแตท
โดย	นาย ธนาฒย์ วชิรปราการสกุล
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.มานพ วงศ์สายสุวรรณ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(รองศาสตราจารย์ ดร.บุญสม เลิศหิรัญวงศ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.วัชรพงษ์ โขวิฑูรกิจ)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.มานพ วงศ์สายสุวรรณ)

.... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรณพ เรืองวิเศษ)

ธนาฒย์ วชิรปราการสกุล: การออกแบบตัวควบคุมปรับเทียบและการปรับจูนพารามิเตอร์สำหรับเฮลิโอสแตท. (DESIGN OF CALIBRATING CONTROLLER AND PARAMETER TUNING FOR HELIOSTAT) อ. ที่ปรึกษา: ผศ.ดร.มานพ วงศ์สายสุวรรณ, 66 หน้า

เฮลิโอสแตท (กระจกหมุนได้ที่ใช้ในการแปลงพลังงานจากดวงอาทิตย์ไปเป็นพลังงานอื่นๆ) ถูกปรับตำแหน่งเพื่อสะท้อนแสงอาทิตย์ไปยังตัวรับกลาง เฮลิโอสแตทจะเปลี่ยนตำแหน่งตามการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของดวงอาทิตย์เพื่อที่จะสะท้อนแสงไปยังตัวรับกลางอย่างแม่นยำตลอดเวลาทำงาน วิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของลักษณะการสะท้อนแสงของดวงอาทิตย์ไปยังตัวรับกลางโดยใช้เฮลิโอสแตทและออกแบบตัวควบคุมเทียบมาตรฐาน ตัวควบคุมเทียบมาตรฐานถูกพัฒนาเพื่อลดผลของพื้นที่ทำการติดตั้งเฮลิโอสแตท (พื้นอาจไม่เรียบสนิท) และปรับแก้ตำแหน่งเฮลิโอสแตทที่สะท้อนแสงไม่ตรงตามตำแหน่งอ้างอิงเนื่องจากมีการรบกวนภายนอก ยกตัวอย่างเช่น เมื่อมีลมพัดวูบหนึ่งอาจทำให้ตำแหน่งทิศทางของเฮลิโอสแตทเปลี่ยนแปลงไป ในการประมาณความชันของพื้นที่ทำการติดตั้งจะใช้วิธีนิวตัน วิธี steepest descent และการวิเคราะห์เชิงพีชคณิตมาช่วยในการคำนวณ ส่วนในการปรับแก้ตำแหน่งที่ผิดเพี้ยนจะเสนอตัวควบคุมแบบสัดส่วน ตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะเต็มที่ใช้คู่กับตัวสังเกตการณ์ พร้อมทั้งมีตัวกรองเพื่อลดสัญญาณรบกวนที่เกิดจากเครื่องมือวัด สุดท้ายจะเสนอผลจำลองการทดลองว่าได้ผลตามต้องการเพียงใดเพื่อที่จะนำตัวควบคุมนี้ไปใช้ประยุกต์กับอุปกรณ์จริงต่อไป

ภาควิชา ......วิศวกรรมไฟฟ้า......	ลายมือชื่อนิสิต ......ธนาฒย์ วชิรปราการสกุล......
สาขาวิชา ......วิศวกรรมไฟฟ้า......	ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ......มานพ วงศ์สายสุวรรณ......
ปีการศึกษา ......2550......	

##4970344321: MAJOR ELECTRICAL ENGINEERING

KEY WORD: HELIOSTAT / ROTATION MATRIX / EULER ANGLE/ NEWTON / STEEPEST DESCENT / BACKTRACKING / BASIS

THANART VACHIRAPRAKARNSAKUL: DESIGN OF CALIBRATING CONTROLLER AND PARAMETER TUNING FOR HELIOSTAT. THESIS ADVISOR: ASST. PROF. MANOP WONGSAISUWAN, Ph.D., 66 pp.

A heliostat (steerable mirror in solar/electric energy conversion) is oriented to reflect light beam to a central receiver. The heliostat periodically tracks the sun, which serves as a precise reference. This thesis propose a mathematical model of reflection by the heliostat and a calibrating controller. The calibrating controller is developed for reducing the effect of the ground that the heliostat is installed on and regulating the heliostat which reflects light beam incorrectly to the central receiver because of an external disturbance such as wind. Newton method, steepest descent method with backtracking line search and linear algebra are used to estimate the slope of the ground. A full-state feedback with a nonlinear observer is used to correct the position of light on a central receiver to a reference position. Simulation results are given for typical heliostat configuration.

Department : Electrical Engineering
Field of Study : Electrical Engineering
Academic Year : 2007

Student's Signature : ธนาฒย์ วชิรปราการสกุล
Advisor's Signature : มานพ วงศ์สายสุวรรณ

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ ด้วยความช่วยเหลือของผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. มานพ วงศ์สายสุวรรณ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งได้สละเวลาให้คำแนะนำและข้อคิดเห็นต่างๆ ที่ทำให้นิสิตมีแนวความคิดในการทำวิทยานิพนธ์ รวมทั้งแรงจูงใจที่ทำให้ผู้วิจัยตัดสินใจศึกษาต่อในระดับปริญญามหาบัณฑิต ผู้วิจัยจึงใคร่ขอขอบพระคุณไว้ ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วัชรพงษ์ โขวิฑูรกิจ ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อรรณพ เรืองวิเศษ กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ได้สละเวลาตรวจสอบและให้คำแนะนำเพื่อให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น และขอขอบพระคุณคณาจารย์ทุกท่านในสาขาระบบควบคุม ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ที่ได้ประสิทธิประสาทความรู้พื้นฐานในวิชาทางระบบควบคุม อันเป็นพื้นฐานในการศึกษาและทำวิทยานิพนธ์นี้

ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ที่ให้ทั้งกำลังทรัพย์และกำลังใจตลอดเวลา รวมทั้งให้โอกาสผู้วิจัยได้ศึกษาต่อในระดับปริญญามหาบัณฑิต

ขอขอบคุณพี่ศิริชัย ที่ช่วยอธิบายการใช้เมทริกซ์การหมุนและแนวความคิดการใช้ระบบพิกัดทรงกลมเพื่อใช้ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ขอขอบคุณพี่ดร.วทัญญูและจิตติชัย ที่จุดประกายความคิดสำหรับการออกแบบวิธีการประมาณค่าพื้นที่ทำการติดตั้งเฮลิโอสแตท ขอขอบคุณพี่ฐาปนา พี่วุฒินันท์ พี่วรพล ปรเมศ ศิริพงษ์ สำหรับคำแนะนำเกี่ยวกับ MATLAB และ LaTeXประกอบการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ขอขอบคุณเพื่อนๆ รุ่นพี่ รุ่นน้องในห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุมทั้งในภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ที่ได้ให้กำลังใจและคำปรึกษา จนผู้วิจัยได้ทำวิทยานิพนธ์นี้ได้สำเร็จสมบูรณ์

สุดท้ายนี้ ขอขอบคุณห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุม ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สำหรับทรัพยากรต่างๆ ในการศึกษา ค้นคว้าและวิจัย

สารบัญ

สารบัญตาราง

ตาราง หน้า

สารบัญภาพ

รูปที่ หน้า

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมา

พลังงานจากดวงอาทิตย์สามารถแบ่งได้เป็น 2 ชนิดคือ พลังงานแสงซึ่งนำมาแปรรูปเป็นพลังงานไฟฟ้าผ่านเซลล์สุริยะ (solar cell) ส่วนพลังงานอีกชนิดคือพลังงานความร้อน ในทางอุตสาหกรรมที่ต้องใช้ความร้อนสูง เช่น โรงงานหลอมซิลิกอน ถ้าเรานำพลังงานความร้อนจากดวงอาทิตย์มาใช้แทนน้ำมัน ก๊าซธรรมชาติ หรือ ถ่านหิน จะเป็นการประหยัดค่าใช้จ่ายมากเนื่องจากพลังงานความร้อนจากดวงอาทิตย์เป็นพลังงานที่ไม่มีวันหมดแถมไม่เป็นมลภาวะต่อสิ่งแวดล้อม

การที่นำพลังงานความร้อนจากดวงอาทิตย์มาใช้นั้นทำได้โดยใช้กระจกที่ปรับมุมอะซิมุธ (azimuth) และมุมอิลิเวชั่น (elevation) ได้ซึ่งมีชื่อว่าเฮลิโอสแตท (heliostat) หลายๆใบทำการสะท้อนแสงจากดวงอาทิตย์ไปยังตัวรับกลาง (central receiver) การรวบรวมความร้อนจากแสงอาทิตย์โดยใช้เฮลิโอสแตทจะมีลักษณะดังรูปที่ 1.1 ในส่วนการทำงานของเฮลิโอสแตทแบ่งออกเป็น 2 ประเภทคือ

- วิธีการติดตามดวงอาทิตย์ (Tracking Mode)
- วิธีการเทียบมาตรฐาน (Calibration Mode)

หน้าที่ของเฮลิโอสแตทคือการสะท้อนแสงจากดวงอาทิตย์ไปตกที่ตัวรับกลางอย่างแม่นยำถึงแม้ว่าดวงอาทิตย์จะเปลี่ยนตำแหน่งไปก็ตามโดยจะพิจารณาเป็นส่วนของวิธีการติดตามดวงอาทิตย์ซึ่งจะใช้วิธีการควบคุมแบบวงเปิด (open loop) นั่นคือเรามีสมการตำแหน่งของดวงอาทิตย์ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาและมีค่าตำแหน่งของตัวรับกลาง เราจะสามารถคำนวนมุมของเฮลิโอสแตทที่ทำให้แสงที่สะท้อนจากดวงอาทิตย์ตกลงสู่ตัวรับกลางตลอดเวลาการทำงาน

รูปที่ 1.1: การรวบรวมความร้อนจากแสงอาทิตย์โดยใช้เฮลิโอสแตท

แต่ถ้าระหว่างการทำงานมีการรบกวนจากภายนอก เช่น มีลมพัดมาวูบหนึ่ง ทำให้ตำแหน่งของเฮลิโอสแตทเปลี่ยนแปลงไป ไม่สะท้อนไปตรงกึ่งกลางตัวรับกลางได้ รวมถึงพื้นที่ใช้ทำการติดตั้งแทนที่จะเป็นพื้นราบกลับมีความชันซึ่งทำให้การหมุนตำแหน่งของเฮลิโอสแตทไม่เป็นไปตามที่ตั้งใจ เราต้องนำเฮลิโอสแตทมาทำการเทียบมาตรฐานเพื่อให้ได้ตำแหน่งที่ถูกต้องพร้อมทั้งให้ข้อมูลของพื้นที่ติดตั้งเพื่อนำไปใช้ในวิธีการติดตามดวงอาทิตย์ต่อไป โดยงานวิจัยนี้จะนำเสนอในส่วนวิธีการเทียบมาตารฐานของเฮลิโอสแตท

1.2 งานวิจัยที่ผ่านมา

ในงานวิจัยที่ผ่านมาได้มีการนำเสนอการทำวิธีเทียบมาตรฐานแบบวงเปิด (Open loop)[1], [2] ซึ่งในงานวิจัยทั้งสองนั้นทำการหาค่าความแตกต่างระหว่างค่ามุมที่สั่งการกับค่ามุมที่เกิดขึ้นจริง แล้วนำมาใช้ในการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ของแบบจำลองที่แสดงความผิดพลาดของการติดตั้งและการคลาดเคลื่อนในการหมุนของมอเตอร์โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยสุด (Least-square algorithm) งานวิจัยทั้งสองฉบับนี้จะเน้นการคำนวณทางคณิตศาสตร์เป็นส่วนใหญ่ ข้อดีของวิธีนี้คือไม่มีการป้อนกลับสัญญาณ ทำให้ลดต้นทุนในส่วนของตัวตรวจจับ (Sensor) ส่วนข้อเสียคือสมการเกิดจากการสมมุติว่าความแตกต่างระหว่างมุมที่ใช้ในการคำนวณกับมุมที่เกิดขึ้นจริงมีค่าน้อยมากเพื่อที่จะได้ประมาณสมการให้อยู่ในรูปเชิงเส้น และความแม่นยำของค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้จากวิธีกำลังสองน้อยสุดจะขึ้นกับจำนวณข้อมูล ข้อมูลยิ่งมากเท่าไรเวลาที่ต้องใช้ในการเก็บข้อมูลยิ่งมากเท่านั้น

ต่อมาได้มีงานวิจัยที่ทำวิธีการสอบเทียบแบบวงปิด (Closed loop)[3], [4] โดยสามารถตรวจวัดค่าผิดพลาดและแก้ไขได้อย่างอัตโนมัติ ตำแหน่งแสงบนตัวรับกลางจะถูกจับภาพโดยกล้อง CCD ซึ่งจะทำการประมาณผลทางภาพ (Image processing) ทำการเปรียบเทียบภาพ (Image comparison) แล้วส่งข้อมูลความผิดพลาดไปเป็นสัญญาณควบคุมเฮลิโอสแตท โดยงานวิจัยทั้งสองฉบับนี้จะเน้นในการประมวณผลทางภาพเป็นส่วนใหญ่

1.3 วัตถุประสงค์

ในส่วนงานวิจัยฉบับนี้จะทำการเทียบมาตรฐานแบบวงปิด โดยจะแบ่งเป็นสามส่วนหลักๆคือ สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical model) ของเฮลิโอสแตทเพื่อนำมาวิเคราะห์วิธีการควบคุมให้เหมาะสม ทำการหาค่าพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า (Parameter tuning) ซึ่งในที่นี้คือข้อมูลว่าพื้นที่ทำการติดตั้งเฮลิโอสแตทมีความชันเท่าไรเพื่อที่จะช่วยเพิ่มความแม่นยำในการคำรวณสัญญาณการหมุนเฮลิโอสแตทในส่วนของวิธีการติดตามดวงอาทิตย์ และในส่วนสุดท้ายคือการแก้ไขตำแหน่งที่เกิดความผิดพลาดเนื่องจากการรบกวนภายนอกหรือสัญญาณรบกวนต่างๆ

1.4 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

1. สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเฮลิโอสแตท
2. ออกแบบตัวควบคุมที่สามารถทำให้ตำแหน่งภาพบนตัวรับกลางลู่เข้าสู่ตำแหน่งอ้างอิงโดยใช้เวลาภายในช่วงที่อนุโลมว่าดวงอาทิตย์ยังไม่เปลี่ยนตำแหน่ง
3. พัฒนาตัวควบคุมที่ทำให้ระบบลู่เข้าได้ไวบนพื้นที่ติดตั้งที่ไม่เรียบและลดสัญญาณรบกวนที่เกิดจากตัวตรวจจับ
4. นำข้อมูลที่ได้จากการเทียบมาตรฐานมาคำนวณพิกัดกรอบของพื้นที่ติดตั้งเฮลิโอสแตท

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1. ศึกษาลักษณะของเฮลิโอสแตทและสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเฮลิโอสแตท
2. ออกแบบตัวควบคุมให้มีความซับซ้อนน้อยที่สุดเพื่อใช้กับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเฮลิโอสแตทที่ติดตั้งบนพื้นราบ
3. ประยุกต์การควบคุมที่ได้จากข้อที่ 2. มาทดลองกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเฮลิโอสแตทที่ติดตั้งบนพื้นที่มีความชัน พร้อมทั้งปรับปรุงตัวควบคุมให้ทำงานได้ดียิ่งขึ้น
4. ศึกษาลักษณะความชันต่าง ๆของพื้นที่ติดตั้งเฮลิโอสแตท เพื่อนำมาพิจารณาหาวิธีคำนวณค่าความชัน
5. หาวิธีคำนวณที่เหมาะสมในการคำนวณความชันของพื้นที่ติดตั้งเฮลิโอสแตทโดยใช้ข้อมูลที่ได้จากการควบคุมเฮลิโอสแตท
6. ออกแบบตัวควบคุมที่สามารถลดทอนสัญญาณรบกวนให้ได้มากสุดและให้ระบบลู่เข้าภายในเวลาที่กำหนดไว้
7. นำข้อมูลที่ได้จากการควบคุมเฮลิโอสแตทที่มีสัญญาณรบกวนมาคำนวณหาค่าความชันของพื้นเอียง พร้อมทั้งปรับปรุงการคำนวณให้เหมาะสมยิ่งขึ้น

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. เข้าใจลักษณะการทำงานและการใช้งานของเฮลิโอสแตท
2. ความรู้ในการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเฮลิโอสแตท
3. เรียนรู้การออกแบบตัวควบคุมของระบบไม่เชิงเส้นแบบภินทนะที่มีสัญญาณรบกวน

4. เรียนรู้วิธีการระบุลักษณะของระบบและการหาค่าพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าของระบบภินทนะที่พิจารณาสัญญาณรบกวน
5. ด้วยการพิจารณาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ทำให้การออกแบบตัวควบคุมสำหรับเฮลิโอสแตทมีแบบแผนมากขึ้น

1.7 โครงสร้างของวิทยานิพนธ์

ในบทถัดไปเราได้อธิบายแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของลักษณะการสะท้อนแสงไปยังตัวรับกลางของเฮลิโอสแตทในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinate system) บทต่อมาจะใช้ข้อมูลที่ได้จากการทดลองเปลี่ยนทิศทางเฮลิโอสแตทเพื่อวิเคราะห์ลักษณะและทำการประมาณพื้นที่ทำการติดตั้งเฮลิโอสแตทว่ามีความชันเท่าไร บทที่ 4 จะทำการออกแบบตัวควบคุม 2 ชนิดคือ ตัวควบคุมแบบสัดส่วนและตัวควบคุมแบบป้อนกลับสถานะเต็ม รวมทั้งการออกแบบตัวสังเกตการณ์และตัวกรองสัญญาณรบกวนด้วย บทสุดท้ายจะทำการสรุปงานวิจัยนี้

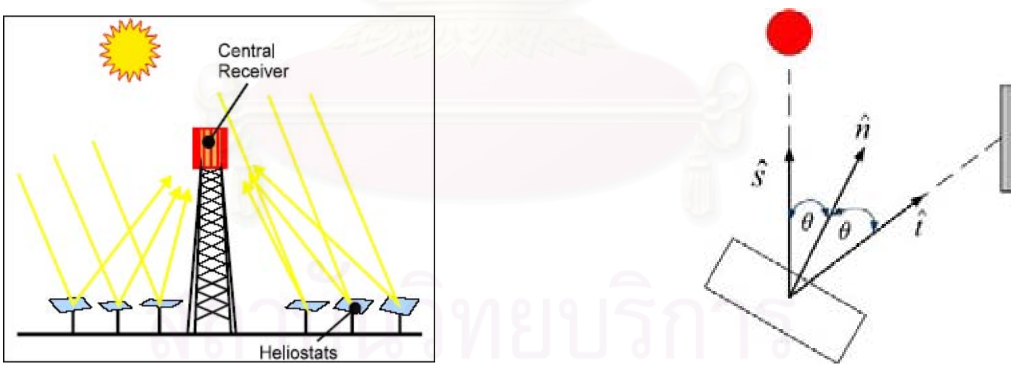
บทที่ 2

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของลักษณะการสะท้อนแสงไปยังตัวรับกลางโดยใช้เฮลิโอสแตท

ในบทนี้เราจะทำการหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของลักษณะการสะท้อนแสงไปยังตัวรับกลางโดยใช้เฮลิโอสแตท โดยจะเริ่มจากความสัมพันธ์ของเวกเตอร์ต่างๆที่เกี่ยวข้องกับการสะท้อนแสง ต่อมาจะกล่าวถึงนิยามของเมทริกซ์การหมุนและตัวดำเนินการการหมุน รวมทั้งการหมุนแบบต่างๆ หลังจากนั้นจะหาสมการทางคณิตศาสตร์ที่แสดงลักษณะการหมุนของเฮลิโอสแตท และสุดท้ายนำความสัมพันธ์ทั้งหมดมาสร้างปริภูมิสถานะ

2.1 การสะท้อนแสงโดยใช้เฮลิโอสแตท

ตำแหน่งทิศทางของเฮลิโอสแตทสามารถแสดงได้เป็นเวกเตอร์ตั้งฉาก (Normal vector) ของกระจกดังนี้



(a) การทำงานของเฮลิโอสแตท

(b) แสงตกกระทบและแสงสะท้อน

รูปที่ 2.1: ลักษณะการสะท้อนแสงจากดวงอาทิตย์ไปสู่ตัวรับกลาง

กำหนดให้ $\hat{s}$ และ $\hat{t}$ เป็นเวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วยที่พุ่งออกจากจุดกึ่งกลางเฮลิโอสแตทไปยังดวงอาทิตย์และไปยังตัวรับกลาง ตามลำดับ ส่วน $\hat{n}$ เป็นเวกเตอร์ตั้งฉากของเฮลิโอสแตทที่มีขนาดหนึ่งหน่วยเช่นกัน จะได้ว่า

$$\hat{n} \quad = \quad \frac{\hat{s}+\hat{t}}{||\hat{s}+\hat{t}||} \tag{2.1}$$

เนื่องจาก $\|\hat{s}\| = \|\hat{t}\| = 1$

$$\begin{aligned} \|\hat{s}+\hat{t}\|^2 &= \langle \hat{s}+\hat{t}, \hat{s}+\hat{t} \rangle \\ &= \|\hat{s}\|^2 + \|\hat{t}\|^2 + 2\langle \hat{s}, \hat{t} \rangle \\ &= 2 + 2\cos(2\theta) \\ &= 4\cos^2(\theta) \end{aligned}$$

และเนื่องจากมุมตกกระทบต้องมีค่าน้อยกว่า 90° หรือนั่นคือ $\theta < 90^\circ$

$$\begin{aligned} \|\hat{s}+\hat{t}\| &= 2\cos(\theta) \\ &= 2\langle \hat{s}, \hat{n} \rangle \\ \therefore \qquad \hat{t} &= 2\langle \hat{s}, \hat{n} \rangle \hat{n} - \hat{s} \end{aligned} \tag{2.2}$$

เมื่อทราบค่า $\hat{t}$ แล้ว โดย $\hat{t}$ สามารถเขียนอยู่ในรูป $\hat{t} = (t_x, t_y, t_z)$ ขั้นต่อมาจะเป็นการคำนวณหาตำแหน่งภาพบนตัวรับกลาง กำหนดให้กึ่งกลางของเฮลิโอสแตทเป็นจุดกำเนิด (Origin) จะได้ว่า $\hat{t} = (t_x, t_y, t_z)$ สามารถสร้างสมการเส้นตรงได้เป็น

$$\frac{x}{t_x} = \frac{y}{t_y} = \frac{z}{t_z}$$

เนื่องจากเราทราบตำแหน่งของตัวรับกลาง เพราะฉะนั้นเราสามารถคำนวณตำแหน่งแสงที่ไปตกกระทบบนตัวรับกลางได้ นั่นคือ

$$x = t_x \frac{y}{t_y} \tag{2.3}$$

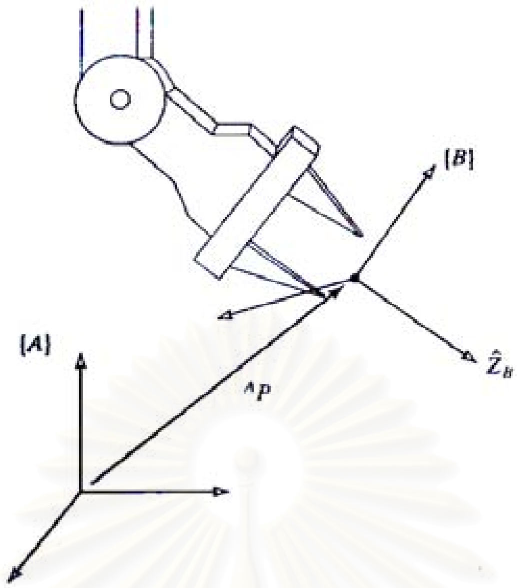
$$z = t_z \frac{y}{t_y} \tag{2.4}$$

2.2 การแปลงระบบสามมิติ

ในการกำหนดทิศทางของเฮลิโอสแตท เราจำเป็นต้องนิยามระบบพิกัดโดยจะถือว่าค่าที่เราคำนวณได้เป็นค่าที่เทียบกับพิกัดอ้างอิงหรือระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinate system) อื่นๆที่สัมพันธ์กับพิกัดอ้างอิง

2.2.1 การกำหนดทิศทางและกรอบ

บ่อยครั้งที่เราพบว่านอกจากการกำหนดตำแหน่งพิกัดของเวกเตอร์แล้วการอธิบายทิศทางยังมีความสำคัญด้วย ยกตัวอย่างเช่น ถ้าเวกเตอร์ ${}^{A}P$ ในรูปที่ 2.2 ระบุจุดตรงกึ่งกลางระหว่างปลายนิ้วของแขนหุ่นยนต์ การระบุที่ตั้งจะยังไม่เสร็จสิ้นถ้ายังไม่ได้ระบุทิศทาง เพื่อที่จะกำหนดทิศทาง เราจะติดระบบพิกัดไปที่



รูปที่ 2.2: การระบุตำแหน่งและทิศทางของวัตถุ

จุดนั้นและให้รายละเอียดของระบบพิกัดนี้สัมพันธ์กับระบบอ้างอิง ในรูปที่ 2.2 รายละเอียดของ $\{B\}$ ที่สัมพันธ์กับ $\{A\}$ เพียงพอที่จะระบุทิศทางของจุดนั้น

วิธีการหนึ่งที่อธิบายความสัมพันธ์ของ $\{B\}$ กับ $\{A\}$ นั้นจะใช้ตัวแปลงที่เรียกว่า **เมตริกซ์การหมุน** (Rotation matrix) ซึ่งจะทำหน้าที่เป็นตัวดำเนินการ (Operator) ที่แปลงค่าเวกเตอร์ที่เทียบกับกรอบ (Frame) หนึ่งสู่อีกกรอบหนึ่ง[6]

กำหนดให้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่แสดงทิศทางหลักของพิกัดกรอบ $\{B\}$ เป็น $\hat{X}_B$, $\hat{Y}_B$ และ $\hat{Z}_B$ เมื่อเขียนในเทอมของกรอบ $\{A\}$ จะได้เป็น $^A\hat{X}_B$, $^A\hat{Y}_B$ และ $^A\hat{Z}_B$ เพื่อความสะดวก เราจะจับรวมเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทั้ง 3 ตัวเป็นเมตริกซ์มิติ 3×3 และเรียกเมตริกซ์นี้ว่าเมตริกซ์การหมุนเพราะว่ารายละเอียดของเมตริกซ์การหมุนจะอธิบายความสัมพันธ์จาก $\{B\}$ ไปยัง $\{A\}$ โดยใช้สัญลักษณ์เป็น $^A_B\mathbf{R}$

$$^A_B\mathbf{R} = \begin{bmatrix} ^A\hat{X}_B & ^A\hat{Y}_B & ^A\hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

นอกเหนือจากนั้น เมื่อพิจารณา (2.5) พบว่าแถวของเมตริกซ์เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ $\{A\}$ ที่ถูกแสดงใน $\{B\}$ นั่นคือ

$$^A_B\mathbf{R} = \begin{bmatrix} ^A\hat{X}_B & ^A\hat{Y}_B & ^A\hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ^B\hat{X}_A^T \\ ^B\hat{Y}_A^T \\ ^B\hat{Z}_A^T \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ${}^{B}_{A}R$ ได้จากการสลับเปลี่ยน (Transpose) ของ (2.5) นั่นคือ

$$ {}^{B}_{A}\mathbf{R} \;=\; {}^{A}_{B}\mathbf{R}^{T} \tag{2.6}$$

และเนื่องจาก

$$ {}^{A}_{B}\mathbf{R}^{T}\,{}^{A}_{B}\mathbf{R} \;=\; \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_{B}^{T} \\ {}^{A}\hat{Y}_{B}^{T} \\ {}^{A}\hat{Z}_{B}^{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_{B} & {}^{A}\hat{Y}_{B} & {}^{A}\hat{Z}_{B} \end{bmatrix} \;=\; I_3 \tag{2.7}$$

โดย I_3 เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3×3 ดังนั้นจะได้ว่า

$$ {}^{B}_{A}\mathbf{R} \;=\; {}^{A}_{B}\mathbf{R}^{-1} \;=\; {}^{A}_{B}\mathbf{R}^{T} \tag{2.8}$$

กรอบ (Frame) จะแสดงรายละเอียดของระบบพิกัดหนึ่งสัมพันธ์กับอีกระบบพิกัดหนึ่งซึ่งกรอบจะประกอบด้วยเวกเตอร์สี่ตัวที่ให้ข้อมูลของตำแหน่งและทิศทาง ตัวอย่างเช่น กรอบ $\{B\}$ จะอธิบายโดย ${}^{A}_{B}\mathbf{R}$ และ ${}^{A}P_{BORG}$ โดย ${}^{A}P_{BORG}$ เป็นเวกเตอร์ที่บอกที่ตั้งของจุดกำเนิดของกรอบ $\{B\}$

$$ \{B\} \;=\; \{{}^{A}_{B}\mathbf{R}, {}^{A}P_{BORG}\} \tag{2.9}$$

กรอบรวมสองความคิดโดยแสดงทั้งตำแหน่งและทิศทาง ตำแหน่งจะถูกแสดงโดยกรอบที่ส่วนของเมตริกซ์การหมุนเป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์และส่วนเวกเตอร์ตำแหน่งบอกที่ตั้งของจุดที่อธิบาย เช่นกันทิศทางจะถูกแสดงโดยกรอบที่ส่วนของเวกเตอร์ตำแหน่งเป็นเวกเตอร์ศูนย์

ในการแปลงค่าเวกเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับการหมุนกรอบนั้น เราจะใช้เมตริกซ์การหมุนเป็นตัวแปลง พิจารณารูปที่ 2.3 เราทราบเวกเตอร์ที่ขึ้นกับกรอบ $\{B\}$ และเราอยากทราบค่าของมันที่ขึ้นกับกรอบ $\{A\}$ เราจะสามารถคำนวณได้โดย

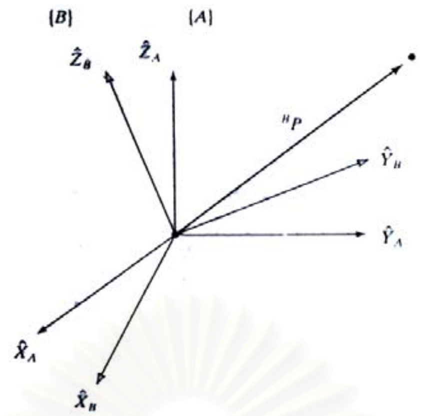
$$ {}^{A}P \;=\; {}^{A}_{B}\mathbf{R}\,{}^{B}P \tag{2.10}$$

สมการ (2.10) แสดงการแปลงเวกเตอร์ ${}^{B}P$ ซึ่งอธิบายจุดที่สัมพันธ์กรอบ $\{B\}$ ให้อยู่ในรูป ${}^{A}P$ ที่ให้รายละเอียดของจุดเดียวกันแต่แสดงความสัมพันธ์กับกรอบ $\{A\}$

2.2.2 ตัวดำเนินการการหมุน

ตัวดำเนินการการหมุนเป็นตัวดำเนินการที่ดำเนินการบนเวกเตอร์ ${}^{A}P_1$ และเปลี่ยนเวกเตอร์นั้น ไปเป็นเวคเตอรใหม่ ${}^{A}P_2$ โดยวิธีของการหมุน $\mathbf{R}$ ปกติแล้วตัวดำเนินการการหมุนจะไม่มีตัวยก (superscript) และตัวห้อย (subscript) แสดงให้เห็นเพราะไม่ได้มองเป็นความสัมพันธ์ระหว่างกรอบ 2 กรอบ

เมตริกซ์การหมุนที่หมุนเวกเตอร์ผ่านตัวดำเนินการ $\mathbf{R}$ จะเหมือนกับเมตริกซ์การหมุนที่อธิบาย



รูปที่ 2.3: ค่าของเวกเตอร์ P ในกรอบ $\{B\}$ และ $\{A\}$

กรอบที่ถูกหมุนโดย $\mathbf{R}$ สัมพันธ์กับกรอบอ้างอิง (reference frame) ตัวดำเนินการการหมุนจะมีสัญลักษณ์ที่แสดงแกนที่ต้องการจะหมุน

$$^AP_2 \quad = \quad \mathbf{R}_K(\theta)^AP_1$$

โดย $\mathbf{R}_K(\theta)$ คือตัวดำเนินการการหมุนที่แสดงการหมุนรอบทิศทางแกน K เป็นมุม θ ซึ่งมีลักษณะดังรูปที่ 2.4

ในระบบการสะท้อนแสงของเฮลิโอสแตทนี้ เราจะทำการหมุนเฮลิโอสแตทเพียงสองแกนเท่านั้นคือแกน X และแกน Z โดยจะมีค่าตัวดำเนินการการหมุนดังนี้

$$\mathbf{R}_Z(\theta) \quad = \quad \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

$$\mathbf{R}_X(\theta) \quad = \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & -s_\theta \\ 0 & s_\theta & c_\theta \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

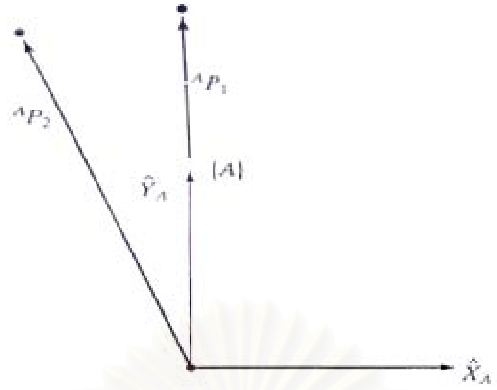
โดย $c_\theta = \cos(\theta)$ และ $s_\theta = \sin(\theta)$

2.2.3 การหมุนแบบออยเลอร์ชนิด $Z - Y - X$

การหมุนกรอบดังรูปที่ 2.5 ซึ่งเริ่มจากกรอบ $\{B\}$ ที่อยู่ตำแหน่งเดียวกับกรอบ $\{A\}$ หมุน $\{B\}$ รอบแกน $\hat{Z}_B$ เป็นมุม α ต่อไปหมุนรอบแกน $\hat{Y}_B$ เป็นมุม β และสุดท้ายหมุนรอบแกน $\hat{X}_B$ เป็นมุม γ โดยการหมุนชนิดนี้แต่ละการหมุนจะถูกแสดงรอบแกนของกรอบ $\{B\}$ ที่เคลื่อนที่มากกว่ากรอบ $\{A\}$ ที่อยู่กับที่ การหมุนประเภทนี้เรียกว่าการหมุนแบบออยเลอร์ชนิด $Z - Y - X$

การหมุนแบบ $Z - Y - X$ จะใช้สัญลักษณ์เป็น ${}^A_B\mathbf{R}_{Z'Y'X'}(\alpha, \beta, \gamma)$ จากรูปที่ 2.5 พบว่า

$$ {}^A_B\mathbf{R} \quad = \quad {}^A_{B'}\mathbf{R} \; {}^{B'}_{B''}\mathbf{R} \; {}^{B''}_{B}\mathbf{R}$$



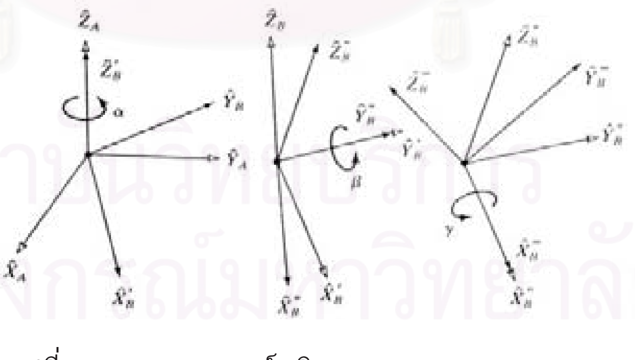
รูปที่ 2.4: เวกเตอร์ $^AP_1$ หมุนไป 30° รอบแกน $\hat{Z}$

นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
{}^A_B\mathbf{R}_{Z'Y'X'} &= \mathbf{R}_Z(\alpha)\mathbf{R}_Y(\beta)\mathbf{R}_X(\gamma) \\
&= \begin{bmatrix} c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\gamma & -s_\gamma \\ 0 & s_\gamma & c_\gamma \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

โดย $c_\alpha = \cos\alpha, s_\alpha = \sin\alpha$ และเช่นเดียวกันกับตัวอื่นๆ เมื่อทำการคูณกระจายจะได้เป็น

$$
{}^A_BR_{Z'Y'X'} = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & c_\alpha s_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma \\ s_\alpha c_\beta & s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma \\ -s_\beta & c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma \end{bmatrix} \tag{2.14}
$$



รูปที่ 2.5: แบบออยเลอร์ชนิด $Z - Y - X$

2.3 การปรับตำแหน่งของเฮลิโอสแตท

การควบคุมทิศทางของเฮลิโอสแตทจะเป็นการหมุนแบบออยเลอร์ของเวกเตอร์ตั้งฉากของกระจกแบบ $Z - X$ โดยเริ่มต้นถือว่าค่าเริ่มต้นตำแหน่งเฮลิโอสแตทมีการคลาดเคลื่อนเนื่องจากสิ่งรบกวนภาย

นอก พิกัดของเวกเตอร์ตั้งฉากที่วัดได้จะอยู่ในกรอบอ้างอิง $\{R\}$ ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเฮลิโอสแตท เราจะต้องแปลงพิกัดเวกเตอร์ตั้งฉากนี้เข้าสู่กรอบของเฮลิโอสแตท $\{H\}$ เสียก่อนแล้วจึงทำการหมุนปรับตำแหน่ง แล้วจึงแปลงกลับเข้าสู่ $\{R\}$ อีกทีจึงจะได้พิกัดใหม่

2.3.1 พื้นที่ใช้ในการติดตั้งเฮลิโอสแตท

ในการติดตั้งตัวเฮลิโอสแตท พื้นที่ทำการติดตั้งอาจไม่ใช่พื้นเรียบนั่นคือเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับพื้นมีทิศทางต่างจากแกน $\hat{Z}_R$ ของกรอบอ้างอิง $\{R\}$ ดังนั้นก่อนที่เราแปลงพิกัดเวกเตอร์ตั้งฉากของเฮลิโอแสตทจากกรอบอ้างอิง $\{R\}$ เข้าสู่ $\{H\}$ เราจำเป็นต้องแปลงค่าเวกเตอร์ตั้งฉากของเฮลิโอแสตทเข้าสู่กรอบของพื้น $\{G\}$ เสียก่อน นั่นคือ

$$ {}^{G}\hat{n}_1 = {}^{G}_{R}\mathbf{R}\,{}^{R}\hat{n}_1 \tag{2.15} $$

กรอบของพื้นสามารถอธิบายในรูปการหมุนของกรอบอ้างอิงโลกนั่นคือให้ทิศทางของเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับพื้น $\hat{Z}_G$ โดยค่า $\hat{Z}_G$ บน $\{R\}$ (กำหนดให้เป็น ${}^{R}\hat{Z}_G$) จะมีค่าเท่ากับเวกเตอร์ตั้งฉากบนกรอบอ้างอิงโลก $\hat{Z}_R$ ทำการหมุนแบบออยเลอร์ในแนว $\hat{Z}_R$ และแนว $\hat{X}_R$ ซึ่งจะครอบคลุมตำแหน่งพื้นทั้งหมด

$$ {}^{R}\hat{Z}_G = {}^{R}_{G}\mathbf{R}\,\hat{Z}_R $$

$$ {}^{R}_{G}\mathbf{R} = \mathbf{R}_Z(\alpha_0)\mathbf{R}_X(\gamma_0) \tag{2.16} $$

$$ = \begin{bmatrix} c_{\alpha_0} & -s_{\alpha_0} & 0 \\ s_{\alpha_0} & c_{\alpha_0} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\gamma_0} & -s_{\gamma_0} \\ 0 & s_{\gamma_0} & c_{\gamma_0} \end{bmatrix} \tag{2.17} $$

$$ = \begin{bmatrix} c_{\alpha_0} & -s_{\alpha_0}c_{\gamma_0} & s_{\alpha_0}s_{\gamma_0} \\ s_{\alpha_0} & c_{\alpha_0}c_{\gamma_0} & -c_{\alpha_0}s_{\gamma_0} \\ 0 & s_{\gamma_0} & c_{\gamma_0} \end{bmatrix} \tag{2.18} $$

โดย $-\pi < \alpha_0 < \pi$ และ $0 < \gamma_0 < \frac{\pi}{2}$

2.3.2 มุมของเฮลิโอสแตทเมื่อเทียบกับกรอบพื้น

หลังจากที่ทำการแปลงเวกเตอร์ตั้งฉากเข้าสู่กรอบของพื้น $\{G\}$ นั่นคือ ${}^{G}\hat{n}_R$ แล้ว เราจะทำการแปลงเข้าสู่กรอบของเฮลิโอสแตท $\{H\}$ นั่นคือ

$$ {}^{H}\hat{n}_1 = {}^{H}_{G}\mathbf{R}\,{}^{G}\hat{n}_1 \tag{2.19} $$

จากระบบทางกายภาพของเฮลิโอสแตทพบว่า เวกเตอร์ตั้งฉากของกระจกจะตั้งฉากกับแกนหมุนทิศทางอิลิเวชั่นเสมอ กำหนดให้แกนหมุนอิลิเวชั่นของเฮลิโอสแตทเป็นแกน $\hat{X}_H$ จะได้ว่ากรอบของเฮลิโอสแตทคือกรอบพื้นที่หมุนไปในแนวแกน $\hat{Z}_G$ เป็นมุม θ_H

$$ \theta_H = \theta_G - \frac{\pi}{2} $$

โดย θ_G เป็นมุมของภาพฉายเวกเตอร์ตั้งฉากในระนาบ $X-Y$ ทำกับแกน X บนกรอบพื้น $\{G\}$ กำหนดให้ ${}^G\hat{n}_1 = (\tilde{n}_x, \tilde{n}_y, \tilde{n}_z)$ จะได้ว่า

$$\theta_G = \tan^{-1}\left(\frac{\tilde{n}_y}{\tilde{n}_x}\right)$$

$$\begin{aligned}
{}^G_H\mathbf{R} &= \mathbf{R}_Z(\theta_H) \\
&= \begin{bmatrix} c_{\theta_H} & -s_{\theta_H} & 0 \\ s_{\theta_H} & c_{\theta_H} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} s_{\theta_G} & c_{\theta_G} & 0 \\ -c_{\theta_G} & s_{\theta_G} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{\tilde{n}_y}{\sqrt{\tilde{n}_x^2+\tilde{n}_y^2}} & \dfrac{\tilde{n}_x}{\sqrt{\tilde{n}_x^2+\tilde{n}_y^2}} & 0 \\ \dfrac{-\tilde{n}_x}{\sqrt{\tilde{n}_x^2+\tilde{n}_y^2}} & \dfrac{\tilde{n}_y}{\sqrt{\tilde{n}_x^2+\tilde{n}_y^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

จาก (2.20) พบว่ากรอบของเฮลิโอสแตท $\{H\}$ จะขึ้นกับกรอบพื้น $\{G\}$ นั่นคือ ${}^G_H\mathbf{R}$ จะขึ้นกับค่า α_0 และ γ_0 ด้วย

หลังจากที่แปลงพิกัดให้อยู่บนกรอบเฮลิโอแสตทแล้ว เราจะทำการใส่สัญญาณควบคุมนั่นคือการทำการหมุนแบบออยเลอร์ชนิด $Z-X$ โดยกำหนดให้สัญญาณควบคุมในแนวอะซิมุธและอิลิเวชั่นมีค่า α และ γ ตามลำดับ นั่นคือ

$${}^H\hat{n}_2 = \mathbf{R}_Z(\alpha)\,\mathbf{R}_X(\gamma)\,{}^H\hat{n}_1 \tag{2.21}$$

สุดท้าย ทำการแปลงเวกเตอร์ตั้งฉากที่ทำการหมุนเรียบร้อยแล้วกลับเข้าสู่กรอบอ้างอิง $\{R\}$ จะได้

$${}^R\hat{n}_2 = {}^R_G\mathbf{R}\,{}^G_H\mathbf{R}\,{}^H\hat{n}_2 \tag{2.22}$$

2.4 สมการสถานะ (State Equation)

จากทั้งหมดเบื้องต้นที่กล่าวมา เราจะได้ตำแหน่งภาพบนตัวรับกลางได้จากสมการเหล่านี้

$$\begin{aligned}
\theta_H[k+1] &= \theta_H[k] + \alpha[k] && (2.23)\\
\hat{n}[k+1] &= {}^R_G\mathbf{R}\,{}^G_H\mathbf{R}[k]\,\mathbf{R}_Z(\alpha[k])\,\mathbf{R}_X(\gamma[k])\,{}^H_G\mathbf{R}[k]\,{}^G_R\mathbf{R}\,\hat{n}[k] && (2.24)\\
\hat{t}[k] &= 2\,\langle \hat{s}, \hat{n}[k]\rangle\,\hat{n}[k] - \hat{s} && (2.25)\\
X[k] &= \frac{t_x[k]}{t_y[k]}Y && (2.26)\\
Z[k] &= \frac{t_z[k]}{t_y[k]}Y && (2.27)
\end{aligned}$$

โดย α และ γ เป็นสัญญาณควบคุมในแนวอะซิมุธและอิลิเวชั่นตามลำดับ นำสมการทั้ง 5 มาสร้างปริภูมิสถานะได้เป็น

$$x_1[k+1] = x_1[k] + u_1[k]$$

$$\begin{bmatrix} x_2[k+1] \\ x_3[k+1] \\ x_4[k+1] \end{bmatrix} = {}^R_G\mathbf{R} \begin{bmatrix} c_{x_1[k]} & -s_{x_1[k]} & 0 \\ s_{x_1[k]} & c_{x_1[k]} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{u_1[k]} & -s_{u_1[k]} & 0 \\ s_{u_1[k]} & c_{u_1[k]} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{u_2[k]} & -s_{u_2[k]} \\ 0 & s_{u_2[k]} & c_{u_2[k]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{x_1[k]} & s_{x_1[k]} & 0 \\ -s_{x_1[k]} & c_{x_1[k]} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^G_R\mathbf{R} \begin{bmatrix} x_2[k] \\ x_3[k] \\ x_4[k] \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$y[k] = \begin{bmatrix} \dfrac{s_x(x_2^2[k]-1) + s_y x_2[k]x_3[k] + s_z x_2[k]x_4[k]}{s_x x_2[k]x_3[k] + s_y(x_3^2[k]-1) + s_z x_3[k]x_4[k]}Y \\[2ex] \dfrac{s_x x_2[k]x_4[k] + s_y x_3[k]x_4[k] + s_z(x_4^2[k]-1)}{s_x x_2[k]x_3[k] + s_y(x_3^2[k]-1) + s_z x_3[k]x_4[k]}Y \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

โดย $\hat{s} = (s_x, s_y, s_z)$, $x_1 = \theta_H$, $\begin{bmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T = \hat{n}$, $y = \begin{bmatrix} X & Z \end{bmatrix}^T$, $u_1 = \alpha$, $u_2 = \gamma$

และ ${}^R_G\mathbf{R} = {}^G_R\mathbf{R}^{-1} = {}^G_R\mathbf{R}^T$

2.5 สรุป

เนื่อหาในบทนี้เริ่มจากการแสดงสมการการสะท้อนแสงของดวงอาทิตย์โดยใช้เฮลิโอแตทซึ่งจะพิจารณาโดยใช้เวกเตอร์แทนตำแหน่งของดวงอาทิตย์ ตัวรับกลาง และตัวเฮลิโอสแตท ต่อมาจะนิยามเมทริกซ์การหมุน ตัวดำเนินการการหมุนและการหมุนแบบออยเลอร์ชนิด $Z-Y-Z$ หลังจากนั้นจะแสดงขั้นตอนตำแหน่งเวกเตอร์เมื่อทำการเปลี่ยนทิศทางของเฮลิโอสแตทอย่างละเอียด และสุดท้ายจะรวบรวมสมการทั้งหมดมาสร้างเป็นปริภูมิสถานะ เพื่อที่จะนำไปใช้ในการประมาณพื้นที่ทำการติดตั้งเฮลิโอสแตทและออกแบบตัวควบคุมต่อไป

บทที่ 3

การหาค่าความชันของพื้นเอียง

เมื่อเฮลิโอแสตทเข้าสู่วิธีการติดตามดวงอาทิตย์ ถ้าพื้นที่ติดตั้งเฮลิโอสแตทมีความชันโดยที่เราไม่ทราบค่า เราจะไม่สามารถคำนวณมุมที่จะใช้ในการควบคุมเฮลิโอสแตทให้หมุนไปยังพิกัดที่ต้องการได้ เพราะฉะนั้นเราจำเป็นที่ต้องทราบค่าความชันของพื้นที่ทำการติดตั้งเฮลิโอสแตท

ในการคำนวณหากรอบของพื้นที่ติดตั้งเฮลิโอสแตท เราจะใช้ข้อมูลที่ได้มาจากการเทียบมาตรฐานมาคำนวณ เนื่องจากเรามีข้อมูลของ $y[k+1]$ และ $y[k]$ นำค่าที่ได้นั้นมาทำการแปลงเป็นเวกเตอร์ตั้งฉากดังนี้

$$\hat{t} \quad = \quad \frac{t}{||t||} \tag{3.1}$$

โดย $t = \begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}^T$ แล้วนำ $\hat{t}$ ไปแทนในสมการ (2.1) ก็จะได้ค่า $\hat{n}[k+1]$ และ $\hat{n}[k]$ และเนื่องจากเรามีข้อมูลของ $u_1[k] = \alpha[k]$ และ $u_2[k] = \gamma[k]$ นำข้อมูลทั้งหมดแทนลงใน (2.20) และ (2.1) โดยให้ α_0 และ γ_0 เป็นตัวแปร จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\hat{n}[k+1] \quad = \quad & \begin{bmatrix} c_{\alpha_0} & -s_{\alpha_0}c_{\gamma_0} & s_{\alpha_0}s_{\gamma_0} \\ s_{\alpha_0} & c_{\alpha_0}c_{\gamma_0} & -c_{\alpha_0}s_{\gamma_0} \\ 0 & s_{\gamma_0} & c_{\gamma_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\tilde{n}_y[k]}{\sqrt{\tilde{n}_x^2[k]+\tilde{n}_y^2[k]}} & \frac{\tilde{n}_x[k]}{\sqrt{\tilde{n}_x^2[k]+\tilde{n}_y^2[k]}} & 0 \\ \frac{-\tilde{n}_x[k]}{\sqrt{\tilde{n}_x^2[k]+\tilde{n}_y^2[k]}} & \frac{\tilde{n}_y[k]}{\sqrt{\tilde{n}_x^2[k]+\tilde{n}_y^2[k]}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{R}_Z(\alpha[k])\mathbf{R}_X(\gamma[k]) \times \\
& \begin{bmatrix} \frac{\tilde{n}_y[k]}{\sqrt{\tilde{n}_x^2[k]+\tilde{n}_y^2[k]}} & \frac{-\tilde{n}_x[k]}{\sqrt{\tilde{n}_x^2[k]+\tilde{n}_y^2[k]}} & 0 \\ \frac{\tilde{n}_x[k]}{\sqrt{\tilde{n}_x^2[k]+\tilde{n}_y^2[k]}} & \frac{\tilde{n}_y[k]}{\sqrt{\tilde{n}_x^2[k]+\tilde{n}_y^2[k]}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{\alpha_0} & s_{\alpha_0} & 0 \\ -s_{\alpha_0}c_{\gamma_0} & c_{\alpha_0}c_{\gamma_0} & s_{\gamma_0} \\ s_{\alpha_0}s_{\gamma_0} & -c_{\alpha_0}s_{\gamma_0} & c_{\gamma_0} \end{bmatrix} \hat{n}[k]
\end{aligned} \tag{3.2}$$

โดย $\begin{bmatrix} \tilde{n}_x[k] \\ \tilde{n}_y[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\alpha_0} & s_{\alpha_0} & 0 \\ -s_{\alpha_0}c_{\gamma_0} & c_{\alpha_0}c_{\gamma_0} & s_{\gamma_0} \end{bmatrix} \hat{n}[k] = \begin{bmatrix} c_{\alpha_0}n_x[k] + s_{\alpha_0}n_y[k] \\ -s_{\alpha_0}c_{\gamma_0}n_x[k] + c_{\alpha_0}c_{\gamma_0}n_y[k] + s_{\gamma_0}n_z[k] \end{bmatrix}$

จะพบว่าสมการที่ (3.2) เป็นสมการไม่เชิงเส้นที่ซับซ้อน การที่จะแก้สมการเพื่อหารากโดยตรงจะยุ่งยากมาก ดังนั้นเราจะใช้วิธีการแก้สมการแบบวิธีเชิงตัวเลข (numerical method) ดังนี้

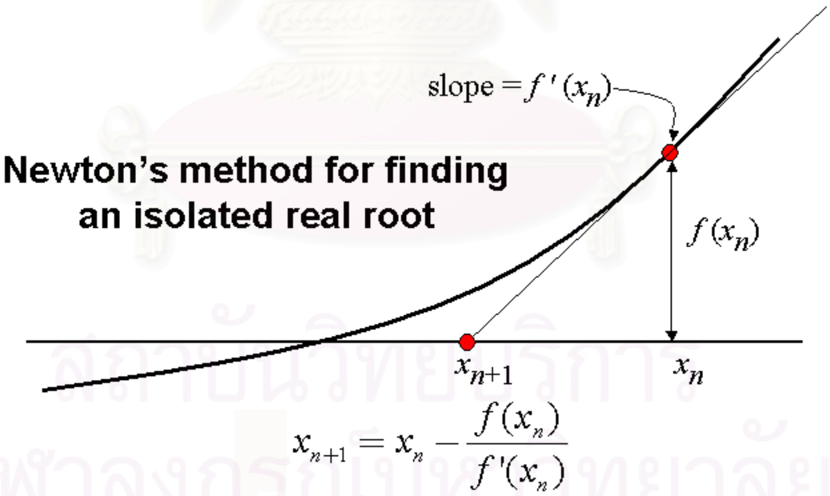
3.1 วิธีนิวตัน (Newton's Methods)

วิธีนิวตันเป็นวิธีที่ใช้หารากที่ทำให้ฟังก์ชั่นมีค่าเป็น 0 โดยจะนิยมเรียกอีกชื่อหนึ่งว่าการวนซ้ำแบบนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson iteration)[8] โดยปกติ วิธีนิวตันจะเร็วกว่าวิธีอื่นๆเช่น วิธีแบ่งครึ่ง (bisection method) หรือ วิธีซีแคนท์ (secant method) เพราะว่าการลู่เข้าของมันจะเป็นแบบกำลัง 2 โดยที่มาของวิธีนี้เกิดจากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์

$$\begin{aligned} 0 &= f(r) \\ &= f(x+h) \\ &= f(x) + hf'(x) + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

โดย $h = r - x$ ถ้า h เล็กเพียงพอ (นั่นคือ x อยู่ใกล้กับ r) จะสามารถละเลยพจน์ $\mathcal{O}(h^2)$ ได้ นั่นคือ $h = -f(x)/f'(x)$ ถ้า x เป็นตัวประมาณของ r จะได้ว่า $x - f(x)/f'(x)$ ควรจะเป็นตัวประมาณของ r ที่ดีกว่า วิธีนิวตันจะเริ่มด้วยค่าประมาณของ r นั่นคือ x_0 และตัวถัดมาจะกำหนดเป็นแบบอุปนัยดังนี้

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n \geq 0) \tag{3.3}$$



รูปที่ 3.1: วิธีนิวตัน

ในระบบของเราเป็นสมการไม่เชิงเส้น 2 ตัวแปร วิธีนิวตันก็จะประยุกต์จากที่ใช้สำหรับสมการเดี่ยวได้ดังนี้

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2) &= 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

ทำการกระจายเทย์เลอร์ได้เป็น

$$
\begin{aligned}
0 &= f_1(x_1+h_1, x_2+h_2) &\approx& \ f_1(x_1,x_2) + h_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\
0 &= f_2(x_1+h_1, x_2+h_2) &\approx& \ f_2(x_1,x_2) + h_1\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial f_2}{\partial x_2}
\end{aligned}
$$

กำหนดให้เมตริกซ์จาโคเบียน (Jacobian matrix) เป็น

$$
J = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 \end{bmatrix} \tag{3.5}
$$

ดังนั้นจะได้วิธีนิวตันสำหรับสมการไม่เชิงเส้นสองสมการสองตัวแปรคือ

$$
\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} - J^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \\ f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \end{bmatrix} \tag{3.6}
$$

ข้อดีของวิธีนิวตันคือการลู่เข้าหาคำตอบจะเร็วมากเนื่องจากมีความเร็วในการลู่เข้าแบบกำลัง 2 แต่ข้อเสียคือไม่รับประกันว่าจะลู่เข้าคำตอบหรือไม่โดยขึ้นอยู่กับค่าเริ่มต้น แต่ในการทดลองกับระบบเฮลิโอสแตทนี้จะไม่มีปัญหาเนื่องจากภายในขอบเขตที่กำหนด ระบบจะมีคำตอบเพียงคำตอบเดียวและเราสามารถเลือกค่าเริ่มต้นได้คร่าวๆโดยการประมาณทางสายตา ถึงแม้ว่าจุดเริ่มต้นที่เลือกอาจทำให้คำตอบลู่เข้าคำตอบอื่น (ซึ่งเป็นไปได้น้อยมาก) คำตอบนั้นก็ยังเป็นคำตอบที่ถูกต้องอยู่ดีเนื่องจากคำตอบที่ได้เป็นมุมของคำตอบจริงที่เปลี่ยนเฟสไป $\pm 360°$

พิจารณา (3.2) พบว่าเป็นระบบไม่เชิงเส้น 3 สมการ 2 ตัวแปร ทำการย้ายข้างสมการให้เท่ากับศูนย์ได้เป็น

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_1(\alpha_0,\gamma_0) \\ f_2(\alpha_0,\gamma_0) \\ f_3(\alpha_0,\gamma_0) \end{bmatrix} \\
&= {}^{R}_{G}\mathbf{R}\ {}^{G}_{H}\mathbf{R}[k]\ \mathbf{R}_Z(\alpha[k])\ \mathbf{R}_X(\gamma[k])\ {}^{H}_{G}\mathbf{R}[k]\ {}^{G}_{R}\mathbf{R}\ \hat{n}[k] - \hat{n}[k+1]
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

เราจะประยุกต์สมการให้จำนวนสมการเหลือเท่ากับจำนวนตัวแปรแต่สมการใหม่ต้องสอดคล้องกับ (3.7) จะได้

$$
f_n(\alpha_0,\gamma_0) = \begin{bmatrix} f_1^2(\alpha_0,\gamma_0) + f_2^2(\alpha_0,\gamma_0) \\ f_1^2(\alpha_0,\gamma_0) + f_3^2(\alpha_0,\gamma_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.8}
$$

และได้เมตริกซ์จาโคเบียนใหม่เป็น

$$J_n = 2\begin{bmatrix} f_1\frac{\partial f_1}{\partial \alpha_0} + f_2\frac{\partial f_2}{\partial \alpha_0} & f_1\frac{\partial f_1}{\partial \gamma_0} + f_2\frac{\partial f_2}{\partial \gamma_0} \\ f_1\frac{\partial f_1}{\partial \alpha_0} + f_3\frac{\partial f_3}{\partial \alpha_0} & f_1\frac{\partial f_1}{\partial \gamma_0} + f_3\frac{\partial f_3}{\partial \gamma_0} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

รากของสมการจะมีคำตอบเดียวถ้า $-\pi < \alpha_0 < \pi$ และ $0 < \gamma_0 < \frac{\pi}{2}$

ในการประยุกต์ใช้กับเฮลิโสแตทจริงจะพบว่าเราสามารถกำหนดค่าเริ่มต้น $\alpha_0^{(0)}$ และ $\gamma_0^{(0)}$ ได้โดยคาดคะเนคร่าวๆจากสายตาว่า $\{G\}$ จะอยู่ในลักษณะใด

3.1.1 ผลการทดลองวิธีนิวตัน

ในการทดลอง จะกำหนดกรอบของพื้นที่ติดตั้งเฮลิโอสแตท 2 กรอบ คือ $\{G_1\}$ เกิดจากการหมุน $\{R\}$ รอบแกน $\hat{Z}_R$ เป็นมุม -10° และหมุนรอบแกน $\hat{X}_R$ เป็นมุม 30° ซึ่งจะได้ผลตามตารางที่ 3.1 ส่วน $\{G_2\}$ เกิดจากการหมุน $\{R\}$ รอบแกน $\hat{Z}_R$ เป็นมุม 120° และหมุนรอบแกน $\hat{X}_R$ เป็นมุม 15° ซึ่งจะได้ผลตามตารางที่ 3.2 โดยกำหนดเกณฑ์การหยุดไว้ที่ $\|f_n\| \le 10^{-10}$

ตารางที่ 3.1: ผลการทดลองหาค่ากรอบ $\{G_1\}$ โดยวิธีนิวตัน

รอบการวนซ้ำ	α_0	γ_0	$\|f_n\|$
0	0	15	0.000434
1	−16.575043	16.805035	0.000182
2	−11.810686	22.174054	0.000057
3	−10.835838	25.586429	0.000016
4	−10.414612	27.613700	0.000004
5	−10.208346	28.750066	0.000001
6	−10.104715	29.358701	0.000000
7	−10.052534	29.674937	0.000000
8	−10.026317	29.836319	0.000000
9	−10.013171	29.917866	0.000000
10	−10.006589	29.958859	0.000000
11	−10.003295	29.979411	0.000000
12	−10.0016	29.9897	0.000000

3.2 วิธี Steepest Descent

ที่ผ่านมาเราถือว่าระบบไม่มีสัญญาณรบกวนนั่น แต่ถ้าระบบมีสัญญาณรบกวน เช่น สัญญาณรบกวนการวัด (measurement noise) ซึ่งจะทำให้ค่าพิกัดเวคเตอร์ตั้งฉากหลังจากการหมุนเฮลิโอสแตทขัดกับ (3.7) นั่นคือ

$${}^R_G\mathbf{R}\ {}^G_H\mathbf{R}[k]\ \mathbf{R}_Z(\alpha[k])\ \mathbf{R}_X(\gamma[k])\ {}^H_G\mathbf{R}[k]\ {}^G_R\mathbf{R}\ \hat{n}[k] - \check{n}[k+1] \quad = \quad v$$

ตารางที่ 3.2: ผลการทดลองหาค่ากรอบ $\{G_2\}$ โดยวิธีนิวตัน

รอบการวนซ้ำ	α_0	γ_0	$\|f_n\|$
0	180	30	0.0018
1	169.020375	19.485346	0.000313
2	152.635075	14.322786	0.000060
3	136.683150	13.243543	0.000019
4	127.609293	13.799566	0.000006
5	123.552879	14.325722	0.000002
6	121.711423	14.645754	0.000000
7	120.839555	14.818777	0.000000
8	120.415768	14.908384	0.000000
9	120.206886	14.953944	0.000000
10	120.103194	14.976910	0.000000
11	120.051535	14.988440	0.000000
12	120.025752	14.994216	0.000000
13	120.0129	14.9971	0.000000

โดย $\breve{n}$ คือเวคเตอร์ที่เกิดจากการนำค่าตำแหน่งบนตัวรับกลางที่มีค่าสัญญาณรบกวนการวัดรวมอยู่ด้วยมาแทนลงใน (2.1) และ v เป็นความคลาดเคลื่อนระหว่าง $\hat{n}$ กับ $\breve{n}$ จากกรณีนี้เราไม่สามารถคำนวณ α_0 และ γ_0 โดยวิธีนิวตันตาม (3.8) ได้ ถ้าเราประยุกต์ (3.7) ให้เหลือเพียงสมการเดียว โดยสมการนั้นมีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ เราจะใช้การหาค่าที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าต่ำสุดเพื่อให้ได้คำตอบของ α_0 และ γ_0 โดยจะใช้วิธี steepest descent [9] ซึ่งมีหลักการดังนี้

กำหนดให้ $\Delta x \in \mathbb{R}^n$ เป็นทิศทางลดลงสำหรับ f ที่ $\hat{x}$ ถ้า

$$\exists \bar{\lambda} \in \mathbb{R}_{++} \text{ โดยที่ } (0 < \lambda \leq \bar{\lambda}) \Rightarrow (f(\hat{x} + \lambda \Delta x) < f(\hat{x}))$$

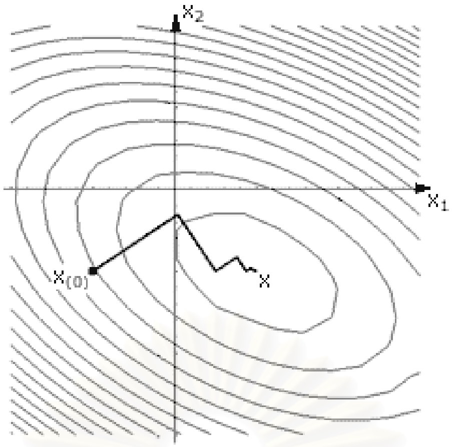
โดยที่ Δx เป็นทิศทางที่ลดลงถึงแม้ว่า $f(\hat{x} + \Delta x) > f(\hat{x})$ นั่นคือมีข้อกำหนดว่า $f(\hat{x} + \Delta x) < f(\hat{x})$ สำหรับทุกค่า λ ที่เล็กเพียงพอ และทิศทาง $\Delta x = -\nabla f(x)$ จะเป็นทิศทางที่ลดลงมากสุด (steepest descent direction) เพราะว่าการเคลื่อนที่ในทิศทางนี้จะทำให้ f ลดลงด้วยอัตรามากสุดรอบ ๆ x

ในการใช้วิธี steepest descent เราจะปรับค่า x ในแต่ละรอบสัมพันธ์กับ

$$x^{(v+1)} = x^{(v)} - \lambda^{(v)} \nabla f(x^{(v)}) \tag{3.10}$$

โดยเราต้องกำหนดค่า step-size λ ที่ทำให้ f ลดลง

ข้อดีของวิธีนี้คือ ถ้า $\nabla f(x^{(v)}) \neq 0$ เราจะสามารถหาขนาด $\lambda^{(v)}$ ที่ทำให้ $f(x^{(v)})$ ลดลงได้เสมอโดยที่ตำแหน่ง $\nabla f(x^{(v)}) = 0$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ $x^{(v)}$ จะเป็นจุดต่ำสุดของ f ส่วนข้อเสียของวิธีนี้คือนอกเหนือจากความยากในการหา step-size แล้ว วิธีนี้อาจลู่เข้าคำตอบช้ามากถ้ารูปร่างคอนทัวร์ (contour) ของฟังก์ชันเพี้ยนมาก ๆ



รูปที่ 3.2: วิธี steepest descent

ในการใช้กับการทดลอง เราจะประยุกต์ (3.7) ใหม่ให้อยู่ในรูป

$$f_n(\alpha_0,\gamma_0) \;=\; f_1^2(\alpha_0,\gamma_0)+f_2^2(\alpha_0,\gamma_0)+f_3^2(\alpha_0,\gamma_0) \tag{3.11}$$

$$\nabla f_n(\alpha_0,\gamma_0) \;=\; 2\begin{bmatrix} f_1\dfrac{\partial f_1}{\partial\alpha_0}+f_2\dfrac{\partial f_2}{\partial\alpha_0}+f_3\dfrac{\partial f_3}{\partial\alpha_0} \\ f_1\dfrac{\partial f_1}{\partial\gamma_0}+f_2\dfrac{\partial f_2}{\partial\gamma_0}+f_3\dfrac{\partial f_3}{\partial\gamma_0} \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

ในส่วนการหาค่า step-size เราจะใช้วิธี inexact line search เนื่องจากวิธี exact line search จะซับซ้อนยุ่งยากและเสียเวลาในการคำควณค่า step-size ในแต่ละรอบค่อนข้างมาก โดยวิธี inexact line search ที่จะนำเสนอนี้เป็นวิธีที่ง่ายมากและค่อนข้างมีประสิทธิภาพซึ่งมีชื่อว่า backtracking line search[11] วิธีนี้จะขึ้นกับค่าคงที่สองค่านั่นคือ μ และ β โดยที่ $0<\mu<0.5$, $0<\beta<1$ วิธี backtracking line serach จะมีลำดับขั้นตอนดังนี้

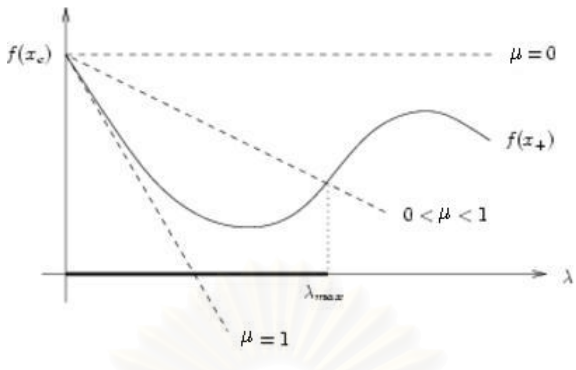
กำหนด ค่าเริ่มต้น $x^{(0)}$

ทำซ้ำตามขั้นตอน

1. คำนวณทิศทางของ Δx โดยที่ $\Delta x = -\nabla f_n$
2. กำหนดค่า $\lambda = 1$, $\mu \in (0, 0.05)$, $\beta \in (0,1)$ โดยมีเงื่อนไขว่าλ จะมีค่าลดลงเรื่อยๆ โดย $\lambda := \beta\lambda$ ถ้า $f_n(x+\lambda\Delta x) > f_n(x) + \mu\lambda\nabla f_n(x)^T\Delta x$
3. ปรับปรุงค่า $x := x + \lambda\Delta x$

จนกระทั่ง ถึงเกณฑ์การหยุดที่พอใจ

โดยเงื่อนไขที่ใช้เป็นตัวกำหนดค่า λ นั่นคือ $f_n(x+\lambda\Delta x) \le f_n(x) + \mu\lambda\nabla f(x)^T\Delta x$ นั้นมีชื่อว่าเงื่อนไข Armijo (Aemijo condition)[10] ซึ่งจะทำให้ค่า λ ที่คำนวณได้ทำให้ $f_n^{(n+1)}$ มีค่าน้อยกว่า $f_n^{(n)}$ เพียงพอ (ค่าของฟังก์ชันมีการลดลงที่ไม่น้อยเกินไป)



รูปที่ 3.3: Armijo condition

ในเรื่องของเวลา เนื่องจากในการหาค่ากรอบพื้นไม่จำเป็นต้องแข่งกับเวลา เนื่องจากไม่มีตำแหน่งของดวงอาทิตย์มาเกี่ยวข้องทำให้ตัดปัญหาเรื่องที่ต้องใช้เวลามากในการทำวิธี steepest descent แต่เราก็จะพยายามใช้ค่าเริ่มต้นที่ใกล้เคียงคำตอบให้มากที่สุด (เหมือนกับตอนเลือกค่าเริ่มต้นในวิธีนิวตัน)

3.2.1 ผลการทดลองวิธี backtracking line search แบบไม่พิจารณาสัญญาณรบกวน

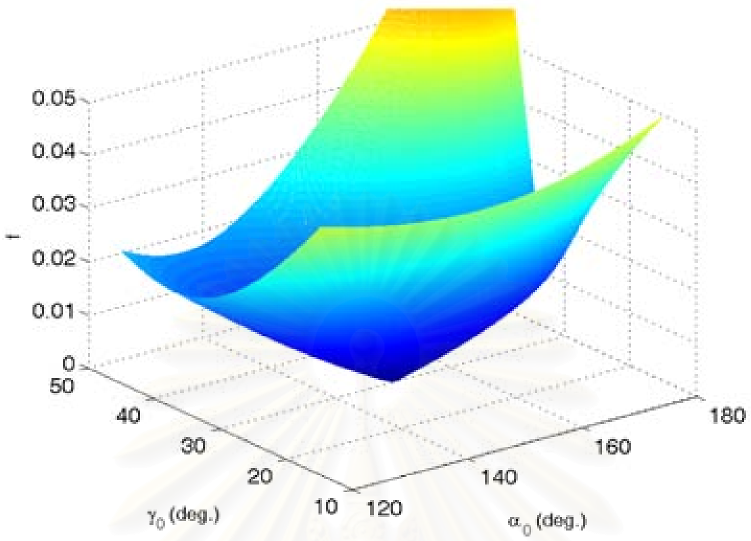
ในการทดลอง จะกำหนดกรอบของพื้นที่ติดตั้งเฮลิโอสแตท 3 กรอบ นั่นคือ $\{G_1\}$ เกิดจากการหมุน $\{R\}$ รอบแกน $\hat{Z}_R$ เป็นมุม $150°$ และหมุนรอบแกน $\hat{X}_R$ เป็นมุม $30°$ ส่วน $\{G_2\}$ เกิดจากการหมุน $\{R\}$ รอบแกน $\hat{Z}_R$ เป็นมุม $-30°$ และหมุนรอบแกน $\hat{X}_R$ เป็นมุม $12°$ และ $\{G_3\}$ เกิดจากการหมุน $\{R\}$ รอบแกน $\hat{Z}_R$ เป็นมุม $30°$ และหมุนรอบแกน $\hat{X}_R$ เป็นมุม $20°$ ซึ่งจะแสดงเป็นกราฟของค่าฟังก์ชัน f_n ในรูปที่ 3.4, 3.5 และ 3.6 ตามลำดับ

ในส่วนการหาค่ากรอบพื้นจะกำหนดค่าเริ่มต้นของ $\{G_1\}$ เป็น $\alpha_0^{(0)} = 135°$, $\gamma_0^{(0)} = 15°$ $\{G_2\}$ เป็น $\alpha_0^{(0)} = -45°$, $\gamma_0^{(0)} = 15°$ และ $\{G_3\}$ เป็น $\alpha_0^{(0)} = 45°$, $\gamma_0^{(0)} = 15°$ ซึ่งจะได้ผลการทดลองตามตารางที่ 3.3, 3.4 และ 3.5 ตามลำดับ โดยกำหนดเกณฑ์การหยุดไว้ที่ $\|\nabla f_n\| \leq 10^{-7}$

3.2.2 วิธีกำลังสองน้อยสุด

หลังจากคำนวณค่า α_0 และ γ_0 ได้แล้ว ค่าที่ได้อาจไม่ตรงตามคำตอบที่ถูกต้องเนื่องจากข้อมูลที่เรานำมาทำการคำนวณนั้นมีผลของสัญญาณรบกวนการวัด ดังนั้นเราจึงควรคำนวณกับข้อมูลหลายๆชุดแล้วนำค่าที่ได้มาทำการหาค่าประมาณของคำตอบเหล่านั้นโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยสุด (least-square method)[12] นั่นคือในการคำนวณหาค่า α_0 และ γ_0 แต่ละครั้งจะสามารถเขียนอยู่ในรูป

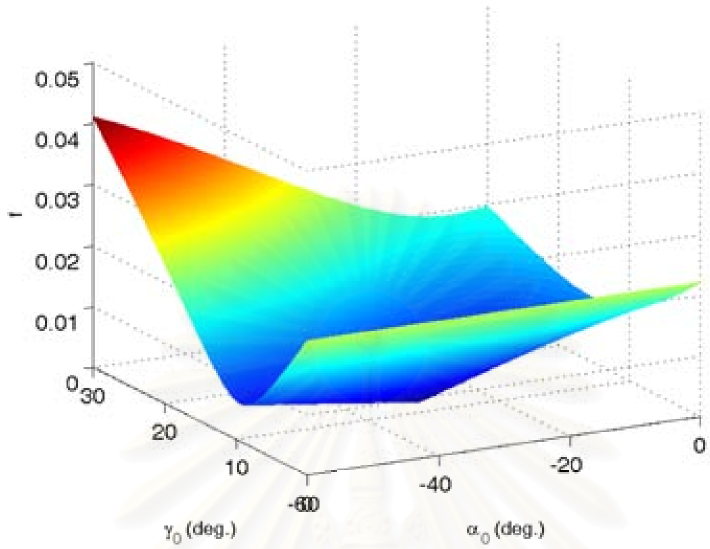
$$y[k] = \Theta^T \varphi[k] + \varepsilon[k] \tag{3.13}$$



รูปที่ 3.4: รูปสามมิติของสมการ f_n ที่กรอบ $\{G_1\}$

ตารางที่ 3.3: ผลการทดลองหาค่ากรอบ $\{G_1\}$ โดยวิธี steepest descent แบบ backtracking line search

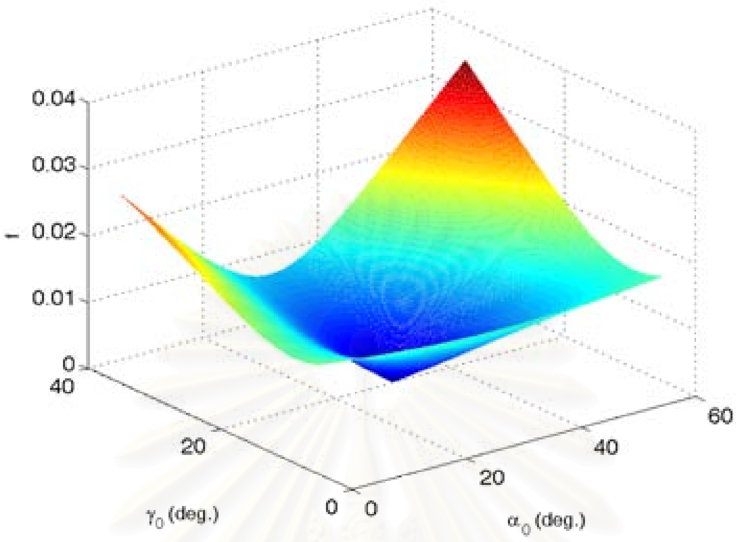
รอบการวนซ้ำ	α_0	γ_0	$\|f_n\|$
1	135.993794	27.645290	0.000223
2	137.417857	31.167548	0.000075
3	138.389649	32.220139	0.000052
4	139.110686	32.493942	0.000044
5	139.706438	32.491592	0.000039
6	140.233377	32.394257	0.000035
7	140.715761	32.269663	0.000031
⋮	⋮	⋮	⋮
211	149.996384	30.000669	0.000000
212	149.996516	30.000644	0.000000
213	149.996644	30.000621	0.000000
214	149.996766	30.000598	0.000000
215	149.996884	30.000576	0.000000
216	149.996998	30.000555	0.000000



รูปที่ 3.5: รูปสามมิติของสมการ f_n ที่กรอบ $\{G_2\}$

ตารางที่ 3.4: ผลการทดลองหาค่ากรอบ $\{G_2\}$ โดยวิธี steepest descent แบบ backtracking line search

รอบการวนซ้ำ	α_0	γ_0	$\lVert f_n \rVert$
1	−44.622895	12.879954	0.000034
2	−44.400909	11.702479	0.000017
3	−44.250145	11.083188	0.000012
4	−44.132817	10.769027	0.000011
5	−44.031656	10.614088	0.000010
6	−43.938550	10.540214	0.000010
7	−43.849594	10.507119	0.000010
⋮	⋮	⋮	⋮
856	−30.013720	11.998194	0.000000
857	−30.013602	11.998209	0.000000
858	−30.013485	11.998224	0.000000
859	−30.013370	11.998240	0.000000
860	−30.013255	11.998255	0.000000
861	−30.013142	11.998270	0.000000



รูปที่ 3.6: รูปสามมิติของสมการ f_n ที่กรอบ $\{G_3\}$

ตารางที่ 3.5: ผลการทดลองหาค่ากรอบ $\{G_3\}$ โดยวิธี steepest descent แบบ backtracking line search

รอบการวนซ้ำ	α_0	γ_0	$\|f_n\|$
1	44.451368	15.068067	0.000074
2	43.919677	15.157670	0.000070
3	43.403403	15.263727	0.000065
4	42.901441	15.382193	0.000061
5	42.412997	15.509840	0.000057
6	41.937510	15.644078	0.000054
7	41.474588	15.782825	0.000050
⋮	⋮	⋮	⋮
161	30.002510	19.999149	0.000000
162	30.002370	19.999197	0.000000
163	30.002238	19.999241	0.000000
164	30.002113	19.999284	0.000000
165	30.001995	19.999324	0.000000
166	30.001884	19.999361	0.000000

กำหนดให้เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมเกี่ยวตัวอย่าง (Sample covariance matrix) ของตัวตกค้าง (Residual) เป็น

$$Q = \sum_{k=1}^{L} \varepsilon[k]\varepsilon^T[k] \tag{3.14}$$

และกำหนด

$$R = \sum_{k=1}^{L} \varphi[k]\varphi^T[k]$$

$$\Gamma = \sum_{k=1}^{L} \varphi[k]y^T[k]$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{k=1}^{L} \left[y[k] - \Theta^T\varphi[k]\right]\left[y[k] - \Theta^T\varphi[k]\right]^T \\ &= \sum_{k=1}^{L} y[k]y^T[k] - \Theta^T\Gamma - \Gamma^T\Theta + \Theta^T R\,\Theta \qquad (3.15) \\ &= \left[\Theta - R^{-1}\Gamma\right]^T R\left[\Theta - R^{-1}\Gamma\right] + \sum_{k=1}^{L} y[k]y^T[k] - \Gamma^T R^{-1}\Gamma \end{aligned}$$

เนื่องจากเมติกซ์ R เป็นบวกแน่นอน (Positive definite) และพจน์ที่สองและที่สามใน (3.15) ไม่ขึ้นกับ Θ จะได้ว่า

$$Q \geq Q|_{\Theta=\bar{\Theta}}$$

โดยที่

$$\bar{\Theta} = R^{-1}\Gamma \tag{3.16}$$

ในระบบของเรา $y[k] = \begin{bmatrix}\alpha_0[k] & \gamma_0[k]\end{bmatrix}^T$ และ $\varphi[k] = 1$ เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$\bar{\Theta} = \frac{1}{L}\left[\sum_{k=1}^{L} y^T[k]\right] \tag{3.17}$$

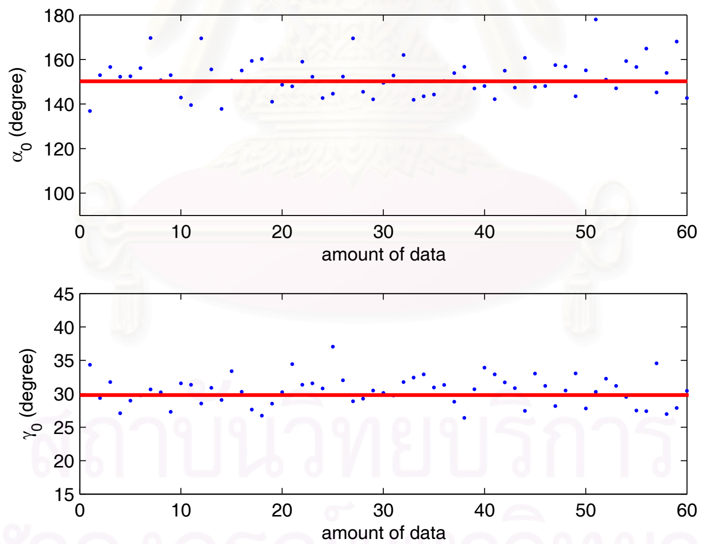
นั่นคือ

$$\bar{\alpha}_0 = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L} \alpha_0(k) \tag{3.18}$$

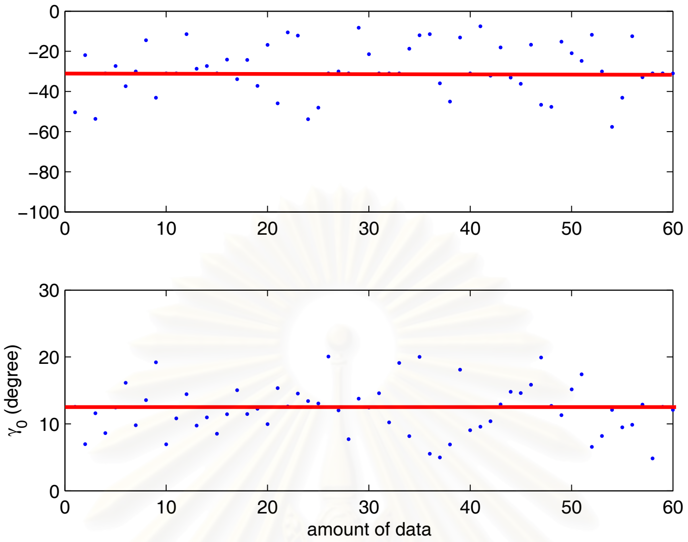
$$\bar{\gamma}_0 = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L} \gamma_0(k) \tag{3.19}$$

3.2.3 ผลการทดลองการหาค่ากรอบพื้นแบบมีสัญญาณรบกวน

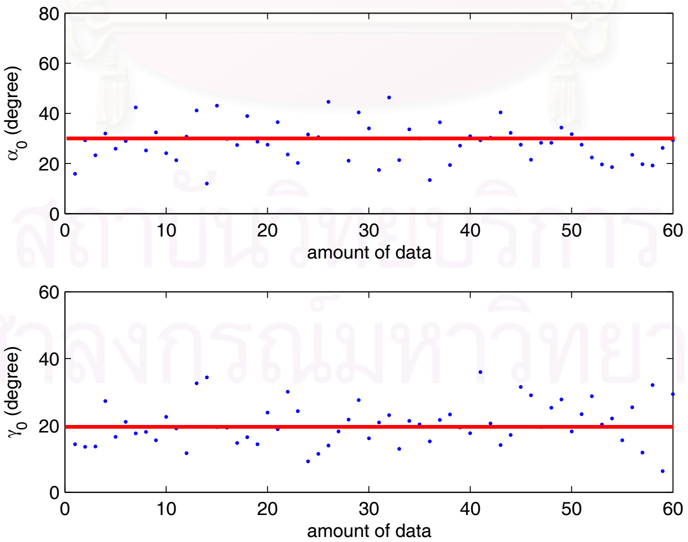
ในการทดลอง จะกำหนดกรอบของพื้นที่ติดตั้งเฮลิโอสแตท 3 กรอบเหมือนที่ทดลองตอนไม่พิจารณาสัญญาณรบกวน นั่นคือ $\{G_1\}$ เกิดจากการหมุน $\{R\}$ รอบแกน $\hat{Z}_R$ เป็นมุม $150°$ และหมุนรอบแกน $\hat{X}_R$ เป็นมุม $30°$ ส่วน $\{G_2\}$ เกิดจากการหมุน $\{R\}$ รอบแกน $\hat{Z}_R$ เป็นมุม $-30°$ และหมุนรอบแกน $\hat{X}_R$ เป็นมุม $12°$ และ $\{G_3\}$ เกิดจากการหมุน $\{R\}$ รอบแกน $\hat{Z}_R$ เป็นมุม $30°$ และหมุนรอบแกน $\hat{X}_R$ เป็นมุม $20°$ ผลการคำนวณโดยใช้วิธีที่กล่าวมาข้างต้นจะแสดงในรูปที่ 3.7, 3.8 และ 3.9 โดยจากการคำนวณจะได้ค่า $\bar{\alpha}_0 = 149.96°$, $\bar{\gamma}_0 = 30.24°$ ของกรอบ $\{G_1\}$, $\bar{\alpha}_0 = -29.53°$, $\bar{\gamma}_0 = 12.12°$ ของกรอบ $\{G_2\}$ และ $\bar{\alpha}_0 = 29.76°$, $\bar{\gamma}_0 = 20.47°$ ของกรอบ $\{G_3\}$



รูปที่ 3.7: ผลการคำนวณของกรอบ $\{G_1\}$



รูปที่ 3.8: ผลการคำนวณของกรอบ $\{G_2\}$



รูปที่ 3.9: ผลการคำนวณของกรอบ $\{G_3\}$

3.3 การหาความชันพื้นเอียงโดยการวิเคราะห์แบบเรขาคณิต

ในหัวข้อที่ผ่านมา เราทำการหาความชันของพื้นเอียงโดยการแก้สมการไม่เชิงเส้นซึ่งจะพบว่าการแก้ปัญหามีความยุ่งยากซับซ้อนพอควร ในหัวข้อนี้จะมองปัญหาแบบเรขาคณิต พิจารณาการหมุนเฮลิโอสแตทรอบแกน $\hat{Z}$ ของกรอบพื้น $\{G\}$ เวกเตอร์ตั้งฉากของเฮลิโอสแตทจะเป็นไปตามรูปที่ 3.10(a) กำหนดให้ $\hat{n}_2$ และ $\hat{n}_3$ คือเวกเตอร์ตั้งฉาก $\hat{n}_1$ ที่ทำการหมุนรอบแกน $\hat{Z}_G$ เป็นมุม θ_1 และ θ_2 ตามลำดับ และกำหนดให้

$$m_1 = \hat{n}_2 - \hat{n}_1 \tag{3.20}$$

$$m_2 = \hat{n}_3 - \hat{n}_1 \tag{3.21}$$

จะพบว่าถ้า $\theta_1 \neq \theta_2$ เวกเตอร์ m_1 และ m_2 จะเป็นฐานหลัก (Basis)[13] ของระนาบพื้นเอียง เพราะฉะนั้นแกน $\hat{Z}_G$ จะหาได้จากการหา $v^{\perp}$ โดยที่ $v^{\perp}$ เป็นเวกเตอร์ตั้งฉาก[14]กับระนาบพื้นเอียง นั่นคือ

$$\langle m_1, v^{\perp} \rangle = m_1^T v^{\perp} = 0 \tag{3.22}$$

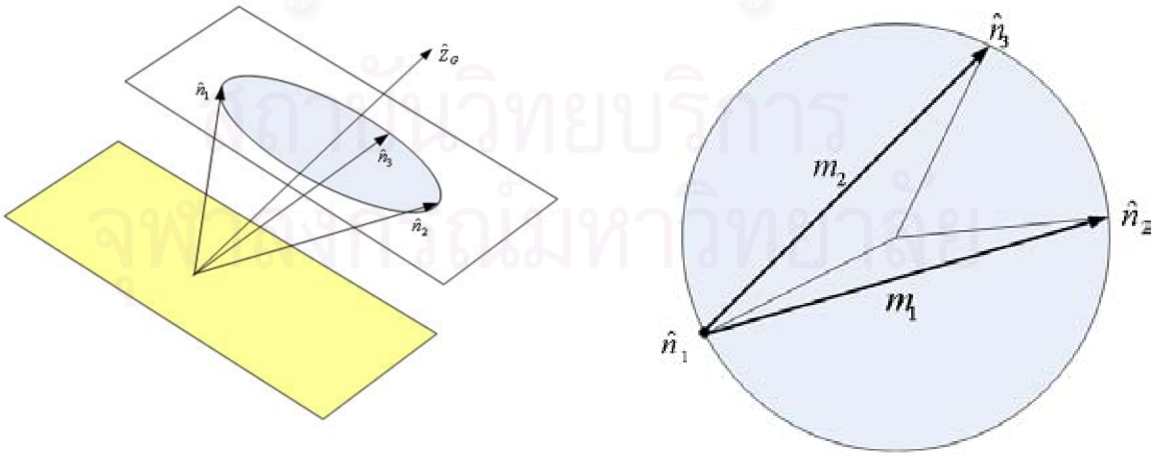
$$\langle m_2, v^{\perp} \rangle = m_2^T v^{\perp} = 0 \tag{3.23}$$

และกำหนดอีกสองเงื่อนไขที่จะทำให้ $v^{\perp} = \hat{Z}_G$ นั่นคือ

$$\|v^{\perp}\| = 1 \tag{3.24}$$

และเนื่องจาก $\hat{Z}_G$ ต้องพุ่งขึ้นจากพื้นดินเท่านั้น เพราะฉะนั้นถ้า $v^{\perp} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}^T$ จะได้ว่า

$$v_3 \geq 0 \tag{3.25}$$



(a) เวกเตอร์ตั้งฉากของเฮลิโอสแตทที่ทำการหมุน (b) แนวการหมุนเมื่อมองจากมุมบน

รูปที่ 3.10: ลักษณะการหมุนเฮลิโอสแตทรอบแกน $\hat{Z}$ ที่กรอบพื้น

กำหนดให้ $m_1 = \begin{bmatrix} m_{1a} & m_{1b} & m_{1c} \end{bmatrix}^T$ และ $m_2 = \begin{bmatrix} m_{2a} & m_{2b} & m_{2c} \end{bmatrix}^T$ จาก (3.22) และ (3.23) เราจะสามารถลดตัวแปรให้เหลือเพียง v_3 ได้ดังนี้

$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} -m_{1c} & m_{1b} \\ -m_{2c} & m_{2b} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_{1a} & m_{1b} \\ m_{2a} & m_{2b} \end{vmatrix}} v_3 = \left(\frac{m_{1b}m_{2c} - m_{2b}m_{1c}}{m_{1a}m_{2b} - m_{1b}m_{2a}} \right) v_3 \tag{3.26}$$

$$v_2 = \frac{\begin{vmatrix} m_{1a} & -m_{1c} \\ m_{2a} & -m_{2c} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_{1a} & m_{1b} \\ m_{2a} & m_{2b} \end{vmatrix}} v_3 = \left(\frac{m_{2a}m_{1c} - m_{1a}m_{2c}}{m_{1a}m_{2b} - m_{1b}m_{2a}} \right) v_3 \tag{3.27}$$

นำ (3.26) และ (3.27) ไปแทนลงใน (3.24) และเงื่อนไข (3.25) จะได้ว่า

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m_{1b}m_{2c} - m_{2b}m_{1c}}{m_{1a}m_{2b} - m_{1b}m_{2a}} \right)^2 + \left(\frac{m_{2a}m_{1c} - m_{1a}m_{2c}}{m_{1a}m_{2b} - m_{1b}m_{2a}} \right)^2 + 1}} \tag{3.28}$$

หลังจากได้ $v^{\perp}$ แล้ว เราจะสามารถคำนวณ α_0 และ γ_0 ได้ดังนี้

$$\alpha_0 = \begin{cases} \theta + \dfrac{\pi}{2} & \text{เมื่อ} \quad -\pi \leq \theta < \dfrac{\pi}{2} \\ \theta - \dfrac{3\pi}{2} & \text{เมื่อ} \quad \dfrac{\pi}{2} \leq \theta < \pi \end{cases} \tag{3.29}$$

$$\gamma_0 = \cos^{-1}(v_3) \tag{3.30}$$

โดย $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$ และ $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ยกเว้นกรณี $v^{\perp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ จะได้ว่า $\gamma_0 = 0$ หรือก็คือพื้นที่ทำการติดตั้งเฮลิโอสแตทเป็นพื้นราบนั่นเอง

3.3.1 ผลการทดลองการหาความชันพื้นเอียงโดยวิเคราะห์แบบเรขาคณิต

ในการทดลองเนื่องตำแหน่งภาพบนตัวรับกลางที่อ่านได้จากกล้อง CCD มีผลของสัญญาณรบกวนการวัด ทำให้ค่า n_1, n_2 และ n_3 เกิดการเบี่ยงเบนจากค่าจริง แต่เนื่องจากสัญญาณรบกวนการวัดมีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์เราจึงทำการเก็บค่าที่ตำแหน่งทั้งสามหลายๆครั้งแล้วนำค่าทั้งหลายที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันมาทำการเฉลี่ย จากนั้นจึงนำค่าเฉลี่ยมาใช้ในการคำนวณหาความชันของพื้นแท้ทั้งสามเช่นเดียวกับในการทดลองที่ผ่านมานั่นคือ $\{G_1\}$ เกิดจากการหมุน $\{R\}$ รอบแกน $\hat{Z}_R$ เป็นมุม 150° และหมุนรอบแกน $\hat{X}_R$ เป็นมุม 30° ส่วน $\{G_2\}$ เกิดจากการหมุน $\{R\}$ รอบแกน $\hat{Z}_R$ เป็นมุม -30° และหมุนรอบแกน $\hat{X}_R$ เป็นมุม 12° และ $\{G_3\}$ เกิดจากการหมุน $\{R\}$ รอบแกน $\hat{Z}_R$ เป็นมุม 30° และหมุนรอบแกน $\hat{X}_R$ เป็นมุม 20° ซึ่งจะได้ผลตามตารางที่ 3.6, 3.7 และ 3.8 ตามลำดับ จากการทดลองพบว่า ถ้า $\hat{n}_2$ และ $\hat{n}_3$ อยู่ใกล้กับ $\hat{n}_1$ มากไป (θ_1 และ θ_2 มีค่าน้อยๆ) จะทำให้ผลการคำนวณมีความผิดพลาดมากกว่า $\hat{n}_2$ และ $\hat{n}_3$ ที่อยู่ห่างจาก $\hat{n}_1$ มากกว่า

ตารางที่ 3.6: ผลการทดลองหาค่ากรอบ $\{G_1\}$ โดยการวิเคราะห์แบบเรขาคณิต

θ_1	θ_2	α_0	γ_0
-5	5	152.54	29.65
-15	15	149.92	30.15
-30	30	151.24	30.04
-45	45	149.80	30.00

ตารางที่ 3.7: ผลการทดลองหาค่ากรอบ $\{G_2\}$ โดยการวิเคราะห์แบบเรขาคณิต

θ_1	θ_2	α_0	γ_0
-5	5	-29.25	12.24
-15	15	-30.82	11.78
-30	30	-30.48	11.89
-45	45	-30.00	11.98

ตารางที่ 3.8: ผลการทดลองหาค่ากรอบ $\{G_3\}$ โดยการวิเคราะห์แบบเรขาคณิต

θ_1	θ_2	α_0	γ_0
-5	5	29.69	21.47
-15	15	30.22	19.52
-30	30	29.94	20.01
-45	45	29.97	19.96

3.3.2 ผลการทดลองการหาความชันพื้นเอียงโดยวิเคราะห์แบบเรขาคณิตโดยการสุ่มค่าพื้นเอียง 100 จุด

ในที่นี้เราจะทำการสุ่มค่าพื้นที่ทำการติดตั้งเฮลิโอแสตทค่าต่างๆ 100 จุด โดยจะสุ่มแบบการแจกแจงเอกรูป (uniform distribution) โดยค่าความชันในแนวอซิมุธ (ค่า α_0) มีค่าอยู่ในช่วง -180° ถึง 180° และในแนวอิลิเวชั่น (ค่า γ_0) อยู่ในช่วง 0° ถึง 45° โดยกำหนดมุม θ_1 และ θ_2 เป็นมุม 30° และ -30° ตามลำดับ ซึ่งจะได้ผลการทดลองตามตารางที่ 3.9 ผลจากตารางพบว่าวิธีนี้ใช้ได้ดี ส่วนมากค่า error ของแต่ละแนวจะไม่เกิน 1° ยกเว้นค่าพื้นที่เน้นเป็นสีแดงพบว่ามี error ในแนวอซิมุธมาก เนื่องจากค่า γ_0 นั้นเกือบ 0° นั่นคือพื้นแทบจะราบสนิท ดังนั้นในการทดลองการแก้ไขตำแหน่งแสง เราจะทดลองค่าพื้นที่มีมุม γ_0 น้อยกว่า 1° โดยจะใช้ค่าที่ได้จากการคำนวณโดยวิเคราะห์แบบเรขาคณิตเปรียบเทียบกับค่าพื้นที่ประมาณว่าเป็นพื้นราบ ($\alpha_0 = \gamma_0 = 0^\circ$) ว่าให้ผลต่างกันเพียงใดเพื่อที่จะใช้เป็นข้อมูลในการประยุกต์ใช้กับการทดลองจริง

ตารางที่ 3.9: ผลการทดลองหาค่ากรอบกรอบพื้น 100 ค่าที่ต่างกันโดยการวิเคราะห์แบบเรขาคณิต

No.	α_{0r}	γ_{0r}	α_0	γ_0	$\Delta\alpha$	$\Delta\gamma$
1	−12.289826	1.223568	−12.528159	1.356860	0.238334	0.133292
2	−22.540908	35.715016	−22.591292	35.547136	0.050383	0.167880
3	−29.907615	44.965384	−29.858035	45.058047	0.049580	0.092663
4	−164.055144	4.960734	−162.992540	4.919450	1.062603	0.041283
5	−24.526848	28.017052	−24.445589	28.157445	0.081259	0.140392
6	−111.059176	5.965733	−111.554026	5.966648	0.494850	0.000915
7	−48.416696	13.951341	−48.403688	13.955205	0.013008	0.003864
8	−39.719526	6.065446	−39.744131	6.104003	0.024605	0.038557
9	−128.322184	10.049684	−128.080421	10.047050	0.241763	0.002634
10	−98.819360	17.844605	−97.461329	17.977499	1.358030	0.132894
11	−169.442716	6.081457	−168.621431	5.886113	0.821285	0.195344
12	−59.375660	10.847641	−58.517026	11.002801	0.858634	0.155160
13	−126.807534	41.738227	−126.887548	41.741950	0.080013	0.003723
14	−169.816583	17.599539	−169.495834	17.432093	0.320749	0.167446
15	−104.686981	23.006825	−104.844211	22.983462	0.157230	0.023363
16	−158.427753	4.180325	−159.248110	4.257581	0.820357	0.077256
17	−134.930096	0.976451	−100.530726	0.665256	34.399370	0.311195
18	−68.331122	7.179067	−65.576652	7.395459	2.754469	0.216392
19	−130.601030	38.003217	−129.394912	38.267293	1.206118	0.264075
20	−29.303677	39.561907	−29.377228	39.578774	0.073551	0.016867
21	−172.116830	8.414529	−171.838871	8.278294	0.277959	0.136235
22	−35.321189	44.608721	−35.437239	44.355134	0.116049	0.253588
23	−139.714651	32.041343	−140.212256	32.022542	0.497605	0.018801
24	−110.393229	39.211408	−110.206584	39.278142	0.186645	0.066735
25	−29.210442	21.583403	−29.144821	21.574868	0.065621	0.008535
26	−5.589730	22.320222	−5.628705	21.964404	0.038975	0.355818
27	−51.953187	12.938934	−52.544184	12.760441	0.590997	0.178492
28	−174.791570	2.742365	−176.452742	2.684748	1.661171	0.057618
29	−171.089882	11.811047	−171.100960	11.773919	0.011078	0.037128
30	−41.048605	8.381746	−40.207355	8.527987	0.841250	0.146241
31	−172.534695	41.269040	−173.048669	41.131518	0.513973	0.137522
32	−122.374487	5.547541	−121.768385	5.494859	0.606102	0.052682
33	−9.894458	0.605042	−7.871287	0.650378	2.023171	0.045336
34	−107.971437	16.636082	−108.281809	16.655988	0.310372	0.019906
35	−70.766279	31.438850	−70.214273	31.735495	0.552006	0.296645
36	−38.765913	40.020625	−38.785861	39.987119	0.019948	0.033505
37	−32.831932	26.719673	−32.520812	27.097580	0.311121	0.377907
38	−13.815724	7.051090	−13.111813	7.637973	0.703912	0.586883
39	−1.336265	14.251024	−1.485949	13.950090	0.149684	0.300934
40	−141.980939	10.502797	−142.987715	10.683870	1.006775	0.181073
41	−3.201773	0.378993	10.265448	0.310528	13.467221	0.068465
42	−158.029464	17.860671	−158.621114	18.121739	0.591650	0.261068
43	−63.457518	29.244066	−63.417162	29.248511	0.040356	0.004445
44	−129.985158	3.825027	−125.812931	3.702271	4.172228	0.122756
45	−174.321151	34.596428	−174.427986	34.620248	0.106835	0.023820

No.	α_{0r}	γ_{0r}	α_0	γ_0	$\Delta\alpha$	$\Delta\gamma$
46	−28.020237	43.636577	−27.985345	43.877221	0.034892	0.240645
47	−29.331998	32.165875	−29.423483	31.997407	0.091485	0.168468
48	−56.411526	35.188283	−56.346561	35.201581	0.064965	0.013298
49	−5.288679	10.690429	−5.519046	10.843941	0.230368	0.153513
50	−64.372521	8.807884	−63.031743	8.958734	1.340778	0.150849
51	35.819507	11.844626	36.393061	11.662410	0.573555	0.182216
52	121.368896	32.120328	121.954988	32.124789	0.586093	0.004461
53	166.878555	43.991988	166.799026	43.971656	0.079530	0.020332
54	61.886987	28.670487	61.965361	28.659945	0.078374	0.010542
55	107.008729	24.566587	106.639398	24.585453	0.369330	0.018866
56	110.787661	38.162575	111.230769	38.069219	0.443108	0.093357
57	0.607333	36.094395	0.651071	35.664786	0.043738	0.429609
58	176.762262	30.073788	176.471157	29.766311	0.291105	0.307478
59	161.912357	30.194219	162.453490	30.436356	0.541133	0.242137
60	124.696323	36.928966	124.287633	36.960585	0.408690	0.031619
61	79.137662	43.671257	78.862112	43.890720	0.275549	0.219463
62	126.184124	21.911625	126.364123	21.913005	0.179999	0.001380
63	109.748698	36.786084	109.862535	36.776838	0.113837	0.009246
64	53.979419	28.870703	54.417588	28.549817	0.438169	0.320885
65	154.086695	13.785721	154.309490	13.914178	0.222795	0.128456
66	20.172991	29.741946	19.984115	30.171899	0.188875	0.429953
67	52.480874	16.110770	53.253587	15.896452	0.772713	0.214318
68	17.540411	42.218974	17.358230	42.646222	0.182181	0.427247
69	71.540635	21.945014	70.987396	22.065775	0.553238	0.120762
70	59.996277	4.094566	61.917257	4.008454	1.920979	0.086112
71	169.962249	30.322535	170.016061	30.253177	0.053813	0.069358
72	150.939982	23.169614	151.576288	23.340463	0.636306	0.170849
73	46.516933	9.971071	47.137387	9.859132	0.620455	0.111939
74	7.721663	32.625422	7.698843	32.611110	0.022819	0.014312
75	1.059262	3.071097	2.037117	2.920553	0.977855	0.150545
76	103.395234	43.385592	103.430430	43.372662	0.035196	0.012930
77	133.902351	9.344546	133.981740	9.357694	0.079389	0.013147
78	145.229541	7.250320	145.275585	7.311152	0.046044	0.060832
79	114.762716	28.719962	113.755351	28.754883	1.007365	0.034921
80	45.228836	0.010268	26.449544	0.024755	18.779293	0.014487
81	25.977681	15.103482	26.310365	14.933535	0.332684	0.169947
82	117.279204	12.379492	114.719445	12.349164	2.559758	0.030328
83	170.295648	2.003738	169.770773	2.159700	0.524874	0.155962
84	146.859623	4.225342	144.914733	4.066432	1.944890	0.158910
85	167.444472	18.449883	167.494442	18.420639	0.049970	0.029244
86	55.789445	36.760154	55.659781	36.863051	0.129664	0.102897
87	48.387080	39.173268	48.432177	39.227281	0.045097	0.054012
88	96.561186	1.014980	87.166153	1.010097	9.395033	0.004884
89	29.390093	32.722964	29.251132	32.816994	0.138961	0.094030
90	37.977844	38.160425	37.878217	38.158009	0.099627	0.002416

No.	α_{0r}	γ_{0r}	α_0	γ_0	$\Delta\alpha$	$\Delta\gamma$
91	39.026176	32.787009	39.263273	32.639655	0.237097	0.147354
92	117.322169	42.979438	116.728320	43.271370	0.593849	0.291932
93	9.499713	29.535800	9.373845	29.724950	0.125869	0.189150
94	41.272250	33.403731	41.171169	33.449075	0.101081	0.045344
95	120.137783	15.523471	121.601098	15.562563	1.463315	0.039092
96	55.968062	39.780988	56.033939	39.562996	0.065877	0.217992
97	55.193915	15.625984	54.803146	15.695162	0.390769	0.069178
98	129.722379	2.676451	134.374703	2.850761	4.652324	0.174310
99	171.793172	32.328657	172.226279	32.706905	0.433108	0.378248
100	23.604911	43.119643	23.610438	43.249791	0.005527	0.130148

3.4 สรุป

ในบทนี้เราทำการประมาณหาข้อมูลพื้นที่ทำการติดตั้งเฮลิโอสแตทโดยใช้วิธเชิงตัวเลขเนื่องจากสมการที่เราได้มาจากบทที่ 2 เป็นสมการไม่เชิงเส้นที่มีความซับซ้อนพอควร วิธีเชิงตัวเลขที่เริ่มใช้คือวิธีนิวตัน โดยเราจำเป็นต้องเปลี่ยนแปลงสมการของเราที่เดิมมีสามสมการสองตัวแปรเป็นฟังก์ชันสองสมการสองตัวแปรเสียก่อนถึงจะใช้วิธีนิวตันได้ ข้อเสียของวิธีนิวตันคือไม่ระประกันว่าค่าประมาณจะลู่เข้าคำตอบหรือไม่ แต่ในการใช้งานเราสามารถเลือกจุดเริ่มต้นให้ใกล้พอที่ค่าประมาณจะลู่เข้าคำตอบได้ จากผลการทดลองพบว่าจะได้คำตอบที่ต้องการโดยใช้รอบการวนซ้ำเพียง 12 ถึง 13 รอบซึ่งจากคอมพิวเตอร์จะกินเวลาประมาณ 1 วินาทีเท่านั้น ต่อมาเมื่อเราพิจารณาผลตอบของระบบที่รวมสัญญาณรบกวนการวัดด้วยนั้นสมการที่ใช้ในการหาค่าพื้นเอียงอาจจะไม่มีคำตอบ ดังนั้นเราจึงเปลี่ยนวิธีเป็นการหาจุดต่ำสุดของฟังก์ชันโดยแปลงสมการเป็นฟังก์ชันสามตัวแปร โดยจะเลือกใช้วิธี steepest descent ซึ่งข้อดีของวิธีนี้คือรับประกันว่าค่าประมาณจะลู่คำตอบแน่นอนแต่จะใช้เวลามากหรือน้อยขึ้นอยู่กับจุดเริ่มต้นและความซับซ้อนของสมการ ส่วนวิธีการเลือก step-size นั้นเราจะใช้วิธี backtracking line search ซึ่งวิธีนี้จะเริ่มค่า step-size เป็น 1 แล้วค่อยๆลดถ้าค่าฟังก์ชันไม่ผ่านเงื่อนไข Armijo จากผลการทดลองพบว่าถ้าพื้นมีความชันน้อยการลู่เข้าสู่คำตอบจะช้ากว่าพื้นที่มีความชันมาก แต่เนื่องจากในส่วนของการหาพื้นเอียงนี้ไม่จำเป็นต้องแข่งกับเวลาการใช้เวลามากจึงไม่เป็นปัญหา (ในการทดลองใช้คอมพิวเตอร์ในการคำนวณซึ่งจะใช้เวลาไม่เกิน 10 นาที) หลังจากที่ได้คำตอบมา คำตอบอาจไม่ใช่คำตอบที่ถูกต้องเนื่องจากผลของสัญญาณรบกวนการวัด เราจำต้องทำการทดลองหลายๆครั้งแล้วนำคำตอบที่ได้มาทำการเฉลี่ยซึ่งจากผลการทดลองพบว่าคำตอบที่ได้ใกล้เคียงกับคำตอบจริงโดยมีความแตกต่างแค่ทศนิยมตำแหน่งที่สอง สุดท้ายเราจะเปลี่ยนแนวทางการวิเคราะห์เพื่อให้ความซับซ้อนของระบบลดน้อยลงนั่นคือพยายามพิจารณาในแนวเรขาคณิตโดยใช้ความรู้พีชคณิตเชิงเส้นมาช่วย ผลที่ได้คือไม่เพียงแต่ลดความยุ่งยากในการสมการไม่เชิงเส้นที่ซับซ้อนโดยวิธีเชิงเลขเท่านั้น แต่ยังสามารถคำนวณคำตอบได้โดยตรงซึ่งจะช่วยลดเวลาในการคำนวณลงมาก เพื่อที่จะได้ผลการทดลองที่แม่นยำ เราควรจะเก็บข้อมูลเยอะๆแล้วนำมาเฉลี่ยก่อนที่จะนำไปแทนในสมการ

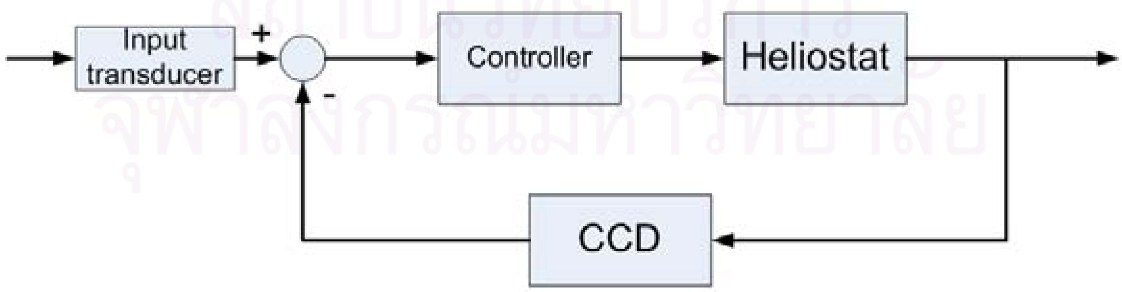
บทที่ 4

การแก้ไขตำแหน่งแสง

ในบทที่ผ่านมาเราได้กล่าวถึงการหาค่าพื้นเอียงเพื่อใช้ประโยชน์ในส่วนของวิธีการติดตามดวงอาทิตย์ ในบทนี้เราจะทำการปรับแก้ตำแหน่งแสงที่ตกกระทบบนตัวรับกลาง ตามปกติแสงควรจะตกกระทบตรงตำแหน่งกึ่งกลางตัวรับกลาง แต่อาจเกิดกรณีที่มีการรบกวนภายนอก เช่น มีลมพัดมาวูบนึง ทำให้ทิศทางของเฮลิโอสแตทเบี่ยงเบน รวมทั้งอาจเกิดจากการคำนวณจุดเซนทรอยด์ (centriod) ผิดพลาดเนื่องจากสัญญาณรบกวนการวัด ทั้งหมดนี้จะทำให้แสงไม่ตกกระทบตรงตำแหน่งอ้างอิงซึ่งอาจทำให้การรวบรวมความร้อนไม่เป็นไปดังที่ต้องการ เพราะฉะนั้นเราต้องทำการปรับแก้ตำแหน่งโดยในการทำงานจริงเราจะมีเป้าที่แยกจากตัวรับกลางเพื่อทำการทดสอบการสะท้อนแสงของเฮลิโอสแตททีละตัว เนื่องจากภาพที่ได้จากตัวรับกลางเราไม่สามารถแยกได้ว่าแสงที่เบี่ยงเบนไปเกิดจากเฮลิโอสแตทตัวไหน

4.1 การป้อนกลับสัญญาณขาออก

วิธีการควบคุมแบบการป้อนกลับสัญญาณขาออก (Output feedback) จะนำข้อมูลของสัญญาณขาออก (Output) มาทำการเปรียบเทียบกับสัญญาณอ้างอิงเพื่อตรวจสอบว่าสัญญาณขาออกมีค่าเท่ากับสัญญาณหรือยัง ถ้ายังไม่เท่าจะนำผลต่างมาผ่าน ตัวควบคุมเพื่อเป็นสัญญาณควบคุมระบบต่อไป โดยการควบคุมแบบป้อนกลับสัญญาณขาออกจะมีลักษณะดังรูปที่ 4.1



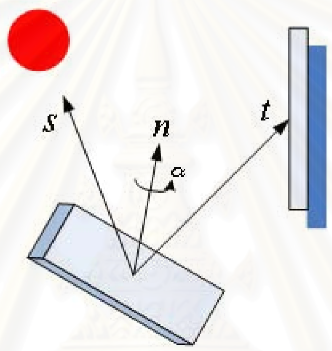
รูปที่ 4.1: block diagram

จากรูปจะเห็นว่าในการทดลองจริงเราจะมีตัวตรวจจับ (Censor) สัญญาณขาออกซึ่งก็คือภาพบนตัวรับ

กลางเป็นกล้อง CCD แล้วคำนวณออกมาเป็นตำแหน่งกึ่งกลางภาพเพื่อนำไปเปรียบเทียบกับสัญญาณอ้างอิง

ในส่วนของการสะท้อนแสงโดยใช้เฮลิโอสแตทจะพบว่าสัญญาณควบคุมจะมีสองสัญญาณนั่นคือ สัญญาณควบคุมในแนวอะซิมุธและสัญญาณควบคุมในแนวอิลิเวชั่น ซึ่งการหมุนเปลี่ยนทิศทางของเฮลิโอสแตทในแนวอะซิมุธและแนวอิลิเวชั่นจะให้ผลของตำแหน่งภาพบนตัวรับกลางต่างกัน เนื่องจากเราใช้สัญญาณขาออกมาทำการป้อนกลับ เราจึงควรพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างการหมุนและตำแหน่งของภาพในแต่ละแนวดังนี้

การหมุนในแนวอะซิมุธ

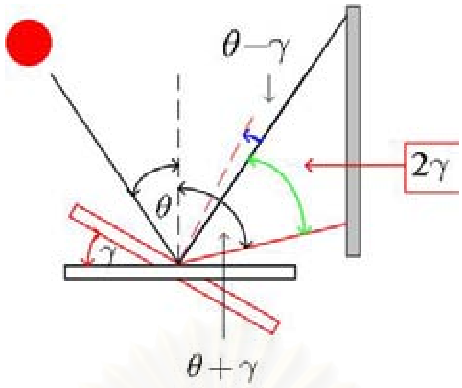


รูปที่ 4.2: การหมุนในแนวอะซิมุธ

จากรูปที่ 4.2 จะพบว่าการหมุนกระจกในแนวอะซิมุธเป็นมุม α จะทำให้เวคเตอร์ตั้งฉากของกระจกหมุนไป α ในแนวอะซิมุธ ซึ่งจะพบว่ามุมตกกระทบ (angle of incidence) ระหว่าง $\hat{s}$ กับ $\hat{n}$ ยังมีค่าเท่าเดิม นั่นคือมุมสะท้อน (angle of reflextion) จะมีค่าเท่าเดิม ทำให้ $\hat{t}$ หมุนเป็นมุม α ในแนวอะซิมุธเท่านั้น

การหมุนในแนวอิลิเวชั่น

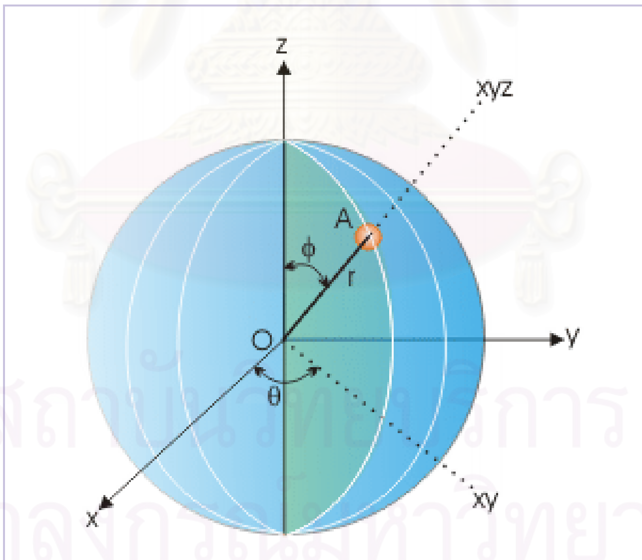
กำหนดให้มุมตกกระทบก่อนการหมุนในแนวอิลิเวชั่นเป็น θ จากรูปที่ 4.3 พบว่า ในการเปลี่ยนมุมกระจกในแนวอิลิเวชั่นเป็นมุม γ จะทำให้มุมตกกระทบเปลี่ยนไปเป็น $\theta + \gamma$ ซึ่งจะทำให้มุมสะท้อนเท่ากับ $\theta + \gamma$ ด้วย นั่นคือ $\hat{t}$ จะเปลี่ยนไปจากเดิมก่อนทำการหมุนในแนวอิลิเวชั่นเป็นมุม 2γ



รูปที่ 4.3: การหมุนในแนวอิลิเวชั่น

4.2 พิกัดทรงกลม

พิจารณา (2.28) พบว่าระบบเป็นแบบสองสัญญาณเข้าสองสัญญาณออกซึ่งเป็นไม่เป็นอิสระต่อกันรวมทั้งเป็นสมการไม่เชิงเส้นซึ่งยากแก่การออกแบบ เราจึงประยุกต์ (2.28) ใหม่ให้อยู่ในรูปสมการเชิงเส้นที่เป็นอิสระต่อกันโดยย้ายส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นให้ไปอยู่ที่สมการผลตอบซึ่งจะทำได้โดยพิจารณาในพิกัดทรงกลม (Sperical coordinattes)[15] ในพิกัดทรงกลม เวคเตอร์จะแสดงในรูป (R, θ, ϕ) โดยเมื่อเปรียบ



รูปที่ 4.4: พิกัดทรงกลม

เทียบกับพิกัดคาร์ทีเชี่ยนดังรูปที่ 4.4 จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$R = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{4.1}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4.2}$$
$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{R}\right) \tag{4.3}$$
$$x = R\sin\phi\cos\theta \tag{4.4}$$
$$y = R\sin\phi\sin\theta \tag{4.5}$$
$$z = R\cos\phi \tag{4.6}$$

เนื่องจากเวคเตอร์ทั้งหมดในระบบของเราเป็นเวคเตอร์หนึ่งหน่วย นั่นคือ $R = 1$ เพราะฉะนั้นจะสามารถลดตัวแปรได้ 1 ตัว และเนื่องจากในพิกัดทรงกลม เราสามารถแปลงเวคเตอร์จากกรอบอ้างอิงเข้าสู่กรอบของเฮลิโอสแตทได้ทันทีโดยไม่จำเป็นต้องแปลงเวคเตอร์จากกรอบพื้นเข้าสู่กรอบเฮลิโอสแตท เพราะฉะนั้นเราจะสามารถลดตัวแปร θ_H ได้อีกหนึ่งตัวแปร นั่นคือตัวแปรสถานะจะลดจาก 4 ตัวลงเหลือเพียง 2 ตัวเท่านั้น

$$\begin{bmatrix} \theta_H \\ \hat{n}_x \\ \hat{n}_y \\ \hat{n}_z \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix}$$

พิจารณาการสะท้อนแสงโดยใช้เฮลิโอสแตทจาก (2.23) – (2.27) เราสามารถสร้างสมการในพิกัดทรงกลมได้ดังนี้

1. เริ่มจากการใส่สัญญาณเพื่อเปลี่ยนทิศทางของเฮลิโอสแตท

$$\theta[k+1] = \theta[k] + \alpha[k] \tag{4.7}$$
$$\phi[k+1] = \phi[k] + \gamma[k] \tag{4.8}$$

2. หลังจากได้พิกัดใหม่ เราจะคำนวณหาค่าเวกเตอร์ตั้งฉากของเฮลิโอสแตทบนกรอบอ้างอิง

$$\hat{n}[k] = {}^R_G\mathbf{R} \begin{bmatrix} R\sin\phi[k]\cos\theta[k] \\ R\sin\phi[k]\sin\theta[k] \\ R\cos\phi[k] \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

โดย $${}^R_G\mathbf{R} = {}^G_R\mathbf{R}^{-1} = {}^G_R\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} c_{\alpha_0} & -s_{\alpha_0}c_{\gamma_0} & s_{\alpha_0}s_{\gamma_0} \\ s_{\alpha_0} & c_{\alpha_0}c_{\gamma_0} & -c_{\alpha_0}s_{\gamma_0} \\ 0 & s_{\gamma_0} & c_{\gamma_0} \end{bmatrix}$$

3. นำเวกเตอร์ตั้งฉากที่ได้มาคำนวณหา $\hat{t}$

$$\hat{t}[k] = 2\langle \hat{s}, \hat{n}[k]\rangle \hat{n}[k] - \hat{s} \tag{4.10}$$

4. สุดท้ายนำ $\hat{t}$ มาคำนวณหาตำแหน่งภาพบนตัวรับกลาง

$$X[k] = \frac{t_x[k]}{t_y[k]}Y \tag{4.11}$$

$$Z[k] = \frac{t_z[k]}{t_y[k]}Y \tag{4.12}$$

จากสมการเบื้องต้น เราสามารถเขียนสมการสถานะใหม่ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1[k] \\ u_2[k] \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

$$y[k] = \begin{bmatrix} \dfrac{s_x(n_x^2[k]-1) + s_y n_x[k] n_y[k] + s_z n_x[k] n_z[k]}{s_x n_x[k] n_y[k] + s_y(n_y^2[k]-1) + s_z n_y[k] n_z[k]} Y \\ \dfrac{s_x n_x[k] n_z[k] + s_y n_y[k] n_z[k] + s_z(n_z^2[k]-1)}{s_x n_x[k] n_y[k] + s_y(n_y^2[k]-1) + s_z n_y[k] n_z[k]} Y \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

โดย $x_1 = \theta$, $x_2 = \gamma$, $u_1 = \alpha$, $u_2 = \gamma$, $y = \begin{bmatrix} X & Z \end{bmatrix}^T$, $\hat{s} = (s_x, s_y, s_z)$ และ

$$\hat{n}[k] = \begin{bmatrix} n_x[k] \\ n_y[k] \\ n_z[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\alpha_0} s_{x_2[k]} c_{x_1[k]} - s_{\alpha_0} c_{\gamma_0} s_{x_2[k]} s_{x_1[k]} + s_{\alpha_0} s_{\gamma_0} c_{x_2[k]} \\ s_{\alpha_0} s_{x_2[k]} c_{x_1[k]} + c_{\alpha_0} c_{\gamma_0} s_{x_2[k]} s_{x_1[k]} - c_{\alpha_0} s_{\gamma_0} c_{x_2[k]} \\ s_{\gamma_0} s_{x_2[k]} s_{x_1[k]} + c_{\gamma_0} c_{x_2[k]} \end{bmatrix}$$

4.3 ตัวควบคุมแบบสัดส่วน

เพื่อลดความซับซ้อนของตัวควบคุม เราจะเริ่มออกแบบตัวควบคุมที่ง่ายที่สุดก่อนโดยใช้ตัวควบคุมแบบสัดส่วน (Proportional controller) ในการออกแบบจะใช้หลักการว่าเมื่อตำแหน่งภาพเบี่ยงเบน ตัวควบคุมจะต้องมีค่าสัญญาณควบคุมที่ทำให้ตำแหน่งภาพกลับเข้าใกล้ตำแหน่งอ้างอิงได้มากที่สุดโดยถือว่าพื้นที่ทำการติดตั้งเฮลิโอสแตทเป็นพื้นราบ สัญญาณควบคุมจะมีลักษณะดังนี้

$$u_1 = K_1 \cdot e_x \tag{4.15}$$

$$u_2 = K_2 \cdot e_z \tag{4.16}$$

โดย e_x และ e_z เป็นผลต่างในแนวแกน $\hat{X}_R$ และแนวแกน $\hat{Z}_R$ ตามลำดับ ส่วน K_1 และ K_2 เป็นค่าคงที่

การควบคุมในแนวอะซิมุธ

กำหนดให้ X_r เป็นตำแหน่งอ้างอิงของตัวรับกลางในแนวแกน $\hat{X}$ และ X เป็นตำแหน่งภาพ ในแนวแกน $\hat{X}$ ในขณะนั้น และ Y เป็นระยะห่างระหว่างเฮลิโอสแตทกับตัวรับกลาง จะได้ว่า

$$e_x = X_r - X \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= -\tan^{-1}\left(\frac{e_x}{Y}\right) \\ &\approx -\frac{e_x}{Y} \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\therefore \quad K_1 = -\frac{1}{Y} \tag{4.19}$$

การควบคุมในแนวอิลิเวชั่น

กำหนดให้ Z_r เป็นตำแหน่งอ้างอิงของตัวรับกลางในแนวแกน $\hat{Z}$ และ Z เป็นตำแหน่งภาพในแนวแกน $\hat{Z}$ ส่วน R เป็นระยะทางจากกึ่งกลางกระจกไปยังตำแหน่งที่แสงตกกระทบบนตัวรับกลาง จาก (4.3) จะพบว่ามุมที่ต้องปรับในแนวอิลิเวชั่นที่แท้จริงคือ

$$\triangle\phi = \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\left(\frac{Z_r}{Y}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{Z}{R}\right)\right]$$

ซึ่งจะพบว่ามีความซับซ้อนพอควรและไม่สามารถใช้ค่าผลต่างตำแหน่งในแนวแกน $\hat{Z}$ มาคำนวณสัญญาณควบคุมได้เพราะฉะนั้นเราจะทำการประมาณสัญญาณควบคุมในแนวอิลิเวชั่นดังนี้

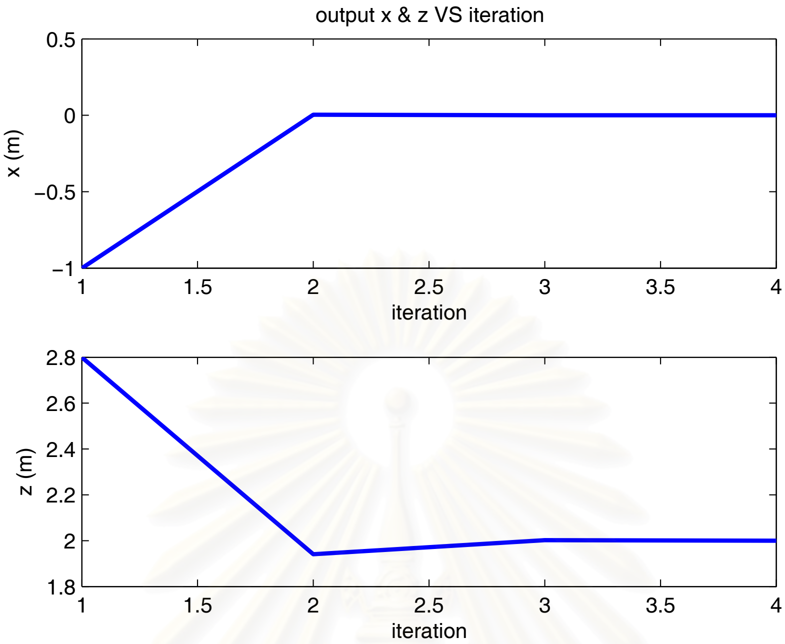
$$e_z = Z_r - Z \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned} u_2 &\approx \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{e_z}{Y}\right) \\ &\approx \frac{e_z}{2Y} \end{aligned} \tag{4.21}$$

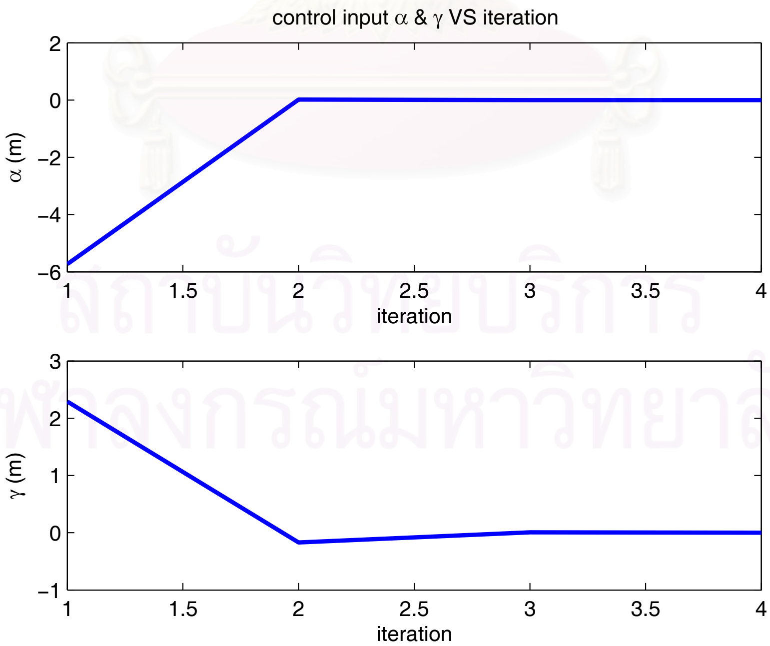
$$\therefore \quad K_2 = \frac{1}{2Y} \tag{4.22}$$

4.3.1 ผลการทดลองการใช้ตัวควบคุมแบบสัดส่วน

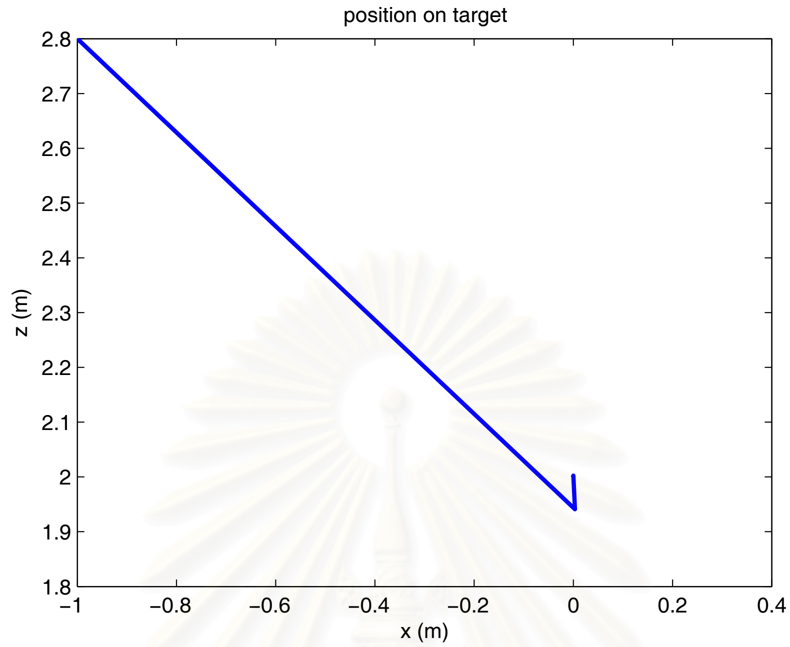
ในการทดลอง จะทำการควบคุมโดยพิจารณาว่าจุดกึ่งกลางกระจกเป็นจุดกำเนิด ตัวรับกลางอยู่ห่างจากเฮลิโอสแตทในแนวแกน y 10 m และอยู่สูงจากพื้น 2 m ตำแหน่งจุดศูนย์กลางของตัวรับกลางอยู่ที่พิกัด $(0, 10, 2)$ และตำแหน่งภาพเริ่มต้นในแนวแกน $x = -1$[m] และ $z = 2.8$[m] โดยจะนำตัวควบคุมที่ได้มาทำการทดลองกับเฮลิโอสแตทที่ติดตั้งบนพื้นลักษณะต่างๆ โดยกำหนดกรอบพื้นสี่กรอบดังนี้ G_1 เป็นพื้นราบ $\{G_2\}$ เกิดจากการหมุน $\{R\}$ รอบแนวแกน $\hat{Z}_R$ เป็นมุม 30° และหมุนรอบแนวแกน $\hat{X}_R$ เป็นมุม 15° และ $\{G_3\}$ เกิดจากการหมุน $\{R\}$ รอบแนวแกน $\hat{Z}_R$ เป็นมุม 150° และหมุนรอบแนวแกน $\hat{X}_R$ เป็นมุม 30° ซึ่งจะได้ผลการทดลองตามรูปที่ 4.5 - 4.7, 4.8 - 4.10 และ 4.11 - 4.13 ตามลำดับ



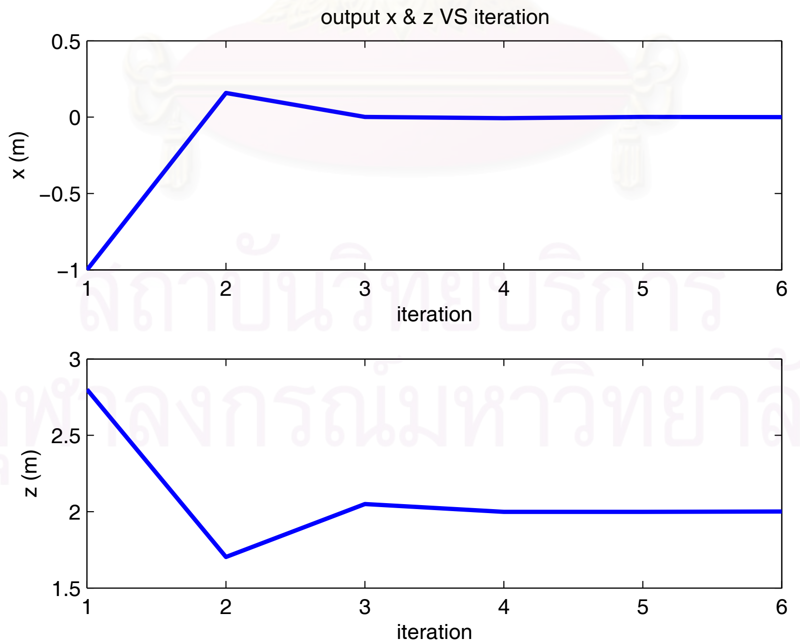
รูปที่ 4.5: ตำแหน่งภาพในแนวแกน X และ Z ในกรอบพื้นราบ $\{G_1\}$



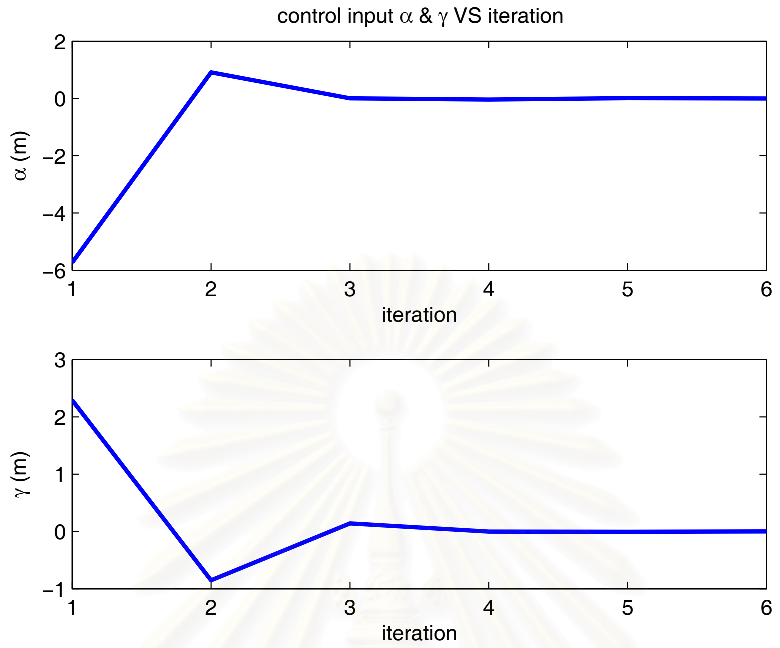
รูปที่ 4.6: สัญญาณควบคุมในกรอบพื้นราบ $\{G_1\}$



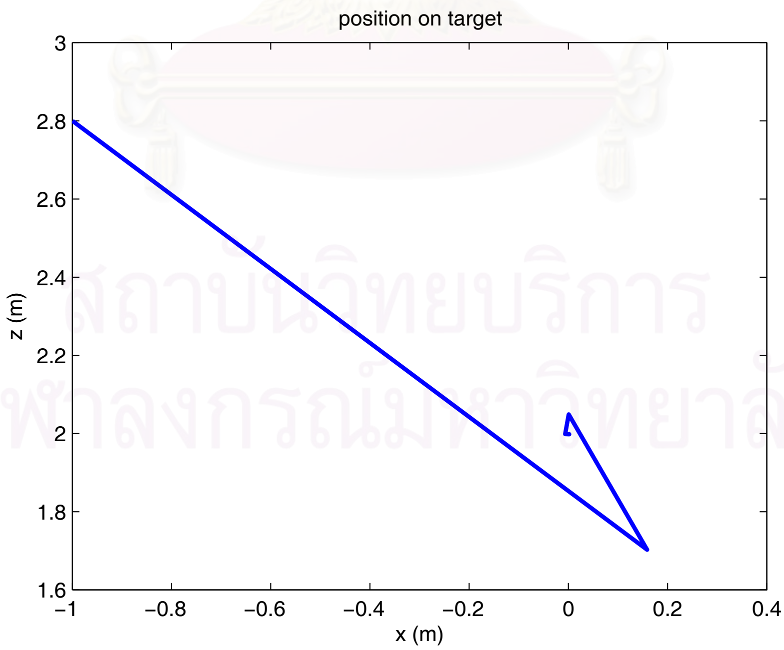
รูปที่ 4.7: ลักษณะการลู่เข้าของภาพบนตัวรับกลางในกรอบพื้นราบ $\{G_1\}$



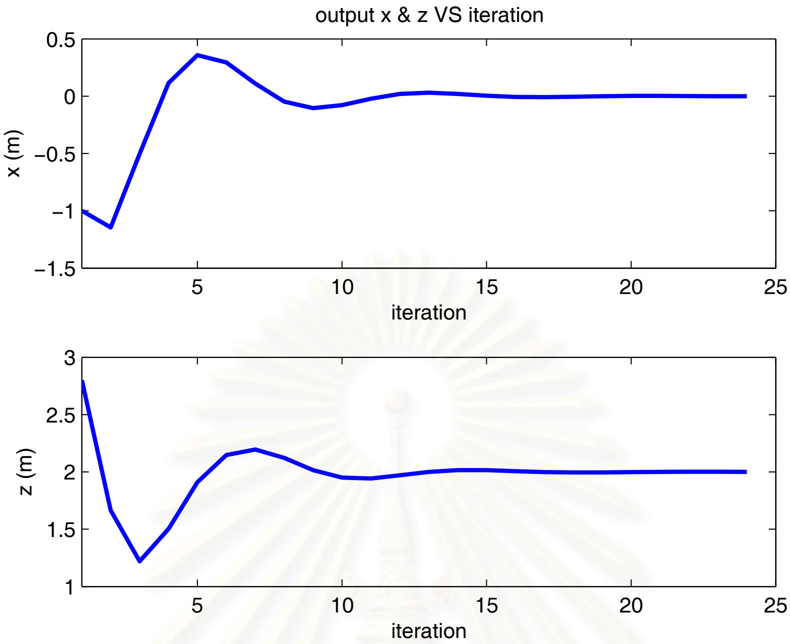
รูปที่ 4.8: ตำแหน่งภาพในแนวแกน X และ Z ในกรอบพื้นราบ $\{G_2\}$



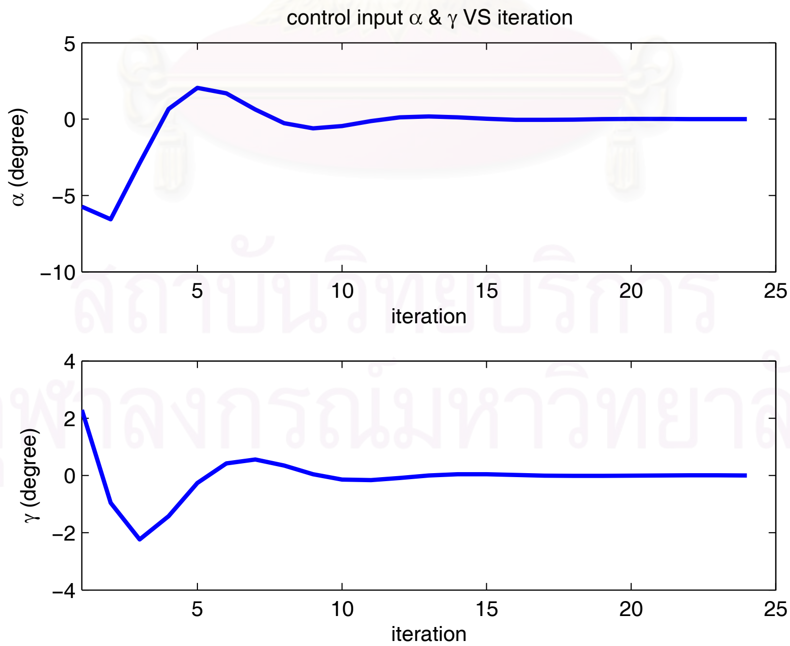
รูปที่ 4.9: สัญญาณควบคุมในกรอบพื้นราบ $\{G_2\}$



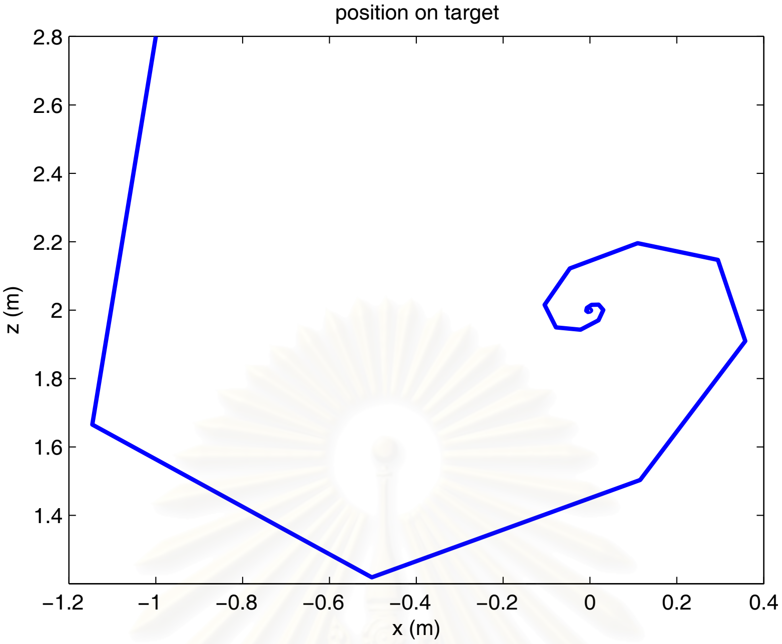
รูปที่ 4.10: ลักษณะการลู่เข้าของภาพบนตัวรับกลางในกรอบพื้นราบ $\{G_2\}$



รูปที่ 4.11: ตำแหน่งภาพในแนวแกน X และ Z ในกรอบพื้นราบ $\{G_3\}$



รูปที่ 4.12: สัญญาณควบคุมในกรอบพื้นราบ $\{G_3\}$



รูปที่ 4.13: ลักษณะการลู่เข้าของภาพบนตัวรับกลางในกรอบพื้นราบ $\{G_3\}$

4.4 การป้อนกลับสถานะเต็ม

จากหัวข้อที่แล้วพบว่าถ้าพื้นยิ่งมีความชันมากเท่าไหร่ระบบก็จะลู่เข้าช้าเท่านั้นซึ่งในการใช้งานจริงอาจเกิดความผิดพลาดเพราะว่าดวงอาทิตย์เปลี่ยนตำแหน่งไปแล้ว เนื่องจากเราสามารถทราบค่าพื้นที่ทำการติดตั้งเฮลิโอสแตทจากบทที่ 3 ในหัวข้อนี้เราจะทำการออกแบบตัวควบคุมที่ทำให้ระบบลู่เข้าภายในการหมุนเพียงครั้งเดียวนั่นคือใช้วิธีการป้อนกลับสถานะเต็ม (Full state feedback)[16]

การที่ระบบจะลู่เข้าได้ภายในหนึ่งครั้งนั้น ระบบจะต้องมีขั้ว (Pole) อยู่ที่ 0 ทุกตัว นั่นคือสมการสถานะที่ต้องการมีลักษณะดังนี้

$$\mathbf{x}_r[k+1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_r[k] + \mathbf{r}[k] \tag{4.23}$$

โดย $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \end{bmatrix}^T$ คือค่าสัญญาณอ้างอิง (ตำแหน่งเวคเตอร์ตั้งฉากของกระจกที่ทำให้แสงไปตกตรงตำแหน่งที่ต้องการ) เมื่อพิจารณา (4.13) พบว่าระบบของเรามีรากอยู่ที่ 1 ทั้งสองค่าซึ่งหมายความว่าระบบไม่มีเสถียรภาพ เราจึงต้องออกแบบตัวควบคุมที่ทำให้ (4.13) กลายเป็น (4.23) นั่นคือสัญญาณควบคุมจะมีลักษณะดังนี้

$$\begin{bmatrix} u_1[k] \\ u_2[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1[k] \\ r_2[k] \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

เนื่องจากเราไม่สามารถทราบค่าตัวแปรสถานะ (State variable) ได้โดยตรง เราต้องทำการแปลงสัญญาณขาออก (ตำแหน่งภาพบนตัวรับกลาง) ให้เป็นตัวแปรสถานะโดยใช้ตัวสังเกตการณ์ดังนี้

กำหนดให้ $t = \begin{bmatrix} X & Y & Z \end{bmatrix}^T$ โดย X และ Z เป็นตำแหน่งแสงบนตัวรับกลาง Y เป็นระยะห่างระหว่างเฮลิโอสแตทกับตัวรับกลาง เราจะสร้าง $\hat{t}$ ได้เป็น

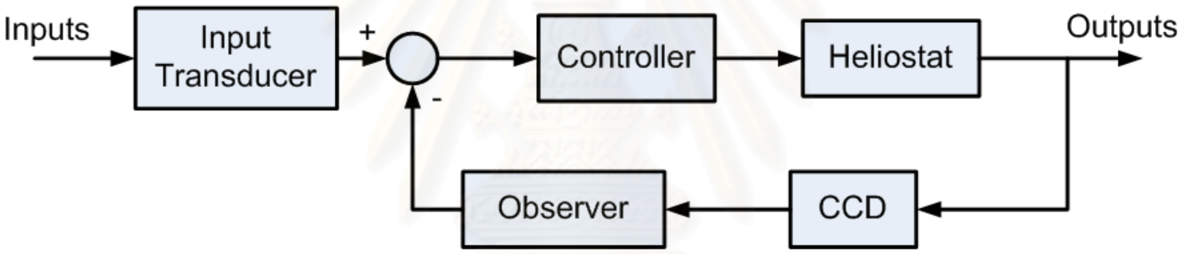
$$\hat{t} = \frac{t}{\|t\|} \tag{4.25}$$

หลังจากนั้นเราจะสามารถคำนวณ $\hat{n}$ ได้โดยนำ (4.25) ไปแทนลงใน (2.1) ต่อมาทำการแปลง $\hat{n}$ เข้าสู่กรอบพื้น นั่นคือ

$$\begin{aligned} {}^{G}\hat{n} &= {}^{G}_{R}\mathbf{R}\,\hat{n} \\ &= \begin{bmatrix} {}^{G}n_x & {}^{G}n_y & {}^{G}n_z \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{4.26}$$

สุดท้ายเราจะแปลง ${}^{G}\hat{n}$ ไปเป็นตัวแปรสถานะได้เป็น

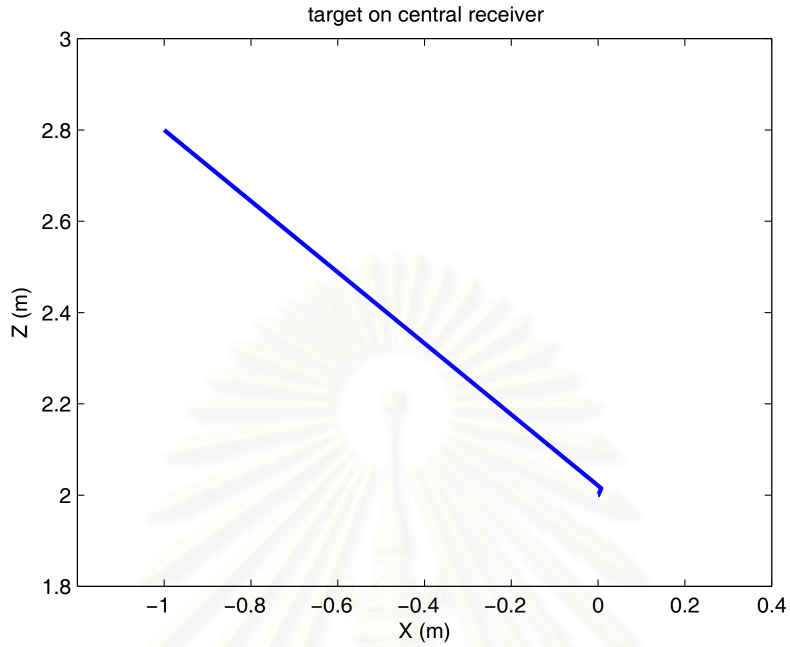
$$x = \begin{bmatrix} \tan^{-1}\left(\frac{{}^{G}n_y}{{}^{G}n_x}\right) \\ \cos^{-1}\left({}^{G}n_z\right) \end{bmatrix} \tag{4.27}$$



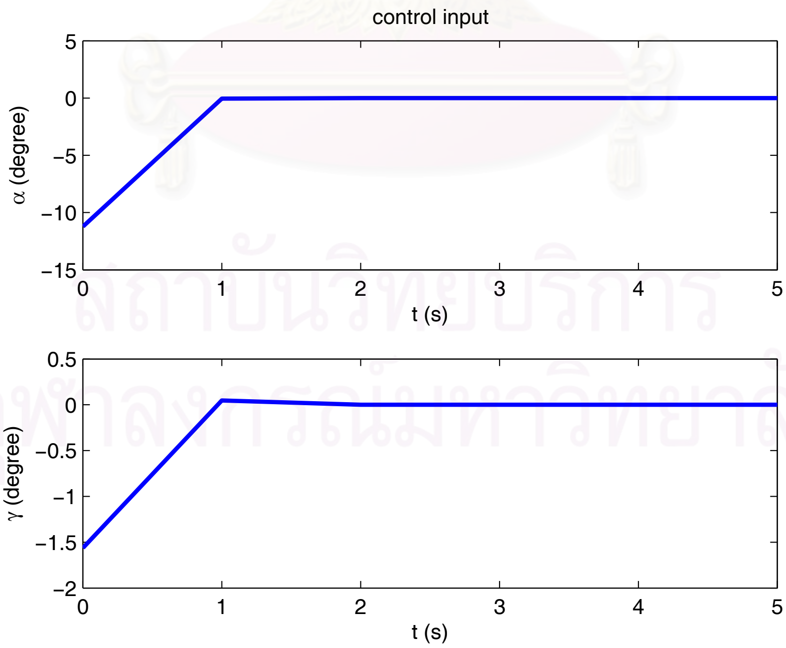
รูปที่ 4.14: block diagram ของวิธีป้อนกลับสถานะเต็ม

4.4.1 ผลการทดลองการควบคุมแบบป้อนกลับสถานะเต็ม

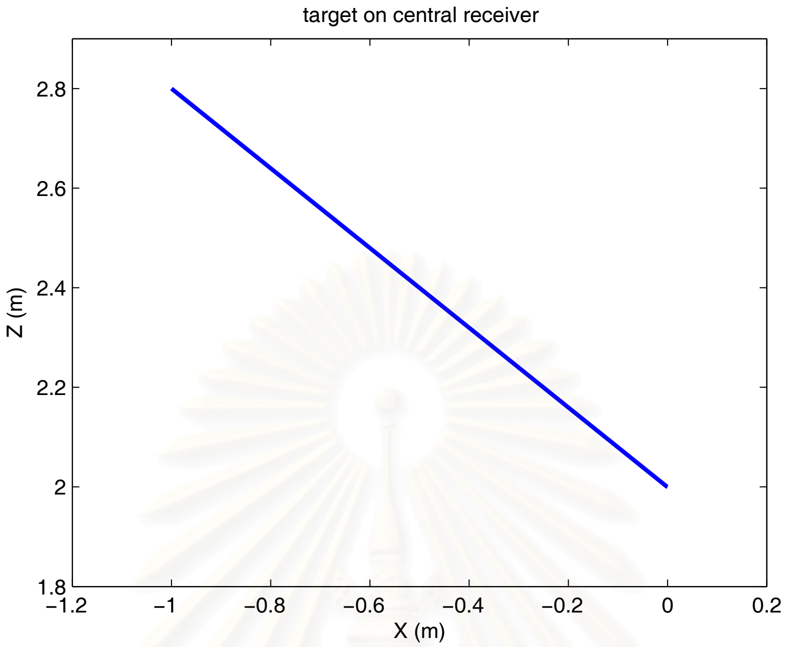
ในการทดลอง เนื่องจากเราไม่สามารถทราบความชันที่แท้จริงของพื้นได้ ค่าสัญญาณอ้างอิง $\mathbf{r}$ และตัวสังเกตุการณ์จะใช้ข้อมูลพื้นที่คำนวณได้จากหัวข้อ 3.2 มาใช้ในการคำนวณโดยจะกำหนดกรอบพื้นเช่นเดียวกับในการทดลองที่ 3.2.3 นั่นคือ $\{G_1\}$ เกิดจากการหมุน $\{R\}$ รอบแกน $\hat{Z}_R$ เป็นมุม 150° และหมุนรอบแกน $\hat{X}_R$ เป็นมุม 30° ส่วน $\{G_2\}$ เกิดจากการหมุน $\{R\}$ รอบแกน $\hat{Z}_R$ เป็นมุม -30° และหมุนรอบแกน $\hat{X}_R$ เป็นมุม 12° และ $\{G_3\}$ เกิดจากการหมุน $\{R\}$ รอบแกน $\hat{Z}_R$ เป็นมุม 30° และหมุนรอบแกน $\hat{X}_R$ เป็นมุม 20° โดยกำหนดตำแหน่งเริ่มต้นที่ $(-1, 2.8)$ เหมือนเดิมและจะได้ผลการทดลองตามรูปที่ 4.15 - 4.16, 4.17 - 4.18 และ 4.19 - 4.20 ตามลำดับ



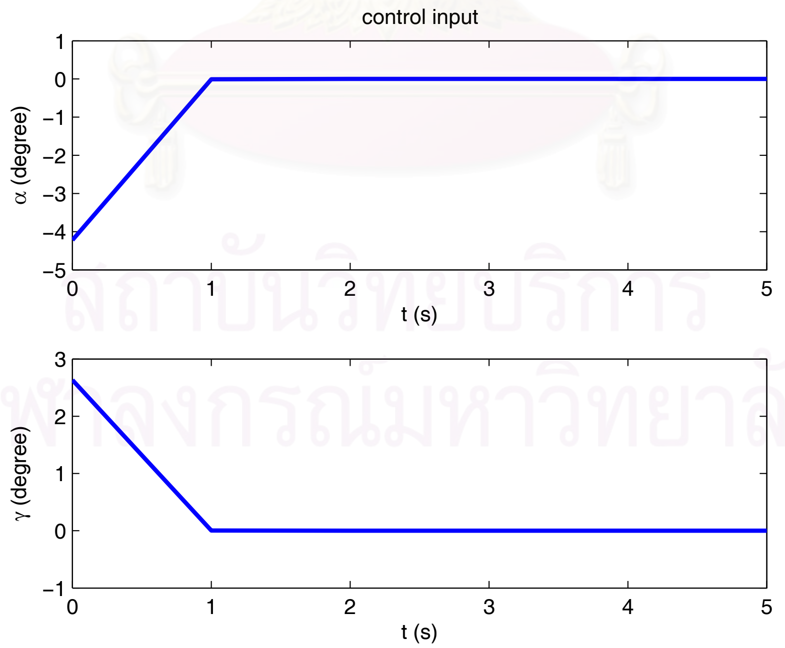
รูปที่ 4.15: การเปลี่ยนตำแหน่งของภาพบนตัวรับกลางที่กรอบ $\{G_1\}$



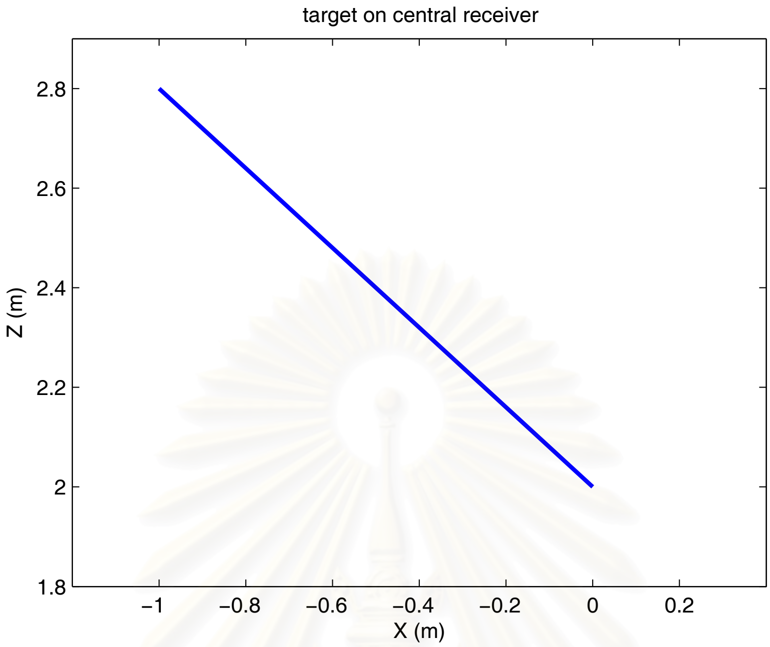
รูปที่ 4.16: สัญญาณควบคุมที่กรอบ $\{G_1\}$



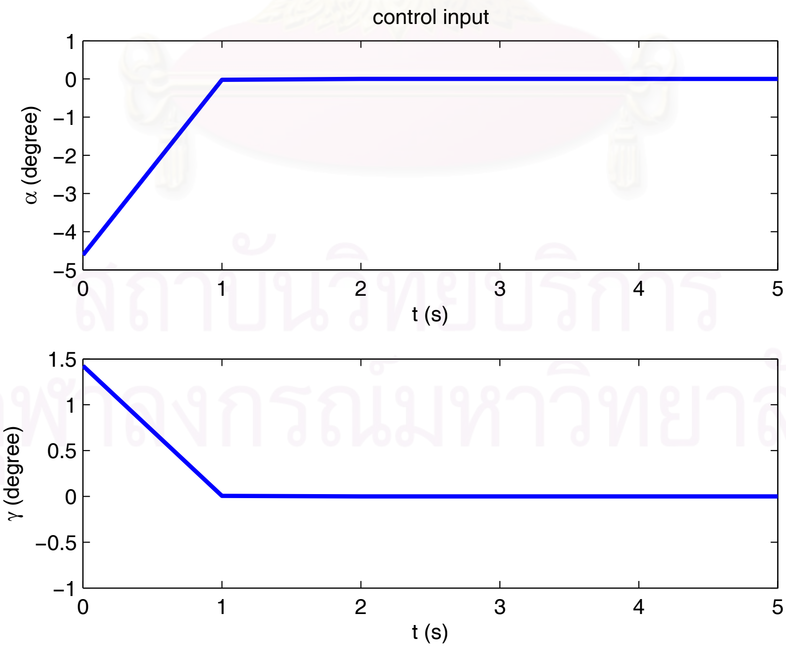
รูปที่ 4.17: การเปลี่ยนตำแหน่งของภาพบนตัวรับกลางที่กรอบ $\{G_2\}$



รูปที่ 4.18: สัญญาณควบคุมที่กรอบ $\{G_2\}$



รูปที่ 4.19: การเปลี่ยนตำแหน่งของภาพบนตัวรับกลางที่กรอบ $\{G_3\}$



รูปที่ 4.20: สัญญาณควบคุมที่กรอบ $\{G_3\}$

4.5 ตัวกรองสัญญาณรบกวนการวัด

เนื่องจากในระบบจริงแสงที่ตกกระทบบนตัวรับกลางไม่ได้เป็นจุดแต่เป็นแถบแสง เราจึงต้องคำนวณจุดเซนทรอยด์ของแสงเพื่อที่จะนำมาใช้เป็นข้อมูลในการป้อนกลับ การคำนวณอาจผิดพลาดได้เนื่องจากเราใช้ภาพที่ได้จากกล้อง CCD มาทำการคำนวณซึ่งรูปที่ได้อาจผิดเพี้ยนไปจากรูปจริงเล็กน้อย เราจะพิจารณาค่าผิดพลาดนี้เป็นสัญญาณรบกวนการวัด (measurement noise) ถ้าเรานำสัญญาณขาออกที่รวมสัญญาณรบกวนการวัดมาทำการป้อนกลับ ระบบอาจแกว่งหรือไม่มีเสถียรภาพ ฉะนั้นเราจึงต้องอออกแบบตัวกรอง (filter) เพื่อกรองสัญญาณรบกวนก่อนที่จะใช้เป็นข้อมูลในการป้อนกลับ ตัวกรองที่จะนำเสนอเป็นตัวกรองที่ไม่ซับซ้อน นำไปประยุกต์ใช้งานง่าย โดยจะใช้วิธีที่เรียกว่าค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ (Moving average) ซึ่งเป็นการหาค่าเฉลี่ยแบบไม่ถ่วงน้ำหนักของข้อมูลก่อนหน้า n จุด ตัวอย่างเช่น ถ้าเราเลือก $n = 10$ จะได้ว่า

$$MA = \frac{p_k + p_{k-1} + ... + p_{k-9}}{10} \tag{4.28}$$

และค่า MA ใหม่จะสามารถใช้ข้อมูลของ MA เก่าได้ดังนี้

$$MA_{new} = MA_{previous} - \frac{p_{k-n+1}}{n} + \frac{p_{k+1}}{n} \tag{4.29}$$

ในส่วนของการทดลอง ตัวกรองจะใช้ขั้นตอนดังนี้

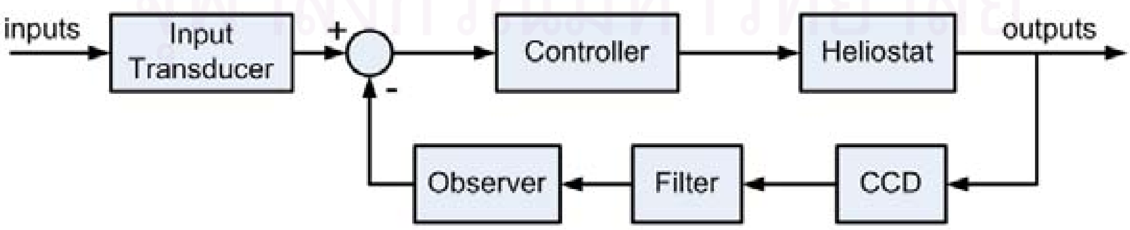
1. กำหนดให้ y เป็นผลตอบตาม (4.14) ที่รวมผลของสัญญาณรบกวนการวัด
2. ถ้าจำนวนข้อมูลของ y ยังมีไม่ถึง 10 ข้อมูล

$$MA = \frac{y[1] + ... + y[n]}{n} \qquad n \leq 10 \tag{4.30}$$

3. ถ้าจำนวนข้อมูลของ y ยังมีมากกว่า 10 ข้อมูล

$$MA = \frac{y[k] + ... + y[k-9]}{10} \tag{4.31}$$

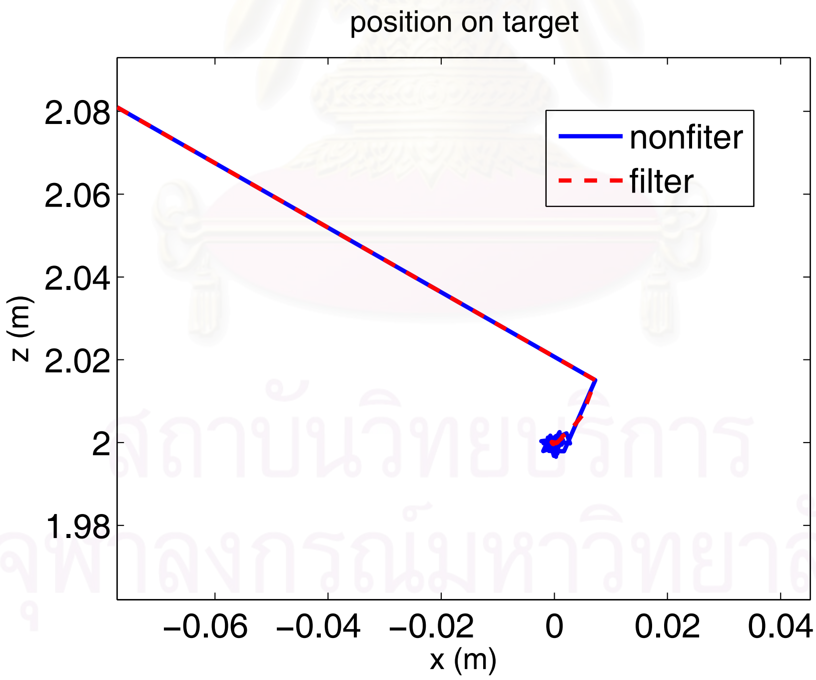
แล้วนำค่า MA ที่ได้ไปผ่านตัวสังเกตการณ์เพื่อที่จะใช้ในการคำนวณสัญญาณควบคุมต่อไป



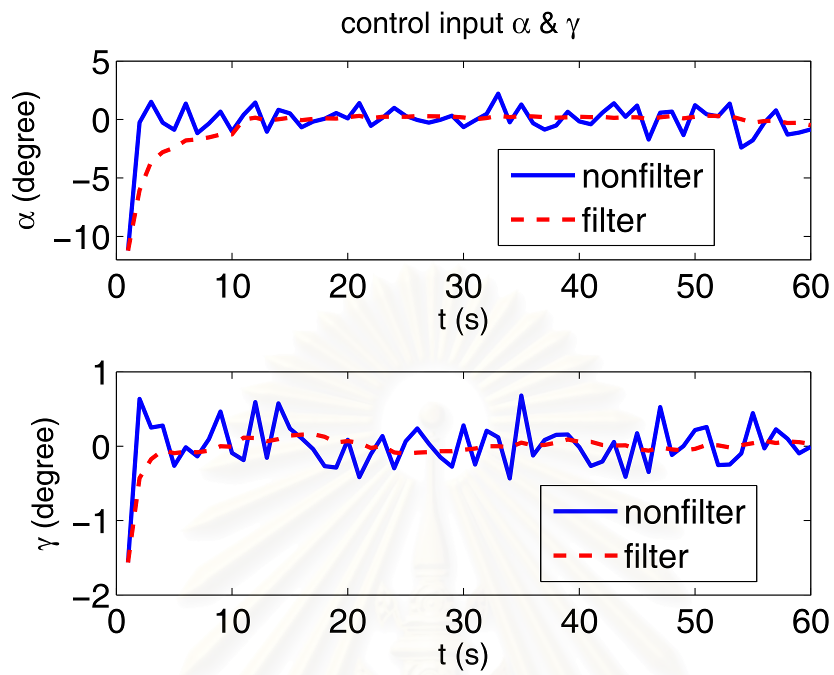
รูปที่ 4.21: block diagram include filter

4.5.1 ผลการทดลองการควบคุมแบบพิจารณาสัญญาณรบกวนการวัด

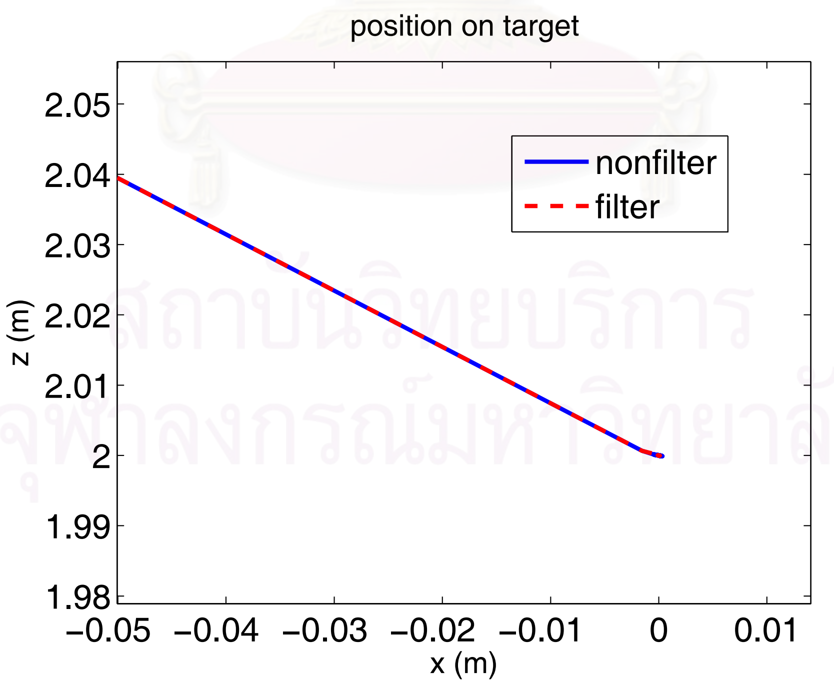
ในการทดลองนี้จะใช้กรอบพื้นเดียวกันกับการทดลองแบบป้อนกลับสถานะเต็มทุกประการนั่นคือ $\{G_1\}$ เกิดจากการหมุน $\{R\}$ รอบแกน $\hat{Z}_R$ เป็นมุม $150°$ และหมุนรอบแกน $\hat{X}_R$ เป็นมุม $30°$ ส่วน $\{G_2\}$ เกิดจากการหมุน $\{R\}$ รอบแกน $\hat{Z}_R$ เป็นมุม $-30°$ และหมุนรอบแกน $\hat{X}_R$ เป็นมุม $12°$ และ $\{G_3\}$ เกิดจากการหมุน $\{R\}$ รอบแกน $\hat{Z}_R$ เป็นมุม $30°$ และหมุนรอบแกน $\hat{X}_R$ เป็นมุม $20°$ และกำหนดตำแหน่งเริ่มต้นที่ $(-1, 2.8)$ แต่จะเพิ่มตรงที่สัญญาณผลตอบที่อ่านได้จากกล้อง CCD จะรวมสัญญาณรบกวนการวัดมาด้วย โดยกำหนดให้สัญญาณรบกวนการวัดเป็นการกระจายแบบเกาส์เซียนที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 [cm] และมีความแปรปรวน (Variance) เป็น 100 [cm^2] พร้อมทั้งแทรกตัวกรองไว้ระหว่าง CCD กับตัวสังเกตการ์ดังรูปที่ 4.21 จากผลการทดลองจะพบว่าตำแหน่งภาพบนตัวรับกลางจะลู่เข้าสู่ตำแหน่งอ้างอิงโดยสัญญาณที่ผ่านตัวกรองกับสัญญาณที่ไม่ผ่านตัวกรองจะทับกันแทบสนิทแต่สัญญาณที่ไม่ผ่านตัวกรองจะมีการแกว่งรอบ ๆ จุดอ้างอิงเล็กน้อย ส่วนสัญญาณควบคุมจะพบว่าสัญญาณควบคุมของระบบที่ไม่มีตัวกรองจะแกว่งตลอดเวลา ในขณะที่สัญญาณควบคุมของระบบที่มีตัวกรองจะค่อนข้างเรียบมากกว่า



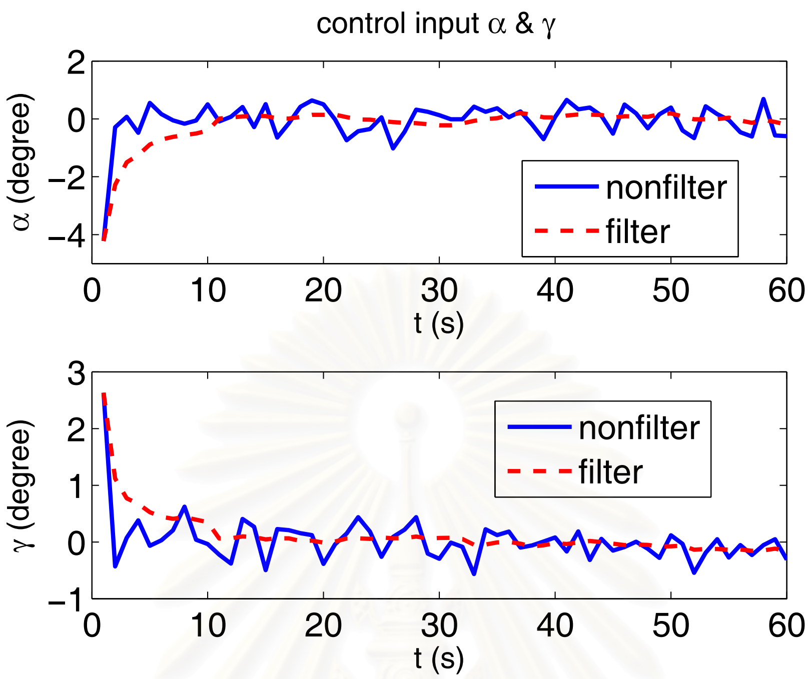
รูปที่ 4.22: ตำแหน่งภาพบนตัวรับกลางที่กรอบ $\{G_1\}$



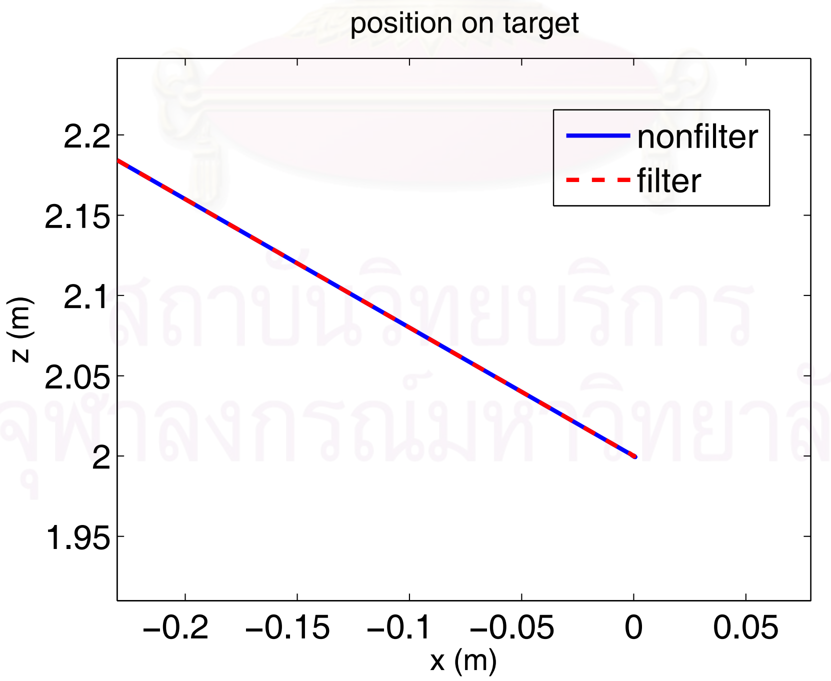
รูปที่ 4.23: สัญญาณควบคุมที่กรอบ $\{G_1\}$



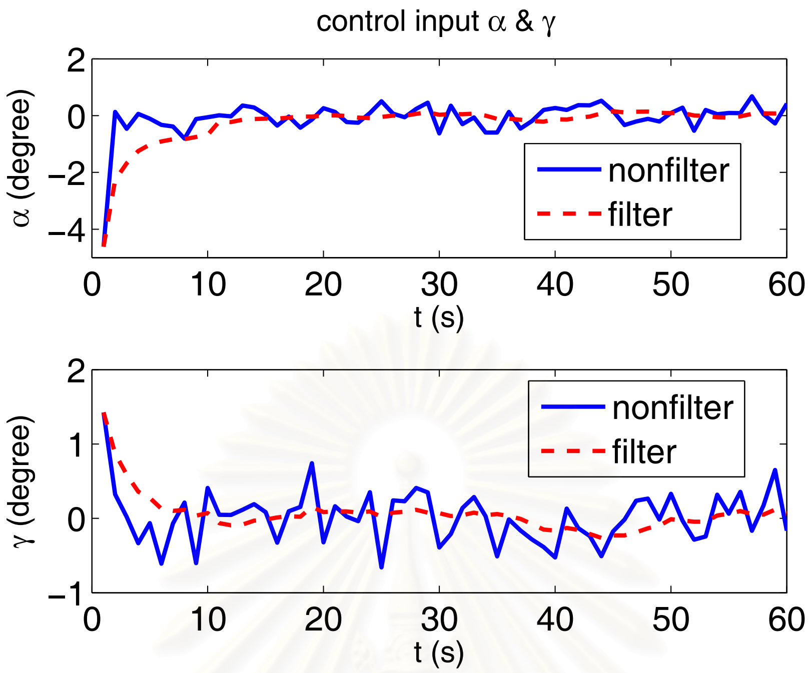
รูปที่ 4.24: ตำแหน่งภาพบนตัวรับกลางที่กรอบ $\{G_2\}$



รูปที่ 4.25: สัญญาณควบคุมที่กรอบ $\{G_2\}$



รูปที่ 4.26: ตำแหน่งภาพบนตัวรับกลางที่กรอบ $\{G_3\}$

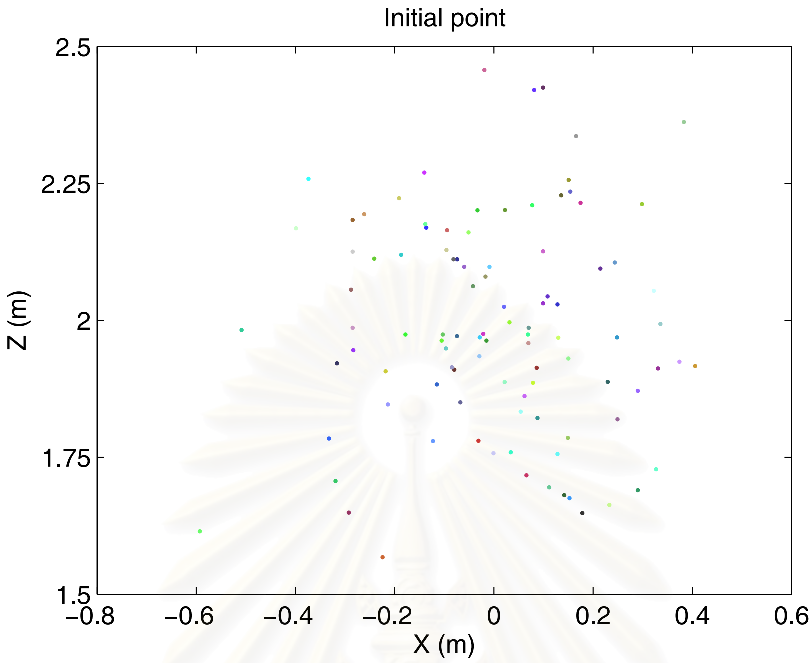


รูปที่ 4.27: สัญญาณควบคุมที่กรอบ $\{G_3\}$

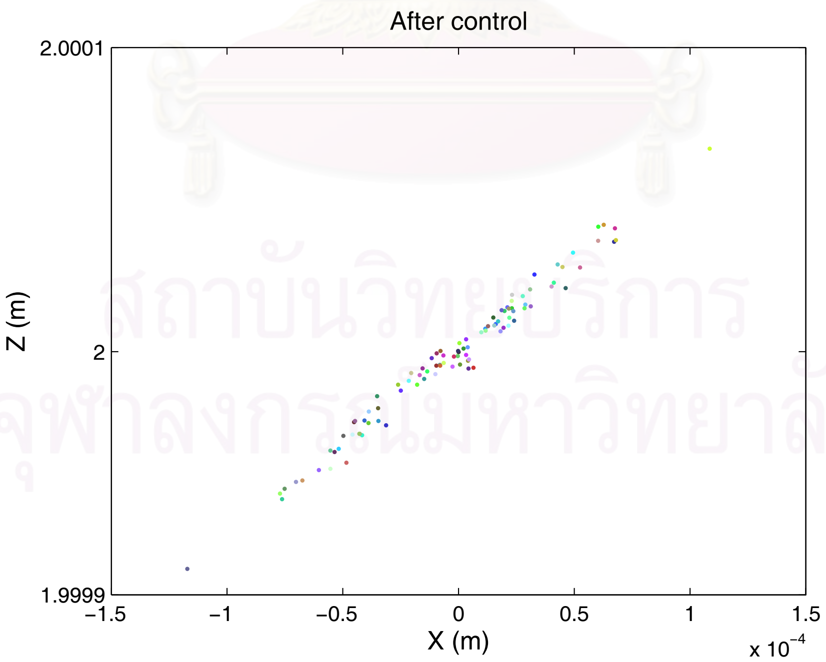
4.5.2 ผลการทดลองการควบคุมโดยทำการสุ่มจุดเริ่มต้น 100 จุดที่ค่าพื้นเอียงต่างๆ

จากผลการทดลองที่แล้วพบว่า ระบบที่ผ่านตัวกรองจะมีช่วงเวลาเข้าที่ (Settling time) อยู่ที่จำนวนรอบวนซ้ำที่ 15 เนื่องจากเราต้องการทำการเทียบมาตรฐานให้เร็วที่สุดเราจึงเลือกตำแหน่งคำตอบที่ต้องการที่รอบการวนซ้ำที่ 15 ในการทดลองนี้จะสุ่มจุดเริ่มต้น 100 จุดโดยทั้ง 100 จุดจะเป็นการแจกแจงเอกรูป (Uniform distribution) ที่พื้นต่างกัน 6 ค่า โดยกำหนดให้ $\{G_1\}$ มีค่า $\alpha_0 = -111.059°$ และ $\gamma_0 = 5.966°$ ซึ่งค่าพื้น $\{G_1\}$ ที่คำนวณได้จะมีค่าตามข้อมูลที่ 6 ของตารางที่ 3.9 โดยตำแหน่งของจุดเริ่มต้นจะมีค่าความแปรปรวนร่วมเกี่ยว (Covariance) เป็น $\begin{bmatrix} 405.06 & -13.01 \\ -13.01 & 401.83 \end{bmatrix}$ [cm^2] ซึ่งจะแสดงในรูปที่ 4.28 ส่วนผลหลังการควบคุมจะมีค่าความแปรปรวนร่วมเกี่ยวเป็น $\begin{bmatrix} 0.1493 & 0.0901 \\ 0.0901 & 0.0555 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$ [cm^2] ซึ่งจะแสดงในรูปที่ 4.29 กรอบ $\{G_2\}$ มีค่า $\alpha_0 = -24.527°$ และ $\gamma_0 = 28.017°$ ซึ่งค่าพื้น $\{G_2\}$ ที่คำนวณได้จะมีค่าตามข้อมูลที่ 5 ของตารางที่ 3.9 โดยตำแหน่งของจุดเริ่มต้นจะมีค่าความแปรปรวนร่วมเกี่ยว (Covariance) เป็น $\begin{bmatrix} 301.7190 & -5.8262 \\ -5.8262 & 356.9771 \end{bmatrix}$ [cm^2] ซึ่งจะแสดงในรูปที่ 4.30 ส่วนผลหลังการควบคุมจะมีค่าความแปรปรวนร่วมเกี่ยวเป็น $\begin{bmatrix} 0.9329 & 0.3521 \\ 0.3521 & 0.1329 \end{bmatrix} \times 10^{-5}$ [cm^2] ซึ่งจะแสดงในรูปที่ 4.31 กรอบ $\{G_3\}$ มีค่า $\alpha_0 = -134.93°$ และ $\gamma_0 = 0.976°$ ซึ่งค่าพื้น $\{G_2\}$ ที่คำนวณได้จะมีค่าตามข้อมูลที่ 17 ของตารางที่ 3.9 โดยตำแหน่งของจุดเริ่มต้นจะมีค่าความแปรปรวนร่วมเกี่ยว (Covariance) เป็น $\begin{bmatrix} 347.3153 & -22.9742 \\ -22.9742 & 441.9349 \end{bmatrix}$ [cm^2] ซึ่งจะแสดงในรูปที่ 4.32 ส่วนผลหลังการควบคุมจะมีค่าความแปรปรวน

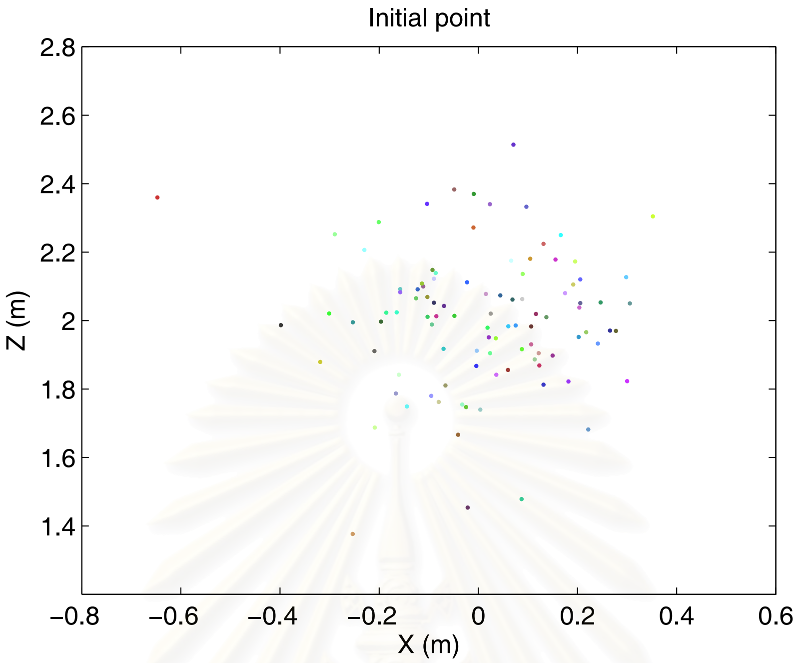
ร่วมเกี่ยวเป็น $\begin{bmatrix} 0.0019 & -0.0002 \\ -0.0002 & 0.0000 \end{bmatrix}$ [cm^2] ซึ่งจะแสดงในรูปที่ 4.33 และจะเปรียบเทียบกับค่าพื้นที่ประมาณเป็นพื้นราบซึ่งจะมีค่าความแปรปรวนร่วมเกี่ยวเป็น $\begin{bmatrix} 0.0039 & -0.0040 \\ -0.0040 & 0.0067 \end{bmatrix}$ [cm^2] และจะแสดงในรูปที่ 4.34 กรอบ $\{G_4\}$ มีค่า $\alpha_0 = 0.607^\circ$ และ $\gamma_0 = 36.094^\circ$ ซึ่งค่าพื้น $\{G_2\}$ ที่คำนวณได้จะมีค่าตามข้อมูลที่ 57 ของตารางที่ 3.9 โดยตำแหน่งของจุดเริ่มต้นจะมีค่าความแปรปรวนร่วมเกี่ยว (Covariance) เป็น $\begin{bmatrix} 473.3414 & -48.2337 \\ -48.2337 & 408.3844 \end{bmatrix}$ [cm^2] ซึ่งจะแสดงในรูปที่ 4.35 ส่วนผลหลังการควบคุมจะมีค่าความแปรปรวนร่วมเกี่ยวเป็น $\begin{bmatrix} 0.3536 & 0.0908 \\ 0.0908 & 0.0239 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$ [cm^2] ซึ่งจะแสดงในรูปที่ 4.36 กรอบ $\{G_5\}$ มีค่า $\alpha_0 = 52.481^\circ$ และ $\gamma_0 = 16.11^\circ$ ซึ่งค่าพื้น $\{G_2\}$ ที่คำนวณได้จะมีค่าตามข้อมูลที่ 67 ของตารางที่ 3.9 โดยตำแหน่งของจุดเริ่มต้นจะมีค่าความแปรปรวนร่วมเกี่ยว (Covariance) เป็น $\begin{bmatrix} 420.6529 & -61.5753 \\ -61.5753 & 407.5792 \end{bmatrix}$ [cm^2] ซึ่งจะแสดงในรูปที่ 4.37 ส่วนผลหลังการควบคุมจะมีค่าความแปรปรวนร่วมเกี่ยวเป็น $\begin{bmatrix} 0.1398 & -0.0340 \\ -0.0340 & 0.0083 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$ [cm^2] ซึ่งจะแสดงในรูปที่ 4.38 กรอบ $\{G_6\}$ มีค่า $\alpha_0 = 169.962^\circ$ และ $\gamma_0 = 30.323^\circ$ ซึ่งค่าพื้น $\{G_2\}$ ที่คำนวณได้จะมีค่าตามข้อมูลที่ 71 ของตารางที่ 3.9 โดยตำแหน่งของจุดเริ่มต้นจะมีค่าความแปรปรวนร่วมเกี่ยว (Covariance) เป็น $\begin{bmatrix} 348.0126 & -9.0709 \\ -9.0709 & 454.5052 \end{bmatrix}$ [cm^2] ซึ่งจะแสดงในรูปที่ 4.39 ส่วนผลหลังการควบคุมจะมีค่าความแปรปรวนร่วมเกี่ยวเป็น $\begin{bmatrix} 0.4302 & 0.1041 \\ 0.1041 & 0.2928 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$ [cm^2] ซึ่งจะแสดงในรูปที่ 4.40 จากการทดลองทั้ง 6 กรอบพบว่าหลังการควบคุมค่าความแปรปรวนแก่เียวร่วมจะลดลงอย่างมาก นั่นคือระบบจะลู่เข้าคำตอบอ้างอิงโดยมีความผิดเพี้ยนเนื่องจากสัญญาณรบกวนน้อยมาก ส่วนการที่ γ_0 มีค่าเข้าใกล้ 0 ซึ่งมีปัญหาตรงที่ว่าค่า α_0 ที่ได้จากการคำนวณอาจมีความผิดพลาดพอสมควรนั้นก็ยังได้ผลที่ดีกว่าประมาณพื้นเป็นพื้นราบนิดหน่อย ในการทดลองจริงจะเลือกใช้ค่าที่ได้จากการคำนวณหรือประมาณว่าเป็นพื้นราบไปเลยก็ได้



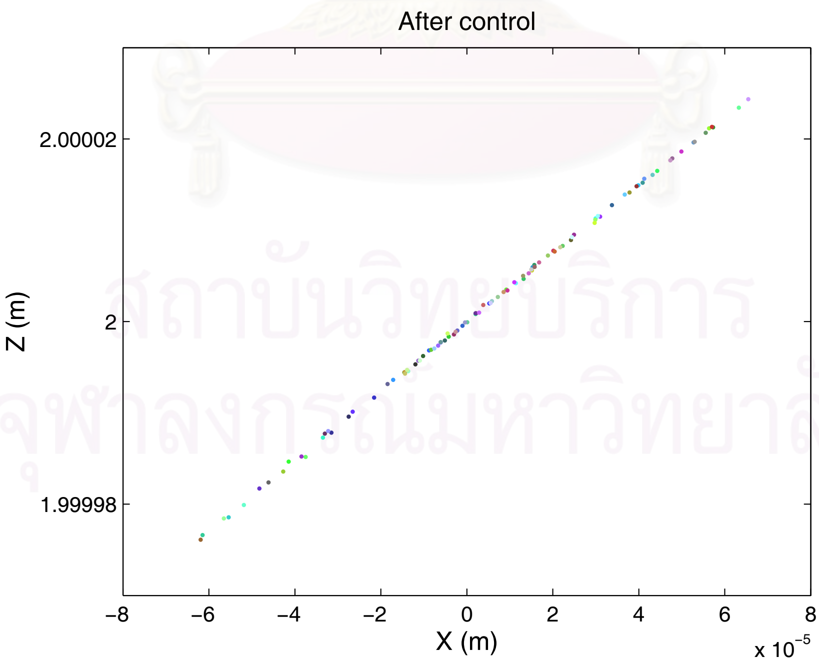
รูปที่ 4.28: ตำแหน่งจุดเริ่มต้น 100 จุดของกรอบ $\{G_1\}$



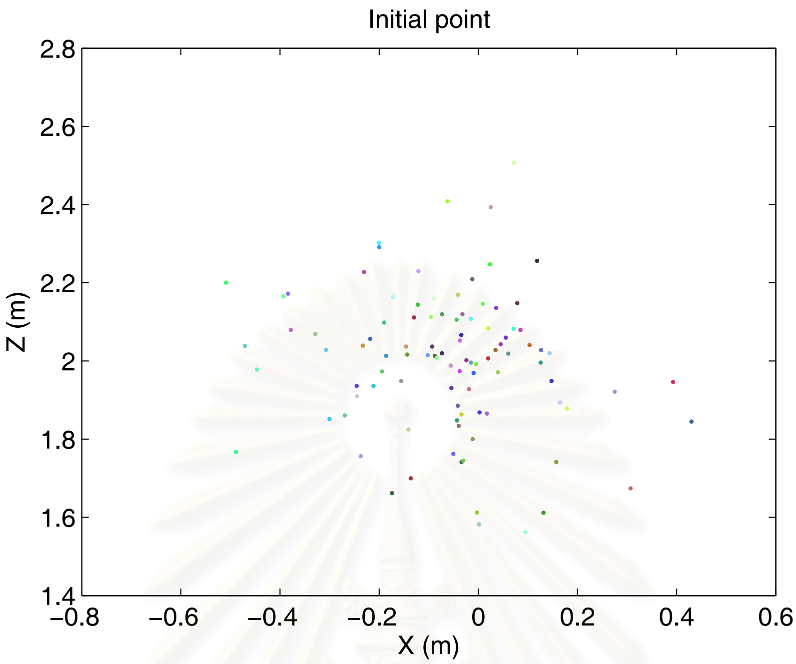
รูปที่ 4.29: ตำแหน่งภาพบนตัวรับกลางหลังการควบคุมที่กรอบ $\{G_1\}$



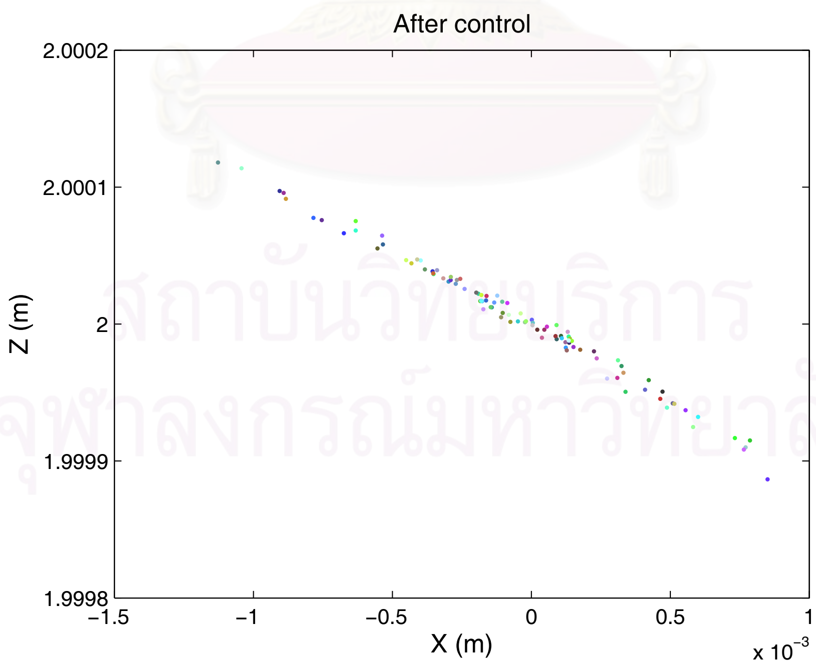
รูปที่ 4.30: ตำแหน่งจุดเริ่มต้น 100 จุดของกรอบ $\{G_2\}$



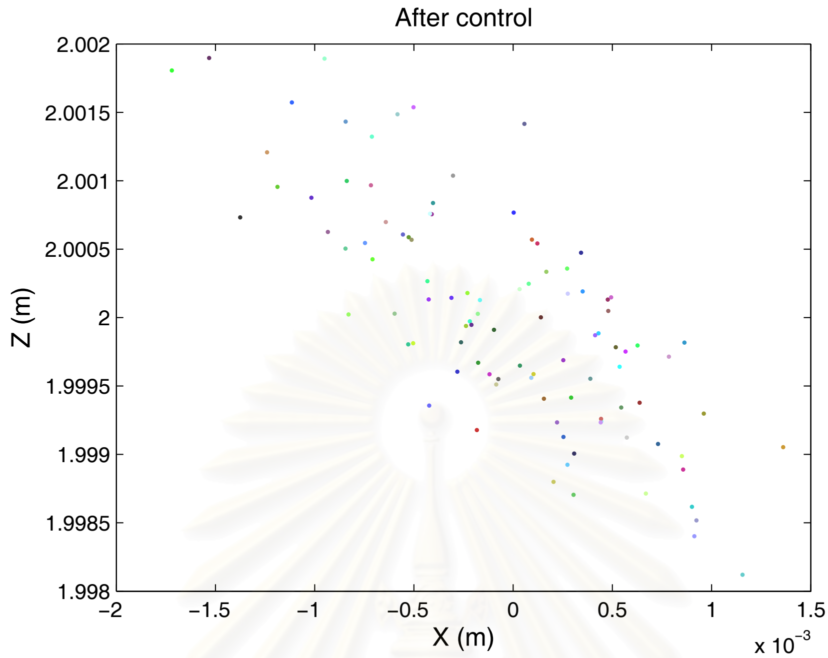
รูปที่ 4.31: ตำแหน่งภาพบนตัวรับกลางหลังการควบคุมที่กรอบ $\{G_2\}$



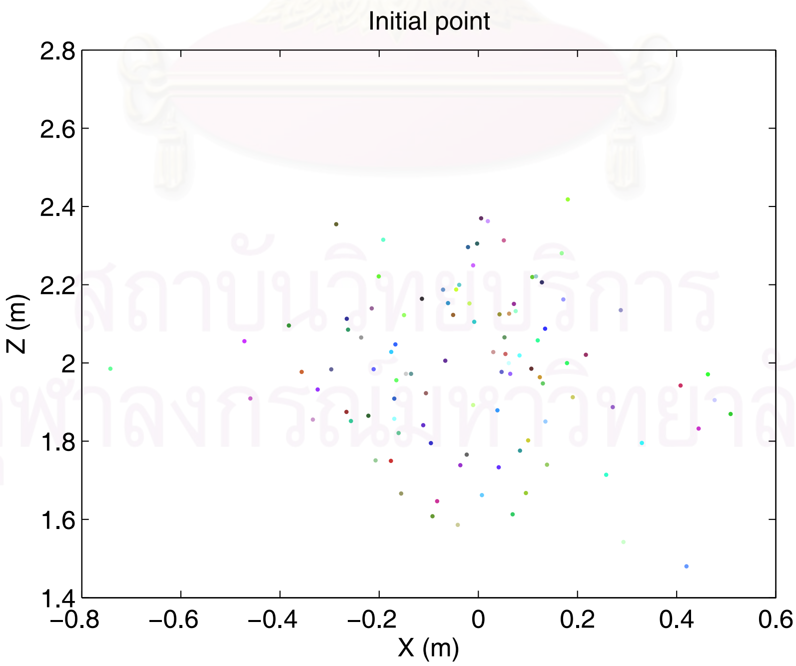
รูปที่ 4.32: ตำแหน่งจุดเริ่มต้น 100 จุดของกรอบ $\{G_3\}$



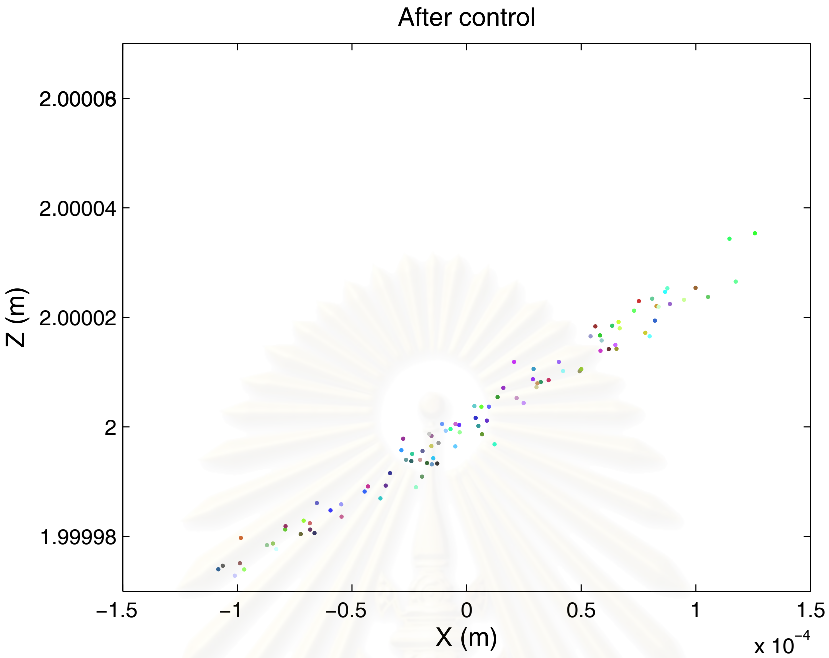
รูปที่ 4.33: ตำแหน่งภาพบนตัวรับกลางหลังการควบคุมที่กรอบ $\{G_3\}$ เมื่อใช้ค่าพื้นที่ได้จากการคำนวณ



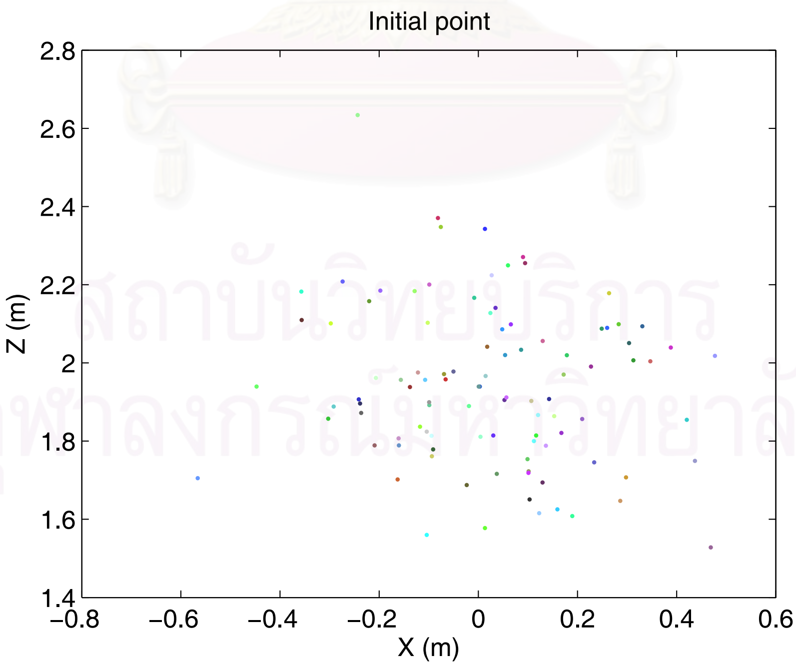
รูปที่ 4.34: ตำแหน่งภาพบนตัวรับกลางหลังการควบคุมที่กรอบ $\{G_3\}$ เมื่อใช้ค่าพื้นที่ประมาณว่าพื้นเป็นพื้นราบ



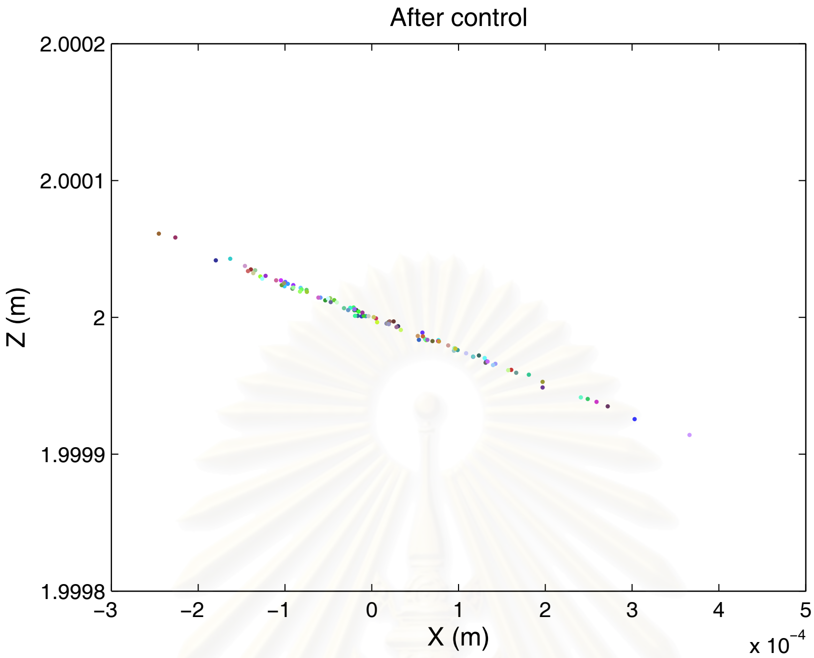
รูปที่ 4.35: ตำแหน่งจุดเริ่มต้น 100 จุดของกรอบ $\{G_4\}$



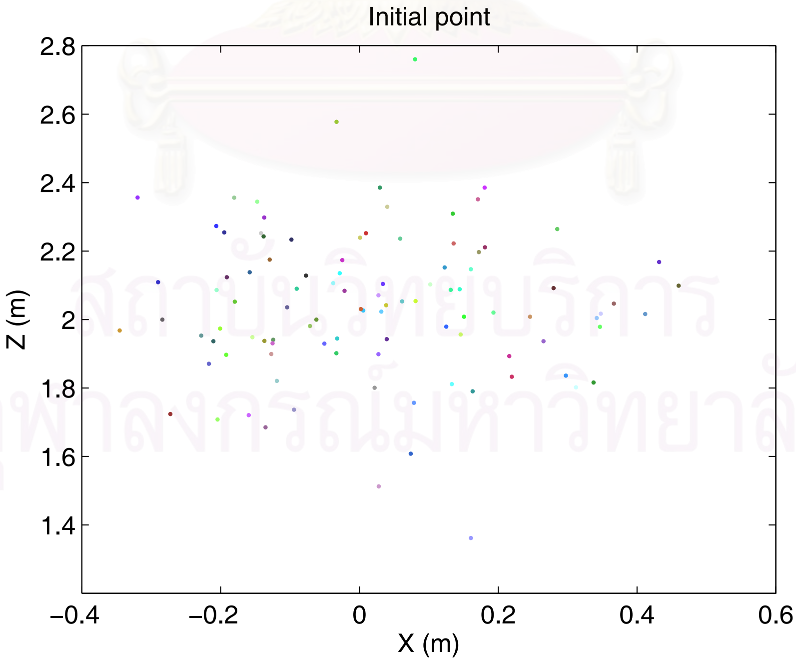
รูปที่ 4.36: ตำแหน่งภาพบนตัวรับกลางหลังการควบคุมที่กรอบ $\{G_4\}$



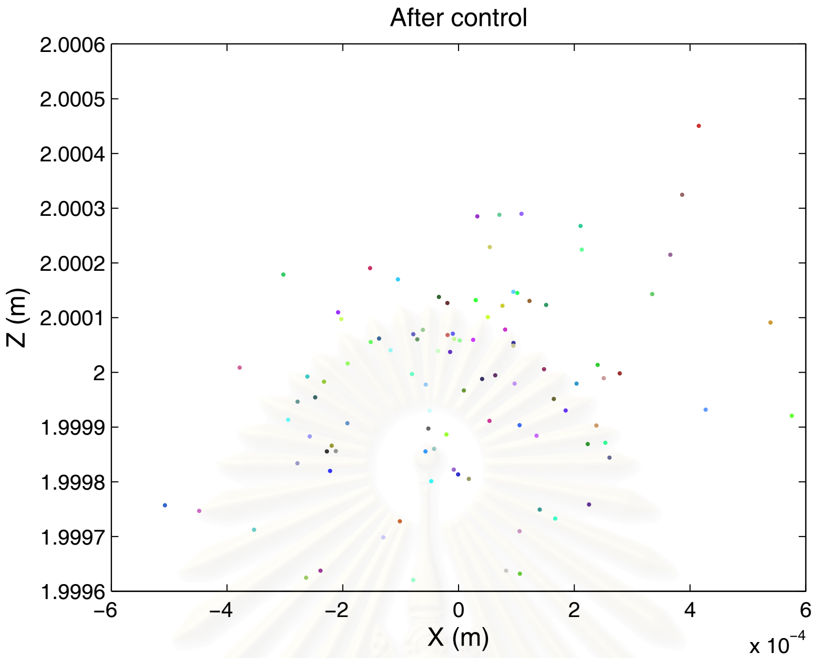
รูปที่ 4.37: ตำแหน่งจุดเริ่มต้น 100 จุดของกรอบ $\{G_5\}$



รูปที่ 4.38: ตำแหน่งภาพบนตัวรับกลางหลังการควบคุมที่กรอบ $\{G_5\}$



รูปที่ 4.39: ตำแหน่งจุดเริ่มต้น 100 จุดของกรอบ $\{G_6\}$



รูปที่ 4.40: ตำแหน่งภาพบนตัวรับกลางหลังการควบคุมที่กรอบ $\{G_6\}$

4.6 สรุป

ในบทนี้เราได้นำปริภูมิสถานะจากบทที่ 2 พิจารณาซึ่งพบว่าเป็นระบบที่มีสัญญาณขาเข้าสองค่าและสัญญาณขาออกสองค่าและไม่เป็นอิสระซึ่งกันและกัน เราจึงพิจารณาระบบให้อยู่ในพิกัดทรงกลมซึ่งจะย้ายส่วนของความไม่เป็นเชิงเส้นไปสู่สมการคำตอบและทำให้สมการสถานะเป็นสมการเชิงเส้นที่เป็นอิสระต่อกัน หลังจากที่ได้ปริภูมิสถานะใหม่แล้ว เราจะทำการออกแบบตัวควบคุมโดยวิธีแรกที่ทำคือทำการป้อนกลับผลตอบโดยใช้ตัวควบคุมแบบสัดส่วน ก่อนที่จะออกแบบตัวควบคุมเราจะพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณขาเข้าแต่ละตัวว่ามีผลกระทบต่อสัญญาณขาออกอย่างไรซึ่งจะพบว่าเมื่อใส่สัญญาณขาเข้าในแนวอิลิเวชั่นตำแหน่งภาพจะมีมุมเปลี่ยนแปลงไปเป็นสองเท่าของสัญญาณขาเข้า หลังจากพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณขาเข้ากับสัญญาณขาออกแล้ว เราจะทำการออกแบบตัวควบคุมโดยพิจารณาว่าเฮลิโอสแตททำการติดตั้งที่พื้นราบก่อนแล้วจึงนำค่าอัตราขยายที่ได้ไปทดลองกับเฮลิโอสแตทที่ติดตั้งบนพื้นที่มีความชันจากผลการทดลองพบว่ายิ่งพื้นที่ทำการติดตั้งเฮลิโอสแตทมีความชันมากเท่าไร ระบบจะลู่เข้าตำแหน่งอ้างอิงช้าเท่านั้น ซึ่งจะกลายเป็นผลเสียเนื่องจากยิ่งระบบลู่เข้าช้าจนตำแหน่งดวงอาทิตย์เปลี่ยนไปจะทำให้ไม่สามารถลู่เข้าสู่ตำแหน่งอ้างอิงได้ จากปัญหานี้เราจึงพยายามออกแบบตัวควบคุมที่ทำให้ระบบลู่เข้าตำแหน่งอ้างอิงให้เร็วที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้โดยจะใช้วิธีป้อนกลับสถานะเต็ม การจะใช้วิธีนี้เราจำเป็นต้องทราบตัวแปรสถานะของระบบ แต่เนื่องจากเราทราบแค่ผลตอบของระบบ เราจึงจำเป็นต้องสร้างตัวสังเกตการณ์มาคำนวณตัวแปรสถานะโดยจะใช้ข้อมูลพื้นเอียงที่ได้จากบทที่ 3 มาช่วย จากผลการทดลองพบว่าถึงแม้ว่าค่าประมาณของพื้นที่ทำการติดตั้งเฮลิโอสแตทจะไม่เท่ากับค่าจริงอย่างสมบูรณ์ แต่ระบบก็ลู่เข้าไม่เกินสามรอบการทำงานซึ่งในแต่ละรอบทำงานจะใช้เวลาประมาณ 1 วินาที เพราะฉะนั้นเราจึงสามรถอนุโลม

ได้ว่าดวงอาทิตย์ยังไม่เปลี่ยนตำแหน่ง สุดท้ายเราจะพิจารณาสัญญาณรบกวนการวัดซึ่งจะเกิดขึ้นในระบบจริง สัญญาณรบกวนการวัดอาจทำให้ระบบไม่นิ่ง (เกิดการแกว่งรอบๆค่าอ้างอิง) หรืออาจทำให้ระบบสูญเสียเสถียรภาพได้ เราจึงต้องทำการกรองสัญญาณรบกวนนี้ออกเสีย โดยแนวคิดการออกแบบตัวกรองจะคำนึงถึงการประยุกต์ใช้งานจริงเป็นสำคัญ ตัวกรองที่ใช้เลยเป็นตัวกรองแบบง่ายๆโดยทำการเก็บข้อมูลสัญญาณขาออกแล้วทำการเฉลี่ยก่อนที่จะนำสัญญาณที่ได้ป้อนเข้าสู่ตัวสังเกตการณ์ จากผลการทดลองพบว่าสัญญาณควบคุมที่เกิดจากระบบมีตัวกรองจะมีลักษณะเรียบกว่าสัญญาณควบคุมที่ระบบไม่มีตัวกรอง

บทที่ 5

บทสรุปและข้อเสนอแนะ

5.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอวิธีการเทียบมาตรฐานของเฮลิโอสแตทซึ่งเป็นหนึ่งในสองส่วนการทำงานหลักของเฮลิโอสแตทซึ่งใช้ในการปรับแก้ตำแหน่งทิศทางของเฮลิโอสแตทที่ผิดเพี้ยนและทำการประมาณพื้นที่ทำการติดตั้งเฮลิโอสแตทเพื่อที่จะทำให้วิธีการติดตามดวงอาทิตย์ซึ่งเป็นส่วนการทำงานที่สำคัญที่สุดของเฮลิโอสแตทให้มีความแม่นยำถูกต้องมากขึ้น ในการเทียบมาตรฐาน เราจะใช้เป้าที่แยกจากตัวรับกลางที่ทำการรวมแสงอาทิตย์และทำการเทียบมาตรฐานเฮลิโอสแตททีละตัวเนื่องจากเราไม่สามารถทราบได้ว่าการที่แสงตกกระทบไม่ตรงตำแหน่งอ้างอิงเกิดจากเฮลิโอสแตทตัวใด

ก่อนที่จะเริ่มการเทียบมาตรฐาน การทราบแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของลักษณะการสะท้อนแสงโดยใช้เฮลิโอสแตทจะมีประโยชน์ในการออกแบบมาก ในบทที่ 2 ได้นิยามเมทริกซ์การหมุน ตัวดำเนินการการหมุน และการหมุนแบบออยเลอร์ ซึ่งทั้งสามเป็นเนื้อหาสำคัญในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของลักษณะการสะท้อนแสงโดยใช้เฮลิโอสแตท หลังจากที่ได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แล้วเราจะทำการเทียบมาตรฐาน โดยการเทียบมาตรฐานแบ่งเป็น 2 ส่วนคือ

1. การประมาณพื้นที่ทำการติดตั้งเฮลิโอสแตท
2. การปรับแก้ตำแหน่งภาพบนตัวรับกลาง

โดยทั้งสองส่วนจะพิจารณาระบบแบบไม่มีสัญญาณรบกวนก่อนแล้วค่อยพิจารณาระบบที่มีสัญญาณรบกวน

การประมาณพื้นที่ทำการติดตั้งเฮลิโอสแตทจะเริ่มจากการนำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์มาคำนวณแก้สมการโดยใช้วิธีเชิงเลข ซึ่งวิธีแรกที่ใช้คือวิธีนิวตันซึ่งมีข้อดีคือใช้เวลาในการแก้หาคำตอบได้รวดเร็วแต่จะใช้ได้เฉพาะฟังก์ชันที่มีคำตอบของสมการเท่านั้น เนื่องจากในระบบจริงจะมีสัญญาณรบกวนการวัดเข้ามาเกี่ยวข้องซึ่งอาจจะทำให้ค่าผลตอบที่วัดได้ไม่เป็นไปตามแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นเราจึงใช้หลักการในการหาจุดต่ำสุดของฟังก์ชันใหม่ที่ประยุกต์จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์มาใช้ โดยค่าฟังก์ชันใหม่จะเป็นค่านอร์มของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ซึ่งถ้าสมการของระบบที่รวมสัญญาณรบกวนการวัดมีคำตอบ (แต่อาจไม่ใช่คำตอบเดียวกันกับระบบที่ไม่มีสัญญาณรบกวน) ค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจะเป็น 0 และถึงแม้ว่าถ้าสมการของระบบที่รวมสัญญาณรบกวนการวัดไม่มีคำตอบ เราก็สามารถประมาณได้ว่าจุดต่ำสุดของนอร์มจะเป็นคำตอบที่เราต้องการ

ในการหาค่าต่ำสุดของสมการเราจะใช้วิธี steepest descent ซึ่งจะมีข้อดีคือจะรับประกันว่าค่าประมาณจะลู่เข้าจุดต่ำสุดแน่นอนแต่อาจจะใช้เวลาในการลู่เข้านาน ในการที่จะทำให้ค่าประมาณลู่เข้าได้ไวสุดจะต้องใช้วิธีการหาค่า step-size แบบ exact line search แต่ในการใช้งานจริงอาจจะต้องเสีย

เวลาในการคำนวณ step-size มากเกินไปซึ่งอาจทำให้เวลารวมช้ามาก ในงานวิจัยนี้จึงเสนอวิธี back-tracking ซึ่งทำให้ค่าของฟังก์ชันในรอบถัดไปจะน้อยกว่าค่าปัจจุบันอย่างเพียงพอซึ่งจะทำให้ระบบไม่ลู่เข้าช้าเกินไปและไม่เสียเวลาในการคำนวณ step-size มากนัก

หลังจากที่ได้คำตอบมาแล้ว คำตอบที่ได้อาจไม่ตรงกับคำตอบของระบบที่ไม่มีสัญญาณรบกวน เราจึงควรคำนวณค่าจุดต่ำสุดของฟังก์ชันไว้หลาย ๆค่าแล้วค่อยนำค่าเหล่านั้นมาทำการประมาณหาคำตอบที่น่าจะใกล้เคียงคำตอบที่ต้องการมากสุด เมื่อพิจารณาสัญญาณรบกวนการวัดพบว่าสัญญาณรบกวนการวัดส่วนมากมีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเราเกิดจากการคูณเท่านั้น เพราะฉะนั้นจะได้ว่าค่าฟังก์ชันของระบบที่มีสัญญาณรบกวนควรมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 เช่นกัน เราจึงนำค่าจุดต่ำสุดที่คำนวณได้ในแต่ละครั้งมาทำการหาค่าเฉลี่ยเพื่อที่จะได้ใกล้เคียงกับคำตอบที่ต้องการมากที่สุด

จากวิธีที่กล่าวมาข้างต้นจะมีข้อเสียในเรื่องเวลาและต้องประมาณค่าเริ่มต้นที่จะใช้ในการประมาณ เพื่อตัดปัญหาเหล่านั้นเราจึงพิจารณาวิธีใหม่โดยพยายามมองระบบให้อยู่ในรูปเรขาคณิตและพบว่าเวกเตอร์ผลต่างของเวกเตอร์ตั้งฉากที่เกิดจากการหมุนในแนวอซิมุธของเฮลิโอสแตทสองเวกเตอร์ที่ไม่ได้อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน (ซึ่งจะไม่สามารถเกิดขึ้นได้ถ้าเราไม่หมุนเฮลิโอสแตทเป็นมุมเท่าเดิม) จะแผ่ทั่ว (Span) เป็นระนาบเดียวกับระนาบพื้นที่ทำการติดตั้งเฮลิโอสแตท ในการใช้งานกับระบบที่พิจารณาสัญญาณรบกวนการวัดนั้น วิธีที่ง่ายที่สุดคือการเก็บค่าเวกเตอร์โดยการหมุนไปหมุนกลับแล้วทำการเฉลี่ยซึ่งจะทำให้ค่าเวกเตอร์ตั้งฉากที่ได้ใกล้เคียงกับค่าเวกเตอร์ตั้งฉากของระบบที่ไม่มีสัญญาณรบกวน แล้วจึงค่อยนำค่าเวกเตอร์นั้นไปคำนวณหาพื้นต่อไป

ในส่วนการปรับแก้ตำแหน่งภาพบนตัวรับกลางให้เข้าสู่ตำแหน่งอ้างอิงนั้น ในตอนแรกเราจะใช้วิธีป้อนกลับสัญญาณขาออกโดยจะสมมุติว่าพื้นที่ทำการติดตั้งเฮลิโอสแตทเป็นพื้นราบและพยายามอกแบบตัวควบคุมให้ง่ายที่สุดนั่นคือเป็นตัวควบคุมแบบสัดส่วน หลังทำการทดลองพบว่าตำแหน่งแสงบนตัวรับกลางจะวิ่งเข้าสู่ตำแหน่งอ้างอิง แต่จะใช้เวลาในการลู่เข้าไม่เท่ากันโดยขึ้นกับความชันของพื้นที่ทำการติดตั้งเฮลิโอสแตทซึ่งอาจจะทำให้ระบบไม่ลู่เข้าตำแหน่งอ้างอิงในการใช้งานจริงเนื่องจากดวงอาทิตย์ได้เปลี่ยนตำแหน่งไปแล้ว เราจึงพยายามออกแบบให้ระบบลู่เข้าไวที่สุดนั่นคือลู่เข้าสู่ตำแหน่งอ้างอิงในการหมุนเพียงครั้งเดียวโดยจะสามารถทำได้ถ้าการควบคุมเป็นแบบป้อนกลับสถานะเต็ม แต่ในการป้อนกลับสถานะเต็มเราจำเป็นต้องรู้ค่าตัวแปรสถานะดังนั้นเราจึงต่องสร้างตัวสังเกตการณ์เพื่อทำการคำนวณตัวแปรสถานะโดยใช้ข้อมูลพื้นที่ได้จากบทที่ 3 มาช่วย

สุดท้ายเมื่อเราทำการปรับแก้ตำแหน่งโดยใช้วิธีป้อนกลับสถานะเต็ม การควบคุมอาจไม่เป็นไปตามที่คำนวณเนื่องจากค่าตำแหน่งแสงที่อ่านได้อาจมีผลของสัญญาณรบกวนการวัดเข้ามาเกี่ยวข้อง ดังนั้นเราควรทำการกรองสัญญาณรบกวนการวัดให้ออกไปมากที่สุดเพื่อที่ผลการทดลองจะได้ใกล้เคียงกับการคำนวณมากที่สุด ตัวกรองจะใช้วิธีการเฉลี่ยเคลื่อนที่โดยข้อดีของวิธีนี้คือเป็นวิธีที่ไม่ซับซ้อน ประยุกต์ใช้กับงานจริงได้ง่าย สัญญาณขาออกที่ผ่านตัวกรองจะส่งไปยังตัวสังเกตการณ์แล้วส่งต่อไปยังตัวควบคุมต่อไป

5.2 ข้อเสนอแนะในงานวิจัยนี้

เนื่องจากวิทยานิพนธ์นี้เป็นการจำลองผลการทดลองการเทียบมาตรฐานก่อนที่จะไปประยุกต์ใช้งานจริง โดยจะมีข้อเสนอแนะดังนี้

1. ในการใช้งานจริง การประมาณพื้นที่ทำการติดตั้งไม่จำเป็นต้องทำบ่อยเพราะพื้นคงไม่ค่อยเปลี่ยนแปลงไปจากเดิมเท่าไร การประมาณพื้นควรทำเป็นอันดับแรกหลังจากทำการติดตั้งเฮลิโอสแตทเพื่อที่จะได้เป็นข้อมูลในการปรับแก้ตำแหน่งและการติดตามดวงอาทิตย์ต่อไป

2. การปรับแก้ตำแหน่งภาพบนตัวรับกลางควรทำให้บ่อยตามความเหมาะสม เพื่อที่จะได้พลังงานความร้อนที่ได้จากการรวบรวมแสงอย่างคุ้มค่าที่สุด

3. ในการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน เราสามารถประมาณค่าเริ่มต้นได้โดยใช้การประมาณทางสายตาว่าพื้นมีความชันเท่าไร ซึ่งเพียงพอที่การประมาณค่าต่ำสุดจะลู่เข้าคำตอบที่ต้องการ

4. ในส่วนการปรับแก้ตำแหน่งแสงบนตัวรับกลางจะมีผลของมอเตอร์ที่ใช้ทำการหมุนเฮลิโอสแตทมาเกี่ยวข้องด้วย เนื่องจากฟังก์ชันถ่ายโอนระบบวงปิดของมอเตอร์โดยมีตำแหน่งเชิงมุมเป็นผลตอบไม่มีสเถียรภาพ เราจึงควรออกแบบมอเตอร์ให้มีเสถียรภาพโดยใช้วิธีระบบวงปิดและทำให้เวลาลู่เข้ามีค่าน้อยที่สุดตามความเหมาะสมของมอเตอร์เพื่อที่จะลดเวลาในช่วงหนึ่งรอบการทำงานการปรับแก้ตำแหน่ง

รายการอ้างอิง

[1] R. S. Baheti and P. F. Scott, "Design of Self-Calibrating Controllers for Heliostats in a Solar Power Plant," *IEEE Trans. Aut. Control*, AC-25, 6, (1980): 1091-1097.

[2] R. S. Baheti and P. F. Scott, "Adaptive Control and Calibration of Heliostats," in *Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes*, (1980): 298-300.

[3] A. Kribus, I. Vishnevetsky, A. Yogev, and T. Rubinov, "Closed loop control of heliostats," *Energy*, 29, 5-6, (2004): 905-913.

[4] M. Berenguel, F. R. Rubio, A. Valverde, P. J. Lara, M. R. Arahal, E. F. Camacho, and M. López, "An artificial vision-based control system for automatic heliostat positioning offset correction in a central receiver solar power plant," *Solar Energy*, 76, 5, (2004): 563-575.

[5] J. M. Quero, C. Aracil, L. G. Franquelo, J. Ricart, P. R. Ortega, M. Domińguez, L. M. C. ner, and R. Osuna, "Tracking Control System Using an Incident Radiation Angle Microsensor," *IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL ELECTRONICS*, 54, 2, (2007): 1207-1216.

[6] J. J. Craig, *Introduction to Robotic*. USA: Prentice Hall, 2005.

[7] E. K. P. Chong and S. H. Żak, *An Introduction to Optimization*. USA: JOHN WILEY & SONS, 2001.

[8] D. Kincaid and W. Cheney, *Numerical Analysis*. USA: BROOKS/COLE, 2002.

[9] R. Baldick, *Applied Optimization*. UK: CAMBRIDGE, 2006.

[10] S. G. Nash and A. Sofer, *Linear and Nonlinear Programming*. Singapore: McGraw-Hill, 1996.

[11] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*. USA: Cambridge, 2004.

[12] T. Söderström and P. Stoica, *System Identification*. USA: Prentice Hall, 1989.

[13] G. Strang, *Linear Algebra and Its Aplication*. USA: Thomson Brooks/Cole, 2006.

[14] วัชรพงษ์ โขวิฑูรกิจ, *คณิตศาสตร์วิศวกรรมไฟฟ้าขั้นสูง*. ประเทศไทย: สพจ., 2546.

[15] D. K. Cheng, *Field and Wave Electromagnetics*. USA: ADDISON WESLEY, 1989.

[16] K. J. Åström and B. Wittenmark, *Computer Control Systems*. USA: Prentice Hall, 2001.

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายธนาฒย์ วชิรปราการสกุล เกิดเมื่อวันที่ 19 มิถุนายน พ.ศ. 2527 จังหวัดกรุงเทพมหานคร เป็นบุตรของนายประทีป และนางทัศนา วชิรปราการสกุล สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรี หลักสูตรวิศวกรรมศาสตร์บัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า จากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2548 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาตร์มหาบัณฑิต ในปีการศึกษาถัดมา ณ ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สังกัดห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุม โดยได้รับทุนอุดหนุนการศึกษาจากโครงการศิษย์ก้นกุฏิ ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า