การเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์สามเหลี่ยมที่ถูกรบกวนจากเทหวัตถุอื่น

นาย ณรัล ลือวรศิริกุล

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาฟิสิกส์ ภาควิชาฟิสิกส์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2550

MOTION AROUND TRIANGULAR LAGRANGE POINTS PERTURBED BY OTHER BODIES

Mr. Narun Luewarasirikul

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science Program in Physics

Department of Physics

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2007

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์สามเหลี่ยมที่ถูกรบกวนจากเทหวัตถุอื่น
โดย	นาย ณรัล ลือวรศิริกุล
สาขาวิชา	ฟิสิกส์
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พีรพัฒน์ ศิริสมบูรณ์ลาภ

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ หารหนองบัว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พิศิษฐ์ รัตนวรารักษ์)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พีรพัฒน์ ศิริสมบูรณ์ลาภ)

.... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ชัยสิงห์ ภู่รักษ์เกียรติ)

.... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ต้นพงศ์ แก้วคงคา)

ณรัล ลือวรศิริกุล : การเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์สามเหลี่ยมที่ถูกรบกวนจากเทหวัตถุอื่น. (MOTION AROUND TRIANGULAR LAGRANGE POINTS PERTURBED BY OTHER BODIES) อ. ที่ปรึกษา : ผศ. ดร. พีรพัฒน์ ศิริสมบูรณ์ลาภ , 136 หน้า.

วิธีการพื้นฐานในการหาการเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์ก็คือ การแก้ปัญหาวัตถุ 3 ชิ้นแบบจำกัด ซึ่งวิธีการนี้จะสนใจเฉพาะผลเนื่องมาจากวัตถุที่มีขนาด 2 ชิ้น เพื่อหาการเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์ของวัตถุที่มีขนาดเล็กมาก แต่เมื่อพิจารณาปัญหาจริงๆ ในระบบสุริยะ พบว่า นอกจากวัตถุที่มีขนาด 2 ชิ้นแล้ว ยังมีวัตถุอีกมากมายที่ทำการรบกวนระบบนี้อยู่ ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะทำการเพิ่มผลจากการรบกวนของวัตถุชิ้นอื่นๆ เข้าไปในการหาการเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์นี้ ด้วยวิธีการเชิงวิเคราะห์

ภาควิชา ฟิสิกส์ ลายมือชื่อนิสิต ณรัล ลือวรศิริกุล

สาขาวิชา ฟิสิกส์ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา พีรพัฒน์ ศิริสมบูรณ์ลาภ

ปีการศึกษา 2550

4772287423 : MAJOR PHYSICS
KEY WORD: LAGRANGE POINTS / RESTRICTED THREE-BODY PROBLEM / PURTURBATION / ANALYTICAL METHOD

NARUN LUEWARASIRIKUL : MOTION AROUND TRIANGULAR LAGRANGE POINTS PERTURBED BY OTHER BODIES. THESIS ADVISOR : ASST. PROF. PIRAPAT SIRISOMBOONLARP, PH.D. , 136 pp.

The basic method to find the motion around the Lagrange points is the method for the restricted three-body problem. This method includes effects from only two finite bodies to find the motion of an infinitesimal body around the Lagrange points. However, when we consider an actual problem, solar system, there exist not only the two finite bodies but also other perturbing bodies. This thesis is to add the effects of the other perturbing bodies to the motion around the Lagrange points by analytical method.

Department: Physics
Field of study: Physics
Academic year: 2007

Student's signature: Narun Luewarasirikul
Advisor's signature: Pirapat Sirisomboonlarp

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พีรพัฒน์ ศิริสมบูรณ์ลาภ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ได้ให้ความรู้ความเข้าใจ ให้คำปรึกษา ให้กำลังใจ และช่วยตรวจสอบแก้ไข จนทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เสร็จสมบูรณ์

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พิศิษฐ์ รัตนวรารักษ์ ประธานกรรมการสอบ สำหรับความรู้ทางด้านวิชาการ และคำแนะนำในการใช้โปรแกรมคำนวณที่เป็นประโยชน์ต่อการทำวิจัยนี้อย่างมาก

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ชัยสิงห์ ภู่รักษ์เกียรติ กรรมการสอบ ที่ได้สละเวลาในการตรวจสอบแก้ไขข้อผิดพลาดในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ พร้อมทั้งให้ความรู้ความเข้าใจและคำแนะนำในการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้สำเร็จขึ้นมาได้อย่างสมบูรณ์ที่สุด

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ต้นพงศ์ แก้วคงคา กรรมการสอบ สำหรับคำปรึกษาและความช่วยเหลือในด้านต่างๆ ทำให้ผู้วิจัยสามารถทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้

ขอขอบพระคุณ อาจารย์ ดร.รุจิกร ธนพลวิทยา ที่ได้สละเวลาช่วยเหลือในการให้ความรู้, คำแนะนำ และช่วยตรวจสอบงานวิจัยนี้

และสุดท้ายขอขอบพระคุณ บิดา มารดา และทุกคนในครอบครัว ที่ได้ให้ความช่วยเหลือผู้วิจัยในทุกๆด้าน และให้กำลังใจในการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ให้เสร็จสมบูรณ์ขึ้นมาได้

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

สารบัญภาพ

สารบัญภาพ (ต่อ)

หน้า

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมา และความสำคัญของปัญหา

ในปัจจุบันได้มีการส่งดาวเทียมขึ้นสู่อวกาศอย่างมากมาย ทั้งเพื่อวัตถุประสงค์ด้านการสื่อสาร, การรายงานสภาวะอากาศ, การสำรวจทรัพยากร, ความมั่นคงและการทหาร รวมทั้งด้านการวิจัยทางวิทยาศาสตร์ โดยส่วนมากดาวเทียมจะถูกส่งขึ้นไปโคจรรอบโลก ซึ่งแนวโคจรรอบโลกนั้นจะมีเสถียรภาพในการเคลื่อนที่ ทำให้ดาวเทียมจะเคลื่อนที่อยู่ได้โดยไม่หลุดลอยไป รวมทั้งสามารถคำนวณหาแนวทางการเคลื่อนที่เพื่อหาทิศทางในการตั้งเสารับและส่งสัญญาณได้ แต่ในกรณีที่ต้องการส่งดาวเทียมให้ไปอยู่ในระยะที่ไกลออกไปกว่าการโคจรอยู่รอบโลก เช่น ต้องการส่งดาวเทียมเพื่อไปทำการสังเกตดวงอาทิตย์ในระยะที่ใกล้มากขึ้น ดาวเทียมนั้นก็ต้องถูกส่งไปอยู่ยังบริเวณในอวกาศที่มีเสถียรภาพในการเคลื่อนที่ และสามารถคำนวณหาแนวทางการเคลื่อนที่ได้ ซึ่งบริเวณนั้นก็คือบริเวณใกล้ๆจุดลากรองจ์ (Lagrange points) นั่นเอง

จุดลากรองจ์ คือ จุดที่ดาวเทียมสามารถเคลื่อนที่อยู่บริเวณรอบๆจุดนั้นได้อย่างมีเสถียรภาพ อันเนื่องมาจากแรงดึงดูดของดาว 2 ดวงในระบบลากรองจ์นั้นๆ เช่น ระบบลากรองจ์ของดาวอาทิตย์-โลก ก็จะคิดเฉพาะผลของแรงดึงดูดของ ดวงอาทิตย์ และ โลก ที่กระทำที่จุดนี้ แต่ในความเป็นจริง ยังมีดาวอีกมากมายที่มีแรงดึงดูดกระทำต่อการเคลื่อนที่นี้ เพื่อความแม่นยำที่มากขึ้น จึงจำเป็นที่ต้องหาวิธีการ เพิ่มผลจากแรงดึงดูดของดาวดวงอื่นๆเข้าไปด้วย

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อศึกษาและพัฒนาการหาผลเฉลยของการเคลื่อนที่ของวัตถุในบริเวณใกล้จุดลากรองจ์ จากทฤษฎีพื้นฐานที่ใช้ผลของแรงดึงดูดจากดาวเพียง 2 ดวงในระบบลากรองจ์นั้นๆ ให้สามารถเพิ่มเติมผลเนื่องมาจากแรงดึงดูดของดาวดวงอื่นๆในระบบสุริยะจักรวาลเข้าไปได้ เพื่อเพิ่มความแม่นยำในการคำนวณหาลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เคลื่อนที่อยู่บริเวณใกล้จุดลากรองจ์ให้มากยิ่งขึ้น

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

ในการวิจัยนี้จะศึกษา การหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของการเคลื่อนที่ของวัตถุในบริเวณใกล้จุดลากรองจ์ L_4 ซึ่งเป็นจุดลากรองจ์สามเหลี่ยม (Triangular Lagrange points) ที่มีเสถียรภาพมากที่สุด โดยศึกษาในระบบลากรองจ์ดวงอาทิตย์-ดาวพฤหัส ซึ่งเป็นดาวที่มีมวลมากที่สุด 2 อันดับแรกในระบบสุริยะจักรวาล ในระนาบ 2 มิติ และจะทำการเพิ่มผลจากแรงดึงดูดของดาวดวงอื่นๆเข้ามาในการคำนวณนี้ โดยไม่คำนึงถึงปัจจัยอื่นนอกเหนือจากแรงดึงดูดของดวงดาว

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ได้ผลเฉลยของการเคลื่อนที่ของวัตถุในบริเวณใกล้จุดลากรองจ์สามเหลี่ยม ที่มีความแม่นยำมากขึ้น อันเนื่องมาจากการเพิ่มผลของแรงดึงดูดจากดาวดวงอื่นๆเข้าไป

1.5 วิธีดำเนินการวิจัย

เริ่มจากการศึกษาทฤษฎีพื้นฐานทางดาราศาสตร์ต่างๆ โดยเน้นที่ การแก้ปัญหาวัตถุ 3 ชิ้น และเรื่องการรบกวน จากนั้นจึงมาสร้างแบบจำลองในการคำนวณหาผลเฉลยของการเคลื่อนที่ของวัตถุในบริเวณใกล้จุดลากรองจ์สามเหลี่ยม ที่รวมผลของแรงดึงดูดจากดาวดวงอื่นเข้าไป ด้วยวิธีการเชิงวิเคราะห์ แล้วทำการวิเคราะห์ผลเฉลย และสรุปผลที่ได้

บทที่ 2

ทฤษฎีพื้นฐาน

2.1 หลักมูลทางโคจร

หลักมูลทางโคจร (orbital elements) คือ ปริมาณพื้นฐานที่ใช้เพื่อกำหนดตำแหน่งและทางโคจรของดาวเคราะห์ ซึ่งประกอบไปด้วย

ครึ่งแกนเอก (semi-major axis “a”)

ความเยื้องศูนย์กลาง, ความรี (eccentricity “e”)

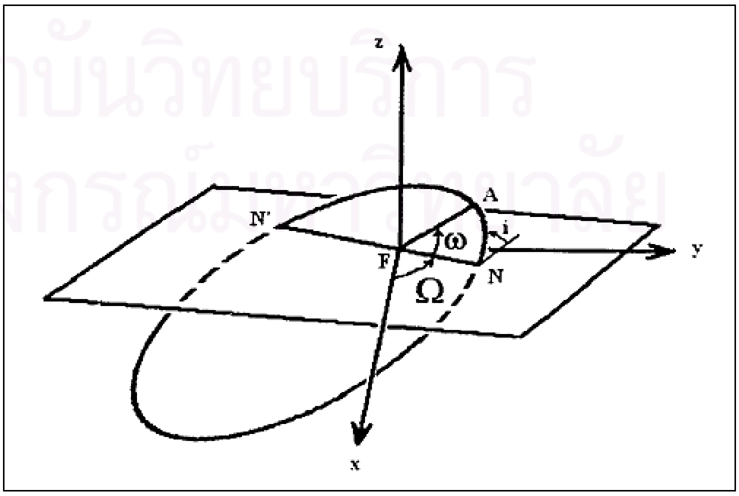
มุมเอียงของระนาบทางโคจร (inclination of orbital plane “i”)

ลองกิจูดของจุดใกล้ดวงอาทิตย์ (longitude of perihelion “ω”)

ระยะมุมของจุดไต่ขึ้น (position angle of ascending node “Ω”)

เวลาเคลื่อนผ่านจุดใกล้ดวงอาทิตย์ (time of perihelion passage “τ”)

คาบการโคจร (orbital period “T”)



รูปที่ 2.1 หลักมูลทางโคจรของดาวเคราะห์

จากรูปที่ 2.1 ให้ระนาบ x-y เป็นระนาบอ้างอิง โดยจุดกำเนิดของพิกัด x-y-z อยู่ที่จุด F ซึ่งเป็นจุดโฟกัสของทางโคจรที่เป็นวงรีนี้ โดยมีจุด A เป็นจุดใกล้ดวงอาทิตย์ของทางโคจร เส้นตรง NN' เป็นรอยตัดของระนาบทางโคจร กับ ระนาบอ้างอิง ส่วนที่เป็นเส้นประใต้เส้นตรง NN' ลงไปจะเป็นส่วนที่อยู่ใต้ระนาบ ดังนั้นจุด N ก็คือจุดที่ดาวเคราะห์เคลื่อนที่จากใต้ระนาบผ่านไปยังเหนือระนาบ ซึ่งเรียกจุดนี้ว่า จุดไต่ขึ้น

เนื่องจากทางโคจรเป็นวงรีจึงต้องใช้ค่าครึ่งแกนเอก (a) และ ความเยื้องศูนย์กลาง (e) ในการกำหนด ขนาด และ รูปร่างของวงรีนั้น

มุมเอียงของระนาบทางโคจร (i) คือมุมระหว่างระนาบทางโคจรของดาวเคราะห์กับ ระนาบอ้างอิง

ลองกิจูดของจุดใกล้ดวงอาทิตย์ (ω) จะวัดจากแนวของเส้นตรง NN' ไปยังจุดใกล้ดาวฤกษ์ (จุด A)

ระยะมุมของจุดไต่ขึ้น (Ω) คือมุมที่วัดจากแกน x ไปยังแนวของจุดไต่ขึ้นบนระนาบอ้างอิง

เวลาเคลื่อนผ่านจุดใกล้ดวงอาทิตย์ (τ) คือเวลาที่ใช้อ้างอิงว่า ดาวเคราะห์นี้จะเคลื่อนที่ผ่านจุดใกล้ดวงอาทิตย์เมื่อใด

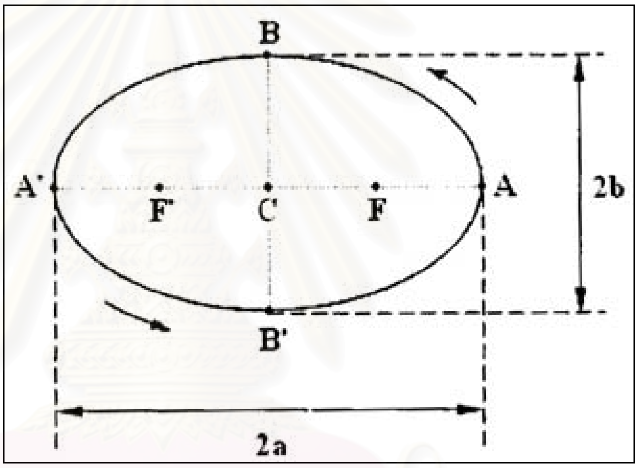
คาบการโคจร (T) ก็คือเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ครบรอบวงโคจร

2.2 กฎของเคปเลอร์

ในการโคจรของดาวเคราะห์ใดๆรอบดวงอาทิตย์ในระบบสุริยะ จะเป็นไปตามกฎของเคปเลอร์ (Kepler's Law) เสมอ ซึ่งกฎของเคปเลอร์มีทั้งหมด 3 ข้อ ได้แก่

1. กฎของวงรี (Law of ellipse)

ดาวเคราะห์จะโคจรรอบดวงอาทิตย์เป็นวงรี โดยมีดวงอาทิตย์อยู่ที่จุดโฟกัสจุดหนึ่งของวงรีนั้น



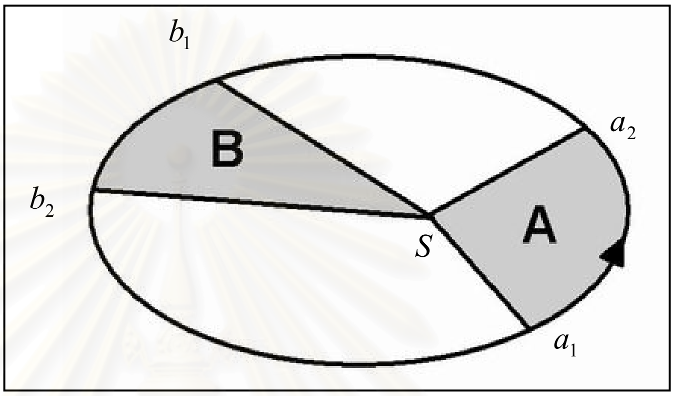
รูปที่ 2.2 วงรี

จากรูปที่ 2.2 แสดงภาพวงรี AA' เป็นแกนเอก (major axis) BB' เป็นแกนโท (minor axis) เรียกระยะ CA ว่า ครึ่งแกนเอก (semi-major axis) และเรียกระยะ CB ว่า ครึ่งแกนโท (semi-major axis) จุด F และ F' คือจุดโฟกัสของวงรี และมีจุด C เป็นจุดศูนย์กลาง โดยวงรีจะมีค่าความรี หรือ ความเยื้องศูนย์กลาง แทนด้วยตัวอักษร e เป็นค่าที่แสดงความรีของวงรีนั้น คำนวณได้จากอัตราส่วนความยาวของ CF ต่อ CA

พิจารณาการโคจรของโลกรอบดวงอาทิตย์ ดวงอาทิตย์จะอยู่ที่จุด F ในขณะที่โลกจะโคจรในทิศทวนเข็มนาฬิกา ตามลูกศรที่แสดงไว้ จุด A เรียกว่าจุดใกล้ (perihelion) ดวงอาทิตย์ คือจุดที่โลกจะโคจรเข้ามาใกล้ดวงอาทิตย์ที่สุด ส่วนจุด A' เรียกว่าจุดไกล (aphelion) ดวงอาทิตย์ คือจุดที่โลกจะโคจรออกห่างจากดวงอาทิตย์มากที่สุด

2. กฎของพื้นที่ (Law of areas)

เวกเตอร์รัศมีซึ่งลากจากดวงอาทิตย์ไปยังดาวเคราะห์ จะกวาดพื้นที่ไปได้เท่ากันในช่วงเวลาที่เท่ากัน



รูปที่ 2.3 กฎของพื้นที่

จากรูปที่ 2.3 เมื่อจุด S คือตำแหน่งของดวงอาทิตย์ พิจารณาการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ดวงหนึ่งในวงโคจรที่เวลาต่างๆกัน ถ้าเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่จากจุด a_1 ไปยังจุด a_2 เท่ากันกับเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่จากจุด b_1 ไปยังจุด b_2 แล้ว จะได้ว่า พื้นที่บริเวณ A มีขนาดเท่ากับพื้นที่บริเวณ B

ผลที่ได้ตามมาก็คือ อัตราเร็วในการโคจรรอบดวงอาทิตย์ของดาวเคราะห์ไม่คงที่ โดยเมื่อดาวเคราะห์อยู่ใกล้ดวงอาทิตย์ (ช่วง $a_1\, a_2$) จะเคลื่อนที่เร็วกว่าขณะอยู่ไกลจากดวงอาทิตย์ (ช่วง $b_1\, b_2$)

3. กฎฮาร์มอนิก (Harmonic law)

คาบการโคจรของดาวเคราะห์ยกกำลังสอง เป็นสัดส่วนโดยตรงกับค่าครึ่งแกนเอกของการโคจรยกกำลังสาม

คาบการโคจร คือเวลาที่ดาวเคราะห์ใช้ในการโคจรรอบดวงอาทิตย์ครบหนึ่งรอบ ซึ่งก็คือคาบการโคจร (T) ในหลักมูลทางโคจรนั่นเอง จากกฎฮาร์มอนิกจะแสดงได้ว่า

$$T^2 \propto a^3$$

สามารถหาค่าคงที่ของการแปรผันนี้ สำหรับกรณีที่กำหนดให้การโคจรของดาวเคราะห์รอบดวงอาทิตย์เป็นวงกลม ซึ่งดาวอาทิตย์อยู่ที่จุดศูนย์กลางของการโคจรเป็นวงกลมนี้ ดังนั้นจะกำหนดให้รัศมีของการโคจรเป็นวงกลมมีค่าเท่ากับค่าครึ่งแกนเอก (a) ของกรณีที่การโคจรเป็นวงรี โดยจะพิจารณาการโคจรของโลกรอบดวงอาทิตย์ ให้โลกมีมวล m_1 ดวงอาทิตย์มีมวล m_2 ห่างกันเป็นระยะ a

จากนั้นหาจุดศูนย์กลางมวลของระบบนี้ แล้วย้ายจุดกำเนิดของแกนอ้างอิงไปยังจุดศูนย์กลางมวล จะได้ความสัมพันธ์

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 \tag{2.1}$$

เมื่อ r_1 คือระยะจากจุดศูนย์กลางมวล (จุดกำเนิด) ไปยังโลก

r_2 คือระยะจากจุดศูนย์กลางมวล (จุดกำเนิด) ไปยังดวงอาทิตย์

ซึ่งระยะจากจุดศูนย์กลางมวลไปยังโลก รวมกับ ระยะจากจุดศูนย์กลางมวลไปยังดวงอาทิตย์ก็คือระยะห่างระหว่าง โลก กับ ดวงอาทิตย์ นั่นเอง

$$r_1 + r_2 = a$$

$$r_2 = a - r_1$$

แทนเข้าไปในสมการ (2.1)

$$m_1 r_1 = m_2 (a - r_1)$$

$$m_1 r_1 = m_2 a - m_2 r_1$$

$$m_2 = \frac{(m_1 + m_2) r_1}{a} \tag{2.2}$$

พิจารณาแรงที่ดวงอาทิตย์กระทำต่อโลก $F_1 = \dfrac{G m_1 m_2}{a^2}$ ซึ่งแรงนี้คือแรงสู่ศูนย์กลางด้วย

ดังนั้น $F_1 = \frac{m_1 {v_1}^2}{r_1}$ แต่ $v_1 = \frac{2\pi r_1}{T}$ จะได้ว่า

$$F_1 = \frac{Gm_1 m_2}{a^2} = \frac{m_1 {v_1}^2}{r_1} = \frac{m_1}{r_1}\left(\frac{2\pi r_1}{T}\right)^2$$

$$\frac{Gm_1 m_2}{a^2} = \frac{4\pi^2 r_1 m_1}{T^2}$$

$$m_2 = \frac{4\pi^2 a^2 r_1}{GT^2} \qquad (2.3)$$

แทนค่า m_2 จากสมการ (2.2) และ (2.3)

$$\frac{(m_1 + m_2) r_1}{a} = \frac{4\pi^2 a^2 r_1}{GT^2}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3 \qquad (2.4)$$

แทนค่า $T = \frac{2\pi}{n}$ เมื่อ n คืออัตราเร็วเชิงมุมของการโคจร

$$n^2 a^3 = G(m_1 + m_2) \qquad (2.5)$$

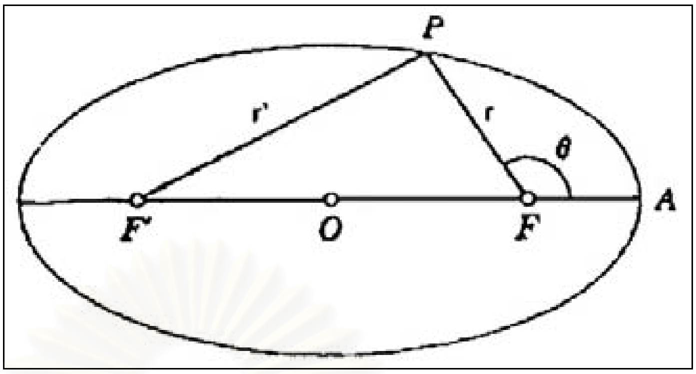
พิจารณาในกรณีที่ โลก โคจรรอบ ดวงอาทิตย์ ซึ่งใช้เวลาในการเคลื่อนที่ครบรอบ 1 ปี และมีระยะห่างเท่ากับ 1 เอยู (A.U.) แทนลงในสมการ (2.4) จะได้

$$1 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}$$

นั่นก็คือถ้าใช้หน่วยของเวลาเป็น ปี และหน่วยของระยะทางเป็น เอยู แล้ว ค่าคงที่ $\frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}$ จะมีค่าเป็น 1

2.3 ทางโคจรรูปวงรี

ทางโคจรรูปวงรีคือ ทางโคจรของจุดซึ่งเคลื่อนที่ไป โดยผลบวกของระยะทางจากจุดนั้นไปถึงจุดคงที่ (จุดโฟกัส) ทั้งสองจุด มีค่าคงที่เสมอ



รูปที่ 2.4 ทางโคจรรูปวงรี

จากรูปที่ 2.4 ระยะ OA คือครึ่งแกนเอกของการโคจรซึ่งเท่ากับ a จุด F และ F' คือจุดโฟกัสทั้ง 2 จุด และจุด P เป็นจุดใดๆบนวงรี จากนิยามข้างต้นจะได้ว่า $FP+F'P$ เท่ากับค่าคงที่ หรือ $r+r'$ เท่ากับค่าคงที่

จากกฎของโคไซน์

$$(F'P)^2 = (FP)^2 + (F'F)^2 + 2(FP)(F'F)\cos\theta \qquad (2.6)$$

พิจารณาคุณสมบัติของวงรี

$$e = \frac{OF}{OA}$$

$$OF = ae$$

$$F'F = 2OF = 2ae$$

แทนลงในสมการ (2.6)

$$r'^2 = r^2 + 4a^2e^2 + 4rae\cos\theta \qquad (2.7)$$

และจากคุณสมบัติของวงรี

$$r + r' = 2a$$

$$r' = 2a - r$$

แทนลงในสมการ (2.7) จะจัดรูปออกมาได้เป็น

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \tag{2.8}$$

ซึ่งสมการนี้คือ สมการวงรีในระบบพิกัดเชิงขั้ว ที่กำหนดจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด F

ต่อไปพิจารณาในระบบพิกัดฉากโดยให้จุด O เป็นจุดกำเนิด จะได้

$$r^2 = (x-ae)^2 + y^2 \tag{2.9}$$

$$r'^2 = (x+ae)^2 + y^2 \tag{2.10}$$

นำสมการ (2.10) ลบด้วยสมการ (2.9)

$$r'^2 - r^2 = 4aex$$

แทนค่า $r = 2a - r'$ จะได้

$$r' = a + ex$$

นำกลับไปแทนในสมการ (2.10) แล้วจัดรูปออกมาได้เป็น

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2.11}$$

เมื่อ $b = a\sqrt{(1-e^2)}$ คือ ความยาวของครึ่งแกนโท

ซึ่งสมการนี้คือ สมการวงรีในระบบพิกัดฉากนั่นเอง

บทที่ 3

ปัญหาวัตถุ 3 ชิ้นแบบจำกัด

3.1 การแก้ปัญหาวัตถุ 3 ชิ้นแบบจำกัด

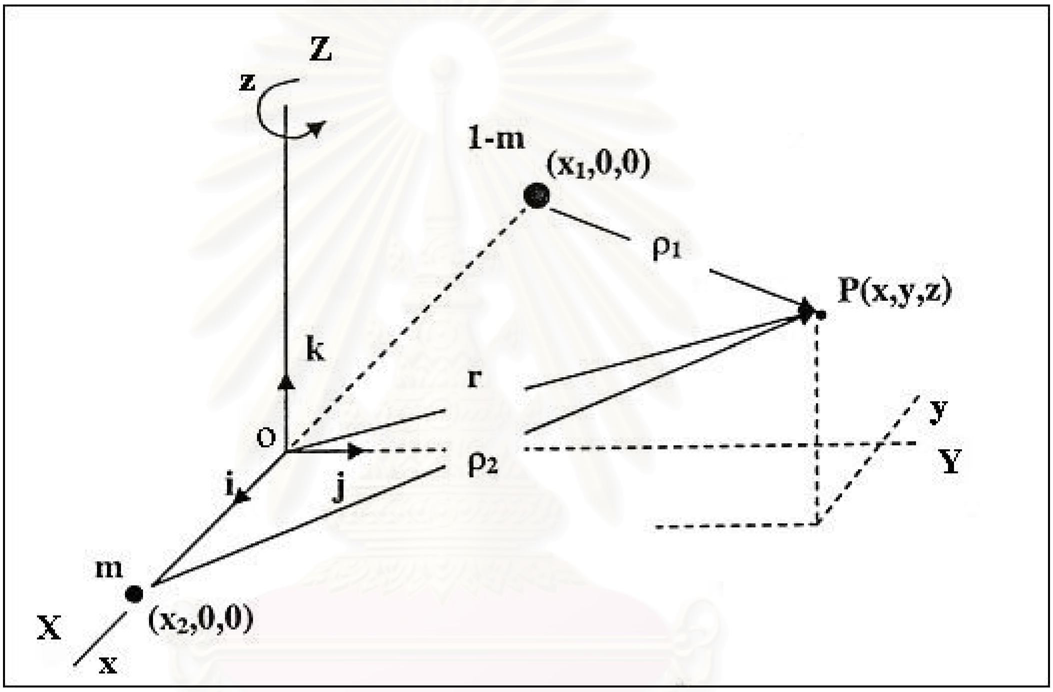
ในปัญหาวัตถุ 2 ชิ้น การแก้สมการเพื่อหาผลเฉลยของการเคลื่อนที่ของวัตถุเป็นสิ่งที่สามารถทำได้ แต่สำหรับปัญหาวัตถุ 3 ชิ้นซึ่งมีความซับซ้อนมาก จนทำให้ไม่สามารถใช้การแก้ปัญหาเชิงวิเคราะห์ เพื่อทำการแก้หาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ออกมาได้ จึงจำเป็นต้องมีการเพิ่มเงื่อนไขบางอย่างเข้าไป โดยการกำหนดให้วัตถุ 2 ชิ้นแรกเป็นวัตถุมีขนาด (Finite body) ซึ่งเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุดศูนย์กลางมวลของทั้งคู่ จากนั้นกำหนดให้วัตถุชิ้นที่ 3 เป็นวัตถุขนาดเล็ก (Infinitesimal body) ซึ่งมีมวลน้อยมากเมื่อเทียบกับวัตถุ 2 ชิ้นแรก โดยจะเรียกปัญหาวัตถุ 3 ชิ้นที่มีการเพิ่มเงื่อนไขพิเศษเข้าไปนี้ว่า ปัญหาวัตถุ 3 ชิ้นแบบจำกัด (The restricted three-body problem)

การกำหนดให้วัตถุชิ้นที่ 3 มีมวลน้อยมากๆเมื่อเทียบกับวัตถุ 2 ชิ้นแรก ทำให้สามารถตัดแรงดึงดูดของวัตถุชิ้นที่ 3 ที่มีต่อวัตถุ 2 ชิ้นแรกทิ้งไปได้ จึงเหลือเพียงแรงดึงดูดของวัตถุ 2 ชิ้นแรกที่กระทำต่อกันเอง และกระทำต่อวัตถุชิ้นที่ 3 หรือจะพิจารณาได้ว่า วัตถุชิ้นที่ 3 เป็นวัตถุขนาดเล็กมากๆ ที่เข้ามาอยู่ในสนามโน้มถ่วงของวัตถุ 2 ชิ้นแรก (ปัญหาวัตถุ 2 ชิ้น) ยกตัวอย่างเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นจริง เช่น โลกโคจรรอบดวงอาทิตย์ โดยมีดาวเทียมเป็นวัตถุชิ้นที่ 3

ในการพิจารณาปัญหาวัตถุ 3 ชิ้นแบบจำกัดนั้น จะให้วัตถุชิ้นหนึ่งโคจรรอบวัตถุอีกชิ้นหนึ่งเป็นวงกลม เช่น สมมุติให้โลกโคจรรอบดวงอาทิตย์ เป็นวงกลม แล้วจึงกำหนดพิกัดของกรอบอ้างอิงเฉื่อย โดยกำหนดให้จุดกำเนิดของกรอบอ้างอิง อยู่ที่จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุทั้งสอง จากนั้นวัตถุทั้ง 2 ก็จะเคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุดกำเนิด โดยกำหนดกรอบอ้างอิงหมุน ซึ่งมีจุดกำเนิดอยู่ที่จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุทั้งสองเช่นกัน และกรอบอ้างอิงหมุนนี้ก็จะหมุนไปพร้อมกับการเคลื่อนที่ของวัตถุทั้งสองรอบจุดกำเนิด จากนั้นเพื่อความสะดวกในการคำนวณจะกำหนดให้

- มวลของวัตถุทั้ง 2 ชิ้นรวมกันเป็น 1
- ให้วัตถุชิ้นที่ 1 มีมวลเป็น $1-m$ และ วัตถุชิ้นที่ 2 มีมวลเป็น m

- ระยะห่างระหว่างวัตถุทั้ง 2 ชิ้นเป็น 1
- อัตราเร็วเชิงมุมของกรอบอ้างอิงหมุนเท่ากับ 1
- ค่านิจโน้มถ่วงสากล (Gravitational Constant) เท่ากับ 1



รูปที่ 3.1 กรอบอ้างอิงของปัญหาวัตถุ 3 ชิ้น

จากรูปที่ 3.1 กำหนดให้กรอบอ้างอิง $X-Y-Z$ เป็นกรอบอ้างอิงเฉื่อย และกรอบอ้างอิง $x-y-z$ เป็นกรอบอ้างอิงหมุน ซึ่งซ้อนทับกันอยู่ จากนั้นกรอบอ้างอิงหมุน $x-y-z$ ก็จะหมุนไปพร้อมกับการหมุนของวัตถุชิ้นที่ 1 และ 2 รอบจุดกำเนิด ซึ่งจะหมุนด้วยอัตราเร็วเชิงมุม n โดยวัตถุชิ้นที่ 1 มีมวล $1-m$ อยู่ที่ตำแหน่ง $(x_1,0,0)$ วัตถุชิ้นที่ 2 มีมวล m อยู่ที่ตำแหน่ง $(x_2,0,0)$ และวัตถุชิ้นที่ 3 อยู่ที่จุด $P(x,y,z)$ ซึ่งระยะห่างระหว่างมวลชิ้นที่ 1 กับ 3 และ ระยะห่างระหว่างมวลชิ้นที่ 2 กับ 3 ให้เป็น ρ_1 และ ρ_2 ตามลำดับ

โดยที่ $\rho_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2 + z^2}$ และ $\rho_2 = \sqrt{(x-x_2)^2 + y^2 + z^2}$

พิจารณาสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นที่ 3 ในกรอบอ้างอิงเฉื่อย $X-Y-Z$ โดยให้ความเร่งของวัตถุชิ้นที่ 3 ในกรอบอ้างอิงเฉื่อย $X-Y-Z$ เท่ากับ $\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$ จะได้

$$\ddot{X}=\frac{d^2X}{dt^2}=A_x \tag{3.1}$$

$$\ddot{Y}=\frac{d^2Y}{dt^2}=A_y \tag{3.2}$$

$$\ddot{Z}=\frac{d^2Z}{dt^2}=A_z \tag{3.3}$$

พิจารณาความสัมพันธ์ของพิกัดในกรอบอ้างอิงเฉื่อย $X-Y-Z$ เทียบกับ กรอบอ้างอิงหมุน $x-y-z$ ได้

$$X=x\cos nt-y\sin nt \tag{3.4}$$

$$Y=x\sin nt+y\cos nt \tag{3.5}$$

$$Z=z \tag{3.6}$$

หาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง และ อนุพันธ์อันดับที่สอง ของสมการ (3.4), (3.5) และ (3.6)

$$\dot{X}=\dot{x}\cos nt-nx\sin nt-\dot{y}\sin nt-ny\cos nt \tag{3.7}$$

$$\dot{Y}=\dot{x}\sin nt+nx\cos nt+\dot{y}\cos nt-ny\sin nt \tag{3.8}$$

$$\dot{Z}=\dot{z} \tag{3.9}$$

$$\ddot{X}=\ddot{x}\cos nt-2n\dot{x}\sin nt-n^2x\cos nt-\ddot{y}\sin nt-2n\dot{y}\cos nt+n^2y\sin nt \tag{3.10}$$

$$\ddot{Y}=\ddot{x}\sin nt+2n\dot{x}\cos nt-n^2x\sin nt+\ddot{y}\cos nt-2n\dot{y}\sin nt-n^2y\cos nt \tag{3.11}$$

$$\ddot{Z}=\ddot{z} \tag{3.12}$$

นำสมการ (3.10) คูณด้วย $\cos nt$ และสมการ (3.11) คูณด้วย $\sin nt$ แล้วนำมาบวกกัน จะได้

$$\ddot{X}\cos nt+\ddot{Y}\sin nt=\ddot{x}-n^2x-2n\dot{y} \tag{3.13}$$

นำสมการ (3.10) คูณด้วย $\sin nt$ และสมการ (3.11) คูณด้วย $\cos nt$ แล้วนำมาลบกัน จะได้

$$\ddot{Y}\cos nt - \ddot{X}\sin nt = \ddot{y} - n^2 y + 2n\dot{x} \tag{3.14}$$

จากสมการ (3.1), (3.2) และ (3.3) จะสามารถเขียนสมการ (3.13) และ (3.14) ใหม่ได้เป็น

$$A_x \cos nt + A_y \sin nt = \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x \tag{3.15}$$

$$-A_x \sin nt + A_y \cos nt = \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y \tag{3.16}$$

ต่อมา พิจารณาสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นที่ 3 ในกรอบอ้างอิงหมุน $x-y-z$ โดยให้ความเร่งของวัตถุชิ้นที่ 3 ในกรอบอ้างอิงหมุน $x-y-z$ เป็น $\bar{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$ จะได้

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = a_x \tag{3.17}$$

$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = a_y \tag{3.18}$$

$$\ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2} = a_z \tag{3.19}$$

พิจารณาความสัมพันธ์ของความเร่งของวัตถุในกรอบอ้างอิงเฉื่อย $X-Y-Z$ เทียบกับกรอบอ้างอิงหมุน $x-y-z$ ได้

$$A_x = a_x \cos nt - a_y \sin nt \tag{3.20}$$

$$A_y = a_x \sin nt + a_y \cos nt \tag{3.21}$$

$$A_z = a_z \tag{3.22}$$

แปลงความสัมพันธ์นี้จากกรอบอ้างอิงหมุน $x-y-z$ เทียบกับ กรอบอ้างอิงเฉื่อย $X-Y-Z$ ได้

$$a_x = A_x \cos nt + A_y \sin nt \tag{3.23}$$

$$a_y = -A_x \sin nt + A_y \cos nt \tag{3.24}$$

$$a_z = A_z \tag{3.25}$$

นำสมการ (3.23) และ (3.24) ไปแทนใน สมการ (3.15) และ (3.16) ตามลำดับ จะได้

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x = a_x \tag{3.26}$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y = a_y \tag{3.27}$$

พิจารณาแรงดึงดูดจากวัตถุชิ้นที่ 1 และวัตถุชิ้นที่ 2 ที่กระทำต่อวัตถุชิ้นที่ 3 จะสามารถหาสมการการเคลื่อนที่ได้เป็น

$$\bar{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} = -\frac{1-m}{{\rho_1}^3}\bar{\rho}_1 - \frac{m}{{\rho_2}^3}\bar{\rho}_2 \tag{3.28}$$

โดยที่ $\rho_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2 + z^2}$ และ $\rho_2 = \sqrt{(x-x_2)^2 + y^2 + z^2}$

จะสามารถแจกแจงออกมาได้ดังนี้

$$a_x = -\frac{1-m}{{\rho_1}^3}(x-x_1) - \frac{m}{{\rho_2}^3}(x-x_2) \tag{3.29}$$

$$a_y = -\frac{1-m}{{\rho_1}^3}y - \frac{m}{{\rho_2}^3}y \tag{3.30}$$

$$a_y = -\frac{1-m}{{\rho_1}^3}z - \frac{m}{{\rho_2}^3}z \tag{3.31}$$

นำสมการ (3.26) และ (3.27) มาแทนในสมการ (3.29) และ (3.30) จะได้

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x = -\frac{1-m}{{\rho_1}^3}(x-x_1) - \frac{m}{{\rho_2}^3}(x-x_2) \tag{3.32}$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y = -\frac{1-m}{{\rho_1}^3}y - \frac{m}{{\rho_2}^3}y \tag{3.33}$$

$$\ddot{z} = -\frac{1-m}{{\rho_1}^3}z - \frac{m}{{\rho_2}^3}z \tag{3.34}$$

แต่มีการกำหนดอัตราเร็วเชิงมุมของกรอบอ้างอิงหมุนไว้ตั้งแต่ต้นให้เท่ากับ 1 ก็คือให้ $n = 1$

จะได้สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นที่ 3 ในกรอบอ้างอิงหมุน $x - y - z$ เป็น

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x - \frac{1-m}{\rho_1{}^3}(x - x_1) - \frac{m}{\rho_2{}^3}(x - x_2) \tag{3.35}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = y - \frac{1-m}{\rho_1{}^3} y - \frac{m}{\rho_2{}^3} y \tag{3.36}$$

$$\ddot{z} = -\frac{1-m}{\rho_1{}^3} z - \frac{m}{\rho_2{}^3} z \tag{3.37}$$

จากสมการ (3.35), (3.36) และ (3.37) จะหาผลเฉลยของสมการการเคลื่อนที่นี้ออกมาได้ แต่เป็นการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ที่ยุ่งยาก จึงได้มีการนิยามฟังก์ชันขึ้นมาใหม่ นั่นคือ

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-m}{\rho_1} + \frac{m}{\rho_2} \tag{3.38}$$

โดยฟังก์ชัน U นี้มีชื่อว่า อินทิกรัลของจาโคบี (Jacobi's integral) และจะได้

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x - \frac{1-m}{\rho_1{}^3}(x - x_1) - \frac{m}{\rho_2{}^3}(x - x_2) \tag{3.39}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = y - \frac{1-m}{\rho_1{}^3} y - \frac{m}{\rho_2{}^3} y \tag{3.40}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1-m}{\rho_1{}^3} z - \frac{m}{\rho_2{}^3} z \tag{3.41}$$

จึงสามารถเขียนสมการ (3.35), (3.36) และ (3.37) ได้ใหม่เป็น

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \tag{3.42}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \tag{3.43}$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} \tag{3.44}$$

นำสมการ (3.42), (3.43) และ (3.44) คูณด้วย $2\dot{x}$, $2\dot{y}$ และ $2\dot{z}$ ตามลำดับ แล้วนำมาบวกกัน จะได้

$$2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} + 2\dot{z}\ddot{z} = 2\dot{x}\frac{\partial U}{\partial x} + 2\dot{y}\frac{\partial U}{\partial y} + 2\dot{z}\frac{\partial U}{\partial z} \tag{3.45}$$

หรือ

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 2\frac{dU}{dt} \tag{3.46}$$

อินทิเกรดสมการ (3.46) จะได้ สมการอินทิกรัลของจาโคบี ออกมาเป็น

$$v^2 = 2U - C \tag{3.47}$$

เมื่อ v คืออัตราเร็วของวัตถุชิ้นที่ 3

C คือค่าคงที่ของการอินทิเกรต

3.2 เส้นโค้งความเร็วศูนย์

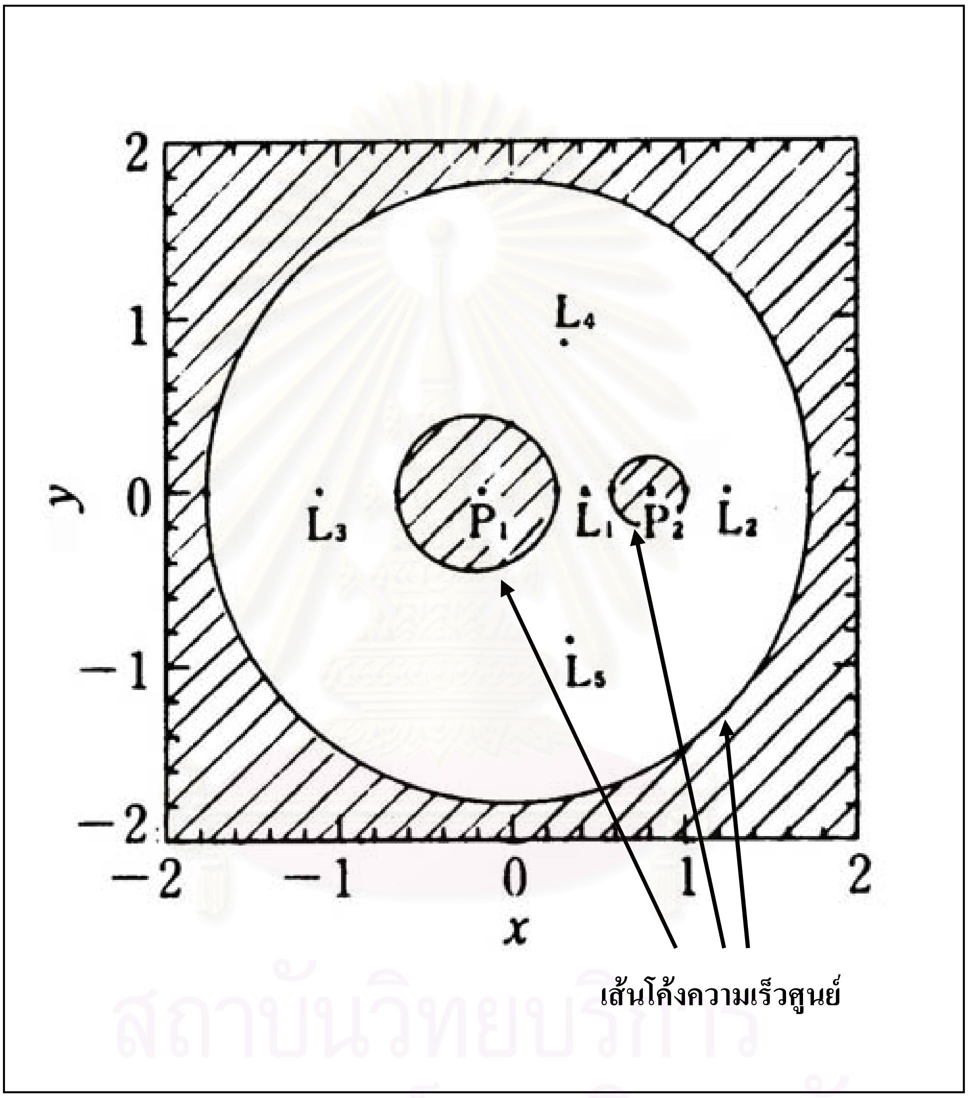
สมการ (3.47) สามารถบอกได้ว่าจะพบวัตถุชิ้นที่ 3 นี้ได้ที่ใด เนื่องจากวัตถุจะสามารถอยู่ได้เฉพาะบริเวณที่ $v^2 > 0$ หรือ $2U > C$ และไม่สามารถอยู่ได้ในบริเวณที่ $v^2 < 0$ หรือ $2U < C$ สำหรับบริเวณเส้นแบ่งขอบเขตของทั้ง 2 กรณี จะเป็นบริเวณที่ทำให้ $v = 0$ หรือ $2U = C$ มีชื่อเรียกว่า เส้นโค้งความเร็วศูนย์ โดยเงื่อนไขที่ว่า $2U = C$ แทนค่า U จากสมการ (3.38) จะได้

$$x^2 + y^2 + \frac{2(1-m)}{\rho_1} + \frac{2m}{\rho_2} = C$$

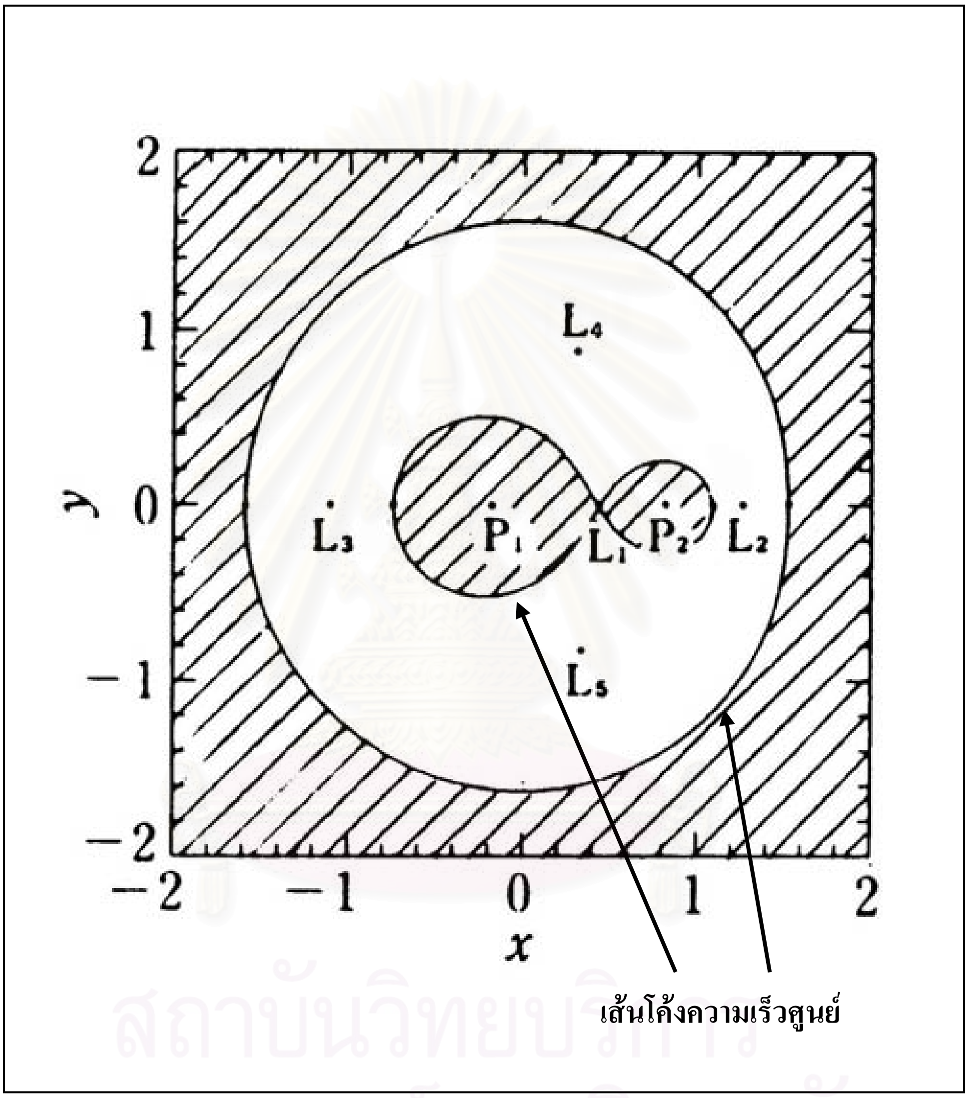
จะเขียนเป็น

$$f(x,y) \equiv x^2 + y^2 + \frac{2(1-m)}{\rho_1} + \frac{2m}{\rho_2} = C \tag{3.48}$$

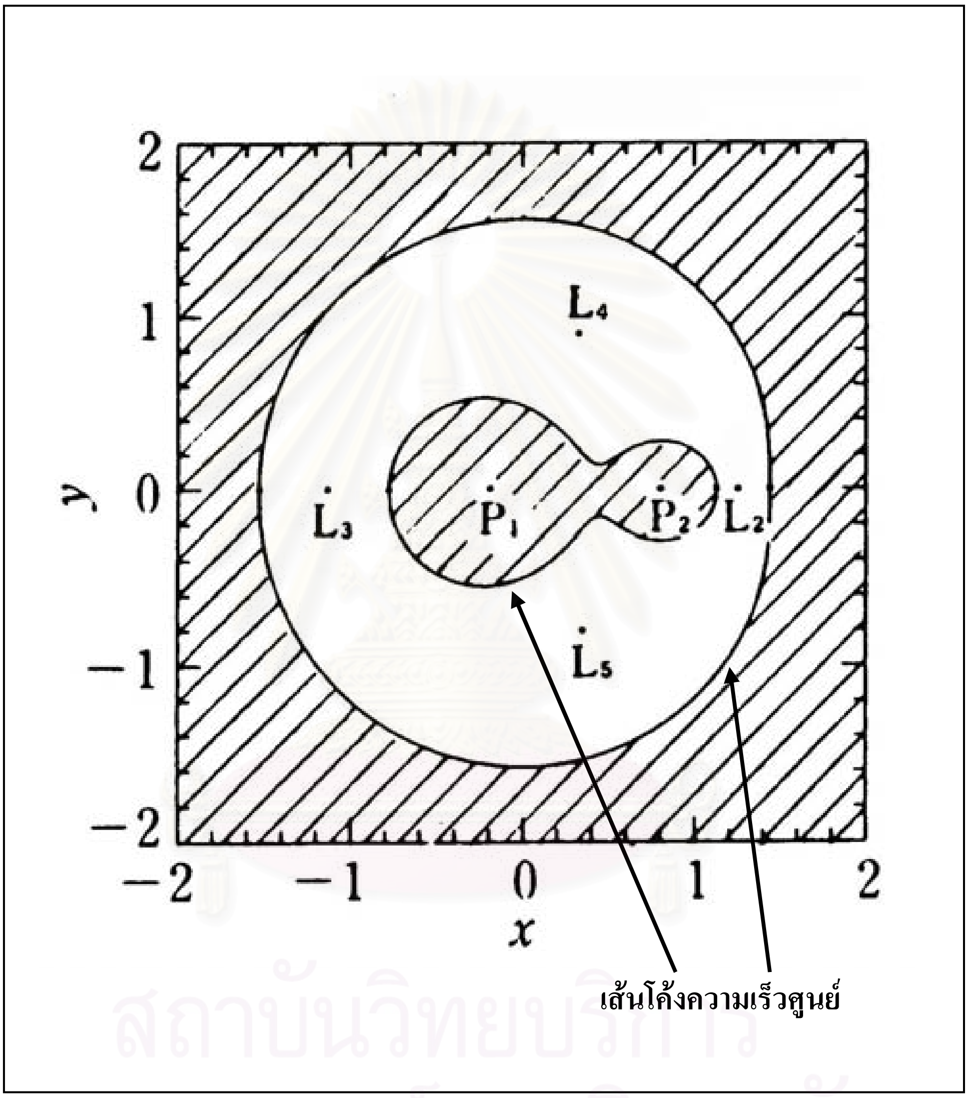
นำสมการ (3.48) ไปแสดงผลเป็นกราฟที่ชื่อว่า เส้นโค้งความเร็วศูนย์ พร้อมทั้งหาขอบเขตของการมีอยู่ของวัตถุ โดยบริเวณที่วัตถุสามารถอยู่ได้คือเมื่อ $2U > C$ และวัตถุจะไม่สามารถอยู่ได้ เมื่อ $2U < C$ และจะทำการหาลักษณะของเส้นโค้งความเร็วศูนย์ที่ค่า C ต่างๆ โดยให้บริเวณที่แรเงาคือบริเวณที่วัตถุสามารถอยู่ได้ และบริเวณที่ไม่ได้แรเงาคือบริเวณที่วัตถุไม่สามารถอยู่ได้ดังแสดงในรูปที่ 3.2 ถึง 3.8 **[1]**



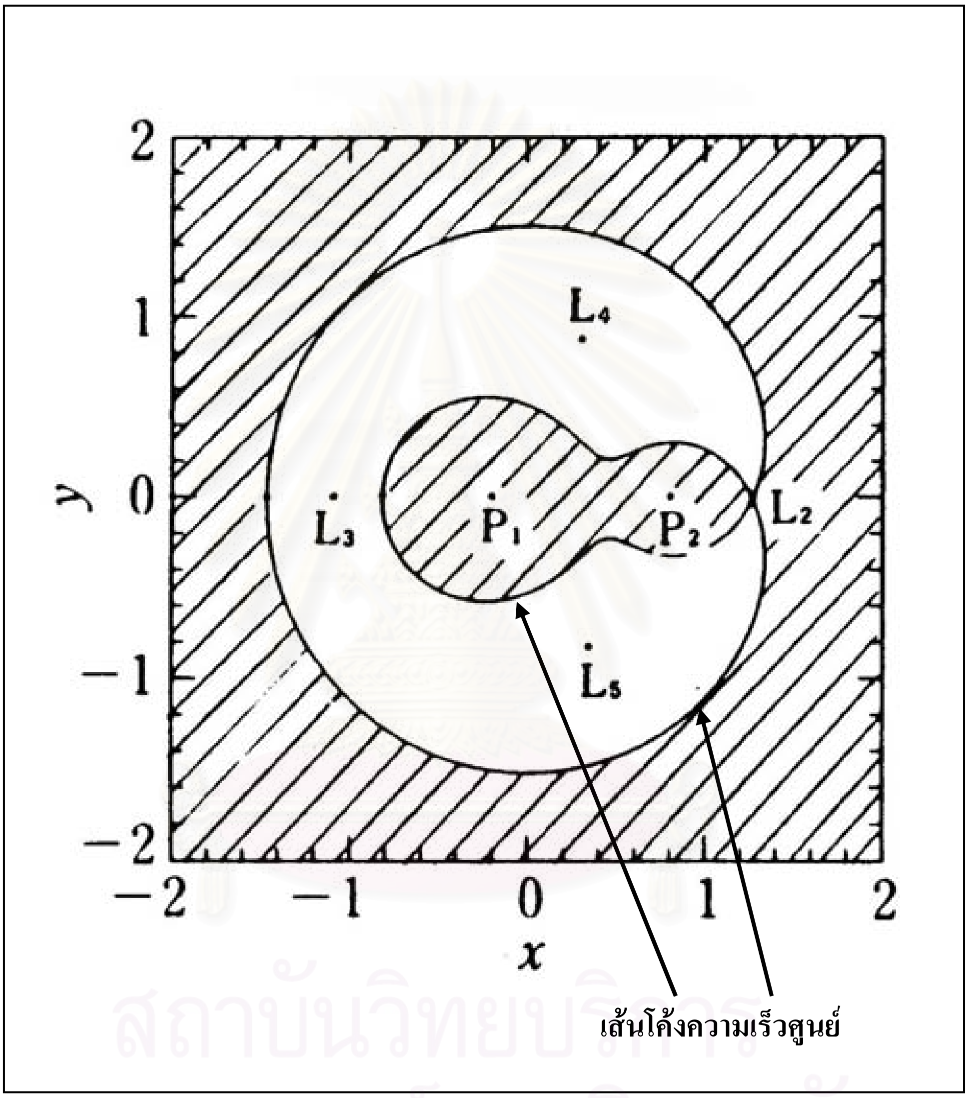
รูปที่ 3.2 เส้นโค้งความเร็วศูนย์ เมื่อ $C = 2.2$



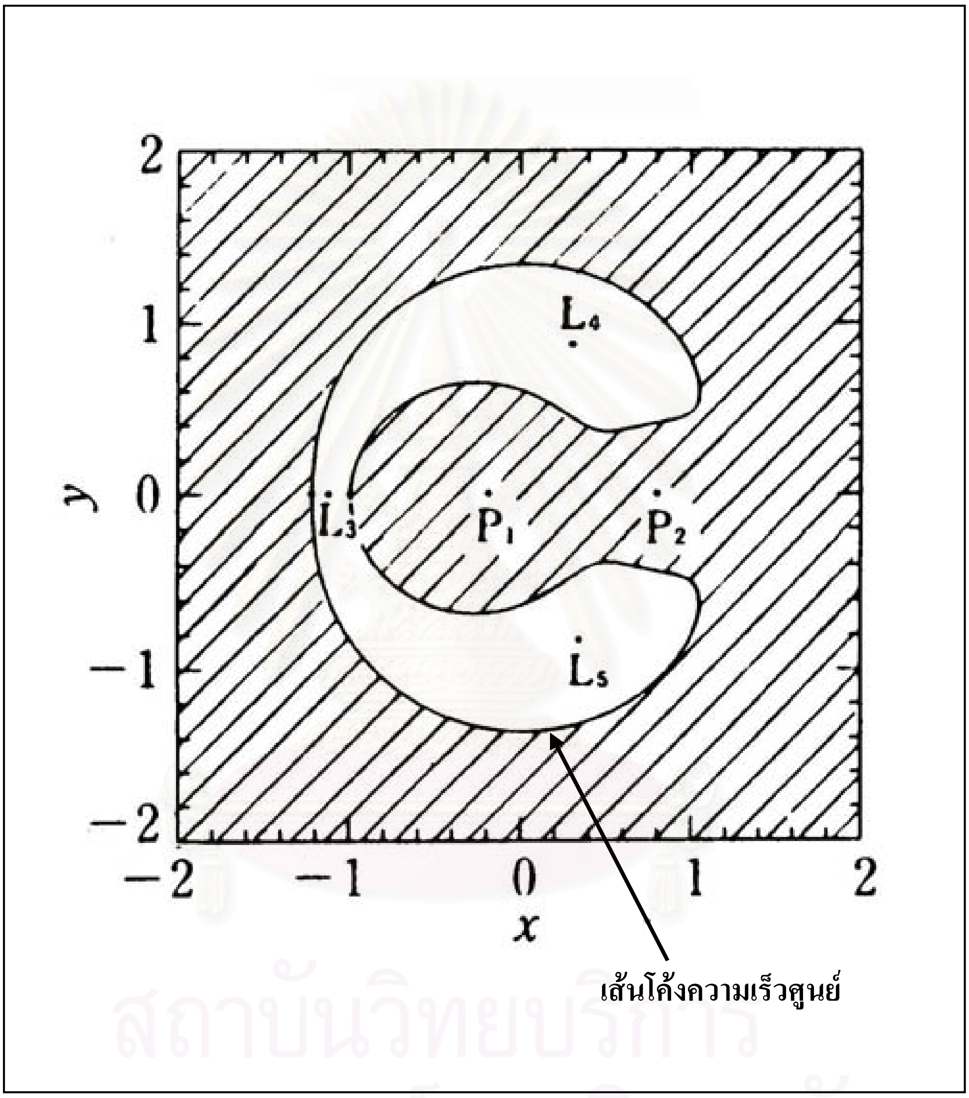
รูปที่ 3.3 เส้นโค้งความเร็วศูนย์ เมื่อ $C = 1.9823$



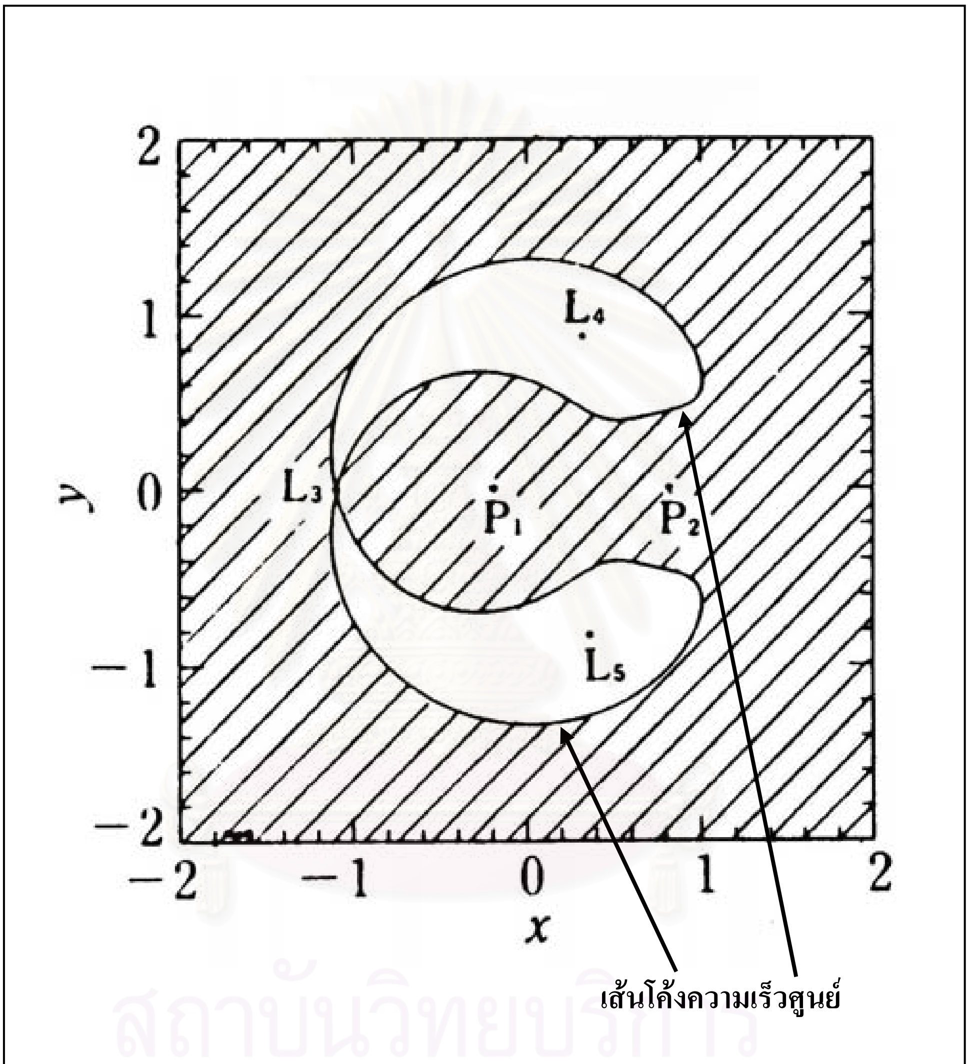
รูปที่ 3.4 เส้นโค้งความเร็วศูนย์ เมื่อ $C = 1.92$



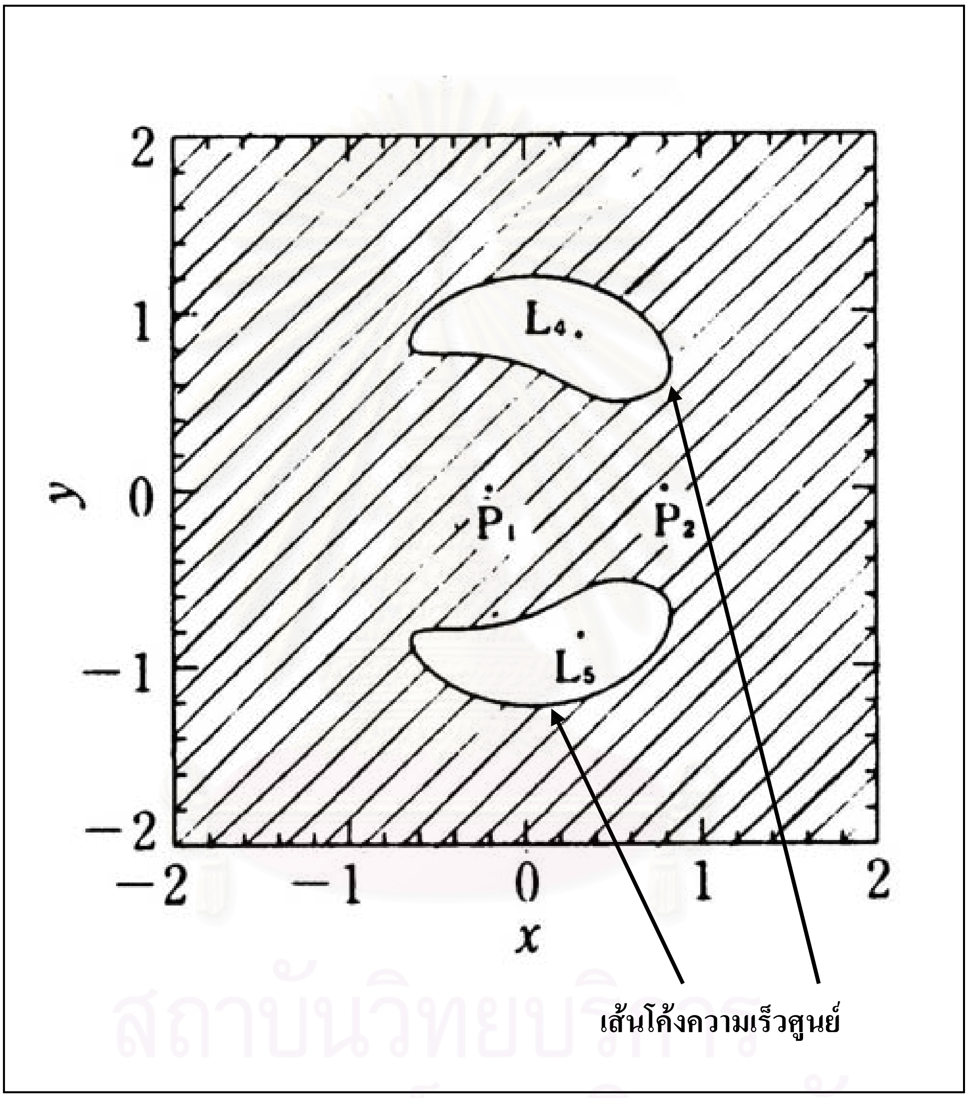
รูปที่ 3.5 เส้นโค้งความเร็วศูนย์ เมื่อ $C = 1.8562$



รูปที่ 3.6 เส้นโค้งความเร็วศูนย์ เมื่อ $C = 1.7$



รูปที่ 3.7 เส้นโค้งความเร็วศูนย์ เมื่อ $C = 1.6787$



รูปที่ 3.8 เส้นโค้งความเร็วศูนย์ เมื่อ $C = 1.6$

จากรูปที่ 3.2 ถึง 3.8 ให้จุด P_1 คือวัตถุชิ้นที่ 1 และจุด P_2 คือวัตถุชิ้นที่ 2 โดยจะพบว่าเมื่อค่า C เปลี่ยนไป จะทำให้ลักษณะของเส้นโค้งความเร็วศูนย์เปลี่ยนไปด้วย

จากรูปที่ 3.2 เมื่อลดค่า C ลงจนมาเป็นรูปที่ 3.3 จะทำให้เส้นโค้งความเร็วศูนย์ 2 เส้นมาสัมผัส (tangent) กันที่จุด L_1

จากนั้นลดค่า C ลงจนมาเป็นรูปที่ 3.5 จะทำให้เส้นโค้งความเร็วศูนย์ 2 เส้นมาสัมผัสกันที่จุด L_2

จากนั้นลดค่า C ลงจนมาเป็นรูปที่ 3.7 จะทำให้เส้นโค้งความเร็วศูนย์ 2 เส้นมาสัมผัสกันที่จุด L_3

และจากรูป 3.8 เมื่อลดค่า C ลงไปเรื่อยๆ จะทำให้เส้นโค้งความเร็วศูนย์ทั้ง 2 เส้นค่อยๆเล็กลงจนไปสัมผัสกันที่จุด L_4 และ L_5 ในที่สุด

จากการวิเคราะห์ทางเรขาคณิตพบว่า จุดที่เส้นโค้งความเร็วศูนย์ 2 เส้นสัมผัสกันจะทำให้ $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ โดยฟังก์ชัน f นี้ก็คือฟังก์ชันจากสมการ (3.48) จึงได้

$$x - \frac{(1-m)}{{\rho_1}^3}(x - x_1) - \frac{m}{{\rho_2}^3}(x - x_2) = 0 \qquad (3.49)$$

$$y - \frac{(1-m)}{{\rho_1}^3}y - \frac{m}{{\rho_2}^3}y = 0 \qquad (3.50)$$

เปรียบเทียบสมการ (3.49) กับสมการ (3.39) และเปรียบเทียบสมการ (3.50) กับสมการ (3.40) จะได้

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \qquad (3.51)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \qquad (3.52)$$

เมื่อพิจารณาสมการ (3.42) และ (3.43)

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} = x - \frac{1-m}{{\rho_1}^3}(x - x_1) - \frac{m}{{\rho_2}^3}(x - x_2)$$

$$\ddot{y}+2\dot{x}=\frac{\partial U}{\partial y}=y-\frac{1-m}{\rho_1^{\ 3}}y-\frac{m}{\rho_2^{\ 3}}y$$

จะได้ว่า

$$\ddot{x}-2\dot{y}=0 \tag{3.53}$$

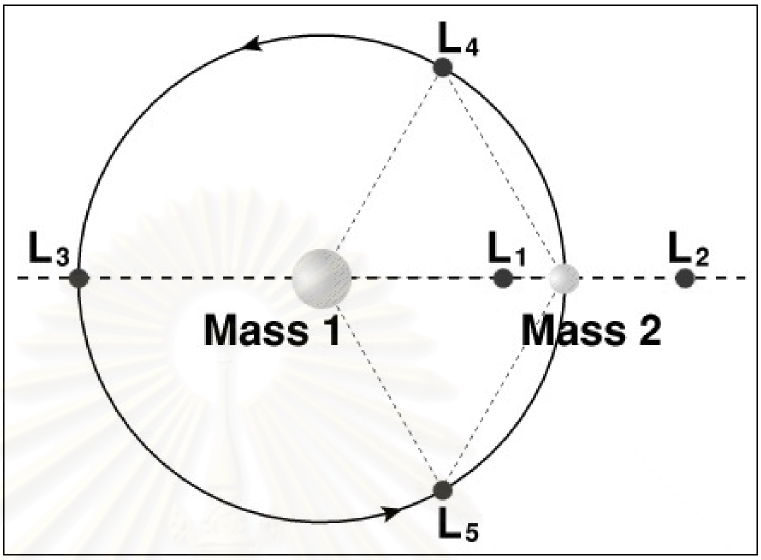
$$\ddot{y}+2\dot{x}=0 \tag{3.54}$$

จากรูปที่ 3.2 ถึง 3.8 เมื่อพิจารณาจุดที่เกิดการสัมผัสกันของเส้นโค้งความเร็วศูนย์ 2 เส้น พบว่า จะมีอยู่ทั้งหมด 5 จุด ซึ่งทั้ง 5 จุดนี้ก็คือ จุดลากรองจ์ นั่นเอง

3.3 จุดลากรองจ์

พิจารณาจุดลากรองจ์ทั้ง 5 ที่เกิดจากการสัมผัสกันของเส้นโค้งความเร็วศูนย์ 2 เส้น เนื่องจากจุดอยู่บนระนาบ xy ดังนั้นพิกัดทางแกน z จึงเป็นศูนย์ รวมไปถึง $\dot{z}=\ddot{z}=0$ และด้วยความที่เป็นเส้นโค้งความเร็วศูนย์จึงทำให้ $v=0$ หรือก็คือ $\dot{x}=\dot{y}=0$ เมื่อนำไปแทนในสมการ (3.53) และ (3.54) จะได้ว่า $\ddot{x}=\ddot{y}=0$ อีกด้วย

เนื่องจากที่จุดนี้มีสมบัติคือ $\dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0$ และ $\ddot{x}=\ddot{y}=\ddot{z}=0$ เมื่อนำวัตถุไปวางที่จุดลากรองจ์ วัตถุนั้นก็จะรักษาสภาพนิ่งอยู่อย่างนั้นได้ภายใต้กรอบหมุน ยกตัวอย่างให้วัตถุชิ้นที่ 1 และ 2 เป็น ดวงอาทิตย์ และ โลก ซึ่งโลกหมุนรอบดวงอาทิตย์ จุดลากรองจ์ของระบบของดวงอาทิตย์-โลกนี้ ก็จะหมุนไปตามการโคจรของโลกรอบดวงอาทิตย์ด้วย จากนั้นนำดาวเทียมไปวางติดที่จุดลากรองจ์ของระบบ ดาวเทียมก็จะอยู่ติดนิ่งที่จุดนี้ไม่ขยับไปไหน แต่เนื่องจากจุดลากรองจ์จะเคลื่อนที่ไปตามการโคจรของโลกรอบดวงอาทิตย์ ทำให้ผู้สังเกตในกรอบเฉื่อยจะมองเห็นดาวเทียมดวงนี้ เคลื่อนที่ไปตามการโคจรของโลกรอบดวงอาทิตย์ด้วย



รูปที่ 3.9 จุดลากรองจ์ทั้ง 5 จุด

จากรูปที่ 3.9 จะเห็นว่าในระบบหนึ่งจะมีจุดลากรองจ์เกิดขึ้น 5 จุดด้วยกัน โดย 3 จุดแรกจะเรียงตัวอยู่บนแนวเดียวกับวัตถุ 2 ชิ้นแรก (แนวแกน x) ให้ชื่อว่าจุดลากรองจ์ L_1, L_2 และ L_3

จุดสัมผัสอีก 2 จุดที่เปรียบเสมือนวางตัวอยู่บนยอดของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ที่มีระยะห่างระหว่างวัตถุชิ้นที่ 1 และ 2 เป็นฐานของสามเหลี่ยม ให้ชื่อว่าจุดลากรองจ์ L_4 และ L_5 โดยจุดลากรองจ์ L_4 และ L_5 จะมีชื่อเรียกเฉพาะว่า จุดลากรองจ์สามเหลี่ยม

จะทำการพิสูจน์ว่าจุดลากรองจ์ L_4 และ L_5 เป็นจุดที่วางตัวอยู่บนยอดของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ที่มีระยะห่างระหว่างวัตถุชิ้นที่ 1 และ 2 เป็นฐานของสามเหลี่ยม โดยพิจารณาสมการ (3.50) เมื่อวัตถุอยู่ที่จุด L_4 และ L_5 ซึ่งวางตัวนอกแกน x ทำให้ $y \neq 0$ ดังนั้นจึงนำ y หารตลอดได้

$$1 - \frac{(1-m)}{\rho_1^{\ 3}} - \frac{m}{\rho_2^{\ 3}} = 0 \qquad (3.55)$$

คูณสมการ (3.55) ด้วย $x - x_1$ จะได้

$$(x - x_1) - \frac{(1-m)}{{\rho_1}^3}(x - x_1) - \frac{m}{{\rho_2}^3}(x - x_1) = 0 \tag{3.56}$$

คูณสมการ (3.55) ด้วย $x - x_2$ จะได้

$$(x - x_2) - \frac{(1-m)}{{\rho_1}^3}(x - x_2) - \frac{m}{{\rho_2}^3}(x - x_2) = 0 \tag{3.57}$$

พิจารณาสมการ (3.49)

$$x - \frac{(1-m)}{{\rho_1}^3}(x - x_1) - \frac{m}{{\rho_2}^3}(x - x_2) = 0 \tag{3.49}$$

นำสมการ (3.56) – (3.49) และ (3.57) – (3.49) จะได้

$$x_1 + \frac{m}{{\rho_2}^3}(x_2 - x_1) = 0$$

$$x_2 - \frac{(1-m)}{{\rho_1}^3}(x_2 - x_1) = 0$$

จากที่กำหนดเงื่อนไขไว้ว่า $x_2 - x_1 = 1$ จะได้

$$x_1 + \frac{m}{{\rho_2}^3} = 0 \tag{3.58}$$

$$x_2 - \frac{(1-m)}{{\rho_1}^3} = 0 \tag{3.59}$$

พิจารณาสมการของจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุชิ้นที่ 1 และ 2

$$M\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2$$

แต่ในกรณีนี้ จุดศูนย์กลางมวลอยู่ที่จุดกำเนิด แล้วแทนค่ามวลและตำแหน่งตามที่กำหนดเงื่อนไขไว้

$$0 = (1-m)x_1 + mx_2$$

$$x_1 = -m(x_2 - x_1)$$

แทนค่า $x_2 - x_1 = 1$

$$x_1 = -m \tag{3.60}$$

$$x_2 = 1 - m \tag{3.61}$$

แทนค่าจากสมการ (3.60) ลงในสมการ (3.58)

$$-m + \frac{m}{{\rho_2}^3} = 0$$

$$1 - \frac{1}{{\rho_2}^3} = 0 \tag{3.62}$$

แทนค่าจากสมการ (3.61) ลงในสมการ (3.59)

$$(1-m) - \frac{(1-m)}{{\rho_1}^3} = 0$$

$$1 - \frac{1}{{\rho_1}^3} = 0 \tag{3.63}$$

สมการ (3.62) และ (3.63) จะเป็นจริงเมื่อ $\rho_1 = 1$ และ $\rho_2 = 1$ และจากเงื่อนไขที่กำหนดไว้ตั้งแต่ต้นว่า $x_2 - x_1 = 1$ นั่นคือ $x_2 - x_1 = \rho_1 = \rho_2$ จึงสรุปได้ว่า จุดลากรองจ์ L_4 และ L_5 วางตัวอยู่บนยอดของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ที่มีระยะห่างระหว่างวัตถุชิ้นที่ 1 และ 2 เป็นฐานของสามเหลี่ยมด้านเท่าจริง

3.4 เสถียรภาพในการเคลื่อนที่บริเวณใกล้จุดลากรองจ์ของคำตอบเส้นตรง

การจะนำดาวเทียมไปวางไว้ที่จุดลากรองจ์ คงไม่สามารถทำได้จริง จึงต้องศึกษาการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ถูกวางไว้บริเวณใกล้ๆจุดลากรองจ์แทน เนื่องจากจุดลากรองจ์เป็นจุดที่ที่มีเสถียรภาพในการเคลื่อนที่ภายใต้กรอบหมุนจึงเปรียบได้ดั่งจุดสมดุล ดังนั้นวัตถุที่วางอยู่บริเวณใกล้จุดลากรองจ์ก็น่าจะมีเสถียรภาพในการเคลื่อนที่รอบจุดสมดุลนั้นไปด้วย

โดยในหัวข้อนี้จะทำการวิเคราะห์เสถียรภาพและลักษณะของการเคลื่อนที่ของวัตถุบริเวณใกล้จุดลากรองจ์ $L_1,\ L_2$ และ L_3

พิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุบริเวณใกล้จุดลากรองจ์ $L_1,\ L_2$ และ L_3 ซึ่งอยู่บนแกน x โดยกำหนดให้จุดลากรองจ์อยู่ที่พิกัด (x_0, y_0) และวัตถุอยู่บริเวณใกล้ๆกับจุดลากรองจ์โดยมีตำแหน่งอยู่ที่

$$x = x_0 + \alpha \tag{3.64}$$

$$y = y_0 + \beta \tag{3.65}$$

เมื่อ α มีค่าน้อยกว่า x_0 มากๆ และ β มีค่าน้อยกว่า y_0 มากๆ

หาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง และ อนุพันธ์อันดับที่สอง ของสมการ (3.64) และ (3.65) ได้

$$\dot{x} = \dot{\alpha} \tag{3.66}$$

$$\dot{y} = \dot{\beta} \tag{3.67}$$

$$\ddot{x} = \ddot{\alpha} \tag{3.68}$$

$$\ddot{y} = \ddot{\beta} \tag{3.69}$$

เนื่องจาก $\dot{x}_0 = \dot{\mathrm{y}}_0 = 0$ และ $\ddot{x}_0 = \ddot{\mathrm{y}}_0 = 0$

กระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของสมการ (3.42) และ (3.43) รอบจุดสมดุล จึงต้องทำการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของ $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial U}{\partial y}$ รอบจุดสมดุล โดยไม่คำนึงถึงเทอมอันดับ 2 ขึ้นไป

โดยให้ $U_x = \dfrac{\partial U}{\partial x}$, $U_{xx} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ และ $U_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$

$U_y = \dfrac{\partial U}{\partial y}$, $U_{yx} = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ และ $U_{yy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}$

จะได้ว่า

$$U_x = (U_x)_0 + \alpha (U_{xx})_0 + \beta (U_{xy})_0 \tag{3.70}$$

$$U_y = (U_y)_0 + \alpha(U_{yx})_0 + \beta(U_{yy})_0 \tag{3.71}$$

นำสมการ (3.66) ถึง (3.71) ไปแทนใน สมการ (3.42) และ (3.43) จะได้

$$\ddot{\alpha} - 2\dot{\beta} = (U_x)_0 + \alpha(U_{xx})_0 + \beta(U_{xy})_0$$

$$\ddot{\beta} + 2\dot{\alpha} = (U_y)_0 + \alpha(U_{yx})_0 + \beta(U_{yy})_0$$

จากสมการ (3.51) และ (3.52) ทำให้ทราบว่าค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน U เทียบกับตำแหน่งที่จุดลากรองจ์มีค่าเป็นศูนย์

$$\ddot{\alpha} - 2\dot{\beta} = \alpha(U_{xx})_0 + \beta(U_{xy})_0$$

$$\ddot{\beta} + 2\dot{\alpha} = \alpha(U_{yx})_0 + \beta(U_{yy})_0$$

และเพื่อความสะดวกจะเขียนแทน $(U_{xx})_0$ ด้วย U_{xx}, แทน $(U_{xy})_0$ ด้วย U_{xy}, แทน $(U_{yx})_0$ ด้วย U_{yx} และแทน $(U_{yy})_0$ ด้วย U_{yy} จึงได้เป็น

$$\ddot{\alpha} - 2\dot{\beta} = \alpha U_{xx} + \beta U_{xy} \tag{3.72}$$

$$\ddot{\beta} + 2\dot{\alpha} = \alpha U_{yx} + \beta U_{yy} \tag{3.73}$$

สมมติผลเฉลยเป็น

$$\alpha = Ae^{\lambda t} \qquad \beta = Be^{\lambda t}$$

หาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง และ อนุพันธ์อันดับที่สอง จะได้

$$\dot{\alpha} = \lambda Ae^{\lambda t} = \lambda\alpha \qquad \dot{\beta} = \lambda Be^{\lambda t} = \lambda\beta$$

$$\ddot{\alpha} = \lambda^2 Ae^{\lambda t} = \lambda^2\alpha \qquad \ddot{\beta} = \lambda^2 Be^{\lambda t} = \lambda^2\beta$$

แทนค่าทั้งหมดลงในสมการ (3.72) และ (3.73)

$$\lambda^2\alpha - 2\lambda\beta = U_{xx}\alpha + U_{xy}\beta \tag{3.74}$$

$$\lambda^2\beta + 2\lambda\alpha = U_{yx}\alpha + U_{yy}\beta \tag{3.75}$$

พิจารณาฟังก์ชัน U จากสมการ (3.38)

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-m}{\rho_1} + \frac{m}{\rho_2}$$

โดยที่ $\rho_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2 + z^2}$ และ $\rho_2 = \sqrt{(x-x_2)^2 + y^2 + z^2}$

พบว่าฟังก์ชัน U เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เนื่องจากตัวหารไม่มีทางเป็นศูนย์ เพราะวัตถุชิ้นที่ 3 ไม่สามารถอยู่ที่ตำแหน่ง x_1 หรือ x_2 ได้

ดังนั้น
$$U_{xy} = U_{yx} \tag{3.76}$$

ดังนั้นสมการ (3.74) และ (3.75) จึงได้เป็น

$$\lambda^2\alpha - 2\lambda\beta = U_{xx}\alpha + U_{xy}\beta \tag{3.77}$$

$$\lambda^2\beta + 2\lambda\alpha = U_{xy}\alpha + U_{yy}\beta \tag{3.78}$$

เขียนในรูปของเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 - U_{xx} & -2\lambda - U_{xy} \\ 2\lambda - U_{xy} & \lambda^2 - U_{yy} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0 \tag{3.79}$$

จะได้ว่า

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - U_{xx} & -2\lambda - U_{xy} \\ 2\lambda - U_{xy} & \lambda^2 - U_{yy} \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^4 + (4 - U_{xx} - U_{yy})\lambda^2 + (U_{xx}U_{yy} - U_{xy}{}^2) = 0$$

ให้ $\Lambda = \lambda^2$

$$\Lambda^2 + (4 - U_{xx} - U_{yy})\Lambda + (U_{xx}U_{yy} - U_{xy}{}^2) = 0$$

$$\Lambda^2 + 2\left(2 - \frac{U_{xx} + U_{yy}}{2}\right)\Lambda - (-U_{xx}U_{yy} - U_{xy}{}^2) = 0 \tag{3.80}$$

สามารถหาค่า U_{xy} ออกมาได้เท่ากับ

$$U_{xy} = \frac{3m_1}{\rho_1^{\ 5}}(x - x_1)y + \frac{3m_2}{\rho_2^{\ 5}}(x - x_2)y$$

บนจุดลากรองจ์ L_1, L_2 และ L_3 ซึ่งอยู่บนแกน x นั่นคือ $y = 0$ ดังนั้น

$$U_{xy} = 0$$

สมการ (3.80) จึงเป็น

$$\Lambda^2 + 2\left(2 - \frac{U_{xx} + U_{yy}}{2}\right)\Lambda - (-U_{xx}U_{yy}) = 0$$

กำหนดให้

$$\beta_1 = 2 - \frac{U_{xx} + U_{yy}}{2} \qquad \text{และ} \qquad \beta_2 = -U_{xx}U_{yy}$$

จะได้เป็น

$$\Lambda^2 + 2\beta_1\Lambda - \beta_2 = 0$$

ซึ่งสามารถหาค่ารากของสมการทั้ง 2 ค่าออกมาได้ดังนี้

$$\Lambda_1 = \frac{-2\beta_1 + \sqrt{4(\beta_1^{\ 2} + \beta_2)}}{2}$$

$$= -\beta_1 + \sqrt{\beta_1^{\ 2} + \beta_2}$$

$$\Lambda_2 = \frac{-2\beta_1 - \sqrt{4(\beta_1^{\ 2} + \beta_2)}}{2}$$

$$= -\beta_1 - \sqrt{\beta_1^{\ 2} + \beta_2}$$

เนื่องจาก $\sqrt{\beta_1^{\ 2} + \beta_2} > 0$ และมากกว่าค่า β_1 จึงทำให้ $\Lambda_1 > 0$ และ $\Lambda_2 < 0$

จาก $\Lambda = \lambda^2$ ดังนั้น λ จึงเท่ากับ

$$\lambda_1 = \sqrt{\Lambda_1} \tag{3.81}$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{\Lambda_1} \tag{3.82}$$

$$\lambda_3 = i\sqrt{|\Lambda_2|} \tag{3.83}$$

$$\lambda_4 = -i\sqrt{|\Lambda_2|} \tag{3.84}$$

ผลเฉลยของสมการจึงกลายเป็น

$$\alpha = A_1e^{\lambda_1 t} + A_2e^{\lambda_2 t} + A_3e^{\lambda_3 t} + A_4e^{\lambda_4 t} \tag{3.85}$$

$$b = B_1e^{\lambda_1 t} + B_2e^{\lambda_2 t} + B_3e^{\lambda_3 t} + B_4e^{\lambda_4 t} \tag{3.86}$$

จะสามารถวิเคราะห์ลักษณะการเคลื่อนโดยพิจารณาสมการ (3.85) และ (3.86) ได้ว่า

พจน์ที่ 3 และ 4 ที่มี λ เป็นจำนวนจินตภาพ แสดงว่าการเคลื่อนที่จะเป็นแบบสั่นเชิงคาบ

พจน์ที่ 2 ที่มี λ เป็นค่าลบ แสดงถึงความมีเสถียรภาพในการเคลื่อนที่เมื่อเวลาผ่านไป เพราะการเคลื่อนที่จะลู่เข้าสู่จุดสุมดุล

พจน์ที่ 1 ที่มี λ เป็นค่าบวก เป็นพจน์ที่มีปัญหา เพราะเมื่อเวลาผ่านไป การเคลื่อนที่นี้จะยิ่งลู่ออกไปสู่อนันต์ นั่นก็คือ พจน์นี้ทำให้เกิดความไม่มีเสถียรภาพในการเคลื่อนที่บริเวณใกล้ๆจุดสมดุลนั่นเอง

จึงสามารถสรุปได้ว่า การเคลื่อนที่ของวัตถุบริเวณใกล้จุดลากรองจ์ L_1, L_2 และ L_3 ไม่มีเสถียรภาพในการเคลื่อนที่อยู่ใกล้จุดสมดุลนั้น เมื่อเวลาผ่านไปนานๆ ในขณะที่การเคลื่อนที่ของวัตถุบริเวณใกล้จุดลากรองจ์ L_4 และ L_5 นั้นจะเป็นการเคลื่อนที่ที่มีเสถียรภาพ ดังจะแสดงใน บทที่ 4 ต่อไป

บทที่ 4

ผลเฉลยของการเคลื่อนที่บริเวณใกล้จุดลากรองจ์ของคำตอบสามเหลี่ยมด้านเท่า

เนื่องจากการเคลื่อนที่ของวัตถุบริเวณใกล้จุดลากรองจ์ L_1, L_2 และ L_3 นั้นไม่มีเสถียรภาพ ในบทนี้จึงจะพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุบริเวณใกล้จุดลากรองจ์ L_4 และ L_5 ซึ่งมีชื่อเรียกเฉพาะว่า จุดลากรองจ์สามเหลี่ยม ถ้าพบว่ามีเสถียรภาพในการเคลื่อนที่บริเวณรอบจุดนั้น ก็จะทำการหาผลเฉลยของการเคลื่อนที่ของวัตถุบริเวณใกล้จุดลากรองจ์สามเหลี่ยมนี้ ด้วยการแก้ปัญหาเชิงวิเคราะห์ใน 2 มิติ **[1]**

ย้อนกลับไปพิจารณาสมการ (3.38) ในกรณีทั่วไปที่ไม่ได้กำหนดให้ มวลของวัตถุทั้ง 2 ชิ้นรวมกันเป็น 1 ระยะห่างระหว่างวัตถุทั้ง 2 ชิ้นเป็น 1 อัตราเร็วเชิงมุมของกรอบอ้างอิงหมุนเท่ากับ 1 และ ค่านิจโน้มถ่วงสากลเท่ากับ 1 อินทิกรัลของจาโคบี จะออกมาเป็น

$$U = \frac{1}{2}n^2(x^2 + y^2) + \frac{Gm_1}{\rho_1} + \frac{Gm_2}{\rho_2} \tag{4.1}$$

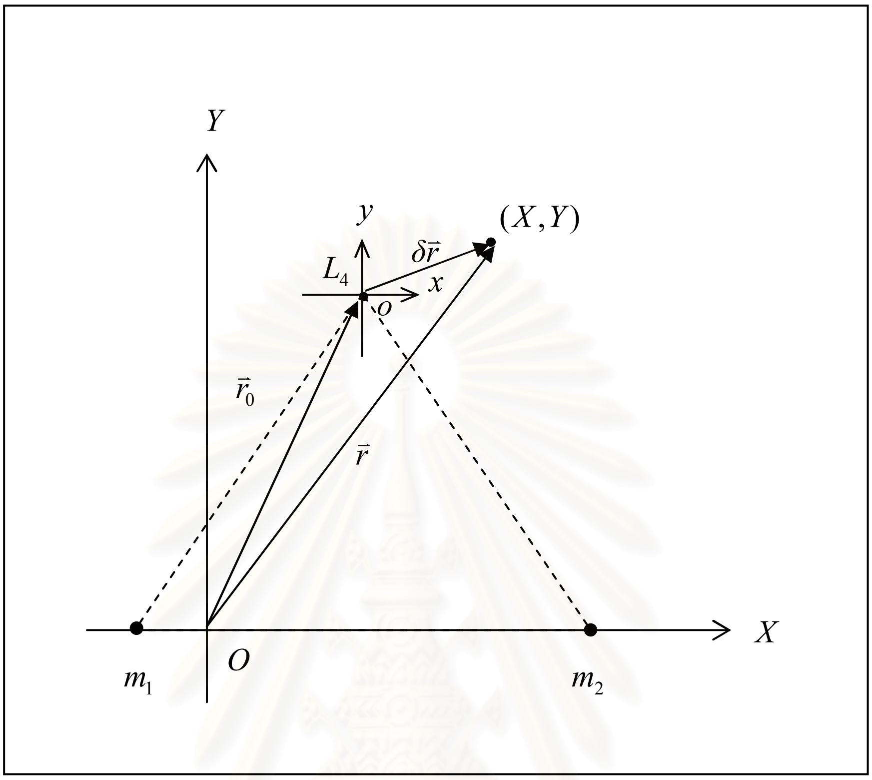
และสมการ (3.42) และ (3.43) เมื่อให้ $\frac{\partial U}{\partial x} = U_x$ และ $\frac{\partial U}{\partial y} = U_y$ จะได้

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = U_x \tag{4.2}$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = U_y \tag{4.3}$$

จะพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุทดสอบบริเวณใกล้จุดลากรองจ์ L_4 โดยวัตถุชิ้นที่ 1 และ 2 วางตัวอยู่บนแกน x ของกรอบอ้างอิง $X-Y$ และจุดลากรองจ์ L_4 อยู่บนจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าซึ่งมีด้านแต่ละด้านยาวเท่ากับระยะห่างระหว่างวัตถุชิ้นที่ 1 กับ วัตถุชิ้นที่ 2

โดยกรอบอ้างอิง $X-Y$ มีจุดกำเนิดอยู่ที่จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุชิ้นที่ 1 และ 2 และที่จุดลากรองจ์ L_4 ซึ่งเป็นจุดสมดุลก็จะมีการตั้งกรอบอ้างอิง $x-y$ ด้วย ซึ่งจุดกำเนิดของกรอบอ้างอิง $x-y$ จะอยู่ที่จุด L_4



รูปที่ 4.1 กรอบอ้างอิง $X-Y$ และ $x-y$

จากรูปที่ 4.1 วัตถุชิ้นที่ 1 แทนด้วย m_1 วัตถุชิ้นที่ 2 แทนด้วย m_2 และวัตถุชิ้นที่ 3 คือวัตถุทดสอบ โดยให้เวกเตอร์ $\vec{r}$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของวัตถุทดสอบ โดยที่

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \delta\vec{r} \tag{4.4}$$

เมื่อขนาดของเวกเตอร์ของ $\delta\vec{r}$ เล็กกว่าขนาดของเวกเตอร์ $\vec{r}_0$ มากๆ

โดยที่ $\vec{r}$ คือ เวกเตอร์จากจุดกำเนิดของกรอบอ้างอิง $X-Y$ ไปยังวัตถุทดสอบ

$\vec{r}_0$ คือ เวกเตอร์จากจุดกำเนิดของกรอบอ้างอิง $X-Y$ ไปยังจุดลากรองจ์ L_4

$\delta\vec{r}$ คือ เวกเตอร์จากจุดลากรองจ์ L_4 ไปยังวัตถุทดสอบ หรือพิจารณาเป็น

เวกเตอร์จากจุดกำเนิดของกรอบอ้างอิง $x-y$ ไปยัง วัตถุทดสอบ

กำหนดให้ $\bar{r} = X\hat{i} + Y\hat{j}$ (4.5)

$$\bar{r}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} \tag{4.6}$$

$$\delta\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \tag{4.7}$$

ดังนั้นสมการ (4.4) จึงเขียนได้เป็น

$$X = x_0 + x \tag{4.8}$$

$$Y = y_0 + y \tag{4.9}$$

หาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง และ อนุพันธ์อันดับที่สอง ของสมการ (4.8) และ (4.9) ได้

$$\dot{X} = \dot{x} \tag{4.10}$$

$$\dot{Y} = \dot{y} \tag{4.11}$$

$$\ddot{X} = \ddot{x} \tag{4.12}$$

$$\ddot{Y} = \ddot{y} \tag{4.13}$$

เนื่องจาก $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$ และ $\ddot{x}_0 = \ddot{y}_0 = \ddot{z}_0 = 0$

เนื่องจากพิจารณาในกรอบอ้างอิง $X - Y$ สมการ (4.2) และ (4.3) จึงเขียนได้เป็น

$$\ddot{X} - 2n\dot{Y} = U_x \tag{4.14}$$

$$\ddot{Y} + 2n\dot{X} = U_y \tag{4.15}$$

กระจายสมการ (4.14) และ (4.15) รอบจุด L_4 โดยแทน $X = x_0 + x$ และ $Y = y_0 + y$ จากนั้นแทนค่าจากสมการ (4.10) ถึง (4.13) แล้วทำการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน U_x และ U_y รอบจุดสมดุล L_4 โดยไม่คำนึงถึงเทอมอันดับ 2 ขึ้นไป

สมการ (4.14) จะได้เป็น

$$\frac{d}{dt^2}(x_0 + x) - 2n\frac{d}{dt}(y_0 + y) = (U_x)_0 + x(U_{xx})_0 + y(U_{xy})_0$$

$$\ddot{x}_0 + \ddot{x} - 2n(\dot{y}_0 + \dot{y}) = (U_x)_0 + x(U_{xx})_0 + y(U_{xy})_0$$

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = (U_x)_0 + x(U_{xx})_0 + y(U_{xy})_0 \qquad (4.16)$$

ในทำนองเดียวกันกระจายสมการ (4.15) จะได้

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = (U_y)_0 + x(U_{yx})_0 + y(U_{yy})_0 \qquad (4.17)$$

เมื่อ $U_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ และ $U_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$

$U_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ และ $U_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$

$U_{zx} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$ และ $U_{zy} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}$

จาก $$U = \frac{1}{2}n^2(x^2 + y^2) + \frac{Gm_1}{\rho_1} + \frac{Gm_2}{\rho_2}$$

โดยที่ $\rho_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2}$ และ $\rho_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2}$

จะได้

$$U_x = n^2 x - \frac{Gm_1}{\rho_1^3}(x - x_1) - \frac{Gm_2}{\rho_2^3}(x - x_2) \qquad (4.18)$$

$$U_{xx} = n^2 - \frac{Gm_1}{\rho_1^3} - \frac{Gm_2}{\rho_2^3} + \frac{3Gm_1}{\rho_1^5}(x - x_1)^2 + \frac{3Gm_2}{\rho_2^5}(x - x_2)^2 \qquad (4.19)$$

$$U_{xy} = \frac{3Gm_1}{\rho_1^5}(x - x_1)y + \frac{3Gm_2}{\rho_2^5}(x - x_2)y \qquad (4.20)$$

$$U_y = n^2 y - \frac{Gm_1}{\rho_1^{\ 3}} y - \frac{Gm_2}{\rho_2^{\ 3}} y \tag{4.21}$$

$$U_{yx} = \frac{3Gm_1}{\rho_1^{\ 5}}(x - x_1)y + \frac{3Gm_2}{\rho_2^{\ 5}}(x - x_2)y = U_{xy} \tag{4.22}$$

$$U_{yy} = n^2 - \frac{Gm_1}{\rho_1^{\ 3}} - \frac{Gm_2}{\rho_2^{\ 3}} + \frac{3Gm_1}{\rho_1^{\ 5}} y^2 + \frac{3Gm_2}{\rho_2^{\ 5}} y^2 \tag{4.23}$$

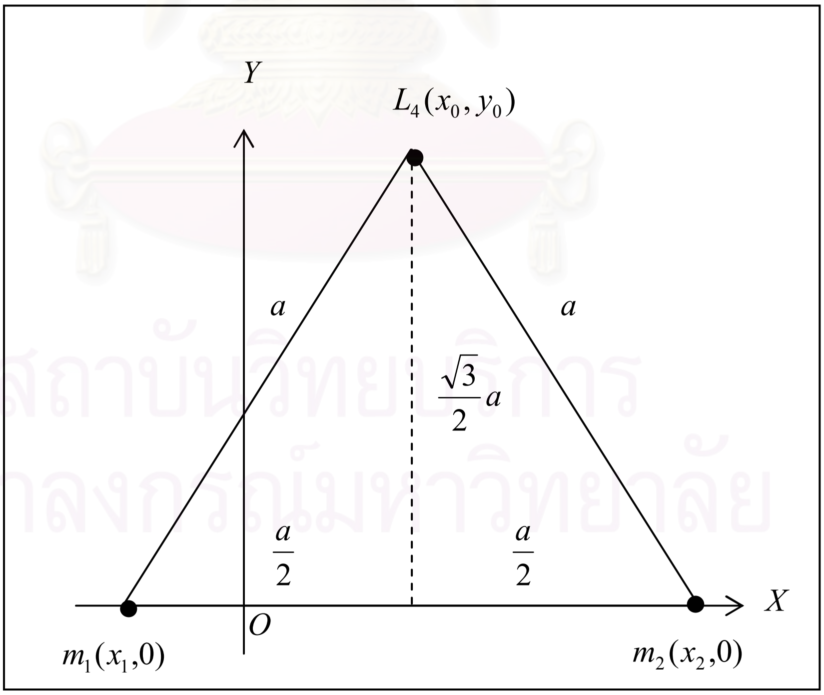
จากสมการ (3.51) และ (3.52) ทำให้ทราบว่าค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน U เทียบกับตำแหน่ง ที่จุดลากรองจ์มีค่าเป็นศูนย์

ดังนั้น

$$(U_x)_0 = 0 \tag{4.24}$$

$$(U_y)_0 = 0 \tag{4.25}$$

ต่อไปจะทำการแทนค่าเมื่อวัตถุอยู่ที่จุดสมดุล L_4



รูปที่ 4.2 ค่าต่างๆที่จุดลากรองจ์ L_4

เนื่องจากจุดลากรองจ์ L_4 เป็นจุดที่ตั้งอยู่บนจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าซึ่งมีด้านแต่ละด้านยาวเท่ากับระยะห่างระหว่างวัตถุชิ้นที่ 1 กับ วัตถุชิ้นที่ 2 ซึ่งถ้าให้วัตถุชิ้นที่ 1 คือดวงอาทิตย์ และวัตถุชิ้นที่ 2 คือดาวพฤหัส ในกรณีที่วัตถุชิ้นที่ 2 โคจรรอบวัตถุชิ้นที่ 1 เป็นวงกลมแล้ว ความยาวในแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่านี้จะกำหนดให้เท่ากับ ค่าระยะครึ่งแกนเอกของการโคจรของดาวพฤหัสรอบดวงอาทิตย์นั่นเอง ในที่นี้ให้เท่ากับ a โดยที่สามเหลี่ยมด้านเท่าจะมีมุมภายในเท่ากับ 60 องศาทั้ง 3 มุมด้วย

$$x_0 - x_1 = \frac{a}{2} \qquad x_0 - x_2 = -\frac{a}{2}$$

$$y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}a \qquad \rho_1 = \rho_2 = a$$

เมื่อ ρ_1 คือระยะทางจากวัตถุชิ้นที่ 1 ไปถึงจุดลากรองจ์ L_4

ρ_2 คือระยะทางจากวัตถุชิ้นที่ 2 ไปถึงจุดลากรองจ์ L_4

และจากสมการ (2.4) จะได้ว่า $G(m_1 + m_2) = n^2 a^3$

$$(U_{xx})_0 = n^2 - \frac{G(m_1+m_2)}{a^3} + \frac{3Ga^2}{4a^5}(m_1+m_2)$$

$$= n^2 - \frac{n^2a^3}{a^3} + \frac{3n^2a^5}{4a^5}$$

$$= \frac{3}{4}n^2$$

$$(U_{xy})_0 = \frac{3}{a^5}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot G(m_1-m_2)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4a^3}G(m_1-m_2)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4a^3}\frac{(m_1-m_2)}{(m_1+m_2)}n^2a^3$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} n^2 \frac{(m_1 + m_2 - 2m_2)}{(m_1 + m_2)}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} n^2 \left(1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} n^2 (1 - 2v)$$

เมื่อ $v = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}$

$$(U_{yx})_0 = (U_{xy})_0$$

$$(U_{yy})_0 = n^2 - \frac{G}{a^3}(m_1 + m_2) + \frac{3Gm_1}{a^5} \cdot \frac{3a^2}{4} + \frac{3Gm_2}{a^5} \cdot \frac{3a^2}{4}$$

$$= n^2 - \frac{n^2 a^3}{a^3} + \frac{9}{4a^3} G(m_1 + m_2)$$

$$= \frac{9}{4a^3} n^2 a^3$$

$$= \frac{9}{4} n^2$$

สรุปได้ทั้งหมดดังนี้

$(U_x)_0 = 0$ $\qquad\qquad$ $(U_y)_0 = 0$

$(U_{xx})_0 = \dfrac{3}{4} n^2$ $\qquad\qquad$ $(U_{xy})_0 = \dfrac{3\sqrt{3}}{4} n^2 (1 - 2v)$

$(U_{yx})_0 = \dfrac{3\sqrt{3}}{4} n^2 (1 - 2v)$ $\qquad\qquad$ $(U_{yy})_0 = \dfrac{9}{4} n^2$

เมื่อ $v = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}$

เพื่อความสะดวกจะกำหนดตัวแปรให้

$$(U_{xx})_0 = \frac{3}{4}n^2 = a \tag{4.26}$$

$$(U_{xy})_0 = (U_{yx})_0 = \frac{3\sqrt{3}}{4}n^2(1-2v) = b \tag{4.27}$$

$$(U_{yy})_0 = \frac{9}{4}n^2 = c \tag{4.28}$$

เอาทั้งหมดไปแทนลงในสมการ (4.16) และ (4.17)

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = ax + by \tag{4.29}$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = bx + cy \tag{4.30}$$

จากสมการ (4.29) และ (4.30) พบว่าขณะนี้จากการพิจารณาวัตถุทดสอบบนกรอบอ้างอิง $X - Y$ ได้ย้ายมาบนกรอบอ้างอิง $x - y$ ซึ่งมีจุดกำเนิดอยู่ที่จุดลากรองจ์ L_4 แทน นั่งก็คือการพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุทดสอบโดยอ้างอิงจากจุดลากรองจ์ L_4 นั่นเอง

กำหนดให้ผลเฉลยเป็น

$$x = Ae^{\lambda t} \qquad y = Be^{\lambda t}$$

หาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง และ อนุพันธ์อันดับที่สอง จะได้

$$\dot{x} = \lambda Ae^{\lambda t} = \lambda x \qquad \dot{y} = \lambda Be^{\lambda t} = \lambda y$$

$$\ddot{x} = \lambda^2 Ae^{\lambda t} = \lambda^2 x \qquad \ddot{y} = \lambda^2 Be^{\lambda t} = \lambda^2 y$$

แทนค่าลงในสมการ (4.24) และ (4.25) จะได้

$$\lambda^2 x - 2n\lambda y = ax + by$$

$$\lambda^2 y + 2n\lambda x = bx + cy$$

จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$x(\lambda^2 - a) + y(-2n\lambda - b) = 0$$

$$y(\lambda^2 - c) + x(2n\lambda - b) = 0$$

เขียนในรูปของเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 - a & -2n\lambda - b \\ 2n\lambda - b & \lambda^2 - c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

จะได้ว่า

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - a & -2n\lambda - b \\ 2n\lambda - b & \lambda^2 - c \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda^4 - a\lambda^2 - c\lambda^2 + ac) + (2n\lambda + b)(2n\lambda - b) = 0$$

$$(\lambda^4 - a\lambda^2 - c\lambda^2 + ac) + (4n^2\lambda^2 - b^2) = 0$$

$$\lambda^4 - a\lambda^2 - c\lambda^2 + ac + 4n^2\lambda^2 - b^2 = 0$$

$$\lambda^4 + (4n^2 - a - c)\lambda^2 + (ac - b^2) = 0$$

แทนค่าจากสมการ (4.26) ถึง (4.28)

$$a = \frac{3}{4}n^2,\ b = \frac{3\sqrt{3}}{4}n^2(1-2v) \text{ และ } c = \frac{9}{4}n^2$$

ได้ว่า $\lambda^4 + (4n^2 - \frac{3}{4}n^2 - \frac{9}{4}n^2)\lambda^2 + (\frac{3}{4}n^2 \cdot \frac{9}{4}n^2 - \frac{27}{16}n^4(1-2v)^2) = 0$

$$\lambda^4 + n^2\lambda^2 + (\frac{27}{16}n^4 - \frac{27}{16}n^4(1 - 4v + 4v^2)) = 0$$

$$\lambda^4 + n^2\lambda^2 + \frac{27}{4}n^4(v - v^2)) = 0$$

$$\lambda^4 + n^2\lambda^2 + \frac{27}{4}n^4 v(1-v) = 0$$

หาผลเฉลยของ λ^2 ออกมาได้เป็น

$$\lambda^2 = \frac{-n^2 \pm \sqrt{n^4 - 27n^4 v(1-v)}}{2}$$

$$\lambda^2 = -\frac{1}{2}n^2\left(1 \pm \sqrt{1-27v(1-v)}\right)$$

$$\lambda = \pm\sqrt{-\frac{1}{2}n^2\left(1 \pm \sqrt{1-27v(1-v)}\right)}$$

$$\lambda = \pm in\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-27v(1-v)}\right)}$$

เพราะฉะนั้นจะได้

$$\lambda_1 = \pm i\omega_1 \tag{4.31}$$

$$\lambda_2 = \pm i\omega_2 \tag{4.32}$$

โดยที่

$$\omega_1 = n\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1-27v(1-v)}\right)} \tag{4.33}$$

$$\omega_2 = n\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-27v(1-v)}\right)} \tag{4.34}$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการ (4.29) และ (4.30) คือ

$$x = A_1e^{i\omega_1 t} + A_2e^{-i\omega_1 t} + A_3e^{i\omega_2 t} + A_4e^{-i\omega_2 t} \tag{4.35}$$

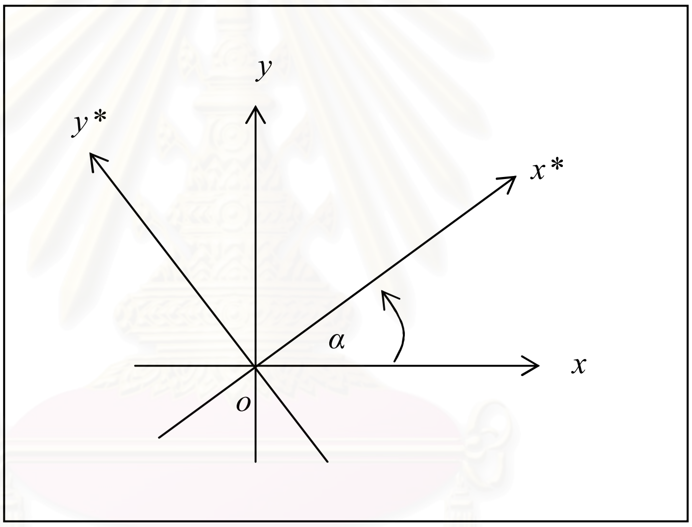
$$y = B_1e^{i\omega_1 t} + B_2e^{-i\omega_1 t} + B_3e^{i\omega_2 t} + B_4e^{-i\omega_2 t} \tag{4.36}$$

พบว่าทุกพจน์จะมีค่า ω เป็นจำนวนจินตภาพทั้งหมด จึงสรุปได้ว่าการเคลื่อนที่ของวัตถุบริเวณใกล้จุดลากรองจ์สามเหลี่ยมนี้ มีเสถียรภาพนั่นเอง

ต่อไปจะทำการหาผลเฉลยของการเคลื่อนที่นี้ออกมา ด้วยวิธีการเชิงวิเคราะห์ เพื่อความสะดวกในการคำนวณ จะทำการหมุนแกนของกรอบอ้างอิง $x-y$ ไปเป็น x^*-y^* โดยหมุนไปเป็นมุม α ดังรูปที่ 4.3 จะได้ความสัมพันธ์

$$x = x^*\cos\alpha - y^*\sin\alpha \qquad (4.37)$$

$$y = x^*\sin\alpha + y^*\cos\alpha \qquad (4.38)$$



รูปที่ 4.3 การหมุนกรอบอ้างอิงไปเป็นมุม α

พิจารณาการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน U รอบจุดสมดุล L_4 โดยไม่คำนึงถึงเทอมอันดับ 3 ขึ้นไป

$$U = U_0 + (U_x)_0 x + (U_y)_0 y + \frac{1}{2}(U_{xx})_0 x^2 + \frac{1}{2}(U_{xy})_0 xy + \frac{1}{2}(U_{yx})_0 yx + \frac{1}{2}(U_{yy})_0 y^2$$

แทนค่าอนุพันธ์ทั้งหมดของ U ที่จุดสมดุล L_4 จะได้

$$U = U_0 + \frac{1}{2}ax^2 + bxy + \frac{1}{2}cy^2 \tag{4.39}$$

เมื่อ $a = \frac{3}{4}n^2$, $b = \frac{3\sqrt{3}}{4}n^2(1-2v)$ และ $c = \frac{9}{4}n^2$

จากสมการ (4.37) และ (4.38)

$$x^2 = x^{*2}\cos^2\alpha - 2x^*y^*\cos\alpha\sin\alpha + y^{*2}\sin^2\alpha \tag{4.40}$$

$$y^2 = x^{*2}\sin^2\alpha + 2x^*y^*\sin\alpha\cos\alpha + y^{*2}\cos^2\alpha \tag{4.41}$$

$$xy = x^{*2}\cos\alpha\sin\alpha + x^*y^*\cos^2\alpha - y^*x^*\sin^2\alpha - y^{*2}\sin\alpha\cos\alpha \tag{4.42}$$

แทนสมการ (4.40), (4.41) และ (4.42) ลงในสมการ (4.39)

$$U = U_0 + \frac{1}{2}ax^{*2}\cos^2\alpha - ax^*y^*\cos\alpha\sin\alpha + \frac{1}{2}ay^{*2}\sin^2\alpha$$

$$+ bx^{*2}\cos\alpha\sin\alpha + bx^*y^*\cos^2\alpha - by^*x^*\sin^2\alpha - by^{*2}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$+ \frac{1}{2}cx^{*2}\sin^2\alpha + cx^*y^*\sin\alpha\cos\alpha + \frac{1}{2}cy^{*2}\cos^2\alpha$$

ใช้ความสัมพันธ์ของตรีโกณมิติ

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \qquad \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

แล้วจัดรูป จะได้เป็น

$$U = U_0 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}(a-c)\cos 2\alpha + b\sin 2\alpha\right]x^{*2}$$

$$+ \left[b\cos 2\alpha + \frac{1}{2}(c-a)\sin 2\alpha\right]x^*y^* + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}(c-a)\cos 2\alpha - b\sin 2\alpha\right]y^{*2}$$

หรือเขียนเป็น

$$U = U_0 + \frac{1}{2}a^* x^{*2} + b^* x^* y^* + \frac{1}{2}c^* y^{*2} \tag{4.43}$$

เมื่อ $$a^* = \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}(a-c)\cos 2\alpha + b\sin 2\alpha \tag{4.44}$$

$$b^* = b\cos 2\alpha + \frac{1}{2}(c-a)\sin 2\alpha \tag{4.45}$$

$$c^* = \frac{1}{2}(a+c) - \frac{1}{2}(a-c)\cos 2\alpha - b\sin 2\alpha \tag{4.46}$$

โดยที่ $a = \frac{3}{4}n^2$, $b = \frac{3\sqrt{3}}{4}n^2(1-2v)$ และ $c = \frac{9}{4}n^2$

จุดประสงค์ในการหมุนแกนอ้างอิงไปเป็นมุม α ก็เพื่อจะหามุม α ที่บังคับให้ค่า $b^* = 0$ นั่นเอง

จาก $$b^* = b\cos 2\alpha + \frac{1}{2}(c-a)\sin 2\alpha$$

ถ้า $b^* = 0$ จะได้ว่า

$$b\cos 2\alpha + \frac{1}{2}(c-a)\sin 2\alpha = 0$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2b}{a-c} \tag{4.47}$$

และจะได้ $$\sin 2\alpha = \frac{2b}{\sqrt{D}} \tag{4.48}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{a-c}{\sqrt{D}} \tag{4.49}$$

เมื่อ $D = (a-c)^2 + 4b^2$

แทนค่า a, b และ c จากสมการ (4.26) ถึง (4.28) ลงในสมการ (4.47)

$$\tan 2\alpha = \frac{2b}{a-c} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}n^2(1-2v)}{\frac{3}{4}n^2 - \frac{9}{4}n^2}$$

$$\tan 2\alpha = -\sqrt{3}(1-2v) \tag{4.50}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left[-\sqrt{3}(1-2v)\right] \tag{4.51}$$

เมื่อ $v = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}$

ในกรอบอ้างอิง $x - y$ ซึ่งมีค่า $U = U_0 + \frac{1}{2}ax^2 + bxy + \frac{1}{2}cy^2$ สามารถที่จะหาสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุทดสอบออกมาได้ตามสมการ (4.29) และ (4.30)

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = ax + by$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = bx + cy$$

ดังนั้น ในกรอบอ้างอิง $x^* - y^*$ ซึ่งมีค่า $U = U_0 + \frac{1}{2}a^* x^{*2} + b^* x^* y^* + \frac{1}{2}c^* y^{*2}$ จึงสามารถหาสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุทดสอบออกมาได้เป็น

$$\ddot{x}^* - 2n\dot{y}^* = a^* x^* + b^* y^*$$

$$\ddot{y}^* + 2n\dot{x}^* = b^* x^* + c^* y^*$$

แต่ภายใต้กรอบอ้างอิง $x^* - y^*$ นี้ ค่า $b^* = 0$ ดังนั้น

$$\ddot{x}^* - 2n\dot{y}^* = a^* x^* \tag{4.52}$$

$$\ddot{y}^* + 2n\dot{x}^* = c^* y^* \tag{4.53}$$

ให้ผลเฉลยของ 2 สมการนี้คือ

$$x^* = A\cos(\omega t + \gamma) \tag{4.54}$$

$$y^* = B\sin(\omega t + \gamma) \tag{4.55}$$

หาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง และ อนุพันธ์อันดับที่สอง จะได้

$$\dot{x}^* = -\omega A\sin(\omega t + \gamma) \tag{4.56}$$

$$\dot{y}^* = \omega B\cos(\omega t + \gamma) \tag{4.57}$$

$$\ddot{x}^* = -\omega^2 A\cos(\omega t + \gamma) \tag{4.58}$$

$$\ddot{y}^* = -\omega^2 B\sin(\omega t + \gamma) \tag{4.59}$$

แทนสมการ (4.54) ถึง (4.59) เข้าไปในสมการ (4.52) และ (4.53) จะได้

$$-\omega^2 A - 2n\omega B - a^* A = 0$$

$$-\omega^2 B - 2n\omega A - c^* B = 0$$

จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$A(\omega^2 + a^*) + B(2n\omega) = 0 \tag{4.60}$$

$$B(\omega^2 + c^*) + A(2n\omega) = 0 \tag{4.61}$$

เขียนในรูปของเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \omega^2 + a^* & 2n\omega \\ 2n\omega & \omega^2 + c^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$$

จะได้ว่า

$$\begin{vmatrix} \omega^2 + a^* & 2n\omega \\ 2n\omega & \omega^2 + c^* \end{vmatrix} = 0$$

$$(\omega^2 + a^*)(\omega^2 + c^*) - 4n^2\omega^2 = 0$$

$$\omega^4 + a^*\omega^2 + c^*\omega^2 + a^*c^* - 4n^2\omega^2 = 0$$

$$\omega^4 + (a^* + c^* - 4n^2)\omega^2 + a^*c^* = 0 \qquad (4.62)$$

จะหาค่าของ a^* และ c^* โดยพิจารณาสมการ (4.44)

$$a^* = \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}(a-c)\cos 2\alpha + b\sin 2\alpha$$

แทนค่า $\sin 2\alpha = \dfrac{2b}{\sqrt{D}}$, $\cos 2\alpha = \dfrac{a-c}{\sqrt{D}}$ และ $D = (a-c)^2 + 4b^2$

$$a^* = \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}\frac{(a-c)^2}{\sqrt{D}} + \frac{2b^2}{\sqrt{D}}$$

$$= \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}\frac{(a-c)^2 + 4b^2}{\sqrt{D}}$$

$$= \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}\frac{(a-c)^2 + 4b^2}{\sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}$$

$$= \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}$$

แทนค่า a, b และ c จากสมการ (4.26) ถึง (4.28)

$$a^* = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}n^2 + \frac{9}{4}n^2 + \sqrt{9(1-3v(1-v))n^4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3n^2 + 3n^2\sqrt{1-3v(1-v)}\right)$$

$$a^* = \frac{3}{2}n^2\left(1 + \sqrt{1-3v(1-v)}\right) \qquad (4.63)$$

ในทำนองเดียวกัน จากสมการ (4.46)

$$c^* = \frac{1}{2}(a+c) - \frac{1}{2}(a-c)\cos 2\alpha - b\sin 2\alpha$$

แทนค่า $\sin 2\alpha = \frac{2b}{\sqrt{D}}$, $\cos 2\alpha = \frac{a-c}{\sqrt{D}}$ และ $D = (a-c)^2 + 4b^2$

$$c^* = \frac{1}{2}(a+c) - \frac{1}{2}\frac{(a-c)^2}{\sqrt{D}} - \frac{2b^2}{\sqrt{D}}$$

$$= \frac{1}{2}(a+c) - \frac{1}{2}\frac{(a-c)^2 + 4b^2}{\sqrt{D}}$$

$$= \frac{1}{2}(a+c) - \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}$$

แทนค่า a, b และ c จากสมการ (4.26) ถึง (4.28) จะได้

$$c^* = \frac{3}{2}n^2\left(1 - \sqrt{1-3v(1-v)}\right) \tag{4.64}$$

แทนค่าสมการ (4.63) และ (4.64) ลงในสมการ (4.62)

$$\omega^4 + (3n^2 - 4n^2)\omega^2 + \frac{9}{4}n^4\left(1 - \left(1 - 3v\left(1-v\right)\right)\right) = 0$$

$$\omega^4 - n^2\omega^2 + \frac{27}{4}n^4 v\left(1-v\right) = 0 \tag{4.65}$$

และสามารถหาผลเฉลยของ ω ออกมาได้เป็น

$$\omega_1 = n\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1-27v(1-v)}\right)} \tag{4.66}$$

$$\omega_2 = n\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-27v(1-v)}\right)} \tag{4.67}$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการ (4.54) และ (4.55) จึงออกมาเป็น

$$x^* = A_1 \cos(\omega_1 t + \gamma_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \gamma_2) \tag{4.68}$$

$$y^* = B_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1) + B_2 \sin(\omega_2 t + \gamma_2) \tag{4.69}$$

หาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของสมการ (4.68) และ (4.69) จะได้

$$\dot{x}^* = -A_1\omega_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1) - A_2\omega_2 \sin(\omega_2 t + \gamma_2) \tag{4.70}$$

$$\dot{y}^* = B_1\omega_1 \cos(\omega_1 t + \gamma_1) + B_2\omega_2 \cos(\omega_2 t + \gamma_2) \tag{4.71}$$

ต่อไปจะหาความสัมพันธ์ระหว่าง ค่าคงที่ A_i และ B_i

จากสมการ (4.60)

$$A(\omega^2 + a^*) + B(2n\omega) = 0$$

$$\frac{B}{A} = -\frac{\omega^2 + a^*}{2n\omega}$$

แต่เนื่องจากมี ω อยู่ 2 ค่า จึงต้องแยกหาเป็น

$$\frac{B_i}{A_i} = -\frac{\omega_i^{\,2} + a^*}{2n\omega_i} \tag{4.72}$$

เมื่อ $i = 1,2$

ถ้ากำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นเป็นดังนี้

$$x^*(t=0) = x_0 \tag{4.73}$$

$$y^*(t=0) = y_0 \tag{4.74}$$

$$\dot{x}^*(t=0) = v_{x0} \tag{4.75}$$

$$\dot{y}^*(t=0) = v_{y0} \tag{4.76}$$

แทนเงื่อนไขเริ่มต้นจากสมการ (4.73) ถึง (4.76) ลงในสมการ (4.68) ถึง (4.71)

$$x^*(t=0) = A_1 \cos\gamma_1 + A_2 \cos\gamma_2 = x_0 \tag{4.77}$$

$$y^*(t=0) = B_1 \sin\gamma_1 + B_2 \sin\gamma_2 = y_0 \tag{4.78}$$

$$\dot{x}^*(t=0) = -A_1\omega_1 \sin\gamma_1 - A_2\omega_2 \sin\gamma_2 = v_{x0} \tag{4.79}$$

$$\dot{y}^*(t=0) = B_1\omega_1 \cos\gamma_1 + B_2\omega_2 \cos\gamma_2 = v_{y0} \tag{4.80}$$

จัดรูปสมการ (4.77) ได้เป็น

$$A_2 \cos\gamma_2 = x_0 - A_1 \cos\gamma_1 \tag{4.81}$$

จากสมการ (4.72)

$$\frac{B_i}{A_i} = -\frac{\omega_i^{\ 2} + a^*}{2n\omega_i}$$

$$B_i = -\frac{\omega_i^{\ 2} + a^*}{2n\omega_i} A_i \tag{4.82}$$

แทนสมการ (4.82) ลงในสมการ (4.80) แล้วจัดรูปได้

$$\frac{\left(\omega_1^{\ 2} + a^*\right)A_1 \cos\gamma_1 + \left(\omega_2^{\ 2} + a^*\right)A_2 \cos\gamma_2}{2n} = -v_{y0} \tag{4.83}$$

แทนสมการ (4.81) ลงในสมการ (4.83) แล้วจัดรูปจะได้

$$A_1 \cos\gamma_1 = -\frac{\omega_2^{\ 2} + a^*}{\omega_1^{\ 2} - \omega_2^{\ 2}} x_0 - \frac{2n}{\omega_1^{\ 2} - \omega_2^{\ 2}} y_{y0} \tag{4.84}$$

แทนสมการ (4.84) ในสมการ (4.77)

$$A_2 \cos\gamma_2 = x_0 + \frac{\omega_2^{\ 2} + a^*}{\omega_1^{\ 2} - \omega_2^{\ 2}} x_0 + \frac{2n}{\omega_1^{\ 2} - \omega_2^{\ 2}} y_{y0}$$

$$A_2 \cos\gamma_2 = \frac{\omega_1^{\ 2} - a^*}{\omega_1^{\ 2} - \omega_2^{\ 2}} x_0 + \frac{2n}{\omega_1^{\ 2} - \omega_2^{\ 2}} y_{y0} \tag{4.85}$$

จัดรูปสมการ (4.79) ได้เป็น

$$A_2 \sin\gamma_2 = \frac{-A_1\omega_1 \sin\gamma_1 - v_{x0}}{\omega_2} \tag{4.86}$$

แทนสมการ (4.82) ลงในสมการ (4.78)

$$-\frac{\omega_1^{\ 2}+a^*}{2n\omega_1} A_1 \sin\gamma_1 - \frac{\omega_2^{\ 2}+a^*}{2n\omega_2} A_2 \sin\gamma_2 = y_0 \tag{4.87}$$

แทนสมการ (4.86) ลงในสมการ (4.87) แล้วจัดรูปจะได้

$$A_1 \sin\gamma_1 = \frac{2n\omega_1\omega_2^{\ 2}}{a^*(\omega_1^{\ 2}-\omega_2^{\ 2})} y_0 - \frac{\omega_1(\omega_2^{\ 2}+a^*)}{a^*(\omega_1^{\ 2}-\omega_2^{\ 2})} v_{x0} \tag{4.88}$$

แทนสมการ (4.88) ในสมการ (4.79)

$$-\frac{2n\omega_1^{\ 2}\omega_2^{\ 2}}{a^*(\omega_1^{\ 2}-\omega_2^{\ 2})} y_0 + \frac{\omega_1^{\ 2}(\omega_2^{\ 2}+a^*)}{a^*(\omega_1^{\ 2}-\omega_2^{\ 2})} v_{x0} - A_2\omega_2 \sin\gamma_2 = v_{x0}$$

$$A_2 \sin\gamma_2 = -\frac{2n\omega_1^{\ 2}\omega_2}{a^*(\omega_1^{\ 2}-\omega_2^{\ 2})} y_0 + \frac{\omega_2(\omega_1^{\ 2}+a^*)}{a^*(\omega_1^{\ 2}-\omega_2^{\ 2})} v_{x0} \tag{4.89}$$

สรุปได้ว่าถ้าเงื่อนไขเริ่มต้นเป็นไปตามสมการ (4.73) ถึง (4.76)

$$x^*(t=0) = x_0 \qquad y^*(t=0) = y_0$$

$$\dot{x}^*(t=0) = v_{x0} \qquad \dot{y}^*(t=0) = v_{y0}$$

จะสามารถหาความสัมพันธ์ออกมาได้เป็นตามสมการ (4.84), (4.85), (4.88) และ (4.89)

$$A_1 \cos\gamma_1 = -\frac{\omega_2^{\ 2}+a^*}{\omega_1^{\ 2}-\omega_2^{\ 2}} x_0 - \frac{2n}{\omega_1^{\ 2}-\omega_2^{\ 2}} y_{y0}$$

$$A_2 \cos\gamma_2 = \frac{\omega_1^{\ 2}-a^*}{\omega_1^{\ 2}-\omega_2^{\ 2}} x_0 + \frac{2n}{\omega_1^{\ 2}-\omega_2^{\ 2}} y_{y0}$$

$$A_1 \sin\gamma_1 = \frac{2n\omega_1\omega_2^{\ 2}}{a^*(\omega_1^{\ 2} - \omega_2^{\ 2})} y_0 - \frac{\omega_1(\omega_2^{\ 2} + a^*)}{a^*(\omega_1^{\ 2} - \omega_2^{\ 2})} v_{x0}$$

$$A_2 \sin\gamma_2 = -\frac{2n\omega_1^{\ 2}\omega_2}{a^*(\omega_1^{\ 2} - \omega_2^{\ 2})} y_0 + \frac{\omega_2(\omega_1^{\ 2} + a^*)}{a^*(\omega_1^{\ 2} - \omega_2^{\ 2})} v_{x0}$$

บทที่ 5

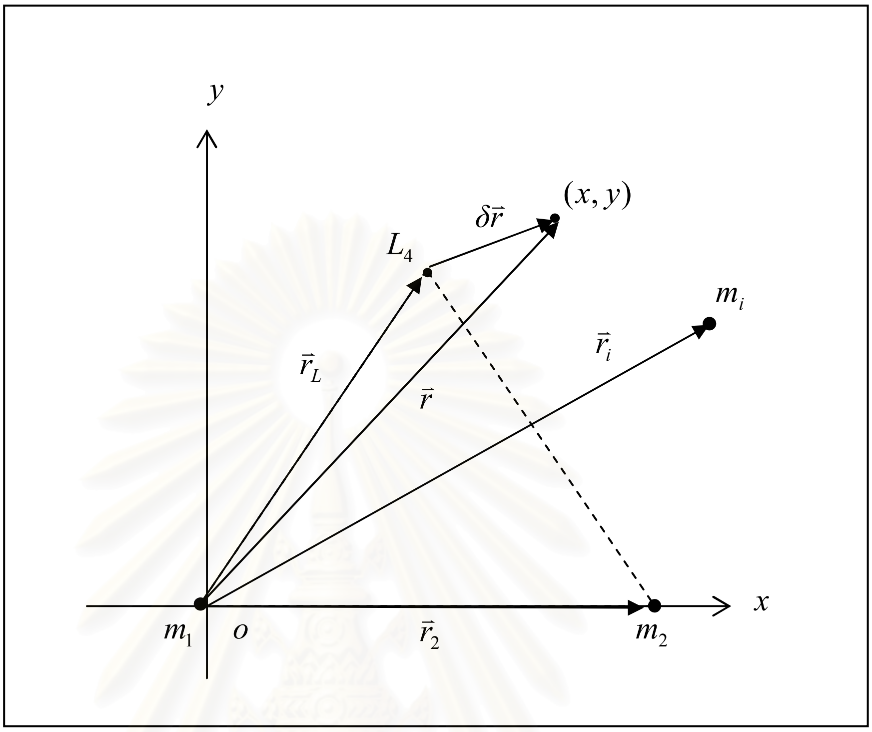
ผลของการรบกวนจากวัตถุอื่น

ในการหาผลของการรบกวนจากดาวดวงอื่นที่มีต่อผลเฉลยของการเคลื่อนที่ของวัตถุทดสอบบริเวณใกล้จุดลากรองจ์ L_4 จะเริ่มจากการตั้งเงื่อนไข ดังนี้

- ให้ดาวทุกดวงมีวงโคจรอยู่บนระนาบเดียวกันใน 2 มิติ
- วัตถุชิ้นที่ 1 อยู่ที่จุดกำเนิดของกรอบอ้างอิง
- วัตถุชิ้นที่ 2 โคจรรอบวัตถุชิ้นที่ 1 เป็นวงกลม
- วัตถุชิ้นที่ 3 เป็นวัตถุทดสอบ
- วัตถุชิ้นที่ 4 (วัตถุอื่นที่ส่งผลการรบกวน) โคจรรอบวัตถุชิ้นที่ 1 เป็นวงกลม

จะพิจารณาระบบนี้ภายใต้กรอบอ้างอิงหมุนซึ่งจะหมุนไปตามการโคจรของวัตถุชิ้นที่ 2 รอบวัตถุชิ้นที่ 1 ในขณะที่จุดลากรองจ์ L_4 ก็จะเคลื่อนที่ไปตามการหมุนของกรอบอ้างอิง ดังนั้นจึงเห็น วัตถุชิ้นที่ 2 และจุดลากรองจ์ L_4 อยู่นิ่งภายใต้กรอบอ้างอิงหมุนนี้ด้วย

โดยในงานวิจัยนี้จะให้วัตถุชิ้นที่ 1 คือดวงอาทิตย์ วัตถุชิ้นที่ 2 คือดาวพฤหัส และวัตถุชิ้นที่ 4 คือดาวเสาร์ กรอบอ้างอิงจึงจะหมุนไปตามการโคจรของดาวพฤหัสรอบดวงอาทิตย์นั่นเอง



รูปที่ 5.1 กรอบอ้างอิงของระบบ

จากรูปที่ 5.1 วัตถุชิ้นที่ 1 แทนด้วย m_1 วัตถุชิ้นที่ 2 แทนด้วย m_2 วัตถุชิ้นที่ 4 แทนด้วย m_i โดยมีเวกเตอร์บอกตำแหน่งต่างๆ ดังนี้

$\vec{r}_1$ คือเวกเตอร์บอกตำแหน่งของวัตถุชิ้นที่ 1 ซึ่งอยู่ที่จุดกำเนิด

$\vec{r}_2$ คือเวกเตอร์บอกตำแหน่งของวัตถุชิ้นที่ 2

$\vec{r}$ คือเวกเตอร์บอกตำแหน่งของวัตถุทดสอบ

$\vec{r}_i$ คือเวกเตอร์บอกตำแหน่งของวัตถุชิ้นที่ 4

$\vec{r}_L$ คือเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุดลากรองจ์ L_4

$\delta\vec{r}$ คือเวกเตอร์บอกตำแหน่งของวัตถุทดสอบโดยเริ่มจากจุดลากรองจ์ L_4

เริ่มจาก **[2]**

ให้ $\vec{F}_L$ คือแรงที่เกิดจากวัตถุชิ้นที่ 1 และ 2 กระทำกับวัตถุทดสอบ

$$\vec{F}_L = Gm_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}\right|^3} + Gm_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}\right|^3} \tag{5.1}$$

ให้ $\vec{F}_E$ คือแรงที่เกิดจากวัตถุชิ้นที่ 4 กระทำกับวัตถุทดสอบ

$$\vec{F}_E = Gm_i \frac{\vec{r}_i - \vec{r}}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}\right|^3} \tag{5.2}$$

ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุทดสอบจะเป็น

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_L(\vec{r},t) + \vec{F}_E(\vec{r},t) \tag{5.3}$$

แต่

$$\vec{r} = \vec{r}_L + \delta\vec{r} \tag{5.4}$$

เมื่อขนาดของเวกเตอร์ของ $\delta\vec{r}$ เล็กกว่าขนาดของเวกเตอร์ $\vec{r}_0$ มากๆ

จึงสามารถกระจายสมการ (5.3) ได้เป็น

$$\frac{d^2(\vec{r}_L + \delta\vec{r})}{dt^2} = \vec{F}_L(\vec{r}_L + \delta\vec{r},t) + \vec{F}_E(\vec{r}_L + \delta\vec{r},t) \tag{5.5}$$

ทำการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุดสมดุล $\vec{r}_L$ โดยไม่คำนึงถึงเทอมอันดับ 2 ขึ้นไป

$$\frac{d^2\vec{r}_L}{dt^2} + \frac{d^2\delta\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_L(\vec{r}_L,t) + \left[\frac{\partial\vec{F}_L(\vec{r},t)}{\partial\vec{r}}\right]_{\vec{r}_L}\delta\vec{r} + \vec{F}_E(\vec{r}_L,t) + \left[\frac{\partial\vec{F}_E(\vec{r},t)}{\partial\vec{r}}\right]_{\vec{r}_L}\delta\vec{r}$$

เนื่องจาก $\frac{d^2\vec{r}_L}{dt^2} = \vec{F}_L(\vec{r}_L,t)$ จะได้

$$\frac{d^2\delta\vec{r}}{dt^2} = \left[\frac{\partial\vec{F}_L(\vec{r},t)}{\partial\vec{r}}\right]_{\vec{r}_L}\delta\vec{r} + \vec{F}_E(\vec{r}_L,t) + \left[\frac{\partial\vec{F}_E(\vec{r},t)}{\partial\vec{r}}\right]_{\vec{r}_L}\delta\vec{r}$$

ในงานวิจัยนี้ซึ่ง วัตถุชิ้นที่ 1 คือดวงอาทิตย์ วัตถุชิ้นที่ 2 คือดาวพฤหัส และวัตถุชิ้นที่ 4 คือดาวเสาร์ จะพบว่าค่าของพจน์ $\left[\dfrac{\partial \vec{F}_E(\vec{r},t)}{\partial \vec{r}}\right]_{\vec{r}_L}$ ซึ่งขึ้นอยู่กับมวลของดาวเสาร์จะมีค่าน้อยกว่าค่าของพจน์ $\left[\dfrac{\partial \vec{F}_L(\vec{r},t)}{\partial \vec{r}}\right]_{\vec{r}_L}$ ซึ่งขึ้นอยู่กับมวลของดวงอาทิตย์และดาวพฤหัสอยู่มาก จึงสามารถประมาณโดยการตัดพจน์ $\left[\dfrac{\partial \vec{F}_E(\vec{r},t)}{\partial \vec{r}}\right]_{\vec{r}_L}$ ทิ้งไปได้

$$\frac{d^2\delta\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_E(\vec{r}_L,t) + \left[\frac{\partial \vec{F}_L(\vec{r},t)}{\partial \vec{r}}\right]_{\vec{r}_L} \delta\vec{r} \tag{5.6}$$

สมการ (5.6) คือ สมการการเคลื่อนที่บริเวณใกล้จุดลากรองจ์ L_4 ของวัตถุทดสอบ

กำหนดให้ผลเฉลยของสมการนี้แยกออกเป็น 2 ส่วน ได้แก่

$$\delta\vec{r} = \delta\vec{r}_L + \delta\vec{r}_E \tag{5.7}$$

โดยให้ $\delta\vec{r}_L$ เกิดจากผลของวัตถุชิ้นที่ 1 และ 2

$\delta\vec{r}_E$ เกิดจากผลของวัตถุชิ้นที่ 4

$$\frac{d^2(\delta\vec{r}_L + \delta\vec{r}_E)}{dt^2} = \vec{F}_E(\vec{r}_L,t) + \left[\frac{\partial \vec{F}_L(\vec{r},t)}{\partial \vec{r}}\right]_{\vec{r}_L} (\delta\vec{r}_L + \delta\vec{r}_E)$$

$$\frac{d^2\delta\vec{r}_L}{dt^2} + \frac{d^2\delta\vec{r}_E}{dt^2} = \vec{F}_E(\vec{r}_L,t) + \left[\frac{\partial \vec{F}_L(\vec{r},t)}{\partial \vec{r}}\right]_{\vec{r}_L} \delta\vec{r}_L + \left[\frac{\partial \vec{F}_L(\vec{r},t)}{\partial \vec{r}}\right]_{\vec{r}_L} \delta\vec{r}_E$$

ซึ่งจะแยกสมการนี้ออกมาเป็น 2 ส่วนได้แก่

$$\frac{d^2\delta\vec{r}_L}{dt^2} = \left[\frac{\partial \vec{F}_L(\vec{r},t)}{\partial \vec{r}}\right]_{\vec{r}_L} \delta\vec{r}_L \tag{5.8}$$

$$\frac{d^2\delta\vec{r}_E}{dt^2} = \vec{F}_E(\vec{r}_L,t) + \left[\frac{\partial\vec{F}_L(\vec{r},t)}{\partial\vec{r}}\right]_{\vec{r}_L} \delta\vec{r}_E \tag{5.9}$$

สมการ (5.8) แสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุทดสอบบริเวณใกล้จุดลากรองจ์ L_4 โดยคิดผลจากวัตถุชิ้นที่ 1 และ 2 ที่มีแรงดึงดูดกระทำต่อจุดลากรองจ์ L_4 ให้เกิดการเปลี่ยนแปลง และการที่จุดลากรองจ์ L_4 เกิดการเปลี่ยนแปลง ก็ส่งผลต่อการเคลื่อนที่ของวัตถุทดสอบบริเวณใกล้จุดลากรองจ์ L_4 ซึ่งจะพบว่าสมการ (5.8) ก็คือสมการการเคลื่อนที่ของปัญหาวัตถุ 3 ชิ้นแบบจำกัด ที่ทำการหามาใน บทที่ 4 นั่นเอง ในขณะที่สมการ (5.9) นั้นมีผลจากแรงดึงดูดของวัตถุชิ้นอื่น ทำการรบกวนเข้ามาในระบบนี้ด้วย

$$\frac{d^2\delta\vec{r}_E}{dt^2} = \vec{F}_E(\vec{r}_L,t) + \left[\frac{\partial\vec{F}_L(\vec{r},t)}{\partial\vec{r}}\right]_{\vec{r}_L} \delta\vec{r}_E$$

กระจาย $\delta\vec{r}$ ให้เป็น

$$\delta\vec{r}_{\mathrm{E}} = \sum_{n=0}^{\infty}\delta\vec{r}^{\,(n)} = \delta\vec{r}^{\,(0)} + \delta\vec{r}^{\,(1)} + \ldots \tag{5.10}$$

แทนค่าลงในสมการ (5.9) จะได้

$$\frac{d^2\delta\vec{r}^{\,(0)}}{dt^2} + \frac{d^2\delta\vec{r}^{\,(1)}}{dt^2} + \ldots = \vec{F}_E(\vec{r}_L,t) + \left[\frac{\partial\vec{F}_L(\vec{r},t)}{\partial\vec{r}}\right]_{\vec{r}_L} \delta\vec{r}^{\,(0)} + \ldots$$

แยกออกมาเป็นสมการย่อยได้

$$\frac{d^2\delta\vec{r}^{\,(0)}}{dt^2} = \vec{F}_E(\vec{r}_L,t) \tag{5.11}$$

$$\frac{d^2\delta\vec{r}^{\,(1)}}{dt^2} = \left[\frac{\partial\vec{F}_L(\vec{r},t)}{\partial\vec{r}}\right]_{\vec{r}_L} \delta\vec{r}^{\,(0)} \tag{5.12}$$

.

.

.

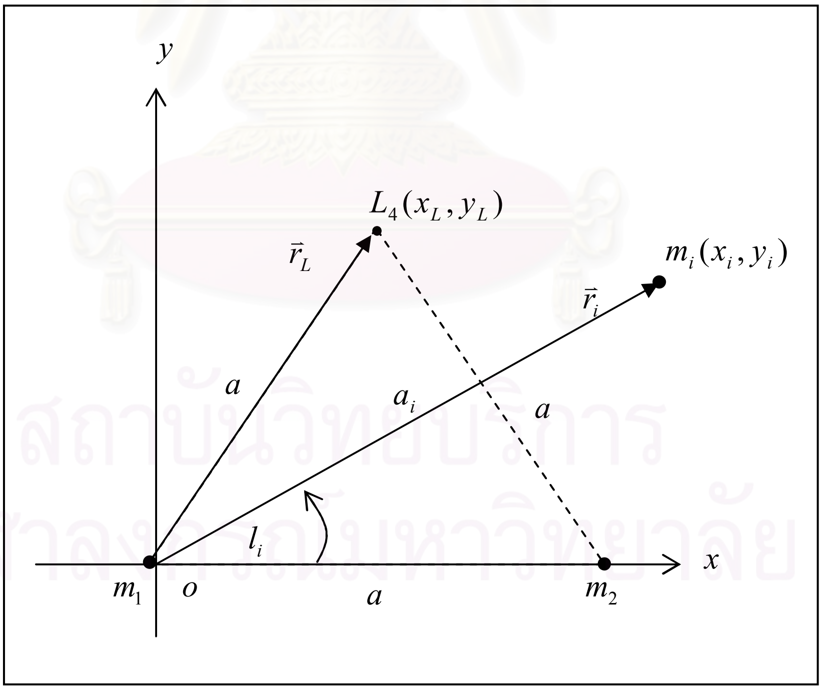
ซึ่งจะสามารถหาผลเฉลยของ $\delta\bar{r}^{(0)}$ ได้จากสมการ (5.11) แล้วไปแทนในสมการ (5.12) เพื่อหาผลเฉลยของ $\delta\bar{r}^{(1)}$ จากนั้นก็นำค่า $\delta\bar{r}^{(1)}$ ไปแทนในสมการต่อไปเรื่อยๆ แต่ในงานวิจัยนี้จะหาเพียงแค่ $\delta\bar{r}^{(0)}$ และ $\delta\bar{r}^{(1)}$ เท่านั้น

จากสมการ (5.11) และสมการ (5.2) จะได้

$$\frac{d^2\delta\bar{r}^{(0)}}{dt^2} = Gm_i \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_L}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_L\right|^3} \tag{5.13}$$

พบว่าจะต้องทำการหาค่าของ $\vec{r}_i - \vec{r}_L$ และ $\dfrac{1}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_L\right|^3}$ ก่อน

พิจารณา
$$\vec{r}_i - \vec{r}_L = \begin{bmatrix} x_i - x_L \\ y_i - y_L \end{bmatrix} \tag{5.14}$$



รูปที่ 5.2 การหาค่า $\vec{r}_i - \vec{r}_L$

จากรูปที่ 5.2 จะได้ว่า

$$x_i = a_i \cos l_i \qquad (5.15)$$

$$y_i = a_i \sin l_i \qquad (5.16)$$

เมื่อ a_i คือระยะห่างระหว่างวัตถุชิ้นที่ 1 กับวัตถุชิ้นที่ 4 ซึ่งในกรณีที่วัตถุชิ้นที่ 4 โคจรรอบวัตถุชิ้นที่ 1 เป็นวงกลม จะกำหนดให้เท่ากับระยะครึ่งแกนเอกของวัตถุชิ้นที่ 4

l_i คือมุมที่เวกเตอร์ $\bar{r}_i$ กระทำกับแกน x ของกรอบอ้างอิง

เนื่องจากกรอบอ้างอิงนี้เป็นกรอบหมุนที่หมุนไปพร้อมการโคจรของวัตถุชิ้นที่ 2 รอบวัตถุชิ้นที่ 1 ดังนั้นมุม l_i จึงเป็นมุมที่เกิดจากการโคจรของวัตถุชิ้นที่ 4 รอบวัตถุชิ้นที่ 1 สัมพัทธ์กับ การโคจรของวัตถุชิ้นที่ 2 รอบวัตถุชิ้นที่ 1 ดังนั้น

$$l_i = (n_i - n)t$$

เมื่อ n คืออัตราเร็วเชิงมุมในการโคจรของวัตถุชิ้นที่ 2 รอบวัตถุชิ้นที่ 1

n_i คืออัตราเร็วเชิงมุมในการโคจรของวัตถุชิ้นที่ 4 รอบวัตถุชิ้นที่ 1

กำหนดให้ $m = (n_i - n)$ จะได้เป็น

$$l_i = mt$$

สมการ (5.15) และ (5.16) จึงเป็น

$$x_i = a_i \cos mt \qquad (5.17)$$

$$y_i = a_i \sin mt \qquad (5.18)$$

ต่อไปพิจารณา $\bar{r}_L$ ซึ่งก็คือเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุดลากรองจ์ L_4 โดยจุดลากรองจ์ L_4 นี้ตั้งอยู่บนจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าซึ่งมีด้านแต่ละด้านยาวเท่ากับระยะห่างระหว่างวัตถุชิ้นที่ 1 กับ วัตถุชิ้นที่ 2 โดยสามเหลี่ยมด้านเท่ามีมุมภายในเท่ากับ 60 องศาทั้ง 3 มุม และจุดลากรองจ์ L_4 จะเคลื่อนที่ไปพร้อมกับการโคจรของวัตถุชิ้นที่ 2 รอบวัตถุชิ้นที่ 1 ซึ่งก็คือหมุนไปพร้อมกับกรอบอ้างอิง หรือหมายความว่าอยู่นิ่งภายใต้กรอบอ้างอิงหมุน ดังนั้น

$$x_L = a\cos 60 \tag{5.19}$$

$$y_L = a\sin 60 \tag{5.20}$$

เมื่อ a คือระยะห่างระหว่างวัตถุชิ้นที่ 1 กับวัตถุชิ้นที่ 2 ซึ่งในกรณีที่วัตถุชิ้นที่ 2 โคจรรอบวัตถุชิ้นที่ 1 เป็นวงกลม จะกำหนดให้เท่ากับระยะครึ่งแกนเอกของวัตถุชิ้นที่ 2

แทนสมการ (5.17) ถึงสมการ (5.20) ลงในสมการ (5.14)

$$\vec{r}_i - \vec{r}_L = \begin{bmatrix} a_i\cos mt - a\cos 60 \\ a_i\sin mt - a\sin 60 \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

ต่อไปจะหา $\dfrac{1}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_L\right|^3}$ โดยแทนค่าจากสมการ (5.21)

$$\left|\vec{r}_i - \vec{r}_L\right|^{-3} = \left[(a_i\cos mt - a\cos 60)^2 + (a_i\sin mt - a\sin 60)^2\right]^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \left[a_i^{\,2}\left(\cos^2 mt + \sin^2 mt\right) + a^2\left(\cos^2 60 + \sin^2 60\right) - 2a_i a\left(\cos mt\cos 60 + \sin mt\sin 60\right)\right]^{-\frac{3}{2}}$$

ด้วยสมบัติทางตรีโกณมิติ จะได้ว่า

$$\left|\vec{r}_i - \vec{r}_L\right|^{-3} = \left[a_i^{\,2} + a^2 - 2a_i a\cos(mt - 60)\right]^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{a_i^{\,3}}\left[1 + \left(\frac{a}{a_i}\right)^2 - 2\cos(mt - 60)\frac{a}{a_i}\right]^{-\frac{3}{2}}$$

ให้ $A = \dfrac{a}{a_i}$ และ $x = \cos(mt - 60)$

จะได้

$$\left|\vec{r}_i - \vec{r}_L\right|^{-3} = \frac{1}{a_i^{\,3}}\left(1 - 2xA + A^2\right)^{-\frac{3}{2}} \tag{5.22}$$

พิจารณาพหุนามเลอจองด์

$$g(x,A) = \left(1-2xA+A^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)A^n$$

เมื่อ $|x|<1$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = A\left(1-2xA+A^2\right)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{'}(x)A^n$$

เมื่อ $$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{'}(x)A^n = \frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)A^n$$

ดังนั้น

$$\left(1-2xA+A^2\right)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{'}(x)A^{n-1} \tag{5.23}$$

นำสมการ (5.23) ไปแทนใน (5.22) จะได้

$$\frac{1}{\left|\bar{r}_i-\bar{r}_L\right|^3} = \frac{1}{a_i^{\,3}}\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{'}(x)\left(\frac{a}{a_i}\right)^{n-1} \tag{5.24}$$

$$= \frac{1}{a_i^{\,3}}\left[P_1^{'}(x) + P_2^{'}(x)\left(\frac{a}{a_i}\right) + P_3^{'}(x)\left(\frac{a}{a_i}\right)^2 + \ldots\right]$$

เมื่อ $$P_0^{'}(x) = 0 \tag{5.25}$$

$$P_1^{'}(x) = 1 \tag{5.26}$$

$$P_2^{'}(x) = 3x \tag{5.27}$$

$$P_3^{'}(x) = \frac{3}{2}\left(5x^2-1\right) \tag{5.28}$$

$$P_4^{'}(x) = \frac{5}{2}\left(7x^3-3x\right) \tag{5.29}$$

จากสมการ (5.13)

$$\frac{d^2\delta\bar{r}^{(0)}}{dt^2} = Gm_i \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_L}{\left|\bar{r}_i - \bar{r}_L\right|^3}$$

แทนสมการ (5.21) และสมการ (5.24) เข้าไปจะได้

$$\frac{d^2\delta\bar{r}^{(0)}}{dt^2} = \frac{Gm_i}{a_i^3}\left[P_1'(x) + P_2'(x)\left(\frac{a}{a_i}\right) + P_3'(x)\left(\frac{a}{a_i}\right)^2 + \ldots\right]\cdot\begin{bmatrix} a_i\cos mt - a\cos 60 \\ a_i \sin mt - a\sin 60\end{bmatrix}$$

$$= \frac{Gm_i}{a_i^2}\left[P_1'(x) + P_2'(x)\left(\frac{a}{a_i}\right) + P_3'(x)\left(\frac{a}{a_i}\right)^2 + \ldots\right]\cdot\begin{bmatrix} \cos mt - \frac{a}{a_i}\cos 60 \\ \sin mt - \frac{a}{a_i}\sin 60\end{bmatrix}$$

โดยที่

$$\delta\bar{r}^{(0)} = \begin{bmatrix}\delta x^{(0)} \\ \delta y^{(0)}\end{bmatrix}$$

และให้ $A = \frac{a}{a_i}$ จะได้เป็น

$$\frac{d^2\delta x^{(0)}}{dt^2} = \frac{Gm_i}{a_i^2}\left[P_1'(x) + P_2'(x)A + P_3'(x)A^2 + P_4'(x)A^3 + \ldots\right]\cdot\left(\cos mt - A\cos 60\right) \tag{5.30}$$

$$\frac{d^2\delta y^{(0)}}{dt^2} = \frac{Gm_i}{a_i^2}\left[P_1'(x) + P_2'(x)A + P_3'(x)A^2 + P_4'(x)A^3 + \ldots\right]\cdot\left(\sin mt - A\sin 60\right) \tag{5.31}$$

ทำการคำนวณโดยแทนค่าจากสมการ (3.25) ถึง (3.29) ลงในสมการ (5.30) แล้วแทนค่า $x = \cos(mt - 60)$ โดยเก็บค่า $A = \frac{a}{a_i}$ ถึงพจน์ A^3 จะได้เป็น

$$\frac{d^2\delta x^{(0)}}{dt^2}=\frac{Gm_i}{a_i^{\ 2}}\Bigg[\cos mt+\left(-\frac{1}{2}+3\cos mt\sin(mt+30)\right)A$$

$$+\frac{3}{2}\left(-\cos mt-\sin(mt+30)+5\cos mt\sin^2(mt+30)\right)A^2$$

$$+\frac{1}{4}\left(3-30\cos mt\sin(mt+30)-15\sin^2(mt+30)+70\cos mt\sin^3(mt+30)\right)A^3\Bigg]$$

$$+O(t)A^4 \tag{5.32}$$

อินทิเกรตสมการ (5.32) เทียบกับ t

$$\frac{d\delta x^{(0)}}{dt}=\frac{Gm_i}{a_i^{\ 2}}\Bigg[\frac{\sin mt}{m}+\frac{1}{4}\left(t-\frac{3\sqrt{3}\cos 2mt}{2m}+\frac{3\sin 2mt}{2m}\right)A$$

$$-\frac{1}{16}\left(\frac{3\sqrt{3}\cos mt}{m}+\frac{5\sqrt{3}\cos 3mt}{m}-\frac{9\sin mt}{m}+\frac{5\sin 3mt}{m}\right)A^2$$

$$+\frac{1}{32}\left(9t-\frac{15\sqrt{3}\cos 2mt}{2m}+\frac{5\sin 2mt}{2m}-\frac{35\sin 4mt}{2m}\right)A^3\Bigg]+c_1 \tag{5.33}$$

อินทิเกรตสมการ (5.33) เทียบกับ t อีกครั้ง

$$\delta x^{(0)}=\frac{Gm_i}{a_i^{\ 2}}\Bigg[-\frac{\cos mt}{m^2}+\frac{1}{8}\left(t^2-\frac{3\cos 2mt}{2m^2}-\frac{3\sqrt{3}\sin 2mt}{2m^2}\right)A$$

$$+\frac{1}{16}\left(-\frac{9\cos mt}{m^2}+\frac{5\cos 3mt}{3m^2}-\frac{3\sqrt{3}\sin mt}{m^2}-\frac{5\sqrt{3}\sin 3mt}{3m^2}\right)A^2$$

$$+\frac{1}{64}\left(9t^2-\frac{5\cos 2mt}{2m^2}+\frac{35\cos 4mt}{4m^2}-\frac{15\sqrt{3}\sin 2mt}{2m^2}\right)A^3\Bigg]+c_1t+c_2 \tag{5.34}$$

ในทำนองเดียวกับแทนค่าจากสมการ (3.25) ถึง (3.29) ลงในสมการ (5.31) แล้วแทนค่า $x=\cos(mt-60)$ โดยเก็บค่า $A=\dfrac{a}{a_i}$ ถึงพจน์ A^3

$$\frac{d^2\delta y^{(0)}}{dt^2} = \frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\left[\sin mt + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\sin mt \sin(mt+30)\right)A\right.$$

$$-\frac{3}{2}\left(\sin mt + \sqrt{3}\sin(mt+30) - 5\sin mt \sin^2(mt+30)\right)A^2$$

$$+\frac{1}{4}\left(3\sqrt{3} - 30\sin mt \sin(mt+30) - 15\sqrt{3}\sin^2(mt+30)\right.$$

$$\left.\left. + 70\sin mt \sin^3(mt+30)\right)A^3\right] + O(t)A^4 \qquad (5.35)$$

อินทิเกรตสมการ (5.35) เทียบกับ t

$$\frac{d\delta y^{(0)}}{dt} = \frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\left[-\frac{\cos mt}{m} + \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}t - \frac{3\cos 2mt}{2m} - \frac{3\sqrt{3}\sin 2mt}{2m}\right)A\right.$$

$$-\frac{1}{16}\left(\frac{15\cos mt}{m} - \frac{5\cos 3mt}{m} - \frac{3\sqrt{3}\sin mt}{m} + \frac{5\sqrt{3}\sin 3mt}{m}\right)A^2$$

$$\left.+\frac{1}{32}\left(9\sqrt{3}t - \frac{25\cos 2mt}{2m} + \frac{35\cos 4mt}{2m} - \frac{15\sqrt{3}\sin 2mt}{2m}\right)A^3\right] + d_1 \qquad (5.36)$$

อินทิเกรตสมการ (5.36) เทียบกับ t อีกครั้ง

$$\delta y^{(0)} = \frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\left[-\frac{\sin mt}{m^2} + \frac{1}{8}\left(\sqrt{3}t^2 + \frac{3\sqrt{3}\cos 2mt}{2m^2} - \frac{3\sin 2mt}{2m^2}\right)A\right.$$

$$+\frac{1}{16}\left(-\frac{3\sqrt{3}\cos mt}{m^2} + \frac{5\sqrt{3}\cos 3mt}{3m^2} - \frac{15\sin mt}{m^2} + \frac{5\sin 3mt}{3m^2}\right)A^2$$

$$\left.+\frac{1}{64}\left(9\sqrt{3}t^2 + \frac{15\sqrt{3}\cos 2mt}{2m^2} - \frac{25\sin 2mt}{2m^2} + \frac{35\sin 4mt}{4m^2}\right)A^3\right] + d_1 t + d_2$$

(5.37)

เมื่อหาค่า $\delta\bar{r}^{(0)}$ ได้แล้ว ต่อไปจะทำการหาค่า $\delta\bar{r}^{(1)}$ โดยการนำค่า $\delta\bar{r}^{(0)}$ ที่ได้ไปแทนในสมการ (5.12)

$$\frac{d^2\delta\bar{r}^{(1)}}{dt^2} = \left[\frac{\partial\vec{F}_L(\bar{r},t)}{\partial\bar{r}}\right]_{\bar{r}_L} \delta\bar{r}^{(0)}$$

จะหาค่าของ $\left[\frac{\partial\vec{F}_L(\bar{r},t)}{\partial\bar{r}}\right]_{\bar{r}_L}$ โดยเริ่มจาก

$$\vec{F}_L = Gm_1\frac{\bar{r}_1-\bar{r}}{\left|\bar{r}_1-\bar{r}\right|^3} + Gm_2\frac{\bar{r}_2-\bar{r}}{\left|\bar{r}_2-\bar{r}\right|^3}$$

$$= \hat{i}\left(\frac{Gm_1(x_1-x)}{\left[(x_1-x)^2+(y_1-y)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_2(x_2-x)}{\left[(x_2-x)^2+(y_2-y)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$+\,\hat{j}\left(\frac{Gm_1(y_1-y)}{\left[(x_1-x)^2+(y_1-y)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Gm_2(y_2-y)}{\left[(x_2-x)^2+(y_2-y)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right)$$

ให้ $\vec{F}_L = F_x\hat{i} + F_y\hat{j}$

ดังนั้น
$$\left[\frac{\partial\vec{F}_L(\bar{r},t)}{\partial\bar{r}}\right]_{\bar{r}_L} = \left[\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\left(F_x\hat{i}+F_y\hat{j}\right)\right]_{\bar{r}_L} = \begin{bmatrix}\frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_x}{\partial y}\\ \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial x}\end{bmatrix}_{\bar{r}_L} \tag{5.38}$$

จะสามารถหาค่าต่างๆได้เป็นดังนี้

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}\right)_{\bar{r}_L} = Gm_1\left[-\frac{1}{\left|\bar{r}_1-\bar{r}_L\right|^3} + \frac{3\left(x_1-x_L\right)^2}{\left|\bar{r}_1-\bar{r}_L\right|^5}\right] + Gm_2\left[-\frac{1}{\left|\bar{r}_2-\bar{r}_L\right|^3} + \frac{3\left(x_2-x_L\right)^2}{\left|\bar{r}_2-\bar{r}_L\right|^5}\right] \tag{5.39}$$

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)_{\bar{r}_L} = Gm_1\left[\frac{3\left(x_1-x_L\right)\left(y_1-y_L\right)}{\left|\bar{r}_1-\bar{r}_L\right|^5}\right] + Gm_2\left[\frac{3\left(x_2-x_L\right)\left(y_2-y_L\right)}{\left|\bar{r}_2-\bar{r}_L\right|^5}\right] \tag{5.40}$$

$$\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}\right)_{\vec{r}_L} = Gm_1\left[\frac{3(x_1 - x_L)(y_1 - y_L)}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_L\right|^5}\right] + Gm_2\left[\frac{3(x_2 - x_L)(y_2 - y_L)}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_L\right|^5}\right] \tag{5.41}$$

$$\left(\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)_{\vec{r}_L} = Gm_1\left[-\frac{1}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_L\right|^3} + \frac{3(y_1 - y_L)^2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_L\right|^5}\right] + Gm_2\left[-\frac{1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_L\right|^3} + \frac{3(y_2 - y_L)^2}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_L\right|^5}\right] \tag{5.42}$$

จากรูปที่ 5.2 พบว่าวัตถุชิ้นที่ 1 อยู่ที่จุดกำเนิดของกรอบอ้างอิง ดังนั้น

$$x_1 = 0 \qquad\qquad y_1 = 0$$

ส่วนวัตถุชิ้นที่ 2 ซึ่งอยู่นิ่งภายใต้กรอบอ้างอิงหมุนนี้ ดังนั้น

$$x_2 = a \qquad\qquad y_2 = 0$$

เนื่องจากจุดลากรองจ์ L_4 เป็นจุดที่ตั้งอยู่บนจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ดังนั้นระยะห่างระหว่างวัตถุชิ้นที่ 1 กับจุดลากรองจ์ L_4 และ วัตถุชิ้นที่ 2 กับจุดลากรองจ์ L_4 จึงเท่ากับ a ด้วย

$$\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_L\right| = a \qquad\qquad \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_L\right| = a$$

และจากสมการ (5.19) และ สมการ (5.20) จะได้

$$x_L = a\cos 60 \qquad\qquad y_L = a\sin 60$$

แทนทั้งหมดลงในสมการ (5.39) ถึงสมการ (5.42)

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}\right)_{\vec{r}_L} = Gm_1\left[-\frac{1}{a^3} + \frac{3(x_1 - x_L)^2}{a^5}\right] + Gm_2\left[-\frac{1}{a^3} + \frac{3(x_2 - x_L)^2}{a^5}\right]$$

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)_{\vec{r}_L} = Gm_1\left[\frac{3(x_1 - x_L)(y_1 - y_L)}{a^5}\right] + Gm_2\left[\frac{3(x_2 - x_L)(y_2 - y_L)}{a^5}\right]$$

$$\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}\right)_{\vec{r}_L} = Gm_1\left[\frac{3(x_1 - x_L)(y_1 - y_L)}{a^5}\right] + Gm_2\left[\frac{3(x_2 - x_L)(y_2 - y_L)}{a^5}\right]$$

$$\left(\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)_{\vec{r}_L} = Gm_1\left[-\frac{1}{a^3} + \frac{3(y_1 - y_L)^2}{a^5}\right] + Gm_2\left[-\frac{1}{a^3} + \frac{3(y_2 - y_L)^2}{a^5}\right]$$

หาค่าของ

$$\left(x_1 - x_L\right)^2 = (0 - a\cos 60)^2 = a^2\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\left(y_1 - y_L\right)^2 = (0 - a\sin 60)^2 = a^2\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\left(x_2 - x_L\right)^2 = (a - a\cos 60)^2 = a^2\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = a^2\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\left(y_2 - y_L\right)^2 = (0 - a\sin 60)^2 = a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\left(x_1 - x_L\right)\left(y_1 - y_L\right) = \left(0 - a\cos 60\right)\left(0 - a\sin 60\right) = a^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\left(x_2 - x_L\right)\left(y_2 - y_L\right) = \left(a - a\cos 60\right)\left(0 - a\sin 60\right) = a^2\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

จะได้

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}\right)_{\vec{r}_L} = \frac{Gm_1}{a^3}\left(-1 + \frac{3}{4}\right) + \frac{Gm_2}{a^3}\left(-1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{Gm_1}{a^3}\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{Gm_2}{a^3}\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)_{\vec{r}_L} = \frac{Gm_1}{a^3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{Gm_2}{a^3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}\right)_{\vec{r}_L} = \frac{Gm_1}{a^3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{Gm_2}{a^3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\left(\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)_{\vec{r}_L} = \frac{Gm_1}{a^3}\left(-1 + \frac{9}{4}\right) + \frac{Gm_2}{a^3}\left(-1 + \frac{9}{4}\right) == \frac{Gm_1}{a^3}\left(-\frac{5}{4}\right) + \frac{Gm_2}{a^3}\left(-\frac{5}{4}\right)$$

สรุปได้ว่า

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}\right)_{\bar{r}_L} = -\frac{1}{4}\frac{G}{a^3}(m_1 + m_2) \tag{5.43}$$

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)_{\bar{r}_L} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{G}{a^3}(m_1 + m_2) \tag{5.44}$$

$$\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}\right)_{\bar{r}_L} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{G}{a^3}(m_1 + m_2) \tag{5.45}$$

$$\left(\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)_{\bar{r}_L} = -\frac{5}{4}\frac{G}{a^3}(m_1 + m_2) \tag{5.46}$$

ดังนั้น

$$\frac{d^2\delta\bar{r}^{(1)}}{dt^2} = \left[\frac{\partial \vec{F}_L(\bar{r},t)}{\partial \bar{r}}\right]_{\bar{r}_L} \delta\bar{r}^{(0)} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}\right)_{\bar{r}_L} & \left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)_{\bar{r}_L} \\ \left(\frac{\partial F_y}{\partial x}\right)_{\bar{r}_L} & \left(\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)_{\bar{r}_L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x^{(0)} \\ \delta y^{(0)} \end{bmatrix}$$

แทนค่าจากสมการ (5.43) ถึง (5.46) จะได้เป็น

$$\frac{d^2\delta\bar{r}^{(1)}}{dt^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{a^3} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{4} \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x^{(0)} \\ \delta y^{(0)} \end{bmatrix} \tag{5.47}$$

โดยที่

$$\delta\bar{r}^{(1)} = \begin{bmatrix} \delta x^{(1)} \\ \delta y^{(1)} \end{bmatrix}$$

จะได้เป็น

$$\frac{d^2\delta x^{(1)}}{dt^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{a^3}\left(-\frac{1}{4}\delta x^{(0)} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\delta y^{(0)}\right) \tag{5.48}$$

$$\frac{d^2\delta y^{(1)}}{dt^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{a^3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\delta x^{(0)} - \frac{5}{4}\delta y^{(0)}\right) \tag{5.49}$$

แทนค่า $\delta x^{(0)}$ จากสมการ (5.34) และ $\delta y^{(0)}$ จากสมการ (5.37) ลงในสมการ (5.48) จากนั้นอินทิเกรตสมการเทียบกับ t

$$\frac{d\delta x^{(1)}}{dt}=\frac{G(m_1+m_2)}{a^3}\left\{\frac{Gm_i}{a_i^{\;2}}\left[\left(\frac{3\sqrt{3}\cos mt}{4m^3}+\frac{\sin mt}{4m^3}\right)\right.\right.$$

$$+\frac{1}{32}\left(\frac{8}{3}t^3+\frac{3\sqrt{3}\cos 2mt}{2m^3}+\frac{15\sin 2mt}{2m^3}\right)A$$

$$+\frac{1}{96}\left(\frac{63\sqrt{3}\cos mt}{m^3}-\frac{10\sqrt{3}\cos 3mt}{3m^3}-\frac{27\sin mt}{m^3}+\frac{20\sin 3mt}{m^3}\right)A^2$$

$$\left.+\frac{1}{1024}\left(96t^3+\frac{60\sqrt{3}\cos 2mt}{m^3}-\frac{105\sqrt{3}\cos 4mt}{4m^3}+\frac{140\sin 2mt}{m^3}-\frac{35\sin 4mt}{4m^3}\right)A^3\right]$$

$$\left.-\frac{1}{4}\left(c_1\frac{t^2}{2}+c_2t\right)+\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(d_1\frac{t^2}{2}+d_2t\right)\right\}+c_3 \qquad (5.50)$$

อินทิเกรตสมการ (5.50) เทียบกับ t อีกครั้ง

$$\delta x^{(1)}=\frac{G(m_1+m_2)}{a^3}\left\{\frac{Gm_i}{a_i^{\;2}}\left[\left(-\frac{\cos mt}{4m^4}+\frac{3\sqrt{3}\sin mt}{4m^4}\right)\right.\right.$$

$$+\frac{1}{192}\left(4t^4-\frac{45\cos 2mt}{2m^4}+\frac{9\sqrt{3}\sin 2mt}{2m^4}\right)A$$

$$+\frac{1}{288}\left(\frac{81\cos mt}{m^4}-\frac{20\cos 3mt}{3m^4}+\frac{189\sqrt{3}\sin mt}{m^4}-\frac{10\sqrt{3}\sin 3mt}{3m^4}\right)A^2$$

$$+\frac{1}{4096}\left(96t^4-\frac{280\cos 2mt}{m^4}+\frac{35\cos 4mt}{4m^4}+\frac{120\sqrt{3}\sin 2mt}{m^4}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{105\sqrt{3}\sin 4mt}{4m^4}\right)A^3\right]-\frac{1}{4}\left(c_1\frac{t^3}{6}+c_2\frac{t^2}{2}\right)+\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(d_1\frac{t^3}{6}+d_2\frac{t^2}{2}\right)\Bigg\}+c_3t+c_4$$

(5.51)

ในทำนองเดียวกันแทนค่า $\delta x^{(0)}$ จากสมการ (5.34) และ $\delta y^{(0)}$ จากสมการ (5.37) ลงในสมการ (5.49) จากนั้นอินทิเกรตสมการเทียบกับ t

$$\frac{d\delta y^{(1)}}{dt}=\frac{G(m_1+m_2)}{a^3}\left\{\frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\left[\left(-\frac{5\cos mt}{4m^3}-\frac{3\sqrt{3}\sin mt}{4m^3}\right)\right.\right.$$

$$+\frac{1}{16}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}t^3+\frac{3\cos 2mt}{2m^3}-\frac{3\sqrt{3}\sin 2mt}{m^3}\right)A$$

$$+\frac{1}{96}\left(-\frac{72\cos mt}{m^3}+\frac{35\cos 3mt}{3m^3}-\frac{18\sqrt{3}\sin mt}{m^3}-\frac{5\sqrt{3}\sin 3mt}{3m^3}\right)A^2$$

$$+\frac{1}{1024}\left(-24\sqrt{3}t^3+\frac{10\cos 2mt}{m^3}+\frac{175\cos 4mt}{4m^3}-\frac{90\sqrt{3}\sin 2mt}{m^3}\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{105\sqrt{3}\sin 4mt}{4m^3}\right)A^3\right]+\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(c_1\frac{t^2}{2}+c_2t\right)-\frac{5}{4}\left(d_1\frac{t^2}{2}+d_2t\right)\right\}+d_3 \qquad (5.52)$$

อินทิเกรตสมการ (5.63) เทียบกับ t อีกครั้ง

$$\delta y^{(1)}=\frac{G(m_1+m_2)}{a^3}\left\{\frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\left[\left(\frac{3\sqrt{3}\cos mt}{4m^4}-\frac{5\sin mt}{4m^4}\right)\right.\right.$$

$$+\frac{1}{96}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t^4+\frac{9\sqrt{3}\cos 2mt}{m^4}+\frac{9\sin 2mt}{2m^4}\right)A$$

$$+\frac{1}{288}\left(\frac{54\sqrt{3}\cos mt}{m^4}+\frac{5\sqrt{3}\cos 3mt}{3m^4}-\frac{216\sin mt}{m^4}+\frac{35\sin 3mt}{3m^4}\right)A^2$$

$$+\frac{1}{4096}\left(-24\sqrt{3}t^4+\frac{180\sqrt{3}\cos 2mt}{m^4}-\frac{105\sqrt{3}\cos 4mt}{4m^4}+\frac{20\sin 2mt}{m^4}\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{175\sin 4mt}{4m^4}\right)A^3\right]+\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(c_1\frac{t^3}{6}+c_2\frac{t^2}{2}\right)-\frac{5}{4}\left(d_1\frac{t^3}{6}+d_2\frac{t^2}{2}\right)\right\}+d_3t+d_4$$

(5.53)

จากสมการ (5.34), (5.37), (5.51) และ (5.53) จะเห็นได้ว่า ผลเฉลยของการเคลื่อนที่นี้มีพจน์ที่ขึ้นอยู่กับ t, t^2, t^3 และ t^4 ซึ่งเมื่อเวลาผ่านไปจะทำให้การเคลื่อนที่นี้ลู่ออกอย่างรวดเร็ว แต่เมื่อสังเกตจากดาวเคราะห์น้อย 588 Achilles ที่โคจรอยู่บริเวณใกล้จุดลากรองจ์ L_4 ของระบบดวงอาทิตย์และดาวพฤหัส ซึ่งถูกค้นพบมาตั้งแต่ปี ค.ศ.1906 จนถึงปัจจุบันดาวเคราะห์น้อยดวงนี้ก็ยังคงโคจรอยู่ในระบบดังกล่าว ดังนั้นการที่ผลเฉลยของการเคลื่อนที่ตามสมการสมการ (5.34), (5.37), (5.51) และ (5.53) จึงไม่ควรที่จะมีพจน์ที่ขึ้นกับ t, t^2, t^3 และ t^4 อยู่

ซึ่งพบว่าค่าคงที่จากการอินทิเกรตทั้งหลายจะเป็นพจน์ที่จะทำให้ผลเฉลยที่ได้นั้นขึ้นกับพจน์ t, t^2, t^3 และ t^4 จึงต้องเลือกเงื่อนไขเริ่มต้นที่จะทำให้ค่าคงที่จากการอินทิเกรตหายไป **[2]**

และเมื่อย้อนกลับมาพิจารณาสมการ (5.32) และ (5.35)

$$\frac{d^2\delta x^{(0)}}{dt^2} = \frac{Gm_i}{a_i^2}\Bigg[\cos mt + \left(-\frac{1}{2} + 3\cos mt \sin(mt+30)\right)A$$

$$+\frac{3}{2}\left(-\cos mt - \sin(mt+30) + 5\cos mt \sin^2(mt+30)\right)A^2$$

$$+\frac{1}{4}\left(3 - 30\cos mt\sin(mt+30) - 15\sin^2(mt+30) + 70\cos mt \sin^3(mt+30)\right)A^3\Bigg]$$

$$\frac{d^2\delta y^{(0)}}{dt^2} = \frac{Gm_i}{a_i^2}\Bigg[\sin mt + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\sin mt \sin(mt+30)\right)A$$

$$-\frac{3}{2}\left(\sin mt + \sqrt{3}\sin(mt+30) - 5\sin mt \sin^2(mt+30)\right)A^2$$

$$+\frac{1}{4}\Big(3\sqrt{3} - 30\sin mt\sin(mt+30) - 15\sqrt{3}\sin^2(mt+30)$$

$$+ 70\sin mt \sin^3(mt+30)\Big)A^3\Bigg]$$

พบว่ามีพจน์ที่เมื่ออินทิเกรตสมการนี้เทียบกับ t แล้วจะทำให้เกิดพจน์ที่ขึ้นกับ t ขึ้น นั่นก็คือ พจน์ที่ไม่ได้เป็นฟังก์ชันตรีโกณมิตินั่นเอง และเพื่อทำการกำจัดพจน์เหล่านี้ จึงจะเพิ่มแรงภายนอกกระทำต่อวัตถุทดสอบเพื่อให้ความเร่งของการเคลื่อนที่ของวัตถุทดสอบนี้เปลี่ยนไป

โดยให้ F_{0x} คือแรงภายนอกที่กระทำต่อวัตถุทดสอบในแนวแกน x

F_{0y} คือแรงภายนอกที่กระทำต่อวัตถุทดสอบในแนวแกน y

เมื่อเพิ่มแรงภายนอก F_{0x} เข้ามาแล้ว สมการ (5.32) จึงได้เป็น

$$\begin{aligned}\frac{d^2\delta x^{(0)}}{dt^2} = \frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\Bigg[&\cos mt + \left(-\frac{1}{2} + 3\cos mt\sin(mt+30)\right)A \\ &+\frac{3}{2}\left(-\cos mt - \sin(mt+30) + 5\cos mt\sin^2(mt+30)\right)A^2 \\ &+\frac{1}{4}\left(3 - 30\cos mt\sin(mt+30) - 15\sin^2(mt+30) + 70\cos mt\sin^3(mt+30)\right)A^3\Bigg] \\ &+F_{0x} \qquad (5.54)\end{aligned}$$

เพื่อให้สมการ (5.54) มีเพียงพจน์ที่เป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติเท่านั้น จึงกำหนดให้

$$F_{0x} = -\frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{4}A^3\right) \qquad (5.55)$$

และเขียนสมการ (5.54) ได้เป็น

$$\frac{d^2\delta x^{(0)}}{dt^2} = \frac{Gm_i}{a_i^{\ 2}}\Bigg[\cos mt + \left(3\cos mt\sin\left(mt+30\right)\right)A$$

$$+\frac{3}{2}\left(-\cos mt - \sin\left(mt+30\right) + 5\cos mt\sin^2\left(mt+30\right)\right)A^2$$

$$+\frac{1}{4}\left(-30\cos mt\sin\left(mt+30\right) - 15\sin^2\left(mt+30\right) + 70\cos mt\sin^3\left(mt+30\right)\right)A^3\Bigg]$$

(5.56)

ในทำนองเดียวกัน เมื่อเพิ่มแรงภายนอก F_{0y} เข้ามาแล้ว สมการ (5.35) จึงได้เป็น

$$\frac{d^2\delta y^{(0)}}{dt^2} = \frac{Gm_i}{a_i^{\ 2}}\Bigg[\sin mt + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\sin mt\sin\left(mt+30\right)\right)A$$

$$-\frac{3}{2}\left(\sin mt + \sqrt{3}\sin\left(mt+30\right) - 5\sin mt\sin^2\left(mt+30\right)\right)A^2$$

$$+\frac{1}{4}\Big(3\sqrt{3} - 30\sin mt\sin\left(mt+30\right) - 15\sqrt{3}\sin^2\left(mt+30\right)$$

$$+ 70\sin mt\sin^3\left(mt+30\right)\Big)A^3\Bigg] + F_{0y} \tag{5.57}$$

เพื่อให้สมการ (5.57) มีเพียงพจน์ที่เป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติเท่านั้น จึงกำหนดให้

$$F_{0y} = -\frac{Gm_i}{a_i^{\ 2}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}A + \frac{3\sqrt{3}}{4}A^3\right) \tag{5.58}$$

และเขียนสมการ (5.57) ได้เป็น

$$\frac{d^2\delta y^{(0)}}{dt^2}=\frac{Gm_i}{a_i^{\ 2}}\left[\sin mt+\left(3\sin mt\sin(mt+30)\right)A\right.$$

$$-\frac{3}{2}\left(\sin mt+\sqrt{3}\sin(mt+30)-5\sin mt\sin^2(mt+30)\right)A^2$$

$$\left.+\frac{1}{4}\left(30\sin mt\sin(mt+30)-15\sqrt{3}\sin^2(mt+30)+70\sin mt\sin^3(mt+30)\right)A^3\right]$$

(5.59)

อินทิเกรตสมการ (5.56) เทียบกับ t

$$\frac{d\delta x^{(0)}}{dt}=\frac{Gm_i}{a_i^{\ 2}}\left[\frac{\sin mt}{m}+\frac{1}{4}\left(\frac{3\sqrt{3}\cos 2mt}{2m}+\frac{3\sin 2mt}{2m}\right)A\right.$$

$$-\frac{1}{16}\left(\frac{3\sqrt{3}\cos mt}{m}+\frac{5\sqrt{3}\cos 3mt}{m}-\frac{9\sin mt}{m}+\frac{5\sin 3mt}{m}\right)A^2$$

$$\left.+\frac{1}{32}\left(-\frac{15\sqrt{3}\cos 2mt}{2m}+\frac{5\sin 2mt}{2m}-\frac{35\sin 4mt}{2m}\right)A^3\right]+c_1 \tag{5.60}$$

อินทิเกรตสมการ (5.60) เทียบกับ t อีกครั้ง

$$\delta x^{(0)}=\frac{Gm_i}{a_i^{\ 2}}\left[-\frac{\cos mt}{m^2}+\frac{1}{8}\left(-\frac{3\cos 2mt}{2m^2}-\frac{3\sqrt{3}\sin 2mt}{2m^2}\right)A\right.$$

$$+\frac{1}{16}\left(-\frac{9\cos mt}{m^2}+\frac{5\cos 3mt}{3m^2}-\frac{3\sqrt{3}\sin mt}{m^2}-\frac{5\sqrt{3}\sin 3mt}{3m^2}\right)A^2$$

$$\left.+\frac{1}{64}\left(-\frac{5\cos 2mt}{2m^2}+\frac{35\cos 4mt}{4m^2}-\frac{15\sqrt{3}\sin 2mt}{2m^2}\right)A^3\right]+c_1t+c_2 \tag{5.61}$$

อินทิเกรตสมการ (5.59) เทียบกับ t

$$\frac{d\delta y^{(0)}}{dt}=\frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\left[-\frac{\cos mt}{m}+\frac{1}{4}\left(-\frac{3\cos 2mt}{2m}-\frac{3\sqrt{3}\sin 2mt}{2m}\right)A\right.$$

$$-\frac{1}{16}\left(\frac{15\cos mt}{m}-\frac{5\cos 3mt}{m}-\frac{3\sqrt{3}\sin mt}{m}+\frac{5\sqrt{3}\sin 3mt}{m}\right)A^2$$

$$\left.+\frac{1}{32}\left(-\frac{25\cos 2mt}{2m}+\frac{35\cos 4mt}{2m}-\frac{15\sqrt{3}\sin 2mt}{2m}\right)A^3\right]+d_1 \tag{5.62}$$

อินทิเกรตสมการ (5.62) เทียบกับ t อีกครั้ง

$$\delta y^{(0)}=\frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\left[-\frac{\sin mt}{m^2}+\frac{1}{8}\left(\frac{3\sqrt{3}\cos 2mt}{2m^2}-\frac{3\sin 2mt}{2m^2}\right)A\right.$$

$$+\frac{1}{16}\left(-\frac{3\sqrt{3}\cos mt}{m^2}+\frac{5\sqrt{3}\cos 3mt}{3m^2}-\frac{15\sin mt}{m^2}+\frac{5\sin 3mt}{3m^2}\right)A^2$$

$$\left.+\frac{1}{64}\left(\frac{15\sqrt{3}\cos 2mt}{2m^2}-\frac{25\sin 2mt}{2m^2}+\frac{35\sin 4mt}{4m^2}\right)A^3\right]+d_1t+d_2 \tag{5.63}$$

เพื่อทำให้ค่าคงที่จากการอินทิเกรต c_1, c_2, d_1 และ d_2 หายไป จึงต้องกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นของการเคลื่อนที่นี้ ดังนี้

$$\frac{d\delta x^{(0)}}{dt}(t=0)=v_{x0}^{(0)} \tag{5.64}$$

$$\delta x^{(0)}(t=0)=x_0^{(0)} \tag{5.65}$$

$$\frac{d\delta y^{(0)}}{dt}(t=0)=v_{y0}^{(0)} \tag{5.66}$$

$$\delta y^{(0)}(t=0)=y_0^{(0)} \tag{5.67}$$

จากสมการ (5.60) แทนเงื่อนไขเริ่มต้นด้วยสมการ (5.64) จะได้

$$c_1 = v_{x0}^{(0)} - \frac{Gm_i}{a_i^{\;2}}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{8m}A - \frac{\sqrt{3}}{2m}A^2 - \frac{15\sqrt{3}}{64m}A^3\right)$$

เพื่อให้ค่า $c_1 = 0$ จึงกำหนดให้

$$v_{x0}^{(0)} = \frac{Gm_i}{a_i^{\;2}}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{8m}A - \frac{\sqrt{3}}{2m}A^2 - \frac{15\sqrt{3}}{64m}A^3\right) \tag{5.68}$$

จากสมการ (5.61) แทนเงื่อนไขเริ่มต้นด้วยสมการ (5.65) จะได้

$$c_2 = x_0^{(0)} - \frac{Gm_i}{a_i^{\;2}}\left(-\frac{1}{m^2} - \frac{3}{16m^2}A - \frac{11}{24m^2}A^2 + \frac{25}{256m^2}A^3\right)$$

เพื่อให้ค่า $c_2 = 0$ จึงกำหนดให้

$$x_0^{(0)} = \frac{Gm_i}{a_i^{\;2}}\left(-\frac{1}{m^2} - \frac{3}{16m^2}A - \frac{11}{24m^2}A^2 + \frac{25}{256m^2}A^3\right) \tag{5.69}$$

จากสมการ (5.62) แทนเงื่อนไขเริ่มต้นด้วยสมการ (5.66) จะได้

$$d_1 = v_{y0}^{(0)} - \frac{Gm_i}{a_i^{\;2}}\left(-\frac{1}{m} - \frac{3}{8m}A - \frac{5}{8m}A^2 + \frac{5}{32m}A^3\right)$$

เพื่อให้ค่า $d_1 = 0$ จึงกำหนดให้

$$v_{y0}^{(0)} = \frac{Gm_i}{a_i^{\;2}}\left(-\frac{1}{m} - \frac{3}{8m}A - \frac{5}{8m}A^2 + \frac{5}{32m}A^3\right) \tag{5.70}$$

จากสมการ (5.63) แทนเงื่อนไขเริ่มต้นด้วยสมการ (5.67) จะได้

$$d_2 = y_0^{(0)} - \frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\left(+ \frac{3\sqrt{3}}{16m^2}A - \frac{\sqrt{3}}{12m^2}A^2 + \frac{15\sqrt{3}}{128m^2}A^3 \right)$$

เพื่อให้ค่า $d_2 = 0$ จึงกำหนดให้

$$y_0^{(0)} = \frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\left(+ \frac{3\sqrt{3}}{16m^2}A - \frac{\sqrt{3}}{12m^2}A^2 + \frac{15\sqrt{3}}{128m^2}A^3 \right) \qquad (5.71)$$

ดังนั้นเมื่อให้เงื่อนไขเริ่มต้นเป็นไปตามสมการ (5.68) ถึง (5.71) แล้ว จะทำให้

$$c_1 = 0 \qquad\qquad c_2 = 0$$

$$d_1 = 0 \qquad\qquad d_2 = 0$$

ดังนั้นสมการ (5.61) จะเป็น

$$\begin{aligned}\delta x^{(0)} = \frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\Bigg[&-\frac{\cos mt}{m^2} + \frac{1}{8}\left(-\frac{3\cos 2mt}{2m^2} - \frac{3\sqrt{3}\sin 2mt}{2m^2} \right)A \\ &+ \frac{1}{16}\left(-\frac{9\cos mt}{m^2} + \frac{5\cos 3mt}{3m^2} - \frac{3\sqrt{3}\sin mt}{m^2} - \frac{5\sqrt{3}\sin 3mt}{3m^2} \right)A^2 \\ &+ \frac{1}{64}\left(-\frac{5\cos 2mt}{2m^2} + \frac{35\cos 4mt}{4m^2} - \frac{15\sqrt{3}\sin 2mt}{2m^2} \right)A^3 \Bigg] \end{aligned} \qquad (5.72)$$

เขียนใหม่ได้เป็น

$$\delta x^{(0)} = \frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\left(\alpha_0 + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3 \right) \qquad (5.73)$$

เมื่อ $\quad \alpha_0 = -\dfrac{\cos mt}{m^2}$

$$\alpha_1 = \frac{1}{8}\left(-\frac{3\cos 2mt}{2m^2} - \frac{3\sqrt{3}\sin 2mt}{2m^2}\right)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{16}\left(-\frac{9\cos mt}{m^2} + \frac{5\cos 3mt}{3m^2} - \frac{3\sqrt{3}\sin mt}{m^2} - \frac{5\sqrt{3}\sin 3mt}{3m^2}\right)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{64}\left(-\frac{5\cos 2mt}{2m^2} + \frac{35\cos 4mt}{4m^2} - \frac{15\sqrt{3}\sin 2mt}{2m^2}\right)$$

สมการ (5.63) จะเป็น

$$\delta y^{(0)} = \frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\left[-\frac{\sin mt}{m^2} + \frac{1}{8}\left(\frac{3\sqrt{3}\cos 2mt}{2m^2} - \frac{3\sin 2mt}{2m^2}\right)A + \frac{1}{16}\left(-\frac{3\sqrt{3}\cos mt}{m^2} + \frac{5\sqrt{3}\cos 3mt}{3m^2} - \frac{15\sin mt}{m^2} + \frac{5\sin 3mt}{3m^2}\right)A^2 + \frac{1}{64}\left(\frac{15\sqrt{3}\cos 2mt}{2m^2} - \frac{25\sin 2mt}{2m^2} + \frac{35\sin 4mt}{4m^2}\right)A^3\right] \tag{5.74}$$

เขียนใหม่ได้เป็น

$$\delta y^{(0)} = \frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\left(\beta_0 + \beta_1 A + \beta_2 A^2 + \beta_3 A^3\right) \tag{5.75}$$

เมื่อ $\beta_0 = -\dfrac{\sin mt}{m^2}$

$$\beta_1 = \frac{1}{8}\left(\frac{3\sqrt{3}\cos 2mt}{2m^2} - \frac{3\sin 2mt}{2m^2}\right)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{16}\left(-\frac{3\sqrt{3}\cos mt}{m^2} + \frac{5\sqrt{3}\cos 3mt}{3m^2} - \frac{15\sin mt}{m^2} + \frac{5\sin 3mt}{3m^2}\right)$$

$$\beta_3 = \frac{1}{64}\left(\frac{15\sqrt{3}\cos 2mt}{2m^2} - \frac{25\sin 2mt}{2m^2} + \frac{35\sin 4mt}{4m^2}\right)$$

จากสมการ (5.48) และ (5.49)

$$\frac{d^2\delta x^{(1)}}{dt^2} = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}\left(-\frac{1}{4}\delta x^{(0)} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\delta y^{(0)}\right)$$

$$\frac{d^2\delta y^{(1)}}{dt^2} = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\delta x^{(0)} - \frac{5}{4}\delta y^{(0)}\right)$$

แทนค่า $\delta x^{(0)}$ จากสมการ (5.72) และ $\delta y^{(0)}$ จากสมการ (5.74) ลงในสมการ (5.48) จากนั้นอินทิเกรตสมการเทียบกับ t

$$\frac{d\delta x^{(1)}}{dt} = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}\cdot\frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\left[\left(\frac{3\sqrt{3}\cos mt}{4m^3} + \frac{\sin mt}{4m^3}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{32}\left(\frac{3\sqrt{3}\cos 2mt}{2m^3} + \frac{15\sin 2mt}{2m^3}\right)A$$

$$+\frac{1}{96}\left(\frac{63\sqrt{3}\cos mt}{m^3} - \frac{10\sqrt{3}\cos 3mt}{3m^3} - \frac{27\sin mt}{m^3} + \frac{20\sin 3mt}{m^3}\right)A^2$$

$$\left.+\frac{1}{1024}\left(\frac{60\sqrt{3}\cos 2mt}{m^3} - \frac{105\sqrt{3}\cos 4mt}{4m^3} + \frac{140\sin 2mt}{m^3} - \frac{35\sin 4mt}{4m^3}\right)A^3\right] + c_3$$

(5.76)

อินทิเกรตสมการ (5.76) เทียบกับ t อีกครั้ง

$$\delta x^{(1)} = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}\cdot\frac{Gm_i}{a_i^{\ 2}}\left[\left(-\frac{\cos mt}{4m^4}+\frac{3\sqrt{3}\sin mt}{4m^4}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{192}\left(-\frac{45\cos 2mt}{2m^4}+\frac{9\sqrt{3}\sin 2mt}{2m^4}\right)A$$

$$+\frac{1}{288}\left(\frac{81\cos mt}{m^4}-\frac{20\cos 3mt}{3m^4}+\frac{189\sqrt{3}\sin mt}{m^4}-\frac{10\sqrt{3}\sin 3mt}{3m^4}\right)A^2$$

$$\left.+\frac{1}{4096}\left(-\frac{280\cos 2mt}{m^4}+\frac{35\cos 4mt}{4m^4}+\frac{120\sqrt{3}\sin 2mt}{m^4}-\frac{105\sqrt{3}\sin 4mt}{4m^4}\right)A^3\right]$$

$$+c_3t+c_4 \tag{5.77}$$

ในทำนองเดียวกันแทนค่า $\delta x^{(0)}$ จากสมการ (5.72) และ $\delta y^{(0)}$ จากสมการ (5.74) ลงในสมการ (5.49) จากนั้นอินทิเกรตสมการเทียบกับ t

$$\frac{d\delta y^{(1)}}{dt} = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}\cdot\frac{Gm_i}{a_i^{\ 2}}\left[\left(-\frac{5\cos mt}{4m^3}-\frac{3\sqrt{3}\sin mt}{4m^3}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{16}\left(\frac{3\cos 2mt}{2m^3}-\frac{3\sqrt{3}\sin 2mt}{m^3}\right)A$$

$$+\frac{1}{96}\left(-\frac{72\cos mt}{m^3}+\frac{35\cos 3mt}{3m^3}-\frac{18\sqrt{3}\sin mt}{m^3}-\frac{5\sqrt{3}\sin 3mt}{3m^3}\right)A^2$$

$$\left.+\frac{1}{1024}\left(\frac{10\cos 2mt}{m^3}+\frac{175\cos 4mt}{4m^3}-\frac{90\sqrt{3}\sin 2mt}{m^3}+\frac{105\sqrt{3}\sin 4mt}{4m^3}\right)A^3\right]$$

$$+d_3 \tag{5.78}$$

อินทิเกรตสมการ (5.78) เทียบกับ t อีกครั้ง

$$\delta y^{(1)} = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}\cdot\frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\Bigg[\left(\frac{3\sqrt{3}\cos mt}{4m^4}-\frac{5\sin mt}{4m^4}\right)$$

$$+\frac{1}{96}\left(\frac{9\sqrt{3}\cos 2mt}{m^4}+\frac{9\sin 2mt}{2m^4}\right)A$$

$$+\frac{1}{288}\left(\frac{54\sqrt{3}\cos mt}{m^4}+\frac{5\sqrt{3}\cos 3mt}{3m^4}-\frac{216\sin mt}{m^4}+\frac{35\sin 3mt}{3m^4}\right)A^2$$

$$+\frac{1}{4096}\left(\frac{180\sqrt{3}\cos 2mt}{m^4}-\frac{105\sqrt{3}\cos 4mt}{4m^4}+\frac{20\sin 2mt}{m^4}+\frac{175\sin 4mt}{4m^4}\right)A^3\Bigg]$$

$$+d_3 t + d_4 \tag{5.79}$$

เพื่อทำให้ค่าคงที่จากการอินทิเกรต c_3, c_4, d_3 และ d_4 หายไป จึงต้องกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นของการเคลื่อนที่นี้ ดังนี้

$$\frac{d\delta x^{(1)}}{dt}(t=0) = v_{x1}^{(1)} \tag{5.80}$$

$$\delta x^{(1)}(t=0) = x_1^{(1)} \tag{5.81}$$

$$\frac{d\delta y^{(1)}}{dt}(t=0) = v_{y1}^{(1)} \tag{5.82}$$

$$\delta y^{(1)}(t=0) = y_1^{(1)} \tag{5.83}$$

จากสมการ (5.76) แทนเงื่อนไขเริ่มต้นด้วยสมการ (5.80) จะได้

$$c_3 = v_{x1}^{(1)} - \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}\cdot\frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4m^3}+\frac{3\sqrt{3}}{64m^3}A+\frac{179\sqrt{3}}{288m^3}A^2+\frac{135\sqrt{3}}{4096m^3}A^3\right)$$

เพื่อให้ค่า $c_3 = 0$ จึงกำหนดให้

$$v_{x1}^{(1)} = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}\cdot\frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4m^3}+\frac{3\sqrt{3}}{64m^3}A+\frac{179\sqrt{3}}{288m^3}A^2+\frac{135\sqrt{3}}{4096m^3}A^3\right) \tag{5.84}$$

จากสมการ (5.77) แทนเงื่อนไขเริ่มต้นด้วยสมการ (5.81) จะได้

$$c_4 = x_1^{(1)} - \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}\cdot\frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\left(-\frac{1}{4m^4}-\frac{15}{128m^4}A+\frac{223}{864m^4}A^2-\frac{1085}{16384m^4}A^3\right)$$

เพื่อให้ค่า $c_4 = 0$ จึงกำหนดให้

$$x_1^{(1)} = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}\cdot\frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\left(-\frac{1}{4m^4}-\frac{15}{128m^4}A+\frac{223}{864m^4}A^2-\frac{1085}{16384m^4}A^3\right) \tag{5.85}$$

จากสมการ (5.78) แทนเงื่อนไขเริ่มต้นด้วยสมการ (5.82) จะได้

$$d_3 = v_{y1}^{(1)} - \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}\cdot\frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\left(-\frac{5}{4m^3}+\frac{3}{32m^3}A-\frac{181}{288m^3}A^2+\frac{215}{4096m^3}A^3\right)$$

เพื่อให้ค่า $d_3 = 0$ จึงกำหนดให้

$$v_{y1}^{(1)} = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}\cdot\frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\left(-\frac{5}{4m^3}+\frac{3}{32m^3}A-\frac{181}{288m^3}A^2+\frac{215}{4096m^3}A^3\right) \tag{5.86}$$

จากสมการ (5.79) แทนเงื่อนไขเริ่มต้นด้วยสมการ (5.83) จะได้

$$d_4 = y_1^{(1)} - \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}\cdot\frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4m^4}+\frac{3\sqrt{3}}{32m^4}A-\frac{167\sqrt{3}}{864m^4}A^2+\frac{615\sqrt{3}}{16384m^4}A^3\right)$$

เพื่อให้ค่า $d_4 = 0$ จึงกำหนดให้

$$y_1^{(1)} = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}\cdot\frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4m^4}+\frac{3\sqrt{3}}{32m^4}A-\frac{167\sqrt{3}}{864m^4}A^2+\frac{615\sqrt{3}}{16384m^4}A^3\right) \tag{5.87}$$

ดังนั้นเมื่อให้เงื่อนไขเริ่มต้นเป็นไปตามสมการ (5.84) ถึง (5.87) แล้ว จะทำให้

$$c_3 = 0 \qquad c_4 = 0$$

$$d_3 = 0 \qquad d_4 = 0$$

ดังนั้นสมการ (5.77) จะเป็น

$$\delta x^{(1)} = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}\cdot\frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\Bigg[\left(-\frac{\cos mt}{4m^4}+\frac{3\sqrt{3}\sin mt}{4m^4}\right)$$

$$+\frac{1}{192}\left(-\frac{45\cos 2mt}{2m^4}+\frac{9\sqrt{3}\sin 2mt}{2m^4}\right)A$$

$$+\frac{1}{288}\left(\frac{81\cos mt}{m^4}-\frac{20\cos 3mt}{3m^4}+\frac{189\sqrt{3}\sin mt}{m^4}-\frac{10\sqrt{3}\sin 3mt}{3m^4}\right)A^2$$

$$+\frac{1}{4096}\left(-\frac{280\cos 2mt}{m^4}+\frac{35\cos 4mt}{4m^4}+\frac{120\sqrt{3}\sin 2mt}{m^4}-\frac{105\sqrt{3}\sin 4mt}{4m^4}\right)A^3\Bigg] \tag{5.88}$$

เขียนใหม่ได้เป็น

$$\delta x^{(1)} = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}\cdot\frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\left(\eta_0+\eta_1 A+\eta_2 A^2+\eta_3 A^3\right) \tag{5.89}$$

เมื่อ $\eta_0 = -\dfrac{\cos mt}{4m^4}+\dfrac{3\sqrt{3}\sin mt}{4m^4}$

$$\eta_1 = \frac{1}{192}\left(-\frac{45\cos 2mt}{2m^4}+\frac{9\sqrt{3}\sin 2mt}{2m^4}\right)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{288}\left(\frac{81\cos mt}{m^4}-\frac{20\cos 3mt}{3m^4}+\frac{189\sqrt{3}\sin mt}{m^4}-\frac{10\sqrt{3}\sin 3mt}{3m^4}\right)$$

$$\eta_3 = \frac{1}{4096}\left(-\frac{280\cos 2mt}{m^4}+\frac{35\cos 4mt}{4m^4}+\frac{120\sqrt{3}\sin 2mt}{m^4}-\frac{105\sqrt{3}\sin 4mt}{4m^4}\right)$$

สมการ (5.79) จะเป็น

$$\delta y^{(1)} = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}\cdot\frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\left[\left(\frac{3\sqrt{3}\cos mt}{4m^4}-\frac{5\sin mt}{4m^4}\right)\right.$$
$$+\frac{1}{96}\left(\frac{9\sqrt{3}\cos 2mt}{m^4}+\frac{9\sin 2mt}{2m^4}\right)A$$
$$+\frac{1}{288}\left(\frac{54\sqrt{3}\cos mt}{m^4}+\frac{5\sqrt{3}\cos 3mt}{3m^4}-\frac{216\sin mt}{m^4}+\frac{35\sin 3mt}{3m^4}\right)A^2$$
$$\left.+\frac{1}{4096}\left(\frac{180\sqrt{3}\cos 2mt}{m^4}-\frac{105\sqrt{3}\cos 4mt}{4m^4}+\frac{20\sin 2mt}{m^4}+\frac{175\sin 4mt}{4m^4}\right)A^3\right]$$

(5.90)

เขียนใหม่ได้เป็น

$$\delta y^{(1)} = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}\cdot\frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\left(\xi_0+\xi_1 A+\xi_2 A^2+\xi_3 A^3\right) \tag{5.91}$$

เมื่อ $\xi_0 = \frac{3\sqrt{3}\cos mt}{4m^4}-\frac{5\sin mt}{4m^4}$

$$\xi_1 = \frac{1}{96}\left(\frac{9\sqrt{3}\cos 2mt}{m^4}+\frac{9\sin 2mt}{2m^4}\right)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{288}\left(\frac{54\sqrt{3}\cos mt}{m^4}+\frac{5\sqrt{3}\cos 3mt}{3m^4}-\frac{216\sin mt}{m^4}+\frac{35\sin 3mt}{3m^4}\right)$$

$$\xi_3 = \frac{1}{4096}\left(\frac{180\sqrt{3}\cos 2mt}{m^4}-\frac{105\sqrt{3}\cos 4mt}{4m^4}+\frac{20\sin 2mt}{m^4}+\frac{175\sin 4mt}{4m^4}\right)$$

บทที่ 6

การคำนวณ วิเคราะห์ข้อมูล และสรุปผล

6.1 การเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์สามเหลี่ยมเมื่อไม่คำนึงการรบกวนจากวัตถุอื่น

จะหาผลเฉลยของการเคลื่อนที่ของวัตถุบริเวณใกล้จุดลากรองจ์สามเหลี่ยม L_4 โดยในงานวิจัยนี้จะพิจารณาในระบบของดวงอาทิตย์และดาวพฤหัส ซึ่งได้หาผลเฉลยของการเคลื่อนที่นี้มาแล้วในบทที่ 4 ดังนี้

$$x = x^* \cos\alpha - y^* \sin\alpha \tag{4.37}$$

$$y = x^* \sin\alpha + y^* \cos\alpha \tag{4.38}$$

สมการ (4.37) และ (4.38) คือผลเฉลยของการเคลื่อนที่นี้

เมื่อ

$$x^* = A_1 \cos(\omega_1 t + \gamma_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \gamma_2) \tag{4.68}$$

$$y^* = B_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1) + B_2 \sin(\omega_2 t + \gamma_2) \tag{4.69}$$

และ

$$\tan 2\alpha = -\sqrt{3}(1-2\nu) \tag{4.50}$$

โดยที่

$$\frac{B_i}{A_i} = -\frac{\omega_i^{\,2} + a^*}{2n\omega_i} \tag{4.72}$$

$$a^* = \frac{3}{2} n^2 \left(1 + \sqrt{1 - 3\nu(1-\nu)}\right) \tag{4.63}$$

$$\omega_1 = n\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-27v(1-v)}\right)} \tag{4.66}$$

$$\omega_2 = n\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-27v(1-v)}\right)} \tag{4.67}$$

เมื่อ $$n = \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{a^3}}$$

และ $$v = \frac{m_2}{m_1+m_2}$$

ซึ่งถ้ากำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น

$$x^*(t=0) = x_0 \tag{4.73}$$

$$y^*(t=0) = y_0 \tag{4.74}$$

$$\dot{x}^*(t=0) = v_{x0} \tag{4.75}$$

$$\dot{y}^*(t=0) = v_{y0} \tag{4.76}$$

จะได้ความสัมพันธ์เพื่อใช้หาค่า A_1, A_2, γ_1 และ γ_2 ดังนี้

$$A_1\cos\gamma_1 = -\frac{{\omega_2}^2+a^*}{{\omega_1}^2-{\omega_2}^2}x_0 - \frac{2n}{{\omega_1}^2-{\omega_2}^2}v_{y0} \tag{4.84}$$

$$A_2\cos\gamma_2 = \frac{{\omega_1}^2+a^*}{{\omega_1}^2-{\omega_2}^2}x_0 + \frac{2n}{{\omega_1}^2-{\omega_2}^2}v_{y0} \tag{4.85}$$

$$A_1\sin\gamma_1 = \frac{2n\omega_1{\omega_2}^2}{a^*({\omega_1}^2-{\omega_2}^2)}y_0 - \frac{\omega_1\left({\omega_2}^2+a^*\right)}{a^*({\omega_1}^2-{\omega_2}^2)}v_{x0} \tag{4.88}$$

$$A_2\sin\gamma_2 = -\frac{2n{\omega_1}^2\omega_2}{a^*({\omega_1}^2-{\omega_2}^2)}y_0 + \frac{\omega_2\left({\omega_1}^2+a^*\right)}{a^*({\omega_1}^2-{\omega_2}^2)}v_{x0} \tag{4.89}$$

ในงานวิจัยนี้จะกำหนดให้ วัตถุชิ้นที่ 1 คือ ดวงอาทิตย์ และ วัตถุชิ้นที่ 2 คือ ดาวพฤหัส จึงแทนค่าต่างๆ ดังนี้

$m_1 = 1.998 \times 10^{30}$ กิโลกรัม

$m_2 = 1.899 \times 10^{27}$ กิโลกรัม $\quad = 9.5 \times 10^{-4} m_1$

$a = 5.21$ เอยู

ใช้หน่วยของระยะทางเป็น เอยู และ หน่วยของเวลาเป็น ปี ซึ่งจากสมการ (2.5) จะได้ว่า

$G(m_1 + m_2) = 4\pi^2$ นิวตัน เมตร^3 / กิโลกรัม

นำค่าต่างๆไปแทนจะได้

$$n = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{a^3}} = 0.5284 \text{ เรเดียน / ปี} \tag{6.1}$$

$$v = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 9.49 \times 10^{-4} \tag{6.2}$$

$$\omega_1 = n\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 27v(1 - v)}\right)} = 0.5267 \text{ เรเดียน / ปี} \tag{6.3}$$

$$\omega_2 = n\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - 27v(1 - v)}\right)} = 0.0424 \text{ เรเดียน / ปี} \tag{6.4}$$

$$a^* = \frac{3}{2}n^2\left(1 + \sqrt{1 - 3v(1 - v)}\right) = 0.837 \text{ เรเดียน}^2 \text{ / ปี}^2 \tag{6.5}$$

$$\frac{B_i}{A_i} = -\frac{{\omega_i}^2 + a^*}{2n\omega_i}$$

$$B_1 = -2.00212 A_1 \tag{6.6}$$

$$B_2 = -18.72 A_2 \tag{6.7}$$

$$\tan 2\alpha = -\sqrt{3}(1-2v) = -1.7287$$

$$\alpha = -0.5232 \text{ เรเดียน} \tag{6.8}$$

สมมติให้เงื่อนไขเริ่มต้นคือ

$x^*(t=0) = 10^{-3}$ เอยู $\qquad \dot{x}^*(t=0) = 0$ เอยู / ปี

$y^*(t=0) = 10^{-3}$ เอยู $\qquad \dot{y}^*(t=0) = 0$ เอยู / ปี

จะได้

$$A_1 \cos\gamma_1 = -\frac{\omega_2^{\ 2} + a^*}{\omega_1^{\ 2} - \omega_2^{\ 2}} x_0 = -3.0435 \times 10^{-3} \text{ เอยู} \tag{6.9}$$

$$A_2 \cos\gamma_2 = \frac{\omega_1^{\ 2} + a^*}{\omega_1^{\ 2} - \omega_2^{\ 2}} x_0 = 4.0436 \times 10^{-3} \text{ เอยู} \tag{6.10}$$

$$A_1 \sin\gamma_1 = \frac{2n\omega_1\omega_2^{\ 2}}{a^*(\omega_1^{\ 2} - \omega_2^{\ 2})} y_0 = 4.3379 \times 10^{-6} \text{ เอยู} \tag{6.11}$$

$$A_2 \sin\gamma_2 = -\frac{2n\omega_1^{\ 2}\omega_2}{a^*(\omega_1^{\ 2} - \omega_2^{\ 2})} y_0 = -53.8866 \times 10^{-6} \text{ เอยู} \tag{6.12}$$

นำสมการ (6.11) หารด้วยสมการ (6.9)

$$\tan\gamma_1 = -0.0014$$

$$\gamma_1 = -0.0014 \text{ เรเดียน} \tag{6.13}$$

นำ $\gamma_1 = -0.0014$ ไปแทนในสมการ (6.11)

$$A_1 = -3.0309\times10^{-3} \text{ เอยู} \tag{6.14}$$

จากสมการ (6.6)

$$B_1 = 6.0682\times10^{-3} \text{ เอยู} \tag{6.15}$$

นำสมการ (6.12) หารด้วยสมการ (6.10)

$$\tan\gamma_2 = -0.0133$$

$$\gamma_2 = -0.0133 \text{ เรเดียน} \tag{6.16}$$

นำ $\gamma_2 = -0.0133$ ไปแทนในสมการ (6.12)

$$A_2 = 4.0517\times10^{-3} \text{ เอยู} \tag{6.17}$$

จากสมการ (6.7)

$$B_2 = -75.8478\times10^{-3} \text{ เอยู} \tag{6.18}$$

แทนค่าทั้งหมดลงในสมการ (4.83) และ (4.84)

$$x^* = 10^{-3}\left[-3.0309\cos(0.5267t - 0.0014) + 4.0517\cos(0.0424t - 0.0133)\right] \tag{6.19}$$

$$y^* = 10^{-3}\left[6.0682\sin(0.5267t - 0.0014) - 75.8478\sin(0.0424t - 0.0133)\right] \tag{6.20}$$

แทนสมการ (6.19) และ (6.20) ลงในสมการ (4.37) และ (4.38) เพื่อหาผลเฉลยของการเคลื่อนที่

$$x = x^*\cos(-0.5232) - y^*\sin(-0.5232) \tag{6.21}$$

$$y = x * \sin(-0.5232) + y * \cos(-0.5232) \tag{6.22}$$

หาการเคลื่อนที่ของวัตถุบริเวณใกล้จุดลากรองจ์ L_4 ในระบบของดวงอาทิตย์และดาวพฤหัส โดยมีจุดกำเนิดของแกนอ้างอิงอยู่ที่จุดลากรองจ์ L_4 ได้ดังตารางที่ 6.1

ตารางที่ 6.1 การเคลื่อนที่ของวัตถุบริเวณจุดลากรองจ์ L_4 เมื่อไม่คำนึงการรบกวนจากดาวเสาร์

เวลา (ปี)	ระยะแกน x (เอยู)	ระยะแกน y (เอยู)
10	- 0.0158721	- 0.0317641
20	- 0.0272697	- 0.0554295
30	- 0.0326523	- 0.0651380
40	- 0.0340510	- 0.0617797
50	- 0.0324992	- 0.0500083
60	- 0.0266370	- 0.0335740
70	- 0.0144996	- 0.0130824
80	0.0032916	0.0119303
90	0.0221922	0.0390405
100	0.0358591	0.0614667
200	- 0.0362900	- 0.0576737
300	- 0.0009687	- 0.0060771
400	0.0366823	0.0602830
500	- 0.0335545	- 0.0473614
1000	0.0338956	0.0617750

จากตารางจะเห็นได้ว่าการเคลื่อนที่นี้เป็นการเคลื่อนที่แบบสั่นไปมาทั้งในแกน x และ ในแกน y โดยในแต่ละแกนก็จะมีขนาดของการเคลื่อนที่ที่ใกล้เคียงกัน ซึ่งแสดงให้เห็นว่าการเคลื่อนที่ของวัตถุบริเวณใกล้จุดลากรองจ์ L_4 นี้มีเสถียรภาพ แม้เวลาจะผ่านไปถึง 1,000 ปี วัตถุก็ยังคงเคลื่อนที่วนเวียนอยู่ในลักษณะเดิมรอบๆจุดลากรองจ์ L_4

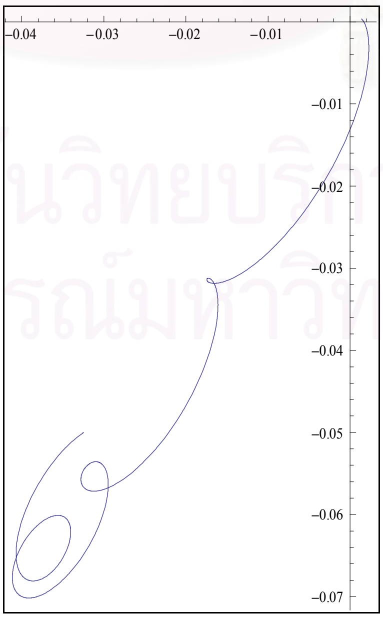
พิจารณาค่า ω ของการเคลื่อนที่นี้จากสมการ (6.3) และ (6.4) จะได้

$\omega_1 = 0.5267$ และ $\omega_2 = 0.0424$ โดยที่ $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ เมื่อ T คือคาบของการเคลื่อนที่ ดังนั้น

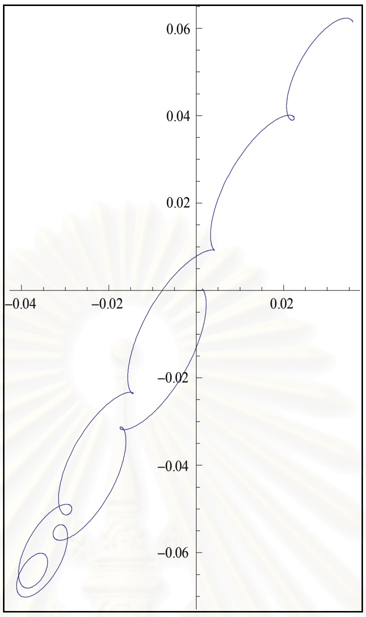
$T_1 = 11.929$ ปี และ $T_2 = 148.188$ ปี ซึ่ง T_1 ก็คือ คาบองค์ประกอบเชิงสั้น และ T_2 ก็คือ

คาบองค์ประกอบเชิงยาวนั่นเอง

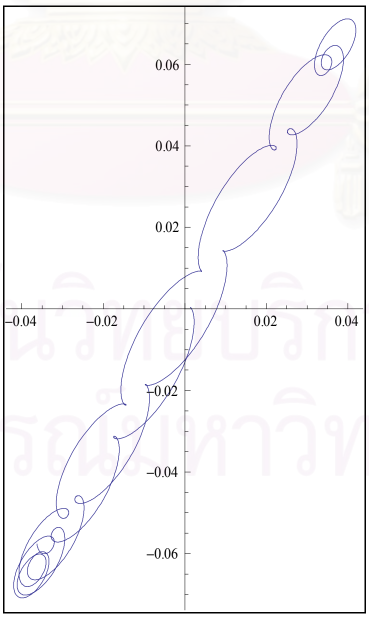
ต่อไปจะใช้โปรแกรม MATHEMATICA 6.0 ในการสร้างกราฟของการเคลื่อนที่ $\delta\bar{r}_L = x\hat{i} + y\hat{j}$ เมื่อค่า x และ y คือสมการ (6.21) และ (6.22) ซึ่งกราฟที่แสดงจะมีจุดกำเนิดอยู่ที่จุดลากรองจ์ L_4



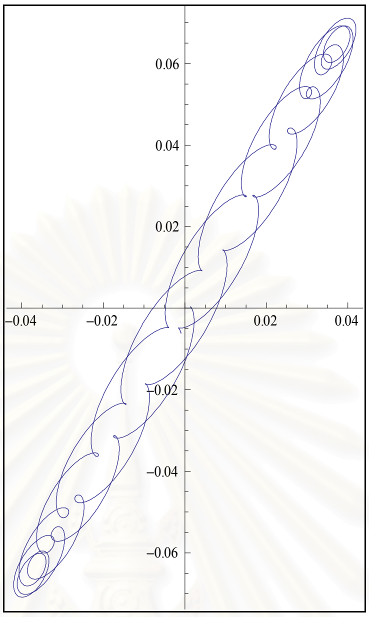
รูปที่ 6.1 กราฟแสดงการเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์ L_4 ตั้งแต่เวลา $t = 0$ ถึง $t = 50$ ปี



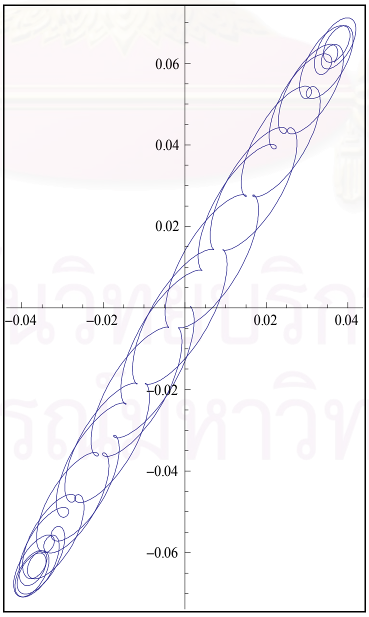
รูปที่ 6.2 กราฟแสดงการเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์ L_4 ตั้งแต่เวลา $t = 0$ ถึง $t = 100$ ปี



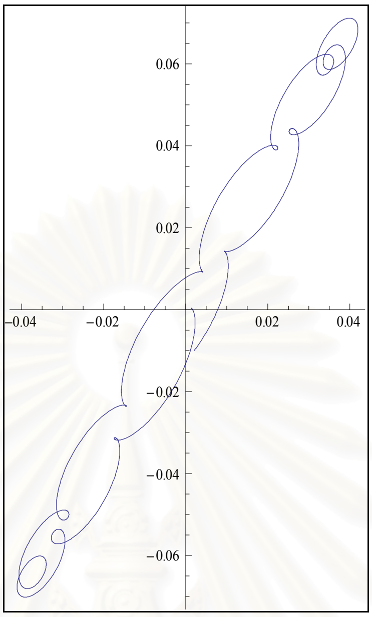
รูปที่ 6.3 กราฟแสดงการเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์ L_4 ตั้งแต่เวลา $t = 0$ ถึง $t = 200$ ปี



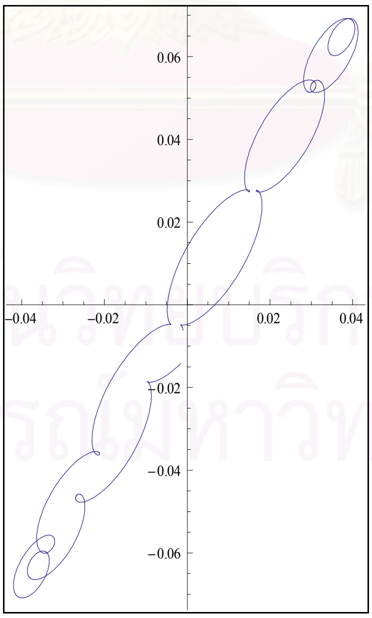
รูปที่ 6.4 กราฟแสดงการเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์ L_4 ตั้งแต่เวลา $t=0$ ถึง $t=300$ ปี



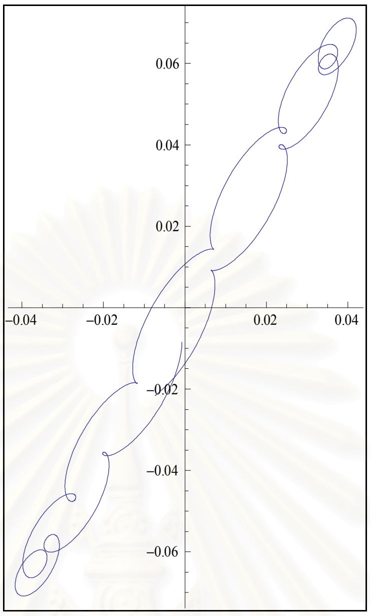
รูปที่ 6.5 กราฟแสดงการเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์ L_4 ตั้งแต่เวลา $t=0$ ถึง $t=400$ ปี



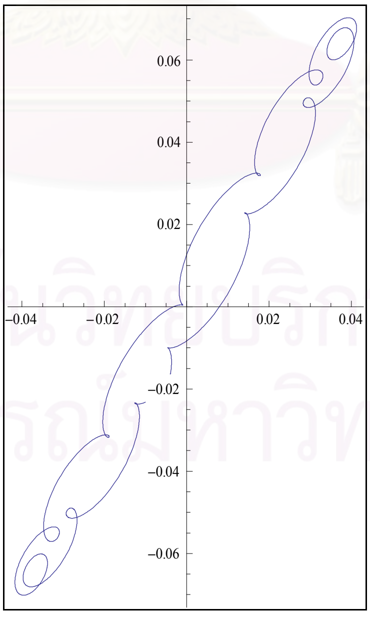
รูปที่ 6.6 กราฟแสดงการเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์ L_4 ตั้งแต่เวลา $t = 0$ ถึง $t = 150$ ปี



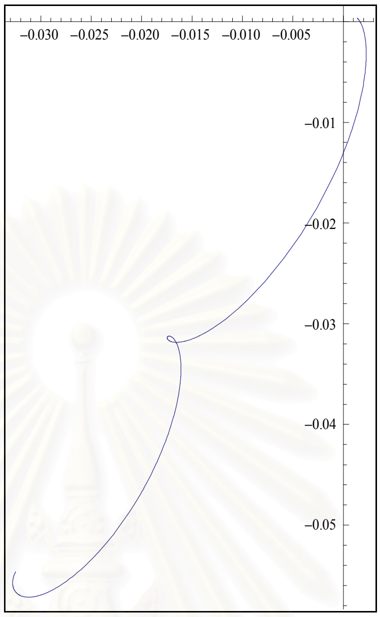
รูปที่ 6.7 กราฟแสดงการเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์ L_4 ตั้งแต่เวลา $t = 151$ ถึง $t = 300$ ปี



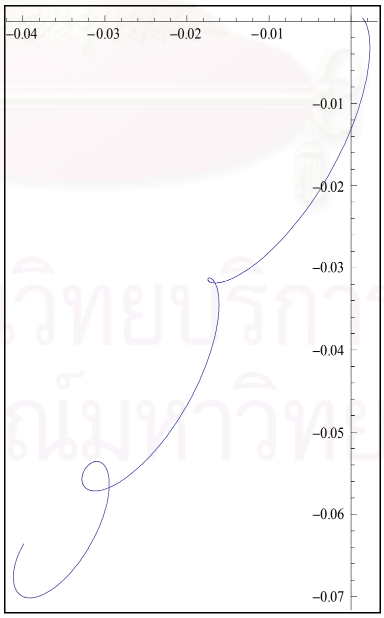
รูปที่ 6.8 กราฟแสดงการเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์ L_4 ตั้งแต่เวลา $t = 301$ ถึง $t = 450$ ปี



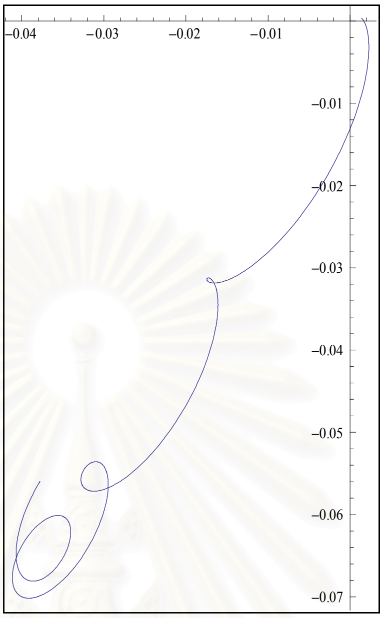
รูปที่ 6.9 กราฟแสดงการเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์ L_4 ตั้งแต่เวลา $t = 451$ ถึง $t = 600$ ปี



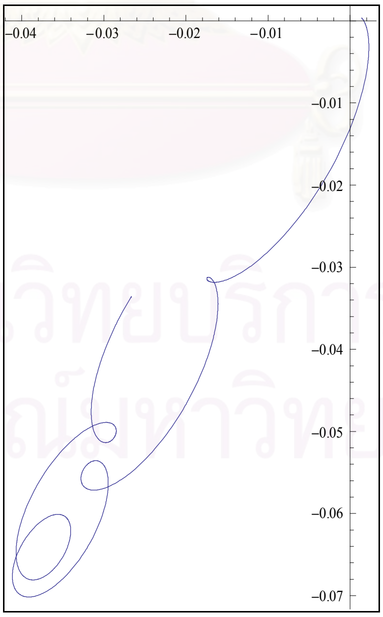
รูปที่ 6.10 กราฟแสดงการเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์ L_4 ตั้งแต่เวลา $t=0$ ถึง $t=24$ ปี



รูปที่ 6.11 กราฟแสดงการเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์ L_4 ตั้งแต่เวลา $t=0$ ถึง $t=36$ ปี



รูปที่ 6.12 กราฟแสดงการเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์ L_4 ตั้งแต่เวลา $t=0$ ถึง $t=48$ ปี



รูปที่ 6.13 กราฟแสดงการเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์ L_4 ตั้งแต่เวลา $t=0$ ถึง $t=60$ ปี

จากรูปที่ 6.1 ถึง รูปที่ 6.5 แสดงการเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์ L_4 ตั้งแต่เวลา 50 ปี ถึง 400 ปี ซึ่งจะเห็นว่าวัตถุจะเคลื่อนที่เป็นแบบสั่นไปมาอยู่บริเวณรอบๆจุดลากรองจ์ L_4 นี้ อย่างมีเสถียรภาพ

จากรูปที่ 6.6 ถึง รูปที่ 6.9 แสดงการเคลื่อนที่ในช่วงทุกๆ 150 ปี ซึ่งก็คือค่าประมาณของคาบองค์ประกอบเชิงยาวของการเคลื่อนที่นี้ จะเห็นว่าการเคลื่อนที่ในทุกๆ 150 ปี จะมีลักษณะใกล้เคียงกัน ซึ่งแสดงถึงคาบองค์ประกอบเชิงยาว ที่มีค่าประมาณ 150 ปีนั่นเอง

จากรูปที่ 6.10 ถึง รูปที่ 6.13 แสดงการเคลื่อนที่ทุก 12 ปี ซึ่งค่านี้ก็คือค่าประมาณของคาบองค์ประกอบเชิงสั้นของการเคลื่อนที่ จะเห็นว่าในทุกๆ 12 ปีจะมีการเคลื่อนที่วนครบรอบจนเกิดเป็นวง 1 วง ขึ้นมาเสมอ ซึ่งนี่แสดงถึงคาบองค์ประกอบเชิงสั้น ที่มีค่าประมาณ 12 ปีนั่นเอง

6.2 การเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์สามเหลี่ยมเมื่อคำนึงการรบกวนจากวัตถุอื่น

ผลเฉลยของการเคลื่อนที่ของวัตถุบริเวณใกล้จุดลากรองจ์สามเหลี่ยม L_4 เมื่อคำนึงถึงการรบกวนของแรงดึงดูดจากดาวดวงอื่น คือ

$$\delta\vec{r} = \delta\vec{r}_L + \delta\vec{r}_E$$

เมื่อ $\delta\vec{r}_L$ คือผลเฉลยของการเคลื่อนที่ของวัตถุเมื่อไม่คำนึงการรบกวนจากวัตถุอื่น

ที่หาได้ในบทที่ 4 เช่นเดียวกับในหัวข้อ 6.1

$\delta\vec{r}_E$ คือผลเฉลยของการเคลื่อนที่ของวัตถุเมื่อคำนึงการรบกวนจากวัตถุอื่น ที่หาได้ในบทที่ 5

ซึ่งมีค่าเท่ากับ $$\delta\vec{r}_{\mathrm{E}} = \delta\vec{r}^{\,(0)} + \delta\vec{r}^{\,(1)}$$

ซึ่ง $$\delta\vec{r}_E = \begin{bmatrix} \delta\vec{x}_E \\ \delta\vec{y}_E \end{bmatrix}$$

โดยที่ $$\delta x_{\mathrm{E}} = \delta x^{(0)} + \delta x^{(1)} \tag{6.23}$$

และ $$\delta y_{\mathrm{E}} = \delta y^{(0)} + \delta y^{(1)} \tag{6.24}$$

จากสมการ (5.72), (5.74), (5.88) และ (5.90) จะได้

$$\delta x^{(0)} = \frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\left[-\frac{\cos mt}{m^2}+\frac{1}{8}\left(-\frac{3\cos 2mt}{2m^2}-\frac{3\sqrt{3}\sin 2mt}{2m^2}\right)A\right.$$
$$+\frac{1}{16}\left(-\frac{9\cos mt}{m^2}+\frac{5\cos 3mt}{3m^2}-\frac{3\sqrt{3}\sin mt}{m^2}-\frac{5\sqrt{3}\sin 3mt}{3m^2}\right)A^2$$
$$\left.+\frac{1}{64}\left(-\frac{5\cos 2mt}{2m^2}+\frac{35\cos 4mt}{4m^2}-\frac{15\sqrt{3}\sin 2mt}{2m^2}\right)A^3\right]$$

$$\delta x^{(1)} = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}\cdot\frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\left[\left(-\frac{\cos mt}{4m^4}+\frac{3\sqrt{3}\sin mt}{4m^4}\right)\right.$$
$$+\frac{1}{192}\left(-\frac{45\cos 2mt}{2m^4}+\frac{9\sqrt{3}\sin 2mt}{2m^4}\right)A$$
$$+\frac{1}{288}\left(\frac{81\cos mt}{m^4}-\frac{20\cos 3mt}{3m^4}+\frac{189\sqrt{3}\sin mt}{m^4}-\frac{10\sqrt{3}\sin 3mt}{3m^4}\right)A^2$$
$$\left.+\frac{1}{4096}\left(-\frac{280\cos 2mt}{m^4}+\frac{35\cos 4mt}{4m^4}+\frac{120\sqrt{3}\sin 2mt}{m^4}-\frac{105\sqrt{3}\sin 4mt}{4m^4}\right)A^3\right]$$

$$\delta y^{(0)} = \frac{Gm_i}{a_i^{\,2}}\left[-\frac{\sin mt}{m^2}+\frac{1}{8}\left(\frac{3\sqrt{3}\cos 2mt}{2m^2}-\frac{3\sin 2mt}{2m^2}\right)A\right.$$
$$+\frac{1}{16}\left(-\frac{3\sqrt{3}\cos mt}{m^2}+\frac{5\sqrt{3}\cos 3mt}{3m^2}-\frac{15\sin mt}{m^2}+\frac{5\sin 3mt}{3m^2}\right)A^2$$
$$\left.+\frac{1}{64}\left(\frac{15\sqrt{3}\cos 2mt}{2m^2}-\frac{25\sin 2mt}{2m^2}+\frac{35\sin 4mt}{4m^2}\right)A^3\right]$$

$$\delta y^{(1)} = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}\cdot\frac{Gm_i}{a_i^{\;2}}\left[\left(\frac{3\sqrt{3}\cos mt}{4m^4}-\frac{5\sin mt}{4m^4}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{96}\left(\frac{9\sqrt{3}\cos 2mt}{m^4}+\frac{9\sin 2mt}{2m^4}\right)A$$

$$+\frac{1}{288}\left(\frac{54\sqrt{3}\cos mt}{m^4}+\frac{5\sqrt{3}\cos 3mt}{3m^4}-\frac{216\sin mt}{m^4}+\frac{35\sin 3mt}{3m^4}\right)A^2$$

$$\left.+\frac{1}{4096}\left(\frac{180\sqrt{3}\cos 2mt}{m^4}-\frac{105\sqrt{3}\cos 4mt}{4m^4}+\frac{20\sin 2mt}{m^4}+\frac{175\sin 4mt}{4m^4}\right)A^3\right]$$

แต่ในบทที่ 5 ได้มีการกำหนดค่าเงื่อนไขเริ่มต้นของการเคลื่อนที่กรณีคำนึงการรบกวนจากวัตถุอื่นเพื่อทำการกำจัดค่าคงที่จากการอินทิเกรตออกไป โดยจากสมการ (5.64) ถึง (5.67) เงื่อนไขเริ่มต้นได้แก่

$$\frac{d\delta x^{(0)}}{dt}(t=0) = v_{x0}^{(0)}$$

$$\delta x^{(0)}(t=0) = x_0^{(0)}$$

$$\frac{d\delta y^{(0)}}{dt}(t=0) = v_{y0}^{(0)}$$

$$\delta y^{(0)}(t=0) = y_0^{(0)}$$

โดยที่

$$v_{x0}^{(0)} = \frac{Gm_i}{a_i^{\;2}}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{8m}A-\frac{\sqrt{3}}{2m}A^2-\frac{15\sqrt{3}}{64m}A^3\right) \tag{5.68}$$

$$x_0^{(0)} = \frac{Gm_i}{a_i^{\;2}}\left(-\frac{1}{m^2}-\frac{3}{16m^2}A-\frac{11}{24m^2}A^2+\frac{25}{256m^2}A^3\right) \tag{5.69}$$

$$v_{y0}^{(0)} = \frac{Gm_i}{a_i^{\;2}}\left(-\frac{1}{m}-\frac{3}{8m}A-\frac{5}{8m}A^2+\frac{5}{32m}A^3\right) \tag{5.70}$$

$$y_0^{(0)} = \frac{Gm_i}{a_i^{\ 2}}\left(+ \frac{3\sqrt{3}}{16m^2}A - \frac{\sqrt{3}}{12m^2}A^2 + \frac{15\sqrt{3}}{128m^2}A^3 \right) \tag{5.71}$$

และจากสมการ (5.80) ถึง (5.83) เงื่อนไขเริ่มต้นได้แก่

$$\frac{d\delta x^{(1)}}{dt}(t=0) = v_{x1}^{(1)}$$

$$\delta x^{(1)}(t=0) = x_1^{(1)}$$

$$\frac{d\delta y^{(1)}}{dt}(t=0) = v_{y1}^{(1)}$$

$$\delta y^{(1)}(t=0) = y_1^{(1)}$$

โดยที่

$$v_{x1}^{(1)} = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}\cdot\frac{Gm_i}{a_i^{\ 2}}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4m^3} + \frac{3\sqrt{3}}{64m^3}A + \frac{179\sqrt{3}}{288m^3}A^2 + \frac{135\sqrt{3}}{4096m^3}A^3 \right) \tag{5.84}$$

$$x_1^{(1)} = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}\cdot\frac{Gm_i}{a_i^{\ 2}}\left(-\frac{1}{4m^4} - \frac{15}{128m^4}A + \frac{223}{864m^4}A^2 - \frac{1085}{16384m^4}A^3 \right) \tag{5.85}$$

$$v_{y1}^{(1)} = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}\cdot\frac{Gm_i}{a_i^{\ 2}}\left(-\frac{5}{4m^3} + \frac{3}{32m^3}A - \frac{181}{288m^3}A^2 + \frac{215}{4096m^3}A^3 \right) \tag{5.86}$$

$$y_1^{(1)} = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}\cdot\frac{Gm_i}{a_i^{\ 2}}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4m^4} + \frac{3\sqrt{3}}{32m^4}A - \frac{167\sqrt{3}}{864m^4}A^2 + \frac{615\sqrt{3}}{16384m^4}A^3 \right) \tag{5.87}$$

จึงจะใช้เงื่อนไขเริ่มต้นนี้มาเป็นเงื่อนไขเริ่มต้นของการเคลื่อนที่ในกรณีไม่คำนึงการรบกวนจากวัตถุอื่น $\delta\bar{r}_L$ ด้วย โดยเงื่อนไขเริ่มต้นของกรณีนี้เป็นไปตามสมการ (4.73) ถึง (4.76) จึงสรุปได้ว่า

$$x_0 = x_0^{(0)} + x_0^{(1)} \tag{6.25}$$

$$y_0 = y_0^{(0)} + y_0^{(1)} \tag{6.26}$$

$$v_{x0} = v_{x0}^{(0)} + v_{x0}^{(1)} \tag{6.27}$$

$$v_{y0} = v_{y0}^{(0)} + v_{y0}^{(1)} \tag{6.28}$$

ในงานวิจัยนี้จะกำหนดให้ วัตถุชิ้นที่ 1 คือ ดวงอาทิตย์ วัตถุชิ้นที่ 2 คือ ดาวพฤหัส และวัตถุชิ้นที่ 4 คือ ดาวเสาร์ จึงแทนค่าต่างๆ ดังนี้

$m_1 = 1.998 \times 10^{30}$ กิโลกรัม

$m_2 = 1.899 \times 10^{27}$ กิโลกรัม $= 9.5 \times 10^{-4} m_1$

$m_i = 5.685 \times 10^{26}$ กิโลกรัม $= 2.85 \times 10^{-4} m_1$

$$A = \frac{a}{a_i}$$

โดยที่ $a = 5.21$ เอยู

$a_i = 9.538$ เอยู

จากสมการ (5.17) ที่ว่า $m = (n_i - n)$

โดยที่ $n = 0.5284$ เรเดียน / ปี

$n_i = 0.2133$ เรเดียน / ปี

ดังนั้น $m = (n_i - n) = 0.2133 - 0.5284 = -0.3151$ เรเดียน / ปี

ใช้หน่วยของระยะทางเป็น เอยู และ หน่วยของเวลาเป็น ปี ซึ่งจากสมการ (2.5) จะได้ว่า

$G(m_1 + m_2) = 4\pi^2$ นิวตัน เมตร^3 / กิโลกรัม

$Gm_i = 4\pi^2 \times 2.85 \times 10^{-4}$ นิวตัน เมตร^3 / กิโลกรัม

จะทำการหาค่า $\delta\bar{r}_L$ ก่อนโดยใช้ค่าต่างที่หามาได้จากหัวข้อ 6.1 แต่เงื่อนไขเริ่มต้นจาก

$$x^*(t=0) = x_0$$

$$y^*(t=0) = y_0$$

$$\dot{x}^*(t=0) = v_{x0}$$

$$\dot{y}^*(t=0) = v_{y0}$$

จากสมการ (6.25) ถึง (6.28) จะได้เป็น

$$x^*(t=0) = x_0 = x_0^{(0)} + x_0^{(1)} \tag{6.29}$$

$$y^*(t=0) = y_0 = y_0^{(0)} + y_0^{(1)} \tag{6.30}$$

$$\dot{x}^*(t=0) = v_{x0} = v_{x0}^{(0)} + v_{x0}^{(1)} \tag{6.31}$$

$$\dot{y}^*(t=0) = v_{y0} = v_{y0}^{(0)} + v_{y0}^{(1)} \tag{6.32}$$

แทนค่าต่างๆลงในสมการ (5.68) ถึง (5.71) และสมการ (5.84) ถึง (5.87) จะได้

$$x_0 = -3.9083\times10^{-3} \text{ เอยู} \tag{6.33}$$

$$y_0 = 5.4451\times10^{-3} \text{ เอยู} \tag{6.34}$$

$$v_{x0} = -1.5774\times10^{-3} \text{ เอยู / ปี} \tag{6.35}$$

$$v_{y0} = 2.0526\times10^{-3} \text{ เอยู / ปี} \tag{6.36}$$

จากสมการ (4.84) ถึง (4.89) จะได้

$$A_1\cos\gamma_1 = -\frac{\omega_2{}^2 + a^*}{\omega_1{}^2 - \omega_2{}^2}x_0 - \frac{2n}{\omega_1{}^2 - \omega_2{}^2}v_{y0} = 4.0242\times10^{-3} \text{ เอยู} \tag{6.37}$$

$$A_2 \cos\gamma_2 = \frac{\omega_1^{\ 2} + a^*}{\omega_1^{\ 2} - \omega_2^{\ 2}} x_0 + \frac{2n}{\omega_1^{\ 2} - \omega_2^{\ 2}} v_{y0} = -7.9329 \times 10^{-3} \text{ เอยู} \tag{6.38}$$

$$A_1 \sin\gamma_1 = \frac{2n\omega_1\omega_2^{\ 2}}{a^*(\omega_1^{\ 2} - \omega_2^{\ 2})} y_0 - \frac{\omega_1\left(\omega_2^{\ 2} + a^*\right)}{a^*(\omega_1^{\ 2} - \omega_2^{\ 2})} v_{x0} = 3.0446 \times 10^{-3} \text{ เอยู} \tag{6.39}$$

$$A_2 \sin\gamma_2 = -\frac{2n\omega_1^{\ 2}\omega_2}{a^*(\omega_1^{\ 2} - \omega_2^{\ 2})} y_0 + \frac{\omega_2\left(\omega_1^{\ 2} + a^*\right)}{a^*(\omega_1^{\ 2} - \omega_2^{\ 2})} v_{x0} = -6.1647 \times 10^{-4} \text{ เอยู} \tag{6.40}$$

นำสมการ (6.39) หารด้วยสมการ (6.37)

$\tan\gamma_1 = 0.7566$

$$\gamma_1 = 0.6477 \text{ เรเดียน} \tag{6.41}$$

นำ $\gamma_1 = 0.6477$ ไปแทนในสมการ (6.39)

$$A_1 = 5.0462 \times 10^{-3} \text{ เอยู} \tag{6.42}$$

และจากสมการ (6.6)

$$B_1 = -10.1030 \times 10^{-3} \text{ เอยู} \tag{6.43}$$

นำสมการ (6.40) หารด้วยสมการ (6.38)

$\tan\gamma_2 = 0.0777$

$$\gamma_2 = 0.0776 \text{ เรเดียน} \tag{6.44}$$

นำ $\gamma_2 = 0.0776$ ไปแทนในสมการ (6.40)

$$A_2 = -7.9568 \times 10^{-3} \text{ เอยู} \tag{6.45}$$

และจากสมการ (6.7)

$$B_2 = 148.9517 \times 10^{-3} \text{ เอยู} \tag{6.46}$$

แทนค่าทั้งหมดลงในสมการ (4.83) และ (4.84)

$$x^* = 10^{-3}\left[5.0462\cos(0.5267t + 0.6477) - 7.9568\cos(0.0424t + 0.0776)\right] \tag{6.47}$$

$$y^* = 10^{-3}\left[-10.1030\sin(0.5267t + 0.6477) + 148.9517\sin(0.0424t + 0.0776)\right] \tag{6.48}$$

แทนสมการ (6.47) และ (6.48) ลงในสมการ (4.81) และ (4.82) เพื่อหาผลเฉลยของการเคลื่อนที่กรณีไม่คำนึงการรบกวนจากวัตถุอื่น $\delta\bar{r}_L$ ได้เป็น

$$x = x^*\cos(-0.5232) - y^*\sin(-0.5232) \tag{6.49}$$

$$y = x^*\sin(-0.5232) + y^*\cos(-0.5232) \tag{6.50}$$

เนื่องจากสมการ (6.49) และ (6.50) คือผลเฉลยของการเคลื่อนที่กรณีไม่คำนึงการรบกวนจากวัตถุอื่น $\delta\bar{r}_L$ จึงขอเปลี่ยนสัญลักษณ์เป็น

$$\delta x_L = x^*\cos(-0.5232) - y^*\sin(-0.5232) \tag{6.51}$$

$$\delta y_L = x^*\sin(-0.5232) + y^*\cos(-0.5232) \tag{6.52}$$

โดยที่

$$\delta\bar{r}_L = \begin{bmatrix} \delta x_L \\ \delta y_L \end{bmatrix}$$

จากนั้นพิจารณาผลเฉลยของการเคลื่อนที่กรณีคำนึงการรบกวนจากวัตถุอื่น $\delta\bar{r} = \delta\bar{r}_L + \delta\bar{r}_E$

โดยที่ $$\delta\bar{r}_E = \begin{bmatrix} \delta\bar{x}_E \\ \delta\bar{y}_E \end{bmatrix}$$

เมื่อ $$\delta x_{\mathrm{E}} = \delta x^{(0)} + \delta x^{(1)}$$

และ $$\delta y_{\mathrm{E}} = \delta y^{(0)} + \delta y^{(1)}$$

แทนค่าต่างๆแล้วจะสามารถหาค่า $\delta x_{\mathrm{E}} = \delta x^{(0)} + \delta x^{(1)}$ และ $\delta y_{\mathrm{E}} = \delta y^{(0)} + \delta y^{(1)}$ ได้เป็น

$$\begin{aligned}\delta x_{\mathrm{E}} = 10^{-3}\big(&-2.0327\cos 0.3151t - 0.3980\cos 0.6302t + 0.0145\cos 0.9453t \\ &+ 0.0289\cos 1.2604t - 5.6057\sin 0.3151t + 0.1553\sin 0.6302t \\ &+ 0.0879\sin 0.9453t + 0.0063\sin 1.2604t\big)\end{aligned} \tag{6.53}$$

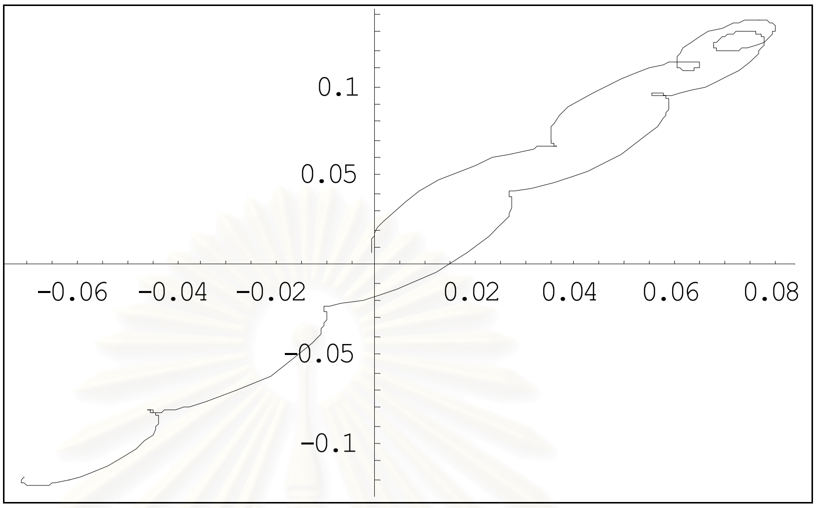
$$\begin{aligned}\delta y_{\mathrm{E}} = 10^{-3}\big(&4.7589\cos 0.3151t + 0.6151\cos 0.6302t + 0.0774\cos 0.9453t \\ &- 0.0063\cos 1.2604t + 6.7428\sin 0.3151t + 0.0747\sin 0.6302t \\ &- 0.0810\sin 0.9453t - 0.0338\sin 1.2604t\big)\end{aligned} \tag{6.54}$$

หาการเคลื่อนที่ของวัตถุบริเวณใกล้จุดลากรองจ์ L_4 ในระบบของดวงอาทิตย์และดาวพฤหัส โดยคำนึงถึงการรบกวนจากดาวเสาร์ $\delta\bar{r} = \delta\bar{r}_L + \delta\bar{r}_E$ ได้ดังตารางที่ 6.2

ตารางที่ 6.2 การเคลื่อนที่ของวัตถุบริเวณจุดลากรองจ์ L_4 เมื่อคำนึงการรบกวนจากดาวเสาร์

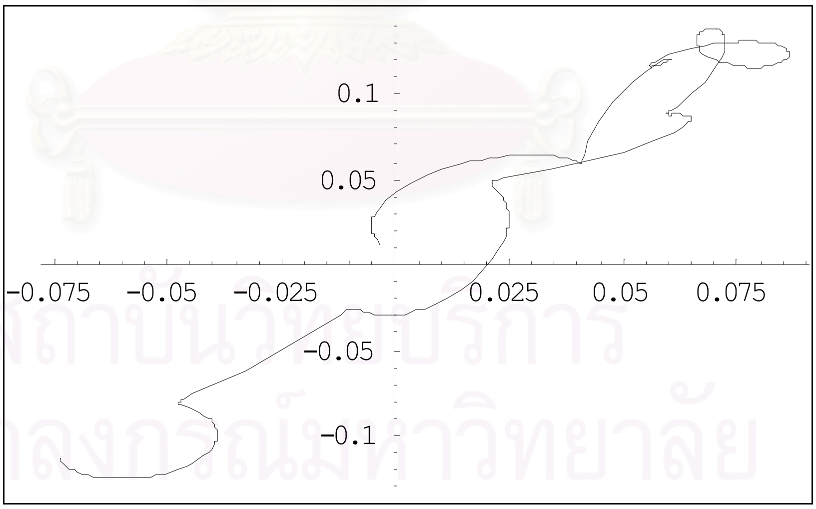
เวลา (ปี)	δx_{L} (เอยู)	δx_{E} (เอยู)	δy_{L} (เอยู)	δy_{E} (เอยู)
10	0.03563810	0.00170248	0.06632540	- 0.00428830
20	0.06108870	- 0.00248085	0.11361400	0.00556623
30	0.07127970	0.00180902	0.13452100	- 0.00440921
40	0.06870810	- 0.00257342	0.12562700	0.00568462
50	0.05826250	0.00191524	0.09444880	- 0.00452897
60	0.04216080	- 0.00266490	0.05248450	0.00580021
70	0.01920820	0.00202110	0.00751720	- 0.00464753
80	- 0.01115940	- 0.00275526	- 0.03809490	0.00591299
90	- 0.04439360	0.00212658	- 0.08252930	- 0.00476485
100	- 0.07085290	- 0.00284452	- 0.11890000	0.00602293
200	0.06788270	- 0.00327363	0.10053900	0.00652995
300	0.00526760	- 0.00367302	0.02470630	0.00696545
400	- 0.06977660	- 0.00404089	- 0.11803800	0.00732955
500	0.05774720	- 0.00437525	0.07802860	0.00762291
1000	- 0.06861250	- 0.00547081	- 0.12703600	0.00806095

ต่อไปจะใช้โปรแกรม MATHEMATICA 4.0 (เพื่อความเหมาะสมของรูปกราฟที่ได้) ในการสร้างกราฟของการเคลื่อนที่กรณีไม่คำนึงการรบกวนจากดาวเสาร์ $\delta\bar{r}_L$ เพื่อเทียบกับ การเคลื่อนที่กรณีคำนึงการรบกวนจากดาวเสาร์ $\delta\bar{r} = \delta\bar{r}_L + \delta\bar{r}_E$ ซึ่งกราฟที่แสดงจะมีจุดกำเนิดอยู่ที่จุดลากรองจ์ L_4



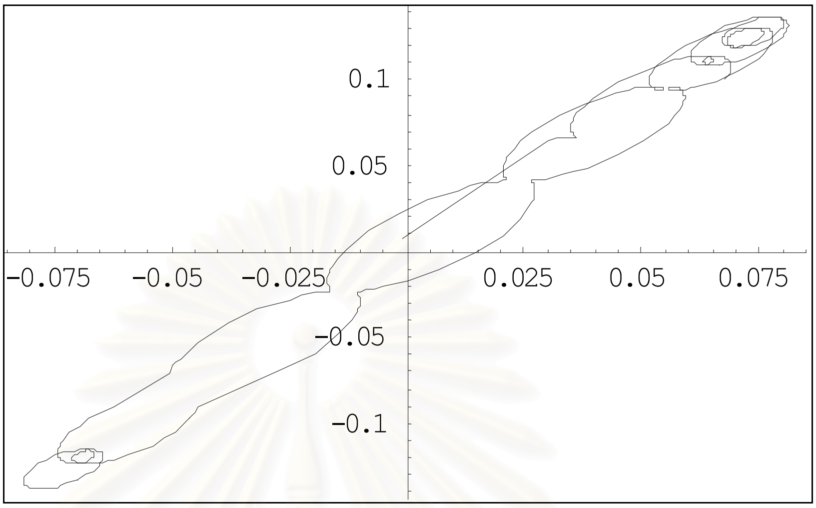
รูปที่ 6.14 กราฟแสดงการเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์ L_4 กรณีไม่คำนึงการรบกวนจากดาวเสาร์

ตั้งแต่ เวลา $t = 0$ ถึง $t = 100$ ปี

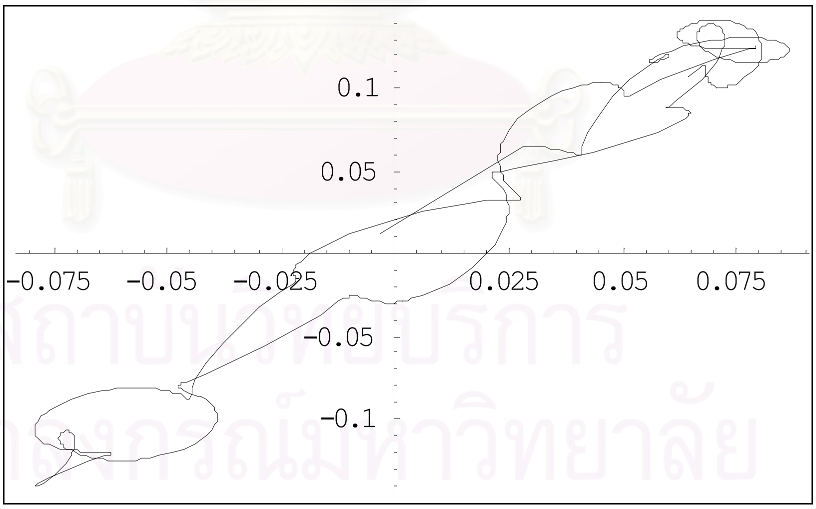


รูปที่ 6.15 กราฟแสดงการเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์ L_4 กรณีคำนึงการรบกวนจากดาวเสาร์

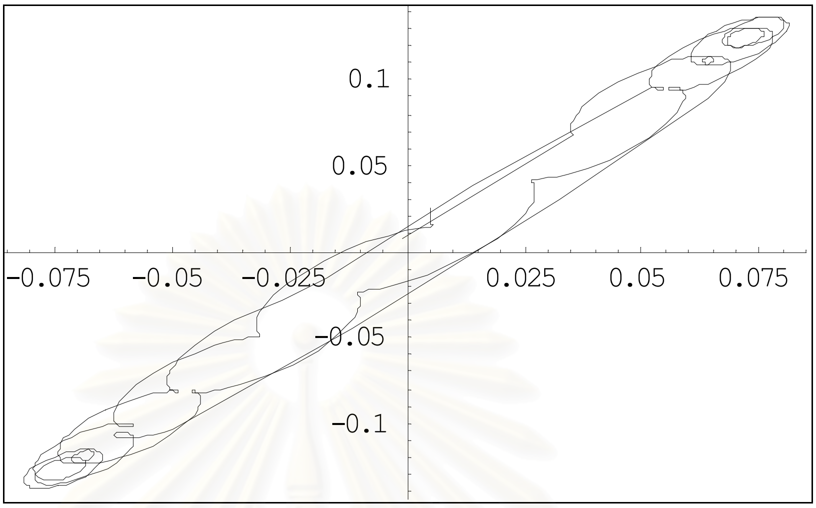
ตั้งแต่ เวลา $t = 0$ ถึง $t = 100$ ปี



รูปที่ 6.16 กราฟแสดงการเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์ L_4 กรณีไม่คำนึงการรบกวนจากดาวเสาร์ ตั้งแต่ เวลา $t=0$ ถึง $t=200$ ปี

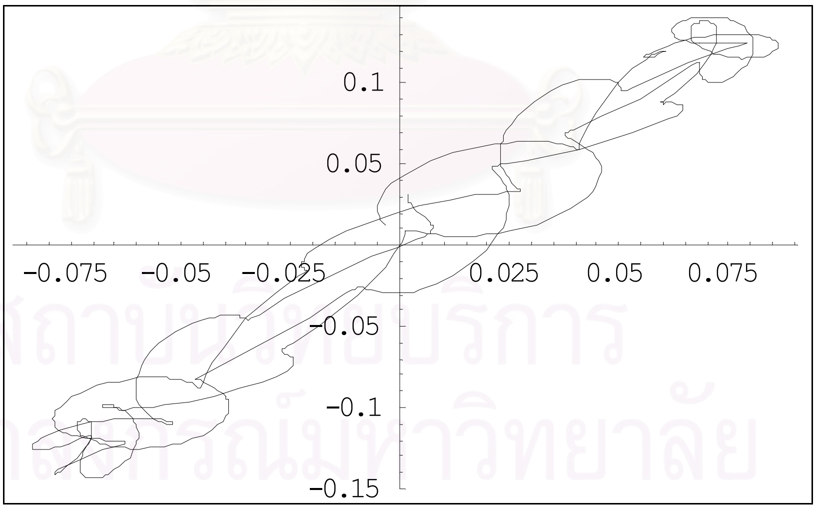


รูปที่ 6.17 กราฟแสดงการเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์ L_4 กรณีคำนึงการรบกวนจากดาวเสาร์ ตั้งแต่ เวลา $t=0$ ถึง $t=200$ ปี



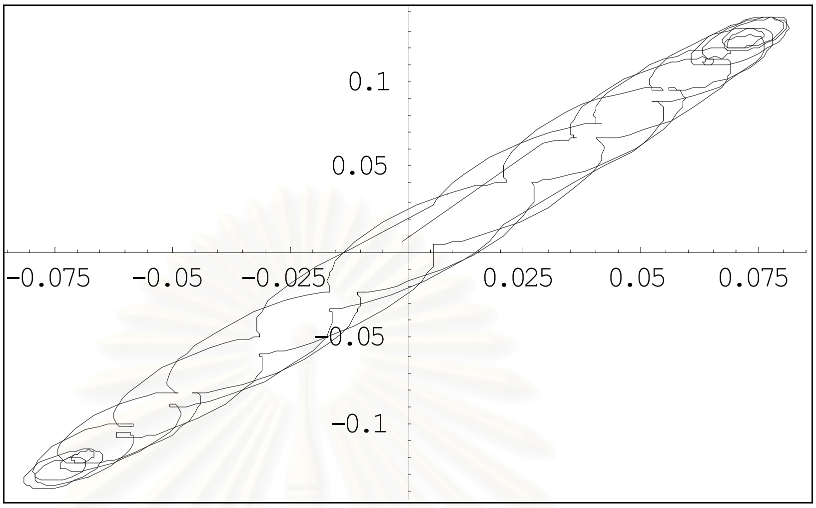
รูปที่ 6.18 กราฟแสดงการเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์ L_4 กรณีไม่คำนึงการรบกวนจากดาวเสาร์

ตั้งแต่ เวลา $t=0$ ถึง $t=300$ ปี



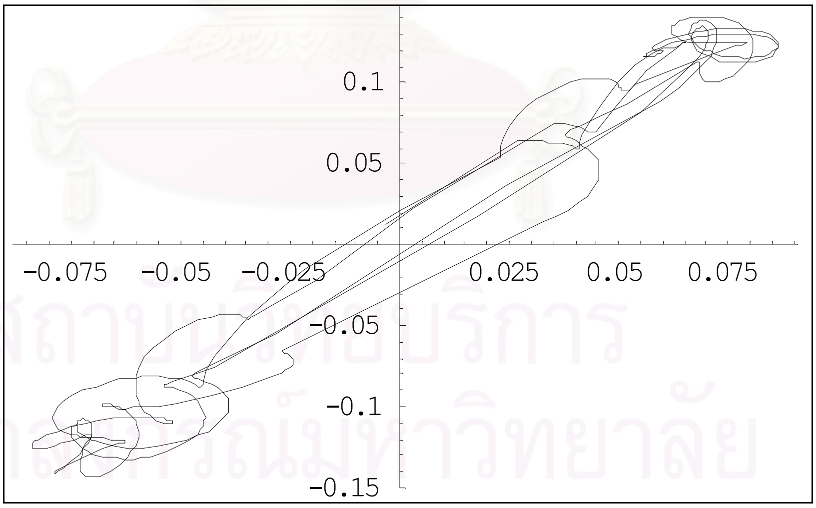
รูปที่ 6.19 กราฟแสดงการเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์ L_4 กรณีคำนึงการรบกวนจากดาวเสาร์

ตั้งแต่ เวลา $t=0$ ถึง $t=300$ ปี



รูปที่ 6.20 กราฟแสดงการเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์ L_4 กรณีไม่คำนึงการรบกวนจากดาวเสาร์

ตั้งแต่ เวลา $t = 0$ ถึง $t = 400$ ปี



รูปที่ 6.21 กราฟแสดงการเคลื่อนที่บริเวณจุดลากรองจ์ L_4 กรณีคำนึงการรบกวนจากดาวเสาร์

ตั้งแต่ เวลา $t = 0$ ถึง $t = 400$ ปี

จะเห็นได้ว่ากราฟของการเคลื่อนที่ของวัตถุทดสอบบริเวณจุดลากรองจ์ L_4 เมื่อไม่คำนึงการรบกวนจากวัตถุอื่นนั้น มีลักษณะการเคลื่อนที่แบบเป็นคาบตามคาบสั้นและคาบยาว ซึ่งมีการเคลื่อนที่ในรูปแบบคล้ายๆเดิมในทุกๆประมาณ 12 ปี และทุกๆประมาณ 150 ปี ในขณะที่กราฟของการเคลื่อนที่ของวัตถุทดสอบบริเวณจุดลากรองจ์ L_4 เมื่อคำนึงการรบกวนจากวัตถุอื่นนั้น จะมีลักษณะที่ต่างออกไปเป็นอย่างมาก เนื่องจากการที่มีวัตถุอื่นส่งผลเนื่องจากแรงดึงดูดเข้ามารบกวนการเคลื่อนที่นั่นเอง แต่อย่างไรก็ตามลักษณะของการเคลื่อนที่ของวัตถุทดสอบก็ยังคงมีแนวโน้มใกล้เคียงกับกรณีที่ไม่คำนึงการรบกวนจากวัตถุอื่น

รายการอ้างอิง

[1] ฮิโรชิ คิโนะชิตะ. กลศาสตร์ของวัตถุท้องฟ้าและวงโคจร. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2547. 99-136.

[2] Arakida, H., and Fukushima, T. Motion around Triangular Lagrange Points Perturbed by Other Bodies. Proceedings of the 34^{th} Symposium on Celestial Mechanics 2002, 265-288.

[3] Smart, W. M. Text-Book on Spherical Astronomy. 5^{th} edition. Great Britain : Cambridge University Press, 1977. 98-114.

[4] Danby, J. M. A. Fundamentals of Celestial Mechanics. 2^{nd} edition. United States of America : Willmann-Bell, 1992. 437-438.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

กรณีวัตถุชิ้นที่ 4 มีวงโคจรเป็นวงรี

ในกรณีที่วัตถุชิ้นที่ 4 ที่ส่งผลรบกวนต่อการเคลื่อนที่ของวัตถุทดสอบบริเวณใกล้จุดลากรองจ์ L_4 มีวงโคจรเป็นวงรีเหมือนในระบบสุริยะจริงๆนั้น จะต้องทำการปรับปรุงการหาค่าต่างๆของวัตถุชิ้นที่ 4 จากเดิมที่กำหนดให้ วัตถุชิ้นที่ 4 โคจรรอบวัตถุชิ้นที่ 1 เป็นวงกลม จะต้องเปลี่ยนเป็น วัตถุชิ้นที่ 4 โคจรรอบวัตถุชิ้นที่ 1 เป็นทางโคจรรูปวงรี โดยมีวัตถุชิ้นที่ 1 ตั้งอยู่ที่จุดโฟกัสของจุดหนึ่งของวงรีนั้นดังรูปที่ 2.2 ในขณะที่ยังคงให้วัตถุชิ้นที่ 2 โคจรรอบวัตถุชิ้นที่ 1 เป็นวงกลมเช่นเดิม เพราะเป็นเงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหาวัตถุ 3 ชิ้นแบบจำกัดในบทที่ 3 และการหาผลเฉลยของการเคลื่อนที่บริเวณใกล้จุดลากรองจ์ของคำตอบสามเหลี่ยมด้านเท่าในบทที่ 4 ดังนั้น จากสมการ (5.13)

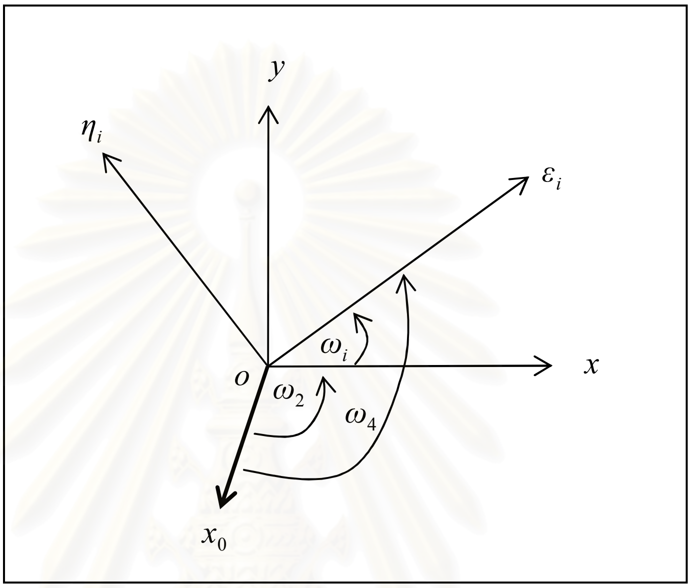
$$\frac{d^2\delta\vec{r}^{(0)}}{dt^2} = Gm_i \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_L}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_L\right|^3}$$

ค่าที่จะเปลี่ยนไปก็คือ เวกเตอร์บอกตำแหน่งของวัตถุชิ้นที่ 4 $(\vec{r}_i)$ ในขณะที่ เวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุดลากรองจ์ L_4 $(\vec{r}_L)$ ยังคงมีค่าเหมือนเดิม

จากการพิจารณาระบบสุริยะ โดยกำหนดให้วัตถุชิ้นที่ 1 คือดวงอาทิตย์ จะพบว่ากรอบอ้างอิงของวัตถุชิ้นที่ 4 จะเป็นคนละกรอบกับกรอบอ้างอิงที่ใช้ในบทที่ 5 ตามรูปที่ 5.1 เนื่องจากทางโคจรรูปวงรีของดาวเคราะห์แต่ละดวงในระบบสุริยะก็จะมีกรอบอ้างอิงของทางโคจรที่ทำมุมต่างกันไป โดยจะสามารถอ้างอิงมุมที่ทำต่างกันไปของกรอบอ้างอิงของดาวเคราะห์ต่างๆนี้ได้จากระนาบอ้างอิงที่ใช้ในการหาหลักมูลทางโคจรนั่นเอง และด้วยการพิจารณาระบบสุริยะใน 2 มิติ (เนื่องจากงานวิจัยนี้พิจารณาในระนาบ 2 มิติ) ทำให้ทราบว่ามุมที่กรอบอ้างอิงของดาวเคราะห์แต่ละดวงกระทำกับระนาบอ้างอิงที่ใช้ในการหาหลักมูลทางโคจรก็คือ ค่าลองกิจูดของจุดใกล้ดวงอาทิตย์ ซึ่งเป็นหลักมูลทางโคจรตัวหนึ่งที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 2 นั่นเอง

เพราะเมื่อพิจารณาระบบสุริยะใน 2 มิติแล้ว แนวจากจุดโฟกัสของทางโคจรรูปวงรีของดาวเคราะห์ไปยังจุดใกล้ดาวดวงอาทิตย์จะถูกกำหนดให้เป็นแกน x ของกรอบอ้างอิงของระบบดวงอาทิตย์กับดาวเคราะห์ดวงนั้น และค่าลองกิจูดของจุดใกล้ดวงอาทิตย์ ก็คือ มุมระหว่าง

แนวของจุดไต่ขึ้นกับแกน x ของกรอบอ้างอิง ซึ่งจริงๆการพิจารณาใน 2 มิติจะไม่มีจุดไต่ขึ้น ดังนั้น จึงกำหนดให้แนวของจุดไต่ขึ้นเป็นแกน x ของกรอบอ้างอิงของระนาบอ้างอิงที่ใช้ในการหาหลักมูลทางโคจร



รูปที่ ก.1 ลองกิจูดของจุดใกล้ดวงอาทิตย์

จากรูป ก.1 แกน x_0 คือแกน x ของระนาบอ้างอิงที่ใช้ในการหาหลักมูลทางโคจร กรอบอ้างอิง $x-y$ คือกรอบอ้างอิงที่ใช้ในบทที่ 5 ตามรูป 5.1 และกรอบอ้างอิง $\varepsilon_i-\eta_i$ คือกรอบอ้างอิงของการโคจรเป็นวงรีของวัตถุชิ้นที่ 4 รอบวัตถุชิ้นที่ 1

โดยที่ ω_2 คือค่าลองกิจูดของจุดใกล้ดวงอาทิตย์ของวัตถุชิ้นที่ 2

ω_4 คือค่าลองกิจูดของจุดใกล้ดวงอาทิตย์ของวัตถุชิ้นที่ 4

ω_i คือมุมที่กรอบอ้างอิง $\varepsilon_i-\eta_i$ กระทำกับกรอบอ้างอิง $x-y$

ซึ่งจากรูป ก.1 จะพบว่า

$$\omega_i = \omega_4 - \omega_2 \qquad (ก.1)$$

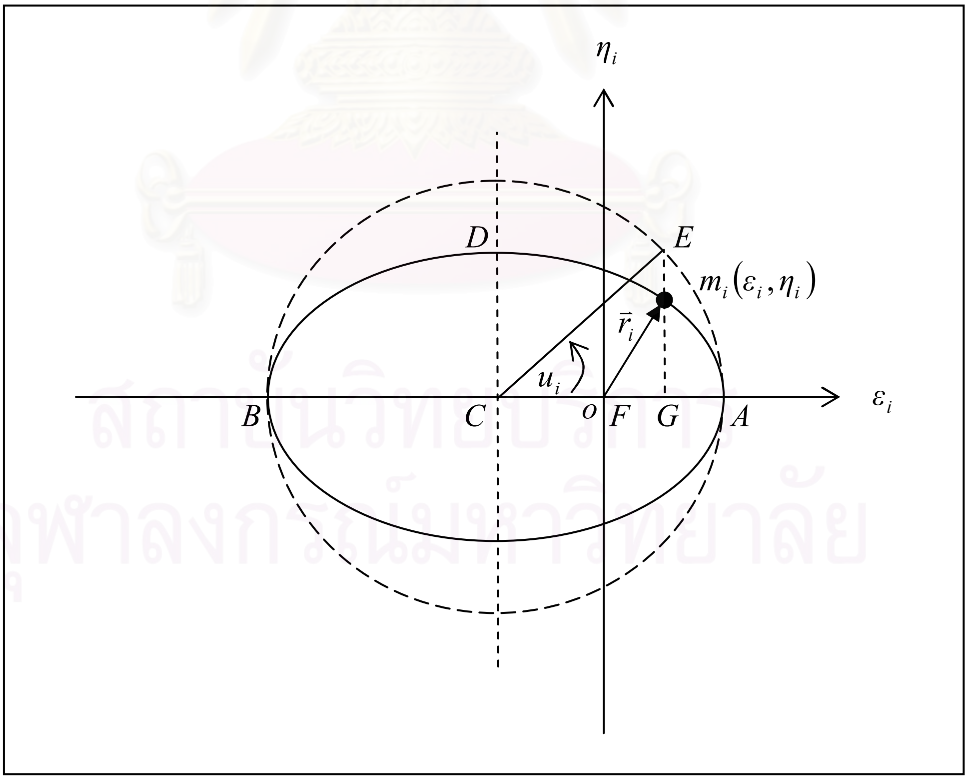
กำหนดให้พิกัดของวัตถุชิ้นที่ 4 ในกรอบอ้างอิง $\varepsilon_i - \eta_i$ เป็น (ε_i, η_i) และให้พิกัดของวัตถุชิ้นที่ 4 ในกรอบอ้างอิง $x - y$ เป็น (x_i, y_i) ซึ่ง (x_i, y_i) นี้ก็คือพิกัดของเวกเตอร์บอกตำแหน่งของวัตถุชิ้นที่ 4 นั่นคือ $\vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j}$ เพื่อนำไปใช้ในสมการ (5.13) นั่นเอง

ดังนั้น $\vec{r}_i$ จึงต้องทำการหมุนกรอบอ้างอิงจาก $\varepsilon_i - \eta_i$ เข้ามาสู่กรอบอ้างอิง $x - y$ เสียก่อน จึงได้

$$x_i = \varepsilon_i \cos\omega - \eta_i \sin\omega \tag{ก.2}$$

$$y_i = \varepsilon_i \sin\omega + \eta_i \cos\omega \tag{ก.3}$$

จากนั้นพิจารณาวงโคจรรูปวงรีของวัตถุชิ้นที่ 4 รอบวัตถุชิ้นที่ 1 โดยมีวัตถุชิ้นที่ 1 ตั้งอยู่ที่จุดโฟกัสของจุดหนึ่งของวงรี ในกรอบอ้างอิง $\varepsilon_i - \eta_i$ ซึ่งมีจุดกำเนิดอยู่ที่จุดโฟกัสจุดที่วัตถุชิ้นที่ 1 ตั้งอยู่เพื่อจะได้ใช้ร่วมกับกรอบอ้างอิง $x - y$ ในรูปที่ 5.1 ได้



รูปที่ ก.2 ทางโคจรรูปวงรีของวัตถุชิ้นที่ 4

จากรูปที่ ก.2 แสดงทางโคจรรูปวงรีของวัตถุชิ้นที่ 4 ซึ่งแทนด้วย m_i และมีพิกัดอยู่ที่ $\vec{r}_i(\varepsilon_i,\eta_i)$ โดยกรอบอ้างอิงนี้จะมีจุดกำเนิดอยู่ที่จุด F ซึ่งเป็นจุดโฟกัสจุดที่วัตถุชิ้นที่ 1 ตั้งอยู่ กำหนดให้ระยะระหว่างจุด C กับจุด A เท่ากับ a_i เมื่อ a_i คือระยะครึ่งแกนเอกของวงรี ระยะระหว่างจุด C กับจุด D เท่ากับ b_i เมื่อ b_i คือระยะครึ่งแกนโทของวงรี และจากการศึกษาสมบัติทางเรขาคณิตของวงรีจะพบว่าระยะระหว่างจุด C กับจุด F มีค่าเท่ากับระยะครึ่งแกนเอกของวงรีคูณกับความเยื้องศูนย์กลางของวงรีนั้น รวมไปถึงอัตราส่วนของระยะระหว่างจุด G กับ m_i เทียบกับระยะระหว่างจุด G กับจุด E จะเท่ากับอัตราส่วนของ b_i ต่อ a_i ด้วย **[3]**

จากนั้นสร้างวงกลมเส้นประซึ่งมีรัศมีเท่ากับ a_i ขึ้นมาล้อมรอบทางโคจรรูปวงรีโดยให้ซ้อนกันพอดีดังรูปที่ ก.2 แล้วลากเส้นประจากแกน ε_i ขึ้นไปผ่านจุด m_i ไปจนถึงวงกลมเส้นประ ดังนั้นระยะระหว่างจุด C กับจุด E จึงเท่ากับระยะครึ่งแกนเอกของวงรีด้วย และมุมที่เส้นตรง CE กระทำกับแกน ε_i นี้ก็คือมุมกวาดเยื้อง (eccentric anomaly) ซึ่งเป็นมุมที่จะใช้อ้างอิงพิกัดของ (ε_i,η_i) นั่นเอง

ดังนั้นจะได้

$$\varepsilon_i = a_i\cos u_i - a_i e \qquad (ก.4)$$

$$\eta_i = b_i \sin u_i \qquad (ก.5)$$

$$r_i = a_i(1 - e\cos u_i) \qquad (ก.6)$$

เมื่อ a_i คือระยะครึ่งแกนเอกของวัตถุชิ้นที่ 4

b_i คือระยะครึ่งแกนโทของวัตถุชิ้นที่ 4

u_i คือมุมกวาดเยื้องของวัตถุชิ้นที่ 4

e คือความเยื้องศูนย์กลางของทางโคจรของวัตถุชิ้นที่ 4

แต่จากการศึกษาสมบัติทางเรขาคณิตของวงรี **[3]** พบว่า $b_i = a_i\sqrt{1-e^2}$ ดังนั้นสมการ (ก.5) ได้

$$\eta_i = b_i\sin u_i = a_i\sqrt{1-e^2}\sin u_i \qquad (ก.7)$$

ต่อไปจะเป็นการทำให้ค่าของ ε_i และ η_i ขึ้นกับเวลา เพื่อจะได้นำไปอินทิเกรตได้ โดยที่มุมกวาดเยื้องจะเป็นค่าที่ไม่ได้ขึ้นกับเวลาจึงต้องเปลี่ยนให้เป็นมุมกวาดเฉลี่ย (mean anomaly) ซึ่งขึ้นกับเวลา โดยมุมกวาดเฉลี่ยจะมีค่าเป็น $l_i = mt$ เมื่อ t คือช่วงเวลาที่ใช้โคจร และ m คือ อัตราเร็วเชิงมุมของการโคจรของวัตถุชิ้นที่ 4 เทียบกับกรอบอ้างอิง $x-y$ เช่นเดียวกับ l_i ที่เป็นมุมที่เวกเตอร์ $\bar{r}_i$ กระทำกับแกน x ของกรอบอ้างอิงในบทที่ 5 นั่นเอง

ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างมุมกวาดเยื้องกับมุมกวาดเฉลี่ยจะเป็นดังนี้ **[4]**

$$\cos u_i = -\frac{1}{2}e + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}J_n'(ne)\cos l_i \qquad (ก.8)$$

$$\sin u_i = \frac{2}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}J_n(ne)\sin nl_i \qquad (ก.9)$$

เมื่อ ne มีค่าเท่าใดก็ได้

โดยที่ l_i คือมุมกวาดเฉลี่ยของวัตถุชิ้นที่ 4

$J_n(ne)$ คือฟังก์ชันเบสเซลของ ne

$$J_n'(ne) = \frac{\partial}{\partial(ne)}J_n(ne)$$

ซึ่งฟังก์ชันเบสเซลจะมีค่าดังนี้ **[4]**

$$J_n(ne) = \frac{e}{2}\left(\frac{ne}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\left[1 - \frac{n^2e^2}{2\cdot(2n+2)} + \frac{n^4e^4}{2\cdot 4\cdot(2n+2)(2n+4)} - \dots\right] \qquad (ก.10)$$

$$J_n{}'(ne) = \frac{1}{2}\left(\frac{ne}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\left[1 - \frac{n+2}{n}\cdot\frac{n^2e^2}{2\cdot(2n+2)} + \frac{n+4}{n}\cdot\frac{n^4e^4}{2\cdot 4\cdot(2n+2)(2n+4)} - \dots\right]$$

(ก.11)

เมื่อ ne มีค่าเท่าใดก็ได้

จากนั้นพิจารณาพจน์ $\frac{1}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_L\right|^3}$ ในสมการ (5.13) ซึ่งในกรณีวัตถุชิ้นที่ 4 มีวงโคจรเป็นวงกลมในบทที่ 5 จะมีค่าตามสมการ (5.24)

$$\frac{1}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_L\right|^3} = \frac{1}{a_i^3}\sum_{n=0}^{\infty} P_n{}'(x)\left(\frac{a}{a_i}\right)^{n-1}$$

แต่ในกรณีที่วัตถุชิ้นที่ 4 มีวงโคจรเป็นวงรีจะเขียนเป็นได้เป็น

$$\frac{1}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_L\right|^3} = \frac{1}{r_i^3}\sum_{n=0}^{\infty} P_n{}'(x)\left(\frac{r_L}{r_i}\right)^{n-1} \qquad \text{(ก.12)}$$

เมื่อ $\vec{r}_i$ คือเวกเตอร์บอกตำแหน่งของวัตถุชิ้นที่ 4

$\vec{r}_L$ คือเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุดลากรองจ์ L_4

และ $x = \cos S_i$

เมื่อ S_i คือมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{r}_i$ และเวกเตอร์ $\vec{r}_L$

โดยจากรูปที่ 5.2 พบว่าขนาดของเวกเตอร์ $\vec{r}_L$ จะมีค่าเท่ากับ a เมื่อ a คือระยะห่างระหว่างวัตถุชิ้นที่ 1 กับวัตถุชิ้นที่ 2 ซึ่งในกรณีที่วัตถุชิ้นที่ 2 โคจรรอบวัตถุชิ้นที่ 1 เป็นวงกลมจะให้มีค่าเท่ากับระยะครึ่งแกนเอกของวัตถุชิ้นที่ 2 นั่นเอง ดังนั้น

$$r_L = a \qquad \text{(ก.13)}$$

เมื่อ a คือระยะห่างระหว่างวัตถุชิ้นที่ 1 กับวัตถุชิ้นที่ 2

จากสมการ (ก.6)

$$r_i = a_i(1 - e\cos u_i)$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{a_i(1 - e\cos u_i)} \qquad \text{(ก.14)}$$

จากการกระจายพหุนาม

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (ก.15)$$

เมื่อ $|x| < 1$

จะสามารถกระจายสมการ (ก.14) ได้เป็น

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{a_i(1 - e\cos u_i)} = \frac{1}{a_i}\left(1 + e\cos u_i + e^2\cos^2 u_i + ...\right) \qquad (ก.16)$$

จากนั้นพิจารณา $x = \cos S_i$ เมื่อ S_i คือมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{r}_i$ และเวกเตอร์ $\vec{r}_L$ ซึ่งในขณะนี้เปรียบได้ว่าวัตถุชิ้นที่ 4 จะหมุนรอบกรอบอ้างอิง $\varepsilon_i - \eta_i$ ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม m และกรอบอ้างอิง $\varepsilon_i - \eta_i$ ทำมุมกับกรอบอ้างอิง $x - y$ เป็นมุม ω_i ตามรูปที่ ก.1 นั่นคือเวกเตอร์ $\vec{r}_i$ จะทำมุมกับแกน x ของกรอบอ้างอิง $x - y$ เป็นมุม $l_i = mt + \omega_i$ ในขณะที่เวกเตอร์ $\vec{r}_L$ จะทำมุม 60 องศากับแกน x ของกรอบอ้างอิงดังที่พิจารณามาแล้วในบทที่ 5 ด้วยรูปที่ 5.2 ดังนั้น

$$S_i = mt + \omega_i - 60$$

นั่นคือ

$$x = \cos(mt + \omega_i - 60) \qquad (ก.17)$$

ดังนั้นจึงสามารถสรุปสิ่งที่ต้องปรับปรุงในกรณีที่ให้วัตถุชิ้นที่ 4 มีวงโคจรเป็นวงรีได้โดย จากจากสมการ (5.13)

$$\frac{d^2\delta\bar{r}^{(0)}}{dt^2} = Gm_i \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_L}{|\vec{r}_i - \vec{r}_L|^3}$$

จะต้องใช้ค่า $\vec{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$ เป็น

$$x_i = \varepsilon_i \cos\omega - \eta_i \sin\omega$$

$$y_i = \varepsilon_i \sin\omega + \eta_i \cos\omega$$

โดยที่

$$\varepsilon_i = a_i \cos u_i - a_i e$$

$$\eta_i = b_i \sin u_i$$

ด้วยความสัมพันธ์ระหว่างมุมกวาดเยื้อง และ มุมกวาดเฉลี่ย

$$\cos u_i = -\frac{1}{2}e + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}J_n'(ne)\cos l_i$$

$$\sin u_i = \frac{2}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}J_n(ne)\sin nl_i$$

ซึ่ง

$$J_n(ne) = \frac{e}{2}\left(\frac{ne}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\left[1-\frac{n^2e^2}{2\cdot(2n+2)}+\frac{n^4e^4}{2\cdot 4\cdot(2n+2)(2n+4)}-...\right]$$

$$J_n{}'(ne) = \frac{1}{2}\left(\frac{ne}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\left[1-\frac{n+2}{n}\cdot\frac{n^2e^2}{2\cdot(2n+2)}+\frac{n+4}{n}\cdot\frac{n^4e^4}{2\cdot 4\cdot(2n+2)(2n+4)}-...\right]$$

และพจน์ $\frac{1}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_L\right|^3}$ จะมีค่าเป็น

$$\frac{1}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_L\right|^3} = \frac{1}{r_i^3}\sum_{n=0}^{\infty}P_n{}'(x)\left(\frac{r_L}{r_i}\right)^{n-1}$$

เมื่อ $x = \cos(mt + \omega_i - 60)$

$$r_L = a$$

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{a_i(1-e\cos u_i)} = \frac{1}{a_i}\left(1+e\cos u_i + e^2\cos^2 u_i + ...\right)$$

ภาคผนวก ข

โปรแกรม MATHEMATICA 6.0

ในงานวิจัยนี้ได้ใช้โปรแกรม MATHEMATICA 6.0 เพื่อช่วยคำนวณในบางจุด จึงได้ยกโปรแกรมที่ได้เขียนขึ้นเพื่อคำนวณ โดยส่วนที่เป็นตัวหนาคือตัวโปรแกรมที่เขียนเพื่อทำการคำนวณ และตัวบางคือผลที่ได้จากการคำนวณนั้น

โปรแกรม 1

```
Series[(Cos[m*t] - A*Cos[π/3]) *
  Sum[∂x LegendreP[i, x]*A^(i-1), {i, 1, 5}], {A, 0, 3}]
```

$$\mathrm{Cos}[m\,t] + \left(-\frac{1}{2} + 3\,x\,\mathrm{Cos}[m\,t]\right) A + \frac{3}{2}\left(-x - \mathrm{Cos}[m\,t] + 5\,x^2\,\mathrm{Cos}[m\,t]\right) A^2 + \frac{1}{4}\left(3 - 15\,x^2 - 30\,x\,\mathrm{Cos}[m\,t] + 70\,x^3\,\mathrm{Cos}[m\,t]\right) A^3 + O[A]^4 \;/.$$

```
x -> Cos[m*t - 60°]
```

$$\mathrm{Cos}[m\,t] + \left(-\frac{1}{2} + 3\,\mathrm{Cos}[m\,t]\,\mathrm{Sin}[30° + m\,t]\right) A + \frac{3}{2}\left(-\mathrm{Cos}[m\,t] - \mathrm{Sin}[30° + m\,t] + 5\,\mathrm{Cos}[m\,t]\,\mathrm{Sin}[30° + m\,t]^2\right) A^2 + \frac{1}{4}\left(3 - 30\,\mathrm{Cos}[m\,t]\,\mathrm{Sin}[30° + m\,t] - 15\,\mathrm{Sin}[30° + m\,t]^2 + 70\,\mathrm{Cos}[m\,t]\,\mathrm{Sin}[30° + m\,t]^3\right) A^3 + O[A]^4$$

ใช้ในการคำนวณหาสมการ (5.32)

โปรแกรม 2

$$\int \left(\text{Cos}[m\,t] + \left(-\frac{1}{2} + 3\,\text{Cos}[m\,t]\,\text{Sin}[30\,° + m\,t]\right) A + \frac{3}{2}\left(-\text{Cos}[m\,t] - \text{Sin}[30\,° + m\,t] + 5\,\text{Cos}[m\,t]\,\text{Sin}[30\,° + m\,t]^2\right) A^2 + \frac{1}{4}\left(3 - 30\,\text{Cos}[m\,t]\,\text{Sin}[30\,° + m\,t] - 15\,\text{Sin}[30\,° + m\,t]^2 + 70\,\text{Cos}[m\,t]\,\text{Sin}[30\,° + m\,t]^3\right) A^3 + \text{O}[A]^4\right) dt$$

$$\frac{\text{Sin}[m\,t]}{m} + \left(\frac{t}{4} - \frac{3\sqrt{3}\,\text{Cos}[2\,m\,t]}{8\,m} + \frac{3\,\text{Sin}[2\,m\,t]}{8\,m}\right) A - \frac{1}{16\,m}\left(3\sqrt{3}\,\text{Cos}[m\,t] + 5\sqrt{3}\,\text{Cos}[3\,m\,t] - 9\,\text{Sin}[m\,t] + 5\,\text{Sin}[3\,m\,t]\right) A^2 + \left(\frac{9\,t}{32} - \frac{15\sqrt{3}\,\text{Cos}[2\,m\,t]}{64\,m} + \frac{5\,\text{Sin}[2\,m\,t]}{64\,m} - \frac{35\,\text{Sin}[4\,m\,t]}{64\,m}\right) A^3 + \text{O}[A]^4\ /.\ t \to 0$$

$$-\frac{3\sqrt{3}\,A}{8\,m} - \frac{\sqrt{3}\,A^2}{2\,m} - \frac{15\sqrt{3}\,A^3}{64\,m} + \text{O}[A]^4$$

ใช้ในการคำนวณหาสมการ (5.33) พร้อมทั้งหาค่าเงื่อนไขเริ่มต้นในสมการ (5.68)

โปรแกรม 3

$$\int\left(\frac{\text{Sin}[m\,t]}{m}+\left(\frac{t}{4}-\frac{3\sqrt{3}\,\text{Cos}[2\,m\,t]}{8\,m}+\frac{3\,\text{Sin}[2\,m\,t]}{8\,m}\right)A-\frac{\left(3\sqrt{3}\,\text{Cos}[m\,t]+5\sqrt{3}\,\text{Cos}[3\,m\,t]-9\,\text{Sin}[m\,t]+5\,\text{Sin}[3\,m\,t]\right)A^2}{16\,m}+\left(\frac{9\,t}{32}-\frac{15\sqrt{3}\,\text{Cos}[2\,m\,t]}{64\,m}+\frac{5\,\text{Sin}[2\,m\,t]}{64\,m}-\frac{35\,\text{Sin}[4\,m\,t]}{64\,m}\right)A^3+O[A]^4\right)dt$$

$$-\frac{\text{Cos}[m\,t]}{m^2}+\frac{\left(m\,t^2-\frac{3\,\text{Cos}[2\,m\,t]}{2\,m}-\frac{3\sqrt{3}\,\text{Sin}[2\,m\,t]}{2\,m}\right)A}{8\,m}-\frac{\left(\frac{9\,\text{Cos}[m\,t]}{m}-\frac{5\,\text{Cos}[3\,m\,t]}{3\,m}+\frac{3\sqrt{3}\,\text{Sin}[m\,t]}{m}+\frac{5\,\text{Sin}[3\,m\,t]}{\sqrt{3}\,m}\right)A^2}{16\,m}+\frac{\left(9\,m\,t^2-\frac{5\,\text{Cos}[2\,m\,t]}{2\,m}+\frac{35\,\text{Cos}[4\,m\,t]}{4\,m}-\frac{15\sqrt{3}\,\text{Sin}[2\,m\,t]}{2\,m}\right)A^3}{64\,m}+O[A]^4\ /.$$

$$t\to 0$$

$$-\frac{1}{m^2}-\frac{3\,A}{16\,m^2}-\frac{11\,A^2}{24\,m^2}+\frac{25\,A^3}{256\,m^2}+O[A]^4$$

ใช้ในการคำนวณหาสมการ (5.34) พร้อมทั้งหาค่าเงื่อนไขเริ่มต้นในสมการ (5.69)

โปรแกรม 4

```
Series[(Sin[m*t] - A*Sin[π/3]) *
  Sum[∂x LegendreP[i, x] * A^(i-1), {i, 1, 5}], {A, 0, 3}]
```

$$\mathrm{Sin}[m\,t]+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+3\,x\,\mathrm{Sin}[m\,t]\right)A-\frac{3}{2}\left(\sqrt{3}\,x+\mathrm{Sin}[m\,t]-5\,x^2\,\mathrm{Sin}[m\,t]\right)A^2+\frac{1}{4}\left(3\sqrt{3}-15\sqrt{3}\,x^2-30\,x\,\mathrm{Sin}[m\,t]+70\,x^3\,\mathrm{Sin}[m\,t]\right)A^3+O[A]^4\ /.$$

```
x -> Cos[m*t - 60°]
```

$$\mathrm{Sin}[m\,t]+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+3\,\mathrm{Sin}[m\,t]\,\mathrm{Sin}[30^\circ+m\,t]\right)A-\frac{3}{2}\left(\mathrm{Sin}[m\,t]+\sqrt{3}\,\mathrm{Sin}[30^\circ+m\,t]-5\,\mathrm{Sin}[m\,t]\,\mathrm{Sin}[30^\circ+m\,t]^2\right)A^2+\frac{1}{4}\left(3\sqrt{3}-30\,\mathrm{Sin}[m\,t]\,\mathrm{Sin}[30^\circ+m\,t]-15\sqrt{3}\,\mathrm{Sin}[30^\circ+m\,t]^2+70\,\mathrm{Sin}[m\,t]\,\mathrm{Sin}[30^\circ+m\,t]^3\right)A^3+O[A]^4$$

ใช้ในการคำนวณหาสมการ (5.35)

โปรแกรม 5

$$\int\left(\text{Sin}[m\,t]+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+3\,\text{Sin}[m\,t]\,\text{Sin}[30\,°+m\,t]\right)A-\frac{3}{2}\left(\text{Sin}[m\,t]+\sqrt{3}\,\text{Sin}[30\,°+m\,t]-5\,\text{Sin}[m\,t]\,\text{Sin}[30\,°+m\,t]^2\right)A^2+\frac{1}{4}\left(3\sqrt{3}-30\,\text{Sin}[m\,t]\,\text{Sin}[30\,°+m\,t]-15\sqrt{3}\,\text{Sin}[30\,°+m\,t]^2+70\,\text{Sin}[m\,t]\,\text{Sin}[30\,°+m\,t]^3\right)A^3+O[A]^4\right)dt$$

$$-\frac{\text{Cos}[m\,t]}{m}+\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\,t-\frac{3\,\text{Cos}[2\,m\,t]}{2\,m}-\frac{3\sqrt{3}\,\text{Sin}[2\,m\,t]}{2\,m}\right)A-\frac{3}{2}\left(\frac{5\,\text{Cos}[m\,t]}{8\,m}-\frac{5\,\text{Cos}[3\,m\,t]}{24\,m}-\frac{\sqrt{3}\,\text{Sin}[m\,t]}{8\,m}+\frac{5\,\text{Sin}[3\,m\,t]}{8\sqrt{3}\,m}\right)A^2+\frac{1}{32}\left(9\sqrt{3}\,t-\frac{25\,\text{Cos}[2\,m\,t]}{2\,m}+\frac{35\,\text{Cos}[4\,m\,t]}{2\,m}-\frac{15\sqrt{3}\,\text{Sin}[2\,m\,t]}{2\,m}\right)A^3+O[A]^4\;/.\;t\to 0$$

$$-\frac{1}{m}-\frac{3\,A}{8\,m}-\frac{5\,A^2}{8\,m}+\frac{5\,A^3}{32\,m}+O[A]^4$$

ใช้ในการคำนวณหาสมการ (5.36) พร้อมทั้งหาค่าเงื่อนไขเริ่มต้นในสมการ (5.70)

โปรแกรม 6

$$\int\left(-\frac{\text{Cos}[m\,t]}{m}+\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\;t-\frac{3\,\text{Cos}[2\,m\,t]}{2\,m}-\frac{3\sqrt{3}\;\text{Sin}[2\,m\,t]}{2\,m}\right)A-\frac{3}{2}\left(\frac{5\,\text{Cos}[m\,t]}{8\,m}-\frac{5\,\text{Cos}[3\,m\,t]}{24\,m}-\frac{\sqrt{3}\;\text{Sin}[m\,t]}{8\,m}+\frac{5\,\text{Sin}[3\,m\,t]}{8\sqrt{3}\;m}\right)A^2+\frac{1}{32}\left(9\sqrt{3}\;t-\frac{25\,\text{Cos}[2\,m\,t]}{2\,m}+\frac{35\,\text{Cos}[4\,m\,t]}{2\,m}-\frac{15\sqrt{3}\;\text{Sin}[2\,m\,t]}{2\,m}\right)A^3+O[A]^4\right)dt$$

$$-\frac{\text{Sin}[m\,t]}{m^2}+\frac{\left(\sqrt{3}\;m\,t^2+\frac{3\sqrt{3}\;\text{Cos}[2\,m\,t]}{2\,m}-\frac{3\,\text{Sin}[2\,m\,t]}{2\,m}\right)A}{8\,m}+\frac{\left(-\frac{3\sqrt{3}\;\text{Cos}[m\,t]}{m}+\frac{5\,\text{Cos}[3\,m\,t]}{\sqrt{3}\;m}-\frac{15\,\text{Sin}[m\,t]}{m}+\frac{5\,\text{Sin}[3\,m\,t]}{3\,m}\right)A^2}{16\,m}+\frac{\left(9\sqrt{3}\;m\,t^2+\frac{15\sqrt{3}\;\text{Cos}[2\,m\,t]}{2\,m}-\frac{25\,\text{Sin}[2\,m\,t]}{2\,m}+\frac{35\,\text{Sin}[4\,m\,t]}{4\,m}\right)A^3}{64\,m}+O[A]^4\;/.$$

$$t\to 0$$

$$\frac{3\sqrt{3}\;A}{16\,m^2}+\frac{\left(\frac{5}{\sqrt{3}\;m}-\frac{3\sqrt{3}}{m}\right)A^2}{16\,m}+\frac{15\sqrt{3}\;A^3}{128\,m^2}+O[A]^4$$

ใช้ในการคำนวณหาสมการ (5.37) พร้อมทั้งหาค่าเงื่อนไขเริ่มต้นในสมการ (5.71)

โปรแกรม 7

$$\int\Bigg(\left(-\frac{1}{4}\,\mathrm{G0}\left(\mathrm{c2}+\mathrm{c1}\,t-\frac{\mathrm{Cos}[m\,t]}{m^2}\right)+\frac{3}{4}\sqrt{3}\,\mathrm{G0}\left(\mathrm{d2}+\mathrm{d1}\,t-\frac{\mathrm{Sin}[m\,t]}{m^2}\right)\right)+$$

$$\left(\frac{3\sqrt{3}\,\mathrm{G0}\left(\sqrt{3}\,m\,t^2+\frac{3\sqrt{3}\,\mathrm{Cos}[2\,m\,t]}{2\,m}-\frac{3\,\mathrm{Sin}[2\,m\,t]}{2\,m}\right)}{32\,m}-\frac{\mathrm{G0}\left(m\,t^2-\frac{3\,\mathrm{Cos}[2\,m\,t]}{2\,m}-\frac{3\sqrt{3}\,\mathrm{Sin}[2\,m\,t]}{2\,m}\right)}{32\,m}\right)A+$$

$$\left(\frac{3\sqrt{3}\,\mathrm{G0}\left(-\frac{3\sqrt{3}\,\mathrm{Cos}[m\,t]}{m}+\frac{5\,\mathrm{Cos}[3\,m\,t]}{\sqrt{3}\,m}-\frac{15\,\mathrm{Sin}[m\,t]}{m}+\frac{5\,\mathrm{Sin}[3\,m\,t]}{3\,m}\right)}{64\,m}+\frac{\mathrm{G0}\left(\frac{9\,\mathrm{Cos}[m\,t]}{m}-\frac{5\,\mathrm{Cos}[3\,m\,t]}{3\,m}+\frac{3\sqrt{3}\,\mathrm{Sin}[m\,t]}{m}+\frac{5\,\mathrm{Sin}[3\,m\,t]}{\sqrt{3}\,m}\right)}{64\,m}\right)A^2+$$

$$\left(-\frac{\mathrm{G0}\left(9\,m\,t^2-\frac{5\,\mathrm{Cos}[2\,m\,t]}{2\,m}+\frac{35\,\mathrm{Cos}[4\,m\,t]}{4\,m}-\frac{15\sqrt{3}\,\mathrm{Sin}[2\,m\,t]}{2\,m}\right)}{256\,m}+\frac{3\sqrt{3}\,\mathrm{G0}\left(9\sqrt{3}\,m\,t^2+\frac{15\sqrt{3}\,\mathrm{Cos}[2\,m\,t]}{2\,m}-\frac{25\,\mathrm{Sin}[2\,m\,t]}{2\,m}+\frac{35\,\mathrm{Sin}[4\,m\,t]}{4\,m}\right)}{256\,m}\right)A^3+\mathrm{O}[A]^4\Bigg)\,dt$$

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{G0}\left(-\mathrm{c2}\,t-\frac{\mathrm{c1}\,t^2}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}\,t\,(2\,\mathrm{d2}+\mathrm{d1}\,t)+\frac{3\sqrt{3}\,\mathrm{Cos}[m\,t]}{m^3}+\frac{\mathrm{Sin}[m\,t]}{m^3}\right)+$$

$$\frac{\mathrm{G0}\left(\frac{8\,m^2\,t^3}{3}+\frac{3\sqrt{3}\,\mathrm{Cos}[2\,m\,t]}{2\,m}+\frac{15\,\mathrm{Sin}[2\,m\,t]}{2\,m}\right)A}{32\,m^2}+$$

$$\frac{\mathrm{G0}\left(\frac{63\sqrt{3}\,\mathrm{Cos}[m\,t]}{m}-\frac{10\,\mathrm{Cos}[3\,m\,t]}{\sqrt{3}\,m}-\frac{27\,\mathrm{Sin}[m\,t]}{m}+\frac{20\,\mathrm{Sin}[3\,m\,t]}{3\,m}\right)A^2}{96\,m^2}+$$

$$\frac{\mathrm{G0}\left(96\,m^2\,t^3+\frac{60\sqrt{3}\,\mathrm{Cos}[2\,m\,t]}{m}-\frac{105\sqrt{3}\,\mathrm{Cos}[4\,m\,t]}{4\,m}+\frac{140\,\mathrm{Sin}[2\,m\,t]}{m}-\frac{35\,\mathrm{Sin}[4\,m\,t]}{4\,m}\right)A^3}{1024\,m^2}+\mathrm{O}[A]^4\;/.$$

$$t\to 0$$

$$\frac{3\sqrt{3}\,\mathrm{G0}}{4\,m^3}+\frac{3\sqrt{3}\,\mathrm{G0}\,A}{64\,m^3}+\frac{\mathrm{G0}\left(-\frac{10}{\sqrt{3}\,m}+\frac{63\sqrt{3}}{m}\right)A^2}{96\,m^2}+\frac{135\sqrt{3}\,\mathrm{G0}\,A^3}{4096\,m^3}+\mathrm{O}[A]^4$$

ใช้ในการคำนวณหาสมการ (5.50) พร้อมทั้งหาค่าเงื่อนไขเริ่มต้นในสมการ (5.84)

โปรแกรม 8

$$\int\left(\frac{1}{4}\,G0\left(-c2\,t-\frac{c1\,t^2}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}\,t\,(2\,d2+d1\,t)+\frac{3\sqrt{3}\,Cos[m\,t]}{m^3}+\frac{Sin[m\,t]}{m^3}\right)+\right.$$
$$\frac{G0\left(\frac{8\,m^2\,t^3}{3}+\frac{3\sqrt{3}\,Cos[2\,m\,t]}{2\,m}+\frac{15\,Sin[2\,m\,t]}{2\,m}\right)A}{32\,m^2}+$$
$$\frac{G0\left(\frac{63\sqrt{3}\,Cos[m\,t]}{m}-\frac{10\,Cos[3\,m\,t]}{\sqrt{3}\,m}-\frac{27\,Sin[m\,t]}{m}+\frac{20\,Sin[3\,m\,t]}{3\,m}\right)A^2}{96\,m^2}+$$
$$\left.\frac{G0\left(96\,m^2\,t^3+\frac{60\sqrt{3}\,Cos[2\,m\,t]}{m}-\frac{105\sqrt{3}\,Cos[4\,m\,t]}{4\,m}+\frac{140\,Sin[2\,m\,t]}{m}-\frac{35\,Sin[4\,m\,t]}{4\,m}\right)A^3}{1024\,m^2}+O[A]^4\right)$$
$$dt$$

$$\frac{G0\left(\left(-c2+3\sqrt{3}\,d2\right)m^3\,t^2+\frac{1}{3}\left(-c1+3\sqrt{3}\,d1\right)m^3\,t^3-\frac{2\,Cos[m\,t]}{m}+\frac{6\sqrt{3}\,Sin[m\,t]}{m}\right)}{8\,m^3}+$$
$$\frac{G0\left(4\,m^3\,t^4-\frac{45\,Cos[2\,m\,t]}{2\,m}+\frac{9\sqrt{3}\,Sin[2\,m\,t]}{2\,m}\right)A}{192\,m^3}+$$
$$\frac{G0\left(\frac{81\,Cos[m\,t]}{m}-\frac{20\,Cos[3\,m\,t]}{3\,m}+\frac{189\sqrt{3}\,Sin[m\,t]}{m}-\frac{10\,Sin[3\,m\,t]}{\sqrt{3}\,m}\right)A^2}{288\,m^3}+$$
$$\frac{G0\left(96\,m^3\,t^4-\frac{280\,Cos[2\,m\,t]}{m}+\frac{35\,Cos[4\,m\,t]}{4\,m}+\frac{120\sqrt{3}\,Sin[2\,m\,t]}{m}-\frac{105\sqrt{3}\,Sin[4\,m\,t]}{4\,m}\right)A^3}{4096\,m^3}+O[A]^4\;/.$$
$$t\to 0$$

$$-\frac{G0}{4\,m^4}-\frac{15\,G0\,A}{128\,m^4}+\frac{223\,G0\,A^2}{864\,m^4}-\frac{1085\,G0\,A^3}{16\,384\,m^4}+O[A]^4$$

ใช้ในการคำนวณหาสมการ (5.51) พร้อมทั้งหาค่าเงื่อนไขเริ่มต้นในสมการ (5.85)

โปรแกรม 9

$$\int\left(\left(\frac{3}{4}\sqrt{3}\ \text{G0}\left(\text{c2}+\text{c1 t}-\frac{\text{Cos[m t]}}{\text{m}^2}\right)-\frac{5}{4}\text{G0}\left(\text{d2}+\text{d1 t}-\frac{\text{Sin[m t]}}{\text{m}^2}\right)\right)+\left(-\frac{5\ \text{G0}\left(\sqrt{3}\ \text{m t}^2+\frac{3\sqrt{3}\ \text{Cos[2 m t]}}{2\ \text{m}}-\frac{3\,\text{Sin[2 m t]}}{2\ \text{m}}\right)}{32\ \text{m}}+\frac{3\sqrt{3}\ \text{G0}\left(\text{m t}^2-\frac{3\,\text{Cos[2 m t]}}{2\ \text{m}}-\frac{3\sqrt{3}\ \text{Sin[2 m t]}}{2\ \text{m}}\right)}{32\ \text{m}}\right)\text{A}+\left(-\frac{5\ \text{G0}\left(-\frac{3\sqrt{3}\ \text{Cos[m t]}}{\text{m}}+\frac{5\,\text{Cos[3 m t]}}{\sqrt{3}\ \text{m}}-\frac{15\,\text{Sin[m t]}}{\text{m}}+\frac{5\,\text{Sin[3 m t]}}{3\ \text{m}}\right)}{64\ \text{m}}-\frac{3\sqrt{3}\ \text{G0}\left(\frac{9\,\text{Cos[m t]}}{\text{m}}-\frac{5\,\text{Cos[3 m t]}}{3\ \text{m}}+\frac{3\sqrt{3}\ \text{Sin[m t]}}{\text{m}}+\frac{5\,\text{Sin[3 m t]}}{\sqrt{3}\ \text{m}}\right)}{64\ \text{m}}\right)\text{A}^2+\left(\frac{3\sqrt{3}\ \text{G0}\left(9\ \text{m t}^2-\frac{5\,\text{Cos[2 m t]}}{2\ \text{m}}+\frac{35\,\text{Cos[4 m t]}}{4\ \text{m}}-\frac{15\sqrt{3}\ \text{Sin[2 m t]}}{2\ \text{m}}\right)}{256\ \text{m}}-\frac{5\ \text{G0}\left(9\sqrt{3}\ \text{m t}^2+\frac{15\sqrt{3}\ \text{Cos[2 m t]}}{2\ \text{m}}-\frac{25\,\text{Sin[2 m t]}}{2\ \text{m}}+\frac{35\,\text{Sin[4 m t]}}{4\ \text{m}}\right)}{256\ \text{m}}\right)\text{A}^3+\text{O[A]}^4\right)d\text{t}$$

$$\frac{1}{4}\text{G0}\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\ \text{t}\ (2\ \text{c2}+\text{c1 t})-\frac{5}{2}\text{t}\ (2\ \text{d2}+\text{d1 t})-\frac{5\,\text{Cos[m t]}}{\text{m}^3}-\frac{3\sqrt{3}\ \text{Sin[m t]}}{\text{m}^3}\right)-\frac{\left(\text{G0}\left(\frac{\text{m}^2\text{t}^3}{\sqrt{3}}-\frac{3\,\text{Cos[2 m t]}}{2\ \text{m}}+\frac{3\sqrt{3}\ \text{Sin[2 m t]}}{\text{m}}\right)\right)\text{A}}{16\ \text{m}^2}-\frac{\left(\text{G0}\left(\frac{72\,\text{Cos[m t]}}{\text{m}}-\frac{35\,\text{Cos[3 m t]}}{3\ \text{m}}+\frac{18\sqrt{3}\ \text{Sin[m t]}}{\text{m}}+\frac{5\,\text{Sin[3 m t]}}{\sqrt{3}\ \text{m}}\right)\right)\text{A}^2}{96\ \text{m}^2}-\frac{1}{1024\ \text{m}^2}\left(\text{G0}\left(24\sqrt{3}\ \text{m}^2\ \text{t}^3-\frac{10\,\text{Cos[2 m t]}}{\text{m}}-\frac{175\,\text{Cos[4 m t]}}{4\ \text{m}}+\frac{90\sqrt{3}\ \text{Sin[2 m t]}}{\text{m}}-\frac{105\sqrt{3}\ \text{Sin[4 m t]}}{4\ \text{m}}\right)\right)\text{A}^3+\text{O[A]}^4\ /.\ \text{t}\to 0$$

$$-\frac{5\ \text{G0}}{4\ \text{m}^3}+\frac{3\ \text{G0 A}}{32\ \text{m}^3}-\frac{181\ \text{G0 A}^2}{288\ \text{m}^3}+\frac{215\ \text{G0 A}^3}{4096\ \text{m}^3}+\text{O[A]}^4$$

ใช้ในการคำนวณหาสมการ (5.52) พร้อมทั้งหาค่าเงื่อนไขเริ่มต้นในสมการ (5.86)

โปรแกรม 10

$$\int\left(\frac{1}{4}\,G0\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\;t\,(2\,c2+c1\,t)-\frac{5}{2}\,t\,(2\,d2+d1\,t)-\frac{5\,Cos[m\,t]}{m^3}-\frac{3\sqrt{3}\;Sin[m\,t]}{m^3}\right)-\frac{\left(G0\left(\frac{m^2\,t^3}{\sqrt{3}}-\frac{3\,Cos[2\,m\,t]}{2\,m}+\frac{3\sqrt{3}\;Sin[2\,m\,t]}{m}\right)\right)A}{16\,m^2}-\frac{\left(G0\left(\frac{72\,Cos[m\,t]}{m}-\frac{35\,Cos[3\,m\,t]}{3\,m}+\frac{18\sqrt{3}\;Sin[m\,t]}{m}+\frac{5\,Sin[3\,m\,t]}{\sqrt{3}\;m}\right)\right)A^2}{96\,m^2}-\frac{1}{1024\,m^2}\left(G0\left(24\sqrt{3}\;m^2\,t^3-\frac{10\,Cos[2\,m\,t]}{m}-\frac{175\,Cos[4\,m\,t]}{4\,m}+\frac{90\sqrt{3}\;Sin[2\,m\,t]}{m}-\frac{105\sqrt{3}\;Sin[4\,m\,t]}{4\,m}\right)\right)A^3+O[A]^4\right)dt$$

$$-\frac{1}{8\,m^3}G0\left(\left(-3\sqrt{3}\;c2+5\,d2\right)m^3\,t^2+\frac{1}{3}\left(-3\sqrt{3}\;c1+5\,d1\right)m^3\,t^3-\frac{6\sqrt{3}\;Cos[m\,t]}{m}+\frac{10\,Sin[m\,t]}{m}\right)-\frac{\left(G0\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\;m^3\,t^4-\frac{9\sqrt{3}\;Cos[2\,m\,t]}{m}-\frac{9\,Sin[2\,m\,t]}{2\,m}\right)\right)A}{96\,m^3}-\frac{\left(G0\left(-\frac{54\sqrt{3}\;Cos[m\,t]}{m}-\frac{5\,Cos[3\,m\,t]}{\sqrt{3}\;m}+\frac{216\,Sin[m\,t]}{m}-\frac{35\,Sin[3\,m\,t]}{3\,m}\right)\right)A^2}{288\,m^3}+\frac{1}{4096\,m^3}G0\left(-24\sqrt{3}\;m^3\,t^4+\frac{180\sqrt{3}\;Cos[2\,m\,t]}{m}-\frac{105\sqrt{3}\;Cos[4\,m\,t]}{4\,m}+\frac{20\,Sin[2\,m\,t]}{m}+\frac{175\,Sin[4\,m\,t]}{4\,m}\right)A^3+O[A]^4\;/.\;t\to 0$$

$$\frac{3\sqrt{3}\;G0}{4\,m^4}+\frac{3\sqrt{3}\;G0\,A}{32\,m^4}-\frac{\left(G0\left(-\frac{5}{\sqrt{3}\;m}-\frac{54\sqrt{3}}{m}\right)\right)A^2}{288\,m^3}+\frac{615\sqrt{3}\;G0\,A^3}{16\,384\,m^4}+O[A]^4$$

ใช้ในการคำนวณหาสมการ (5.53) พร้อมทั้งหาค่าเงื่อนไขเริ่มต้นในสมการ (5.87)

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

ชื่อ นามสกุล

นาย ณรัล ลือวรศิริกุล

วัน เดือน ปี และสถานที่เกิด

18 ตุลาคม 2525 จังหวัดกรุงเทพฯ

ประวัติการศึกษา

สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรี วิทยาศาสตรบัณฑิต ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปีการศึกษา 2546