ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมแบบกระชับขอบเขตสำหรับปัญหาการนำความร้อน

นางสาวจุฑาทรัพย์ ปรมีศนาภรณ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2549

ISBN 974-14-2536-8

BODY-FITTED FINITE VOLUME METHOD FOR HEAT CONDUCTION PROBLEMS

Miss Juthasup Porameesanaporn

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering Program in Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2006
ISBN 974-14-2536-8

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมแบบกระชับขอบเขตสำหรับปัญหาการนำความร้อน
โดย	นางสาวจุฑาทรัพย์ ปรมีศนาภรณ์
สาขาวิชา	วิศวกรรมเครื่องกล
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดี คณะวิศวกรรมศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ตุลย์ มณีวัฒนา)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์)

.... กรรมการ

(ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ)

.... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กุณฑินี มณีรัตน์)

จุฑาทรัพย์ ปรมีศนาภรณ์ : ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมแบบกระชับขอบเขตสำหรับปัญหาการนำความร้อน. (BODY-FITTED FINITE VOLUME METHOD FOR HEAT CONDUCTION PROBLEMS) อ. ที่ปรึกษา : ผศ. ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์, 104 หน้า. ISBN 974-14-2536-8

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบไฟไนต์วอลุมบนระบบพิกัดกระชับขอบเขต สำหรับใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนที่มีรูปร่างลักษณะซับซ้อนในสภาวะอยู่ตัวและสภาวะไม่อยู่ตัว การคำนวณแบ่งเป็นสองขั้นตอนได้แก่การสร้างกริดและระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม ในส่วนของขั้นตอนสร้างกริดนั้น กริดเริ่มต้นจะถูกสร้างด้วยวิธีเชิงพีชคณิตแล้วปรับกริดให้มีความสม่ำเสมอด้วยวิธีแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติกซึ่งมีสมการปัวส์ซองเป็นสมการครอบคลุมของการสร้างกริด จากกริดที่สร้างได้ในขั้นตอนแรกนี้ จะสามารถคำนวณหาสัมประสิทธิ์ของรูปร่าง (geometric coefficient) เพื่อใช้ในการคำนวณในขั้นตอนต่อไป และในส่วนขั้นตอนของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมนั้นจะทำการคำนวณบนพื้นที่การคำนวณ (computational space) โดยการแปลงสมการครอบคลุมและเงื่อนไขขอบเขตจากพิกัดคาร์ทีเซียนให้มาอยู่บนพิกัดกระชับขอบเขตโดยใช้กฎลูกโซ่ (chain rule) จากนั้นทำการดิสครีไทซ์สมการครอบคลุมซึ่งอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมเพื่อแปลงให้อยู่ในรูปสมการเชิงพีชคณิต สุดท้ายทำการแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตด้วยวิธี tri-diagonal matrix algorithm (TDMA)

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์จะทำโดยการนำผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณไปเปรียบเทียบกับปัญหาอย่างง่ายที่มีผลเฉลยแม่นตรง ผลการคำนวณ หรือผลการทดลองที่ได้มีผู้ทำมาแล้ว สำหรับปัญหาที่นำมาเปรียบเทียบสามารถแบ่งออกได้เป็นสองส่วนคือปัญหาการนำความร้อนที่สภาวะอยู่ตัวได้แก่ วงกลมซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกัน วงกลมซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางเยื้องกัน แผ่นสี่เหลี่ยมมีรูวงกลมตรงกลาง แผ่นสี่เหลี่ยมที่มีเงื่อนไขขอบเป็นฟังก์ชันของซายน์และแผ่นสามเหลี่ยมที่มีการผลิตความร้อน เป็นต้น และปัญหาการนำความร้อนที่สภาวะไม่อยู่ตัวได้แก่ แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสและแผ่นสี่เหลี่ยมคางหมูเจาะรูวงกลม เนื้อหาในวิทยานิพนธ์นี้แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมบนระบบพิกัดกระชับขอบเขต ที่สามารถใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนที่มีรูปร่างลักษณะซับซ้อนได้อย่างแม่นยำ

ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่อนิสิต จุฑาทรัพย์ ปรมีศนาภรณ์
สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา
ปีการศึกษา 2549

4670720321 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING
KEY WORD: BODY-FITTED / FINITE VOLUME / HEAT CONDUCTION

JUTHASUP PORAMEESANAPORN : BODY-FITTED FINITE VOLUME METHOD FOR HEAT CONDUCTION PROBLEMS. THESIS ADVISOR : ASST. PROF. SOMPONG PUTIVISUTISAK, Ph.D. 104 pp. ISBN 974-14-2536-8.

This thesis presents a finite volume method based on the body-fitted coordinates (BFC) for solving steady and unsteady heat conduction problems in complex geometries. There are two parts of calculation: grid generation and the finite volume method. For the grid generation part, the initial grid is generated by the transfinite interpolation (TFI) and then the smoothness of the grid is adjusted by the elliptic grid generation technique based on the poisson equation. Geometric coefficients are calculated from this part. For the finite volume method, the computational space is used for calculation. The governing equations in Cartesian coordinates must be transformed into those in body-fitted coordinates and then discretized by the finite volume method. Finally, the algebraic equation system is solved by the line-by-line TDMA method.

The computer program is validated by solving simple problems, of which exact solutions, experimental or other numerical results are available. Two types of problems - steady and unsteady heat transfer problems, are used for comparison. Firstly, the test cases include steady heat conduction in concentric circular plate, eccentric circular plate, square plate with circular hole, rectangle with sin function boundary condition, and triangle with heat generation. Secondly, the test cases include unsteady heat conduction in square and trapezoid with circular hole. The accuracy results show that the finite volume method based on body-fitted coordinates can accurately solve problems in complex geometries.

Department Mechanical Engineering	Student's Signature Juthasup Porameesanaporn
Field of Study Mechanical Engineering	Advisor's Signature
Academic Year 2006	

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์เป็นอย่างสูง ที่ท่านได้ให้ความรู้ คำแนะนำ ตลอดจนข้อคิดที่มีคุณค่ายิ่งในการทำวิจัย นอกจากนี้ท่านยังได้ถ่ายทอดข้อคิดหลายสิ่งหลายอย่างที่มีคุณค่ายิ่งเกี่ยวกับการทำงานและการดำเนินชีวิตของผู้วิจัย

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ตุลย์ มณีวัฒนา ประธานกรรมการ ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กุณฑินี มณีรัตน์ กรรมการ ที่ได้ให้คำแนะนำและถ่ายทอดความรู้ตลอดระยะเวลาในการทำงานวิจัยนี้ ซึ่งทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ท้ายสุดนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดามารดาที่ให้คำปรึกษา เป็นกำลังใจและสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยมาโดยตลอด อนึ่งประโยชน์และคุณค่าอันใดที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์นี้ขอมอบเป็นกตัญญูตาบูชาแด่บิดามารดา ครูอาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

สารบัญ

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

หน้า

สารบัญภาพ

สารบัญภาพ (ต่อ)

สารบัญภาพ (ต่อ)

หน้า

สารบัญภาพ (ต่อ)

คำอธิบายสัญลักษณ์

a	สัมประสิทธิ์ในสมการพีชคณิต
A	พื้นที่หน้าตัดของปริมาตรควบคุม
b	พจน์ไม่ตั้งฉากในสมการพีชคณิต
C_p	ค่าความร้อนจำเพาะที่ความดันคงที่
d	เส้นผ่านศูนย์กลางภายใน
D	เส้นผ่านศูนย์กลางภายนอก
E_{st}	พลังงานสะสมภายในปริมาตรควบคุม
E_{gen}	พลังงานที่ถูกสร้างขึ้นภายในปริมาตรควบคุม
f_p	อัตราส่วนการถ่วงน้ำหนักของอุณหภูมิ
I	ค่าค่ามากที่สุดของ ξ
J	ค่าค่ามากที่สุดของ η และจาร์โคเบียน
k	ค่าคงที่การนำความร้อน
L	ความยาวของวัตถุ
M	จำนวนข้อมูลที่นำมาใช้ในการประมาณค่า
N	จำนวนข้อมูลที่นำมาใช้ในการประมาณค่า
P	ฟังก์ชันควบคุม
$\overline{Pe}$	ระยะจากศูนย์กลางไปยังขอบของปริมาตรควบคุม
$\overline{PE}$	ระยะจากศูนย์กลางของปริมาตรควบคุมหนึ่งไปยังศูนย์กลางของปริมาตรควบคุมที่อยู่ติดกัน
q_0	อัตราการผลิตความร้อนจากแหล่งความร้อนภายในปริมาตรควบคุมต่อหนึ่งปริมาตร
Q	ฟังก์ชันควบคุมและความร้อนที่ถ่ายเทผ่านปริมาตรควบคุม

คำอธิบายสัญลักษณ์ (ต่อ)

r ตัวแปรอิสระบนพิกัดทรงกระบอกและรัศมีของวงกลม

R ฟังก์ชันควบคุม

R_1 รัศมีภายในวงกลม

R_2 รัศมีภายนอกวงกลม

S Shape factor

S_ϕ Source term

t เวลา

T อุณหภูมิ

T_l ค่าคงที่

w ความกว้างของสี่เหลี่ยมจัตุรัส

x ตัวแปรอิสระบนพิกัดคาร์ทีเซียนในแนวราบ

y ตัวแปรอิสระบนพิกัดคาร์ทีเซียนในแนวดิ่ง

z ตัวแปรอิสระบนพิกัดคาร์ทีเซียนในแนวลึกและระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลมสองวงที่เยื้องศูนย์กัน

ϕ Velocity potential function และ Blending function

ψ Stream function และ Blending function

α ค่าคงที่และสัมประสิทธิ์ของสมการครอบคลุมการสร้างกริด

β สัมประสิทธิ์ของสมการครอบคลุมการสร้างกริด

γ สัมประสิทธิ์ของสมการครอบคลุมการสร้างกริด

ξ ตัวแปรอิสระบนพิกัดกระชับขอบเขต

η ตัวแปรอิสระบนพิกัดกระชับขอบเขต

คำอธิบายสัญลักษณ์ (ต่อ)

ζ ตัวแปรอิสระบนพิกัดกระชับขอบเขต

ρ ความหนาแน่น

ω ตัวประกอบ over-relaxation

θ ตัวแปรอิสระบนพิกัดทรงกระบอกและคาการถ่วงน้ำหนักของเวลา

$\prod$ สัญลักษณ์การคูณ

Σ สัญลักษณ์การบวก

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

โดยทั่วไปปัญหาต่างๆทางวิศวกรรมศาสตร์มักเกิดขึ้นในโดเมนที่มีรูปร่างลักษณะที่ซับซ้อน ยกตัวอย่างเช่น การไหลของอากาศผ่านปีกเครื่องบิน การไหลของน้ำผ่านวาล์ว การกระจายอุณหภูมิในครีบระบายความร้อน ความเค้นของใบพัดเครื่องยนต์กังหันก๊าซ การนำความร้อนในกระบอกสูบเครื่องยนต์ และการไหลของอากาศภายในห้อง เป็นต้น การศึกษาและการวิเคราะห์ปัญหาที่มีรูปร่างลักษณะซับซ้อนเหล่านี้ไม่สามารถทำได้โดยวิธี ทางคณิตศาสตร์ชั้นสูงเพื่อหาผลเฉลยแม่นตรง (exact solution) ได้ ดังนั้น ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical method) (เช่น วิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite difference method) วิธีไฟไนต์วอลุม (Finite volume method) และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element method) เป็นต้น) จึงมีบทบาทเป็นอย่างมากในการแก้ปัญหาต่างๆที่มีรูปร่างลักษณะซับซ้อนเหล่านี้ ทั้งนี้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแต่ละวิธีนั้นต่างก็ออกแบบมาให้มีขั้นตอนการคำนวณหาผลเฉลยที่แตกต่างกันตามความเหมาะสมของแต่ละลักษณะทางกายภาพของปัญหา เราจึงควรเลือกระเบียบวิธีเชิงตัวเลขให้เหมาะสมกับปัญหาที่ทำการพิจารณา

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่นิยมนำมาใช้แก้ปัญหาที่มีรูปร่างลักษณะที่ซับซ้อนเนื่องจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถจำลองรูปร่างลักษณะที่ซับซ้อนโดยใช้เอลิเมนต์ได้หลากหลายรูปแบบ จึงให้ผลการคำนวณที่แม่นยำ อย่างไรก็ตาม ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีข้อเสียคือมีขั้นตอนการหาผลเฉลยที่ซับซ้อนยากแก่การทำความเข้าใจ

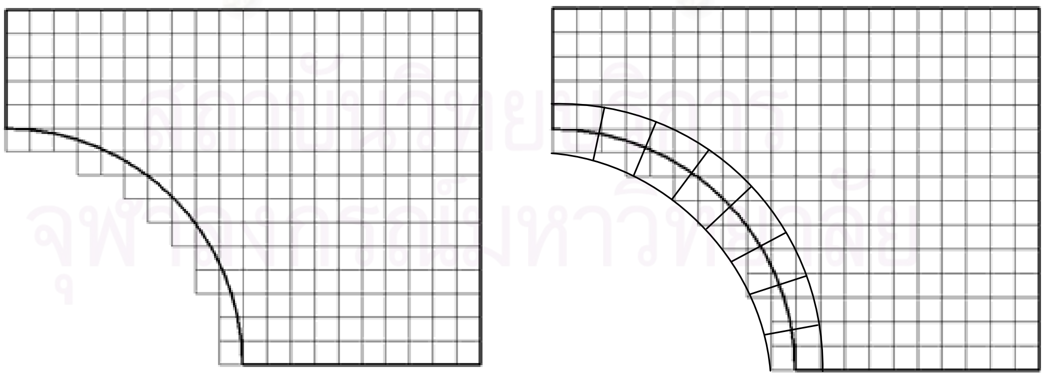
ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมแต่เดิมนั้นไม่นิยมนำมาใช้ในการแก้ปัญหาที่มีรูปร่างลักษณะที่ซับซ้อนเนื่องจากระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมจะทำการคำนวณบนพิกัดมาตรฐาน (conventional coordinates) เช่น พิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinates) พิกัดทรงกระบอก (cylindrical coordinates) และพิกัดทรงกลม (spherical coordinates) จึงทำให้ผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณไม่แม่นยำ ซึ่งเป็นข้อจำกัดที่สำคัญของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม แต่ในปัจจุบันข้อจำกัดของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมในเรื่องรูปร่างลักษณะที่ซับซ้อนได้ลดลง โดยการนำระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมมาคำนวณบนพิกัดกระชับขอบเขต (body-fitted coordinates) จึงทำให้ผลเฉลยจากการคำนวณมีความแม่นยำมากขึ้น ซึ่งวิธีนี้เป็นทางเลือกหนึ่งที่ดีสำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมและเป็นวิธีที่ถูกเลือกนำมาใช้ในวิทยานิพนธ์นี้

พิจารณารูปร่างของโดเมนที่มีลักษณะซับซ้อนดังรูปที่ 1.1 ซึ่งสามารถจำลองโดเมนดังกล่าวโดยการใช้กริดแบบ structured ที่มีรูปร่างลักษณะต่างๆกันได้ 4 วิธีดังนี้ Melaaen (1990)

1. กริดที่มีลักษณะเป็นขั้นบันได (stepwise)
2. กริดที่มีลักษณะซ้อนทับกัน (Chimera) หรือกริดแบบผสม (composite)
3. กริดที่มีลักษณะโค้งแบบตั้งฉากกัน (orthogonal curvilinear)
4. กริดที่มีลักษณะโค้งแบบไม่ตั้งฉากกัน (non-orthogonal curvilinear)

ลักษณะของกริดทั้ง 4 แบบมีข้อดีและข้อเสียแตกต่างกันดังต่อไปนี้

กริดที่มีลักษณะเป็นขั้นบันได (stepwise) ดังรูปที่ 1.1 (ก) เป็นกริดที่ถูกสร้างขึ้นโดยใช้พิกัดคาร์ทีเซียน ซึ่งกริดแบบขั้นบันไดนี้สามารถสร้างได้โดยง่ายด้วยการวางกริดเรียงขึ้นไปตามขอบโค้งตรงๆ ซึ่ง กริดแบบนี้จะใช้หน่วยความจำไม่มากนัก นอกจากนี้ยังมีจำนวนพจน์ในสมการครอบคลุมน้อยและมีขั้นตอนการดิสครีไทซ์ง่ายและตรงไปตรงมา อย่างไรก็ตาม กริดแบบขั้นบันไดนี้จะให้ผลลัพธ์ที่ไม่แม่นยำอันเนื่องมาจากกริดที่อยู่บริเวณขอบโค้งจะวางตัวอยู่ทั้งในและนอกโดเมน ซึ่งกริดบริเวณนี้จะไม่สามารถนำมาทำการคำนวณได้ ทำให้สูญเสียพื้นที่หน่วยความจำ นอกจากนี้กริดแบบขั้นบันไดนี้ยังไม่สามารถควบคุมการกระจายของเส้นกริดได้ โดยกริดที่ละเอียดในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยสูงจะส่งผลกระทบทำให้กริดในบริเวณอื่นที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยต่ำมีความละเอียดไปด้วย ทำให้ต้องใช้เวลาในการคำนวณมากขึ้น ดังนั้น กริดที่มีลักษณะเป็นขั้นบันได (stepwise) นี้จึงถือได้ว่าไม่เหมาะสมในการนำมาใช้แก้ปัญหาที่มีรูปร่างลักษณะซับซ้อน

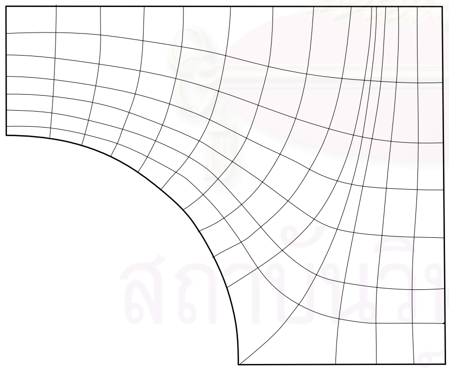


(ก) (ข)

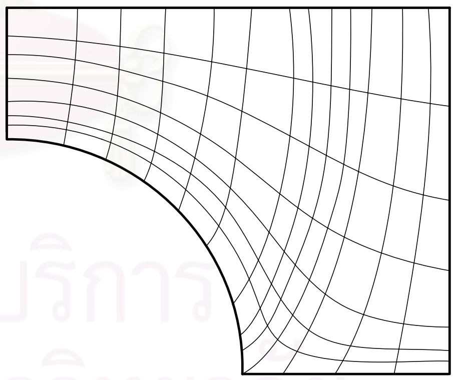
รูปที่ 1.1 กริดที่สร้างโดย (ก) วิธี stepwise และ (ข) วิธีChimera

กริดที่มีลักษณะซ้อนทับกัน (Chimera) หรือกริดแบบผสม (composite) เป็นกริดที่สร้างให้มีการวางซ้อนทับกันเล็กน้อยบริเวณขอบโค้งระหว่างกริดแบบสี่เหลี่ยมที่สร้างบนพิกัดคาร์ทีเซียนและกริดแบบโค้งที่สร้างบนพิกัดทรงกระบอก ดังรูปที่ 1.1 (ข) กริดแบบซ้อนทับกันนี้จะให้ผลเฉลยที่แม่นยำมากกว่ากริดแบบขั้นบันได แต่ผลเฉลยที่ได้จะแยกออกจากกันไปตามแต่ละแบบของกริด ซึ่งทำให้ขั้นตอนการคำนวณยุ่งยากเนื่องจากต้องนำผลเฉลยที่ได้มาทำการประมาณในช่วง (interpolation) นอกจากนี้ ยังต้องปรับโปรแกรมใหม่สำหรับในแต่ละปัญหา อย่างไรก็ตาม กริดแบบซ้อนทับกันนี้เหมาะสมกับปัญหาที่วัตถุมีการเคลื่อนที่ ทำได้โดยการแบ่งกริดส่วนหนึ่งให้เคลื่อนที่ตามวัตถุและกริดส่วนที่เหลืออยู่กับที่

กริดที่มีลักษณะโค้งแบบตั้งฉากกันเป็นกริดที่ถูกสร้างขึ้นโดยใช้พิกัดกระชับขอบเขตแบบโค้งตั้งฉากกัน (orthogonal curvilinear coordinates) ดังรูปที่ 1.2 (ก) กริดแบบโค้งตั้งฉากกันนี้จะมีขั้นตอนการคำนวณที่ยุ่งยากและใช้เวลามากกว่ากริดบนพิกัดทั่วไป (regular coordinates) แต่ด้วยคุณสมบัติที่ตั้งฉาก (orthogonality) จึงทำให้การคำนวณเงื่อนไขขอบเขตง่ายและตรงไปตรงมา นอกจากนี้ ผลลัพธ์ที่ได้จะแม่นยำมากกว่ากริดที่สร้างโดยใช้พิกัดทั่วไป อย่างไรก็ตาม ถึงแม้ว่าการควบคุมการกระจายตัวของเส้นกริดจะดีขึ้น แต่กริดบริเวณที่เป็นมุมก็ยังคงหยาบเกินไป อันเนื่องมาจากข้อจำกัดของกริดที่จะต้องตั้งฉากกัน (orthogonality constraint) ทำให้ผลลัพธ์คลาดเคลื่อนมากในกรณีที่บริเวณมุมนั้นมีการเปลี่ยนแปลงสูง และเสียเวลาในการคำนวณเนื่องจากการกระจุกตัวกันของกริดในบริเวณอื่นที่ไม่ต้องการความละเอียดอีกด้วย



(ก)



(ข)

รูปที่ 1.2 กริดที่สร้างบนพิกัดกระชับขอบเขต (ก) แบบตั้งฉากและ (ข) แบบไม่ตั้งฉาก

กริดที่มีลักษณะโค้งแบบไม่ตั้งฉากกันเป็นกริดที่ถูกสร้างโดยใช้พิกัดกระชับขอบเขตแบบโค้งไม่ตั้งฉากกัน (non-orthogonal curvilinear coordinates) ดังรูปที่ 1.2 (ข) กริดแบบโค้งไม่ตั้งฉากกันนี้มีขั้นตอนการสร้างกริดง่ายและใช้เวลาน้อยกว่ากริดแบบโค้งตั้งฉากเนื่องจากไม่มีข้อจำกัดของกริดที่จะต้องตั้งฉากกัน (orthogonality constraint) นอกจากนั้นกริดแบบนี้ยังมี

ความยืดหยุ่นสูงจึงสามารถโค้งไปตามรูปร่างทุกประเภทได้ และสามารถสร้างเส้นกริดให้ตัดกันที่มุมของรูปร่างได้ จึงให้ผลการคำนวณแม่นยำเนื่องจากเก็บรายละเอียดของรูปร่างได้ดี และสามารถควบคุมการกระจายให้อยู่เฉพาะในบริเวณที่สนใจได้ทำให้ไม่สูญเสียพื้นที่การคำนวณไปในบริเวณที่ไม่ต้องการความละเอียด ส่วนข้อเสียของพิกัดกระชับขอบเขตแบบโค้งไม่ตั้งฉากก็คือ สมการครอบคลุมของปัญหามีความซับซ้อนและจำนวนพจน์ในสมการครอบคลุมเพิ่มขึ้นเนื่องจากความไม่ตั้งฉาก

สำหรับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมร่วมกับพิกัดกระชับขอบเขตแบบโค้งไม่ตั้งฉากในการแก้ปัญหารูปร่างที่ซับซ้อน สำหรับปัญหาที่เลือกมาใช้ร่วมกับวิธีนี้คือปัญหาการนำความร้อน เนื่องจากปัญหาการนำความร้อนเป็นปัญหาพื้นฐานและมีจำนวนพจน์ในสมการครอบคลุมน้อย สำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมบนพิกัดกระชับขอบเขตแบบโค้งไม่ตั้งฉากนี้สามารถประยุกต์ใช้กับปัญหาอื่นๆในรูปร่างที่ซับซ้อนได้ อาทิเช่น ปัญหาการไหล ปัญหาการเผาไหม้ ปัญหาเกี่ยวกับปฏิกิริยาเคมี เป็นต้น

การแก้ปัญหาในรูปร่างที่ซับซ้อนด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมบนพิกัดกระชับขอบเขตแบบโค้งไม่ตั้งฉากมี 4 ขั้นตอนหลักคือ การสร้างกริด การแปลงพิกัด การดิสครีไทซ์ และการแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิต ในส่วนแรกคือขั้นตอนของการสร้างกริดเพื่อแบ่งโดเมนออกเป็นปริมาตรควบคุมเล็กๆนั้น จะทำการสร้างกริดเริ่มต้นโดยวิธีเชิงพีชคณิตจากนั้นจึงปรับกริดให้มีความสม่ำเสมอด้วยวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติก ขั้นตอนที่สองคือการแปลงสมการครอบคลุมและเงื่อนไขขอบเขตจากพิกัดคาร์ทีเซียนให้เป็นพิกัดกระชับขอบเขต ขั้นตอนต่อมาคือการดิสครีไทซ์สมการครอบคลุมด้วยวิธีไฟไนต์วอลุมโดยการอินทิเกรตบนปริมาตรควบคุม ซึ่งเป็นการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ให้เป็นสมการเชิงพีชคณิต ส่วนขั้นตอนสุดท้ายคือการแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตด้วยวิธี TDMA ซึ่งจะได้ผลเฉลยของปัญหาออกมา

1.2 การศึกษาผลงานวิจัยที่ผ่านมา

สำหรับผลงานวิจัยที่ผ่านมาจะแบ่งการศึกษาออกเป็น 4 หัวข้อย่อยด้วยกันคือ การศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวกับระบบพิกัดกระชับขอบเขต การศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวกับการสร้างกริด การศึกษางานวิจัยที่เป็นการเปรียบเทียบกันระหว่างระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้พิกัดกระชับขอบเขตกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และการศึกษางานวิจัยที่นำระบบพิกัดกระชับขอบเขตไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาการนำความร้อน

1.2.1 การศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวกับระบบพิกัดกระชับขอบเขต

ระบบพิกัดกระชับขอบเขตมีความสำคัญต่อการแก้ปัญหาในรูปร่างที่ซับซ้อน ดังนั้นจึงมีนักวิจัยพยายามที่จะศึกษาและประยุกต์ใช้พิกัดกระชับขอบเขตกับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขหลายๆวิธี โดย Thompson et al. (1974, 1975, 1982) และ Thompson (1982b) ได้เสนอแนวความคิดพื้นฐานและหลักการเกี่ยวกับระบบพิกัดกระชับขอบเขตขึ้นมา ซึ่งพิกัดกระชับขอบเขตนี้ไม่มีข้อจำกัดในเรื่องรูปร่างของโดเมน จึงสามารถใช้กับรูปร่างของโดเมนซับซ้อนได้ รวมถึงโดเมนที่มีการเคลื่อนที่และโดเมนที่มีการเปลี่ยนรูปร่างไปตามเวลา โดยที่การคำนวณหาผลเฉลยของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมีขั้นตอนเช่นเดียวกับกรณีที่มีรูปร่างเป็นสี่เหลี่ยมธรรมดา นอกจากนี้ Thompson ได้ยกตัวอย่างรูปร่างของโดเมนแบบต่างๆทั้งรูปร่างแบบง่ายๆและรูปร่างที่มีความซับซ้อน และได้แสดงความสัมพันธ์ที่ใช้ในการแปลงพิกัดของสมการเชิงอนุพันธ์แบบต่างๆ ทั้งนี้ Thompson ยังแสดงให้เห็นว่าระบบพิกัดกระชับขอบเขตนี้สามารถนำไปใช้ในการศึกษาและวิเคราะห์ปัญหาต่างๆได้มากมาย โดย Thompson ได้นำระบบพิกัดนี้ไปใช้ในปัญหาการไหลแบบศักย์ผ่านปีกเครื่องบิน พบว่าผลลัพธ์มีความแม่นยำมากเมื่อเปรียบเทียบกับผลเชิงวิเคราะห์ การเสนอระบบพิกัดกระชับขอบเขตนี้เป็นการลดข้อจำกัดในเรื่องของรูปร่างสำหรับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขซึ่งเป็นประโยชน์อย่างยิ่งต่อการพัฒนาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในเวลาต่อมา

1.2.2 การศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวกับการสร้างกริด

การสร้างกริดเป็นขั้นตอนสำคัญเพื่อใช้ในการคำนวณผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขต่างๆ ดังนั้นจึงมีการพัฒนาวิธีการสร้างกริดขึ้นมามากมายเพื่อให้มีความเหมาะสมกับปัญหาที่นำมาวิเคราะห์ การสร้างกริดสามารถทำได้หลายวิธีซึ่งแต่ละวิธีมีการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง โดยวิธีเชิงพีชคณิต และวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เป็นวิธีที่ได้รับความนิยมนำมาใช้สร้างกริดมาก

การสร้างกริดโดยวิธีเชิงพีชคณิตเป็นวิธีการสร้างกริดที่ง่ายและรวดเร็ว โดยวิธีนี้มีพื้นฐานมาจากการประมาณค่าในช่วง (interpolation) การประมาณค่าในช่วงนี้มีหลายวิธีด้วยกัน ซึ่งวิธี Transfinite interpolation หรือ TFI เป็นวิธีที่ได้รับความนิยมมากที่สุด โดย Gordon and Hall (1973) ได้เริ่มใช้วิธีนี้ในการสร้างกริดบนพิกัดโค้งเป็นคนแรก จากนั้นมีนักวิจัยหลายท่านนำวิธีนี้ไปใช้ในการสร้างกริด โดย Eriksson (1982) ใช้วิธีนี้ในการสร้างกริดบนพิกัดกระชับขอบเขตแบบสามมิติเพื่อใช้ในการจำลองส่วนปีกของเครื่องบิน นอกจากนี้ การสร้างกริดด้วยวิธีเชิงพีชคณิตมีการพัฒนาทั้งวิธีการประมาณค่าในช่วงและประเภทของ blending functions เพื่อให้มีความแม่นยำเพิ่มมากขึ้น ทั้งนี้ อันดับของความแม่นยำในการประมาณค่าในช่วง สามารถทำให้เพิ่มขึ้น

ด้วยการเพิ่มเส้นโค้งหรือพื้นผิว หรือเพิ่มรายละเอียดเช่นการกำหนดอันดับของอนุพันธ์ของเส้นโค้งหรือพื้นผิวให้สูงมากขึ้น

การสร้างกริดโดยวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติกถูกค้นพบโดย Thompson (1982a, 1984) และ Thompson et al. (1985) โดยพบว่าผลเฉลยของการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองมีลักษณะทางกายภาพที่สม่ำเสมอตลอดทั่วทั้งโดเมน Thompson จึงนำระบบสมการนี้มาใช้ในการสร้างกริด ซึ่งระบบสมการนี้คือระบบสมการปัวส์ซองที่มีทำให้เกิดฟังก์ชันควบคุม (control function) อยู่ด้วย เพื่อควบคุมระยะห่างและการกระจายเส้นกริดให้มีประสิทธิภาพมากขึ้นวิธีสร้างกริดโดยใช้การแก้สมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นแนวความคิดเริ่มต้นให้มีการพัฒนาการสร้างวิธีการสร้างกริดต่อมาในภายหลัง โดย Spekreuse (1995) ใช้วิธีการสร้างกริดของ Thompson แต่พัฒนาการหาฟังก์ชันควบคุมจากเดิมที่ฟังก์ชันควบคุมถูกกำหนดขึ้นซึ่งมีข้อจำกัดที่ไม่สามารถพิสูจน์ได้ว่าความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง พัฒนาไปเป็นการหาฟังก์ชันควบคุมจากการแปลงพิกัดซึ่งมั่นใจได้ว่าจะได้ความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งแน่นอน นอกจากนี้ Conti et al. (2005) ได้ใช้วิธีการสร้างกริดเชิงพีชคณิตเพื่อสร้างกริดเริ่มต้นให้กับกระบวนการสร้างกริดโดยการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติกซึ่งวิธีนี้จะช่วยควบคุมระยะห่างระหว่างกริดและป้องกันการลู่ออกได้ อีกทั้งยังลดจำนวนรอบในการทำซ้ำ จึงช่วยประหยัดเวลาในการคำนวณด้วย

1.2.3 การศึกษางานวิจัยที่เป็นการเปรียบเทียบกันระหว่างระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้พิกัดกระชับขอบเขตกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

มีนักวิจัยหลายคนนำระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้พิกัดกระชับขอบเขตไปเปรียบเทียบกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดย Dash and Chattopadhyay (1993) เปรียบเทียบระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้พิกัดกระชับขอบเขตกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการแก้ปัญหาการนำความร้อน พบว่าการสร้างกริดในระบบพิกัดกระชับขอบเขตใช้เวลาน้อยกว่าการสร้างกริดด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาก และยังใช้เวลาในการหาผลเฉลยได้รวดเร็วกว่า Ramanathan and Kumar (1988) เปรียบเทียบผลที่ได้จากวิธีผลต่างสืบเนื่องโดยการใช้พิกัดกระชับขอบเขตและผลที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยอ้างอิงกับผลที่ได้จากการวิธีวิเคราะห์สำหรับการแก้ปัญหาการนำความร้อนที่ขึ้นกับเวลากับหลายเงื่อนไขขอบเขตและในรูปร่างที่เป็นสี่เหลี่ยม วงกลม และปีกเครื่องบิน พบว่าวิธีผลต่างสืบเนื่องในพิกัดกระชับขอบเขตมีความแม่นยำมากกว่า ประหยัดเวลาในการคำนวณ และใช้พื้นที่ในการคำนวณน้อยกว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ Yang et al. (1990) ใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องในพิกัดกระชับขอบเขตเพื่อคำนวณความเค้นและความเครียดในกระบวนการขึ้นรูปโดยการไหลแบบอัดแรง (extrusion) ไปที่เบ้าพิมพ์ (dies) 4 แบบที่มีการลดหลั่นกันของพื้นที่หน้าตัดต่างกัน ผลการคำนวณที่ได้นำไป

เปรียบเทียบกับผลจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และผลการทดลองพบว่ามีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี Califano and Zaritzky (1997) เปรียบเทียบผลที่ได้จากวิธีผลต่างสืบเนื่องโดยการใช้พิกัดกระชับขอบเขตและผลที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในกรณีการนำความร้อนในกระบวนการแข็งตัวและการละลาย (freezing or thawing) ในรูปร่างใดๆแบบสองมิติ พบว่า พิกัดกระชับขอบเขตมีความแม่นยำเช่นเดียวกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แต่ใช้เวลาน้อยและง่ายกว่า

1.2.4 การศึกษางานวิจัยที่นำระบบพิกัดกระชับขอบเขตไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาการนำความร้อน

McWhorter and Sadd (1979) ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในพิกัดกระชับขอบเขตเพื่อแก้ปัญหาการนำความร้อนในกรณี anisotropic ในสภาวะอยู่ตัวแบบสองมิติ งานวิจัยนี้แสดงให้เห็นถึงประโยชน์ของการใช้ระบบพิกัดกระชับขอบเขตในการนำไปแก้ปัญหาในรูปร่างที่เป็นวงแหวนแบบเยื้องศูนย์และแผ่นวงกลมตัน พบว่าวิธีนี้สามารถประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาในรูปร่างที่มีลักษณะซับซ้อนได้โดยง่าย ต่อมา Zedan and Schneider (1982) ประยุกต์ใช้ระบบพิกัดกระชับขอบเขตแบบโค้งไม่ตั้งฉากกับวิธีผลต่างสืบเนื่องเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาการนำความร้อนโดยมีเงื่อนไขขอบเขตทั้งแบบ Dirichlet, Neumann, convection และ adiabatic และนำผลที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยที่มีผู้คำนวณมาก่อนแล้ว พบว่ามีความสอดคล้องกันดี Uchikawa and Takeda (1985) วิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนในกรณีที่เป็นสภาวะชั่วครู่ (unsteady) แบบสองมิติโดยใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องในพิกัดกระชับขอบเขต เพื่อศึกษากรณีการแข็งตัว (solidification) ในกระบวนการหล่อเหล็กกล้าในแม่พิมพ์ที่เป็นรูปร่างซับซ้อน พบว่าวิธีนี้มีความเหมาะสมในการนำไปแก้ปัญหาที่มีรูปร่างลักษณะซับซ้อนเป็นอย่างมาก Gao (1999) ประยุกต์ใช้ระบบพิกัดกระชับขอบเขตกับระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาการนำความร้อนในกรณีที่เป็นสภาวะ transient แบบสองมิติในกรณีที่รูปร่างเป็นสี่เหลี่ยมคางหมูมีวงกลมอยู่ภายในโดยมีเงื่อนไขขอบเขตทั้งแบบการพาความร้อนและการแผ่รังสีความร้อน ซึ่งแสดงผลการคำนวณเป็นเส้นระดับการกระจายอุณหภูมิภายในโดเมนนั้น

จากการศึกษาผลงานวิจัยที่ผ่านมาพบว่าระบบพิกัดกระชับขอบเขตเป็นประโยชน์อย่างยิ่งต่อระเบียบวิธีเชิงตัวเลข เพื่อนำไปใช้ในการศึกษาและวิเคราะห์ปัญหาต่างๆในรูปร่างที่มีลักษณะซับซ้อน เนื่องจากระบบพิกัดกระชับขอบเขตทำให้การคำนวณปัญหาในรูปร่างที่ซับซ้อนง่ายขึ้นและผลการคำนวณที่ได้ก็มีความแม่นยำมากขึ้นด้วย จากข้อดีของระบบพิกัดกระชับขอบเขตดังที่ได้กล่าวมาแล้ว ระบบพิกัดกระชับขอบเขตจึงได้รับความนิยมมากในหมู่นักวิจัยในการนำมาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาที่มีรูปร่างที่มีลักษณะซับซ้อน ซึ่งวิทยานิพนธ์นี้จะนำระเบียบวิธีไฟ

ไนต์วอลุมประยุกต์ใช้ร่วมกับพิกัดกระชับขอบเขตแบบโค้งไม่ตั้งฉากเพื่อแก้ปัญหาการนำความร้อนในรูปร่างที่มีลักษณะซับซ้อน

1.3 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมในพิกัดกระชับขอบเขตสำหรับการแก้ปัญหาการนำความร้อนแบบในรูปร่างที่ซับซ้อน โดยมีวัตถุประสงค์ดังนี้

1.3.1 เพื่อศึกษาวิธีการสร้างกริดในระบบพิกัดกระชับขอบเขตสำหรับใช้ในการแก้ปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อน
1.3.2 เพื่อศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมที่สามารถนำมาใช้ในพิกัดกระชับขอบเขต
1.3.3 เพื่อพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถแก้ปัญหาการนำความร้อนในรูปร่างที่ซับซ้อนได้

1.4 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

1.4.1 ศึกษาวิธีการสร้างกริดและระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมเพื่อใช้ในระบบพิกัดกระชับขอบเขตได้
1.4.2 พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถแก้ปัญหาการนำความร้อนในรูปร่างที่ซับซ้อนด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมบนพิกัดกระชับขอบเขตได้
1.4.3 ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นกับปัญหาการนำความร้อนที่มีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์หรือผลการทดลอง

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 ก่อให้เกิดความรู้ความเข้าใจในระบบพิกัดกระชับขอบเขต การสร้างกริดและระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมเพื่อใช้สำหรับพิกัดกระชับขอบเขตนี้
1.5.2 สามารถนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นไปแก้ปัญหาการนำความร้อนและสามารถนำไปประยุกต์เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาอื่นๆในรูปร่างที่ซับซ้อนได้

1.6 ขั้นตอนการดำเนินงานวิทยานิพนธ์

1.6.1 ศึกษาพฤติกรรมการนำความร้อน
1.6.2 ศึกษาระบบพิกัดกระชับขอบเขตและการสร้างกริดสำหรับใช้ในการแก้ปัญหาที่มี

รูปร่างซับซ้อน

1.6.3 ศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมที่สามารถนำมาใช้ในพิกัดกระชับขอบเขต

1.6.4 ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1.6.5 พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถแก้ปัญหาการนำความร้อนในรูปร่างที่ซับซ้อนได้

1.6.6 ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์กับปัญหาการนำความร้อนที่มีผลเฉลยเชิงวิเคราะห์หรือผลการทดลอง

1.6.7 วิเคราะห์และสรุปผล

1.6.8 จัดพิมพ์วิทยานิพนธ์

1.7 ส่วนประกอบของวิทยานิพนธ์

ในวิทยานิพนธ์นี้แบ่งออกเป็น 5 บทดังนี้

บทที่ 1 บทนำ

กล่าวถึงความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์ การศึกษาผลงานวิจัยที่ผ่านมา วัตถุประสงค์ ขอบเขตของวิทยานิพนธ์ ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ ขั้นตอนการทำวิทยานิพนธ์และส่วนประกอบของวิทยานิพนธ์

บทที่ 2 การสร้างกริด

ประกอบไปด้วยบทนำซึ่งจะบอกถึงการสร้างกริดวิธีต่างๆและคุณลักษณะต่างๆของกริดที่ต้องการ จากนั้นกล่าวถึงขั้นตอนการสร้างกริดด้วยวิธีเชิงพีชคณิต และขั้นตอนการสร้างกริดด้วยวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติก

บทที่ 3 ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม

อธิบายถึงสมการพื้นฐานเพื่อใช้ในแก้ปัญหาการนำความร้อน ซึ่งได้จากกฎอนุรักษ์พลังงานและสมมติฐานเพื่อใช้สำหรับวิทยานิพนธ์นี้ จากนั้นจะแนะนำเกี่ยวกับระบบพิกัดกระชับขอบเขตแบบโค้งไม่ตั้งฉากเบื้องต้น และจะกล่าวถึงการแปลงสมการครอบคลุมของการนำความร้อนและเงื่อนไขขอบเขตจากพิกัดคาร์ทีเซียนไปเป็นพิกัดกระชับขอบเขต และขั้นตอนของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมซึ่งใช้แปลงสมการเชิงอนุพันธ์ไปเป็นสมการเชิงพีชคณิตโดยการแบ่งโดเมนออกเป็น

ปริมาตรควบคุมย่อยแล้วทำการอินทิเกรตรอบปริมาตรควบคุมนั้น สุดท้ายจึงทำการแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตที่ได้ด้วยวิธี TDMA

บทที่ 4 การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

กล่าวถึงกรณีทดสอบที่นำมาใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้น ซึ่งแบ่งออกเป็นสองส่วนด้วยกัน ในส่วนที่หนึ่งจะนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นมาทดสอบปัญหาการนำความร้อนแบบสภาวะอยู่ตัว (steady state) ซึ่งมีทั้งหมด 5 กรณีศึกษาด้วยกัน ดังนี้

1) การนำความร้อนในแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกัน
2) การนำความร้อนในแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์
3) การนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีวงกลมอยู่ข้างใน
4) การนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอุณหภูมิที่มีเงื่อนไขขอบเป็นฟังก์ชันซายน์
5) การนำความร้อนในแผ่นสามเหลี่ยมที่มีผลิตการความร้อนภายใน

สำหรับส่วนที่สองจะทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ด้วยปัญหาการนำความร้อนแบบสภาวะไม่อยู่ตัว (unsteady state) ซึ่งจะตรวจสอบความถูกต้องในส่วนนี้โดยใช้สองกรณีศึกษา ได้แก่

1) การนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่สภาวะไม่อยู่ตัว
2) การนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมคางหมูเจาะรูวงกลมที่สภาวะไม่อยู่ตัว

บทที่ 5 บทสรุปและข้อเสนอแนะ

ประกอบด้วยบทสรุปของวิทยานิพนธ์และข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยต่อเนื่องที่อาจดำเนินการต่อไปในอนาคต

บทที่ 2

การสร้างกริด

บทนี้จะอธิบายถึงการสร้างกริดซึ่งเป็นขั้นตอนสำคัญและเป็นขั้นตอนแรกในการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมโดยกระบวนการสร้างกริดนั้นมีผลกระทบต่อความแม่นยำ อัตราการลู่เข้า และเสถียรภาพในการคำนวณ ในหัวข้อแรกของบทนี้จะอธิบายถึงการสร้างกริดวิธีต่างๆรวมทั้งข้อดีและข้อเสียของแต่ละวิธีเพื่อที่จะเลือกใช้วิธีการสร้างกริดให้เหมาะสมกับปัญหา จากนั้นจะอธิบายถึงคุณลักษณะของกริดที่ต้องการ และสุดท้ายจะอธิบายถึงขั้นตอนของวิธีการสร้างกริดแบบวิธีเชิงพีชคณิตและวิธีสร้างกริดโดยการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติก

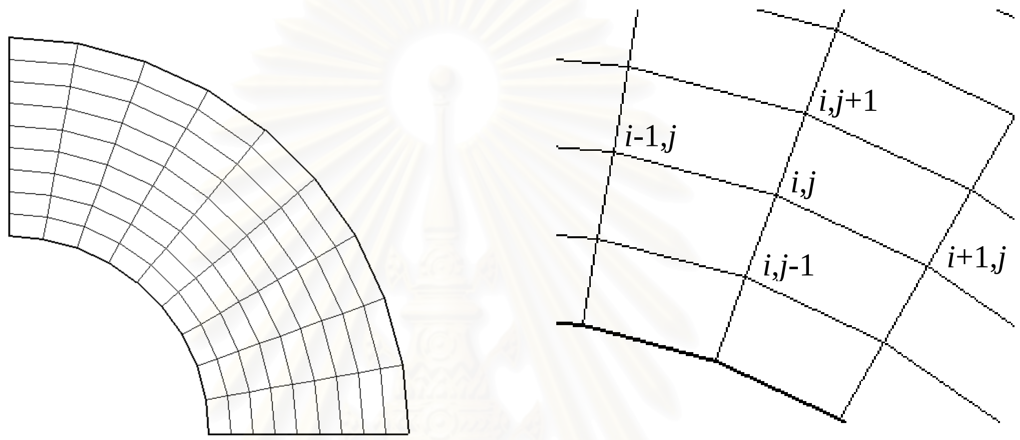
2.1 การสร้างกริด

การสร้างกริด (grid generator) คือกระบวนการแบ่งพื้นที่โดเมนที่สนใจออกเป็นปริมาตรควบคุมย่อยๆจำนวนมากที่เรียกว่าเซลล์ (grid cells) และเชื่อมต่อระหว่างแต่ละจุดของ กริด (grid points) ด้วยเส้นกริด (grid lines) ซึ่งกระบวนการสร้างกริดนี้มีความสำคัญเนื่องจากเป็นขั้นตอนแรกสำหรับระเบียบเชิงตัวเลขเพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาต่างๆ ถ้าระเบียบเชิงตัวเลขเลือกใช้วิธีการสร้างกริดที่ไม่เหมาะสมแล้ว ผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณก็จะไม่แม่นยำ

การสร้างกริดสามารถทำได้หลายวิธี โดยเราสามารถสร้างกริดได้ด้วยมือ แต่วิธีนี้ใช้เวลามากและไม่สะดวก ดังนั้น Thompson et al. (1985) จึงได้เสนอวิธีการสร้างกริดแบบอัตโนมัติ (automatic grid generation techniques) โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ซึ่งมีความสะดวกและใช้เวลาน้อยกว่าการวาดด้วยมือ ในการสร้างกริดแบบอัตโนมัตินั้นสามารถสร้างกริดได้หลายรูปแบบด้วยกัน ซึ่งเราสามารถแบ่งประเภทของกริดตามลักษณะได้เป็น 2 ประเภทคือ กริดแบบ structured และกริดแบบ unstructured

กริดแบบ structured เป็นกริดที่มีการจัดเรียงชุดของจุดกริดอย่างมีระเบียบและสามารถระบุแต่ละจุดของกริดบนระนาบได้โดยใช้ตัวเลขดัชนี i, j และ k ตัวอย่างเช่น ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนเราสามารถระบุตัวเลขดัชนีได้เป็น $x_{i,j,k}$, $y_{i,j,k}$ และ $z_{i,j,k}$ เป็นต้น ดังรูปที่ 2.1 ซึ่งการระบุตำแหน่งของจุดนี้สอดคล้องกันโดยตรงกับการจัดเก็บตัวแปรไว้ในหน่วยความจำ ทำให้สามารถเรียกใช้จุดกริดที่ต่อๆกันได้ง่ายและรวดเร็ว เพียงแค่การบวกหรือลบค่าที่สอดคล้องกับตัวเลขดัชนีเท่านั้น เช่น $(i+1)$, $(j-1)$ และ $(k-3)$ เป็นต้น นอกจากนี้การคำนวณค่าเกรเดียน (gradients) หรือฟลักซ์ และเงื่อนไขขอบเขตก็ง่ายด้วย อย่างไรก็ตาม กริดแบบ structured นี้มีข้อจำกัดในกรณีที่รูปร่างของโดเมนมีลักษณะซับซ้อน โดยถ้าทำการสร้างกริดแบบ structured บนพิกัดทั่วไปเช่น

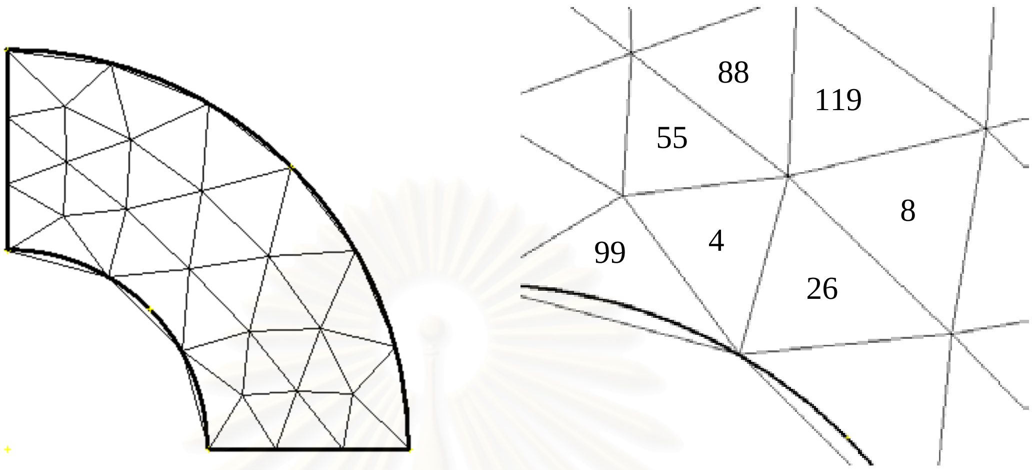
การสร้างกริดแบบขั้นบันได (stepwise approximation) การสร้างกริดแบบซ้อนทับกัน (Chimera technique) และการสร้างกริดแบบ multiblock เป็นต้นนั้น ผลลัพธ์ที่ได้จะไม่แม่นยำ หรือมีขั้นตอนการสร้างกริดที่ยุ่งยากเพื่อที่ทำให้ผลลัพธ์มีความแม่นยำมากขึ้น ในทางกลับกัน การสร้างกริดบนพิกัดกระชับขอบเขตมีความเหมาะสมมากกว่า แต่จำเป็นต้องอาศัยการแปลงสมการครอบคลุมจากรูปร่างที่ซับซ้อนในพื้นที่ทางกายภาพ (physical domain) ไปคำนวณในพื้นที่การคำนวณ (computational domain) ซึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสสำหรับสองมิติหรือทรงลูกบาศก์สำหรับสามมิติ ทำให้ไม่สะดวกในการใช้งาน



รูปที่ 2.1 การสร้างกริดแบบ structured

ในทางกลับกัน กริดแบบ unstructured จะไม่มีลำดับการวางแต่ละจุดของกริดที่เฉพาะเจาะจง โดยจุดกริดที่อยู่ต่อๆกันนั้นไม่สามารถระบุโดยการใช้ตัวเลขดัชนี ตัวอย่างดังเช่นในรูปที่ 2.2 จุดที่ 4 จะต่อกับจุดที่ 119 และจุดที่ 55 เป็นต้น ส่วนรูปร่างของแต่ละกริดสามารถเป็นได้หลายแบบ เช่น รูปสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมสำหรับสองมิติ และทรงสี่หน้าหรือทรงหกหน้าสำหรับสามมิติ เป็นต้น ทั้งนี้ภายในหนึ่งโดเมนสามารถนำกริดที่มีแบบต่างๆกันมาผสมกันได้ซึ่งเรียกว่ากริดแบบไฮบริด (hybrid grids) เพื่อให้สามารถจำลองรูปร่างที่ขอบของโดเมนได้อย่างเหมาะสมมากขึ้น สำหรับข้อดีของกริดแบบ unstructured คือกริดมีความยืดหยุ่นสูง จึงสามารถจำลองรูปร่างที่ซับซ้อนมากๆได้ และกระบวนการสร้างกริดสามารถทำได้โดยอัตโนมัติ แต่ในบางกรณียังคงต้องอาศัยการจัดตัวแปรให้เหมาะสมเพื่อให้ได้กริดที่มีคุณภาพ นอกจากนี้ ยังสามารถใช้จำนวนกริดน้อยลงเพื่อที่จะคำนวณหาผลเฉลยที่ถูกต้องด้วย และการสร้างกริดแบบ unstructured สำหรับรูปร่างที่ซับซ้อนไม่ต้องอาศัยขั้นตอนการแปลงพิกัดในการคำนวณจึงสะดวกในการใช้งาน อย่างไรก็ตาม กระบวนการสร้างกริดแบบนี้มีความซับซ้อนและใช้เวลามาก นอกจากนี้โครงสร้างของข้อมูลมีความซับซ้อนและไม่สามารถระบุตำแหน่งของจุดภายในโดเมนอย่างเป็นลำดับ ทำให้เมตริกซ์ของระบบสมการเชิงพีชคณิตไม่เป็นแนวทแยงมุม ดังนั้นในขั้นตอนการแก้ระบบสมการ

เชิงพีชคณิตเพื่อหาคำนวณหาผลเฉลยจึงยุ่งยาก ซับซ้อนและใช้เวลามากเมื่อเทียบกับกริดแบบ structured นอกจากนี้ยังใช้หน่วยความจำสูงด้วย ทั้งนี้เราจำเป็นต้องลดความกว้างแถบ (band width) โดยจัดลำดับของจุดใหม่



รูปที่ 2.2 การสร้างกริดแบบ unstructured

ทั้งนี้ การสร้างกริดแบบ structured บนพิกัดกระชับขอบเขตสามารถทำได้ 3 วิธี ได้แก่

1. วิธีเชิงพีชคณิต (algebraic method)
2. สร้างกริดโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation technique)
3. วิธีตัวแปรซับซ้อน (complex variable method หรือ conformal mapping)

การสร้างกริดด้วยวิธีตัวแปรซับซ้อนเป็นวิธีการสร้างกริดที่มีใช้กันมานานและยังเป็นทฤษฎีพื้นฐานให้กับการสร้างกริดโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติกอีกด้วย การสร้างกริดด้วยวิธี conformal mapping มีข้อจำกัดในเรื่องของ scale factor ซึ่งจะต้องมีค่าเท่ากันทุกทิศทาง ยกตัวอย่างเช่น บริเวณของวงกลมและสี่เหลี่ยมขนาดเล็ก ก็ยังคงต้องเป็นวงกลมและสี่เหลี่ยมอยู่หลังการแปลงแล้ว กริดที่สร้างได้จากวิธีนี้จะมีอัตราส่วนด้านกว้างและยาวใกล้เคียงกัน (aspect ratio = 1) แต่กริดขาดคุณสมบัติตั้งฉาก (orthogonality) เพื่อที่จะปรับปรุงคุณสมบัติตั้งฉาก Hung and Brown (1977) และ Pope (1978) จึงกำหนดค่า scale factor ไม่เท่ากับหนึ่ง แต่ให้เป็นค่าคงที่ซึ่งสามารถปรับค่าได้ตลอดทั่วทั้งโดเมน แนวความคิดนี้มีผู้นำไปประยุกต์มากมายแต่ไม่ได้ผลที่ประสบความสำเร็จมากนักรวมทั้งมีขั้นตอนที่ซับซ้อนมากขึ้น นอกจากนี้ในการสร้าง conformal map ก็มีวิธีไม่หลากหลายมากนัก และการกระจายของจุดก็ไม่สามารถควบคุมได้ และขาดประสิทธิภาพ

การสร้างกริดโดยวิธีเชิงพีชคณิตสามารถทำได้โดยการนำค่าการกระจายของจุดกริดที่เส้นขอบของโดเมนมาหาตำแหน่งของจุดกริดที่อยู่ภายในโดเมนด้วยวิธีการประมาณค่าในช่วง (interpolation) หรือการใช้ฟังก์ชันเฉพาะ สำหรับการประมาณค่าในช่วงนั้นแบ่งเป็น 2 ประเภท ได้แก่ unidirectional interpolation และ multidirectional interpolation การประมาณค่าในช่วงแบบ unidirectional สามารถแสดงได้โดยใช้ฟังก์ชันในทิศทางเดียว อาทิเช่น Lagrange polynomials, Hermite polynomials และ cubic spline functions เป็นต้น ส่วนการประมาณค่าในช่วงแบบ multidirectional นั้นสร้างฟังก์ชันจากการรวมฟังก์ชันของการประมาณค่าในช่วงแบบ unidirectional ซึ่งจะมีได้หลายมิติ การประมาณค่าในช่วงแบบที่สองนี้มี 2 วิธีได้แก่ domain vertex methods และ Transfinite interpolation methods (TFI) การประมาณค่าในช่วงแบบ Transfinite interpolation methods (TFI) เป็นวิธีที่ได้รับความนิยมมากที่สุด ซึ่งจะกล่าวถึงรายละเอียดในขั้นตอนการสร้างกริดโดยวิธีเชิงพีชคณิตที่ใช้การประมาณค่าในช่วงแบบ Transfinite interpolation methods (TFI) ในหัวข้อที่ 2.3 การสร้างกริดโดยวิธีเชิงพีชคณิตมีข้อดีคือขั้นตอนการคำนวณน้อย สามารถสร้างกริดได้ง่ายและรวดเร็ว นอกจากนี้กริดที่ได้ยังมีระยะห่างระหว่างกริดที่เหมาะสมอีกด้วย อย่างไรก็ตาม การสร้างกริดโดยวิธีเชิงพีชคณิตมีข้อเสียก็คือกริดจะไม่มีความสม่ำเสมอ

การสร้างกริดสามารถทำได้โดยการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งการสร้างกริดด้วยวิธีนี้จะมีความซับซ้อนมากกว่าวิธีเชิงพีชคณิต แต่กริดที่ได้จากวิธีนี้จะมีความสม่ำเสมอมากกว่าวิธีเชิงพีชคณิต โดยทั่วไปเราสามารถแบ่งสมการเชิงอนุพันธ์ออกเป็น 3 ประเภทคือ

1. สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติก (Elliptic equation)
2. สมการเชิงอนุพันธ์แบบพาราโบลิก (Parabolic equation)
3. สมการเชิงอนุพันธ์แบบไฮเปอร์โบลิก (Hyperbolic equation)

สมการเชิงอนุพันธ์ ทั้ง 3 ประเภทมีลักษณะทางกายภาพที่แตกต่างกัน เราสามารถจำแนกสมการทั้งสามประเภทได้ดังนี้ พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองในรูปแบบทั่วไปสำหรับสองมิติบนพิกัด x และ y ดังนี้

$$A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+D\frac{\partial\phi}{\partial x}+E\frac{\partial\phi}{\partial y}+F\phi+G=0 \qquad (2.1)$$

เบื้องต้น เราจะสมมติสมการ (2.1) ให้เป็นสมการเชิงเส้นโดยมี A, B, C, D, E, F และ G เป็นสัมประสิทธิ์ซึ่งเป็นค่าคงที่ เราพิจารณาลักษณะทางกายภาพของอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงสุดเป็นตัว

จำแนกประเภทของสมการเชิงอนุพันธ์ ดังนั้นจากสมการ (2.1) เราจะพิจารณาเพียงอนุพันธ์อันดับที่สองเท่านั้น ประเภทของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองสามารถระบุได้โดยผลเฉลยของคลื่นอย่างง่าย (simple wave solutions) ที่เป็นไปได้ ถ้าผลเฉลยมีอยู่จริง แสดงว่าสมการนั้นเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบไฮเปอร์โบลิก แต่ถ้าผลเฉลยไม่มีอยู่จริง แสดงว่าสมการนั้นอาจเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบพาราโบลิกหรืออิลิปติกก็ได้ เมื่อพิจารณาสมการที่บ่งบอกลักษณะ (characteristic equation)

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - b\left(\frac{dy}{dx}\right) + c = 0 \tag{2.2}$$

เราจะได้ผลเฉลยของคลื่นอย่างง่าย (simple wave solutions) ก็ต่อเมื่อสมการ (2.2) สามารถหารากที่เป็นจริงได้ 2 ค่า การมีอยู่ของรากของสมการที่บ่งบอกลักษณะ (characteristic equation) นี้จะขึ้นอยู่กับค่า discriminant $(b^2 - 4ac)$ ดังตารางที่ 2.1 ซึ่งแบ่งออกได้เป็น 3 กรณี

ตารางที่ 2.1 การจำแนกประเภทของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 2

$(b^2 - 4ac)$	ประเภทของสมการ	ลักษณะ
> 0	ไฮเปอร์โบลิก	มีผลเฉลยที่เป็นจริง 2 ผลเฉลย
$= 0$	พาราโบลิก	มีผลเฉลยที่เป็นจริง 1 ผลเฉลย
< 0	อิลิปติก	ไม่มีผลเฉลย

สมการเชิงอนุพันธ์ทั้ง 3 แบบมีลักษณะทางกายภาพแตกต่างกัน ต่อไปจะกล่าวถึงรายละเอียดแต่ละประเภทของสมการ และลักษณะของกริดที่ได้จากการสร้างด้วยสมการเชิงอนุพันธ์แต่ละประเภท

2.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติก

สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติกใช้เป็นสมการครอบคลุมของปัญหาที่อยู่ในสภาวะอยู่ตัว เช่น การกระจายอุณหภูมิในแผ่นโลหะในสภาวะอยู่ตัว การกระจายความเค้นของวัตถุภายใต้สภาวะที่กำหนดให้ และการไหลในสภาวะอยู่ตัว เป็นต้น ซึ่งปัญหาเหล่านี้จัดอยู่ในประเภทปัญหาแบบ equilibrium สมการที่เป็นต้นแบบของสมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติกคือ สมการลาปลาซ ซึ่งใช้อธิบายปรากฏการณ์การไหลแบบไม่หมุนของของไหลแบบอัดตัวไม่ได้ (irrotational incompressible flow) และปรากฏการณ์การนำความร้อนในสภาวะอยู่ตัว สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติกสำหรับสองมิติมีรูปแบบดังนี้

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \tag{2.3}$$

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติกทำได้โดยการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต เราเรียกปัญหาแบบนี้ว่า boundary-value problems ลักษณะเฉพาะที่สำคัญของสมการนี้คือ เมื่อเกิดการรบกวนภายในผลเฉลย สัญญาณการรบกวนจะกระจายไปทุกทิศทุกทางตลอดทั่วทั้งโดเมน ทำให้ผลเฉลยมีความสม่ำเสมออยู่ตลอดแม้ว่าเงื่อนไขขอบเขตจะไม่ต่อเนื่องก็ตาม ความสม่ำเสมอทั่วทั้งโดเมนนี้เป็นข้อดีที่สำคัญของสมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติก

การสร้างกริดโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติกมีความคิดพื้นฐานมาจากการอุปมาอุปไมยการสร้างกริดเทียบกับผลเฉลยของสมการลาปลาซสำหรับ stream function (ψ) และ velocity potential function (ϕ) ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$\nabla^2 \psi = 0 \tag{2.4}$$
$$\nabla^2 \phi = 0 \tag{2.5}$$

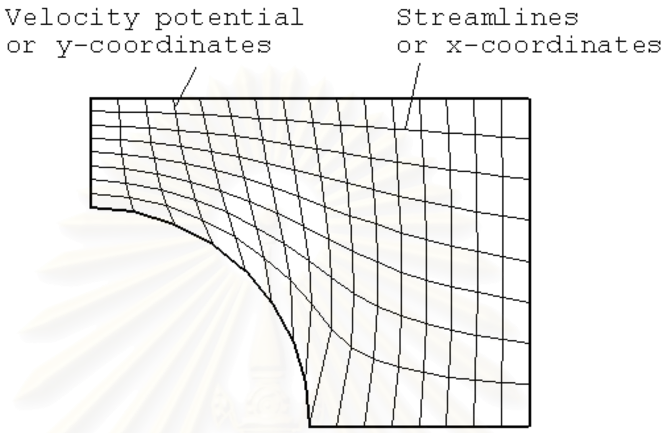
ผลเฉลยของสมการนี้แสดงไว้ดังรูปที่ 2.3 ทั้งนี้ เราพิจารณาให้เปลี่ยน stream function (ψ) เป็น x และ velocity potential function (ϕ) เป็น y ดังนั้นเราจึงได้สมการเพื่อใช้สร้างกริดดังนี้

$$\nabla^2 x = \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0 \tag{2.6}$$
$$\nabla^2 y = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0 \tag{2.7}$$

การนำสมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติกมาใช้ในการสร้างกริดนั้นทำการกระจายจุดของกริดมีความสม่ำเสมอตลอดทั่วทั้งโดเมนแม้ว่าจะมีความไม่ต่อเนื่องของจุดที่ขอบของโดเมนก็ตาม ทั้งนี้เป็นผลมาจากลักษณะทางกายภาพของสมการอิลิปติก วิธีสร้างกริดโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติกเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมมากที่สุดแม้ว่าวิธีนี้ใช้เวลาในการสร้างกริดมากและยากกว่าเมื่อเปรียบเทียบวิธีเชิงพีชคณิตก็ตาม นอกจากนี้ การคำนวณหาฟังก์ชันควบคุมก็ทำได้ยาก ข้อเสียที่สำคัญของการสร้างกริดโดยใช้สมการอิลิปติกคือการควบคุมระยะห่างระหว่างกริดไม่เหมาะสมและผลเฉลยมีโอกาสลู่ออก นอกจากนี้ในขั้นตอนการทำซ้ำก็ใช้เวลามากด้วย

การกำจัดข้อเสียของการสร้างกริดโดยใช้สมการอิลิปติกสามารถทำได้โดยสร้างกริดเริ่มต้นด้วยวิธีเชิงพีชคณิตก่อนแล้วจึงปรับกริดให้สม่ำเสมอมากขึ้นด้วยวิธีการสร้างกริดแบบอิลิปติก การ

สร้างกริดโดยใช้วิธีเชิงพีชคณิตร่วมกับวิธีการสร้างกริดแบบอิลิปติกนี้ทำให้สามารถควบคุมระยะห่างระหว่างกริดได้เหมาะสม ช่วยลดเวลาในการคำนวณและยังป้องกันการลู่ออกเนื่องจากมีตำแหน่งของกริดเริ่มต้นที่ใกล้เคียงผลเฉลยอยู่แล้วจึงทำให้จำนวนรอบการทำซ้ำลดลง วิทยานิพนธ์นี้จึงเลือกใช้วิธีสร้างกริดโดยใช้วิธีเชิงพีชคณิตร่วมกับวิธีการสร้างกริดโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติกซึ่งจะกล่าวรายละเอียดในหัวข้อที่ 2.4



รูปที่ 2.3 Stream function (ψ) และ Velocity potential function (ϕ)

2.1.2 สมการเชิงอนุพันธ์แบบพาราโบลิก

สมการเชิงอนุพันธ์แบบพาราโบลิกใช้เป็นสมการครอบคลุมของปัญหาที่ขึ้นอยู่กับเวลาและปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการกระจาย (dissipation) เช่น ปัญหาการนำความร้อนในสภาวะไม่อยู่ตัว และการไหลแบบหนืดในสภาวะไม่อยู่ตัว เป็นต้น ซึ่งปัญหาเหล่านี้จัดอยู่ในประเภทปัญหาแบบ marching สมการที่เป็นต้นแบบของสมการเชิงอนุพันธ์แบบพาราโบลิกคือ สมการการแพร่กระจาย (diffusion equation) มีรูปแบบดังนี้

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \tag{2.8}$$

ผลเฉลยของสมการ (2.4) จะมีค่าลดลงแบบเป็นกำลังสองของค่าเริ่มต้น การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบพาราโบลิกทำได้โดยการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้น เราเรียกปัญหาแบบนี้ว่า initial-boundary-value problems ซึ่งเมื่อเกิดการรบกวนภายในผลเฉลยแล้ว การรบกวนนั้นจะส่งผลกระทบกับผลเฉลยในช่วงเวลาหลังจากเวลาที่รบกวนเท่านั้น ผลเฉลยที่เวลามากกว่าเวลาเริ่มต้นจะมีความสม่ำเสมอตลอดทั่วทั้งโดเมนแม้ว่าเงื่อนไขเริ่มต้นจะไม่ต่อเนื่องก็

ตาม ทั้งนี้ที่เวลาที่เป็นอนันต์นั่นคือพจน์ทางซ้ายมือของสมการ (2.4) มีค่าให้เท่ากับศูนย์ ($\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$) จะได้สมการเช่นเดียวกับสมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติก (2.3) ซึ่งเป็นสมการที่สภาวะอยู่ตัว

การสร้างกริดโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์แบบพาราโบลิกนั้นเป็นการนำวิธีการสร้างกริดโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติกและวิธีการสร้างกริดโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์แบบไฮเปอร์โบลิกมารวมกัน โดยที่มีการป้องกันการกระจายความไม่ต่อเนื่องของขอบของโดเมนซึ่งเป็นข้อดีของวิธีสร้างกริดแบบอิลิปติก และการคำนวณหาผลเฉลยมีความรวดเร็วซึ่งเป็นข้อดีของวิธีสร้างกริดแบบไฮเปอร์โบลิก

สมการครอบคลุมของการสร้างกริดโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์แบบพาราโบลิกที่พัฒนามาจากสมการปัวส์ซอง ดังนี้

$$x_\eta - Ax_{\xi\xi} = S_x \qquad (2.9)$$

$$y_\eta - Ay_{\xi\xi} = S_y \qquad (2.10)$$

จากสมการนี้เห็นได้ว่า source terms ทำหน้าที่เป็นฟังก์ชันควบคุม แม้การแก้สมการนี้จะไม่สะดวกเหมือนกับในกรณีของสมการอิลิปติกและสมการไฮเปอร์โบลิก แต่ผลเฉลยซึ่งเป็นแนวทแยงสาม (tri-diagonal) ทำให้การแก้สมการรวดเร็วกว่าสมการอิลิปติกมาก อย่างไรก็ตาม กริดที่ได้จะไม่มีคุณสมบัติตั้งฉาก (orthogonality) เหมือนกับสมการไฮเปอร์โบลิก

2.1.3 สมการเชิงอนุพันธ์แบบไฮเปอร์โบลิก

สมการเชิงอนุพันธ์แบบไฮเปอร์โบลิกใช้เป็นสมการครอบคลุมของปัญหาที่มีลักษณะเป็นคลื่น เช่น ปัญหาการสั่นสะเทือน ซึ่งปัญหาเช่นนี้จัดอยู่ในประเภทปัญหาแบบ marching สมการที่เป็นต้นแบบของสมการเชิงอนุพันธ์แบบไฮเปอร์โบลิกคือ สมการคลื่น (wave equation) ที่มีรูปแบบดังนี้

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \qquad (2.11)$$

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบไฮเปอร์โบลิกทำได้โดยการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต 1 เงื่อนไขและเงื่อนไขเริ่มต้น 2 เงื่อนไข ซึ่งจัดเป็นปัญหาแบบ initial-boundary-value problems ด้วย สำหรับปัญหาแบบไฮเปอร์โบลิกนี้ถ้าเงื่อนไขเริ่มต้นไม่ต่อเนื่องแล้ว ผลเฉลยจะยังคงไม่สม่ำเสมออยู่ตลอดเวลา

การสร้างกริดโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์แบบไฮเปอร์โบลิกสามารถทำได้ 2 วิธีได้แก่ cell area method และ arc-length method วิธี cell area method สร้างกริดจากคุณสมบัติตั้งฉาก (orthogonality) ของเส้นกริด ($x_\xi x_\eta - y_\xi y_\eta = 0$) และความสัมพันธ์ของจาร์โคเบียน ($J(\xi,\eta)$ = $x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$) โดยการกำหนดการกระจายจุดของกริดเริ่มต้นที่พื้นผิวหรือเส้นขอบของโดเมน จากนั้นสร้างกริดทีละแถวในทิศ η โดยมีเงื่อนไขของคุณสมบัติตั้งฉากบังคับอยู่ สำหรับ วิธี arc-length method มีวิธีการสร้างกริดคล้ายกับวิธีแรกแต่ต่างกันตรงที่ใช้ความสัมพันธ์ที่นิยามเส้นสัมผัส (tangent lines) แทนความสัมพันธ์ของจาร์โคเบียน

การสร้างกริดโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์แบบไฮเปอร์โบลิกเหมาะสมสำหรับปัญหาที่มีโดเมนแบบเปิด เนื่องจากมีลักษณะการสร้างกริดทีละแถว (marching) แบบ explicit นั่นคือเมื่อรู้การกระจายของแถวที่หนึ่งก็สามารถสร้างกริดในชั้นต่อไปได้ ซึ่งทำให้การสร้างกริดมีประสิทธิภาพและรวดเร็ว ลักษณะเฉพาะของการกระจายปริมาตรควบคุมป้องกันการซ้อนทับกันของเส้นกริดที่อาจเกิดขึ้นบริเวณขอบที่เป็นโค้งเว้า (concave boundaries) อย่างไรก็ตาม การสร้างกริดโดยวิธีนี้ไม่เป็นที่นิยมใช้กันโดยทั่วไปแม้ว่าจะมีขั้นตอนการสร้างกริดที่รวดเร็วกว่าการสร้างกริดโดยใช้สมการ อิลิปติกก็ตาม เนื่องจากความไม่ต่อเนื่องของความชันที่ขอบของโดเมนจะแพร่กระจายออกไปทำให้กริดที่ได้ไม่มีความสม่ำเสมอ นอกจากนี้การสร้างกริดโดยวิธีนี้มีข้อจำกัดตรงที่ไม่สามารถควบคุมรูปร่างของกริดที่ขอบด้านนอกของโดเมนได้ อย่างไรก็ตาม ข้อจำกัดนี้ไม่เป็นปัญหาในกรณีการไหลภายนอก (external flow)

2.2 คุณลักษณะของกริดที่ต้องการ

หัวข้อนี้จะกล่าวถึงคุณสมบัติโดยทั่วไปที่ใช้เป็นมาตรฐานในการวัดคุณภาพของกริด โดยวิธีสร้างกริดแต่ละวิธีมีการสร้างกริดที่มีลักษณะแตกต่างกันไปตามลักษณะทางกายภาพของวิธีนั้น ดังนั้นจึงควรเลือกวิธีสร้างกริดที่เหมาะสมกับปัญหา โดยพิจารณาจากคุณสมบัติดังนี้

1. กริดควรมีระยะห่างระหว่างกริด (grid spacing) ที่เหมาะสมและสามารถควบคุมได้ โดยที่ กริดควรมีระยะห่างระหว่างกริดน้อยในช่วงที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยสูง แต่ควรมีระยะห่างระหว่างกริดมากในช่วงที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยต่ำ นอกจากนี้ กริดที่ดีควรสอดคล้องกับสมบัติในเชิงเรขาคณิต (geometric properties) ที่สำคัญ 2 ประการได้แก่ expansion ratio และ aspect ratio ซึ่งสามารถนิยามได้ดังนี้

Expansion ratio คือ อัตราส่วนความกว้างของปริมาตรควบคุมหนึ่งต่ออีกปริมาตรควบคุมที่ติดกัน ซึ่งอัตราส่วนนี้สามารถแสดงเป็นสมการได้ดังนี้

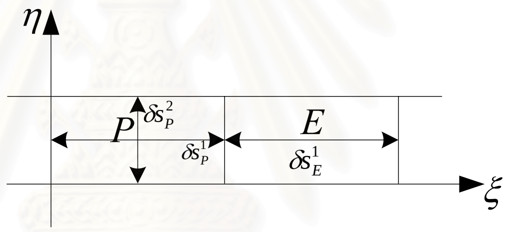
$$\text{Expansion ratio } \equiv \frac{\delta s_{P+1}^{i}}{\delta s_{P}^{i}} \tag{2.12}$$

อัตราส่วน expansion ของกริดที่ต้องการควรมีค่าเท่ากับหนึ่ง แต่ในบริเวณที่ผลเฉลยมีการเปลี่ยนแปลงสูงนั้นควรจะมีกริดที่ละเอียดซึ่งไม่ต้องการให้ค่าของอัตราส่วน Expansion เท่ากับหนึ่ง ทั้งนี้ค่ามากที่สุดของอัตราส่วน expansion ไม่ควรมีค่าเกิน 1.5

อัตราส่วนอีกชนิดหนึ่งที่ใช้ในการบอกลักษณะของกริดก็คือ aspect ratio ซึ่งนิยามโดยอัตราส่วนระหว่างด้านกว้างต่อด้านยาวภายในปริมาตรควบคุม ที่สามารถแสดงเป็นสมการได้ดังนี้

$$\text{Aspect ratio } \equiv \frac{\delta s_{P}^{i}}{\delta s_{P}^{j}} \tag{2.13}$$

โดย δs ในสมการ (2.12) และ (2.13) คือ ระยะต่างๆบนปริมาตรควบคุมดังแสดงในรูปที่ 2.4 สำหรับกรณีของสองมิติ ทั้งนี้จุด $P+1$ มีค่าเท่ากับจุด E เมื่อ i มีค่าเท่ากับ 1

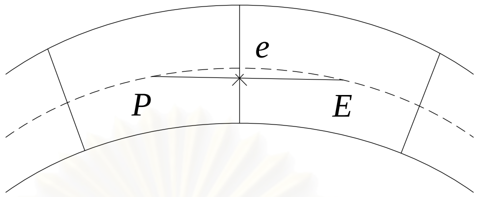


รูปที่ 2.4 ระยะ δs บนปริมาตรควบคุมแบบสองมิติ

อัตราส่วน aspect ที่เหมาะสมควรมีค่าเท่ากับหนึ่ง ซึ่งถ้าอัตราส่วน aspect ยิ่งห่างจากหนึ่งมากเท่าใดค่าสัมประสิทธิ์ a_{nb} ซึ่งเป็นค่าที่บ่งบอกพื้นที่หน้าตัดของปริมาตรควบคุมจะมีค่าในทิศทางหนึ่งมากกว่าในทิศทางอื่น ส่งผลให้การเชื่อมโยงระหว่างทิศของพิกัดที่ต่างกันไม่ดีและขาดเสถียรภาพ นอกจากนี้ค่าอัตราส่วน aspect ที่มากขึ้นทำให้ค่าความไม่ตั้งฉากในสมการที่ดิสครีไทซ์แล้วมากเกินความจำเป็น ซึ่งค่าอัตราส่วน aspect นี้ไม่ควรมีค่าเกิน 10 Melaaen (1990)

2. กริดควรมีความสม่ำเสมอ (smoothness) ซึ่งแม้ว่าคุณสมบัตินี้จะตรงกันข้ามกับความต้องการที่จะให้มีกริดอยู่ในบริเวณที่สนใจศึกษาก็ตาม ในการทำให้กริดมีความสม่ำเสมอนั้น ความต่างรูปกันของกริด (non-uniformity) และความโค้งของกริด (curvature) เป็นสิ่งสำคัญ เนื่องจากคุณสมบัติทั้งสองนี้ทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษมีค่ามาก นอกจากนี้ กริดไม่ควรมีการขยายหรือย่อจากเซลล์หนึ่งไปอีกเซลล์มากจนเกินไป ความสม่ำเสมอนี้มีความสำคัญต่อความแม่นยำในการคำนวณหาพจน์เชิงเรขาคณิต (geometric terms) โดยเฉพาะอย่างยิ่งในสมการโมเมนตัมซึ่งมีพจน์เกี่ยวกับความโค้งอยู่ (curvature terms) เราจำเป็นต้องมีกริดที่มีความต่อเนื่อง

สม่ำเสมอเพื่อให้ได้ผลการคำนวณที่แม่นยำ นอกจากนี้พจน์เกี่ยวกับความโค้งที่มีค่ามากๆยังทำให้การประมาณค่าในช่วงโดยการถ่วงน้ำหนักเชิงเส้นไม่มีความแม่นยำอีกด้วยดังรูปที่ 2.5 เพื่อทำให้ได้ผลเฉลยที่ดีขึ้น ความโค้งของกริดควรจะลดลงหรือควรแบ่งกริดในช่วงโค้งให้ละเอียดมากขึ้นหรือใช้อันดับในการประมาณค่าในช่วงให้สูงขึ้น



รูปที่ 2.5 การประมาณค่าในช่วงโดยการถ่วงน้ำหนักเชิงเส้นในกริดที่โค้งมากๆ

3. กริดควรมีคุณสมบัติตั้งฉาก (orthogonality) แม้ว่าจะเป็นกริดบนพิกัดโค้งแบบไม่ตั้งฉากก็ตาม เนื่องจากกริดแบบตั้งฉากสามารถลดค่าความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษได้ ในทางกลับกัน การที่กริดตั้งฉากตลอดทั่วโดเมนนั้นกลับไม่เป็นที่ต้องการและไม่มีความจำเป็น ทั้งนี้ เราต้องการให้กริดมีอยู่ในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยสูง แม้ว่ากริดจะมีความไม่ตั้งฉากมากขึ้นก็ตาม จากสมการที่ดิสครีไทซ์แล้วพบว่า กริดที่เกือบจะตั้งฉาก (nearly orthogonal grids) จะมีความเสถียรภาพมากขึ้นและลู่เข้ารวดเร็วขึ้น อย่างไรก็ตาม ความไม่ตั้งฉากของกริดนั้นควรที่จะควบคุมได้ ทั้งนี้ การที่กริดตั้งฉากที่ขอบของโดเมนนั้นมีข้อดีคือช่วยลดความซับซ้อนของเงื่อนไขขอบเขตลง นอกจากนี้การที่กริดไม่ตั้งฉากที่ขอบของโดเมนในกรณีที่โดเมนบิดเบี้ยวมากนั้น ทำให้ความแม่นยำที่ขอบลดลงและความแม่นยำนี้อาจจะกระจายไปภายในโดเมนและทำให้ผลเฉลยโดยรวมทั้งหมดไม่แม่นยำไปด้วย

การสร้างกริดให้มีคุณสมบัติครบทั้ง 3 ข้อนั้นทำได้ยาก โดยวิธีการสร้างกริดแต่ละวิธีจะให้คุณสมบัติที่แตกต่างกันดังนี้ การสร้างกริดด้วยวิธีเชิงพีชคณิตสามารถควบคุมระยะห่างระหว่างกริดได้ดีแต่กริดจะไม่มีความสม่ำเสมอ ในทางกลับกันการสร้างกริดโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติกให้กริดที่มีความสม่ำเสมอแต่กริดจะไม่ตั้งฉากกัน ส่วนวิธีตัวแปรซับซ้อนกริดจะไม่มีคุณสมบัติตั้งฉากและยากในการควบคุมระยะห่างระหว่างกริดได้ นอกจากคุณสมบัติของกริดทั้ง 3 ข้อนี้แล้ว เราควรพิจารณาถึงความซับซ้อนในการสร้างกริดและระยะเวลาในการคำนวณด้วย กล่าวคือ วิธีการสร้างกริดที่เหมาะสมต้องไม่ซับซ้อนและยากในการศึกษา อีกทั้งวิธีการสร้างกริดที่เหมาะสมไม่ควรใช้เวลาในการสร้างกริดนานเกินไปอันจะส่งผลถึงระยะเวลาในการคำนวณที่เพิ่มขึ้นอีกด้วย

สำหรับวิทยานิพนธ์นี้จะทำการสร้างกริดเริ่มต้นโดยใช้วิธีเชิงพีชคณิต แล้วทำการปรับ กริดโดยการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติก ซึ่งกริดที่ได้จะมีระยะห่างระหว่างกริดที่เหมาะสมและมี

ความสม่ำเสมอด้วย ในหัวข้อต่อไปจะกล่าวถึงขั้นตอนการสร้างกริดโดยวิธีเชิงพีชคณิต จากนั้นในหัวข้อสุดท้ายกล่าวถึงขั้นตอนการสร้างกริดโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติก

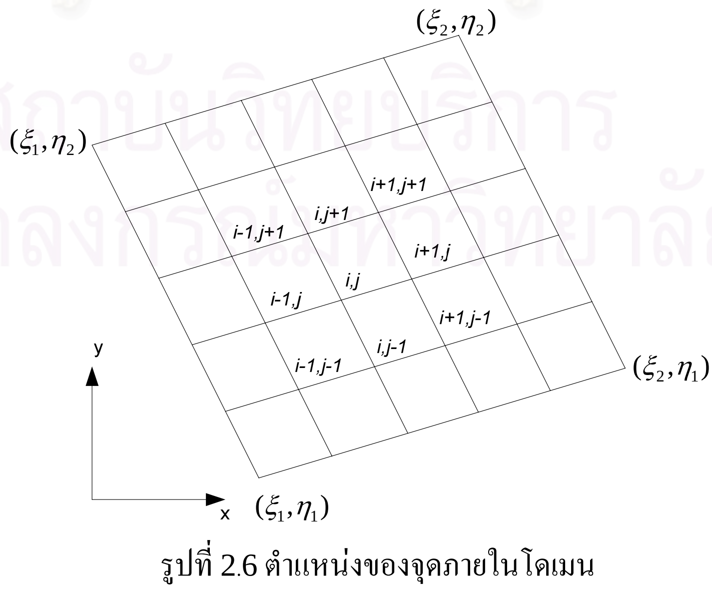
2.3 การสร้างกริดด้วยวิธีเชิงพีชคณิต

การสร้างกริดด้วยวิธีเชิงพีชคณิตจะทำการสร้างกริดโดยอาศัยฟังก์ชันการแปลงพิกัดระหว่าง computational space กับ physical space ขั้นตอนในการสร้างกริดด้วยวิธีนี้ เริ่มต้นจากการกระจายจุดกริดบนเส้นขอบของโดเมนเสียก่อน จากนั้นจึงใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงเพื่อสร้างจุดกริดที่อยู่บริเวณภายในโดเมน สำหรับการประมาณค่าในช่วง (interpolation) สามารถทำได้หลายวิธี ทั้งนี้ Transfinite interpolation หรือ TFI เป็นวิธีที่นิยมใช้มากที่สุด และเป็นวิธีที่ถูกเลือกนำมาใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

การประมาณค่าในช่วงโดยการใช้ฟังก์ชันพหุนามของลากรองจ์ (Lagrange interpolating polynomials) เป็นวิธีที่นิยมใช้กันมากวิธีหนึ่ง ทั้งนี้เราสามารถใช้ฟังก์ชันนี้ในการกระจายจุดกริดบนเส้นขอบของโดเมนได้ ฟังก์ชันพหุนามของลากรองจ์นี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบโดยทั่วไปสำหรับสองมิติในทิศทาง ξ และ η ตามลำดับ (ดังแสดงในรูปที่ 2.6) ดังนี้

$$r(\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n\left(\frac{\xi}{I}\right) r(\xi_n,\eta) \tag{2.14}$$

$$r(\xi,\eta) = \sum_{m=1}^{M} \psi_m\left(\frac{\eta}{J}\right) r(\xi,\eta_m) \tag{2.15}$$



รูปที่ 2.6 ตำแหน่งของจุดภายในโดเมน

โดยที่ $\sum$ เป็นสัญลักษณ์ของการบวก และ I , J คือ ค่ามากที่สุดของ ξ และ η ตามลำดับ และ N , M คือ จำนวนข้อมูลที่นำมาใช้ในการประมาณค่า เช่น มีข้อมูลจำนวน 2 ข้อมูล แล้ว $N = 2$ ซึ่งจะเป็นการประมาณค่าในช่วงเชิงเส้น หรือมีข้อมูลจำนวน 3 ข้อมูล แล้ว $N = 3$ ซึ่งจะเป็นการประมาณค่าในช่วงกำลังสอง เป็นต้น ส่วน ϕ_n และ ψ_m คือ blending function เป็นฟังก์ชันซึ่งมีความสอดคล้องกับเงื่อนไขดังนี้

$$\phi_n\left(\frac{\xi_l}{I}\right) = \delta_n^l \qquad n = 1, 2 \quad l = 1, 2 \tag{2.16}$$

$$\psi_m\left(\frac{\eta_l}{J}\right) = \delta_m^l \qquad m = 1, 2 \quad l = 1, 2 \tag{2.17}$$

ฟังก์ชัน ϕ_n และ ψ_m สามารถหาได้โดยใช้ฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วงพหุนามทั่วไปของลากรองจ์ (Lagrange interpolation polynomials) คือ

$$\phi_n\left(\frac{\xi}{I}\right) = \prod_{l=1}^{N} \frac{\xi - \xi_l}{\xi_n - \xi_l} \qquad l \neq n \tag{2.18}$$

$$\psi_m\left(\frac{\eta}{J}\right) = \prod_{l=1}^{M} \frac{\eta - \eta_l}{\eta_m - \eta_l} \qquad l \neq m \tag{2.19}$$

โดยที่ $\prod$ เป็นสัญลักษณ์ของการคูณ

สำหรับฟังก์ชัน ϕ_n และ ψ_m นี้ มีคุณสมบัติโดยทั่วไปกล่าวคือ ϕ_n มีค่าเท่ากับหนึ่งที่ตำแหน่ง ξ_n และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ตำแหน่ง ξ ของข้อมูลอื่นๆ

สำหรับกรณีที่ฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วงของลากรองจ์เป็นแบบเชิงเส้น (linear Lagrange interpolation functions) เราสามารถลดรูปสมการ (2.14) และ (2.15) ได้เป็น

$$r(\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{2} \phi_n\left(\frac{\xi}{I}\right) r(\xi_n,\eta) = \phi_1\left(\frac{\xi}{I}\right) r(\xi_1,\eta) + \phi_2\left(\frac{\xi}{I}\right) r(\xi_2,\eta) \tag{2.20}$$

$$r(\xi,\eta) = \sum_{m=1}^{2} \psi_m\left(\frac{\eta}{J}\right) r(\xi,\eta_m) = \psi_1\left(\frac{\eta}{J}\right) r(\xi,\eta_1) + \psi_2\left(\frac{\eta}{J}\right) r(\xi,\eta_2) \tag{2.21}$$

ส่วน blending function (ϕ_n และ ψ_m) สำหรับกรณีที่เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นสามารถหาได้โดยใช้สมการดังนี้

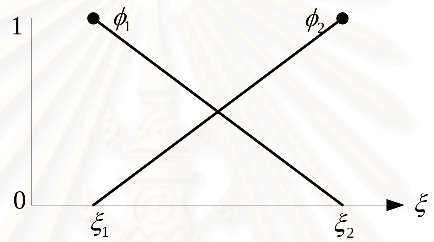
$$\phi_1\left(\frac{\xi}{I}\right) = 1 - \frac{\xi}{I} \tag{2.22}$$

$$\phi_2\left(\frac{\xi}{I}\right)=\frac{\xi}{I} \tag{2.23}$$

$$\psi_1\left(\frac{\eta}{J}\right)=1-\frac{\eta}{J} \tag{2.24}$$

$$\psi_2\left(\frac{\eta}{J}\right)=\frac{\eta}{J} \tag{2.25}$$

Blending function สำหรับกรณีที่ฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วงของลากรองจ์เป็นแบบเชิงเส้น จะมีลักษณะการกระจายดังแสดงในรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7 ฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วงของลากรองจ์แบบเชิงเส้น

สำหรับ blending function (ϕ_n และ ψ_m) ที่ฟังก์ชันเชิงเส้น มีคุณสมบัติกล่าวคือ ϕ_n มีค่าเท่ากับหนึ่งที่ตำแหน่ง ξ_1 และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ตำแหน่ง ξ ของข้อมูลอื่นๆ

$$\phi_1=\begin{cases}1 & at\ \xi=\xi_1\\ 0 & at\ \xi=\xi_2\end{cases} \tag{2.26}$$

$$\phi_2=\begin{cases}0 & at\ \xi=\xi_1\\ 1 & at\ \xi=\xi_2\end{cases} \tag{2.27}$$

เมื่อได้ตำแหน่งของจุดกริดบนเส้นขอบของโดเมนแล้ว ขั้นตอนต่อไปจะเป็นการหาจุดกริดที่อยู่ภายในโดเมน โดยการนำสมการ (2.14) และ (2.15) มารวมกัน แล้วเพิ่มพจน์ลงไป จะได้สมการในการกระจายจุดกริดภายในโดเมนมีรูปแบบทั่วไปดังนี้

$$r(\xi,\eta)=\sum_{n=1}^{2}\phi_n\left(\frac{\xi}{I}\right)r(\xi_n,\eta)+\sum_{m=1}^{2}\psi_m\left(\frac{\eta}{J}\right)r(\xi,\eta_m)-\sum_{n=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}\phi_n\left(\frac{\xi}{I}\right)\psi_m\left(\frac{\eta}{J}\right)r(\xi_n,\eta_m) \tag{2.28}$$

วิธีสร้างกริดโดย TFI ใช้เวลาในการคำนวณน้อยเนื่องจากไม่ต้องใช้กระบวนการทำซ้ำ สามารถควบคุมระยะห่างระหว่างกริดได้ดีแต่การเลือกฟังก์ชัน ϕ_n และ ψ_m ยาก ข้อเสียของ TFI คือ

กริดจะไม่มีความสม่ำเสมอเนื่องจากไม่สามารถควบคุมมุมระหว่างเส้นกริดได้ดีเพียงพอ ปัญหานี้สามารถแก้ได้ด้วยวิธีสร้างกริดโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติก ที่จะทำให้กริดมีความสม่ำเสมอมากขึ้น

2.4 การสร้างกริดโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติก

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงขั้นตอนการสร้างกริดโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติกซึ่งแบ่งได้เป็น 3 ส่วนหลัก คือ สมการครอบคลุมการสร้างกริด ฟังก์ชันควบคุม และการแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิต การสร้างกริดโดยการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติกสามารถทำได้โดยใช้สมการลาปลาซ (Laplace equation) หรือสมการปัวส์ซอง (Poisson equation) ซึ่งมีความแตกต่างกันดังนี้

การสร้างกริดโดยการแก้สมการลาปลาซเป็นวิธีการสร้างกริดที่ง่ายที่สุด โดยสมการลาปลาซ มีรูปแบบสมการคือ

$$\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_i^2} = 0 \tag{2.29}$$

โดยที่ $(\xi_i) = (\xi, \eta)$ และ $(x_i) = (x, y)$

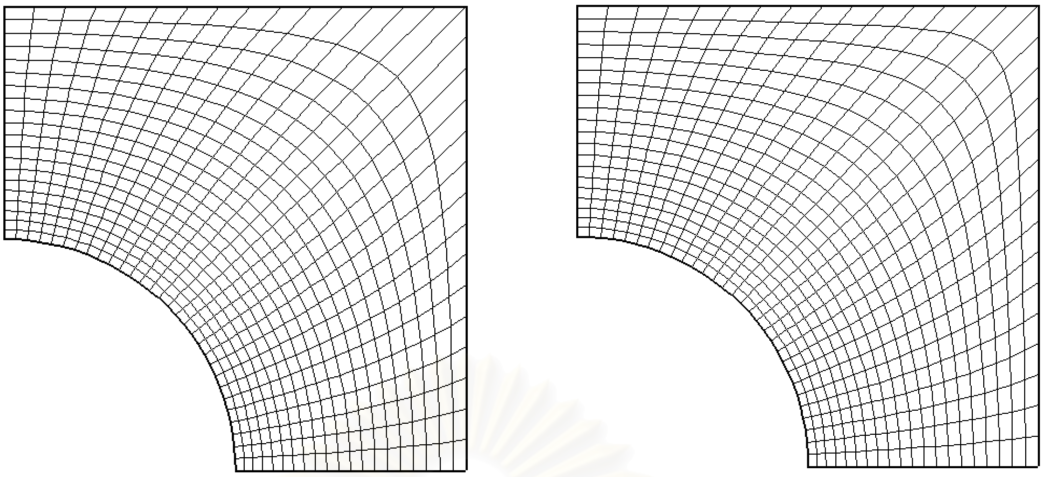
กริดที่ได้จากการสร้างกริดโดยการแก้สมการลาปลาซจะมีความสม่ำเสมอตลอดทั่วทั้งโดเมนดังรูปที่ 2.8 (ก) แต่ไม่สามารถควบคุมการกระจายของเส้นกริดให้มีกริดอยู่ในบริเวณที่เป็นมุมของโดเมนได้ ทำให้ผลการคำนวณบริเวณไม่แม่นยำ นอกจากนี้ กริดจะชิดกันจนเกินไปบริเวณที่เป็นโค้งคว่ำดังรูปที่ 2.9 (ก) แต่กริดจะห่างกันจนเกินไปบริเวณที่เป็นโค้งหงายดังรูปที่ 2.9 (ข)

การสร้างกริดโดยการแก้สมการปัวส์ซอง สามารถควบคุมการกระจายของเส้นกริดได้ดี โดยสมการปัวส์ซอง มีรูปแบบสมการคือ

$$\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_i^2} = P_i \tag{2.30}$$

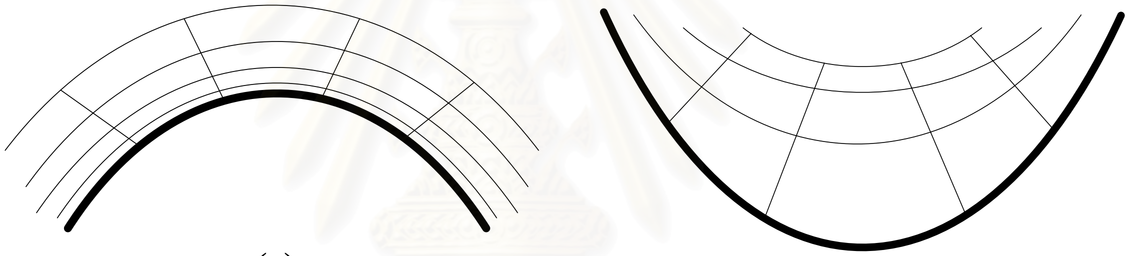
โดยที่ $(P_i) = (P, Q)$

กริดที่ได้จากการสร้างกริดโดยการแก้สมการปัวส์ซองมีลักษณะดังรูปที่ 2.8 (ข) ซึ่งเส้นกริดมีความสม่ำเสมอตลอดทั่วทั้งโดเมนและสามารถควบคุมการกระจายของเส้นกริดบริเวณที่เป็นมุมของโดเมนได้ ทำให้ผลการคำนวณบริเวณมีความแม่นยำ



(ก) (ข)

รูปที่ 2.8 ลักษณะของกริดที่สร้างจากสมการครอบคลุมที่เป็น (ก) สมการลาปลาซและ (ข) สมการปัวส์ซอง



(ก) (ข)

รูปที่ 2.9 กริดบริเวณ (ก) โค้งคว่ำ (ข) โค้งหงาย

สำหรับสมการปัวส์ซอง (2.30) เราสามารถกระจายพจน์สำหรับกรณีที่เป็นสองมิติ ดังสมการต่อไปนี้

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = P(\xi,\eta) \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = Q(\xi,\eta) \tag{2.32}$$

สมการเหล่านี้เป็นสมการของปัญหาที่ใช้เงื่อนไขขอบเขตในการหาผลเฉลย (boundary-value problems) และสมการเหล่านี้มีความเหมาะสมในการนำมาใช้ในการสร้างกริดเนื่องจากปัญหามีสมการครอบคลุมของปัญหาเป็นสมการในประเภทเดียวกัน จากสมการ (2.31) นี้มีตัวแปรในพิกัดกระชับขอบเขตคือ $(\xi_i) = (\xi,\eta)$ เป็นตัวแปรตาม (dependent variable) และมีตัวแปร

ของพิกัดคาร์ทีเซียนคือ $(x_i) = (x, y)$ เป็นตัวแปรอิสระ (independent variable) เนื่องจากเส้นกริดแต่ละเส้นมีค่าเป็นค่าคงที่ ดังนั้นเพื่อความสะดวก เราจึงควรแปลงสมการ (2.30) ให้ตัวแปรตามสลับกับตัวแปรอิสระ โดยใช้กฎลูกโซ่ (chain rule) ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \tag{2.34}$$

เราสามารถกระจายและจัดรูปสมการ (2.33) และ (2.34) ให้อยู่ในรูปแบบของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

จากสมการ (2.35) และ (2.36) นี้ จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง physical space และ computational space ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} \tag{2.37}$$

หรือ

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

โดยที่ J คือเมตริกซ์จาร์โคเบียน ซึ่งมีสมการคือ

$$J(\xi,\eta)=\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi} \tag{2.39}$$

จากความสัมพันธ์ของกฎลูกโซ่ดังสมการ (2.38) เมื่อประยุกต์ความสัมพันธ์นี้เพื่อหาพจน์ต่างๆ ทางด้านซ้ายมือของสมการปัวส์ซอง (2.30) ซึ่งมีอยู่สี่พจน์ด้วยกัน สามารถแปลงตัวแปรและเขียนพจน์แรก คือ $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}\\
\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}&=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}\\
\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}&=\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\frac{\partial y}{\partial\eta}}{\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}}\right)+\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\frac{\partial y}{\partial\eta}}{\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}}\right)
\end{aligned} \tag{2.40}$$

เช่นเดียวกันกับพจน์ $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$ ในสมการ (2.40) เราสามารถแปลงพจน์ที่เหลือได้แก่ $\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$ และ $\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}$ โดยใช้หลักการเดียวกัน และได้สมการดังนี้

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{-\frac{\partial x}{\partial\eta}}{\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}}\right)+\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{-\frac{\partial x}{\partial\eta}}{\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}}\right) \tag{2.41}$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{-\frac{\partial y}{\partial\xi}}{\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}}\right)-\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{-\frac{\partial y}{\partial\xi}}{\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}}\right) \tag{2.42}$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}=-\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{-\frac{\partial x}{\partial\xi}}{\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}}\right)+\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{-\frac{\partial x}{\partial\xi}}{\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}}\right) \tag{2.43}$$

เมื่อได้พจน์ทั้งสี่ ($\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$ และ $\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}$) ในสมการ (2.40) ถึง (2.43) แล้ว จากนั้นจึงแทนพจน์เหล่านี้ลงในสมการปัวส์ซอง (2.31) และ (2.32) สามารถเขียนสมการครอบคลุมของการสร้างกริด (grid generation governing equations) ได้ดังนี้

$$\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\right]\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\left[\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right]\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2\right]\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = -J^2\left(P\frac{\partial x}{\partial \xi} + Q\frac{\partial x}{\partial \eta}\right) \tag{2.44}$$

$$\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\right]\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\left[\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right]\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2\right]\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = -J^2\left(P\frac{\partial y}{\partial \xi} + Q\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) \tag{2.45}$$

สมการครอบคลุมของการสร้างกริด (2.44) และ (2.45) นี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น (non-linear equations) การแก้สมการสามารถทำโดยการทำซ้ำ (iteration) สามารถจัดรูปสมการได้เป็น

$$\alpha\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = -J^2\left(P\frac{\partial x}{\partial \xi} + Q\frac{\partial x}{\partial \eta}\right) \tag{2.46}$$

$$\alpha\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = -J^2\left(P\frac{\partial y}{\partial \xi} + Q\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) \tag{2.47}$$

โดย

$$\alpha = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 \tag{2.48}$$

$$\beta = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} \tag{2.49}$$

$$\gamma = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 \tag{2.50}$$

สมการครอบคลุมของการสร้างกริด (2.44) และ (2.45) นี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งต้องทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตในการหาผลเฉลย การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตนี้สามารถทำได้สองวิธีด้วยกันได้แก่ Dirichlet และ Neumann การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตแบบ Dirichlet สามารถทำได้โดยการกำหนดตำแหน่งของจุดกริดไว้บนเส้นขอบของโดเมน ในกรณีนี้เราจะกำหนดค่าฟังก์ชันควบคุมเพื่อให้ได้มุมตัดกันและระยะห่างระหว่างกริดตามที่ต้องการ ซึ่งรายละเอียดของการกำหนดค่าฟังก์ชันควบคุมนี้จะกล่าวในหัวข้อย่อยต่อไป และการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตแบบ Neumann สามารถทำได้โดยการกำหนดความชันของเส้นพิกัดบนขอบของโดเมนหรือกำหนดมุมที่ตัดกันระหว่างเส้นพิกัดกับเส้นขอบของโดเมน ซึ่งในกรณีนี้เราไม่จำเป็นต้องกำหนดค่าฟังก์ชัน

ควบคุม $(P_i = 0)$ อย่างไรก็ตาม เราไม่สามารถควบคุมการกระจายของจุดบนขอบของโดเมนและระยะห่างระหว่างกริดได้

สมการ (2.44) และ (2.45) นี้เป็นสมการครอบคลุมของการสร้างกริดซึ่งอยู่ในรูปแบบทั่วไป เราสามารถหาผลเฉลยของสมการนี้ซึ่งผลเฉลยนี้เป็นพิกัดคาร์ทีเซียน (x_i) บนกริดที่มีระยะห่างเท่าๆกันบนระนาบการคำนวณได้ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ในเบื้องต้นนี้ เราจะทำสมการ (2.46) และ (2.47) ซึ่งสมการไม่เชิงเส้นให้เป็นสมการเชิงเส้นเสมือน (quasi-linear) โดยการกำหนด α, β และ γ ให้เป็นค่าคงที่ จากนั้นจึงทำการดิสครีไทซ์สมการเชิงอนุพันธ์ให้เป็นสมการเชิงพีชคณิตด้วยวิธี central differencing ซึ่งเป็นวิธีที่มีความแม่นยำเป็นอันดับสอง สำหรับอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสอง เราสามารถทำการดิสครีไทซ์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2\delta\xi} \tag{2.51}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = \frac{\varphi_{i+1} + \varphi_{i-1} - 2\varphi_i}{\delta\xi^2} \tag{2.52}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\varphi_{i+1,j+1} + \varphi_{i-1,j-1} - \varphi_{i+1,j-1} - \varphi_{i-1,j+1}}{4\delta\xi\delta\eta} \tag{2.53}$$

โดย φ คือค่า x หรือ y

แทนสมการ central differencing (2.51) – (2.53) ลงในสมการเชิงอนุพันธ์ (2.46) และ (2.47) จากนั้นกำหนดค่าให้ $\delta\xi = 1$ และ $\delta\eta = 1$ เราจะได้ระบบสมการเชิงพีชคณิตดังนี้

$$\begin{aligned} &\alpha\left[x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}\right] - \frac{\beta}{2}\left[x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1} + x_{i-1,j-1}\right] + \\ &\gamma\left[x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}\right] = -J^2\left(P\frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2} + Q\frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned} &\alpha\left[y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}\right] - \frac{\beta}{2}\left[y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1} - y_{i+1,j-1} + y_{i-1,j-1}\right] + \\ &\gamma\left[y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}\right] = -J^2\left(P\frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2} + Q\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.55}$$

หลังจากทำการดิสครีไทซ์สมการครอบคลุมของการสร้างกริดโดยใช้ central differencing แล้ว สามารถเขียนระบบสมการเชิงพีชคณิตดังแสดงในสมการ (2.54) และ (2.55) ซึ่งเราจะกล่าวถึงระเบียบวิธีต่างๆในการแก้ระบบสมการนี้ในหัวข้อย่อยที่ 2.4.2 หลังจากที่แก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตนี้แล้วจะได้ผลเฉลยซึ่งเป็นตำแหน่งของแต่ละจุดบนพิกัดคาร์ทีเซียนที่เป็นเส้นกริดของโดเมนตามที่ต้องการ ส่วน $(P_i) = (P, Q)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันควบคุมนั้นทำหน้าที่คล้าย

กับเป็น source term ในสมการ (2.54) และ (2.55) ซึ่งถ้าเรากำหนดให้ $P_i = 0$ จะเป็นการแก้สมการลาปลาซ ส่งผลให้กริดที่ได้มีความสม่ำเสมอตลอดทั่วทั้งโดเมน แต่ถ้าเรากำหนดให้ $P_i \neq 0$ จะเป็นการแก้สมการปัวส์ซอง ซึ่งการกำหนดค่าของฟังก์ชันควบคุมที่เหมาะสมจะกล่าวถึงในหัวข้อต่อไป

2.4.1 ฟังก์ชันควบคุม

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงฟังก์ชันควบคุม (P_i) ซึ่งสามารถใช้เพื่อปรับระยะห่างระหว่างเส้นกริด ปรับความสม่ำเสมอของกริด และปรับคุณสมบัติไม่ตั้งฉาก (non-orthogonality) ของกริดได้ การกำหนดค่าที่เหมาะสมให้กับฟังก์ชันควบคุมเพื่อที่จะควบคุมการกระจายจุดหรือเส้นของกริดโดยเราสามารถดึงเส้นสองเส้นหรือจุดสองจุดเข้ามาหากันหรือผลักให้ออกจากกัน และสามารถบิดโค้งได้ เราสามารถหาฟังก์ชันควบคุมได้โดยมีขั้นตอนต่างๆ ดังนี้

จัดรูประบบสมการครอบคลุมของการสร้างกริด (2.54) และ (2.55) ให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ S \end{bmatrix} \tag{2.56}$$

โดยที่

$$R = -\frac{1}{J^2}\left\{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\right]\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\left[\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right]\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2\right]\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}\right\} \tag{2.57}$$

$$S = -\frac{1}{J^2}\left\{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\right]\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\left[\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right]\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2\right]\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}\right\} \tag{2.58}$$

ทำการแก้ระบบสมการ (2.56) เพื่อหาฟังก์ชันควบคุมได้ ดังนี้

$$P = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}R - \frac{\partial x}{\partial \eta}S\right) \tag{2.59}$$

$$Q = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}S - \frac{\partial y}{\partial \xi}R\right) \tag{2.60}$$

ทั้งนี้เราสามารถสมมติฟังก์ชันควบคุมให้อยู่ในรูปแบบฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลได้ ซึ่งรูปแบบของ Thompson et al. (1985) ที่เป็นรูปแบบที่นิยมใช้กันทั่วไปสามารถแสดงได้ ดังนี้

$$P(\xi,\eta) = -\sum_{l=1}^{m} a_{l1}\cdot \mathrm{sgn}(\xi-\xi_l)\cdot \exp(-b_{l1}\cdot T_l) \tag{2.61}$$

$$Q(\xi,\eta) = -\sum_{l=1}^{m} a_{l2}\cdot \mathrm{sgn}(\eta-\eta_l)\cdot \exp(-b_{l2}\cdot T_l) \tag{2.62}$$

โดย

$$T_l = \sqrt{c_{l1}(\xi-\xi_l)^2 + c_{l2}(\eta-\eta_l)^2} \tag{2.63}$$

โดย $\mathrm{sgn}(a)$ คือการคิดเฉพาะเครื่องหมายบวกหรือลบของค่าภายในวงเล็บ

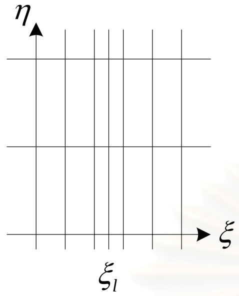
ในการระบุว่าเส้นพิกัดใดระหว่างที่มีค่า ξ และ/หรือ η เป็นค่าคงที่ จะถูกดึงดูด (attraction) กับเส้นพิกัดหรือจุดที่กำหนดไว้ เราจะใช้ค่าสัมประสิทธิ์ a_{ln} และ c_{ln} เป็นตัวกำหนด นอกจากนี้ เราสามารถควบคุมขนาด (strength) ที่ใช้ในการดึงดูดได้โดยการใช้ตัวประกอบ b_{ln} (decay factor) ยกตัวอย่างเช่น กรณีที่เส้นพิกัด ξ ถูกดึงดูด ก็จะมีค่าสัมประสิทธิ์ a_{l1} ไม่เท่ากับศูนย์ เช่นเดียวกันกับเส้นพิกัด η ถูกดึงดูด ก็จะมีค่าสัมประสิทธิ์ a_{l2} ไม่เท่ากับศูนย์ การดึงดูดของเส้นพิกัดในทิศของเส้นพิกัดหรือจุดได้แสดงไว้ในตารางที่ 2.2

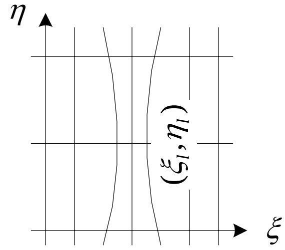
ตารางที่ 2.2 สัมประสิทธิ์ที่ใช้ในฟังก์ชันควบคุม P_i

เส้นที่ถูกดึงดูด	**ระนาบ เส้น หรือจุด ที่ดึงดูดระนาบข้างเคียง**
$a_{l1} \neq 0$ สำหรับเส้น ξ เป็นค่าคงที่	$a_{l1} \neq 0,\ a_{l2} = 0$ สำหรับเส้น $\xi = \xi_l$ $c_{l1} \neq 0,\ c_{l2} = 0$
$a_{l2} \neq 0$ สำหรับเส้น η เป็นค่าคงที่	$a_{l1} = 0,\ a_{l2} \neq 0$ สำหรับเส้น $\eta = \eta_l$ $c_{l1} = 0,\ c_{l2} \neq 0$
	$a_{l1} \neq 0,\ a_{l2} \neq 0$ สำหรับจุด $(\xi,\eta)=(\xi_l,\eta_l)$ $c_{l1} \neq 0,\ c_{l2} \neq 0$

พิจารณารูปที่ 2.10 แสดงให้เห็นผลของฟังก์ชันดึงดูดแบบสองมิติ ซึ่งเป็นการดึงดูดเส้นพิกัดที่ ξ เป็นค่าคงที่ ซึ่งเป็นผลของฟังก์ชัน P โดยมีสัมประสิทธิ์ $a_{l1} \neq 0$ สำหรับรูปที่ 2.10 (ก)

ทางซ้ายมือ เส้นพิกัดที่ ξ เป็นค่าคงที่ถูกดึงดูดไปหาเส้น $\xi = \xi_l$ ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์ $c_{l1} \neq 0$ และ $c_{l2} = 0$ สำหรับรูปที่ 2.10 (ข) ทางขวามือ เส้นพิกัดที่ ξ เป็นค่าคงที่ถูกดึงดูดไปหาจุด $(\xi, \eta) = (\xi_l, \eta_l)$ ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์ $c_{l1} \neq 0$ และ $c_{l2} \neq 0$ ทั้งนี้สำหรับฟังก์ชัน P จะไม่มีการดึงดูดของเส้น η เป็นค่าคงที่ (ξ_l, η_l)





รูปที่ 2.10 การใช้ฟังก์ชันควบคุมในการ (ก) ดึงเส้นและ (ข) ดึงจุด

หลังจากดิสครีไทซ์สมการครอบคลุมของการสร้างกริดให้เป็นระบบสมการเชิงพีชคณิตและเลือกฟังก์ชันควบคุมแล้ว ในหัวข้อย่อยต่อไปจะการแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตเพื่อหาผลเฉลยของสมการ

2.4.2 การแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิต

การแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตสามารถแบ่งได้เป็นสองแบบด้วยกันคือวิธีตรงและวิธีทำซ้ำ วิธีตรงเช่น การกำจัดแบบเกาส์, Thomas algorithm หรือ Chelosky method เป็นต้น ส่วนวิธีทำซ้ำเช่น การทำซ้ำจาร์โคบี การทำซ้ำแบบจุดของเกาส์ซีเดล การทำซ้ำแบบเส้นของเกาส์ซีเดล วิธีผ่อนปรนเกินสืบเนื่องแบบจุด (PSOR) หรือวิธีผ่อนปรนเกินสืบเนื่องแบบเส้น (LSOR) alternating direction implicit (ADI) เป็นต้น

การแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตด้วยวิธีตรงมีข้อเสียคือใช้เวลามากกว่าวิธีทำซ้ำ และวิธีตรงจะไวต่อค่าความคลาดเคลื่อนอันเนื่องมาจากการปัดเศษ (round-off errors) ยิ่งในกรณีที่เป็นการแก้ระบบสมการใหญ่ ค่าความคลาดเคลื่อนนี้จะกลายเป็นปัญหาสำคัญ ในทางกลับกันค่าความคลาดเคลื่อนสำหรับการแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตด้วยวิธีทำซ้ำไม่เป็นปัญหาเนื่องจากค่าความคลาดเคลื่อนจะถูกแก้ไขในแต่ละรอบการทำซ้ำ ดังนั้นจึงให้ผลการคำนวณที่ถูกต้อง

ในส่วนของการสร้างกริดโดยการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติกนี้ วิธีที่เหมาะสมในการนำมาแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตคือ วิธีผ่อนปรนเกินสืบเนื่องแบบจุด (point successive over-relaxation) หรือ PSOR วิธีนี้มีขั้นตอนเช่นเดียวกับวิธีการทำซ้ำแบบจุดของเกาส์ซีเดล แต่สามารถเร่งอัตราการลู่เข้าของผลเฉลยได้ ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

จากระบบสมการเชิงพีชคณิต (2.54) และ (2.55) จัดสมการให้อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$x_{i,j}^{temporary} = \frac{1}{2}\{\ \alpha\left[x_{i+1,j} + x_{i-1,j}\right] - \frac{\beta}{2}\left[x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1} + x_{i-1,j-1}\right] + \gamma\left[x_{i,j+1} + x_{i,j-1}\right] + J^2\left(P\frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2} + Q\frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2}\right)\ \}/(\alpha+\gamma) \quad (2.64)$$

$$y_{i,j}^{temporary} = \frac{1}{2}\{\ \alpha\left[y_{i+1,j} + y_{i-1,j}\right] - \frac{\beta}{2}\left[y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1} - y_{i+1,j-1} + y_{i-1,j-1}\right] + \gamma\left[y_{i,j+1} + y_{i,j-1}\right] + J^2\left(P\frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2} + Q\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2}\right)\ \}/(\alpha+\gamma) \quad (2.65)$$

และ

$$x_{i,j}^{new} = \omega x_{i,j}^{temporary} + (1-\omega)x_{i,j}^{old} \quad (2.66)$$

$$y_{i,j}^{new} = \omega y_{i,j}^{temporary} + (1-\omega)y_{i,j}^{old} \quad (2.67)$$

โดย ω คือ ตัวประกอบ over-relaxation ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1.8

ตัวประกอบ over-relaxation (ω) ในวิธีผ่อนปรนเกินสืบเนื่องแบบจุด (SOR) ใช้สำหรับการเปลี่ยนอัตราการลู่เข้าของผลเฉลย มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 2 ในกรณีที่ ω มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 เราเรียกช่วงนี้ว่า under-relaxation ใช้สำหรับการหน่วงผลเฉลยให้มีอัตราการลู่เข้าช้าลง เพื่อลดการแกว่งของผลเฉลยทำให้ผลเฉลยมีเสถียรภาพมากขึ้น ป้องกันการลู่ออกของผลเฉลย มักใช้กับปัญหาไม่เชิงเส้น ในกรณีที่ ω มีค่าอยู่ระหว่าง 1 ถึง 2 เราเรียกช่วงนี้ว่า over-relaxation ใช้สำหรับการเร่งผลเฉลยให้มีอัตราการลู่เข้าเร็วขึ้น ในกรณีที่ ω มีค่าเท่ากับ 1 กระบวนการหาผลเฉลยเหมือนวิธีการทำซ้ำแบบจุดของเกาส์ซีเดล ทั้งนี้ ค่า ω ควรเลือกให้มีความเหมาะสมกับกายภาพของปัญหานั้น สำหรับการสร้างกริดโดยการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติก ค่า ω ที่เหมาะสมจะมีค่าเท่ากับ 1.8 Melaaen (1990)

เมื่อใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขหาผลเฉลยของสมการครอบคลุมของการสร้างกริดสมการ (2.31) และ (2.32) แล้ว จะได้คำตอบเป็นตำแหน่งของกริด $x(\xi,\eta)$ และ $y(\xi,\eta)$ ตามที่ต้องการ

สำหรับการสร้างกริดโดยการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติกในหัวข้อนี้ เริ่มจากนำสมการปัวส์ซองมาแปลงตัวแปรตามเป็นตัวแปรอิสระโดยใช้กฎลูกโซ่เป็นสมการครอบคลุมของการสร้างกริดซึ่งอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ จากนั้นใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เพื่อหาผลเฉลยเป็นตำแหน่งกริด x และ y ออกมา ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขประกอบด้วยการดิสครีไทซ์ด้วย central differencing และการแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตโดย PSOR ทั้งนี้ในหัวข้อนี้เป็นการปรับกริดที่ได้จาก TFI ในหัวข้อที่แล้วให้มีความสม่ำเสมอมากขึ้น

บทที่ 3

ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม

ปัญหาเชิงวิศวกรรมโดยมากมักมีสมการครอบคลุมของปัญหาอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งโดยทั่วไปมีความซับซ้อนซึ่งไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงได้ ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมเป็นวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์วิธีหนึ่งซึ่งนิยมนำมาใช้กันเนื่องจากให้ผลเฉลยที่มีความเที่ยงตรงสูงและมีขั้นตอนที่ง่ายแก่การเข้าใจ สำหรับบทที่ 3 นี้จะกล่าวถึงขั้นตอนต่างๆของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมเพื่อนำมาใช้ในการแก้ปัญหาการนำความร้อนในสภาวะไม่อยู่ตัวบนพิกัดกระชับขอบเขต เบื้องต้นในหัวข้อที่ 3.1 จะทำการหาสมการครอบคลุมของปัญหาการนำความร้อนโดยใช้กฎอนุรักษ์พลังงานเป็นสมการพื้นฐานโดยใช้พิกัดคาร์ทีเซียน และในหัวข้อที่ 3.2 จะแนะนำเกี่ยวกับหลักการและแนวความคิดพื้นฐานของพิกัดกระชับขอบเขต จากนั้นในหัวข้อที่ 3.3 จะทำการแปลงสมการครอบคลุมและเงื่อนไขขอบเขตจากพิกัดคาร์ทีเซียนให้อยู่ในพิกัดกระชับขอบเขตโดยใช้กฎลูกโซ่ เมื่อได้สมการครอบคลุมในพิกัดกระชับขอบเขตแล้ว ในหัวข้อที่ 3.4 จะทำการดิสครีไทซ์สมการครอบคลุมซึ่งอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ให้เป็นสมการเชิงพีชคณิตโดยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม หลังจากได้ระบบสมการเชิงพีชคณิตแล้วจึงทำการแก้ระบบสมการด้วยวิธี TDMA ในหัวข้อที่ 3.5 ซึ่งได้ผลเฉลยเป็นอุณหภูมิซึ่งเป็นขั้นตอนสุดท้ายของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม

3.1 สมการครอบคลุมปัญหาการนำความร้อน

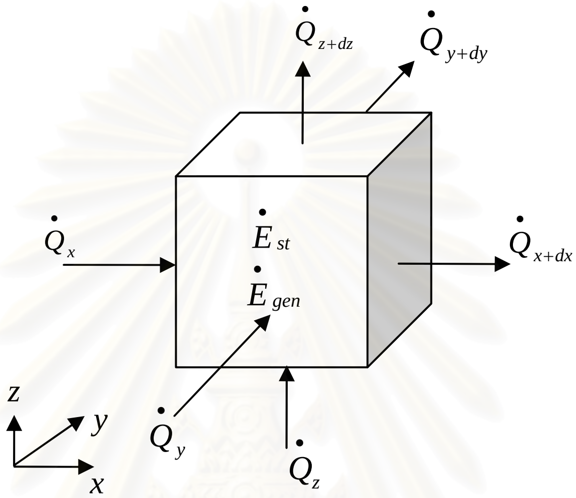
สำหรับหัวข้อนี้เป็นการศึกษาสมการครอบคลุมของปัญหาการนำความร้อนซึ่งถือเป็นส่วนสำคัญที่สุดส่วนหนึ่งในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เนื่องจากความเข้าใจในความหมายทางกายภาพและความสำคัญในแต่ละพจน์ของสมการจะช่วยให้เข้าใจในการแก้สมการเหล่านี้ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมากขึ้น

ในการวิเคราะห์การนำความร้อน ส่วนใหญ่เราต้องการทราบการกระจายอุณหภูมิเป็นสิ่งแรก เนื่องจากสามารถนำการกระจายอุณหภูมิไปหาฟลักซ์ทางความร้อนโดยใช้กฎของฟูเรียร์หรือคำนวณค่าอื่นๆที่สนใจได้ เราจะประยุกต์ใช้กฎอนุรักษ์พลังงานเพื่อคำนวณหาการกระจายอุณหภูมิเบื้องต้น โดยมีสมมติฐานดังนี้คือ

1. พิจารณาการถ่ายเทความร้อนที่เกิดขึ้นเฉพาะกรณีการนำความร้อนเท่านั้น
2. ไม่พิจารณาผลจากการอัดตัวของวัตถุ

3. ค่าการนำความร้อนคงที่
4. วัตถุไม่เคลื่อนที่

พิจารณาการถ่ายเทพลังงานในพิกัดคาร์ทีเซียนผ่านปริมาตรควบคุมเชิงอนุพันธ์ ($dx \cdot dy \cdot dz$) ดังรูปที่ 3.1 โดยที่ปริมาตรควบคุมเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่และไม่มีงานผ่านผิวควบคุม



รูปที่ 3.1 การถ่ายเทพลังงานผ่านปริมาตรควบคุม

ถ้าอุณหภูมิมีความแตกต่างกันแล้วจะเกิดการถ่ายเทความร้อนโดยการนำความร้อนข้ามแต่ละพื้นผิวควบคุม ซึ่งอัตราการนำความร้อนตั้งฉากกับพื้นผิวควบคุมตามแกน x, y และ z คือ $\dot{Q}_x, \dot{Q}_y$ และ $\dot{Q}_z$ ตามลำดับ และอัตราการนำความร้อนในพื้นผิวตรงข้าม สามารถหาได้โดยวิธีการกระจายของอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series expansion) โดยไม่คิดพจน์ที่มีอันดับสูง ซึ่งมีสมการดังนี้

$$\dot{Q}_{x+dx} = \dot{Q}_x + \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} dx \tag{3.1}$$

$$\dot{Q}_{y+dy} = \dot{Q}_y + \frac{\partial \dot{Q}_y}{\partial y} dy \tag{3.2}$$

$$\dot{Q}_{z+dz} = \dot{Q}_z + \frac{\partial \dot{Q}_z}{\partial z} dz \tag{3.3}$$

จากกฎการอนุรักษ์พลังงาน ซึ่งกล่าวว่า

{พลังงานสะสม} = {พลังงานเข้าปริมาตรควบคุม}-{พลังงานออกจากปริมาตรควบคุม} + {พลังงานที่ถูกสร้างขึ้น} (3.4)

ซึ่งกฎการอนุรักษ์พลังงานนี้ สามารถแสดงในรูปแบบของสมการในพิกัดคาร์ทีเซียนได้ดังนี้

$$\dot{E}_{st} = \dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+dx} + \dot{Q}_y - \dot{Q}_{y+dy} + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{z+dz} + \dot{E}_{gen} \quad (3.5)$$

โดยที่ $\dot{E}_{st}$ คือ พลังงานสะสมภายในปริมาตรควบคุมและ $\dot{E}_{gen}$ คือ พลังงานที่ถูกสร้างขึ้นภายในปริมาตรควบคุม

เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงของพลังงานที่สะสมอยู่ภายในปริมาตรควบคุม โดยที่ตัวกลางไม่มีการเปลี่ยนสถานะและไม่คิดผลกระทบที่ใช้ในการเปลี่ยนสถานะ (latent energy) เราสามารถคำนวณพลังงานสะสมภายในปริมาตรควบคุม ($\dot{E}_{st}$) นี้ได้จาก

$$\dot{E}_{st} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz \quad (3.6)$$

โดยที่ $\rho C_p \dfrac{\partial T}{\partial t}$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานความร้อนที่ใช้เปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ (sensible energy) ภายในปริมาตรควบคุมต่อหนึ่งปริมาตรเทียบกับเวลา

เมื่อมีแหล่งความร้อนภายในปริมาตรควบคุม เราสามารถคำนวณพลังงานที่ถูกสร้างขึ้นภายในปริมาตรควบคุม ($\dot{E}_{gen}$) ได้จากสมการ ดังนี้

$$\dot{E}_{gen} = q_0 dxdydz \quad (3.7)$$

โดยที่ q_0 คือ อัตราการผลิตความร้อนจากแหล่งความร้อนภายในปริมาตรควบคุมต่อหนึ่งปริมาตร (W/m^3)

พลังงานที่ถูกสร้างขึ้นภายในปริมาตรควบคุม ($\dot{E}_{gen}$) เป็นกระบวนการอนุรักษ์พลังงานหนึ่งที่แสดงให้เห็นได้อย่างชัดเจนเกี่ยวกับพลังงานความร้อน เคมี ไฟฟ้าและนิวเคลียร์ โดยพลังงานนี้จะมีเครื่องหมายเป็นบวกถ้าตัวกลางเป็นแหล่งให้ความร้อน (source) และมีเครื่องหมายเป็นลบถ้าตัวกลางเป็นแหล่งรับความร้อน (sink) ซึ่ง $\dot{E}_{gen}$ แตกต่างกับ $\dot{E}_{st}$ โดยที่ $\dot{E}_{st}$ จะคืออัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานความร้อนที่สะสมภายในตัวกลาง

แทนค่าสมการ (3.1) - (3.3) และสมการ (3.6) - (3.7) ลงในกฎอนุรักษ์พลังงานสมการ (3.5) จะได้

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz = -\frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} dx - \frac{\partial \dot{Q}_y}{\partial y} dy - \frac{\partial \dot{Q}_z}{\partial z} dz + q_0 dxdydz \tag{3.8}$$

อัตราการถ่ายเทพลังงานโดยการนำความร้อน ($\dot{Q}_x, \dot{Q}_y$ และ $\dot{Q}_z$) สามารถคำนวณได้จากกฎของฟูเรียร์ ซึ่งกล่าวว่า อัตราการถ่ายเทความร้อนเป็นปฏิภาคโดยตรงกับพื้นที่การถ่ายเทความร้อนที่ตั้งฉากกับทิศการไหลของความร้อน และการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของตัวกลางในทิศการไหล ซึ่งสามารถแสดงเป็นสมการได้ดังนี้

$$\dot{Q}_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} dydz \tag{3.9}$$

$$\dot{Q}_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} dxdz \tag{3.10}$$

$$\dot{Q}_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} dxdy \tag{3.11}$$

แทนค่าของ $\dot{Q}_x, \dot{Q}_y$ และ $\dot{Q}_z$ ในสมการ (3.9)-(3.11) ลงในสมการ (3.8) จากนั้นหารด้วยปริมาตรควบคุม ($dx \cdot dy \cdot dz$) จะได้สมการครอบคลุมการนำความร้อน (heat equation) ซึ่งอยู่ในรูปทั่วไป

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial T}{\partial z}\right) + q_0 \tag{3.12}$$

สมการการนำความร้อนนี้เป็นเครื่องมือพื้นฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์ ผลเฉลยที่ได้จากสมการนี้คือการกระจายอุณหภูมิ $T(x, y, z)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลาจากสมการนี้อาจกล่าวได้ว่า ณ.จุดใดจุดหนึ่งในตัวกลาง อัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานความร้อนที่สะสมอยู่ภายในปริมาตรจะต้องเท่ากับอัตราการถ่ายเทพลังงานสุทธิโดยการนำความร้อนภายในปริมาตรหนึ่งหน่วยบวกกับอัตราการผลิตพลังงานความร้อนในปริมาตรนั้น

แต่ละพจน์ของสมการ (3.12) มีความสำคัญทางกายภาพ อาทิเช่น พจน์ $\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)$ ซึ่งเมื่อคูณกับ dx จะได้เป็นฟลักซ์การนำความร้อนสุทธิภายในปริมาตรควบคุมในทิศ x เป็นต้น ซึ่งในพจน์อื่นๆในทิศ y และ z ก็สามารถประยุกต์ได้เช่นกัน

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx = q''_x - q''_{x+dx} \tag{3.13}$$

เราสามารถลดรูปสมการ (3.12) ให้อยู่ในรูปที่ง่ายขึ้น โดยกำหนดให้ค่าการนำความร้อน (k) คงที่ ซึ่งจะได้สมการดังนี้

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q_0}{k} \tag{3.14}$$

โดยที่ $\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$ คือค่า thermal diffusivity

สมการ (3.14) นี้เป็นสมการครอบคลุมการแก้ปัญหาการนำความร้อนซึ่งอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์บนพิกัดคาร์ทีเซียน ในหัวข้อย่อย 3.3 จะทำการแปลงสมการ (3.14) ให้อยู่ในพิกัดกระชับขอบเขต

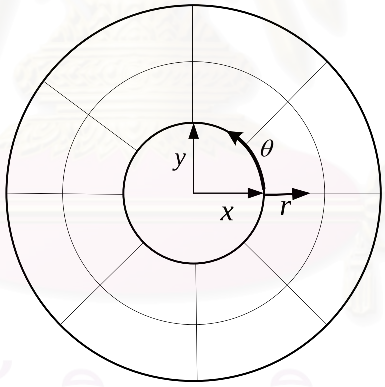
3.2 ระบบพิกัดกระชับขอบเขต

ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข เราจะต้องทำการดิสครีไทซ์เพื่อเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ไปเป็นระบบสมการเชิงพีชคณิต ซึ่งจะได้ผลเฉลยเป็นค่าที่แต่ละจุดบนโดเมนที่ถูกแบ่งเป็นปริมาตรควบคุมย่อย (control volume) หรือเซลล์ (cells) ไว้ ตำแหน่งของจุดต่างๆเหล่านี้สามารถกำหนดได้ด้วยการสุ่ม (random) แต่การคำนวณจะไม่มีประสิทธิภาพ เราจึงต้องการแสดงตำแหน่งของจุดต่างๆอย่างเป็นระบบ (organization) เพื่อให้สามารถระบุจุดที่ต่อๆกันได้อย่างมีประสิทธิภาพ นอกจากความเป็นระบบของจุดแล้ว การดิสครีไทซ์ยังต้องมีความสอดคล้องกับเส้นขอบของโดเมนเพื่อให้สามารถแสดงเงื่อนไขขอบเขตได้อย่างแม่นยำ ทั้งนี้ ระบบของจุดเหล่านี้ได้มาจากระบบของพิกัดต่างๆเช่น ระบบพิกัดคาร์ทีเซียนสำหรับโดเมนที่เป็นสี่เหลี่ยม หรือระบบพิกัดทรงกระบอกสำหรับโดเมนที่เป็นวงกลม เป็นต้น สำหรับรูปร่างทั่วไปซึ่งมีลักษณะที่ซับซ้อนกว่าสี่เหลี่ยมและวงกลม เราต้องการระบบพิกัดที่มีลักษณะสอดคล้องกันกับเส้นขอบของรูปร่างที่ซับซ้อนนั้น ซึ่งระบบพิกัดนี้เรียกว่า ระบบพิกัดกระชับขอบเขต หัวข้อนี้เป็นการ

แนะนำเกี่ยวกับระบบพิกัดกระชับขอบเขตเบื้องต้นเพื่อให้เกิดความเข้าใจทางกายภาพและให้เห็นถึงประโยชน์ในการใช้ระบบพิกัดนี้ในการคำนวณ

ระบบพิกัดกระชับขอบเขตมีเส้นพิกัดที่มีลักษณะโค้งสอดคล้องกันกับลักษณะของรูปร่างของโดเมนที่พิจารณาและมีตัวแปรอิสระคือ $(\xi_i) = (\xi, \eta)$ ซึ่งมีทิศทางในแต่ละจุดกริดเปลี่ยนแปลงไปตามลักษณะของรูปร่างของโดเมน พิกัดกระชับขอบเขตนี้สามารถนำไปใช้กับโดเมนที่มีรูปร่างใดๆก็ได้ทุกประเภท รวมไปถึงโดเมนที่มีการเคลื่อนที่ด้วย การวิเคราะห์ปัญหาที่มีรูปร่างที่มีลักษณะซับซ้อนสามารถทำได้ทั้งบนพิกัดคาร์ทีเซียนและบนพิกัดกระชับขอบเขต โดยทั้งสองพิกัดสามารถระบุตำแหน่งของจุดบนโดเมนได้เช่นกันและมีความสัมพันธ์กันแบบหนึ่งจุดต่อหนึ่งจุด (one to one) คือฟังก์ชัน $\xi_i(x_i)$ และ $x_i(\xi_i)$

เพื่อให้เกิดความเข้าใจทางกายภาพของพิกัดกระชับขอบเขต เราจะมาศึกษาตัวอย่างของระบบพิกัดนี้ในกรณีที่โดเมนมีรูปร่างเป็นวงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกัน (two concentric circles) ดังรูปที่ 3.2 สำหรับรูปวงกลมซ้อนกันนี้เราสามารถวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้ได้ทั้งพิกัดคาร์ทีเซียนและพิกัดกระชับขอบเขต ซึ่งกรณีวงกลมนี้เราจะพิจารณาให้พิกัดกระชับขอบเขตเป็นเช่นเดียวกับพิกัดทรงกระบอกคือใช้ตัวแปร r และ θ เป็นตัวแปรอิสระ ที่มีค่าอยู่ในช่วง $[r_1, r_2]$ และ $[0, 2\pi]$ ตามลำดับ



รูปที่ 3.2 วงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกันที่แสดงโดยใช้พิกัดคาร์ทีเซียนและพิกัดกระชับขอบเขต

จากรูปที่ 3.2 จะเห็นได้ว่า ที่เส้นพิกัดหนึ่งจะมีค่าของตัวแปรหนึ่งเป็นค่าคงที่ ระหว่างที่ค่าของตัวแปรอื่นจะเปลี่ยนแปลงเป็นช่วงที่ซ้ำๆ เช่น ที่เส้นขอบของวงกลมจะมีค่าของตัวแปร r เป็นค่าคงที่ ระหว่างที่ค่าของตัวแปร θ จะเปลี่ยนแปลงซ้ำๆเป็นช่วง $[0, 2\pi]$ แนวความคิดนี้เป็นหลักการสำคัญ ซึ่งเราสามารถนำหลักการที่ได้จากกรณีของวงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกันไปประยุกต์ใช้ในรูปร่างที่มีลักษณะซับซ้อนอื่นๆได้

ระบบพิกัดกระชับขอบเขตในกรณีของวงกลมนี้มีความสัมพันธ์กับระบบพิกัดคาร์ทีเซียนเป็นสมการที่ใช้ในการแปลงพิกัด ซึ่งมีสมการดังนี้

$$x(r,\theta) = r\cos\theta \tag{3.15}$$

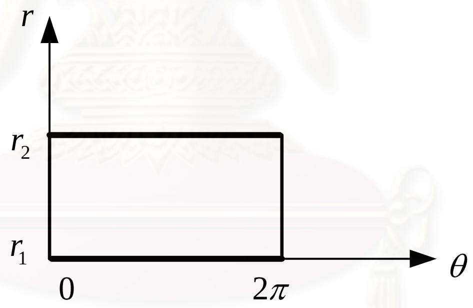
$$y(r,\theta) = r\sin\theta \tag{3.16}$$

ในทางกลับกัน เราสามารถแปลงพิกัดย้อนกลับจากพิกัดคาร์ทีเซียนไปเป็นพิกัดกระชับขอบเขต โดยใช้สมการดังนี้

$$r(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.17}$$

$$\theta(x,y) = \tan^{-1}(y/x) \tag{3.18}$$

เมื่อทำการแปลงพิกัดแล้ว รูปร่างที่เป็นวงกลมบนพิกัดคาร์ทีเซียน จึงกลายเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าบนพิกัดกระชับขอบเขต ซึ่งเส้นขอบของวงกลมทั้งสองจะกลายมาเป็นด้านบนและด้านล่างของสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งมีลักษณะดังรูปที่ 3.3 บนระนาบที่แปลงพิกัดแล้วนี้ โดเมนที่มีลักษณะเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะมีตัวแปรอิสระเป็น r และ θ



รูปที่ 3.3 สี่เหลี่ยมผืนผ้าบนพิกัดกระชับขอบเขต

เราสามารถทำพิกัดกระชับขอบเขตที่มีตัวแปร r และ θ เป็นตัวแปรอิสระให้มีช่วงอยู่ระหว่าง $[0,1]$ ได้ ซึ่งเราจะให้พิกัดกระชับขอบเขตใหม่นี้มีตัวแปร ξ และ η เป็นตัวแปรอิสระแทน โดยการเปลี่ยนช่วงมีสมการดังนี้

$$\xi = \frac{\theta}{2\pi} \tag{3.19}$$

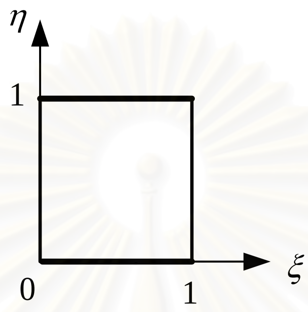
$$\eta = \frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \tag{3.20}$$

ในทางกลับกัน เราสามารถแปลงพิกัดย้อนกลับได้โดยสมการดังนี้

$$\theta(\xi) = 2\pi\xi \tag{3.21}$$

$$r(\eta) = r_1 + (r_2 - r_1)\eta \tag{3.22}$$

เมื่อทำการเปลี่ยนช่วงพิกัดแล้ว รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจึงกลายเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดหนึ่งหน่วยซึ่งมีตัวแปรอิสระเป็น ξ และ η ที่มีช่วงอยู่ระหว่าง $[0,1]$ ซึ่งมีลักษณะดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 สี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดหนึ่งหน่วยบนพิกัดกระชับขอบเขต

ทั้งนี้ เราสามารถแปลงวงกลมบนพิกัดคาร์ทีเซียนให้เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดหนึ่งหน่วยบนพิกัดกระชับขอบเขตได้โดยใช้สมการดังนี้

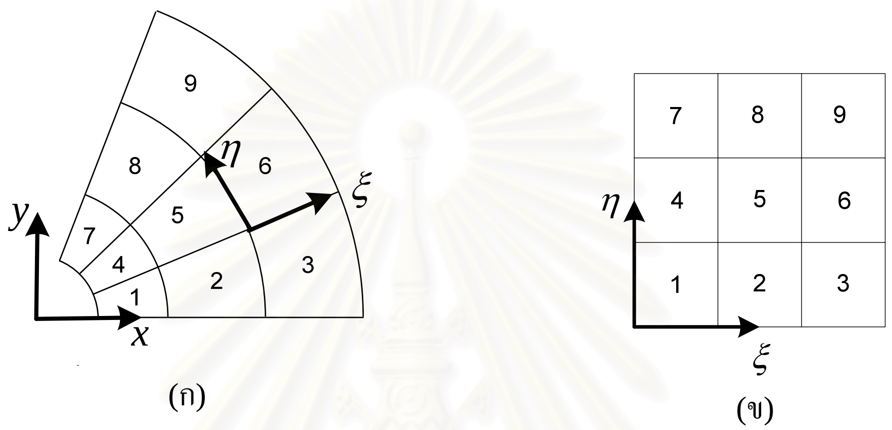
$$x(\xi,\eta) = [r_1 + (r_2 - r_1)\eta]\cos(2\pi\xi) \tag{3.23}$$

$$y(\xi,\eta) = [r_1 + (r_2 - r_1)\eta]\sin(2\pi\xi) \tag{3.24}$$

จากสมการ (3.23) และ (3.24) เป็นฟังก์ชันเชิงวิเคราะห์ (analytic functions) ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดคาร์ทีเซียนและพิกัดกระชับขอบเขตในกรณีที่รูปร่างเป็นวงกลม แต่สำหรับกรณีที่เป็นรูปร่างอื่นโดยทั่วไปที่มีลักษณะซับซ้อนมากกว่าวงกลม การหาความสัมพันธ์ระหว่างสองพิกัดที่เป็นฟังก์ชันเชิงวิเคราะห์ทำได้ยาก ดังนั้นเรามักใช้ความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันเชิงตัวเลข (numerical functions)

สำหรับในระบบพิกัดกระชับขอบเขต การคำนวณเพื่อหาผลเฉลยของปัญหาด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข สามารถทำได้ทั้งบนพื้นที่ทางกายภาพ (physical space) ดังรูปที่ 3.5 (ก) และบนพื้นที่ที่ทำการแปลงพิกัดแล้วซึ่งเรียกว่า พื้นที่การคำนวณ (computational space) ดังรูปที่ 3.5 (ข) ซึ่งทั้ง 2 วิธีนี้มีความแตกต่างกัน โดยการคำนวณบนพื้นที่ทางกายภาพซึ่งกริดจะมีลักษณะที่บิดเบี้ยวทำให้การดิสครีไทซ์สมการครอบคลุมต้องทำในเซลล์ที่บิดเบี้ยวซึ่งยากแก่การคำนวณหาผลเฉลยของปัญหา แต่พื้นที่ ปริมาตร และเวกเตอร์ตัวแปรอิสระสามารถอธิบายทางกายภาพได้ ระหว่างที่การคำนวณในพื้นที่การคำนวณจะกระทำบนเซลล์สี่เหลี่ยมจัตุรัส

เราเลือกที่จะคำนวณหาผลเฉลยบนพื้นที่การคำนวณ โดยหลังจากการสร้างกริดแล้ว เราจะคำนวณค่าตัวประกอบของรูปร่าง (geometric coefficient) จากลักษณะของกริด จากนั้นจึงทำการแปลงสมการครอบคลุมจากพิกัดคาร์ทีเซียนซึ่งมีตัวแปรอิสระคือ $(x_i) = (x, y)$ ไปเป็นพิกัดกระชับขอบเขตมีตัวแปรอิสระคือ $(\xi_i) = (\xi, \eta)$ โดยอาศัยกฎลูกโซ่ แล้วทำการดิสครีไทซ์และแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตบนกริดสี่เหลี่ยมธรรมดา เมื่อได้ผลเฉลยแล้วสามารถส่งค่าของผลเฉลยกลับไปยังตำแหน่งต่างๆของจุดกริดบนพิกัดคาร์ทีเซียนได้ทันที



รูปที่ 3.5 (ก) พื้นที่ทางกายภาพ (Physical space) (ข) พื้นที่การคำนวณ (Computational space)

3.3 การแปลงพิกัด

ในหัวข้อย่อยนี้จะทำการแปลงพิกัดของสมการครอบคลุมปัญหาการนำความร้อนและเงื่อนไขขอบเขตจากพิกัดคาร์ทีเซียนให้อยู่ในพิกัดกระชับขอบเขตโดยใช้กฎลูกโซ่ การแปลงสมการนี้จะเปลี่ยนตัวแปรตามในสมการครอบคลุมจาก x และ y ไปเป็น ξ และ η ตามลำดับ ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

จากสมการครอบคลุมปัญหาการนำความร้อนในรูปแบบทั่วไปบนพิกัดคาร์ทีเซียนสมการ (3.12) ในหัวข้อ 3.1 เราสามารถนำมาลดรูปสมการเป็นแบบสองมิติได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+q_0 = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.25}$$

ต่อไปจะเป็นขั้นตอนการแปลงสมการจากพิกัดคาร์ทีเซียนให้อยู่ในพิกัดกระชับขอบเขตโดยใช้กฎลูกโซ่ดังที่ได้กล่าวในบทที่แล้ว มีขั้นตอนดังนี้

พิจารณาพจน์แรกทางซ้ายมือของสมการ (3.25) เมื่อใช้กฎลูกโซ่สมการ (2.33) และ (2.34) สามารถแปลงสมการได้เป็น

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{3.26}$$

สมาชิกแถวบนของเมตริกซ์ของจาร์โคเบียนสมการ (2.38) คือ

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial \eta} \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial \xi} \tag{3.28}$$

นำสมการ (3.27) และ (3.28) กลับไปแทนค่าในสมการ (3.26) สามารถแสดงพจน์แรกทางซ้ายมือของสมการ (3.25) ได้เป็น

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial \xi} \tag{3.29}$$

เช่นเดียวกันกับพจน์แรกเมื่อพิจารณาพจน์ที่สองทางซ้ายมือของสมการ (3.25) เมื่อใช้กฎลูกโซ่สามารถแปลงสมการได้เป็น

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{3.30}$$

สมาชิกแถวล่างของเมตริกซ์ของจาร์โคเบียนสมการ (2.38) คือ

$$\frac{\partial \xi}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial \eta} \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial \xi} \tag{3.32}$$

นำสมการ (3.31) และ (3.32) กลับไปแทนค่าในสมการ (3.30) สามารถแสดงพจน์ที่สองทางซ้ายมือของสมการ (3.25) ได้เป็น

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)=-\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial \xi} \tag{3.33}$$

นำพจน์แรกคือสมการ (3.29) และพจน์ที่สองคือสมการ (3.33) กลับไปแทนค่าในสมการ (3.25) ได้ว่า

$$\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial \xi}$$
$$-\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial \xi}+q_0 = \rho C_p\frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.34}$$

สามารถจัดรูปได้เป็น

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\partial y}{\partial \eta}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)-\frac{\partial x}{\partial \eta}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\partial x}{\partial \xi}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)-\frac{\partial y}{\partial \xi}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right]+Jq_0 = J\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.35}$$

พิจารณาพจน์เชิงอนุพันธ์ $k\frac{\partial T}{\partial x}$ ในสมการ (3.35) ทำการแปลงพิกัดโดยใช้กฎลูกโซ่

$$k\frac{\partial T}{\partial x} = k\frac{\partial T}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+k\frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{3.36}$$

แทนพจน์ $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ และ $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ จากสมการ (3.27) และ (3.28) ลงในสมการ (3.36) จะได้

$$k\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{J}k\frac{\partial T}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{1}{J}k\frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} \tag{3.37}$$

พิจารณาพจน์เชิงอนุพันธ์ $k\frac{\partial T}{\partial y}$ ในสมการ (3.35) ทำการแปลงพิกัดโดยใช้กฎลูกโซ่

$$k\frac{\partial T}{\partial y} = k\frac{\partial T}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+k\frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{3.38}$$

แทนพจน์เชิงอนุพันธ์ $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ และ $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ จากสมการ (3.31) และ (3.32) ลงในสมการ (3.38) จะได้

$$k\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{1}{J}k\frac{\partial T}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{1}{J}k\frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} \tag{3.39}$$

แทนค่าสมการ (3.37) และ (3.39) ลงในสมการ (3.35) จะได้สมการครอบคลุมของปัญหาการนำความร้อนในพิกัดกระชับขอบเขต คือ

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{1}{J}\left(k\frac{\partial T}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-k\frac{\partial T}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{1}{J}\left(-k\frac{\partial T}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\xi}+k\frac{\partial T}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)\right]$$
$$+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{1}{J}\left(-k\frac{\partial T}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}+k\frac{\partial T}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)-\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{1}{J}\left(k\frac{\partial T}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-k\frac{\partial T}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right]+Jq_0 \qquad (3.40)$$
$$=J\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

ซึ่งเราสามารถจัดรูปสมการ (3.30) ได้เป็น

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\frac{k}{J}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2\right]\frac{\partial T}{\partial\xi}-\frac{k}{J}\left[\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}+\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}\right]\frac{\partial T}{\partial\eta}\right\}+$$
$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\frac{k}{J}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2\right]\frac{\partial T}{\partial\eta}-\frac{k}{J}\left[\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}+\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}\right]\frac{\partial T}{\partial\xi}\right\}+Jq_0 \qquad (3.41)$$
$$=J\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

สามารถลดรูปสมการ (3.41) โดยใช้ค่า α,β และ γ จากสมการ (2.33) – (2.35) แล้วจัดรูปได้เป็น

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{k\alpha}{J}\frac{\partial T}{\partial\xi}-\frac{k\beta}{J}\frac{\partial T}{\partial\eta}\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{k\gamma}{J}\frac{\partial T}{\partial\eta}-\frac{k\beta}{J}\frac{\partial T}{\partial\eta}\right]+Jq_0=J\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (3.42)$$

สมการ (3.42) เป็นสมการครอบคลุมของปัญหาการนำความร้อนในพิกัดกระชับขอบเขต ซึ่งสามารถอธิบายเป็นความหมายทางกายภาพโดยในพจน์แรก $\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{k\alpha}{J}\frac{\partial T}{\partial\xi}-\frac{k\beta}{J}\frac{\partial T}{\partial\eta}\right]$ แสดงฟลักซ์ความร้อนในทิศทาง ξ พจน์ภายในพจน์แรกมี 2 พจน์ด้วยกันคือ $\frac{\partial T}{\partial\xi}$ เป็นฟลักซ์ความร้อนในทิศ ξ แนวตั้งฉากและ $\frac{\partial T}{\partial\eta}$ เป็นฟลักซ์ความร้อนในทิศ ξ แนวไม่ตั้งฉาก (non-orthogonal term) ซึ่งเป็นพจน์ที่แก้รูปร่างที่ซับซ้อน (irregular) ถ้าฟลักซ์ความร้อนรูปร่างปกติจะมีแค่พจน์ในแนวตั้งฉากและพจน์ในแนวไม่ตั้งฉากนี้จะเป็นศูนย์ และพจน์ที่สอง $\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{k\gamma}{J}\frac{\partial T}{\partial\eta}-\frac{k\beta}{J}\frac{\partial T}{\partial\eta}\right]$ เป็นฟลักซ์ความร้อนในทิศ η มีความหมายทางกายภาพเช่นเดียวกับพจน์แรก

เมื่อได้สมการครอบคลุมของปัญหาบนพิกัดกระชับขอบเขตแล้ว ต่อไปจะทำการแปลงเงื่อนไขขอบเขตจากพิกัดคาร์ทีเซียนให้อยู่ในพิกัดกระชับขอบเขต เงื่อนไขขอบเขตสามารถจำแนกได้เป็น 2 แบบคือ เงื่อนไขแบบดีริคเลต (Dirichlet condition) และเงื่อนไขแบบนอยมันน์

(Neumann condition) เงื่อนไขแบบดีริคเลตเป็นเงื่อนไขของการกำหนดตัวแปรตาม T ที่ขอบเขต ส่วนเงื่อนไขแบบนอยมันน์เป็นเงื่อนไขของการกำหนดค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของตัวแปรตาม T ที่ขอบเขตนั้น นั่นคือ กำหนด $\dfrac{\partial T}{\partial x}$ มาให้ ในขั้นตอนการแปลงพิกัดสำหรับเงื่อนไขแบบดีริคเลตซึ่งกำหนดค่าอุณหภูมิที่ผิวให้ เราสามารถกำหนดค่าอุณหภูมิที่ขอบของโดเมนบนระนาบการคำนวณเหมือนกับขอบบนระนาบทางกายภาพได้ โดยไม่ต้องทำการแปลงค่า แต่สำหรับเงื่อนไขแบบนอยมันน์ซึ่งกำหนดค่าเป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่งมาให้ซึ่งไม่ว่าค่านั้นจะเท่ากับศูนย์หรือไม่เท่ากับศูนย์ก็ตาม เราจะต้องแปลงพิกัดโดยใช้กฎลูกโซ่เสียก่อนจึงค่อยนำไปคำนวณ ทั้งนี้ ค่าอุณหภูมิที่ผิวซึ่งเป็นค่าที่เราต้องการหาต้องทำการเปลี่ยนค่าทุกรอบการทำซ้ำ

การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตแบบนอยมันน์บนพิกัดคาร์ทีเซียนมีสมการดังนี้

$$\vec{n} \bullet \nabla T = c \tag{3.43}$$

โดย c เป็นค่าคงที่ ซึ่งเป็นค่าของฟลักซ์ที่กำหนดมาให้ โดยถ้าเงื่อนไขขอบเขตเป็นแบบสมมาตร c จะมีค่าเท่ากับศูนย์

ในกรณีที่เป็นปัญหาแบบสองมิติบนพิกัดคาร์ทีเซียน เราสามารถกระจายสมการได้ดังนี้

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} = c \tag{3.44}$$

สำหรับการแปลงพิกัดของเงื่อนไขขอบเขต เราจะใช้กฎลูกโซ่เช่นเดียวกับการแปลงสมการครอบคลุม โดยพจน์แรกทางซ้ายจะแปลงพิกัดโดยใช้สมการ (3.37) และพจน์ที่สองทางซ้ายจะแปลงพิกัดโดยใช้สมการ (3.39) เมื่อแทนค่าสมการ (3.37) และสมการ (3.39) ลงในสมการ (3.44) จะได้สมการดังนี้

$$\frac{1}{J}\frac{\partial T}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{1}{J}\frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{1}{J}\frac{\partial T}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{1}{J}\frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} = c \tag{3.45}$$

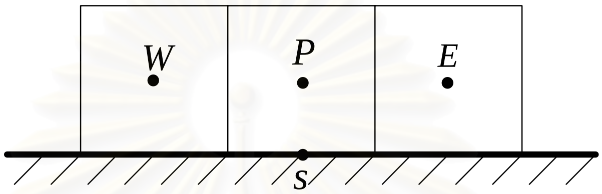
หลังจากทำการจัดรูปสมการ จะได้

$$\frac{1}{J}\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{1}{J}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\frac{\partial T}{\partial \eta} = c \tag{3.46}$$

สมการ (3.46) มีพจน์เชิงอนุพันธ์ $\dfrac{\partial T}{\partial \xi}$ และ $\dfrac{\partial T}{\partial \eta}$ ซึ่งเราจะต้องดิสครีไทซ์เป็นพจน์เชิงพีชคณิต แล้วจึงทำการจัดให้ค่าอุณหภูมิที่ผิวซึ่งเราต้องการหาอยู่ด้านหนึ่ง ทั้งนี้ เราจะวิธี central differencing ในการดิสครีไทซ์พจน์เชิงอนุพันธ์สำหรับปริมาตรควบคุมที่ผิวของโดเมน และใช้ forward differencing หรือ backward differencing สำหรับปริมาตรควบคุมที่มุมของโดเมน

ตัวอย่างเช่น การแปลงเงื่อนไขขอบเขตที่เป็นขอบด้านล่างของรูปร่าง ซึ่งมีเงื่อนไขขอบเขตเป็นแบบสมมาตรดังรูปที่ 3.6 มีสมการของเงื่อนไขบนพิกัดคาร์ทีเซียน ดังนี้

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \tag{3.47}$$



รูปที่ 3.6 เงื่อนไขขอบเขตที่เป็นขอบด้านล่างของรูปร่างแบบสมมาตร

ขั้นตอนแรกจะทำการแปลงสมการ (3.47) ให้อยู่บนพิกัดกระชับขอบเขต ได้ดังนี้

$$-\frac{1}{J}\frac{\partial T}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{1}{J}\frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} = 0 \tag{3.48}$$

จากนั้นดิสครีไทซ์เป็นพจน์เชิงอนุพันธ์ $\frac{\partial T}{\partial \xi}$ และ $\frac{\partial T}{\partial \eta}$ ด้วยวิธี central differencing ได้ดังนี้

$$-\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial \eta}\left(\frac{T_E - T_W}{2}\right) + \frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial \xi}\left(\frac{T_P - T_s}{0.5}\right) = 0 \tag{3.49}$$

เนื่องจากเราต้องการหาอุณหภูมิที่ผิวที่เป็นขอบด้านล่างของรูปร่าง (T_s) ดังนั้นเราจะทำการจัดพจน์ของสมการ (3.49) ให้ค่าอุณหภูมิที่ผิวที่เราต้องการหาอยู่ด้านหนึ่ง ดังนี้

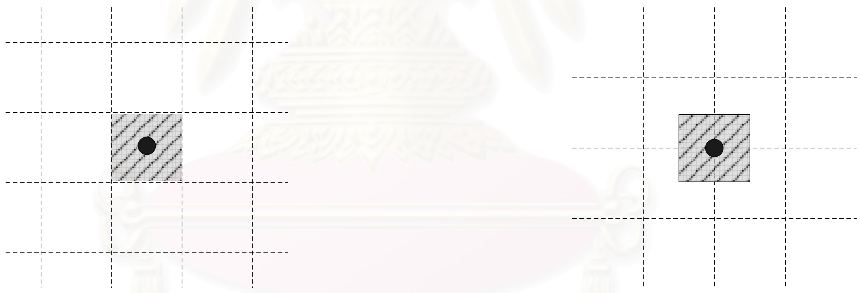
$$T_s = T_P - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\Big/\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)(T_E - T_W) \tag{3.50}$$

ในหัวข้อต่อไปจะทำการดิสครีไทซ์สมการครอบคลุม (3.32) ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ให้เป็นสมการเชิงพีชคณิตด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม

3.4 ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม

ในหัวข้อย่อยที่แล้วเราได้สมการครอบคลุมปัญหาการนำความร้อนในพิกัดกระชับขอบเขตแล้ว ในหัวข้อย่อยนี้จะทำการหาผลเฉลยของสมการโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม ทั้งนี้ ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมจะทำการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์โดยการแบ่งโดเมนออกเป็นปริมาตรควบคุมย่อยๆ แล้วแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ไปเป็นสมการเชิงพีชคณิตซึ่งเรียกว่าการดิสครีไทซ์โดยการอินทิเกรตตลอดปริมาตรควบคุม ซึ่งจะกล่าวในรายละเอียดต่อไป

การวางตัวของปริมาตรควบคุมย่อยบนโดเมนสามารถทำได้ 2 วิธีด้วยกันได้แก่ การวางตัวแบบ cell-centered และการวางตัวแบบ vertex-centered ซึ่งการวางตัวแบบ cell-centered นั้นปริมาตรควบคุมจะวางบนเส้นกริดและ node จะวางไว้ตรงกลางของปริมาตรควบคุมซึ่งอยู่ตรงกลางระหว่างเส้นกริด ดังรูปที่ 3.7 (ก) ต่างกับการวางตัวแบบ vertex-centered ที่มีการวาง node ไว้ตรงจุดตัดกันของเส้นกริดและขอบของปริมาตรควบคุมจะอยู่ตรงกลางระหว่างเส้นกริด ดังรูปที่ 3.7 (ข) วิทยานิพนธ์นี้เลือกการวางตัวแบบ cell-centered เนื่องจากวิธีนี้มีข้อดีคือสามารถประยุกต์ใช้เงื่อนไขขอบเขตได้ง่าย เนื่องจากเงื่อนไขขอบของโดเมนจะตรงกันกับเงื่อนไขขอบของปริมาตรควบคุม



(ก) (ข)

รูปที่ 3.7 การวางตัวของปริมาตรควบคุม (ก) แบบ cell-centered (ข) แบบ vertex-centered

การหาผลเฉลยของสมการโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมขั้นตอนแรกคือการอินทิเกรตสมการตลอดปริมาตรควบคุม (CV) และตลอดช่วงเวลาจาก t ถึง $t+\Delta t$ โดยนำสมการครอบคลุมปัญหาการนำความร้อนบนพิกัดกระชับขอบเขตในหัวข้อย่อยที่แล้วสมการ (3.42) มาทำการอินทิเกรตสมการตลอดปริมาตรควบคุมและตลอดช่วงเวลา ดังนี้

$$\begin{aligned}\int_{C.V.}\left(\int_{t}^{t+\Delta t} J\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}dt\right)dV &= \int_{t}^{t+\Delta t}\left(\int_{C.V.}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{k\alpha}{J}\frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{k\beta}{J}\frac{\partial T}{\partial \eta}\right]dV\right)dt + \\ &\int_{t}^{t+\Delta t}\left(\int_{C.V.}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{k\gamma}{J}\frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{k\beta}{J}\frac{\partial T}{\partial \xi}\right]dV\right)dt + \int_{t}^{t+\Delta t}\int_{C.V.} S\,dV\,dt\end{aligned} \tag{3.51}$$

เมื่ออินทิเกรตสมการ (3.51) ตลอดปริมาตรควบคุมจะได้สมการดังนี้

$$\int_{C.V.}\left(\int_{t}^{t+\Delta t} J\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}dt\right)dV = \int_{t}^{t+\Delta t}\left(\left[\frac{k\alpha A_e}{J}\frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{k\beta A_e}{J}\frac{\partial T}{\partial \eta}\right]_e - \left[\frac{k\alpha A_w}{J}\frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{k\beta A_w}{J}\frac{\partial T}{\partial \eta}\right]_w\right)dt + \int_{t}^{t+\Delta t}\left(\left[\frac{k\gamma A_n}{J}\frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{k\beta A_n}{J}\frac{\partial T}{\partial \xi}\right]_n - \left[\frac{k\gamma A_s}{J}\frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{k\beta A_s}{J}\frac{\partial T}{\partial \xi}\right]_s\right)dt + \int_{t}^{t+\Delta t}\overline{S}\Delta V dt \qquad (3.52)$$

โดยที่ A_i คือพื้นที่หน้าตัดแต่ละปริมาตรควบคุม ΔV คือปริมาตรของมันซึ่งเท่ากับ $\Delta\xi\Delta\eta\Delta\zeta$ โดย $\Delta\xi$ คือความกว้างของปริมาตรควบคุม $\Delta\eta$ คือความยาวของปริมาตรควบคุม $\Delta\zeta$ คือความสูงของปริมาตรควบคุม และ $\overline{S}$ คือค่าเฉลี่ย source

พิจารณาพจน์อัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิทางซ้ายของสมการ (3.52)

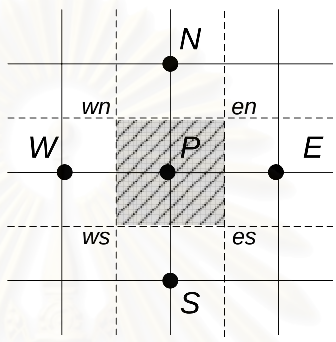
$$\int_{C.V.}\left(\int_{t}^{t+\Delta t} J\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}dt\right)dV = J\rho C_p (T_P - T_P^0)\Delta V \qquad (3.53)$$

โดยที่ตัวยก ^{0} หมายถึงอุณหภูมิที่เวลา t ส่วนอุณหภูมิที่เวลา $t+\Delta t$ ไม่ใช้ตัวยก ^{0}

สมการ (3.52) ที่ได้จากอินทิเกรตนี้สามารถอธิบายความหมายทางกายภาพได้ง่าย กล่าวคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิในปริมาตรหนึ่งจะเท่ากับฟลักซ์ความร้อนที่ออกจากทิศตะวันออกลบด้วยฟลักซ์ความร้อนที่เข้าจากทิศตะวันตก รวมกับฟลักซ์ความร้อนที่ออกจากทิศเหนือลบด้วยฟลักซ์ความร้อนที่เข้าจากทิศใต้ รวมกับฟลักซ์ความร้อนที่ผลิตขึ้น ซึ่งความหมายทางกายภาพคือสมดุลสมการทั่วไปที่สามารถเข้าใจได้ง่าย การอธิบายความหมายทางกายภาพโดยง่ายนี้เองเป็นข้อดีที่สำคัญของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม

สำหรับการคำนวณหาค่าฟลักซ์ความร้อนทั้ง 8 พจน์ทางขวามือของสมการ (3.52) สามารถคำนวณได้ด้วยการดิสครีไทซ์อย่างตรงไปตรงมา สำหรับพจน์แรกในแต่ละทิศ ($\left.\frac{\partial T}{\partial \xi}\right|_e, \left.\frac{\partial T}{\partial \xi}\right|_w, \left.\frac{\partial T}{\partial \eta}\right|_n$,และ $\left.\frac{\partial T}{\partial \eta}\right|_s$) เรียกว่า primary flux terms และพจน์ที่สองในแต่ละทิศ ($\left.\frac{\partial T}{\partial \eta}\right|_e, \left.\frac{\partial T}{\partial \eta}\right|_w, \left.\frac{\partial T}{\partial \xi}\right|_n$,และ $\left.\frac{\partial T}{\partial \xi}\right|_s$) เรียกว่า secondary flux terms การดิสครีไทซ์ในแต่ละพจน์ทำได้โดยการประมาณเชิงเส้น central differencing scheme สำหรับ primary flux terms นั้น จะใช้อุณหภูมิที่แต่ละ node ของปริมาตรควบคุมในการดิสครีไทซ์ เช่น $\left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_{east} = \left(\frac{T_E - T_P}{\delta\xi_{PE}}\right)$

เป็นต้น ส่วน secondary flux terms จะใช้อุณหภูมิที่มุมของปริมาตรควบคุมในการดิสครีไทซ์ เช่น $\left(\dfrac{\partial T}{\partial \eta}\right)_{east} = \left(\dfrac{T_{e,n} - T_{e,s}}{\delta\eta_{en-es}}\right)$ เป็นต้น ดังนั้นการหา secondary flux terms นี้จำเป็นต้องรู้ค่าอุณหภูมิที่มุมของปริมาตรควบคุมก่อน โดยค่าอุณหภูมิที่มุมนี้ให้สัญลักษณ์เป็น $T_{e,n}, T_{e,s}, T_{w,n}$ และ $T_{w,s}$ แทนอุณหภูมิที่มุมขวาบน ขวาล่าง ซ้ายบน และซ้ายล่างของปริมาตรควบคุมตามลำดับซึ่งมีตำแหน่งดังในรูปที่ 3.8



รูปที่ 3.8 ตำแหน่งของจุดบนปริมาตรควบคุม

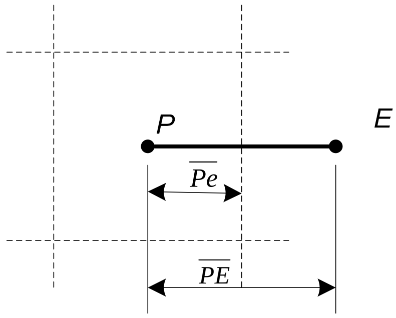
โดยค่าอุณหภูมิที่มุมของปริมาตรควบคุมเหล่านี้สามารถหาได้จากการประมาณค่าในช่วงโดยถ่วงน้ำหนักแบบเชิงเส้น (weighted linear interpolation) ซึ่งมีรูปแบบสมการดังนี้

$$T_e = (1 - f_{1P})T_P + f_{1P}T_E \tag{3.54}$$

โดย f_{1P} คืออัตราส่วนระหว่างระยะจาก Node ไปยังขอบของปริมาตรควบคุม ($\overline{Pe}$) กับระยะจาก node ไปยัง node ที่อยู่ติดกันในทิศตะวันออก ($\overline{PE}$) ดังรูปที่ 3.9 ซึ่งสามารถหาได้จากสมการดังนี้

$$f_{1P} = \frac{\overline{Pe}}{\overline{PE}} \tag{3.55}$$

สมการ (3.54) และ (3.55) นี้เป็นการหาค่าอุณหภูมิที่ขอบของปริมาตรควบคุมในทิศตะวันออก ส่วนในทิศอื่นทำเช่นเดียวกันกับสมการ (3.54) และ (3.55) เมื่อได้ค่าอุณหภูมิที่ขอบของปริมาตรควบคุมทั้งหมดแล้วจึงทำการหาค่าที่มุมของของปริมาตรควบคุมด้วยวิธีการประมาณค่าในช่วงโดยถ่วงน้ำหนักแบบเชิงเส้นเช่นเดียวกับสมการ (3.54) และ (3.55) นี้ ดังนั้นการหาค่าที่มุมของของปริมาตรควบคุมหนึ่งจุดจะใช้การประมาณค่าในช่วง 3 ครั้ง การประมาณค่าในช่วงโดยถ่วงน้ำหนักแบบเชิงเส้นนี้เป็นวิธีที่มีความแม่นยำสูงกว่าการประมาณค่าในช่วงอื่นๆทั่วไป



รูปที่ 3.9 ระยะจาก node ไปยังขอบของปริมาตรควบคุม ($\overline{Pe}$) และระยะจาก node ไปยัง node ที่อยู่ติดกันในทิศตะวันออก ($\overline{PE}$)

เมื่อได้อุณหภูมิที่มุมของปริมาตรควบคุมแล้วสามารถหาค่าฟลักซ์ในแต่ละทิศของปริมาตรควบคุมในสมการ (3.34) ดังนี้

$$\frac{k\alpha A_e}{J}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_{east} = \frac{k\alpha A_e}{J}\left(\frac{T_E - T_P}{\delta \xi_{PE}}\right) \tag{3.56}$$

$$\frac{k\beta A_e}{J}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)_{east} = \frac{k\beta A_e}{J}\left(\frac{T_{e,n} - T_{e,s}}{\delta \eta_{en-es}}\right) \tag{3.57}$$

$$\frac{k\alpha A_w}{J}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_{west} = \frac{k\alpha A_w}{J}\left(\frac{T_P - T_W}{\delta \xi_{WP}}\right) \tag{3.58}$$

$$\frac{k\beta A_w}{J}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)_{west} = \frac{k\beta A_w}{J}\left(\frac{T_{w,n} - T_{w,s}}{\delta \eta_{wn-ws}}\right) \tag{3.59}$$

$$\frac{k\gamma A_n}{J}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)_{north} = \frac{k\gamma A_n}{J}\left(\frac{T_N - T_P}{\delta \eta_{PN}}\right) \tag{3.60}$$

$$\frac{k\beta A_n}{J}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)_{north} = \frac{k\beta A_n}{J}\left(\frac{T_{e,n} - T_{w,n}}{\delta \xi_{en-wn}}\right) \tag{3.61}$$

$$\frac{k\gamma A_s}{J}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)_{south} = \frac{k\gamma A_s}{J}\left(\frac{T_P - T_S}{\delta \eta_{SP}}\right) \tag{3.62}$$

$$\frac{k\beta A_s}{J}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)_{south} = \frac{k\beta A_s}{J}\left(\frac{T_{e,s} - T_{w,s}}{\delta \xi_{es-ws}}\right) \tag{3.63}$$

โดยที่ T_E , T_W , T_N , T_S และ T_P เป็นค่าของอุณหภูมิที่ node ที่จุดศูนย์กลางของปริมาตรควบคุมในทิศตะวันออก ตะวันตก เหนือ ใต้ และศูนย์กลาง ตามลำดับดังในรูปที่ 3.8 ค่าสัมประสิทธิ์ $\frac{k\beta A_e}{J}$, $\frac{k\alpha A_w}{J}$, $\frac{k\gamma A_n}{J}$ และ $\frac{k\beta A_s}{J}$ มีค่าเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับระยะทางไม่ขึ้นกับอุณหภูมิดังนั้นสัมประสิทธิ์เหล่านี้จะเป็นค่าคงที่สำหรับสมการ (3.52) สัมประสิทธิ์เหล่านี้สามารถหาค่าได้เมื่อรู้ตำแหน่งของกริดซึ่งได้มาจากสมการ (2.48) – (2.50) ในบทที่แล้ว

เมื่อแทนค่าค่าฟลักซ์ในแต่ละทิศจากสมการ (3.56) - (3.63) และพจน์อัตราการเปลี่ยนแปลงสมการ (3.53) ลงในสมการ (3.52) จะได้

$$\begin{aligned} J\rho C_p (T_P - T_P^0)\Delta V = \int_t^{t+\Delta t} \Bigg\{ & \frac{k\alpha A_e}{J}\left(\frac{T_E - T_P}{\delta\xi_{PE}}\right) - \frac{k\beta A_e}{J}\left(\frac{T_{e,n} - T_{e,s}}{\delta\eta_{en-es}}\right) \\ & - \frac{k\alpha A_w}{J}\left(\frac{T_P - T_W}{\delta\xi_{WP}}\right) + \frac{k\beta A_w}{J}\left(\frac{T_{w,n} - T_{w,s}}{\delta\eta_{wn-ws}}\right) + \frac{k\gamma A_n}{J}\left(\frac{T_N - T_P}{\delta\eta_{PN}}\right) \\ & - \frac{k\beta A_n}{J}\left(\frac{T_{e,n} - T_{w,n}}{\delta\xi_{en-wn}}\right) - \frac{k\gamma A_s}{J}\left(\frac{T_P - T_S}{\delta\eta_{SP}}\right) + \frac{k\beta A_s}{J}\left(\frac{T_{e,s} - T_{w,s}}{\delta\xi_{es-ws}}\right)\Bigg\} dt + \int_t^{t+\Delta t} \overline{S}\Delta V dt \end{aligned} \quad (3.64)$$

ในการประมาณค่าพจน์ทางขวามือของสมการ (3.64) เราต้องสมมติให้อุณหภูมิ $T_P, T_E, T_W, T_N, T_S, T_{e,n}, T_{e,s}, T_{w,n}$ และ $T_{w,s}$ แปรผันตามเวลา ซึ่งเราสามารถประมาณค่าของอุณหภูมินี้โดยใช้เวลาที่ t หรือ $t+\Delta t$ นอกจากนี้เรายังสามารถประมาณค่าของอุณหภูมิด้วยการรวมเวลาที่ t และ $t+\Delta t$ โดยการถ่วงน้ำหนักด้วยตัวแปร θ ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 และเราสามารถเขียนอินทิกรัล I_T ของอุณหภูมิ T_P ตามเวลาได้ดังนี้

$$I_T = \int_t^{t+\Delta t} T_P dt = [\theta T_p + (1-\theta)T_P^0]\Delta t \quad (3.65)$$

ทั้งนี้

θ	I_T
0	$T_P^0 \Delta t$
0.5	$0.5[T_p + T_P^0]\Delta t$
1	$T_P \Delta t$

ถ้า $\theta = 0$ แล้วอุณหภูมิที่ใช้คืออุณหภูมิที่เวลา t ถ้า $\theta = 1$ แล้วอุณหภูมิที่ใช้คืออุณหภูมิที่เวลา $t+\Delta t$ และถ้า $\theta = 0.5$ แล้วอุณหภูมิที่ใช้คืออุณหภูมิที่เวลา t และ $t+\Delta t$ โดยถ่วงน้ำหนักเท่ากัน แทนค่าสมการ (3.65) สำหรับอุณหภูมิ $T_E, T_W, T_N, T_S, T_{e,n}, T_{e,s}, T_{w,n}$ และ $T_{w,s}$ ลงในสมการ (3.64) แล้วหารตลอดด้วย Δt จะได้สมการดังนี้

$$\begin{aligned} J\rho C_p\left(\frac{T_P - T_P^0}{\Delta t}\right)\Delta V = \theta\Bigg[& \frac{k\alpha A_e}{J}\left(\frac{T_E - T_P}{\delta\xi_{PE}}\right) - \frac{k\beta A_e}{J}\left(\frac{T_{e,n} - T_{e,s}}{\delta\eta_{en-es}}\right) \\ & - \frac{k\alpha A_w}{J}\left(\frac{T_P - T_W}{\delta\xi_{WP}}\right) + \frac{k\beta A_w}{J}\left(\frac{T_{w,n} - T_{w,s}}{\delta\eta_{wn-ws}}\right) + \frac{k\gamma A_n}{J}\left(\frac{T_N - T_P}{\delta\eta_{PN}}\right) \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$-\frac{k\beta A_n}{J}\left(\frac{T_{e,n}-T_{w,n}}{\delta\xi_{en-wn}}\right)-\frac{k\gamma A_s}{J}\left(\frac{T_P-T_S}{\delta\eta_{SP}}\right)+\frac{k\beta A_s}{J}\left(\frac{T_{e,s}-T_{w,s}}{\delta\xi_{es-ws}}\right)\Bigg]+$$
$$(1-\theta)\Bigg[\frac{k\alpha A_e}{J}\left(\frac{T_E-T_P}{\delta\xi_{PE}}\right)-\frac{k\beta A_e}{J}\left(\frac{T_{e,n}-T_{e,s}}{\delta\eta_{en-es}}\right)-\frac{k\alpha A_w}{J}\left(\frac{T_P-T_W}{\delta\xi_{WP}}\right)$$
$$+\frac{k\beta A_w}{J}\left(\frac{T_{w,n}-T_{w,s}}{\delta\eta_{wn-ws}}\right)+\frac{k\gamma A_n}{J}\left(\frac{T_N-T_P}{\delta\eta_{PN}}\right)-\frac{k\beta A_n}{J}\left(\frac{T_{e,n}-T_{w,n}}{\delta\xi_{en-wn}}\right)$$
$$-\frac{k\gamma A_s}{J}\left(\frac{T_P-T_S}{\delta\eta_{SP}}\right)+\frac{k\beta A_s}{J}\left(\frac{T_{e,s}-T_{w,s}}{\delta\xi_{es-ws}}\right)\Bigg]+\int_t^{t+\Delta t}\overline{S}\Delta V dt$$

และพจน์สุดท้ายขวามือของสมการ (3.66) คือ source term สามารถหาได้จาก

$$\overline{S}\Delta V = S_U + S_P T_P \tag{3.67}$$

พจน์ source term มีค่าแปรผันตามตัวแปรตาม (T) แบบเชิงเส้น โดยมี S_U เป็นค่าคงที่ และ S_P เป็นสัมประสิทธิ์หน้าตัวแปรตาม (T) ถ้าผลเฉลยมีเสถียรภาพแล้ว S_P จะมีค่าเป็นลบ

แทน source term ลงในสมการ (3.66) เราสามารถจัดรูปสมการ (3.66) ได้เป็น

$$\left[J\rho C_p\frac{\Delta V}{\Delta t}+\theta\left(\frac{k\alpha A_e}{J\delta\xi_{PE}}+\frac{k\alpha A_w}{J\delta\xi_{WP}}+\frac{k\gamma A_n}{J\delta\eta_{PN}}+\frac{k\gamma A_s}{J\delta\eta_{SP}}\right)-S_P\right]T_P$$
$$=\frac{k\alpha A_e}{J\delta\xi_{PE}}[\theta T_E+(1-\theta)T_E^0]+\frac{k\alpha A_w}{J\delta\xi_{WP}}[\theta T_W+(1-\theta)T_W^0]$$
$$+\frac{k\gamma A_n}{J\delta\eta_{PN}}[\theta T_N+(1-\theta)T_N^0]+\frac{k\gamma A_s}{J\delta\eta_{SP}}[\theta T_S+(1-\theta)T_S^0]+S_U$$
$$-\frac{k\beta A_e}{J}\left(\frac{[\theta T_{e,n}+(1-\theta)T_{e,n}^0]-[\theta T_{e,s}+(1-\theta)T_{e,s}^0]}{\delta\eta_{en-es}}\right)$$
$$+\frac{k\beta A_w}{J}\left(\frac{[\theta T_{w,n}+(1-\theta)T_{w,n}^0]-[\theta T_{w,s}+(1-\theta)T_{w,s}^0]}{\delta\eta_{wn-ws}}\right) \tag{3.68}$$
$$-\frac{k\beta A_n}{J}\left(\frac{[\theta T_{e,n}+(1-\theta)T_{e,n}^0]-[\theta T_{w,n}+(1-\theta)T_{w,n}^0]}{\delta\xi_{en-wn}}\right)$$
$$+\frac{k\beta A_s}{J}\left(\frac{[\theta T_{e,s}+(1-\theta)T_{e,s}^0]-[\theta T_{w,s}+(1-\theta)T_{w,s}^0]}{\delta\xi_{es-ws}}\right)+$$
$$\left[\rho C_p\frac{\Delta V}{\Delta t}+(1-\theta)\left(\frac{k\alpha A_e}{J\delta\xi_{PE}}+\frac{k\alpha A_w}{J\delta\xi_{WP}}+\frac{k\gamma A_n}{J\delta\eta_{PN}}+\frac{k\gamma A_s}{J\delta\eta_{SP}}\right)\right]T_P^0$$

ให้สัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร T_E, T_W, T_N, T_S และ T_P เป็น a_E, a_W, a_N, a_S และ a_P ตามลำดับ จะสามารถลดรูปสมการ (3.68) ให้อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} a_p T_p &= a_E\,[\theta T_E + (1-\theta)T_E^0] + a_W\,[\theta T_W + (1-\theta)T_W^0] + \\ & a_N\,[\theta T_N + (1-\theta)T_N^0] + a_S\,[\theta T_S + (1-\theta)T_S^0] + \\ & [a_P^0 - (1-\theta)a_E - (1-\theta)a_W - (1-\theta)a_N - (1-\theta)a_S]T_P^0 + b \end{aligned} \tag{3.69}$$

โดย

$$a_P^0 = J\rho C_p \frac{\Delta V}{\Delta t} \tag{3.70}$$

$$a_E = \frac{k\alpha A_e}{J\delta\xi_{PE}} \tag{3.71}$$

$$a_W = \frac{k\alpha A_w}{J\delta\xi_{WP}} \tag{3.72}$$

$$a_N = \frac{k\gamma A_n}{J\delta\eta_{PN}} \tag{3.73}$$

$$a_S = \frac{k\gamma A_s}{J\delta\eta_{SP}} \tag{3.74}$$

$$a_p = \theta\sum_{nb} a_{nb} + a_P^0 - S_P \tag{3.75}$$

$$\begin{aligned} b = S_u &- \frac{k\beta A_e}{J}\left(\frac{[\theta T_{e,n} + (1-\theta)T_{e,n}^0] - [\theta T_{e,s} + (1-\theta)T_{e,s}^0]}{\delta\eta_{en-es}}\right) \\ &+ \frac{k\beta A_w}{J}\left(\frac{[\theta T_{w,n} + (1-\theta)T_{w,n}^0] - [\theta T_{w,s} + (1-\theta)T_{w,s}^0]}{\delta\eta_{wn-ws}}\right) \\ &- \frac{k\beta A_n}{J}\left(\frac{[\theta T_{e,n} + (1-\theta)T_{e,n}^0] - [\theta T_{w,n} + (1-\theta)T_{w,n}^0]}{\delta\xi_{en-wn}}\right) \\ &+ \frac{k\beta A_s}{J}\left(\frac{[\theta T_{e,s} + (1-\theta)T_{e,s}^0] - [\theta T_{w,s} + (1-\theta)T_{w,s}^0]}{\delta\xi_{es-ws}}\right) \end{aligned} \tag{3.76}$$

รูปสุดท้ายของสมการหลังจากทำการดิสครีไทซ์แล้ว จะขึ้นอยู่กับค่า θ ในกรณีที่ $\theta = 0$ อุณหภูมิที่ใช้คำนวณทางขวามือของสมการ (3.69) คืออุณหภูมิที่เวลาเดิม t ได้แก่ $T_P{}^0$, $T_E{}^0$, $T_W{}^0$, $T_N{}^0$, $T_S{}^0$, $T_{e,n}{}^0$, $T_{e,s}{}^0$, $T_{w,n}{}^0$ และ $T_{w,s}{}^0$ ซึ่งวิธีนี้เรียกว่า explicit ในกรณีที่ $0 < \theta \le 1$ อุณหภูมิที่ใช้คำนวณคือเราจะใช้ทั้งอุณหภูมิที่เวลาเดิม t และอุณหภูมิที่เวลาใหม่ $t + \Delta t$ ซึ่งวิธีนี้เรียกว่า implicit สำหรับค่า θ =1 ซึ่งเป็นค่ามากที่สุด เราจะเรียกวิธีนี้ว่า fully implicit และในกรณีที่ θ =1/2 เราจะเรียกวิธีนี้ว่า Crank-Nicolson เราจะกล่าวรายละเอียดของแต่ละวิธีดังนี้

3.4.1 วิธี explicit

แทนค่า θ =0 ในสมการ (3.69) จะได้สมการเป็นสมการเชิงเส้นดังนี้

$$a_p T_p = a_E\, T_E^0 + a_W\, T_W^0 + a_N\, T_N^0 + a_S\, T_S^0 + [a_P^0 - a_E - a_W - a_N - a_S]T_P^0 + b \qquad (3.77)$$

โดย

$$a_P^0 = J\rho C_p \frac{\Delta V}{\Delta t} \qquad (3.78)$$

$$a_E = \frac{k\alpha A_e}{J\delta\xi_{PE}} \qquad (3.79)$$

$$a_W = \frac{k\alpha A_w}{J\delta\xi_{WP}} \qquad (3.80)$$

$$a_N = \frac{k\gamma A_n}{J\delta\eta_{PN}} \qquad (3.81)$$

$$a_S = \frac{k\gamma A_s}{J\delta\eta_{SP}} \qquad (3.82)$$

$$a_p = a_P^0 - S_P \qquad (3.83)$$

$$b = S_u - \frac{k\beta A_e}{J}\left(\frac{T_{e,n}^0 - T_{e,s}^0}{\delta\eta_{en-es}}\right) + \frac{k\beta A_w}{J}\left(\frac{T_{w,n}^0 - T_{w,s}^0}{\delta\eta_{wn-ws}}\right) - \frac{k\beta A_n}{J}\left(\frac{T_{e,n}^0 - T_{w,n}^0}{\delta\xi_{en-wn}}\right) + \frac{k\beta A_s}{J}\left(\frac{T_{e,s}^0 - T_{w,s}^0}{\delta\xi_{es-ws}}\right) \qquad (3.84)$$

ทางขวามือของสมการ (3.77) มีเพียงค่าอุณหภูมิที่เวลาเดิมเท่านั้น ดังนั้น เราสามารถคำนวณโดยไปข้างหน้า วิธีนี้มีพื้นฐานมาจากวิธี backward differencing ซึ่งมีความแม่นยำอันดับหนึ่ง จากกฎที่ว่าสัมประสิทธิ์ทุกตัวในสมการที่ดิสครีไทซ์แล้วจะต้องเป็นบวก ดังนั้นสัมประสิทธิ์หน้า T_P^0 จะต้องเป็นบวกด้วย นั่นคือ $a_P^0 - a_W - a_E - a_N - a_S > 0$ กำหนดค่าการนำความร้อนคงที่และมีระยะห่างระหว่างกริดสม่ำเสมอ เราสามารถเขียนเงื่อนไขนี้เป็นสมการได้

$$\Delta t < \rho C_P \frac{J^2}{4k\alpha} \qquad (3.85)$$

สมการ (3.85) นี้เป็นสมการที่แสดงค่าขนาดของช่วงเวลาที่มากที่สุดซึ่งเป็นข้อจำกัดที่สำคัญของวิธี explicit ถ้าใช้ขนาดของช่วงเวลาที่มากเกินค่าที่จำกัด จะทำให้ความเสถียรภาพลดลง

3.4.2 วิธี Crank-Nicolson

แทนค่า θ =1/2 ในสมการ (3.69) จะได้สมการดังนี้

$$a_p T_p = a_E\left(\frac{T_E + T_E^0}{2}\right) + a_W\left(\frac{T_W + T_W^0}{2}\right) + a_N\left(\frac{T_N + T_N^0}{2}\right) + a_S\left(\frac{T_S + T_S^0}{2}\right) + [a_P^0 - \frac{a_E}{2} - \frac{a_W}{2} - \frac{a_N}{2} - \frac{a_S}{2}]T_P^0 + b \tag{3.86}$$

โดย

$$a_P^0 = J\rho C_p \frac{\Delta V}{\Delta t} \tag{3.87}$$

$$a_E = \frac{k\alpha A_e}{J\delta\xi_{PE}} \tag{3.88}$$

$$a_W = \frac{k\alpha A_w}{J\delta\xi_{WP}} \tag{3.89}$$

$$a_N = \frac{k\gamma A_n}{J\delta\eta_{PN}} \tag{3.90}$$

$$a_S = \frac{k\gamma A_s}{J\delta\eta_{SP}} \tag{3.91}$$

$$a_p = \frac{1}{2}\sum_{nb} a_{nb} + a_P^0 - S_P \tag{3.92}$$

$$\begin{aligned} b = S_u &- \frac{k\beta A_e}{J}\left(\frac{0.5[T_{e,n} + T_{e,n}^0] - 0.5[T_{e,s} + T_{e,s}^0]}{\delta\eta_{en-es}}\right) \\ &+ \frac{k\beta A_w}{J}\left(\frac{0.5[T_{w,n} + T_{w,n}^0] - 0.5[T_{w,s} + T_{w,s}^0]}{\delta\eta_{wn-ws}}\right) \\ &- \frac{k\beta A_n}{J}\left(\frac{0.5[T_{e,n} + T_{e,n}^0] - 0.5[T_{w,n} + T_{w,n}^0]}{\delta\xi_{en-wn}}\right) \\ &+ \frac{k\beta A_s}{J}\left(\frac{0.5[T_{e,s} + T_{e,s}^0] - 0.5[T_{w,s} + T_{w,s}^0]}{\delta\xi_{es-ws}}\right) \end{aligned} \tag{3.93}$$

เนื่องจากค่าของอุณหภูมิที่ไม่รู้ค่าที่เวลาใหม่มีมากกว่าหนึ่งตัว ดังสมการ (3.86) ดังนั้นเราต้องแก้สมการสำหรับทุกจุดในแต่ละช่วงเวลา แม้ว่าวิธีที่มีค่า $\frac{1}{2} \le \theta \le 1$ รวมทั้งวิธี Crank-Nicolson ด้วย เป็นวิธีที่เสถียรภาพอย่างไม่มีเงื่อนไขสำหรับทุกขนาดของช่วงเวลาก็ตาม แต่สัมประสิทธิ์ทุก

ตัวต้องเป็นบวกเพื่อให้ผลลัพธ์ที่ได้เป็นจริงและมีค่าอยู่ในช่วงขอบ สำหรับในกรณีค่าสัมประสิทธิ์ของ $T_P{}^0$ จะมีเงื่อนไขดังนี้

$$\Delta t < \rho C_P \frac{J^2}{2k\alpha} \tag{3.94}$$

ข้อจำกัดเรื่องช่วงเวลาของวิธี Crank-Nicolson นี้มีน้อยกว่าเมื่อเทียบกับวิธี explicit เพียงเล็กน้อย ทั้งนี้วิธี Crank-Nicolson เป็นวิธีที่มีพื้นฐานมาจาก central differencing ซึ่งมีความแม่นยำอันดับสอง เพื่อใช้ในการดิสครีไทซ์พจน์ของเวลา ดังนั้น วิธี Crank-Nicolson จึงมีความแม่นยำมากกว่าวิธี explicit เมื่อมีขนาดของช่วงเวลาที่เล็กเพียงพอ เพราะว่าความแม่นยำโดยรวมของการคำนวณจะขึ้นอยู่กับวิธีที่ใช้ในการดิสครีไทซ์สมการเชิงอนุพันธ์ด้วย

3.4.3 วิธี fully implicit

แทนค่า θ =1 ในสมการ (3.69) จะได้สมการดังนี้

$$a_p T_p = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + a_P^0 T_P^0 + b \tag{3.95}$$

โดย

$$a_P^0 = \rho C_p \frac{\Delta V}{\Delta t} \tag{3.96}$$

$$a_E = \frac{k\alpha A_e}{J\delta\xi_{PE}} \tag{3.97}$$

$$a_W = \frac{k\alpha A_w}{J\delta\xi_{WP}} \tag{3.98}$$

$$a_N = \frac{k\gamma A_n}{J\delta\eta_{PN}} \tag{3.99}$$

$$a_S = \frac{k\gamma A_s}{J\delta\eta_{SP}} \tag{3.100}$$

$$a_p = \sum_{nb} a_{nb} + a_P^0 - S_P \tag{3.101}$$

$$\begin{aligned} b = S_u &- \frac{k\beta A_e}{J}\left(\frac{T_{e,n} - T_{e,s}}{\delta\eta_{en-es}}\right) + \frac{k\beta A_w}{J}\left(\frac{T_{w,n} - T_{w,s}}{\delta\eta_{wn-ws}}\right) - \frac{k\beta A_n}{J}\left(\frac{T_{e,n} - T_{w,n}}{\delta\xi_{en-wn}}\right) \\ &+ \frac{k\beta A_s}{J}\left(\frac{T_{e,s} - T_{w,s}}{\delta\xi_{es-ws}}\right) \end{aligned} \tag{3.102}$$

จากสมการ (3.95) พบว่ามีอุณหภูมิที่เวลาใหม่ทั้งด้านซ้ายและขวา และเราต้องแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตที่แต่ละช่วงเวลา เราจะเริ่มต้นกระบวนการคำนวณจากอุณหภูมิเริ่มต้นที่กำหนดให้ T^0 ระบบสมการ (3.95) จะถูกแก้หลังจากเลือกช่วงเวลา Δt แล้ว จากนั้นผลเฉลย T จะถูกกำหนดให้เป็น T^0 และกระบวนการก็จะถูกทำซ้ำเพื่อให้ได้ผลเฉลยในช่วงเวลาอื่นๆ

สามารถเห็นได้ชัดว่าสัมประสิทธิ์ทุกตัวเป็นบวก ซึ่งทำให้วิธี fully implicit เสถียรภาพอย่างไม่มีเงื่อนไขสำหรับทุกขนาดของช่วงเวลา เนื่องจากวิธีนี้มีความแม่นยำเพียงอันดับหนึ่ง ดังนั้นควรใช้ขนาดของช่วงเวลาน้อยเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำ วิธี fully implicit นี้เป็นวิธีที่ถูกเลือกนำมาใช้ในวิทยานิพนธ์นี้

จากหัวข้อย่อยนี้ เราได้ระบบสมการเชิงพีชคณิตซึ่งสามารถหาผลเฉลยได้โดยใช้ TDMA ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อย่อยต่อไป

3.5 การแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิต

หลังจากทำการดิสครีไทซ์สมการเชิงอนุพันธ์แล้วจะได้ระบบสมการเชิงพีชคณิต หัวข้อย่อยนี้จะทำการแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตเพื่อหาผลเฉลยของปัญหา การแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตมีหลายวิธีด้วยกันดังที่ได้กล่าวแล้วในหัวข้อ 2.4.3 วิธีทำซ้ำแบบ tri-diagonal matrix algorithm หรือ TDMA มีความเหมาะในการนำมาใช้แก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมนั้น เนื่องจากวิธี TDMA มีข้อดีคือประหยัดหน่วยความจำและลู่เข้าเร็ว การแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตด้วยวิธี TDMA นี้มีขั้นตอนหลัก 2 ขั้นตอนคือการกำจัดไปข้างหน้า และการแทนค่าย้อนกลับ ซึ่งจะกล่าวในรายละเอียดดังต่อไปนี้

ระบบสมการ TDMA มีรูปทั่วไป ดังนี้

$$-\beta_j\phi_{j-1} + D_j\phi_j - \alpha_j\phi_{j+1} = C_j \tag{3.103}$$

ในขั้นตอนการกำจัดไปข้างหน้า เราจะจัดสมการให้มีรูปแบบเป็นดังนี้

$$\phi_j = A_j\phi_{j+1} + C_j' \tag{3.104}$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ A_j และ C_j' สามารถหาได้จาก

$$A_j = \frac{\alpha_j}{D_j - \beta_j A_{j-1}} \tag{3.105}$$

$$C_j^{'} = \frac{\beta_j C_{j-1}^{'} + C_j}{D_j - \beta_j A_{j-1}} \tag{3.106}$$

เราทราบค่าของจุดที่ขอบ $j = 1$ และ $j = n+1$ ซึ่งจะได้ค่าที่จุดดังกล่าวคือ

$$A_1 = 0 \text{ และ } C_1^{'} = \phi_1$$

$$A_{n+1} = 0 \text{ และ } C_{n+1}^{'} = \phi_{n+1}$$

ดังนั้นเมื่อทราบค่าดังกล่าวแล้วเราสามารถแทนค่าย้อนกลับ แล้วจะได้ผลเฉลยของปัญหา

สำหรับปัญหาสองมิติดังสมการ (3.95) สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบที่สามารถใช้วิธี TDMA ได้ดังนี้

$$-a_S T_S + a_P T_P - a_N T_N = a_W T_W + a_E T_E + b \tag{3.107}$$

ซึ่งเป็นสมการในรูปแบบเดียวกับสมการ (3.54) สามารถใช้วิธี TDMA แล้วหาผลเฉลยของปัญหาได้ สำหรับปัญหาสองมิติเราจะหาค่าของเส้นอุณหภูมิจากทิศเหนือไปยังทิศใต้ก่อน แล้วจึงกวาดจากทิศตะวันออกไปยังทิศตะวันตก

ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมบนพิกัดกระชับขอบเขตเพื่อใช้แก้ปัญหาการนำความร้อนในรูปร่างที่ซับซ้อนนี้มีขั้นตอนสำคัญ 4 ขั้นตอนคือการสร้างกริด การแปลงพิกัด การดิสครีไทซ์ และการแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิต ในส่วนของการสร้างกริดที่ได้กล่าวไว้ในบทที่แล้วซึ่งจะได้ตำแหน่ง x และ y เป็นกริดมา จากตำแหน่งของกริดที่ได้นั้น เราจะทำการหาค่าสัมประสิทธิ์ α, β และ γ เพื่อนำมาใช้ต่อในขั้นตอนของการหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมในบทนี้ ค่าสัมประสิทธิ์ α, β และ γ จะเป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง x และ y ดังนั้นในขั้นตอนของการดิสครีไทซ์ สัมประสิทธิ์เหล่านี้จะเป็นค่าคงที่เนื่องจากการดิสครีไทซ์เป็นการหาผลเฉลยที่เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ หลังจากทำการดิสครีไทซ์สมการเชิงอนุพันธ์แล้วจะได้ระบบสมการเชิงพีชคณิต ในขั้นตอนสุดท้ายจึงทำการแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตด้วยวิธี TDMA ได้ผลเฉลยสุดท้ายเป็นค่าอุณหภูมิที่จุดต่างๆ

บทที่ 4

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ในบทนี้ เป็นการนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นจากระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมบนพิกัดกระชับขอบเขต มาตรวจสอบความถูกต้อง (validation) โดยนำผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง ผลจากการคำนวณและผลการทดลองของผู้วิจัยที่ได้ทำมาก่อน ทั้งนี้เพื่อแสดงว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นนี้มีความถูกต้องและเชื่อถือได้ สำหรับการตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นนี้จะแบ่งออกเป็นสองส่วนด้วยกัน ในส่วนที่หนึ่งจะนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นมาทดสอบปัญหาการนำความร้อนแบบสภาวะอยู่ตัว (steady state) ซึ่งมีทั้งหมด 5 กรณีศึกษาด้วยกัน ดังนี้

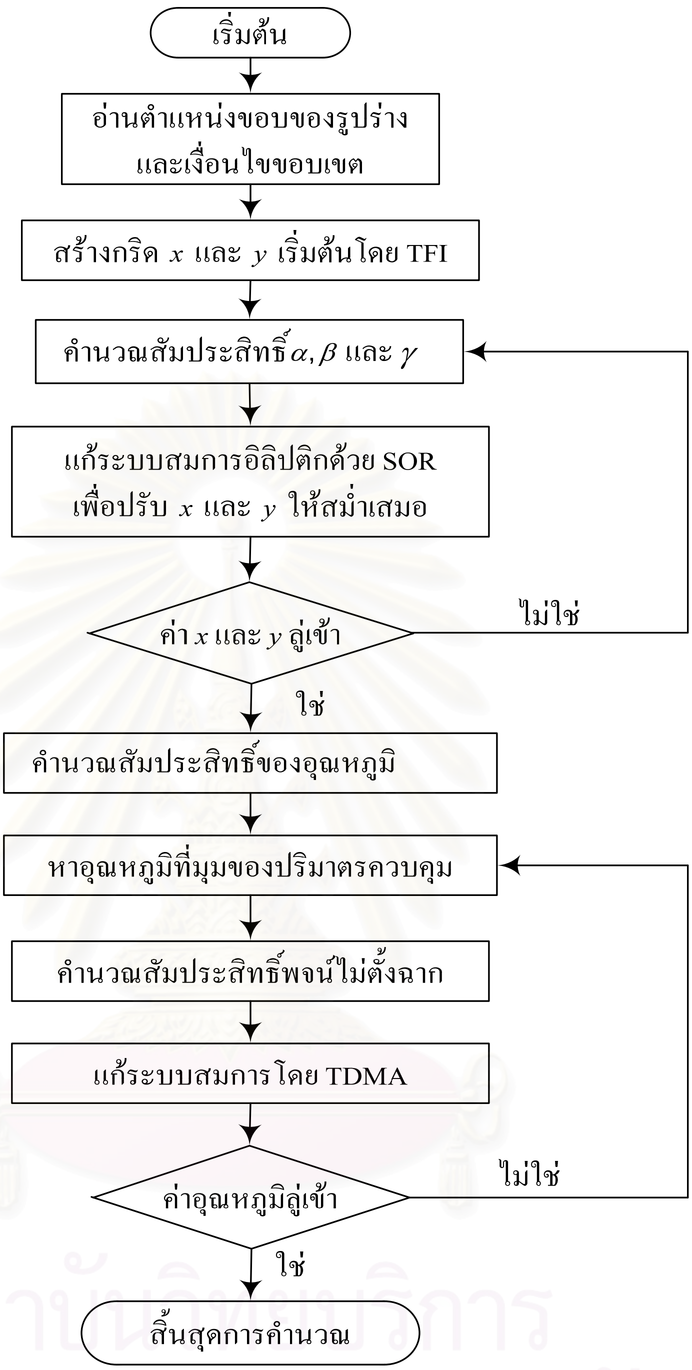
1) การนำความร้อนในแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกัน
2) การนำความร้อนในแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์
3) การนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีวงกลมอยู่ข้างใน
4) การนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอุณหภูมิที่มีเงื่อนไขขอบเป็นฟังก์ชันซายน์
5) การนำความร้อนในแผ่นสามเหลี่ยมที่มีผลิตการความร้อนภายใน

สำหรับส่วนที่สองจะทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ด้วยปัญหาการนำความร้อนแบบสภาวะไม่อยู่ตัว (unsteady state) ซึ่งจะตรวจสอบความถูกต้องในส่วนนี้สองกรณีศึกษา ได้แก่

1) การนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่สภาวะไม่อยู่ตัว
2) การนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมคางหมูเจาะรูวงกลมที่สภาวะไม่อยู่ตัว

4.1 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม

หัวข้อนี้แสดงขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม

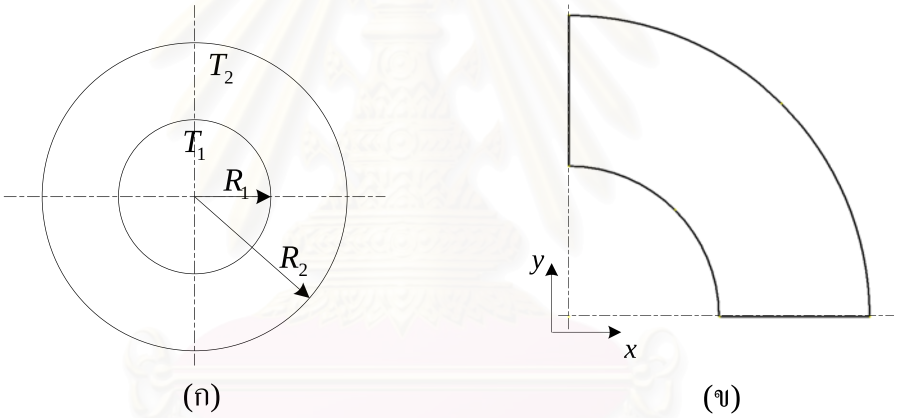
4.2 ปัญหาการนำความร้อนแบบสภาวะอยู่ตัว

ในหัวข้อนี้ เราจะทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมโดยใช้ปัญหาการนำความร้อนแบบสภาวะอยู่ตัวซึ่งมีทั้งหมด 5 ปัญหาด้วยกัน ได้แก่ การนำความร้อนในแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกัน การนำความร้อนในแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์ การนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีวงกลมอยู่ข้างใน การนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีเงื่อนไข

ขอบเขตเป็นอุณหภูมิที่เป็นฟังก์ชันของซายน์ที่แปรผันตามระยะ x และการนำความร้อนในแผ่นสามเหลี่ยมที่มีการผลิตความร้อนภายใน โดยที่ 4 รูปร่างแรก รูปจะมีความสมมาตร ดังนั้นจึงมีการแบ่งคำนวณเพียง 1 ใน 4 หรือ 1 ใน 2 ของรูปร่างทั้งหมดเพื่อลดจำนวนหน่วยประมวล สำหรับหัวข้อนี้จะทำการเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้กับผลการคำนวณทางเชิงเลขและผลเฉลยแม่นตรง

4.2.1 การนำความร้อนในแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกัน

การตรวจสอบโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกันดังรูปที่ 4.2 (ก) นี้ กระทำโดยนำผลที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง ในส่วนของการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เนื่องจากรูปร่างของโดเมนมีความสมมาตร ดังนั้นเราสามารถคำนวณเพียง 1 ใน 4 ส่วนของรูปได้ ดังรูปที่ 4.2 (ข) เพื่อลดจำนวนหน่วยประมวลที่ใช้ในการคำนวณ และในส่วนของผลเฉลยแม่นตรง เราสามารถคำนวณโดยมีขั้นตอนดังนี้



รูปที่ 4.2 แผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกัน

สมการครอบคลุมของปัญหาการนำความร้อนในสภาวะอยู่ตัวแบบหนึ่งมิติในพิกัดทรงกระบอกมีรูปแบบสมการดังนี้

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr} \right) = 0 \tag{4.1}$$

และมีเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

$$\begin{aligned} r &= R_1 \qquad & T &= T_1 \\ r &= R_2 \qquad & T &= T_2 \end{aligned} \tag{4.2}$$

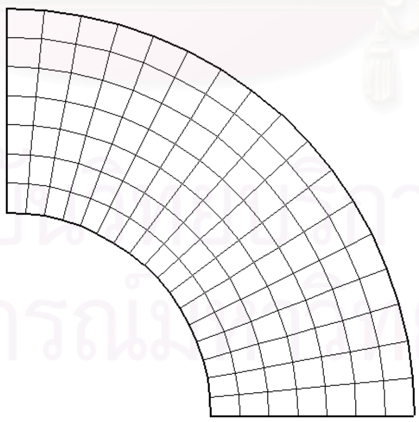
ทำการแก้สมการหาผลเฉลยของปัญหาโดยการอินทิเกรตสมการ (4.1) สองครั้งเทียบกับรัศมี จะได้ผลเฉลยในรูปแบบทั่วไปที่ติดค่าคงที่ไว้ จากนั้นจึงหาค่าคงที่สัมประสิทธิ์ของสมการนั้นจากเงื่อนไขขอบเขตทั้งสองเงื่อนไขดังสมการ (4.2) สุดท้ายจะได้สมการของผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกันมีรูปแบบสมการโดยทั่วไปดังนี้

$$T = T_1 - \frac{(T_1 - T_2)\ln(r / R_1)}{\ln(R_2 / R_1)} \tag{4.3}$$

สำหรับการตรวจสอบโปรแกรมในกรณีนี้ เราจะกำหนดค่าคงที่ต่างๆเพื่อแทนค่าลงในสมการผลเฉลยแม่นตรงทั่วไป (4.3) ดังนี้ โดยกำหนดให้วงกลมภายในมีรัศมี 1 cm ($R_1 = 1$) และวงกลมภายนอกมีรัศมี 2 cm ($R_2 = 2$) โดยมีอุณหภูมิภายใน 100 K ($T_1 = 100$) และมีอุณหภูมิภายนอก 0 K ($T_2 = 0$) หลังจากแทนค่าลงในสมการทั่วไป (4.3) แล้ว จะได้ผลเฉลยเป็นค่าของอุณหภูมิที่รัศมีต่างๆกัน ดังสมการนี้

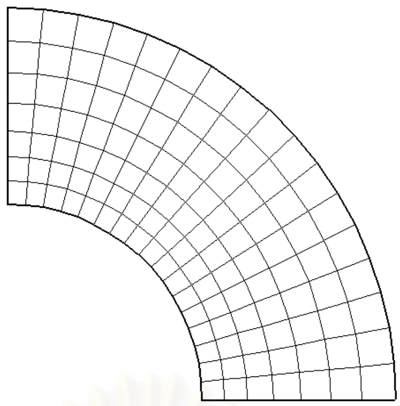
$$T = 100 - 144.27 \ln r \tag{4.4}$$

เมื่อได้ผลเฉลยแม่นตรงดังสมการ (4.4) แล้ว ขั้นตอนต่อไปจะเป็นการคำนวณโดยใช้โปรแกรมเพื่อที่จะนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงที่ได้คำนวณมาแล้ว สำหรับการคำนวณด้วยโปรแกรมในขั้นตอนแรกนั้นจะทำการสร้างกริดเริ่มต้นโดยใช้วิธี TFI ซึ่งจะได้กริดที่มีลักษณะดังรูปที่ 4.3



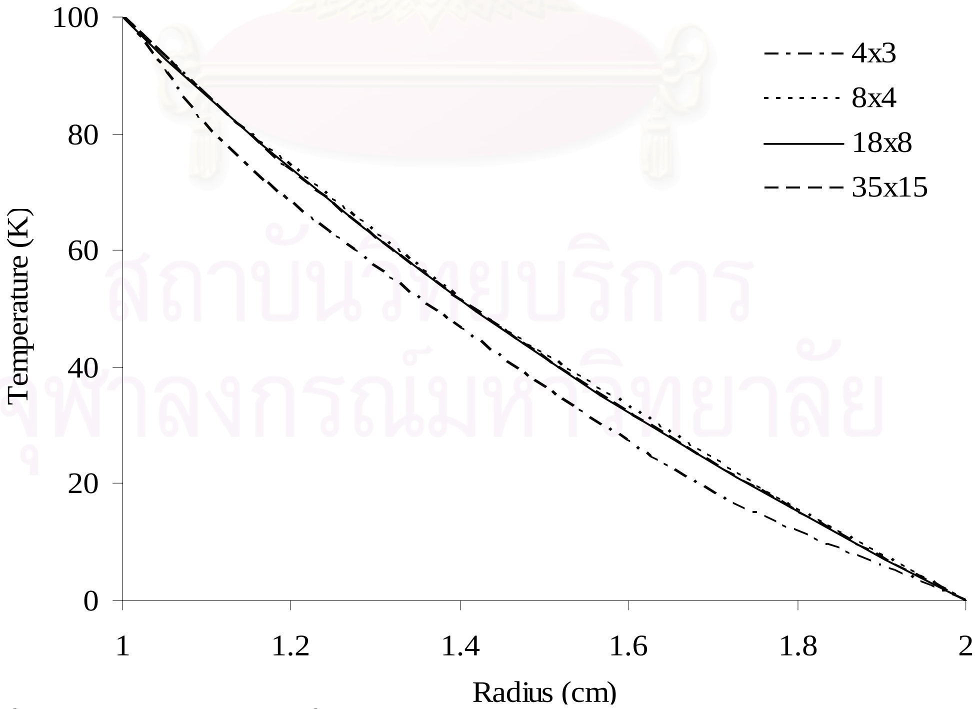
รูปที่ 4.3 กริดที่สร้างโดยใช้วิธี TFI บนโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกัน

จากนั้นทำการปรับกริดให้มีความสม่ำเสมอมากขึ้นโดยใช้วิธีการแก้สมการอิลิปติกซึ่งจะได้กริดที่มีลักษณะดังรูปที่ 4.4



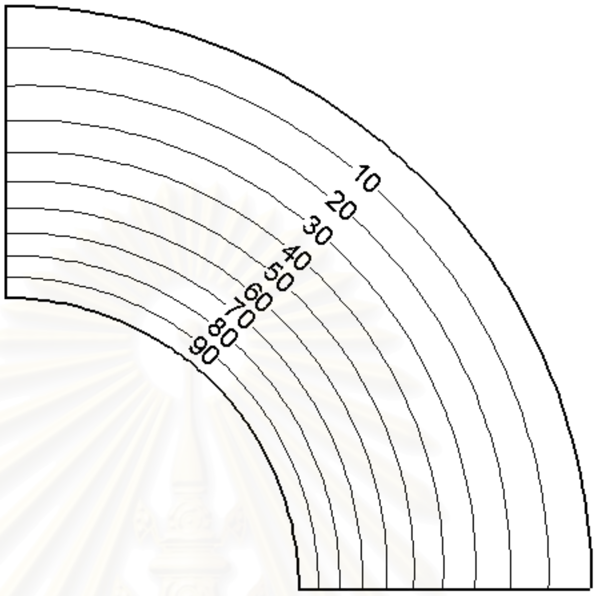
รูปที่ 4.4 กริดที่สร้างโดยการแก้สมการอิลิปติกบนโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกัน

การหาจำนวนกริดที่เหมาะสมในการนำมาใช้ในการคำนวณหาผลลัพธ์สำหรับโดเมนที่มีลักษณะเป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกันนี้ เราจะทดสอบโดยการกริดจำนวน 4x3 8x4 18x8 และ 35x15 กริด มาใช้ในการคำนวณหาผลลัพธ์ของปัญหาการนำความร้อนในรูปร่างนี้ ซึ่งผลการทดสอบแสดงดังกราฟดังรูปที่ 4.5 พบว่าเส้นการกระจายอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณโดยใช้กริดจำนวน 18x8 และ 35x15 กริด มีค่าใกล้เคียงกัน ซึ่งแสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้มีคุณสมบัติความเป็น grid independent หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ การใช้กริดจำนวน 18x8 มีความละเอียดเพียงพอที่จะให้ผลเฉลยที่ถูกต้องและการเพิ่มจำนวนกริดให้มากกว่านี้จะไม่มีผลต่อผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณ



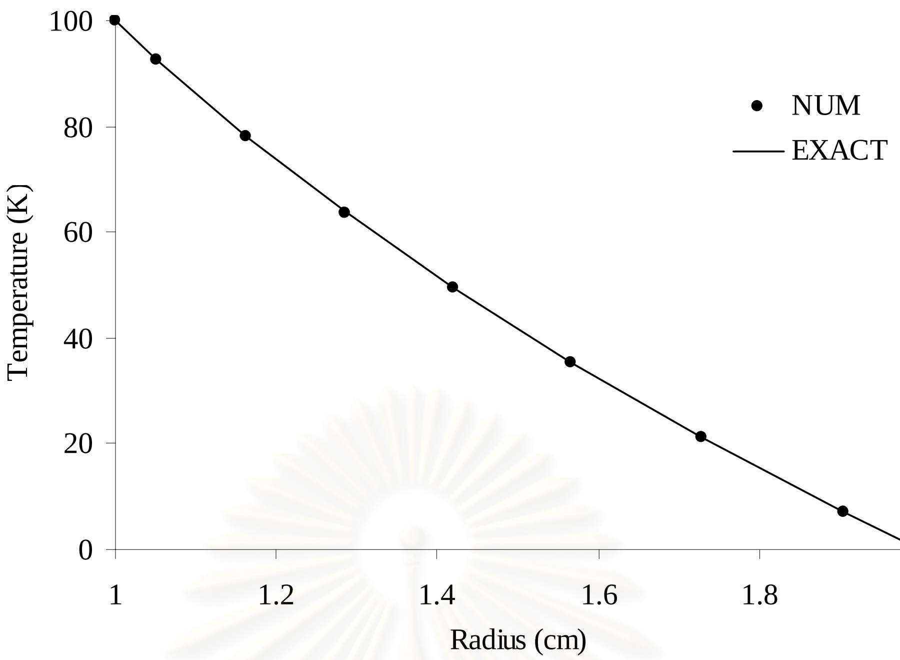
รูปที่ 4.5 การกระจายอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณโดยการใช้กริดจำนวน 4x3 8x4 18x8 และ 35x15 กริด

เมื่อได้รูปร่างและจำนวนของกริดที่เหมาะสมแล้ว จากนั้นนำกริดที่ได้มาใช้ในการคำนวณหาการกระจายอุณหภูมิด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม จะได้ผลลัพธ์เป็นอุณหภูมิที่จุดต่างๆ บนโดเมนซึ่งสามารถแสดงเป็นเส้น contour ได้ดังรูปที่ 4.6



รูปที่ 4.6 การกระจายของอุณหภูมิภายในโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกัน

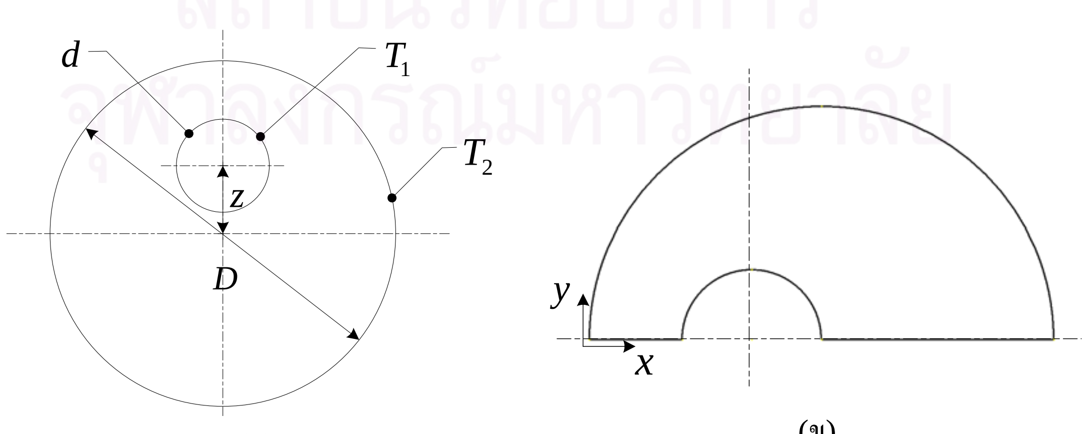
เมื่อคำนวณหาผลเฉลยแม่นตรงและผลลัพธ์จากโปรแกรมได้แล้ว ต่อไปจะนำผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงโดยใช้การกระจายอุณหภูมิในแนวรัศมี (r) ดังกราฟในรูปที่ 4.7 ซึ่งจะเห็นได้ว่าผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมมีความสอดคล้องกันกับผลเฉลยแม่นตรงเป็นอย่างดี โดยมีค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยเท่ากับ 0.10% จึงสามารถสรุปได้ว่า ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมบนพิกัดกระชับขอบเขตสามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหาการนำความร้อนสำหรับรูปร่างเป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกันได้เป็นอย่างดี



รูปที่ 4.7 การเปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิในแนวรัศมี *r* ระหว่างผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมกับผลเฉลยแม่นตรง

4.2.2 การนำความร้อนในแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์

การตรวจสอบโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์ดังรูปที่ 4.8 (ก) นี้ กระทำโดยนำผลที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยจากวิธีตัวประกอบรูปร่าง (shape factor) ที่นำมาจาก Incropera and Dewitt (2002) ซึ่งผลเฉลยจะเป็นฟลักซ์ความร้อนรวม ในส่วนของการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เนื่องจากรูปร่างของโดเมนมีความสมมาตร ดังนั้นเราสามารถคำนวณเพียง 1 ใน 2 ส่วนของรูปได้ ดังรูปที่ 4.8 (ข) เพื่อลดจำนวนหน่วยประมวลที่ใช้ในการคำนวณ และในส่วนของผลเฉลยจากวิธีตัวประกอบรูปร่าง เราสามารถการคำนวณโดยมีขั้นตอนดังนี้



(ก) (ข)

รูปที่ 4.8 วงกลมสองวงซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์

ผลเฉลยที่เป็นฟลักซ์ทางความร้อนรวมได้สามารถหาได้โดยใช้วิธีตัวประกอบรูปร่าง (shape factor) จากตารางที่ 4.1 ที่นำมาจาก Incropera and Dewitt (2002) ซึ่งฟลักซ์ความร้อนหาได้โดยใช้สมการดังต่อไปนี้

$$q = Sk(T_1 - T_2) \tag{4.5}$$

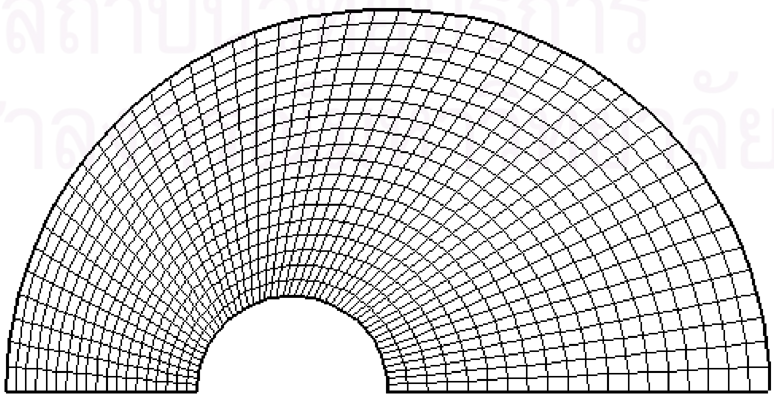
โดยที่ S คือตัวประกอบรูปร่าง ซึ่งสามารถหาได้จากสมการ ดังนี้

$$S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D^2 + d^2 - 4z^2}{2Dd}\right)} \tag{4.6}$$

สำหรับการตรวจสอบโปรแกรมในกรณีนี้ เราจะกำหนดค่าคงที่ต่างๆเพื่อแทนค่าลงในสมการผลเฉลยทั่วไป (4.5) และ (4.6) ดังนี้ โดยกำหนดให้วงกลมภายในมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 1 cm ($d = 1$) และวงกลมภายนอกมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 4 cm ($D = 4$) โดยที่วงกลมทั้งสองมีระยะเยื้องศูนย์กลาง 0.5 cm ($z = 0.5$) โดยมีอุณหภูมิภายใน 100 K ($T_1 = 100$) และมีอุณหภูมิภายนอก 0 K ($T_2 = 0$) และมีค่าคงที่การนำความร้อนเป็น 1 ($k = 1$) และมีความยาว 1 cm ($L = 1$) หลังจากแทนค่าลงในสมการทั่วไป (4.5) และ (4.6) แล้ว จะได้ผลเฉลยเป็นฟลักซ์ความร้อน ดังนี้

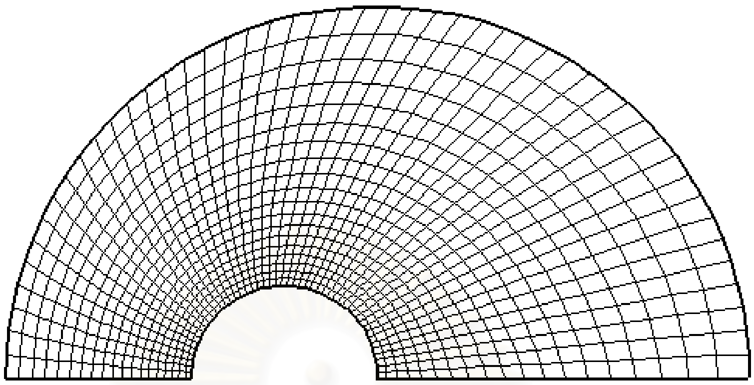
$$q = 477.1 \qquad \text{kW} \tag{4.7}$$

เมื่อได้ผลเฉลยเป็นฟลักซ์ความร้อนดังสมการ (4.7) แล้ว ขั้นตอนต่อไปจะเป็นการคำนวณโดยใช้โปรแกรม เพื่อที่จะนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยจากวิธีตัวประกอบรูปร่างที่ได้ สำหรับการคำนวณด้วยโปรแกรมในขั้นตอนแรกนั้นจะทำการสร้างกริดเริ่มต้นโดยใช้วิธี TFI ซึ่งจะได้กริดมีลักษณะดังรูปที่ 4.9



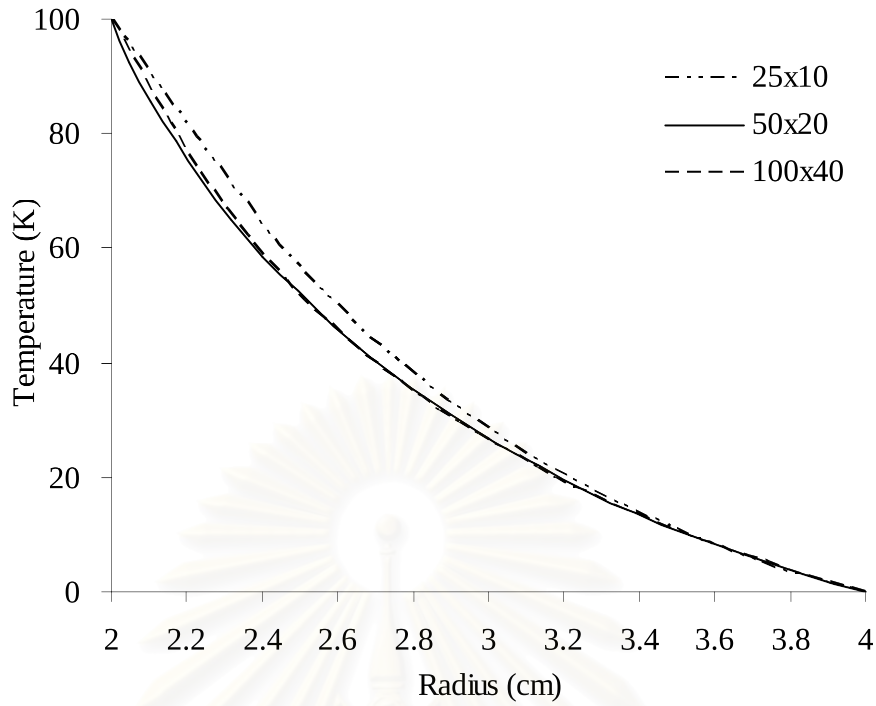
รูปที่ 4.9 กริดที่สร้างโดยใช้วิธี TFI บนโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์

จากนั้นทำการปรับกริดให้มีความสม่ำเสมอมากขึ้นโดยใช้วิธีการแก้สมการอิลิปติกซึ่งจะได้กริดมีลักษณะดังรูปที่ 4.10



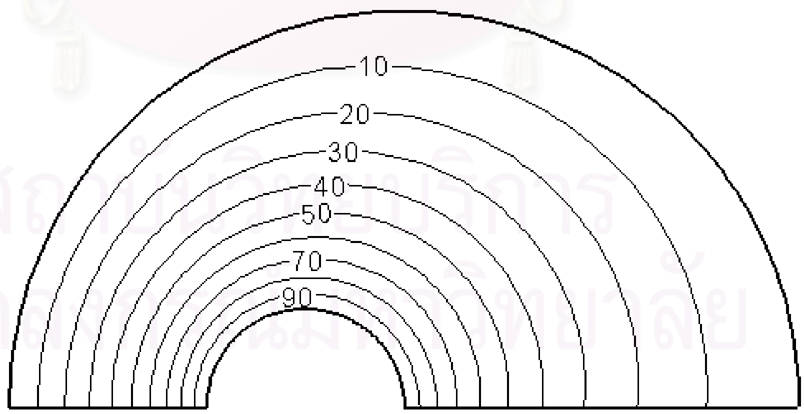
รูปที่ 4.10 กริดที่สร้างโดยการแก้สมการอิลิปติกบนโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์

ในการหาจำนวนกริดที่เหมาะสมสำหรับปัญหาในกรณีที่เป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์ สามารถทำได้โดยการเปรียบเทียบการใช้กริดจำนวน 25x10 50x20 และ 100x40 กริด ในการคำนวณหาผลลัพธ์จากโปรแกรม ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้กริดจำนวนต่างๆกันได้แสดงไว้ดังกราฟรูปที่ 4.11 จะเห็นได้ว่าเส้นการกระจายอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณโดยใช้กริดจำนวน 50x20 และ 100x40 กริด มีค่าใกล้เคียงกัน ซึ่งแสดงให้เห็นว่า การใช้กริดจำนวน 50x20 นั้นเพียงพอที่จะใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยแล้ว โดยที่การเพิ่มจำนวนของกริดให้มากกว่านี้จะไม่ทำให้ผลการคำนวณเปลี่ยนแปลง จึงอาจกล่าวได้ว่า กริดมีคุณสมบัติความเป็น grid independent แล้ว



รูปที่ 4.11 การกระจายอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณโดยการใช้กริดจำนวน 25x10 50x20 และ 100x40 กริด

เมื่อได้รูปร่างและจำนวนของกริดที่เหมาะสมแล้ว จากนั้นนำกริดที่ได้มาใช้ในการคำนวณหาการกระจายอุณหภูมิด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม จะได้ผลลัพธ์เป็นอุณหภูมิที่จุดต่างๆ บนโดเมนซึ่งสามารถแสดงเป็นเส้น contour ได้ดังรูปที่ 4.12



รูปที่ 4.12 การกระจายของอุณหภูมิภายในโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์

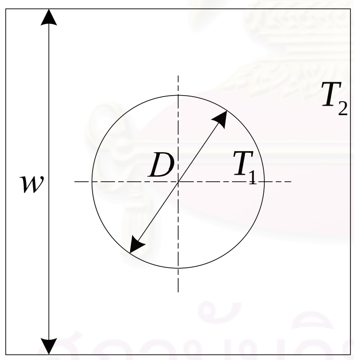
จากนั้นทำการคำนวณหาฟลักซ์ความร้อนจากผลที่ได้การคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมซึ่งเป็นการกระจายอุณหภูมิ จะได้ผลลัพธ์ดังสมการ

$$q = 477.4 \quad \text{kW} \tag{4.8}$$

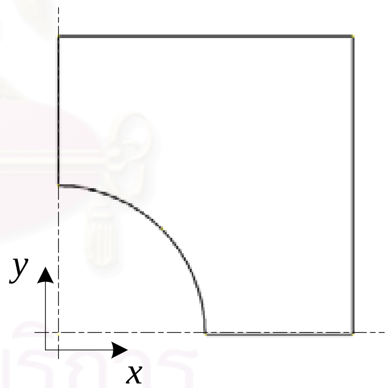
เมื่อคำนวณหาฟลักซ์ความร้อนจากวิธีตัวประกอบรูปร่างและคำนวณหาฟลักซ์ความร้อนที่ได้จากโปรแกรมได้แล้ว จากนั้นจึงนำผลลัพธ์จากทั้ง 2 วิธีมาเปรียบเทียบกัน พบว่าผลลัพธ์มีค่าใกล้เคียงกัน ซึ่งแสดงว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์มีความถูกต้องเป็นที่น่าพอใจสำหรับกรณีที่เป็นการแก้ปัญหาการนำความร้อนที่สภาวะอยู่ตัวสำหรับโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์กัน

4.2.3 การนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีวงกลมอยู่ข้างใน

การตรวจสอบโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับปัญหาการนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่วงกลมอยู่ข้างในดังรูปที่ 4.13 (ก) นี้ กระทำโดยนำผลที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยจากวิธีตัวประกอบรูปร่าง ซึ่งผลเฉลยจะเป็นฟลักซ์ความร้อนรวม ในส่วนของการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เนื่องจากรูปร่างของโดเมนมีความสมมาตร ดังนั้นเราสามารถคำนวณเพียง 1 ใน 4 ส่วนของรูปได้ ดังรูปที่ 4.13 (ข) เพื่อลดจำนวนหน่วยประมวลที่ใช้ในการคำนวณ



(ก)



(ข)

รูปที่ 4.13 แผ่นสี่เหลี่ยมมีวงกลมตรงกลาง

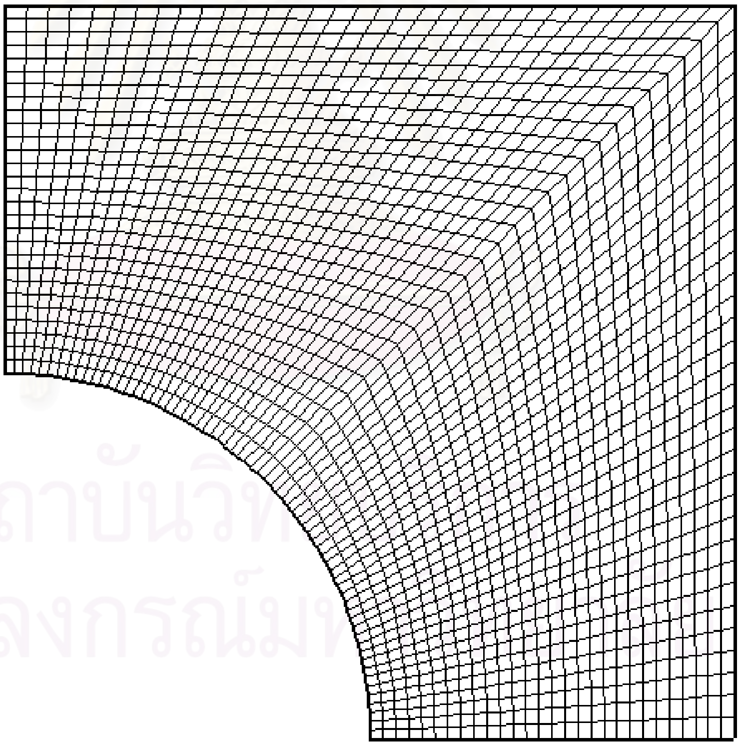
ในส่วนของผลเฉลยจากวิธีตัวประกอบรูปร่าง เราสามารถการคำนวณโดยมีขั้นตอนการคำนวณเช่นเดียวกับกรณีที่เป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์โดยสามารถหาผลเฉลยที่เป็นฟลักซ์ทางความร้อนรวมได้จากวิธีตัวประกอบรูปร่าง (shape factor) โดยใช้สมการ (4.5) โดยที่มีค่าตัวประกอบรูปร่าง (S) แตกต่างกับกรณีที่เป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์ ซึ่งสามารถหาค่าได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$S = \frac{2\pi L}{\ln(1.08w / D)} \tag{4.9}$$

สำหรับการตรวจสอบโปรแกรมในกรณีที่เป็นแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่วงกลมอยู่ข้างในนี้ เราจะกำหนดค่าคงที่ต่างๆเพื่อแทนค่าลงในสมการทั่วไป (4.5) และ (4.9) ดังนี้ โดยกำหนดให้วงกลมภายในมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 2 cm ($D = 2$) และสี่เหลี่ยมจัตุรัสภายนอกกว้าง 4 cm ($w = 4$) โดยมีอุณหภูมิภายใน 100 K ($T_1 = 100$) และมีอุณหภูมิภายนอก 0 K ($T_2 = 0$) และมีค่าคงที่การนำความร้อนเป็น 1 ($k = 1$) และมีความยาว 1 cm ($L = 1$) หลังจากแทนค่าลงในสมการทั่วไป (4.5) และ (4.9) แล้ว จะได้ผลเฉลยเป็น ฟลักซ์ความร้อน ดังนี้

$$q = 815.8 \qquad \text{kW} \tag{4.10}$$

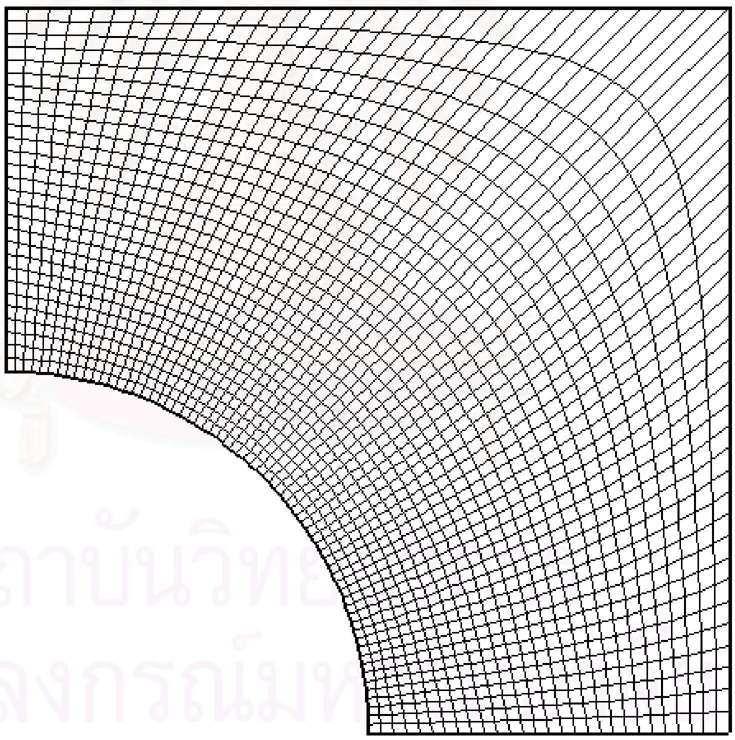
เมื่อได้ผลเฉลยเป็นฟลักซ์ความร้อนดังสมการ (4.10) แล้ว ขั้นตอนต่อไปจะเป็นการคำนวณโดยใช้โปรแกรม เพื่อที่จะนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยจากวิธีตัวประกอบรูปร่างที่ได้ สำหรับการคำนวณด้วยโปรแกรมในขั้นตอนแรกนั้นจะทำการสร้างกริดเริ่มต้นโดยใช้วิธี TFI ซึ่งจะได้ กริดดังรูปที่ 4.14



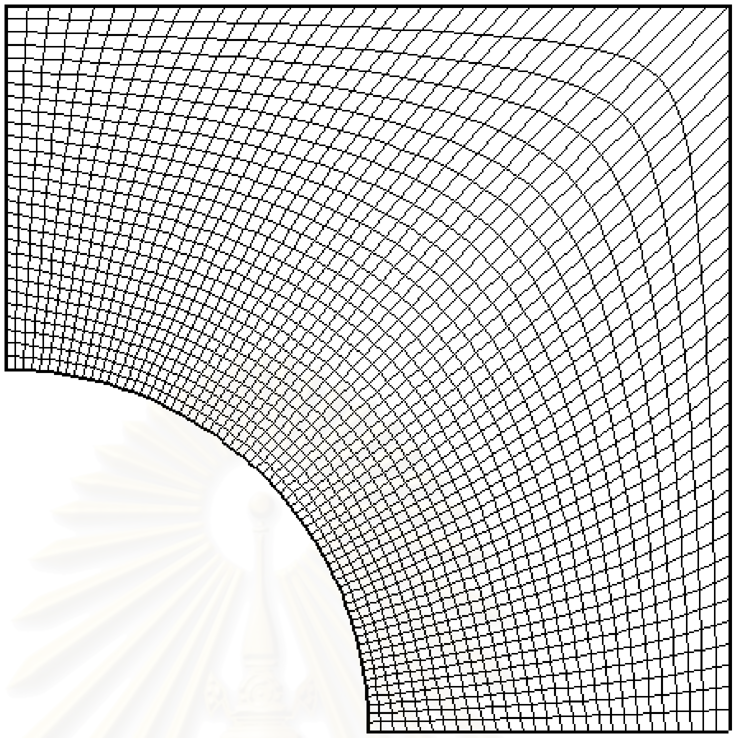
รูปที่ 4.14 การสร้างกริดโดยวิธีเชิงคณิต TFI บนโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมมีวงกลมตรงกลาง

สำหรับการปรับกริดให้มีความสม่ำเสมอมากขึ้นโดยใช้วิธีการแก้สมการอิลิปติกสามารถทำได้โดยใช้สมการลาปลาซหรือสมการปัวซองส์ โดยที่สมการลาปลาซจะให้กริดที่สม่ำเสมอทั่วทั้ง

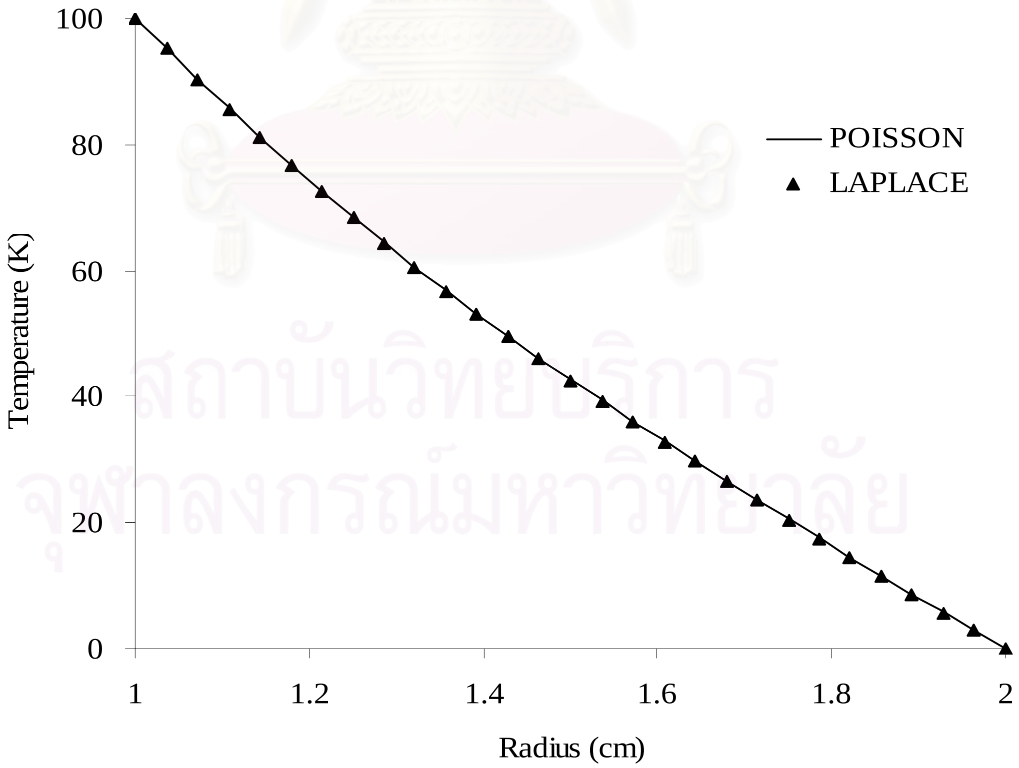
โดเมนซึ่งมีลักษณะของกริดดังรูปที่ 4.15 แต่จะไม่สามารถควบคุมการกระจายของกริดให้มีกริดอยู่ในบริเวณที่เป็นมุมของสี่เหลี่ยมได้ ในทางกลับกัน สมการปัวซองส์ซึ่งมีฟังก์ชันควบคุมที่ช่วยควบคุมการกระจายของกริดให้มีกริดอยู่ในบริเวณที่เป็นมุมนั้นได้ ซึ่งมีลักษณะของกริดดังรูปที่ 4.16 ในกรณีที่ใช้สมการลาปลาซ ถ้าผลเฉลยของปัญหามีการเปลี่ยนแปลงสูงในบริเวณที่เป็นมุมนั้นจะทำให้ผลการคำนวณที่ได้ไม่แม่นยำ สำหรับในกรณีที่เป็นปัญหาการนำความร้อนในสภาวะอยู่ตัวซึ่งมีสมการครอบคลุมของปัญหาสอดคล้องกันกับสมการอิลิปติกที่ใช้ในการสร้างกริด จึงทำให้ผลการคำนวณไม่แตกต่างจากผลเฉลยแม่นตรงมากนักดังกราฟในรูปที่ 4.17 ซึ่งเป็นการเปรียบเทียบเส้นการกระจายอุณหภูมิ และเมื่อทำการเปรียบเทียบฟลักซ์ทางความร้อนรวมพบว่าการสร้างกริดด้วยสมการลาปลาซจะมีค่าความคลาดเคลื่อน 0.82% และสมการปัวซองส์จะมีค่าความคลาดเคลื่อน 0.03% ซึ่งสมการปัวซองส์จะมีความแม่นยำมากกว่าสมการลาปลาซ อย่างไรก็ตาม ในกรณีที่ปัญหามีสมการครอบคลุมที่ไม่เป็นสมการอิลิปติกจะทำให้ผลการคำนวณมีค่าความคลาดเคลื่อนมาก



รูปที่ 4.15 กริดที่ปรับโดยวิธีแก้สมการลาปลาซบนโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมมีวงกลมตรงกลาง

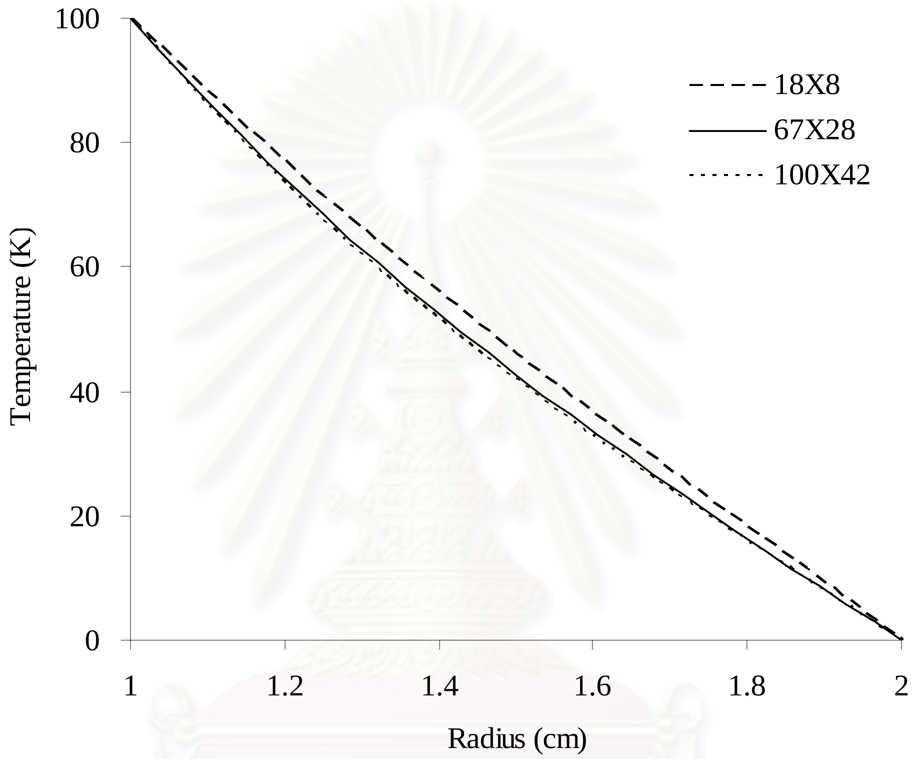


รูปที่ 4.16 กริดที่ปรับโดยวิธีแก้สมการปัวซองส์บนโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมมีวงกลมตรงกลาง



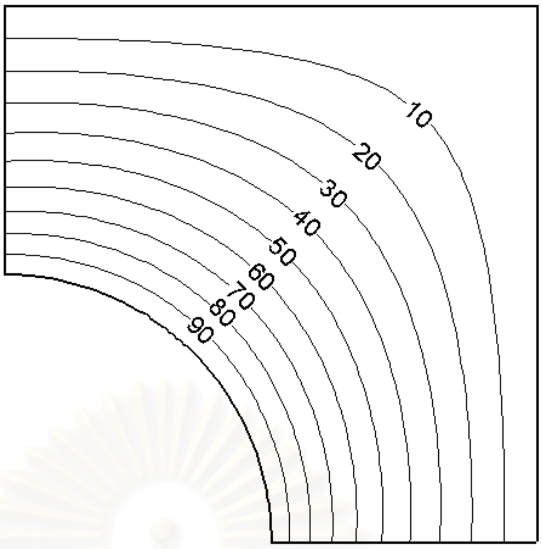
รูปที่ 4.17 การเปรียบเทียบเส้นการกระจายอุณหภูมิการสร้างกริดด้วยสมการลาปลาซและสมการปัวซองส์

ในการหาจำนวนกริดที่เหมาะสมสำหรับปัญหาในกรณีที่เป็นแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่วงกลมอยู่ข้างในจะทดลองใช้กริดจำนวน 18x8 67x28 และ 100x42 กริด เพื่อใช้ในการคำนวณหาผลลัพธ์จากโปรแกรม ซึ่งจะได้ผลการคำนวณเป็นการกระจายอุณหภูมิดังกราฟรูปที่ 4.18 พบว่าเส้นการกระจายอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณโดยใช้กริดจำนวน 67x28 และ 100x42 กริด มีค่าใกล้เคียงกัน ซึ่งแสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้มีคุณสมบัติความเป็น grid independent



รูปที่ 4.18 การกระจายอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณโดยการใช้กริดจำนวน 18x8 67x28 และ 100x42 กริด

เมื่อได้รูปร่างและจำนวนของกริดที่เหมาะสมแล้ว จากนั้นนำกริดที่ได้มาใช้ในการคำนวณหาการกระจายอุณหภูมิด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม จะได้ผลลัพธ์เป็นอุณหภูมิที่จุดต่างๆ บนโดเมนซึ่งสามารถแสดงเป็นเส้น contour ได้ดังรูปที่ 4.19



รูปที่ 4.19 การกระจายของอุณหภูมิภายในโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมมีวงกลมตรงกลาง

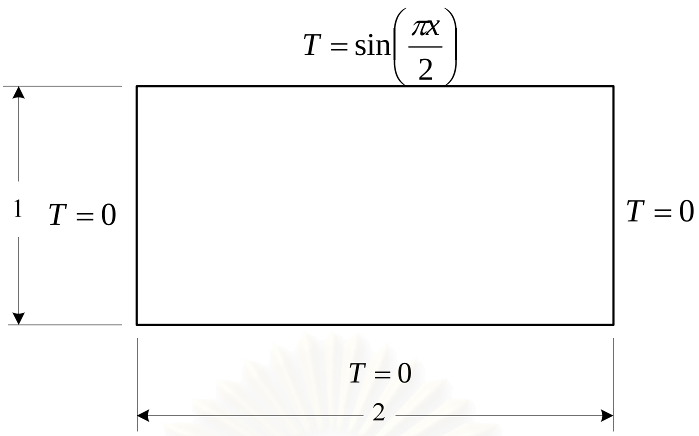
จากนั้นทำการคำนวณหาฟลักซ์ความร้อนจากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม จะได้ผลลัพธ์ดังสมการ

$$q = 816.2 \quad \mathrm{kW} \tag{4.11}$$

การตรวจสอบโปรแกรมในกรณีที่เป็นแผ่นสี่เหลี่ยมมีวงกลมตรงกลางนี้ ได้ทำการเปรียบเทียบฟลักซ์ความร้อนรวมที่หาได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมและผลเฉลยจากวิธีตัวประกอบรูปร่าง จากผลลัพธ์ทั้งสองวิธีจะเห็นได้ว่า ผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมมีความสอดคล้องกับวิธีตัวประกอบรูปร่างดี โดยมีค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยเท่ากับ 0.03%

4.2.4 การนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอุณหภูมิที่มีเงื่อนไขขอบเป็นฟังก์ชันซายน์

การตรวจสอบโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับปัญหาการนำความร้อนในแผ่นโลหะรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 2x1 หน่วย มีอุณหภูมิที่มีเงื่อนไขขอบด้านบนเป็นฟังก์ชันของซายน์และอุณหภูมิตลอดขอบด้านซ้าย ด้านขวา และด้านล่างเท่ากับศูนย์ ดังรูปที่ 4.20 นี้ กระทำโดยนำผลที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง ซึ่งผลเฉลยแม่นตรงของปัญหานี้ Carslaw and Jaeger (1959) ได้ทำการคำนวณไว้แล้ว



รูปที่ 4.20 แผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีอุณหภูมิที่ขอบเป็นฟังก์ชันซายน์

สมการครอบคลุมของปัญหาการนำความร้อนแบบสองมิติในพิกัดคาร์ทีเซียน มีดังนี้

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{4.12}$$

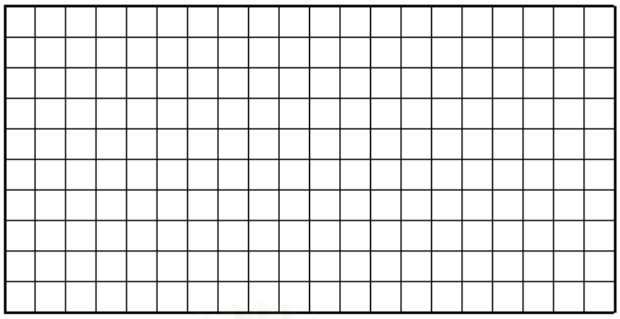
และมีเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

$$\begin{aligned} x &= 0 \qquad & T &= 0 \\ x &= 2 \qquad & T &= 0 \\ y &= 0 \qquad & T &= 0 \\ y &= 1 \qquad & T &= \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \end{aligned} \tag{4.13}$$

จากนั้นทำการแก้สมการหาผลเฉลยแม่นตรงของปัญหา ซึ่งจะได้เป็นลักษณะการกระจายอุณหภูมิตามตำแหน่งต่างๆภายในสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังสมการนี้

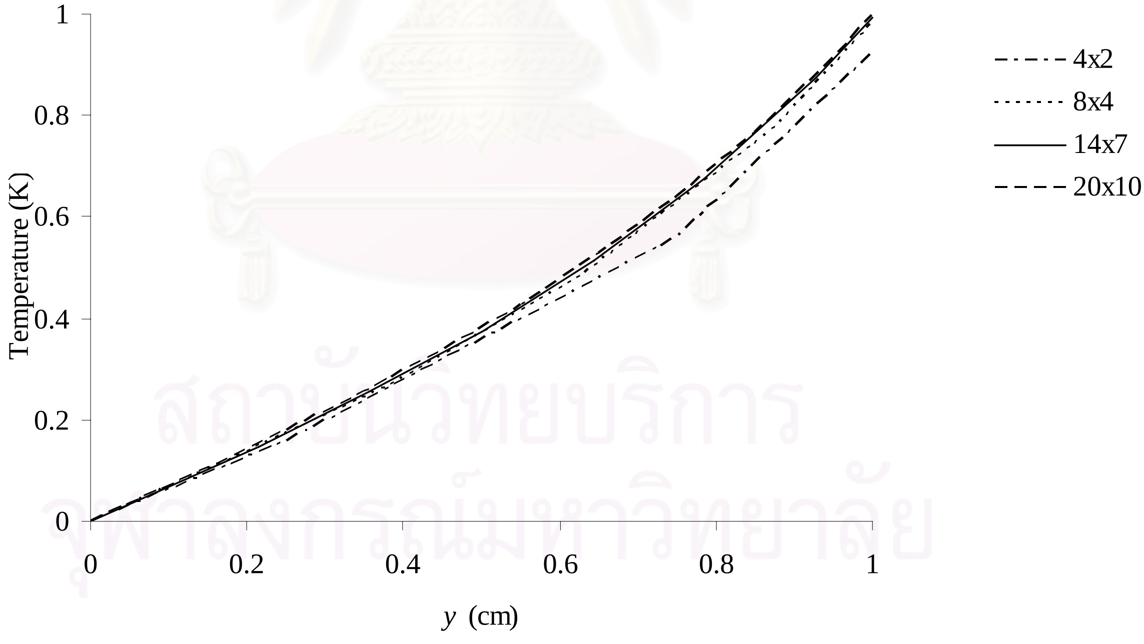
$$T = \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sinh\left(\frac{\pi y}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)} \tag{4.14}$$

เมื่อได้ผลเฉลยแม่นตรงดังสมการ (4.14) แล้ว ขั้นตอนต่อไปจะเป็นการคำนวณโดยใช้โปรแกรมเพื่อที่จะนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงที่ได้ สำหรับการคำนวณด้วยโปรแกรมในขั้นตอนแรกนั้นจะทำการสร้างกริด ในกรณีที่โดเมนเป็นสี่เหลี่ยมนี้ การสร้างกริดโดยใช้วิธี TFI และการสร้างกริดโดยใช้วิธีการแก้สมการอิลิปติก จะให้กริดที่มีลักษณะเหมือนกันดังรูปที่ 4.21



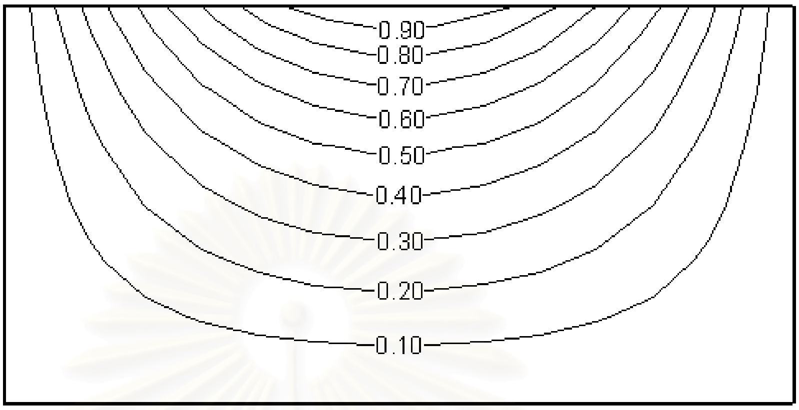
รูปที่ 4.21 กริดที่สร้างโดยใช้วิธี TFI บนโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้า

การหาจำนวนกริดที่เหมาะสมในการนำมาใช้ในการคำนวณหาผลลัพธ์สำหรับโดเมนที่มีลักษณะเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้ เราจะทดสอบโดยการใช้กริดจำนวน 4x2 8x4 14x7 และ 20x10 กริด มาใช้ในการคำนวณ ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จากแต่ละกรณีได้แสดงไว้ดังกราฟรูปที่ 4.22 จะเห็นได้ว่าเส้นการกระจายอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณโดยใช้กริดจำนวน 14x7 และ 20x10 กริด มีค่าใกล้เคียงกัน ดังนั้น การใช้กริดจำนวน 14x7 จึงมีความละเอียดเพียงพอที่จะให้ผลการคำนวณที่ถูกต้องและการเพิ่มจำนวนกริดให้มากกว่านี้จะไม่มีผลต่อผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณ



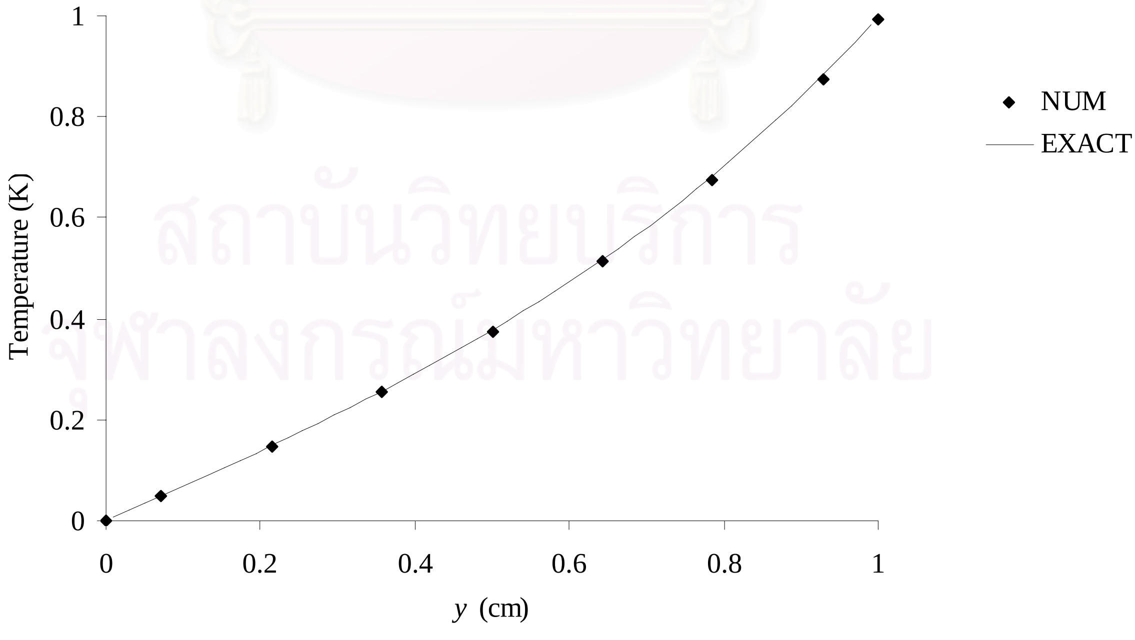
รูปที่ 4.22 การกระจายอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณโดยการใช้กริดจำนวน 4x2 8x4 14x7 และ 20x10 กริด ที่ตำแหน่ง $x = 1$

เมื่อได้ลักษณะและจำนวนของกริดที่เหมาะสมแล้ว จึงนำกริดที่ได้มาใช้ในการคำนวณหาการกระจายอุณหภูมิด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม จะได้ผลลัพธ์เป็นอุณหภูมิที่จุดต่างๆบนโดเมนซึ่งสามารถแสดงเป็นเส้น contour ได้ดังรูปที่ 4.23



รูปที่ 4.23 การกระจายของอุณหภูมิภายในโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้า

เมื่อคำนวณหาผลเฉลยแม่นตรงและผลลัพธ์จากโปรแกรมได้แล้ว ต่อไปจะนำผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงโดยเปรียบเทียบจากการกระจายอุณหภูมิในแนวเส้นกึ่งกลางของรูปร่างตามแนวแกน x ดังกราฟในรูปที่ 4.24 ซึ่งจะเห็นได้ว่าผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมมีความสอดคล้องกันกับผลเฉลยแม่นตรงเป็นอย่างดี โดยมีค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยเท่ากับ 0.29%

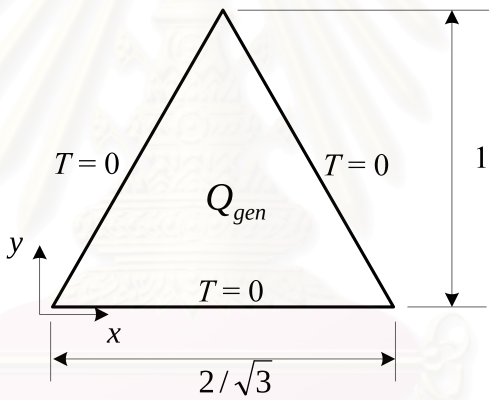


รูปที่ 4.24 การเปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิตามแนวแกน y ระหว่างผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมกับผลเฉลยแม่นตรงที่ตำแหน่ง $x = 1$

จากกราฟจะเห็นได้ว่าเส้นการกระจายอุณหภูมิที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์มีค่าใกล้เคียงกับเส้นการกระจายอุณหภูมิที่ได้จากผลเฉลยแม่นตรง ซึ่งแสดงว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์มีความถูกต้องเป็นที่น่าพอใจสำหรับกรณีนี้

4.2.5 การนำความร้อนในแผ่นสามเหลี่ยมที่มีการผลิตความร้อนภายใน

กรณีทดสอบนี้เป็นกรณีสุดท้ายสำหรับการตรวจสอบการคำนวณการนำความร้อนสำหรับรูปร่างที่มีลักษณะซับซ้อนที่สภาวะอยู่ตัว โดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นในกรณีที่เป็นแผ่นสามเหลี่ยมด้านเท่าสูง 1 หน่วย ที่มีการผลิตความร้อนภายในและมีอุณหภูมิตลอดขอบทุกด้านเท่ากับศูนย์ ดังรูปที่ 4.25 ซึ่งจะทำการตรวจสอบโดยนำผลที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง ซึ่งผลเฉลยแม่นตรงของปัญหานี้ Carslaw and Jaeger (1959) ได้ทำการคำนวณไว้แล้ว



รูปที่ 4.25 แผ่นสามเหลี่ยมด้านเท่าสูง 1 หน่วย

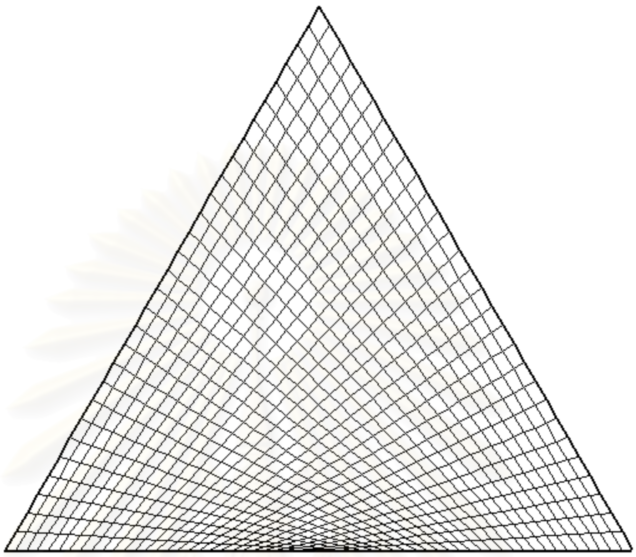
สมการครอบคลุมของปัญหาการนำความร้อนที่มีการผลิตความร้อนอยู่ภายในแบบสองมิติในพิกัดคาร์ทีเซียน มีดังนี้

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = q_0 \tag{4.15}$$

จากนั้นทำการแก้สมการหาผลเฉลยแม่นตรงของปัญหา ซึ่งจะได้เป็นลักษณะการกระจายอุณหภูมิตามตำแหน่งต่างๆภายในสามเหลี่ยม ดังสมการนี้

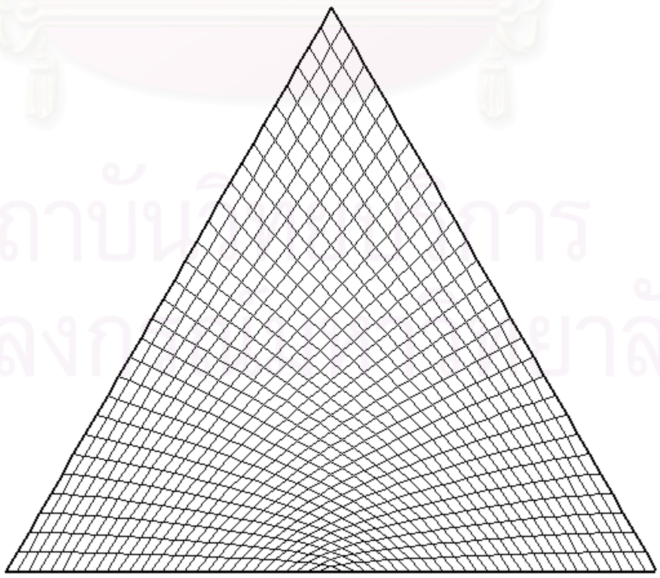
$$T = \frac{Q}{4k}(y - 2 + \sqrt{3}x)(y - \sqrt{3}x)y \tag{4.16}$$

เมื่อได้ผลเฉลยแม่นตรงดังสมการ (4.16) แล้ว ขั้นตอนต่อไปจะเป็นการคำนวณโดยใช้โปรแกรมเพื่อที่จะนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงที่ได้ สำหรับการคำนวณด้วยโปรแกรมในขั้นตอนแรกนั้นจะทำการสร้างกริดเริ่มต้นโดยใช้วิธี TFI ซึ่งจะได้กริดที่มีลักษณะดังรูปที่ 4.26



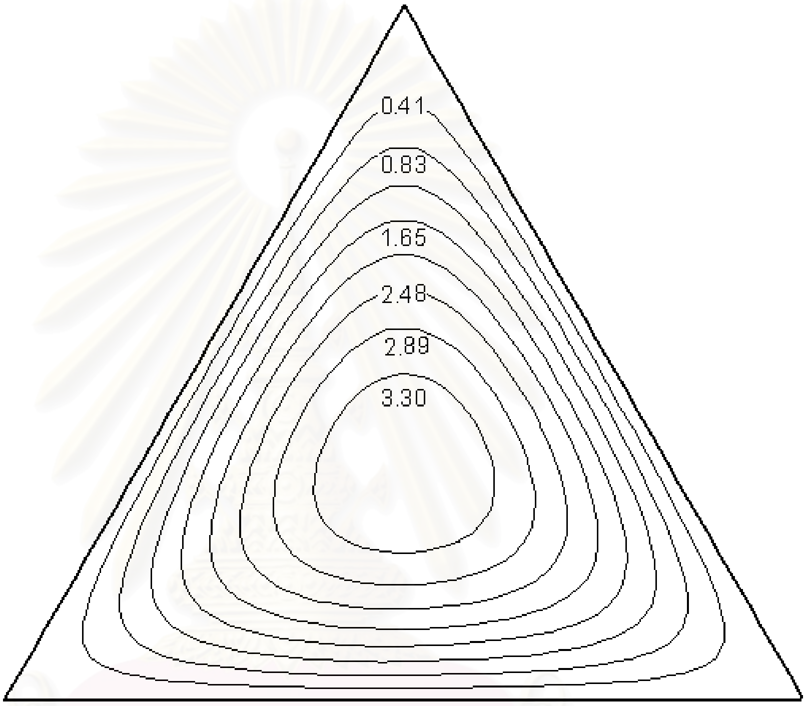
รูปที่ 4.26 กริดที่สร้างโดยใช้วิธี TFI บนโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสามเหลี่ยม

จากนั้นทำการปรับกริดให้มีความสม่ำเสมอมากขึ้นโดยใช้วิธีการแก้สมการอิลิปติกซึ่งจะได้กริดที่มีลักษณะดังรูปที่ 4.27



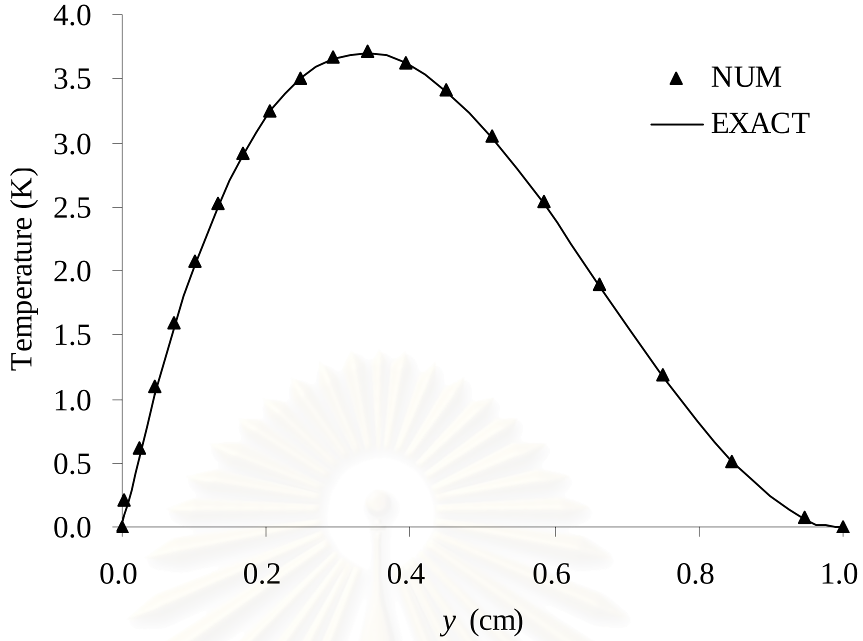
รูปที่ 4.27 กริดที่สร้างโดยการแก้สมการอิลิปติกบนโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสามเหลี่ยม

สำหรับกรณีที่เป็นแผ่นสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีการผลิตความร้อนภายในนี้ ได้ทำการทดสอบคุณสมบัติความเป็น grid independent โดยการใช้กริดจำนวน 10x10 20x20 และ 30x30 กริด พบว่าเส้นการกระจายอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณโดยใช้กริดจำนวน 20x20 และ 30x30 กริด มีค่าใกล้เคียงกัน ซึ่งแสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้มีคุณสมบัติความเป็น grid independent และจากผลการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ซึ่งเป็นค่าอุณหภูมิที่ตำแหน่งต่างๆ บนโดเมนสามารถแสดงเป็นเส้น contour ได้ดังรูปที่ 4.28



รูปที่ 4.28 การกระจายของอุณหภูมิภายในโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสามเหลี่ยม

จากนั้นจึงทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมกับผลเฉลยแม่นตรง จะเห็นได้ว่า ผลการคำนวณด้วยโปรแกรมมีความสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรงเป็นอย่างดีดังกราฟรูปที่ 4.29 ซึ่งแสดงว่าโปรแกรมมีความถูกต้องเป็นที่น่าพอใจสำหรับการแก้ปัญหาการนำความร้อนแบบสภาวะอยู่ตัวที่มีโดเมนเป็นแผ่นสามเหลี่ยมที่มีการผลิตความร้อนภายใน



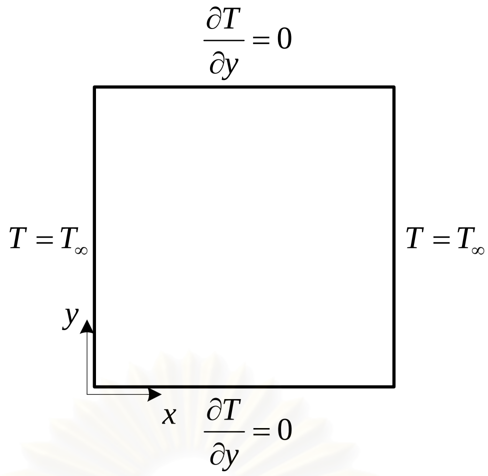
รูปที่ 4.29 การเปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิระหว่างผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธี ไฟไนต์วอลุมโดยใช้กริดจำนวน 20x20 กริด กับผลเฉลยแม่นตรง ที่ตำแหน่ง $x = 1/\sqrt{3}$

4.3 ปัญหาการนำความร้อนแบบสภาวะไม่อยู่ตัว

ในหัวข้อนี้ เราจะทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมโดยใช้ปัญหาการนำความร้อนแบบสภาวะไม่อยู่ตัวซึ่งมีทั้งหมด 2 ปัญหาด้วยกัน ได้แก่ การนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสและการนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมคางหมูเจาะรูวงกลมที่สภาวะไม่อยู่ตัว สำหรับหัวข้อนี้จะทำการเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้กับผลเฉลยแม่นตรงและผลการคำนวณทางเชิงเลขที่มีผู้ทำมาก่อน

4.3.1 การนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่สภาวะไม่อยู่ตัว

กรณีทดสอบนี้จะเป็นการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมในส่วนที่เป็นปัญหาการนำความร้อนที่สภาวะไม่อยู่ตัวโดยมีรูปร่างโดเมนเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดหนึ่งหน่วยดังรูปที่ 4.30 ซึ่งจะกระทำโดยนำผลที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงที่ Poulikakos (1994) ได้ทำการคำนวณไว้แล้ว



รูปที่ 4.30 แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดหนึ่งหน่วย

สมการครอบคลุมของปัญหาการนำความร้อนแบบสองมิติที่สภาวะไม่อยู่ตัวในพิกัดคาร์ทีเซียน มีดังนี้

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{4.17}$$

และมีเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

$$\begin{array}{ll} x=0 & T=T_\infty \\ x=1 & T=T_\infty \\ y=0 & \dfrac{\partial T}{\partial y}=0 \\ y=1 & \dfrac{\partial T}{\partial y}=0 \end{array} \tag{4.18}$$

และมีเงื่อนไขเริ่มต้น ดังนี้

$$t=0 \qquad T=T_0 \tag{4.19}$$

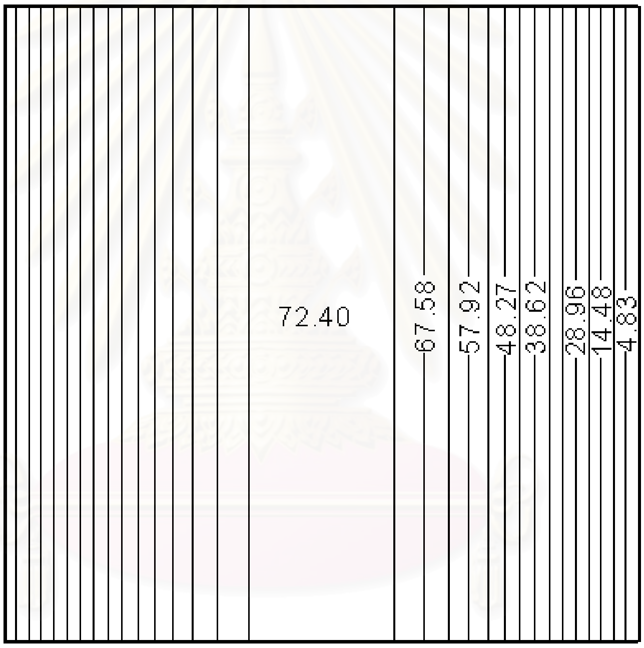
จากนั้นทำการแก้สมการหาผลเฉลยแม่นตรงของปัญหา ซึ่งจะได้เป็นลักษณะการกระจายอุณหภูมิตามตำแหน่งต่างๆบนสี่เหลี่ยมจัตุรัส ดังสมการนี้

$$T(x,y)=T_\infty+\frac{4(T_0-T_\infty)a}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2k+1)\pi x/a\right]}{2k+1}\exp\left[-\alpha\pi^2\frac{(2k+1)^2 t}{a^2}\right] \tag{4.20}$$

การตรวจสอบโปรแกรมในกรณีนี้ จะกำหนดค่าคงที่ต่างๆเพื่อแทนค่าลงในสมการผลเฉลยทั่วไป (4.20) ดังนี้ โดยกำหนดให้สี่เหลี่ยมมีขนาด 1 หน่วย ($a=1$) โดยมีอุณหภูมิเริ่มต้น 100 K ($T_0 = 100$) และมีอุณหภูมิที่ขอบด้านข้าง 0 K ($T_\infty = 0$) และมีค่าคงที่การแพร่กระจายความร้อนเป็น 1 ($\alpha = 1$) หลังจากแทนค่าลงในสมการทั่วไป (4.20) แล้ว จะได้ผลเฉลยเป็นการกระจายอุณหภูมิที่แต่ละช่วงเวลามีสมการ ดังนี้

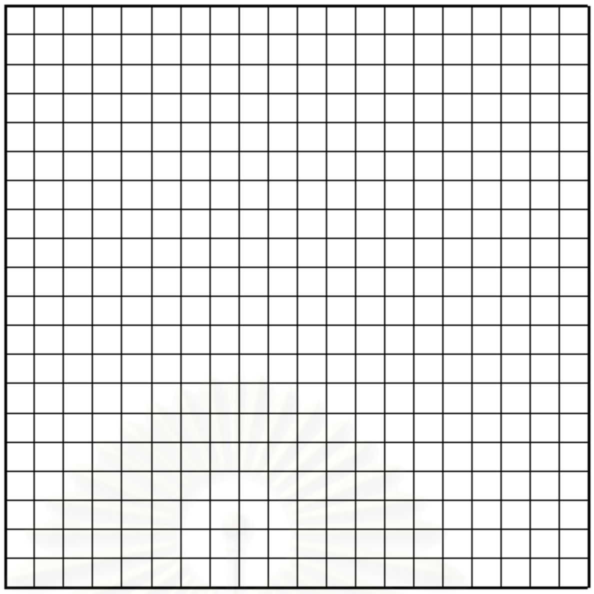
$$T(x,y) = \frac{400}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2k+1)\pi x\right]}{2k+1}\exp\left[-\pi^2(2k+1)^2 t\right] \tag{4.21}$$

จากสมการ (4.21) นี้เมื่อแทนค่าที่เวลา 0.05s สามารถแสดงเป็นเส้นระดับการกระจายอุณหภูมิดังรูปที่ 4.31



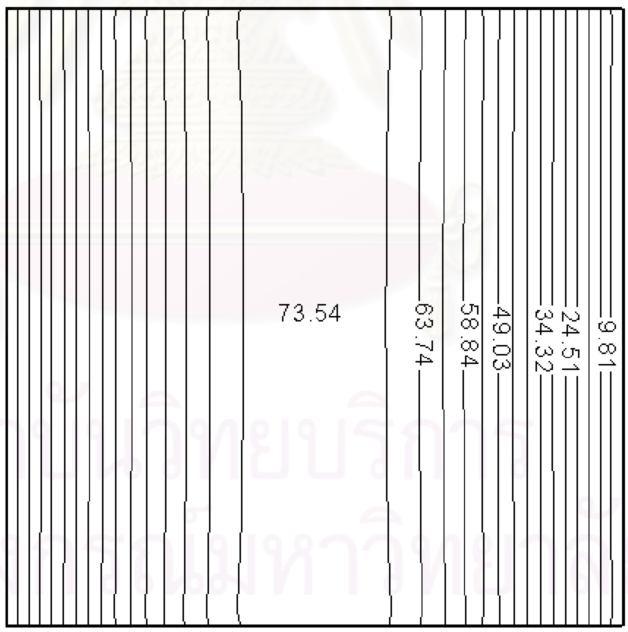
รูปที่ 4.31 ผลเฉลยแม่นตรงซึ่งเป็นการกระจายของอุณหภูมิภายในโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เวลา 0.05 วินาที

เมื่อได้ผลเฉลยแม่นตรงดังสมการ (4.21) แล้ว ขั้นตอนต่อไปจะเป็นการคำนวณโดยใช้โปรแกรมเพื่อที่จะนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงที่ได้ สำหรับการคำนวณด้วยโปรแกรมในขั้นตอนแรกนั้นจะทำการสร้างกริด ในกรณีที่โดเมนเป็นสี่เหลี่ยมนี้ การสร้างกริดโดยใช้วิธี TFI การสร้างกริดโดยใช้วิธีการแก้สมการอิลิปติก จะให้กริดที่มีลักษณะเหมือนกันและได้ทดสอบคุณสมบัติความเป็น grid independent แล้วจะได้จำนวนกริดที่เหมาะสมคือ 20x20 กริด ดังรูปที่ 4.32



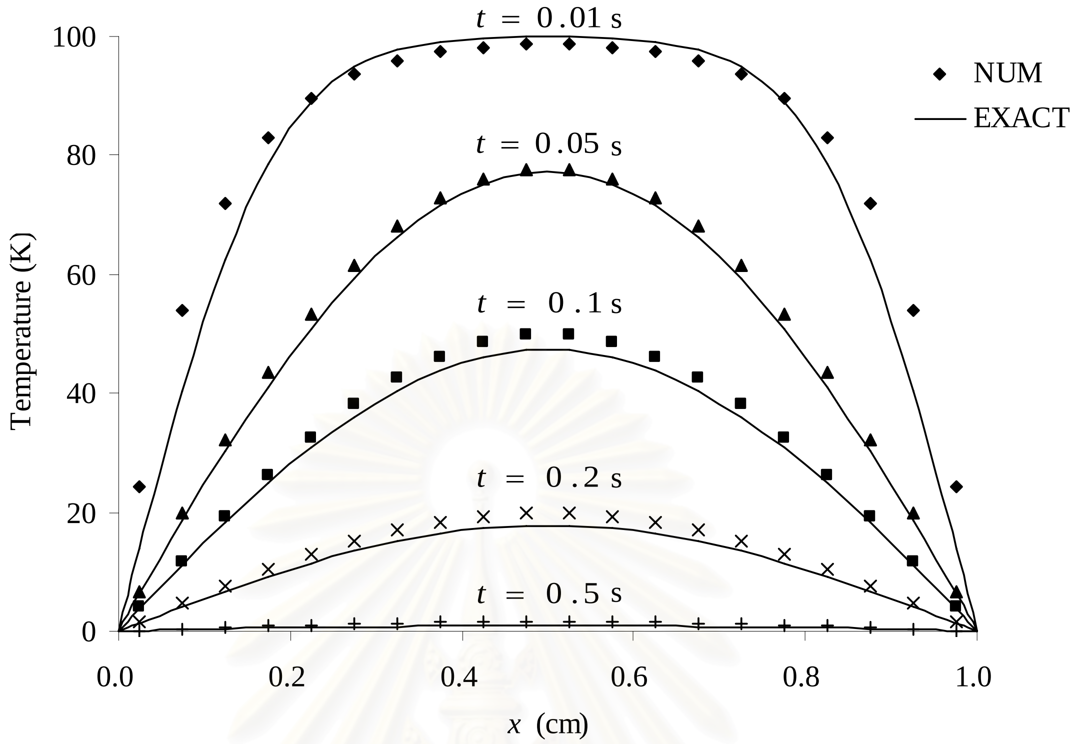
รูปที่ 4.32 กริดที่สร้างโดยใช้วิธี TFI ภายในโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัส

จากนั้นนำกริดที่ได้มาใช้ในการคำนวณหาผลลัพธ์ซึ่งเป็นการกระจายอุณหภูมิด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม จะได้ผลลัพธ์เป็นอุณหภูมิที่จุดต่างๆบนโดเมนที่เวลาต่างๆกันซึ่งสามารถแสดงเป็นเส้น contour ที่เวลา 0.05 วินาทีได้ดังรูปที่ 4.33



รูปที่ 4.33 ผลการคำนวณด้วยโปรแกรมซึ่งเป็นการกระจายของอุณหภูมิในโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เวลา 0.05 วินาที

สำหรับการตรวจสอบโปรแกรมกับผลเฉลยแม่นตรงในกรณีที่เป็นสภาวะไม่อยู่ตัวนี้ จะเพิ่มเวลาช่วงละ 0.01s และทำการเปรียบเทียบโดยใช้อุณหภูมิที่ตำแหน่ง $y = 0.5$ และ x ตั้งแต่ 0 ถึง 1 ซึ่งแสดงไว้ดังกราฟในรูปที่ 4.34 โดยที่เวลาเริ่มต้นแผ่นสี่เหลี่ยมมีอุณหภูมิคือ 100 K



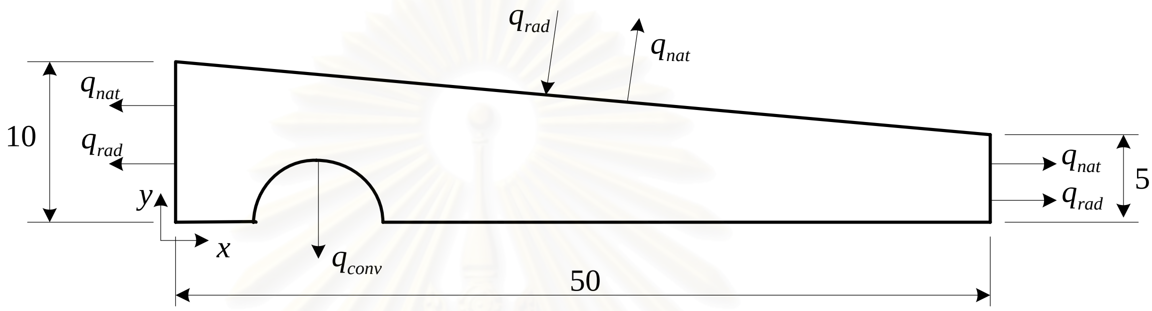
รูปที่ 4.34 การเปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิระหว่างผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมโดยใช้กริดจำนวน 20x20 กริด กับผลเฉลยแม่นตรงที่เวลา0.01, 0.05, 0.1, 0.2, และ 0.5 วินาทีที่ตำแหน่ง $y = 0.5$

จากกราฟดังรูปที่ 4.34 ซึ่งทำการเปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิที่เวลา 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, และ 0.5 วินาที จะเห็นได้ว่าที่ช่วงเวลาที่หนึ่ง (t = 0.01s) อุณหภูมิบริเวณขอบลดลงอย่างรวดเร็ว หลังจากช่วงเวลาที่ 20 (t = 0.2s) อัตราการลดลงของอุณหภูมิช้าลงซึ่งจะเห็นได้จากการใช้ช่วงเวลาเพิ่มขึ้นอีก 30 ช่วงคือที่ช่วงเวลาที่ 50 (t = 0.5s) อุณหภูมิลดระดับลงน้อยจนอุณหภูมิอยู่ในระดับที่เข้าใกล้ 0 K ซึ่งจะเท่าๆกับอุณหภูมิโดยรอบ จากกรณีทดสอบนี้จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมมีความสอดคล้องกันกับผลเฉลยแม่นตรง ซึ่งแสดงว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้สามารถใช้ในการคำนวณการนำความร้อนที่สภาวะไม่อยู่ตัวได้ผลเป็นที่น่าพอใจ

4.3.2 การนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมคางหมูเจาะรูวงกลมที่สภาวะไม่อยู่ตัว

ในส่วนของการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับปัญหาการนำความร้อนที่สภาวะไม่อยู่ตัวในกรณีที่สองนี้ จะมีโดเมนเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมคางหมูเจาะรูวงกลมมีลักษณะดังรูปที่ 4.35 นี้และมีเงื่อนไขขอบเขตทางด้านซ้ายและด้านขวาเป็นการนำความร้อนออก

จากโดเมนโดยการแผ่รังสี (radiation) และการพาความร้อนแบบธรรมชาติ (natural convection) มีเงื่อนไขขอบเขตทางด้านบนเป็นการรับความร้อนจากการแผ่รังสีและนำความร้อนออกจากโดเมนโดยการพาความร้อนแบบธรรมชาติ มีเงื่อนไขขอบเขตบริเวณวงกลมเป็นการนำความร้อนออกจากโดเมนโดยการพาความร้อน (convection) และบริเวณอื่นของขอบด้านล่างมีเงื่อนไขขอบเขตเป็นแบบสมมาตร (symmetry) ซึ่งตรวจสอบโดยนำผลที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมมาเปรียบเทียบกับผลการคำนวณทางเชิงเลขซึ่งเป็นการเปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิที่ Gao (1999) คำนวณไว้แล้ว



รูปที่ 4.35 แผ่นสี่เหลี่ยมคางหมูเจาะรูวงกลม

สมการครอบคลุมของปัญหาการนำความร้อนแบบสองมิติที่สภาวะไม่อยู่ตัวในพิกัดคาร์ทีเซียน มีดังนี้

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{4.22}$$

มีเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

(4.23)

$x = 0$ $\qquad k\,\dfrac{\partial T}{\partial x} = q_{nat} + q_{rad}$

$x = 50$ $\qquad -k\,\dfrac{\partial T}{\partial x} = q_{nat} + q_{rad}$

$y = 10$ $\qquad k\vec{n}\bullet\nabla T = q_{rad} - q_{nat}$

$y = 0,\ x = [0,5],[13,50]$ $\qquad \dfrac{\partial T}{\partial y} = 0$

$y = 0,\ x = (5,13)$ $\qquad k\vec{n}\bullet\nabla T = q_{conv}$

และมีเงื่อนไขเริ่มต้น ดังนี้

$$t = 0 \qquad T = T_0 \tag{4.24}$$

โดย $\vec{n}$ คือเวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วยมีทิศตั้งฉากกับพื้นผิว T_0 คืออุณหภูมิเริ่มต้น q_{rad} คือฟลักซ์ทางความร้อนของการแผ่รังสี และ q_{nat} คือฟลักซ์ทางความร้อนของการพาความร้อนแบบธรรมชาติ โดยฟลักซ์ทางความร้อนทั้งสองแบบนี้สามารถหาได้จาก

$$q_{rad} = \varepsilon\sigma(T_s^4 - T_\infty^4) \tag{4.25}$$

$$q_{nat} = \bar{h}_{nac}(T_s - T_\infty) \tag{4.26}$$

โดย ε คือค่าการแผ่รังสีความร้อน σ คือค่าสเตฟานโบล์ทซ์แมนน์ T_s คืออุณหภูมิที่ผิวของโดเมน T_∞ คืออุณหภูมิของอากาศโดยรอบ และ $\bar{h}_{nac}$ คือสัมประสิทธิ์การพาความร้อนแบบธรรมชาติ สามารถหาได้จากสมการดังนี้

$$\bar{h}_{nac} = \frac{0.68k}{L} + \frac{0.67k}{L}\left[\frac{\beta g L^3}{\nu^2}\psi\right]^{1/4}(T_s - T_\infty)^{1/4} \tag{4.27}$$

โดย k คือค่าการนำความร้อนและ ν คือความหนืดของอากาศ ซึ่งคุณสมบัติทั้งสองนี้มีการเปลี่ยนแปลงสูงไปตามอุณหภูมิ ทั้งนี้สามารถคำนวณได้จาก

$$k = 5.0\times10^{-5}T + 0.012 \tag{4.28}$$

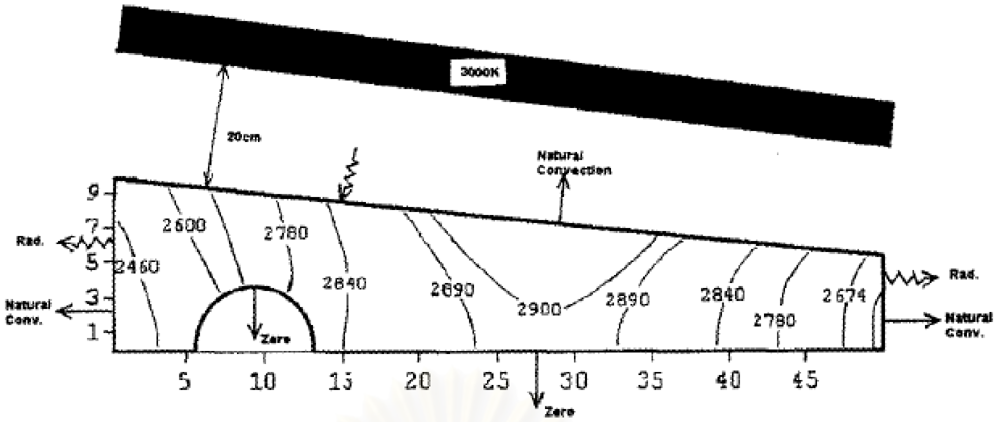
$$\nu = T^{1.667}\times10^{-9} \tag{4.29}$$

และ L คือความยาว β คือสัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน g คือแรงโน้มถ่วงโลก โดยจะแทนค่า g ด้วย $g\sin\theta$ เมื่อเป็นพื้นผิวเอียงโดย θ คือมุมที่เอียงจากแนวนอน และ ψ สามารถคำนวณได้จาก

$$\psi = \left[1 + \left(\frac{0.492}{\mathrm{Pr}}\right)^{9/16}\right]^{-16/9} \tag{4.30}$$

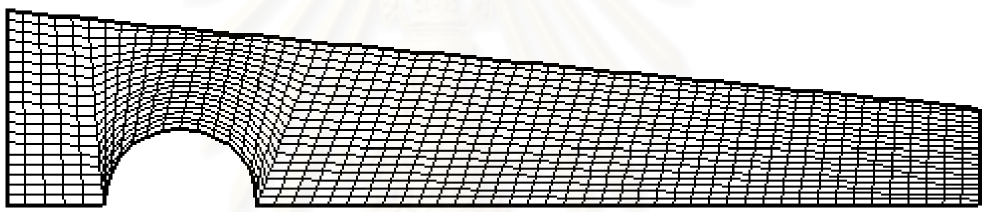
โดย Pr คือแพรนเทิลนัมเบอร์

จากสมการครอบคลุม เงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้นดังสมการ(4.22) - (4.26) Gao ได้ทำการหาผลเฉลยของปัญหาที่เป็นการกระจายอุณหภูมิโดยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม ซึ่งจะได้ผลเฉลยเป็นเส้นระดับแสดงการกระจายอุณหภูมิภายในโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมคางหมูเจาะรูวงกลม มีลักษณะดังรูปที่ 4.36



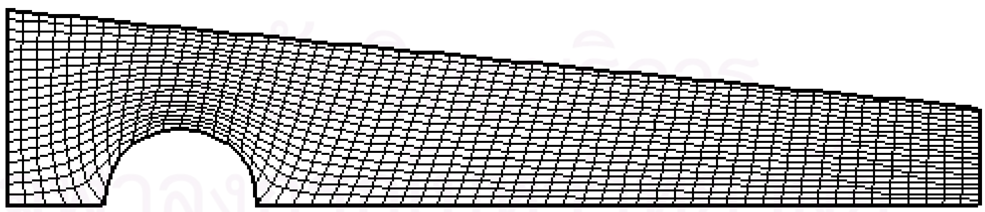
รูปที่ 4.36 ผลเฉลยซึ่งเป็นการกระจายอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณทางเชิงเลขของ Gao

ในส่วนของการคำนวณด้วยโปรแกรม ในขั้นตอนแรกนั้นจะทำการสร้างกริดโดยใช้วิธี TFI ซึ่งจะได้กริดที่มีลักษณะดังรูปที่ 4.37



รูปที่ 4.37 กริดที่สร้างโดยใช้วิธี TFI บนโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมคางหมูเจาะรูวงกลม

จากนั้นทำการปรับกริดให้มีความสม่ำเสมอมากขึ้นโดยใช้วิธีการแก้สมการอิลิปติกซึ่งจะได้กริดที่มีลักษณะดังรูปที่ 4.38



รูปที่ 4.38 กริดที่สร้างโดยการแก้สมการอิลิปติกบนโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมคางหมูเจาะรูวงกลม

การหาจำนวนกริดที่เหมาะสมในการนำมาใช้ในการคำนวณหาผลลัพธ์สำหรับโดเมนที่มีลักษณะเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมคางหมูเจาะรูวงกลมนี้ เราจะทดสอบโดยการใช้กริดจำนวน 30x10 60x20และ 120x40 กริด มาใช้ในการคำนวณหาผลลัพธ์นำของปัญหาการนำความร้อนในรูปร่างนี้

พบว่าเส้นการกระจายอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณโดยใช้กริดจำนวน 60x20 และ 120x40 กริด มีค่าใกล้เคียงกัน ซึ่งแสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้มีคุณสมบัติความเป็น grid independent

เมื่อได้รูปร่างและจำนวนของกริดที่เหมาะสมแล้ว จากนั้นนำกริดที่ได้มาใช้ในการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์รูปร่าง (geometric coefficient) ต่างๆ โดย J, α, β และ γ สามารถหาได้จากสมการ (2.39) (2.48) (2.49) และ (2.50) ตามลำดับ ทั้งนี้ พจน์เชิงอนุพันธ์ต่างๆในสมการสามารถหาได้โดยวิธี central differencing ในการดิสครีไทซ์พจน์เชิงอนุพันธ์สำหรับปริมาตรควบคุมบริเวณภายในของโดเมน และใช้วิธี forward differencing หรือ backward differencing สำหรับปริมาตรควบคุมที่ขอบด้านต่างๆของโดเมน ตัวอย่างเช่น การหาค่าจาร์โคเบียน (J) จากสมการ (2.39) สามารถดิสครีไทซ์โดยใช้วิธี central differencing ได้ เป็นสมการดังนี้

$$J(i,j)=\left(\frac{x_{i+1,j}-x_{i-1,j}}{2\partial\xi}\right)\left(\frac{y_{i,j+1}-y_{i,j-1}}{2\partial\eta}\right)-\left(\frac{x_{i,j+1}-x_{i,j-1}}{2\partial\eta}\right)\left(\frac{y_{i+1,j}-y_{i-1,j}}{2\partial\xi}\right) \tag{4.31}$$

เมื่อได้ค่าสัมประสิทธิ์รูปร่างค่าต่างๆที่จะใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยของปัญหาแล้ว ต่อไปจะทำการแปลงสมการครอบคลุมการนำความร้อนจากพิกัดคาร์ทีเซียนดังสมการ (4.22) ให้อยู่ในพิกัดกระชับขอบเขตโดยจะได้สมการครอบคลุมการนำความร้อนบนพิกัดกระชับขอบเขต มีสมการดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{k\alpha}{J}\frac{\partial T}{\partial\xi}-\frac{k\beta}{J}\frac{\partial T}{\partial\eta}\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{k\gamma}{J}\frac{\partial T}{\partial\eta}-\frac{k\beta}{J}\frac{\partial T}{\partial\eta}\right]=\frac{J}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{4.32}$$

เมื่อได้สมการครอบคลุมในพิกัดกระชับขอบเขตแล้ว จะทำการแปลงเงื่อนไขขอบเขตทั้งสี่ด้านดังสมการ (4.23) ซึ่งเป็นเงื่อนไขขอบเขตแบบ Neumann จากพิกัดคาร์ทีเซียนให้อยู่ในพิกัดกระชับขอบเขต จึงจะสามารถคำนวณหาอุณหภูมิที่ขอบแต่ละด้านของโดเมนได้ โดยขั้นตอนการคำนวณสามารทำได้ดังนี้

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตด้านซ้าย สามารถหาได้โดยการแทนสมการ (4.25) และ (4.26) ลงในสมการ (4.23) จะได้สมการเงื่อนไขขอบเขตด้านซ้ายดังนี้

$$k\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{0.68k}{L}(T_w-T_\infty)+\frac{0.67k}{L}\left[\frac{\beta gL^3}{\nu^2}\psi\right]^{1/4}(T_w-T_\infty)^{5/4}+\varepsilon\sigma(T_w^4-T_\infty^4) \tag{4.33}$$

โดย T_w คืออุณหภูมิที่ผิวของโดเมนทางด้านซ้าย สำหรับพจน์เชิงอนุพันธ์ซ้ายมือของสมการ (4.33) เป็นเงื่อนไขขอบเขตแบบ Neumann ซึ่งการคำนวณจะต้องทำการแปลงพิกัดให้อยู่ในพิกัดกระชับขอบเขตโดยใช้กฎลูกโซ่ จึงจะได้พจน์เชิงอนุพันธ์ซ้ายมือบนพิกัดกระชับขอบเขตมีสมการดังนี้

$$k\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{J}k\frac{\partial T}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{1}{J}k\frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} \qquad (4.34)$$

จากนั้นทำการดิสครีไทซ์พจน์เชิงอนุพันธ์สมการ (4.34) ให้เป็นสมการเชิงพีชคณิตด้วยวิธี central differencing จะได้สมการดังนี้

$$\frac{1}{J}k\frac{\partial T}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{1}{J}k\frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{k}{J}\left(\frac{T_{1,j} - T_w}{0.5}\right)\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{k}{J}\left(\frac{T_{1,j+1} - T_{1,j-1}}{2}\right)\frac{\partial y}{\partial \xi} \qquad (4.35)$$

แทนค่าสมการ (4.35) ลงในสมการ (4.33) จะได้

$$\begin{gathered}\frac{k}{J}\left(\frac{T_{1,j} - T_w}{0.5}\right)\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{k}{J}\left(\frac{T_{1,j+1} - T_{1,j-1}}{2}\right)\frac{\partial y}{\partial \xi} = \\ \frac{0.68k}{L}(T_w - T_\infty) + \frac{0.67k}{L}\left[\frac{\beta g L^3}{\nu^2}\psi\right]^{1/4}(T_w - T_\infty)^{5/4} + \varepsilon\sigma(T_w^4 - T_\infty^4)\end{gathered} \qquad (4.36)$$

การแก้สมการ (4.36) เพื่อหาค่า T_w สามารถทำได้โดยระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson method) ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

1. ทำการกำหนดค่าเริ่มต้นให้กับ T_w
2. จัดรูปสมการ (4.36) ให้มีรูปแบบดังนี้

$$\begin{gathered}f(T_w) = -\left[\frac{k}{J}\left(\frac{T_{1,j} - T_w}{0.5}\right)\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{k}{J}\left(\frac{T_{1,j+1} - T_{1,j-1}}{2}\right)\frac{\partial y}{\partial \xi}\right] \\ \frac{0.68k}{L}(T_w - T_\infty) + \frac{0.67k}{L}\left[\frac{\beta g L^3}{\nu^2}\psi\right]^{1/4}(T_w - T_\infty)^{5/4} + \varepsilon\sigma(T_w^4 - T_\infty^4)\end{gathered} \qquad (4.37)$$

จากนั้นจึงทำการคำนวณหาค่าของฟังก์ชันดังสมการ (4.37) โดยแทนด้วยค่า T_w ที่ได้กำหนดไว้เบื้องต้นแล้ว

3. ทำการหาอนุพันธ์ของสมการ (4.37) จะได้สมการดังนี้

$$f'(T_w) = \frac{k}{0.5J}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{0.68k}{L}T_w + \left(\frac{5}{4}\right)\frac{0.67k}{L}\left[\frac{\beta g L^3}{\nu^2}\psi\right]^{1/4}(T_w - T_\infty)^{1/4} + 4\varepsilon\sigma T_w^3 \qquad (4.38)$$

จากนั้นจึงทำการคำนวณหาค่าของอนุพันธ์ของฟังก์ชันดังสมการ (4.38) โดยการแทนด้วยค่า T_w

4. ทำการหาค่า T_w ค่าใหม่โดยสมการดังนี้

$$T_{w,new} = T_{w,old} + \Delta T_w \tag{4.39}$$

โดย ΔT_w สามารถหาได้จากสมการดังนี้

$$\Delta T_w = -\frac{f(T_w)}{f'(T_w)} \tag{4.40}$$

5. คำนวณหาค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์จากสมการดังนี้

$$\left|\frac{\Delta T_{w,new}}{T_{w,new}}\right| \times 100\% < \varepsilon \tag{4.41}$$

ถ้าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์มากกว่าค่าที่ยอมรับได้จึงทำการทำซ้ำจนกระทั่งได้ค่า T_w ที่ยอมรับได้ ทั้งนี้กำหนดค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ε) เท่ากับ 0.001

เมื่อทำการแก้สมการของเงื่อนไขขอบเขตด้านซ้ายของโดเมนคือสมการ(4.36) ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสันเรียบร้อยแล้ว จะได้ค่าอุณหภูมิที่ผิวของขอบทางด้านซ้ายของโดเมน (T_w) ซึ่งจะนำไปใช้ในขั้นตอนการคำนวณหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมต่อไป

สำหรับการคำนวณหาเงื่อนไขขอบเขตด้านขวาของโดเมน จะมีขั้นตอนการคำนวณคล้ายกับเงื่อนไขขอบเขตด้านซ้าย ซึ่งสามารถทำได้โดยการแทนสมการ (4.25) และ (4.26) ลงในสมการ (4.23) จะได้สมการดังนี้

$$-k\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{0.68k}{L}(T_\infty - T_e) + \frac{0.67k}{L}\left[\frac{\beta g L^3}{\nu^2}\psi\right]^{1/4}(T_\infty - T_e)^{5/4} + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T_e^4) \tag{4.42}$$

โดย T_e คืออุณหภูมิที่ผิวของโดเมนทางด้านขวา จากนั้นทำการแปลงพิกัดสำหรับพจน์เชิงอนุพันธ์ซ้ายมือของสมการ (4.42) ให้อยู่ในพิกัดกระชับขอบเขตโดยใช้กฎลูกโซ่ เช่นเดียวกับเงื่อนไขขอบเขตด้านซ้ายดังสมการ (4.34) และทำการดิสครีไทซ์พจน์เชิงอนุพันธ์ด้วยวิธี central differencing จะได้สมการดังนี้

$$-\left[\frac{1}{J}k\frac{\partial T}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{1}{J}k\frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right] = \tag{4.43}$$

$$-\left[\frac{k}{J}\left(\frac{T_e-T_{i\max,j}}{0.5}\right)\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{k}{J}\left(\frac{T_{i\max,j+1}-T_{i\max,j-1}}{2}\right)\frac{\partial y}{\partial \xi}\right]$$

แทนค่าพจน์เชิงพีชคณิตสมการ (4.43) ลงในสมการ (4.42) จะได้สมการของเงื่อนไขขอบเขตทางด้านซ้ายของโดเมนคือ

$$-\left[\frac{k}{J}\left(\frac{T_e-T_{i\max,j}}{0.5}\right)\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{k}{J}\left(\frac{T_{i\max,j+1}-T_{i\max,j-1}}{2}\right)\frac{\partial y}{\partial \xi}\right]=$$
$$\frac{0.68k}{L}(T_\infty-T_e)+\frac{0.67k}{L}\left[\frac{\beta gL^3}{\nu^2}\psi\right]^{1/4}(T_\infty-T_e)^{5/4}+\varepsilon\sigma(T_\infty^4-T_e^4) \tag{4.44}$$

ทำการแก้สมการ (4.44) เพื่อหาค่า T_e โดยระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน เช่นเดียวกับเงื่อนไขขอบเขตด้านซ้าย จะได้ค่าอุณหภูมิที่ผิวของขอบทางด้านขวาของโดเมน (T_e) เป็นผลเฉลยของสมการ (4.44) ทั้งนี้เงื่อนไขขอบเขตด้านข้างทั้งด้านซ้ายและด้านขวานี้ เป็นการถ่ายเทความร้อนออกจากโดเมนโดยการแผ่รังสีและการพาความร้อนแบบธรรมชาติ

เมื่อได้อุณหภูมิที่ผิวของขอบทั้งสองด้านของโดเมนแล้ว ต่อไปจะทำการคำนวณหาอุณหภูมิที่ผิวของขอบทางด้านบนของโดเมนโดยทำการแทนสมการ (4.25) และ (4.26) ลงในสมการ (4.23) จะได้สมการดังนี้

$$k\vec{n}\bullet\nabla T=\varepsilon\sigma(T_\infty^4-T_n^4)-\frac{0.68k}{L}(T_\infty-T_n)+\frac{0.67k}{L}\left[\frac{\beta g\sin\theta L^3}{\nu^2}\psi\right]^{1/4}(T_\infty-T_n)^{5/4} \tag{4.45}$$

โดย T_n คืออุณหภูมิที่ผิวของโดเมนทางด้านบน จากนั้นทำการแปลงพิกัดสำหรับพจน์เชิงอนุพันธ์ซ้ายมือของสมการ (4.45) ให้อยู่ในพิกัดกระชับขอบเขตโดยใช้กฎลูกโซ่ จะได้พจน์เชิงอนุพันธ์มีสมการดังนี้

$$k\vec{n}\bullet\nabla T=\frac{k}{J}\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\frac{\partial T}{\partial \xi}+\frac{k}{J}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\frac{\partial T}{\partial \eta} \tag{4.46}$$

และทำการดิสครีไทซ์พจน์เชิงอนุพันธ์สมการ (4.46) ด้วยวิธี central differencing ได้สมการดังนี้

$$\frac{k}{J}\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\frac{\partial T}{\partial \xi}+\frac{k}{J}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\frac{\partial T}{\partial \eta}=$$
$$\frac{k}{J}\left(\frac{T_{i+1,j\max}-T_{i-1,j\max}}{2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)-\frac{k}{J}\left(\frac{T_\infty-T_n}{0.5}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) \tag{4.47}$$

แทนค่าสมการ (4.47) ลงในสมการ (4.46) จะได้สมการเงื่อนไขขอบเขตด้านบนมีสมการดังนี้

$$\frac{k}{J}\left(\frac{T_{i+1,j\max}-T_{i-1,j\max}}{2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)-\frac{k}{J}\left(\frac{T_{\infty}-T_{n}}{0.5}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)=\varepsilon\sigma(T_{\infty}^{4}-T_{n}^{4})-\frac{0.68k}{L}(T_{\infty}-T_{n})+\frac{0.67k}{L}\left[\frac{\beta g\sin\theta L^{3}}{\nu^{2}}\psi\right]^{1/4}(T_{\infty}-T_{n})^{5/4} \tag{4.48}$$

ทำการแก้สมการ (4.48) เพื่อหาค่า T_n โดยระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน เช่นเดียวกับเงื่อนไขขอบเขตด้านข้างทั้งสองด้าน จะได้ผลเฉลยเป็นค่าอุณหภูมิที่ผิวของขอบทางด้านบนของโดเมน (T_n) สมการเงื่อนไขขอบเขตทางด้านบน สมการ (4.48) นี้ สามารถอธิบายทางกายภาพได้คือพจน์ทางซ้ายมือของสมการคือการนำความร้อนเข้าสู่โดเมนจะเท่ากับ พจน์ทางขวามือซึ่งเป็นการรับความร้อนจากการแผ่รังสีและระบายความร้อนออกด้วยการพาความร้อนแบบธรรมชาติ

ส่วนเงื่อนไขขอบเขตด้านล่างของโดเมนนั้นมีสองส่วนด้วยกันคือเงื่อนไขขอบเขตแบบสมมาตรและเงื่อนไขขอบเขตแบบการพาความร้อนบริเวณวงกลมที่มีฟลักซ์เป็นศูนย์ ในส่วนของเงื่อนไขขอบเขตแบบการพาความร้อนบริเวณวงกลม สามารถหาได้โดยการแทนฟลักซ์การพาความร้อนเท่ากับศูนย์ ($q_{conv}=0$) ในสมการ (4.23) จะได้

$$k\vec{n}\bullet\nabla T=0 \tag{4.49}$$

จากนั้นทำการแปลงพิกัดจากพิกัดคาร์ทีเซียนให้อยู่ในพิกัดกระชับขอบเขตโดยใช้กฎลูกโซ่ เช่นเดียวกับสมการ (4.23) ทำการดิสครีไทซ์พจน์เชิงอนุพันธ์ด้วยวิธี central differencing จะได้สมการดังนี้

$$\frac{k}{J}\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\frac{\partial T}{\partial \xi}+\frac{k}{J}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\frac{\partial T}{\partial \eta}=\frac{k}{J}\left(\frac{T_{i+1,1}-T_{i-1,1}}{2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)-\frac{k}{J}\left(\frac{T_{s}-T_{\infty}}{0.5}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)=0 \tag{4.50}$$

โดย T_s คืออุณหภูมิที่ผิวของโดเมนทางด้านล่าง จัดรูปสมการ (4.50) ให้อุณหภูมิที่ผิว (T_s) อยู่ด้านหนึ่ง จะได้

$$T_{s}=T_{\infty}+0.5\times\left(\frac{T_{i+1,1}-T_{i-1,1}}{2}\right)\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)} \tag{4.51}$$

ทำการแทนค่าสัมประสิทธิ์รูปร่างและอุณหภูมิที่ตำแหน่งต่างๆ จะได้ค่าอุณหภูมิที่ผิวของโดเมนทางด้านล่างแต่ละตำแหน่ง ส่วนเงื่อนไขขอบเขตด้านล่างของโดเมนที่เป็นเงื่อนไขขอบเขตแบบสมมาตรซึ่งอยู่นอกบริเวณวงกลม สามารถหาได้โดยการนำสมการ (4.23) มาแปลงพิกัดอยู่ในพิกัดกระชับขอบเขต จะได้

$$-\frac{1}{J}\frac{\partial T}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{1}{J}\frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}=0 \tag{4.52}$$

จากนั้นดิสครีไทซ์เป็นพจน์เชิงอนุพันธ์ $\frac{\partial T}{\partial \xi}$ และ $\frac{\partial T}{\partial \eta}$ ด้วยวิธี central differencing ได้สมการดังนี้

$$-\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial \eta}\left(\frac{T_{i+1,1}-T_{i-1,1}}{2}\right)+\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial \xi}\left(\frac{T_{i,1}-T_s}{0.5}\right)=0 \tag{4.53}$$

เนื่องจากเราต้องการหาอุณหภูมิที่ผิวที่เป็นขอบด้านล่างของรูปร่าง (T_s) ดังนั้นเราจะทำการจัดพจน์ของสมการ (4.53) ให้ค่าอุณหภูมิที่ผิวที่เราต้องการหาอยู่ด้านหนึ่ง ดังนี้

$$T_s=T_{i,1}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\Big/\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)(T_{i+1,1}-T_{i-1,1}) \tag{4.54}$$

เมื่อได้อุณหภูมิที่ผิวของขอบครบทุกด้านของโดเมนแล้ว ต่อไปจะทำการคำนวณหาการกระจายอุณหภูมิภายในโดเมนด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม โดยจะกำหนดค่าคุณสมบัติต่างๆเพื่อใช้ในการคำนวณ มีดังนี้ $\Pr=0.7$, $\varepsilon=0.99$, $\sigma=5.67\times10^{-8}$, $\beta=6.67\times10^{-4}$, $g=9.81$, $T_\infty=0\,\mathrm{K}$, $T_0=100\,\mathrm{K}$ และ $\Delta t=0.01\,\mathrm{s}$ เมื่อนำค่าต่างๆเหล่านี้ลงไปแทนในสมการต่างๆ จะได้ผลลัพธ์เป็นอุณหภูมิที่จุดต่างๆบนโดเมนซึ่งสามารถแสดงเป็นเส้น contour ได้ดังรูปที่ 4.39

รูปที่ 4.39 การกระจายของอุณหภูมิภายในแผ่นสี่เหลี่ยมคางหมูเจาะรูวงกลม

เมื่อทำการเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมกับผลเฉลยของ Gao พบว่าผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมมีความคลาดเคลื่อนจากผลเฉลยของ Gao ซึ่งอาจเกิดขึ้นอันเนื่องมาจากการกำหนดค่าของคุณสมบัติต่างๆในการคำนวณมีความแตกต่างกัน อาทิเช่น แพรนเทิลด์นัมเบอร์ ค่าสัมประสิทธิ์การแผ่รังสี สัมประสิทธิ์การพาความร้อน อุณหภูมิเริ่มต้น อุณหภูมิโดยรอบและค่าของช่วงเวลาที่เพิ่ม (time step) เป็นต้น ทั้งนี้ Gao มิได้กำหนดค่าต่างๆไว้ ซึ่งค่าต่างๆเหล่านี้ล้วนส่งผลต่อผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณ

บทที่ 5

บทสรุปและข้อเสนอแนะ

5.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์นี้ได้แสดงวิธีการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมร่วมกับระบบพิกัดกระชับขอบเขต เพื่อใช้ในการศึกษาและวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนทั้งในสภาวะอยู่ตัวและในสภาวะไม่อยู่ตัวแบบสองมิติสำหรับรูปร่างของโดเมนที่มีลักษณะซับซ้อน วิทยานิพนธ์นี้ได้แสดงให้เห็นว่าพิกัดกระชับขอบเขตสามารถใช้แก้ปัญหาในรูปร่างที่ซับซ้อนได้เป็นอย่างดี

ขั้นตอนแรกในการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมคือการสร้างกริด ซึ่งได้กล่าวรายละเอียดไว้ในบทที่ 2 โดยเบื้องต้นได้กล่าวถึงการแบ่งประเภทของกริดตามลักษณะของกริดทั้งแบบ structured และแบบ unstructured ข้อได้เปรียบและข้อจำกัดของกริดแต่ละแบบ ทั้งนี้ เราได้เลือกใช้กริดแบบ structured จึงได้กล่าวถึงวิธีการสร้างกริดแบบ structured วิธีต่างๆ โดยทั่วไปลักษณะของกริดที่ได้จากวิธีนั้น เพื่อให้สามารถเลือกวิธีการสร้างกริดที่มีความเหมาะสมกับปัญหาที่นำมาวิเคราะห์ รวมทั้งคุณลักษณะต่างๆของกริดที่ต้องการ นอกจากนี้ได้กล่าวถึงการสร้างกริดวิธีต่างๆโดยทั่วไป ทั้งนี้ ได้กล่าวรายละเอียดของวิธีการสร้างกริดด้วยวิธีเชิงพีชคณิตและการสร้างกริดด้วยวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติกซึ่งเป็นวิธีที่ถูกเลือกนำมาใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ โดยมีขั้นตอนคือ เริ่มต้นจะทำการกำหนดตำแหน่งของจุดต่างๆบนขอบของโดเมนแล้ว จากนั้นจึงทำการประมาณค่าในช่วงเพื่อให้ได้ตำแหน่งของจุดต่างๆภายในโดเมนด้วยวิธี TFI ซึ่งตำแหน่งของจุดต่างๆนี้ถูกใช้เป็นกริดเริ่มต้นให้กับกระบวนการสร้างกริดแบบอิลิปติกซึ่งจะทำการปรับกริดให้สม่ำเสมอมากขึ้น ทั้งนี้การสร้างกริดเริ่มต้นก่อนทำการปรับกริดด้วยวิธีอิลิปติกนี้จะทำให้กริดที่ได้กริดที่มีความสม่ำเสมอและมีระยะห่างที่เหมาะสม สำหรับสมการครอบคลุมของการสร้างกริดแบบอิลิปติกที่ถูกเลือกมาใช้คือสมการปัวซองส์ที่มีฟังก์ชันควบคุมช่วยควบคุมการกระจายเส้นกริดให้สม่ำเสมอ สำหรับการแก้สมการครอบคลุมของการสร้างกริดนี้ เบื้องต้นได้ทำการเปลี่ยนตัวแปรโดยใช้กฎลูกโซ่ จากนั้นจึงทำการดิสครีไทซ์สมการเชิงอนุพันธ์ที่เป็นสมการครอบคลุมของการสร้างกริดด้วย central differencing scheme เมื่อได้ระบบสมการเชิงพีชคณิตมาแล้วจึงแก้ระบบสมการด้วยวิธี SOR ซึ่งได้ผลเฉลยออกมาเป็นตำแหน่งของกริด

หลังจากได้กริดที่เหมาะสมกับปัญหาแล้ว ในบทที่ 3 จึงเป็นการหาผลเฉลยของปัญหาด้วยด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมบนระบบพิกัดกระชับขอบเขต เบื้องต้นของบทนี้เป็นการพิสูจน์เพื่อหา

สมการครอบคลุมปัญหาการนำความร้อนจากกฎอนุรักษ์พลังงาน และได้แนะนำเกี่ยวกับหลักการและแนวคิดพื้นฐานของระบบพิกัดกระชับขอบเขตด้วย จากนั้นจึงนำสมการครอบคลุมและเงื่อนไขขอบเขตที่ได้มาแปลงพิกัดจากพิกัดคาร์ทีเซียนซึ่งมีตัวแปรอิสระคือ $(x_i) = (x, y)$ ไปเป็นพิกัดกระชับขอบเขตมีตัวแปรอิสระคือ $(\xi_i) = (\xi, \eta)$ โดยการใช้กฎลูกโซ่ จากนั้นจึงทำการดิสครีไทซ์เพื่อแปลงสมการครอบคลุมซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ไปเป็นสมการเชิงพีชคณิตด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม สุดท้ายจึงทำการแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตที่ได้ด้วยวิธี TDMA จะได้ผลเฉลยเป็นอุณหภูมิที่จุดต่างๆบนโดเมน

สุดท้าย ในบทที่ 4 เป็นการนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นมาตรวจสอบความถูกต้องกับผลเฉลยแม่นตรงหรือผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่มีผู้ทำมาก่อนแล้ว โดยปัญหาที่นำมาใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องถูกแบ่งเป็นสองส่วนด้วยกันคือปัญหาการนำความร้อนที่สภาวะอยู่ตัวและปัญหาการนำความร้อนที่สภาวะไม่อยู่ตัว ในส่วนที่หนึ่งซึ่งเป็นปัญหาการนำความร้อนที่สภาวะอยู่ตัวมีทั้งหมด 5 กรณีศึกษาด้วยกัน ได้แก่ การนำความร้อนในแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกัน การนำความร้อนในแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์ การนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่วงกลมอยู่ข้างใน การนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีเงื่อนไขขอบเขตเป็นฟังก์ชันของซายน์ และการนำความร้อนในแผ่นสามเหลี่ยมที่มีผลิตการความร้อนภายใน จากการเปรียบเทียบผลลัพธ์จากโปรแกรมกับผลเฉลยแม่นตรงหรือผลการคำนวณเชิงตัวเลขพบว่าผลลัพธ์จากโปรแกรมมีความสอดคล้องกันอย่างดีกับผลเฉลยแม่นตรงหรือผลการคำนวณเชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่าโปรแกรมมีความถูกต้องเป็นที่น่าพอใจ นอกจากนี้ยังทำการเปรียบเทียบผลกระทบของฟังก์ชันควบคุมของกริดที่มีต่อผลการคำนวณ พบว่า กริดที่มีการควบคุมการกระจายเส้นกริดจะได้ผลการคำนวณที่แม่นยำกว่ากริดที่ไม่มีฟังก์ชันควบคุม สำหรับในส่วนที่สองซึ่งเป็นปัญหาการนำความร้อนที่สภาวะไม่อยู่ตัว ทำการตรวจสอบโปรแกรมโดยใช้ปัญหาซึ่งมีทั้งหมด 2 กรณีศึกษาด้วยกัน ได้แก่ การนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสและการนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมคางหมูเจาะรูวงกลมที่สภาวะไม่อยู่ตัว จากการเปรียบเทียบผลลัพธ์จากโปรแกรมกับผลเฉลยแม่นตรงสำหรับปัญหาแรก พบว่าผลลัพธ์จากโปรแกรมใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงเป็นที่น่าพอใจ ส่วนปัญหาที่สองซึ่งทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์จากโปรแกรมกับผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่มีผู้ทำมาก่อน พบว่ามีความคลาดเคลื่อนซึ่งเกิดมาจากการกำหนดคุณสมบัติต่างๆในการคำนวณแตกต่างกัน

กล่าวโดยสรุปได้ว่าวิทยานิพนธ์สามารถนำระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมไปประยุกต์ใช้ร่วมกับระบบพิกัดกระชับขอบเขตเพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนทั้งสภาวะอยู่ตัวและไม่อยู่ตัวสำหรับรูปร่างของโดเมนที่มีลักษณะซับซ้อนได้อย่างเหมาะสม

5.2 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

งานในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ถือเป็นงานวิจัยขั้นพื้นฐานในการประยุกต์ใช้ระบบพิกัดกระชับขอบเขตเข้ากับระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมเพื่อทำให้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมสามารถใช้วิเคราะห์ปัญหาสำหรับโดเมนที่มีลักษณะซับซ้อนได้ ซึ่งปัญหาที่นำมาศึกษาและวิเคราะห์คือปัญหาการนำความร้อนสำหรับสองมิติเท่านั้น ซึ่งสามารถทำการพัฒนาเพิ่มเติมในด้านต่างๆได้ ดังนี้

1) พัฒนาโปรแกรมให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาการไหลได้
2) พัฒนาโปรแกรมให้สามารถวิเคราะห์ทั้งปัญหาการนำความร้อนและปัญหาการไหลสำหรับสามมิติได้
3) พัฒนาวิธีการสร้างกริดให้สามารถปรับความละเอียดได้เองโดยใช้ผลเฉลยเป็นตัวควบคุม (adaptive grids)

รายการอ้างอิง

Califano A.N. and Zaritzky N.E. Simulation of Freezing or Thawing Heat Conduction in Irregular Two-dimensional Domains by a Boundary-fitted Grid Method. Lebensm.-Wiss. u.-Technol. 30 (1997) : 70-76.

Carslaw H.S. and Jaeger J.C. Conduction of Heat in Solids. London : Oxford University Press, 1959.

Conti C., Morandi R., and Spitaleri R.M. An Algebraic-elliptic Algoritm for Boundary Orthogonal Grid Generation. Applied Mathematics and Computation 162 (2005) : 15-27.

Dash S.K. and Chattopadhyay H. Comparison Between Boundary-fitted Coordinate System and Finite Element Method in Solving a Heat Conduction Problem. International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow 3 (1993) : 79-84.

Eriksson L.E. Generation of Boundary-Conforming Grids Around Wing-Body Configurations Using Transfinite Interpolation. AIAA Journal 20 (October 1982) : 1313-1320.

Gao D. Numerical Solution for a Heat Conduction Problem. International Communication Heat Mass Transfer 26 (1999) : 209-217.

Gordon W.N. and Hall C.A. Construction of Curvilinear Coordinate Systems and Application to Mesh Generation. International Journal of Numerical Methods in Engineering 7 (1973) : 461-477.

Hung T.K. and Brown T.D. An Implicit Finite-Difference Method for Solving the Navier-Stokes Equation Using Orthogonal Curvilinear Coordinates. Journal of Computational Physics 23 (1977) : 343.

Incropera F.P. and Dewitt D.P. Fundamentals of Heat and Mass Transfer. 5 th ed. : John Wiley and Sons, 2002.

McWhorter J.C.III and Sadd M.H. Numerical Anisotropic Heat Conduction Solutions Using Boundary-fittted Coordinate Systems. American Society of Mechanical Engineers 79 (1979).

Melaaen M.C. Analysis of Curvilinear Non-orthogonal Coordinates for Numerical Calculation of Fluid Flow in Complex Geometries. Thesis for Doctor of Engineering Degree, University of Trondheim, The Norwegian Institute of Technology (NTH), 1990.

Pope S.B. The Calculation of Turbulent Recirculating Flows in General Orthogonal Coordinates. Journal of Computational Physics 26 (1978) : 197.

Poulikakos D. Conduction Heat Transfer. Prentice-Hall International Inc., 1994.

Ramanathan S. and Kumar R. Comparison of Boundary-fitted Coordinates with Finite-element Approach for Solution of Conduction Problems. Numerical Heat Transfer 14 (1988) : 187-211.

Spekreuse S.P. Elliptic Grid Generation Based on Laplace Equations and Algebraic Transformations. Journal of Computational Physics 118 (1995) : 38-61.

Thompson J.F. Elliptic Grid Generation. Applied Mathematics and Computation 10-11 (1982a) : 79-105.

Thompson J.F. General Curvilinear Coordinate Systems. Applied Mathematics and Computation 10-11 (1982b) : 1-30.

Thompson J.F. Grid Generation Techniques in Computational Fluid Dynamics. AIAA Journal 22 (1984) : 1505-1523.

Thompson J.F., Thames F.C., and Mastin C.W. Automatic Numerical Generation of Body-fitted Curvilinear Coordinates System for Field Containing any Number of Arbitrary Two-dimensional Bodies. Journal of Computational Physic 15 (1974) : 299-319.

Thompson J.F., Thames F.C., Walker R.L., and Shanks S.P. Numerical Solutions of the Unsteady Navier-stokes Equations for Arbitrary Bodies Using Boundary-fitted Curvilinear Coordinates. Magnetohydrodynamics 485 (1975) : 453-485.

Thompson J.F., Warsi Z.U.A., and Mastin C.W. Boundary-fitted Coordinate Systems for Numerical Solution of Partial Differential Equations-A review. Journal of Computational Physics 47 (1982) : 1-108.

Thompson J.F., Warsi Z.U.A., and Mastin C.W. Numerical Grid Generation Foundations and Applications. Elsevier Science Publishing Co.,Inc.,1985.

Uchikawa S. and Takeda R. Use of a Boundary-Fitted Coordinate Transformation for Unsteady Heat Conduction Problems in Multiconnected Regions with Arbitrarily Shaped Boundaries. Journal of Heat Transfer 107 (1985) : 494-498.

Yang D.Y., Lee C.M., and Cho J.R. Analysis of Axisymmetric Extrusion of Rods by the Method of Weighted Residuals Using Body-fitted Coordinate Transformation. International Journal of Mechanical Sciences 32 (1990) : 101-114.

Zedan M. and Schneider G.E. Physical Approach to the Finite Difference Solution of the Conduction Equation in Generalized Coordinates. Numerical Heat Transfer 5 (1982) : 1-19.

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาวจุฑาทรัพย์ ปรมีศนาภรณ์ เกิดเมื่อวันที่ 9 เดือนธันวาคม พุทธศักราช 2523 จังหวัดกรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตร์บัณฑิต สาขาวิศวกรรมเครื่องกลจากมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ เมื่อปีการศึกษา 2545 จากนั้นเข้าทำงานเป็นวิศวกรออกแบบระบบป้องกันอัคคีภัย ในบริษัท ไทโก้ อินเตอร์เนชั่นแนล (ประเทศไทย) จำกัด และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2546