

การศึกษาการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ด้วยเทคนิคความคล้ายคลึงของโครงสร้างและสปริง



นางสาวนิภาพร เต็มแสงสิริศักดิ์

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2552

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

STUDY OF MESH MOVEMENT BY STRUCTURAL AND SPRING ANALOGY  
TECHNIQUES



Miss Nipaporn Termsangsisak

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Master of Engineering Program in Mechanical Engineering

Department of Mechanical Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2009

Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์

การศึกษากาการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ด้วยเทคนิคความ  
คล้ายคลึงของโครงสร้างและสปริง

โดย

นางสาวนิภาพร เต็มแสงสิริศักดิ์

สาขาวิชา

วิศวกรรมเครื่องกล

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก


ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นิพนธ์ วรรณโสภาคย์

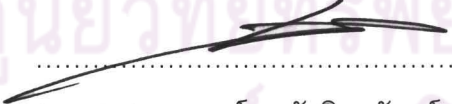
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้บัณฑิตวิทยาลัยฉบับนี้เป็น  
ส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต


  
..... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์  
(รองศาสตราจารย์ ดร.บุญสม เลิศสิริวงศ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

  
..... ประธานกรรมการ  
(ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ)

  
..... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นิพนธ์ วรรณโสภาคย์)

  
..... กรรมการ  
(รองศาสตราจารย์ ดร.รัชทิน จันทร์เจริญ)

  
..... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย  
(ดร.สุทธิศักดิ์ พงษ์ธนาพาณิช)

นิภาพร เต็มแสงสิริศักดิ์ : การศึกษาการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ด้วยเทคนิคความคล้ายคลึงของโครงสร้างและสปริง. (STUDY OF MESH MOVEMENT BY STRUCTURAL AND SPRING ANALOGY TECHNIQUES) อ. ที่ปรึกษา  
 วิทยานิพนธ์หลัก : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นิพนธ์ วรรณโสภาคย์, 180 หน้า.

วิทยานิพนธ์นี้เป็นการศึกษาเทคนิควิธีเพื่อใช้ในการหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ในปัญหาที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ภายใต้สภาวะอยู่ตัวในสองมิติโดยประยุกต์ใช้ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งรูปแบบการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้ต้องสอดคล้องกับการเคลื่อนที่ของขอบเขต โดยทำการศึกษาทั้งหมด 3 วิธีด้วยกัน ได้แก่วิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้น, วิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริงและวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้ ซึ่งจำนวนจุดต่อและรูปแบบการเชื่อมโยงของเอลิเมนต์ยังคงเดิมไม่เปลี่ยนแปลงตลอดช่วงเวลาที่ยังขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ถูกนำมาประยุกต์เข้ากับสมการพื้นฐานของแต่ละวิธีก่อให้เกิดระบบสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ แล้วจึงนำสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้จากแต่ละวิธีมาประติษฐานเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกัน เพื่อนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาที่มีรูปแบบการเคลื่อนที่ของขอบเขตในลักษณะต่าง ๆ ในสองมิติ

การเปรียบเทียบเอลิเมนต์ที่ได้จากแต่ละวิธีจะพิจารณาจากความสมบูรณ์และคุณภาพของเอลิเมนต์ ซึ่งเอลิเมนต์ที่เกิดการไขว้ตัวถือว่าไม่สามารถยอมรับได้ พบว่าวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้เป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด เนื่องจากสามารถป้องกันการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ได้ดีที่สุด รวมถึงเอลิเมนต์ที่ได้มีคุณภาพมากกว่าเอลิเมนต์ที่ได้จากอีกสองวิธีที่เหลือ

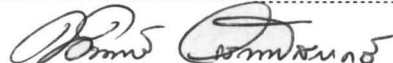
ภาควิชา.....วิศวกรรมเครื่องกล

สาขาวิชา.....วิศวกรรมเครื่องกล

ปีการศึกษา..... 2552

ลายมือชื่อนิสิต.....นิภาพร เต็มแสงสิริศักดิ์

ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก



# # 4970394721 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING

KEYWORDS : MESH MOVEMENT / MOVING BOUNDARY PROBLEMS / SPRING ANALOGY TECHNIQUE / ELASTIC MEDIUM ANALOGY TECHNIQUE

NIPAPORN TERMSANGSIRISAK : STUDY OF MESH MOVEMENT BY STRUCTURAL AND SPRING ANALOGY TECHNIQUES. THESIS ADVISOR : ASST.PROF. NIPHON WANSOPHARK, Ph.D., 180 pp.

Techniques for updating the computational mesh as the domains deform in steady-state, two-dimensional moving boundary problems associated with a Finite Element Method (FEM) is studied. The resulted computational mesh must conform to the changing moving boundaries. Three techniques are studied here such as lineal spring analogy technique, torsional spring analogy technique and elastic medium analogy technique which maintain the same nodal points and elemental connectivity.

A FEM which applied to the individual governing equations resulted the system of finite element equations. The corresponding finite element computer programs were developed in order to execute the various 2-D moving boundary problems.

The resulted elements were compared for each technique by considering the element validity and element quality. The resulted elements are invalid if they reverse or have negative area. It is demonstrated that the elastic medium analogy technique is most efficient because it can prevent element crossover effectively and provides more element quality than the others.

Department : .....Mechanical Engineering.....

Field of Study : .....Mechanical Engineering.....

Academic Year : 2009.....

Student's Signature *Nipaporn Termsangsirisak*

Advisor's Signature *Nipon Wansophark*

## กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นิพนธ์ วรรณโสภาคย์ อาจารย์ที่  
ปรึกษาวิทยานิพนธ์เป็นอย่างสูง ที่ได้ให้ความรู้ คำแนะนำ ตลอดจนข้อคิดที่มีคุณค่ายิ่งในการทำ  
วิจัย รวมถึงใช้ความอดทนและความพยายามอย่างยิ่งในการผลักดันจนผู้วิจัยสามารถทำ  
วิทยานิพนธ์เล่มนี้ออกมาได้อย่างสมบูรณ์

ขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ ประธานกรรมการ รอง  
ศาสตราจารย์ ดร.รัชทิน จันทรเจริญและ ดร.สุทธิศักดิ์ พงศ์ธนาพานิช กรรมการ ที่ได้ให้คำแนะนำ  
ข้อเสนอแนะตลอดจนความรู้ต่าง ๆ ซึ่งทำให้วิทยานิพนธ์นี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณคุณสุธี ไตรวิวัฒนา คุณปริชญญา บุญมาเลิศ คุณอิทธิพงษ์ มาลาทิพย์  
คุณพัชรี ธีระเอก คุณสุทธิคมน์ พันธิมากรกิจและคุณพิชฌันทร์ โพธิคุณ ซึ่งเป็นพี่ ๆ และเพื่อน ๆ  
ในห้องปฏิบัติการวิจัยกลศาสตร์การคำนวณ สำหรับความช่วยเหลือ คำแนะนำที่มีให้ผู้วิจัยตลอด  
ระยะเวลาในการทำวิจัยนี้ ทั้งนี้ขอขอบคุณคุณสุรียา อุ่นจิตติสำหรับกำลังใจที่มีให้เสมอมา

ท้ายสุดนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณคุณพ่อชัยวัฒน์ และคุณแม่พิชญา เต็มแสงสิริศักดิ์  
เป็นอย่างสูง ที่ได้เป็นทั้งกำลังใจและกำลังใจทรัพย์ รวมถึงสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยโดยเสมอมา  
ทั้งนี้ประโยชน์และคุณค่าอันใดที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์นี้ขอมอบเป็นกตัญญูตราบูชาแต่บิดามารดา  
รวมถึงครูบาอาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

# สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญภาพ.....	ญ
<b>บทที่ 1 บทนำ</b> .....	<b>1</b>
1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์.....	1
1.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีเคลื่อนย้ายเอลิเมนต์.....	2
1.3 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์.....	8
1.4 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์.....	9
1.5 ขั้นตอนการดำเนินงาน.....	9
1.6 ประโยชน์ที่ได้รับ.....	10
<b>บทที่ 2 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์</b> .....	<b>11</b>
2.1 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.....	11
2.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์แบบสองมิติ.....	13
<b>บทที่ 3 เทคนิควิธีการหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์</b> .....	<b>18</b>
3.1 วิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้น (Lineal Spring Analogy Technique).....	18
3.1.1 หลักการและสมการพื้นฐาน.....	18
3.1.2 การแปลงเมตริกซ์ของเอลิเมนต์.....	20
3.1.3 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในปัญหาสองมิติ.....	26
3.2 วิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริง (Torsional Spring Analogy Technique).....	28
3.2.1 หลักการและสมการพื้นฐาน.....	28
3.2.2 จลนศาสตร์ (Kinematics) ของทอร์ชันสปริง.....	29

3.2.3	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในปัญหาสองมิติ.....	33
3.3	วิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยืดหยุ่นได้ (Elastic Medium Analogy Technique).....	37
3.3.1	หลักการและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย.....	37
3.3.2	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาของแข็งในสองมิติ.....	42
3.4	เกณฑ์ในการวัดผลลัพธ์ของเอลิเมนต์.....	45
<b>บทที่ 4</b>	<b>ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์.....</b>	<b>47</b>
4.1	โปรแกรม LINEAL2D.....	47
4.1.1	ลักษณะของโปรแกรม LINEAL2D.....	47
4.1.2	รายละเอียดของโปรแกรม LINEAL2D.....	49
4.1.3	ลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่โปรแกรม LINEAL2D ต้องการ.....	49
4.1.4	ตัวอย่างการใช้โปรแกรม LINEAL2D.....	54
4.2	โปรแกรม TORSION2D.....	63
4.2.1	ลักษณะของโปรแกรม TORSION2D.....	63
4.2.2	รายละเอียดของโปรแกรม TORSION2D.....	65
4.2.3	ลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่โปรแกรม TORSION2D ต้องการ.....	65
4.2.4	ตัวอย่างการใช้โปรแกรม TORSION2D.....	68
4.3	โปรแกรม ELASTIC2D.....	75
4.3.1	ลักษณะของโปรแกรม ELASTIC2D.....	75
4.3.2	รายละเอียดของโปรแกรม ELASTIC2D.....	75
4.3.3	ลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่โปรแกรม ELASTIC2D ต้องการ.....	76
4.3.4	ตัวอย่างการใช้โปรแกรม ELASTIC2D.....	76
<b>บทที่ 5</b>	<b>การตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์.....</b>	<b>85</b>
<b>บทที่ 6</b>	<b>การประยุกต์ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในปัญหาขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ในสองมิติ.....</b>	<b>91</b>
6.1	ปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยม.....	91
6.2	ปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปวงกลม.....	98



6.3	ปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงมุมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยม .....	105
6.4	ปัญหาการเคลื่อนที่แบบผสมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยม .....	112
6.5	การจำลองการไหลเวียนของเลือดผ่านเส้นเลือด Coronary Artery .....	117
6.6	ข้อสรุปและข้อเปรียบเทียบ .....	121
<b>บทที่ 7</b>	<b>บทสรุป ปัญหาที่พบและข้อเสนอแนะ .....</b>	<b>124</b>
7.1	บทสรุป .....	124
7.2	ปัญหาที่พบในขณะทำวิทยานิพนธ์ .....	127
7.3	ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต .....	127
	<b>รายการอ้างอิง .....</b>	<b>129</b>
	<b>ภาคผนวก .....</b>	<b>133</b>
	ภาคผนวก ก รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LINEAL2D .....	134
	ภาคผนวก ข รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ TORSION2D .....	146
	ภาคผนวก ค รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ELASTIC2D .....	158
	ภาคผนวก ง งานวิจัยที่ได้ตีพิมพ์ในการประชุมเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 23 .....	170
	<b>ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์ .....</b>	<b>180</b>

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## สารบัญภาพ

หน้า

รูปที่ 1.1	แบบจำลองวิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้นและทอร์ชันสปริง	
	(ก) สปริงเชิงเส้น .....	4
	(ข) ทอร์ชันสปริง.....	4
รูปที่ 2.1	การแบ่งขอบเขตรูปร่างลักษณะของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ แบบต่าง ๆ ....	11
รูปที่ 2.2	ตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม.....	12
รูปที่ 2.3	เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ .....	14
รูปที่ 2.4	ตัวอย่างเอลิเมนต์สามเหลี่ยม .....	15
รูปที่ 2.5	ลักษณะการกระจายของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์.....	16
รูปที่ 2.6	ลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณภายในเอลิเมนต์ .....	16
รูปที่ 3.1	แบบจำลองสปริงเอลิเมนต์เมื่อใช้วิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้น .....	18
รูปที่ 3.2	สปริงเอลิเมนต์ $ij$ .....	19
รูปที่ 3.3	ค่าความแข็งเกร็งของสปริง, แรงสปริงและค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อของสปริงเชิงเส้น ในหนึ่งมิติ.....	20
รูปที่ 3.4	ค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อในระบบแกนรวมใหญ่และแกนย่อย.....	21
รูปที่ 3.5	เอลิเมนต์ในแนวแกนย่อย $x$ .....	22
รูปที่ 3.6	เอลิเมนต์ในระบบแกนรวมใหญ่ $X - Y$ .....	22
รูปที่ 3.7	พลังงานความเครียดในสปริง .....	23
รูปที่ 3.8	การวางตัวของเอลิเมนต์เป็นมุม $\theta$ โดยวัดจากแนวแกน $X$ ซึ่งมีค่าเป็นบวกใน ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา .....	25
รูปที่ 3.9	แรงสปริงและค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อในระบบแกนรวมใหญ่ $X - Y$ .....	26
รูปที่ 3.10	แบบจำลองสปริงเอลิเมนต์เมื่อใช้วิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริง .....	28
รูปที่ 3.11	การเคลื่อนที่และการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของเอลิเมนต์ .....	30
รูปที่ 3.12	ขอบเขตและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาของแข็งที่ยืดหยุ่นได้.....	38
รูปที่ 3.13	เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ .....	41
รูปที่ 4.1	ลักษณะขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม LINEAL2D .....	50
รูปที่ 4.2	การแปลงสปริงเอลิเมนต์ให้เป็นสปริงเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ .....	51

รูปที่ 4.3	ลักษณะปัญหาของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ .....	54
รูปที่ 4.4	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตเมื่อวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม LINEAL2D .....	55
รูปที่ 4.5	ลักษณะข้อมูลในไฟล์ “RECT_LIN.DAT” .....	57
รูปที่ 4.6	ลำดับขั้นตอนที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ในขณะใช้โปรแกรม LINEAL2D .....	58
รูปที่ 4.7	ลักษณะผลลัพธ์ของค่าเคลื่อนที่ที่จุดต่อในไฟล์ “RECT_LIN_SOL.OUT” .....	59
รูปที่ 4.8	ลักษณะไฟล์ “RECT_LIN_DEF.PLT” เพื่อใช้ในการแสดงผลการเปลี่ยนแปลง รูปร่างของเอลิเมนต์.....	61
รูปที่ 4.9	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ก่อนการเปลี่ยนแปลงที่ได้จากไฟล์ “RECT_LIN_DEF.PLT” .....	62
รูปที่ 4.10	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์หลังการเปลี่ยนแปลงที่ได้จากไฟล์ “RECT_LIN_DEF.PLT” .....	62
รูปที่ 4.11	ลักษณะไฟล์ “MOV_RECT_QLT.PLT”เพื่อใช้ในการแสดงคุณภาพของ เอลิเมนต์.....	63
รูปที่ 4.12	กราฟแสดงคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากไฟล์ “MOV_RECT_QLT.PLT” .....	63
รูปที่ 4.13	ลักษณะขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม TORSION2D .....	66
รูปที่ 4.14	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาเมื่อวิเคราะห์ด้วย โปรแกรม TORSION2D.....	68
รูปที่ 4.15	ลักษณะข้อมูลในไฟล์ “RECT_TOR.DAT” .....	70
รูปที่ 4.16	ลำดับขั้นตอนที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ในขณะใช้โปรแกรม TORSION2D .....	71
รูปที่ 4.17	ลักษณะผลลัพธ์ของค่าเคลื่อนที่ที่จุดต่อในไฟล์ “RECT_TOR_SOL.OUT” .....	71
รูปที่ 4.18	ลักษณะไฟล์ “RECT_TOR_DEF.PLT” เพื่อใช้ในการแสดงผลการ เปลี่ยนแปลงรูปร่างของเอลิเมนต์ .....	73
รูปที่ 4.19	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ก่อนการเปลี่ยนแปลงที่ได้จากไฟล์ “RECT_TOR_DEF.PLT” .....	74
รูปที่ 4.20	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์หลังการเปลี่ยนแปลงที่ได้จากไฟล์ “RECT_TOR_DEF.PLT” .....	74

รูปที่ 4.21	ลักษณะไฟล์ “RECT_TOR_QLT.PLT” เพื่อใช้ในการแสดงคุณภาพของ เอลิเมนต์.....	75
รูปที่ 4.22	กราฟแสดงคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากไฟล์ “RECT_TOR_QLT.PLT” .....	75
รูปที่ 4.23	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาเมื่อวิเคราะห์ด้วย โปรแกรม ELASTIC2D .....	77
รูปที่ 4.24	ลักษณะข้อมูลในไฟล์ “RECT_ELAS.DAT” .....	78
รูปที่ 4.25	ลำดับขั้นตอนที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ในขณะที่ใช้โปรแกรม ELASTIC2D .....	79
รูปที่ 4.26	ลักษณะผลลัพธ์ของค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อในไฟล์ “RECT_ELAS_SOL.OUT” .....	80
รูปที่ 4.27	ลักษณะไฟล์ “RECT_ELAS_DEF.PLT” เพื่อใช้ในการแสดงผลการ เปลี่ยนแปลงรูปร่างของเอลิเมนต์ .....	82
รูปที่ 4.28	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ก่อนการเปลี่ยนแปลงที่ได้จากไฟล์ “RECT_ELAS_DEF.PLT” .....	83
รูปที่ 4.29	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์หลังการเปลี่ยนแปลงที่ได้จากไฟล์ “RECT_ELAS_DEF.PLT” .....	83
รูปที่ 4.30	ลักษณะไฟล์ “RECT_ELAS_QLT.PLT” เพื่อใช้ในการแสดงคุณภาพของ เอลิเมนต์.....	83
รูปที่ 4.31	กราฟแสดงคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากไฟล์ “RECT_ELAS_QLT.PLT” .....	84
รูปที่ 5.1	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาโครงสร้างรูปสามเหลี่ยมเมื่อทำการ วิเคราะห์ด้วยโปรแกรมต่าง ๆ (ก) โปรแกรม LINEAL2D.....	85
	(ข) โปรแกรม TORSION2D .....	86
	(ค) โปรแกรม ELASTIC2D .....	86
รูปที่ 5.2	ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ เมื่อขอบเขตเคลื่อนที่ ลงมาเป็นระยะทาง 50% ของความสูง $h_0$ (ก) โปรแกรม LINEAL2D.....	86
	(ข) โปรแกรม TORSION2D .....	87
	(ค) โปรแกรม ELASTIC2D .....	87

รูปที่ 5.3	ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ เมื่อขอบเขตเคลื่อนที่ลงมาเป็นระยะทาง 58% ของความสูง $h_0$	
	(ก) โปรแกรม LINEAL2D.....	87
	(ข) โปรแกรม TORSION2D .....	87
	(ค) โปรแกรม ELASTIC2D .....	87
รูปที่ 5.4	ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ เมื่อขอบเขตเคลื่อนที่ลงมาเป็นระยะทาง 59% ของความสูง $h_0$	
	(ก) โปรแกรม LINEAL2D.....	88
	(ข) โปรแกรม TORSION2D .....	88
	(ค) โปรแกรม ELASTIC2D .....	88
รูปที่ 5.5	ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ เมื่อขอบเขตเคลื่อนที่ลงมาเป็นระยะทาง 90% ของความสูง $h_0$	
	(ก) โปรแกรม LINEAL2D.....	88
	(ข) โปรแกรม TORSION2D .....	88
	(ค) โปรแกรม ELASTIC2D .....	88
รูปที่ 5.6	การเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาโครงสร้างรูปสามเหลี่ยม	90
รูปที่ 6.1	ลักษณะของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยม	92
รูปที่ 6.2	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยม	92
รูปที่ 6.3	ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยมเมื่อขอบเขตเคลื่อนที่ขึ้นไป 1 หน่วย	
	(ก) โปรแกรมคอมพิวเตอ์ LINEAL2D .....	93
	(ข) โปรแกรมคอมพิวเตอ์ TORSION2D .....	93
	(ค) โปรแกรมคอมพิวเตอ์ ELASTIC2D .....	93

รูปที่ 6.4	ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยมเมื่อขอบเขตเคลื่อนที่ขึ้นไป 2.8 หน่วย	
	(ก) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LINEAL2D .....	94
	(ข) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ TORSION2D .....	94
	(ค) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ELASTIC2D .....	94
รูปที่ 6.5	การเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยมเมื่อขอบเขตเคลื่อนที่ขึ้นไป 1 หน่วย.....	95
รูปที่ 6.6	ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยมเมื่อแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ทั้งหมด 2.8 หน่วยออกเป็นช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อยต่าง ๆ	
	(ก) โปรแกรม LINEAL2D เมื่อแบ่งเป็น 100 ช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อยซึ่งจะจบการทำงานในช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อยที่ 61 เนื่องจากเอลิเมนต์เกิดการไขว้ตัว .....	97
	(ข) โปรแกรม TORSION2D เมื่อแบ่งเป็น 12 ช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อย .....	97
	(ค) โปรแกรม ELASTIC2D เมื่อแบ่งเป็น 42 ช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อย.....	97
รูปที่ 6.7	การเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยมเมื่อแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ทั้งหมด 2.8 หน่วยออกเป็น 60 ช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อย .....	98
รูปที่ 6.8	ลักษณะของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปวงกลม .....	99
รูปที่ 6.9	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปวงกลม .....	99
รูปที่ 6.10	ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปวงกลมเมื่อขอบเขตเคลื่อนที่ไปทางซ้าย 1 หน่วย	
	(ก) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LINEAL2D .....	100
	(ข) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ TORSION2D .....	100
	(ค) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ELASTIC2D .....	100

รูปที่ 6.11	ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปวงกลมเมื่อขอบเขตเคลื่อนที่ไปทางซ้าย 2.9 หน่วย	
	(ก) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LINEAL2D .....	101
	(ข) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ TORSION2D .....	101
	(ค) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ELASTIC2D .....	101
รูปที่ 6.12	การเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปวงกลมเมื่อขอบเขตเคลื่อนที่ไปทางซ้าย 1 หน่วย.....	102
รูปที่ 6.13	ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปวงกลมเมื่อแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ทั้งหมด 2.9 หน่วยออกเป็นช่วงการเคลื่อนที่ย่อยต่าง ๆ	
	(ก) โปรแกรม LINEAL2D เมื่อแบ่งเป็น 100 ช่วงการเคลื่อนที่ย่อยซึ่งจะจบการทำงานในช่วงการเคลื่อนที่ย่อยที่ 65 เนื่องจากเอลิเมนต์เกิดการไขว้ตัว.....	104
	(ข) โปรแกรม TORSION2D เมื่อแบ่งเป็น 5 ช่วงการเคลื่อนที่ย่อย .....	104
	(ค) โปรแกรม ELASTIC2D เมื่อแบ่งเป็น 5 ช่วงการเคลื่อนที่ย่อย.....	104
รูปที่ 6.14	การเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปวงกลมเมื่อแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ทั้งหมด 2.9 หน่วยออกเป็น 20 ช่วงการเคลื่อนที่ย่อย .....	105
รูปที่ 6.15	ลักษณะของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงมุมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยม .....	106
รูปที่ 6.16	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงมุมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยม .....	106
รูปที่ 6.17	ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงมุมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยมเมื่อขอบเขตบิดไปทำมุม 10 องศา กับ แนวแกน X	
	(ก) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LINEAL2D .....	107
	(ข) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ TORSION2D .....	107
	(ค) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ELASTIC2D .....	107

รูปที่ 6.18	ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงมุมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยมเมื่อขอบเขตบิดไปทำมุม 45 องศากับแนวแกน $X$	
	(ก) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LINEAL2D .....	108
	(ข) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ TORSION2D .....	108
	(ค) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ELASTIC2D .....	108
รูปที่ 6.19	การเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงมุมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยมเมื่อขอบเขตบิดไปทำมุม 10 องศากับแนวแกน $X$ .....	109
รูปที่ 6.20	ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงมุมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยมเมื่อทำการแบ่งมุมที่บิดไปทั้งหมด 45 องศา ออกเป็นช่วงย่อย ๆ	
	(ก) โปรแกรม LINEAL2D เมื่อแบ่งเป็น 100 ช่วงการเคลื่อนที่ย่อยซึ่งจะจบการทำงานที่ช่วงการเคลื่อนที่ย่อยที่ 84 เนื่องจากเอลิเมนต์เกิดการไขว้ตัว.....	111
	(ข) โปรแกรม TORSION2D เมื่อแบ่งเป็น 4 ช่วงการเคลื่อนที่ย่อย .....	111
	(ค) โปรแกรม ELASTIC2D เมื่อแบ่งเป็น 2 ช่วงการเคลื่อนที่ย่อย.....	111
รูปที่ 6.21	การเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงมุมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยมเมื่อทำการแบ่งมุมที่บิดไปทั้งหมด 45 องศา ออกเป็น 20 ช่วงการเคลื่อนที่ย่อย .....	112
รูปที่ 6.22	ลักษณะของปัญหาการเคลื่อนที่แบบผสมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยม .....	113
รูปที่ 6.23	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบผสมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยม .....	113
รูปที่ 6.24	ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบผสมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยม	
	(ก) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LINEAL2D .....	114
	(ข) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ TORSION2D .....	114
	(ค) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ELASTIC2D .....	114



รูปที่ 6.25	ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบผสมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยมเมื่อทำการแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ทั้งหมดออกเป็นช่วงย่อย ๆ	
	(ก) โปรแกรม LINEAL2D เมื่อแบ่งเป็น 100 ช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อยซึ่งจะจบการทำงานในช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อยที่ 46 เนื่องจากเอลิเมนต์เกิดการไขว้ตัว.....	116
	(ข) โปรแกรม TORSION2D เมื่อแบ่งเป็น 100 ช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อยซึ่งจะจบการทำงานในช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อยที่ 96 เนื่องจากเอลิเมนต์เกิดการไขว้ตัว.....	116
	(ค) โปรแกรม ELASTIC2D เมื่อแบ่งเป็น 15 ช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อย.....	116
รูปที่ 6.26	การเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบผสมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยมเมื่อทำการแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ทั้งหมดออกเป็น 20 ช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อย .....	117
รูปที่ 6.27	ลักษณะของหัวใจและตำแหน่งของเส้นเลือด Coronary Artery .....	118
รูปที่ 6.28	ลักษณะของเส้นเลือด Coronary Artery โดยหลอดเลือดมีรัศมีภายนอก $R_o = 2$ มม. และรัศมีภายใน $R_i = 1.5$ มม. ....	118
รูปที่ 6.29	ลักษณะของปัญหาการไหลเวียนของเลือดในเส้นเลือด Coronary Artery .....	119
รูปที่ 6.30	แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลเวียนของเลือดในเส้นเลือด Coronary Artery .....	119
รูปที่ 6.31	ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการไหลเวียนของเลือดในเส้นเลือด Coronary Artery	
	(ก) โปรแกรมคอมพิวเตอร် LINEAL2D .....	120
	(ข) โปรแกรมคอมพิวเตอร် TORSION2D .....	120
	(ค) โปรแกรมคอมพิวเตอร် ELASTIC2D .....	120
รูปที่ 6.32	การเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการจำลองการไหลเวียนของเลือดในเส้นเลือด Coronary Artery ในสภาวะที่ขยายตัว .....	121

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

ในปัจจุบันปัญหาที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ (Moving Boundary Problems) เป็นปัญหาหนึ่งในแขนงการคำนวณพลศาสตร์ของไหล (Computational Fluid Dynamics: CFD) ที่ได้รับความสนใจและมีการค้นคว้าวิจัยกันมากขึ้นทั้งในด้านวิศวกรรมศาสตร์และด้านการแพทย์ ตัวอย่างของปัญหาเหล่านี้ได้แก่ ปัญหาปฏิสัมพันธ์กันระหว่างของไหลและโครงสร้าง (Fluid-Structure Interaction: FSI), ปัญหาการไหลที่พื้นผิวอย่างอิสระ (Free Surface Flows), ปัญหาการออกแบบโครงสร้าง (Geometric Design Optimization), ปัญหาการจำลองระบบการไหลเวียนของโลหิต และปัญหาการวิเคราะห์หาการเปลี่ยนแปลงของอวัยวะภายในร่างกายเมื่อมีสิ่งผิดปกติเกิดขึ้น เช่น การวิเคราะห์รูปร่างของสมองที่เปลี่ยนแปลงไปเนื่องจากขนาดของเนื้องอกที่โตขึ้น เป็นต้น

ระเบียบวิธีหนึ่งที่ยอมรับใช้ในการแก้ปัญหาดังกล่าวคือระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งภายในโดเมนของปัญหาจะถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ดังนั้นเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของโดเมนหรือขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ สิ่งที่เกิดขึ้นตามมาคือเอลิเมนต์ย่อยแต่ละเอลิเมนต์จะต้องเคลื่อนตัวไปในทิศทางที่สอดคล้องกับการเคลื่อนที่ของขอบเขต ดังนั้นวิธีการต่าง ๆ จึงถูกคิดค้นขึ้นเพื่อหาการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ให้สอดคล้องกับการเคลื่อนที่ของขอบเขตอย่างเหมาะสม โดยที่คุณภาพของเอลิเมนต์ยังอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้ วิธีดังกล่าวเรียกว่าวิธีการหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ (Updating / Moving / Dynamic Mesh Algorithms)

เนื่องจากวิธีการหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ได้ถูกคิดค้นและพัฒนาอย่างต่อเนื่อง ทำให้ในปัจจุบันมีหลายวิธีด้วยกันซึ่งสามารถแบ่งออกเป็น 2 กลุ่มใหญ่ ๆ ได้ดังนี้ [1, 2]

1. **วิธีสร้างเอลิเมนต์ใหม่ (Mesh Regeneration หรือ Re-meshing)** วิธีนี้เอลิเมนต์จะถูกสร้างขึ้นใหม่ทุกครั้งเมื่อขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ โดยลักษณะของเอลิเมนต์ที่ถูกสร้างขึ้นใหม่นี้จะขึ้นอยู่กับรูปแบบการเคลื่อนที่ของขอบเขตและรูปร่างของปัญหา วิธีนี้เหมาะสมเป็นอย่างยิ่งกับปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนหรือขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ไปมาก เพราะสามารถควบคุมคุณภาพของ

เอลิเมนต์ได้ แต่ข้อเสียของวิธีนี้คือขั้นตอนที่ยุ่งยากซับซ้อนและต้องใช้ระยะเวลาในการคำนวณเนื่องจากต้องทำการสร้างเอลิเมนต์ขึ้นใหม่ทุกครั้ง

**2. วิธีเคลื่อนย้ายเอลิเมนต์ (Mesh Relocation)** วิธีนี้เอลิเมนต์จะเกิดการเคลื่อนตัวเนื่องจากการเคลื่อนที่ของจุดต่อเท่านั้นโดยที่ไม่มีการสร้างเอลิเมนต์ใหม่ ดังนั้นจำนวนจุดต่อและรูปแบบการเชื่อมโยงของเอลิเมนต์จะยังคงเดิมไม่เปลี่ยนแปลงตลอดช่วงเวลาที่เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของโดเมน ข้อดีของวิธีนี้คือการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์จะเป็นไปอย่างต่อเนื่องรวมถึงมีขั้นตอนที่ง่ายกว่าและใช้ระยะเวลาในการคำนวณน้อยกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับแบบแรก แต่เหมาะกับการนำไปใช้กับปัญหาที่มีรูปร่างอย่างง่ายหรือขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ไปเพียงเล็กน้อยเท่านั้น

ในการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ในปัญหาใด ๆ อาจเลือกใช้เพียงวิธีเดียวหรือทั้งสองวิธีผสมกันก็ได้ เช่น Johnson และ Tezduyar [3] ได้ทำการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ของทั้งโดเมนด้วยวิธีเคลื่อนย้ายเอลิเมนต์ แล้วจึงใช้วิธีสร้างเอลิเมนต์ใหม่เฉพาะในบริเวณที่เอลิเมนต์ที่ได้มีคุณภาพต่ำ เป็นต้น ซึ่งการจะเลือกใช้วิธีใดนั้นจะต้องพิจารณาเลือกใช้ให้เหมาะสมกับรูปแบบการเคลื่อนที่ของขอบเขต ลักษณะรูปร่างของปัญหา ต้นทุนและระยะเวลาที่ต้องใช้ในการคำนวณ ความซับซ้อนของขั้นตอนรวมถึงข้อดี-ข้อเสียของแต่ละวิธี ซึ่งปัจจัยต่าง ๆ เหล่านี้มีผลต่อคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้

สำหรับวิทยานิพนธ์เล่มนี้จะศึกษาวิธีการหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์แบบวิธีเคลื่อนย้ายเอลิเมนต์เท่านั้น เนื่องจากเป็นวิธีที่ง่ายต่อการทำความเข้าใจและใช้ระยะเวลาในการคำนวณน้อยกว่า รวมถึงสามารถประยุกต์ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้ง่ายและรวดเร็ว

## 1.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิธีเคลื่อนย้ายเอลิเมนต์

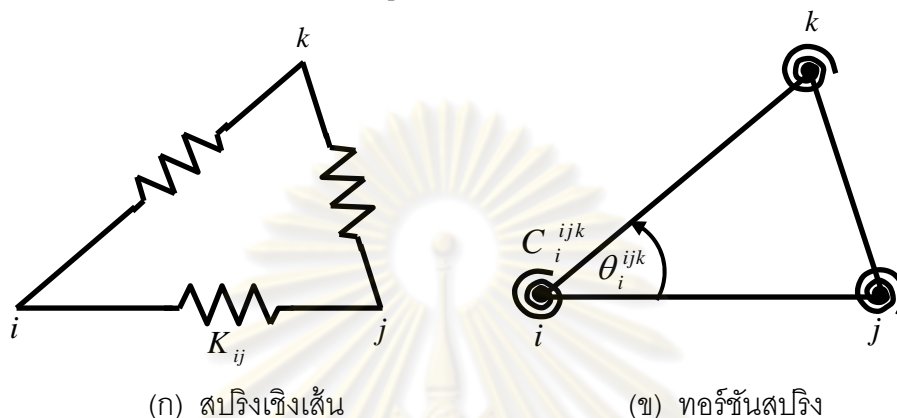
ในช่วงแรก ๆ การหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์สำหรับปัญหาขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่กระทำได้โดยการจำลองรูปแบบปัญหาการไหลเสมือนจริงอย่างง่ายทั้งในสภาวะอยู่ตัว (Steady-state) และสภาวะชั่วคราว (Transient state) แต่วิธีนี้มีข้อจำกัดคือ ไม่สามารถจำลองปัญหาที่มีโครงสร้างเป็น 3 มิติหรือปัญหาที่มีความสลับซับซ้อน เช่น การไหลแบบปั่นป่วน (Turbulent) หรือคลื่นกระแทก (Shock Wave) ได้ ถึงแม้จะใช้คอมพิวเตอร์ที่มีความสามารถสูง (Super-computer) ก็ตาม อีกทั้งยังก่อให้เกิดค่าใช้จ่ายสูงและใช้ระยะเวลาในการคำนวณนาน เนื่องจากมีตัวแปรที่ไม่รู้ค่าจำนวนมาก รวมถึงการควบคุมคุณภาพของเอลิเมนต์ทำได้ยาก [3-5] ดังนั้นเพื่อขจัดปัญหา

ดังกล่าวข้างต้น วิธีการใหม่ ๆ จึงถูกคิดค้นและพัฒนาขึ้น โดยวิธีเคลื่อนย้ายเอลิเมนต์เป็นวิธีหนึ่งที่ยินยมนำมาใช้ในการหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ ซึ่งวิธีนี้ถูกคิดค้นและพัฒนาอย่างต่อเนื่องตั้งแต่ช่วงคริสต์ศักราช 1980 ตัวอย่างของวิธีเคลื่อนย้ายเอลิเมนต์ ได้แก่ วิธี Transfinite Interpolation (TFI) [6-9], วิธีการจับคู่แบบไอโซพารามेटริก (Isoparametric Mapping) [10-11], วิธีความคล้ายคลึงสปริง (Spring Analogy) [12-23] และวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยืดหยุ่นได้ (Elastic Analogy) [24-34] วิธี TFI และการจับคู่แบบไอโซพารามेटริกเป็นวิธีทางพีชคณิตซึ่งเหมาะสมกับเอลิเมนต์แบบมีระเบียบ (Structured Meshes) ในปัญหาอย่างง่าย ในขณะที่วิธีความคล้ายคลึงสปริงและวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยืดหยุ่นได้สามารถใช้ได้กับเอลิเมนต์ทั้งแบบมีระเบียบและไร้ระเบียบ (Structured and Unstructured Meshes) ซึ่งวิธีความคล้ายคลึงสปริงจะมองเอลิเมนต์แต่ละเอลิเมนต์เสมือนว่าเป็นสปริงเชื่อมต่อกันเป็นโครงข่าย ดังนั้นเมื่อขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่จะส่งผลให้เอลิเมนต์ย่อย ๆ ภายในโดเมนเกิดการเคลื่อนตัวผ่านทางแรงสปริง ซึ่งค่าเคลื่อนตัวที่ได้นั้นจะเป็นไปในทิศทางที่สอดคล้องกับการเคลื่อนที่ของขอบเขต วิธีความคล้ายคลึงสปริงเป็นวิธีหนึ่งที่ได้รับนิยมนิยมและถูกพัฒนาเพื่อปรับปรุงคุณภาพของเอลิเมนต์อย่างต่อเนื่อง เนื่องจากมีรูปแบบที่ง่ายไม่ซับซ้อน ใช้ระยะเวลาในการคำนวณน้อยและคอมพิวเตอร์ต้องการหน่วยความจำเพื่อใช้ในการประมวลผลน้อย รวมถึงสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาต่าง ๆ ได้โดยง่าย [19-25]

Nakahashi และ Deiwert ได้เสนอแบบจำลองสปริง (Spring Analogy Model) ขึ้นเป็นครั้งแรกเพื่อใช้ในการคำนวณหาการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของเอลิเมนต์ในปัญหาการไหลของอากาศผ่านโครงสร้างที่มีรูปทรงแตกต่างกันในย่านความเร็วเหนือเสียงใน 2 มิติ โดยวิธีการปรับเปลี่ยนเอลิเมนต์ (Adaptive Grid Method) [12] และนำมาขยายใช้กับปัญหาใน 3 มิติ พบว่าเอลิเมนต์ที่ได้มีรูปแบบการเคลื่อนตัวที่ต่อเนื่องทั้งโดเมน [13]

Batina [14] ได้ดัดแปลงวิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้น (Linear Spring Analogy Method) เพื่อใช้ในการหาการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของเอลิเมนต์ในปัญหาการไหลแบบออยเลอร์ (Euler flow) ผ่านปีกเครื่องบินที่เกิดการสั่น (Oscillating Airfoil) ในสถานะชั่วครู่โดยใช้เอลิเมนต์แบบไร้ระเบียบใน 2 มิติ ซึ่งค่าความแข็งเกร็งของสปริงเชิงเส้นได้ถูกกำหนดให้แปรผกผันกับความยาวขอบเอลิเมนต์ กล่าวคือถ้าขอบเอลิเมนต์สั้นลงจะทำให้ค่าความแข็งเกร็งของสปริงเชิงเส้นมีค่ามากขึ้น ดังนั้นค่าความแข็งเกร็งของสปริงเชิงเส้นจึงเปลี่ยนแปลงไปตลอดช่วงเวลาที่เกิดการเคลื่อนตัว

ต่อมาได้มีการปรับปรุงและพัฒนาวิธีความคล้ายคลึงสปริงโดยนำทอร์ชันสปริง (Torsional Spring) มาประยุกต์ใช้กับแบบจำลองเพิ่มเติมนอกเหนือจากสปริงเชิงเส้น (Lineal Spring) เรียกวินี้ว่าวิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริง (Torsional Spring Analogy Method) ซึ่งแบบจำลองสปริงทั้งสองแบบแสดงได้ดังรูปที่ 1.1



รูปที่ 1.1 แบบจำลองวิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้นและทอร์ชันสปริง

Farhat et al. [15-16] นำเสนอวิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริงเพื่อใช้ในการหาการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของเอลิเมนต์สำหรับปัญหาต่าง ๆ ใน 2 มิติโดยใช้เอลิเมนต์แบบไร้ระเบียบ โดยเสมือนว่ามีทอร์ชันสปริงติดอยู่ที่แต่ละจุดต่อของทุก ๆ เอลิเมนต์ภายในโดเมนของปัญหา ซึ่งค่าความแข็งเกร็งของทอร์ชันสปริงถูกกำหนดให้แปรผกผันกับพื้นที่ของเอลิเมนต์ กล่าวคือถ้าเอลิเมนต์มีพื้นที่น้อยลงจะทำให้ค่าความแข็งเกร็งของทอร์ชันสปริงมีค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้นค่าความแข็งเกร็งของทอร์ชันสปริงจะเปลี่ยนแปลงไปตลอดช่วงเวลาที่เกิดการเคลื่อนตัว ซึ่งวิธีนี้ได้รับความนิยมอย่างมาก เนื่องจากให้คุณภาพและรูปแบบการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์เป็นที่น่าพอใจ อย่างไรก็ตามเนื่องจากความยุ่งยากซับซ้อนของขั้นตอนและสมการที่ใช้ในการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์รวมทั้งระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณที่มาก ทำให้วิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริงที่เสนอโดย Farhat et al. นั้นไม่เหมาะสมในการนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาใน 3 มิติ นอกจากนี้ Degand และ Farhat [17] ยังศึกษาวิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริงเพิ่มเติมเพื่อนำมาขยายใช้กับปัญหาใน 3 มิติ โดยใส่แผ่นระนาบเข้าไปในแบบจำลองเพื่อป้องกันการยุบตัวของโครงสร้าง และคำนวณหาการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของเอลิเมนต์โดยพิจารณาที่หน้าตัดของเอลิเมนต์

เพื่อลดความยุ่งยากของขั้นตอนรวมทั้งระยะเวลาที่ต้องใช้ในการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่น่าเสนอโดย Farhat et al. Blom [18] ได้เสนอแบบจำลองสปริงกึ่งทอร์ชัน (Semi-

torsional Spring Analogy Model) ซึ่งค่าความแข็งเกร็งของสปริงกึ่งทอร์ชันนี้สามารถคำนวณได้จากอัตราส่วนระหว่างค่าความแข็งเกร็งของสปริงเชิงเส้นกับมุมภายในสามเหลี่ยมของจุดต่อที่อยู่ตรงข้ามกับสปริงเชิงเส้นนั้น ซึ่งจะแตกต่างกับวิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้นและทอร์ชันสปริง อย่างไรก็ตามข้อจำกัดของวิธีที่เสนอโดย Blom คือสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับปัญหาใน 2 มิติเท่านั้น

Zeng [19] และ Murayama et al. [20] ได้ปรับปรุงวิธีความคล้ายคลึงสปริงกึ่งทอร์ชันให้สามารถนำมาขยายใช้ได้กับปัญหาใน 3 มิติ โดยปรับเปลี่ยนสมการที่ใช้ในการคำนวณหาค่าความแข็งเกร็งของสปริงกึ่งทอร์ชันใหม่ และนำไปทดสอบกับปัญหาต่าง ๆ ใน 3 มิติเช่น การจำลองการเคลื่อนที่ของปีกเครื่องบินในย่านความเร็วเหนือเสียง (Supersonic Flow) [20] หรือการจำลองระบบการไหลเวียนของเลือดในเส้นเลือด Right Coronary Artery (RCA) [19] เป็นต้น พบว่าคุณภาพและรูปแบบการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้เป็นที่น่าพอใจ ถึงแม้จะกำหนดให้ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ไปมากก็ตาม

Burg [21] ได้นำวิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้นและทอร์ชันสปริงมาใช้ในการหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์สำหรับปัญหาใน 3 มิติ โดยใช้แบบจำลองสปริงรูปแบบเดียวกับแบบจำลองสปริงที่นำเสนอโดย Farhat et al. แต่ขั้นตอนที่ใช้ในการคำนวณมีความแตกต่างกัน โดย Farhat et al. จะแบ่งเอลิเมนต์รูปทรงสี่หน้าใน 3 มิติออกเป็นหน้าตัดใน 2 มิติแล้วจึงสร้างสมการโดยพิจารณาที่หน้าตัดใน 2 มิติ นั้น ในขณะที่ Burg ใช้ปริมาตรและพื้นที่หน้าตัดของรูปทรงสี่หน้ามาสร้างสมการโดยตรง ทำให้ค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้มีความถูกต้องแม่นยำมากกว่า รวมถึงสามารถนำสมการที่ใช้สำหรับปัญหาใน 2 มิติมาขยายใช้กับปัญหาใน 3 มิติได้โดยง่าย ซึ่งแตกต่างจากวิธีของ Farhat et al. ที่การสร้างสมการสำหรับปัญหาใน 3 มิติมีความยุ่งยากและซับซ้อน โดย Burg ได้ทดสอบประสิทธิภาพของวิธีที่ได้นำเสนอกับปัญหาการเคลื่อนที่อย่างง่ายเช่นเดียวกับปัญหาของ Farhat et al. และปัญหาการจำลองการเคลื่อนที่ของเรือบนผิวน้ำที่มีรูปทรงของลำเรือแตกต่างกัน

Bottasso [22] นำเสนอวิธีใหม่ในการหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์โดยใช้แบบจำลองสปริงรูปแบบเดียวกับแบบจำลองสปริงที่นำเสนอโดย Batina แต่เพิ่มสปริงเชิงเส้นซึ่งเชื่อมระหว่างจุดต่อกับขอบเอลิเมนต์ที่อยู่ตรงกันข้ามในทิศทางตั้งฉากสำหรับเอลิเมนต์ใน 2 มิติหรือเชื่อมระหว่างจุดต่อกับหน้าตัดที่อยู่ตรงกันข้ามในทิศทางตั้งฉากสำหรับเอลิเมนต์ใน 3 มิติลงไปในรูปแบบจำลองด้วย เนื่องจากในขณะที่โดเมนเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างไปนั้นจะส่งผลให้จุดต่อเกิด

การเคลื่อนที่ แต่การเคลื่อนที่ของจุดต่อจะถูกจำกัดอยู่แค่ภายในขอบเขตที่เชื่อมกันเป็นวงกลมเท่านั้น วิธีนี้จึงถูกเรียกว่าวิธี Ball-vertex โดย Bottasso ได้นำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาทั้งใน 2 และ 3 มิติ

Anderson [23] ได้นำวิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้นมาประยุกต์ใช้ร่วมกับการสร้างเอลิเมนต์ใหม่ในปัญหาการออกแบบปีกเครื่องบิน โดยจะทำการสร้างเอลิเมนต์ใหม่ขึ้นมาแทนเอลิเมนต์ที่เกิดการยุบตัว ทำให้ไม่เกิดการยุบตัวของเอลิเมนต์ทั่วทั้งโดเมน อย่างไรก็ตามพบว่าเอลิเมนต์ที่ได้ยังคงมีคุณภาพต่ำถึงแม้ว่าจะทำการสร้างเอลิเมนต์ขึ้นมาใหม่แล้วก็ตาม

ส่วนวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยืดหยุ่นได้จะมองโดเมนที่กำลังพิจารณาว่าเป็นวัตถุที่มีความยืดหยุ่น ดังนั้นค่าเคลื่อนที่ที่ขอบเขตจึงส่งผลต่อเอลิเมนต์ย่อย ๆ ที่อยู่ภายในโดเมนนั้นผ่านทางแรงยืดหยุ่น ซึ่งคุณสมบัติเฉพาะตัวของวัตถุจะถูกนำมาใช้ในการคำนวณด้วย

Johnson และ Tezduyar [24] นำเสนอวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยืดหยุ่นได้ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการคำนวณหาค่าเคลื่อนที่ของเอลิเมนต์ โดยพิจารณาทั้งโดเมนเสมือนว่าเป็นวัตถุที่ยืดหยุ่นได้ที่มีคุณสมบัติเฉพาะตัวเป็นค่าคงที่ เป็นผลให้สมการที่เกี่ยวข้องได้แก่ สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด และสมการสมดุลของวัตถุที่ได้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้น โดยนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาการสั่นของปีกเครื่องบินใน 2 มิติ นอกจากนี้ Johnson และ Tezduyar [25] ยังได้นำวิธีการสร้างเอลิเมนต์ใหม่มาประยุกต์ใช้เพิ่มเติมหลังจากการคำนวณหาค่าเคลื่อนที่ของเอลิเมนต์ด้วยวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยืดหยุ่นได้ อย่างไรก็ตามวิธีนี้มีข้อเสียคือต้องใช้ระยะเวลาในการคำนวณมากเนื่องจากต้องทำการสร้างเอลิเมนต์ใหม่ทุกครั้ง รวมถึงมีขั้นตอนที่ยุ่งยากซับซ้อน ดังนั้น Stein et al. [26] จึงนำเสนอวิธีการคำนวณหาค่าเคลื่อนที่ของเอลิเมนต์สำหรับปัญหาที่โดเมนเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างไปมากหรือขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ไปมาก โดยที่ไม่จำเป็นต้องใช้วิธีการสร้างเอลิเมนต์ใหม่ด้วยการควบคุมตัวแปรที่ขึ้นอยู่กับขนาดของเอลิเมนต์รวมถึงรูปร่างและระยะทางที่เอลิเมนต์เกิดการเปลี่ยนแปลงไป โดยกำหนดให้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กมีความแข็งแกร่งมากกว่าเอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่ ซึ่ง Stein et al. ได้ทำการทดสอบประสิทธิภาพของวิธีดังกล่าวกับปัญหาโครงสร้างอย่างง่ายที่เกิดการเคลื่อนที่ในรูปแบบต่าง ๆ

Nielsen และ Anderson [27] ได้นำวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยืดหยุ่นได้มาใช้เพื่อพัฒนาการออกแบบโครงสร้างให้ได้ผลดีที่สุดในการคำนวณด้านอากาศพลศาสตร์ (Aerodynamic) โดยประยุกต์ใช้กับปัญหาปีกเครื่องบินทั้งใน 2 และ 3 มิติ

Bar-Yoseph et al. [28] และ Hsu [29] ได้ประยุกต์ใช้วิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยืดหยุ่นได้กับปัญหาที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ไปมากใน 2 มิติโดยกำหนดให้ค่าคุณสมบัติเฉพาะตัวของวัตถุในแต่ละตำแหน่งสามารถปรับเปลี่ยนได้ อย่างไรก็ตามวิธีนี้จะส่งผลให้สมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด รวมถึงสมการสมดุลของวัตถุอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งทำให้ยากต่อการแก้ระบบสมการ

Dwight [30] ได้ทำการดัดแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ที่ใช้ในการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ด้วยวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยืดหยุ่นได้เพื่อปรับปรุงคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้ โดยทดสอบประสิทธิภาพของวิธีดังกล่าวกับปัญหาการจำลองการเคลื่อนที่ของปีกเครื่องบินใน 2 มิติ

Ferrant et al. [31] ได้นำวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยืดหยุ่นได้ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาประยุกต์ใช้กับปัญหาในทางการแพทย์ เช่นการวิเคราะห์หาการเปลี่ยนแปลงของอวัยวะภายในร่างกายแบบ 3 มิติ โดยใช้แบบจำลองเป็นวัตถุที่ยืดหยุ่นได้แบบเนื้อเดียวกันทั้งหมด (Homogeneous Elastic Bodies)

นอกจากนี้ในการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ยังสามารถนำวิธีต่าง ๆ ที่ได้กล่าวถึงไปแล้วข้างต้นมาประยุกต์ใช้รวมกันได้มากกว่า 1 วิธีดังเช่น Bartels [32] ได้นำเสนอวิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้นควบคู่ไปกับวิธี Transfinite Interpolation สำหรับปัญหาการจำลองการเคลื่อนที่ของปีกเครื่องบินใน 2 มิติด้วยเอลิเมนต์แบบมีระเบียบ โดยทำการสร้างเอลิเมนต์ด้วยวิธี Transfinite Interpolation แล้วจึงคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ด้วยวิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้น หรือการนำวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยืดหยุ่นได้มาประยุกต์ใช้ร่วมกับวิธี Transfinite Interpolation [33] โดยขั้นตอนการคำนวณเริ่มต้นจากการสร้างเอลิเมนต์จากจุดต่อที่กำหนดขึ้น ณ ตำแหน่งขอบเขตของโดเมน เอลิเมนต์ที่ถูกสร้างขึ้นนี้มีชื่อเรียกว่า Macro-element จากนั้นทำการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของ Macro-element เหล่านี้ด้วยวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยืดหยุ่นได้ แล้วจึงทำการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์



ที่เหลือทั้งหมดด้วยวิธี Transfinite Interpolation ดังนั้นการเลือกจุดต่อเพื่อสร้าง Macro-element จึงเป็นปัจจัยสำคัญที่ส่งผลต่อคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้

วิทยานิพนธ์เล่มนี้จะทำการศึกษาลักษณะและทฤษฎีของวิธีต่าง ๆ ในการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์แบบเคลื่อนย้ายเอลิเมนต์ในปัญหา 2 มิติทั้งหมด 3 วิธีด้วยกัน ได้แก่วิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้น, วิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริงและวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้ โดยในบทที่ 1 จะกล่าวถึงที่มาและความสำคัญรวมถึงภาพรวมของวิทยานิพนธ์ ในบทที่ 2 จะกล่าวถึงขั้นตอนของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งจะถูกนำมาประยุกต์ใช้ร่วมกับวิธีการหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ ในบทที่ 3 จะกล่าวถึงทฤษฎีและวิธีการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ รวมถึงทำการสร้างไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์และสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของแต่ละวิธี ซึ่งเอลิเมนต์ที่ได้จะมีรูปแบบการเคลื่อนตัวที่ต่อเนื่อง รวมถึงจุดต่อและรูปแบบการเชื่อมโยงของเอลิเมนต์จะยังคงเดิมตลอดช่วงเวลาที่ชอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ โดยในบทที่ 4 จะนำไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์และสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้มาประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ด้วยภาษาฟอร์แทรน (Fortran) โดยจะอธิบายขั้นตอนการคำนวณโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นโดยละเอียด ซึ่งในบทที่ 5 จะทดสอบความสอดคล้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นกับสมการที่ใช้ในการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ของแต่ละวิธี ซึ่งตัวอย่างการนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ไปประยุกต์ใช้กับปัญหาที่มีรูปแบบการเคลื่อนที่ของขอบเขตแตกต่างกันได้แสดงในบทที่ 6 ส่วนในบทที่ 7 จะกล่าวสรุปพร้อมทั้งเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้และข้อดี-ข้อเสียของแต่ละวิธี

### 1.3 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

- 1.3.1 ศึกษาวิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้น, วิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริงและวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้เพื่อคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์
- 1.3.2 ศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อนำมาประยุกต์ใช้ร่วมกับวิธีการหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์
- 1.3.3 ประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์และสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้น, วิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริงและวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้

- 1.3.4 ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ด้วยภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) จากไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์และสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อใช้ในการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์สำหรับปัญหาต่าง ๆ
- 1.3.5 เปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้และข้อดี-ข้อเสียของแต่ละวิธี

#### 1.4 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

- 1.4.1 คำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์โดยวิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้น, วิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริงและวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้
- 1.4.2 ประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์และสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อใช้ในการวิเคราะห์หาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ในปัญหาที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ใน 2 มิติและภายใต้สภาวะอยู่ตัว

#### 1.5 ขั้นตอนการดำเนินงาน

- 1.5.1 ศึกษาทฤษฎีที่เกี่ยวข้องสำหรับปัญหาที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่
- 1.5.2 ศึกษาวิธีการต่าง ๆ ที่ใช้ในการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ในปัญหาที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ใน 2 มิติ อันได้แก่วิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้น, วิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริงและวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้
- 1.5.3 ศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ แล้วทำการประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์และสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับวิธีการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ของแต่ละวิธี
- 1.5.4 นำไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์และสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้มาประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ด้วยภาษาฟอร์แทรน
- 1.5.5 ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นกับปัญหาที่มีรูปแบบการเคลื่อนที่อย่างง่ายและแสดงตัวอย่างการนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาในชีวิตจริง
- 1.5.6 ประยุกต์ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นกับปัญหาที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ที่มีความสลับซับซ้อนมากขึ้น

- 1.5.7 เปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์และข้อดี-ข้อเสียที่ได้จากแต่ละวิธี พร้อมทั้งสรุปผลและให้ข้อเสนอแนะเพื่อขยายผลจากวิทยานิพนธ์นี้ไปสู่การวิจัยในระดับสูงต่อไป
- 1.5.8 จัดพิมพ์และสอบวิทยานิพนธ์

## 1.6 ประโยชน์ที่ได้รับ

- 1.6.1 ก่อให้เกิดความเข้าใจในปัญหาที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ รวมถึงสามารถวิเคราะห์รูปแบบการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ในปัญหา 2 มิติได้
- 1.6.2 ก่อให้เกิดความเข้าใจถึงวิธีการที่ใช้ในการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ รวมถึงการนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาต่าง ๆ
- 1.6.3 สามารถประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์และสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับวิธีการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ และนำไปประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ด้วยภาษาฟอร์แทรนได้
- 1.6.4 สามารถนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นไปวิเคราะห์ปัญหาที่มีความสลับซับซ้อนมากขึ้นได้
- 1.6.5 เป็นแนวทางสำหรับการศึกษาและพัฒนาทางวิชาการสำหรับปัญหาการไหลที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่สำหรับผู้วิจัยต่อไปในอนาคต

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บทที่ 2

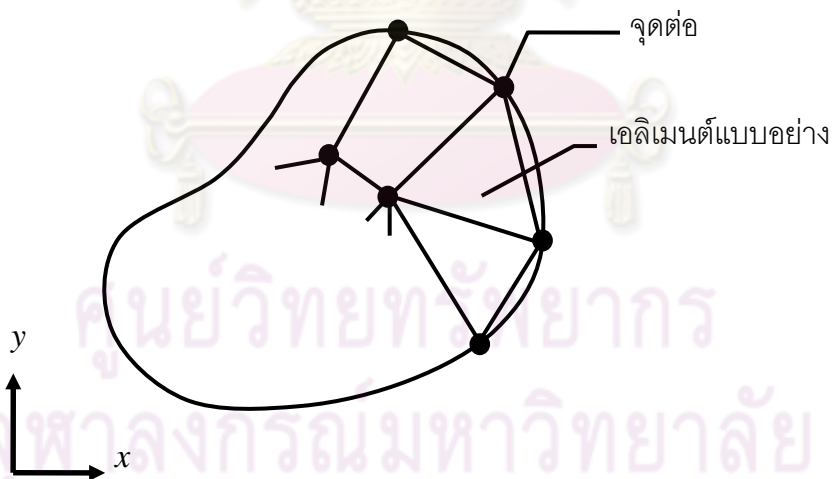
### ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

เนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงขั้นตอนของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และการหาฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ (Element Interpolation Function) แบบ 2 มิติ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ต้องนำมาใช้ในขั้นตอนการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ และนับว่าเป็นฟังก์ชันที่มีความสำคัญเนื่องจากส่งผลโดยตรงต่อความถูกต้องแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้ เนื้อหาทั้งหมดในบทที่ 2 นี้จะถูกประยุกต์ใช้กับวิธีการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ซึ่งจะกล่าวถึงในบทที่ 3 ต่อไป

#### 2.1 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วยขั้นตอนหลัก 6 ขั้นตอน [34] ดังต่อไปนี้

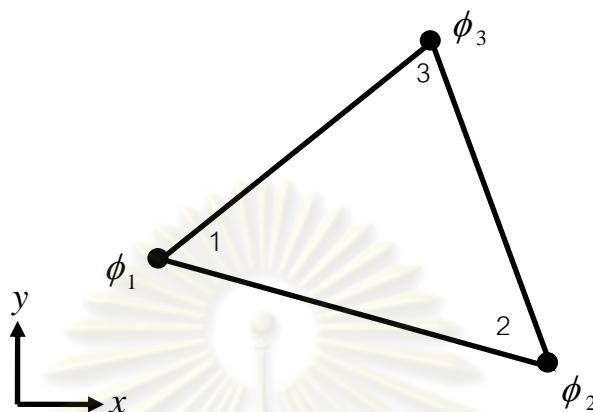
ขั้นตอนที่ 1 แบ่งขอบเขตรูปร่างลักษณะของปัญหาที่ต้องการจะหาผลลัพธ์ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ดังแสดงในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 การแบ่งขอบเขตรูปร่างลักษณะของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ แบบต่าง ๆ

ขั้นตอนที่ 2 เลือกฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ (Element Interpolation Function) ซึ่งฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์จะขึ้นอยู่กับชนิดของเอลิเมนต์ ยกตัวอย่างเช่น เอลิเมนต์สามเหลี่ยมซึ่งประกอบไปด้วย 3 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 2.2 โดยที่จุดต่อเหล่านี้เป็นตำแหน่งของตัวไม่รู้ค่า (Nodal Unknowns) ซึ่งคือ  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  และ  $\phi_3$  ลักษณะการกระจายของตัวไม่

รู้ค่าบนเอลิเมนต์นี้ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันการประมาณภายในและตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ ดังแสดงในสมการ (2.1)



รูปที่ 2.2 ตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \\ &= [N] \{\phi\}\end{aligned}\quad (2.1)$$

$(1 \times 3) \quad (3 \times 1)$

โดยที่  $[N]$  คือเมตริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์  
 $\{\phi\}$  คือเวกเตอร์เมตริกซ์ของตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ

ขั้นตอนที่ 3 สร้างสมการของแต่ละเอลิเมนต์ (Element Equations) ดังตัวอย่างเช่น สมการของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อดังแสดงในรูปที่ 2.2 จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}_e \quad (2.2)$$

ซึ่งเขียนย่อได้เป็น

$$[K]_e \{\phi\}_e = \{F\}_e \quad (2.3)$$

ขั้นตอนนี้ถือว่าเป็นหัวใจสำคัญของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ การสร้างสมการของเอลิเมนต์ซึ่งอยู่ในรูปแบบของสมการ (2.2) สามารถทำได้หลายวิธีได้แก่

ก. วิธีการโดยตรง (Direct Approach)

ข. วิธีการแปรผัน (Variational Approach)

ค. วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of Weighted Residuals)

ซึ่งการจะเลือกใช้วิธีใดขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหานั้น

ขั้นตอนที่ 4 นำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่ได้มาประกอบกัน ก่อให้เกิดระบบสมการรวม (System of Simultaneous Equations) ในรูปแบบดังนี้

$$[K]_{sys} \{\phi\}_{sys} = \{F\}_{sys} \quad (2.4)$$

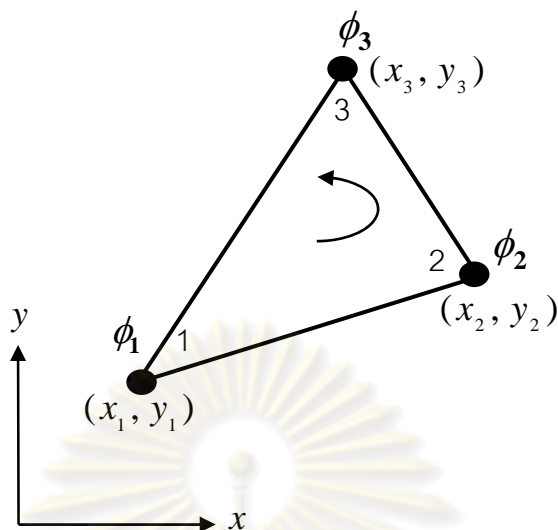
ขั้นตอนที่ 5 ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ลงในสมการ (2.4) แล้วจึงแก้สมการเพื่อหา  $\{\phi\}_{sys}$  อันประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ ซึ่งในกรณีนี้คือค่าเคลื่อนตัว (Displacement) ของเอลิเมนต์

ขั้นตอนที่ 6 เมื่อได้ค่าต่าง ๆ ที่จุดต่อออกมาแล้วจึงสามารถทำการคำนวณหาค่าอื่น ๆ ที่ต้องการทราบได้ เช่นเมื่อรู้ค่าเคลื่อนตัว ณ ตำแหน่งต่าง ๆ ของโครงสร้างก็สามารถหาความเครียด (Strain) และความเค้นได้ (Stress)

## 2.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์แบบสองมิติ

ขั้นตอนที่สำคัญขั้นตอนหนึ่งของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คือ การเลือกลักษณะของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์เนื่องจากมีผลโดยตรงต่อความถูกต้องแม่นยำของผลลัพธ์ที่คำนวณได้ ดังนั้นควรเลือกฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ที่เหมาะสม ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงลักษณะและขั้นตอนการสร้างฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์แบบสองมิติ

ปัญหาส่วนใหญ่ในสองมิติจะนิยมใช้เอลิเมนต์ที่มีลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยม (Triangular Element) ทั้งนี้ก็เพราะว่าลักษณะขอบเขตของปัญหาในสองมิติทั่ว ๆ ไปสามารถแบ่งเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมย่อย ๆ ได้โดยง่าย อีกทั้งสมการเอลิเมนต์ของรูปสามเหลี่ยมสามารถสร้างขึ้นได้ง่ายและนำไปใช้ในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยสะดวกอีกด้วย เอลิเมนต์สามเหลี่ยมพื้นฐานประกอบด้วย 3 จุดต่อคือหมายเลข 1, 2 และ 3 ซึ่งวนในทิศทวนเข็มนาฬิกา ดังแสดงในรูปที่ 2.3 โดยที่จุดต่อซึ่งอยู่ที่ตำแหน่ง  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  เป็นตำแหน่งของตัวไม่รู้ค่า  $\phi_i$  การสร้างฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจะเริ่มจากการสมมุติลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณบนเอลิเมนต์ให้อยู่ในลักษณะการกระจายแบบแผ่นเรียบ นั่นคือ



รูปที่ 2.3 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ

$$\phi(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (2.5)$$

โดย  $\alpha_i, i=1,2,3$  เป็นค่าคงตัว ซึ่งหาได้จากเงื่อนไขที่จุดต่อทั้งสาม ดังนี้

$$\text{จุดต่อ 1:} \quad \phi(x_1, y_1) = \phi_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1$$

$$\text{จุดต่อ 2:} \quad \phi(x_2, y_2) = \phi_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2$$

$$\text{จุดต่อ 3:} \quad \phi(x_3, y_3) = \phi_3 = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3$$

จาก 3 สมการนี้จะสามารถหาค่า  $\alpha_i, i=1,2,3$  ให้อยู่ในรูปของค่าที่จุดต่อ  $\phi_i$  และตำแหน่งของจุดต่อ  $(x_i, y_i)$  ซึ่งหลังจากแทนกลับลงไปนสมการ (2.5) แล้วทำการจัดพจน์ต่าง ๆ จะได้ลักษณะของการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\phi(x, y) = \begin{bmatrix} N_1(x, y) & N_2(x, y) & N_3(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \underset{(1 \times 3)}{[N]} \underset{(3 \times 1)}{\{\phi\}} \quad (2.6)$$

โดย  $[N]$  เรียกว่าเมตริกซ์ของการประมาณภายในเอลิเมนต์ (Element Interpolation Matrix) และ  $\{\phi\}$  คือเวกเตอร์ของตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ (Vector of Nodal Unknowns) และในที่นี้

$$N_i(x, y) = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.7)$$

โดย  $A =$  พื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

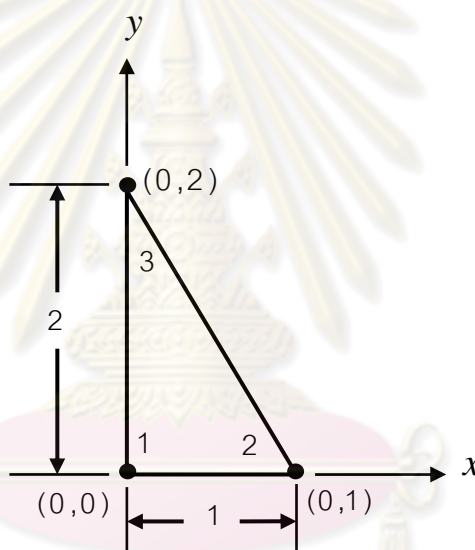
$$\text{นั่นคือ} \quad A = \frac{1}{2} [x_2(y_3 - y_1) + x_1(y_2 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)] \quad (2.8)$$

$$a_1 = x_2y_3 - x_3y_2 \quad b_1 = y_2 - y_3 \quad c_1 = x_3 - x_2$$

$$\text{และ} \quad a_2 = x_3y_1 - x_1y_3 \quad b_2 = y_3 - y_1 \quad c_2 = x_1 - x_3 \quad (2.9)$$

$$a_3 = x_1y_2 - x_2y_1 \quad b_3 = y_1 - y_2 \quad c_3 = x_2 - x_1$$

เพื่อให้เกิดความเข้าใจในลักษณะของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์มากขึ้น ให้พิจารณาเอลิเมนต์สามเหลี่ยมดังแสดงในรูปที่ 2.4 ซึ่งมีขนาดและตำแหน่งของจุดต่อต่าง ๆ ดังนี้



รูปที่ 2.4 ตัวอย่างเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

จากสมการ (2.8) จะได้พื้นที่ของเอลิเมนต์คือ  $A = \frac{1}{2} [1(2-0) + 0(0-2) + 0(0-0)]$  และจากสมการ (2.9) จะได้ค่าสัมประสิทธิ์  $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2, 3$  ดังนี้

$$a_1 = (1)(2) - (0)(0) = 2 \quad b_1 = 0 - 2 = -2 \quad c_1 = 0 - 1 = -1$$

$$a_2 = (0)(0) - (0)(2) = 0 \quad b_2 = 2 - 0 = 2 \quad c_2 = 0 - 0 = 0$$

$$a_3 = (0)(0) - (1)(0) = 0 \quad b_3 = 0 - 0 = 0 \quad c_3 = 1 - 0 = 1$$

ดังนั้น ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์นี้คือ

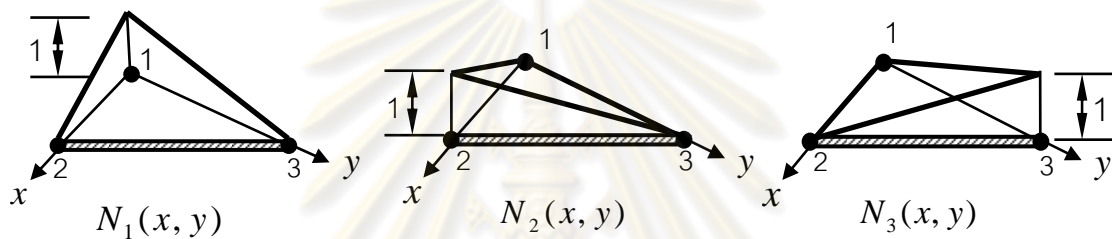


$$N_1 = \frac{1}{2(1)} (2 + (-2)x + (-1)y) = 1 - x - \frac{1}{2}y$$

$$N_2 = \frac{1}{2(1)} (0 + (2)x + (0)y) = x$$

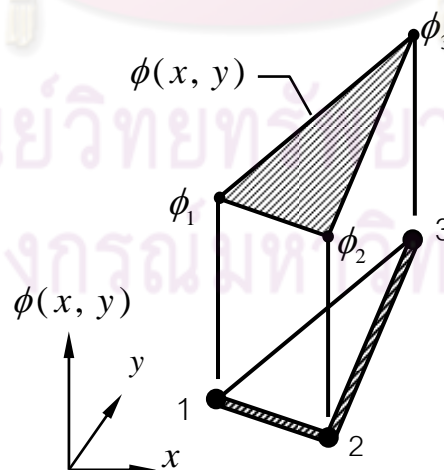
$$N_3 = \frac{1}{2(1)} (0 + (0)x + (1)y) = \frac{1}{2}y$$

ซึ่งต่างมีการกระจายในลักษณะแผ่นเรียบดังแสดงในรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 ลักษณะการกระจายของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์  $N_i$  เหล่านี้ เมื่อนำมาคูณกับค่าที่จุดต่อ  $\phi_i$  ดังแสดงในสมการ (2.6) จะก่อให้เกิดลักษณะของการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณภายในเอลิเมนต์ดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 ลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณภายในเอลิเมนต์

ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์แบบสองมิติที่ได้กล่าวมาแล้วนั้นจะถูกนำมาใช้ในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อใช้ในการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์โดยวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้ ซึ่งสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้จะถูกสร้างด้วยวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง ในขณะที่วิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้นและทอรัชันสปริงจะสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยวิธีการโดยตรง โดยปัญหาที่จะกล่าวถึงต่อไปในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ประกอบด้วยสามจุดต่อทั้งหมด สำหรับในบทต่อไปจะกล่าวถึงเทคนิควิธีต่าง ๆ ที่ใช้ในการหาค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อของเอลิเมนต์สำหรับปัญหาที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ในสองมิติ รวมถึงเกณฑ์ที่ใช้ในการวัดผลลัพธ์ของเอลิเมนต์ที่ได้ โดยจะอธิบายหลักการและขั้นตอนในการสร้างสมการของแต่ละวิธีโดยประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และการสร้างฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ที่ได้กล่าวถึงในบทนี้ ซึ่งสมการสุดท้ายที่ได้จะอยู่ในรูปแบบของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์



ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บทที่ 3

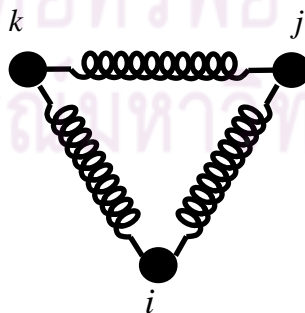
### เทคนิควิธีการหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์

เนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงแนวคิดและทฤษฎีของเทคนิควิธีการต่าง ๆ ที่ใช้ในการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ อันได้แก่ วิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้น, วิธีความคล้ายคลึงทอรัชันสปริง และวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้ โดยจะนำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และการสร้างฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ที่ได้กล่าวถึงไปแล้วในบทที่ 2 มาประยุกต์ใช้เพื่อให้ได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ในสองมิติ และในหัวข้อสุดท้ายจะกล่าวถึงเกณฑ์ที่ใช้วัดผลลัพธ์ของเอลิเมนต์ที่ได้จากแต่ละวิธี

#### 3.1 วิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้น (Lineal Spring Analogy Technique)

##### 3.1.1 หลักการและสมการพื้นฐาน

วิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้นเป็นวิธีที่เกิดขึ้นเป็นวิธีแรก ๆ และนิยมนำมาใช้ในการหาการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของเอลิเมนต์ เนื่องจากง่ายต่อการทำความเข้าใจและสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาต่าง ๆ ได้โดยสะดวก หลักการของวิธีนี้คือการติดสปริงเชิงเส้นที่ขอบแต่ละขอบของเอลิเมนต์จนครบทุกเอลิเมนต์ภายในโดเมนที่กำลังพิจารณาดังแสดงในรูปที่ 3.1 จะได้เป็นโครงข่ายของสปริงเชิงเส้นซึ่งเชื่อมจุดต่อทุกจุดต่อภายในโดเมนเข้าด้วยกัน ดังนั้นเมื่อขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่จะส่งผลให้เอลิเมนต์ย่อย ๆ ภายในโดเมนเกิดการเคลื่อนตัวไปด้วยผ่านทางแรงสปริงเชิงเส้นนี้ ซึ่งค่าเคลื่อนตัวที่ได้จะเป็นไปในทิศทางที่สอดคล้องกับการเคลื่อนที่ของขอบเขต



รูปที่ 3.1 แบบจำลองสปริงเอลิเมนต์เมื่อใช้วิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้น

สมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงสปริงเชิงเส้นและค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อของเอลิเมนต์ เรียกว่าสมการสปริงเชิงเส้น ซึ่งในกรณีปัญหาหนึ่งมิติจะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$F = k\Delta x \quad (3.1)$$

โดย  $F$  คือแรงสปริงเชิงเส้น

$k$  คือค่าความแข็งเกร็งของสปริงเชิงเส้น

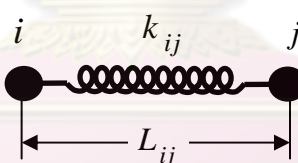
$\Delta x$  คือค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อ

ซึ่งค่าความแข็งเกร็งของสปริงเชิงเส้น  $k$  จะถูกกำหนดให้แปรผกผันกับความยาวขอบเอลิเมนต์ เช่นจากรูปที่ 3.2 จะสามารถหาค่าความแข็งเกร็งของสปริงเชิงเส้น  $k$  ของสปริงเอลิเมนต์  $ij$  ได้ ดังนี้ [13,14,15,16,18]

$$k_{ij} = \frac{1}{L_{ij}} \quad (3.2)$$

โดย  $k_{ij}$  แทนค่าความแข็งเกร็งของสปริงเชิงเส้นที่ขอบเอลิเมนต์  $ij$

$L_{ij}$  แทนความยาวขอบเอลิเมนต์  $ij$



รูปที่ 3.2 สปริงเอลิเมนต์  $ij$

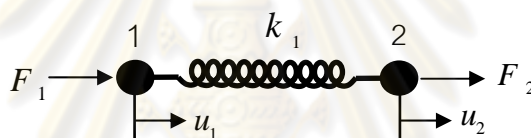
และสามารถหาค่าความแข็งเกร็งของสปริงเชิงเส้น  $k$  ของสปริงเอลิเมนต์ที่ขอบอื่น ๆ ได้ในทำนองเดียวกัน ซึ่งค่าความแข็งเกร็งของสปริงเชิงเส้น  $k$  จะไม่คงที่เมื่อความยาวขอบเอลิเมนต์เปลี่ยนแปลงไปกล่าวคือถ้าขอบเอลิเมนต์ยาวขึ้นจะทำให้ค่าความแข็งเกร็งของสปริงเชิงเส้น  $k$  มีค่าน้อยลง ในทำนองเดียวกันถ้าขอบเอลิเมนต์สั้นลงจะทำให้ค่าความแข็งเกร็งของสปริงเชิงเส้น  $k$  มีค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้นในกรณีที่ขอบเอลิเมนต์สั้นลงเรื่อย ๆ ค่าความแข็งเกร็งของสปริงเชิงเส้น  $k$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จนเข้าสู่ค่าอนันต์ ซึ่งจะช่วยป้องกันไม่ให้เกิดจุดต่อเคลื่อนที่มาชนกันได้

### 3.1.2 การแปลงเมตริกซ์ของเอลิเมนต์

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อของเอลิเมนต์โดยวิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้นในปัญหาหนึ่งมิติจะถูกสร้างขึ้นด้วยวิธีการโดยตรง โดยเริ่มจากพิจารณาที่ลักษณะของสปริงเอลิเมนต์ของแบบจำลองสปริงเชิงเส้นที่สร้างขึ้นดังเช่นในรูปที่ 3.1 จากนั้นเขียนสมการสปริงเชิงเส้นซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงสปริงกับระยะเคลื่อนตัวที่จุดต่อทั้งสอง ซึ่งสมการสปริงเชิงเส้นในหนึ่งมิติสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

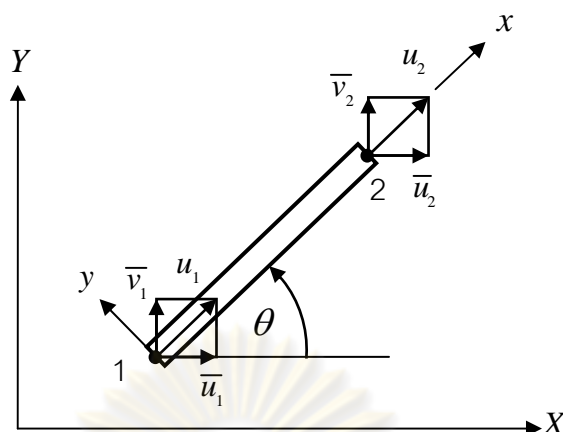
โดย  $k$  คือค่าความแข็งเกร็งของสปริงเชิงเส้น ส่วน  $F_1, F_2$  และ  $u_1, u_2$  คือแรงสปริงและค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อ 1 และ 2 ตามลำดับดังแสดงในรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 ค่าความแข็งเกร็งของสปริง, แรงสปริงและค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อของสปริงเชิงเส้นในหนึ่งมิติ

จะเห็นว่าการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของวิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้นสำหรับปัญหาหนึ่งมิติสามารถทำได้โดยง่ายไม่สลับซับซ้อน แต่โดยทั่วไปแล้วปัญหาในทางปฏิบัติมักจะอยู่ในรูปแบบสองหรือสามมิติเนื่องจากการวางตัวของสปริงเอลิเมนต์อาจทำมุม  $\theta$  ใด ๆ กับแนวระดับ ซึ่งสามารถสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในกรณีที่สปริงเอลิเมนต์วางตัวทำมุม  $\theta$  ใด ๆ กับแนวระดับได้โดยการแปลงเมตริกซ์ของเอลิเมนต์จากหนึ่งมิติเป็นสองมิติ ดังนั้นการแปลงเมตริกซ์ของเอลิเมนต์จึงเป็นสิ่งที่จำเป็นเพื่อช่วยให้การคำนวณสมการทั้งระบบมีความง่ายขึ้น

พิจารณาเอลิเมนต์ใด ๆ ที่มีจุดต่อ 1 และ 2 วางตัวทำมุม  $\theta$  กับแนวแกน  $X$  เมื่อวัดตามทิศทวนเข็มนาฬิกา ดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 ค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อในระบบแกนรวมใหญ่และแกนย่อย

โดย  $u_1$  และ  $u_2$  เป็นค่าเคลื่อนตัวของจุดต่อ 1 และ 2 ในแนวของเอลิเมนต์ ซึ่งอยู่ในทิศแกนย่อย  $x$  และ  $\bar{u}_1, \bar{v}_1$  และ  $\bar{u}_2, \bar{v}_2$  เป็นค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อ 1 และ 2 เช่นกันแต่อยู่ในทิศทางของระบบแกนรวมใหญ่  $X - Y$  ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อของระบบแกนย่อยและแกนรวมใหญ่ คือ

$$u_1 = \bar{u}_1 \cos \theta + \bar{v}_1 \sin \theta \quad (3.4)$$

และ

$$u_2 = \bar{u}_2 \cos \theta + \bar{v}_2 \sin \theta \quad (3.5)$$

ทั้งสองสมการนี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

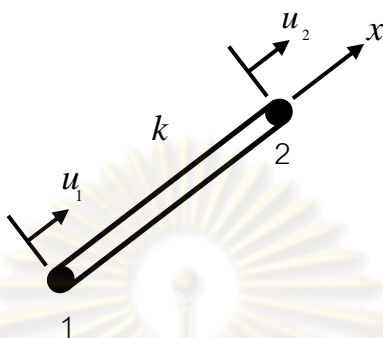
$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

ซึ่งเขียนสั้น ๆ ได้เป็น

$$\{u\}_{(2 \times 1)} = [R]_{(2 \times 4)} \{\bar{u}\}_{(4 \times 1)} \quad (3.7)$$

โดย  $\{u\}$  และ  $\{\bar{u}\}$  คือเวกเตอร์เมตริกซ์ที่ประกอบด้วยค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อในแนวแกนของเอลิเมนต์ และในแนวแกนรวมใหญ่  $X - Y$  ตามลำดับ และ  $[R]$  คือเมตริกซ์ของการแปลงค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อระหว่างแนวแกนย่อยและระบบแกนรวมใหญ่

หากเอลิเมนต์วางตัวอยู่ในแนวแกนย่อย  $x$  และค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อทั้งสองของเอลิเมนต์คือ  $u_1$  และ  $u_2$  ดังแสดงในรูปที่ 3.5 สมการของเอลิเมนต์จะมีเพียงแค่ 2 สมการเช่นเดียวกับสมการของสปริงเอลิเมนต์ นั่นคือ



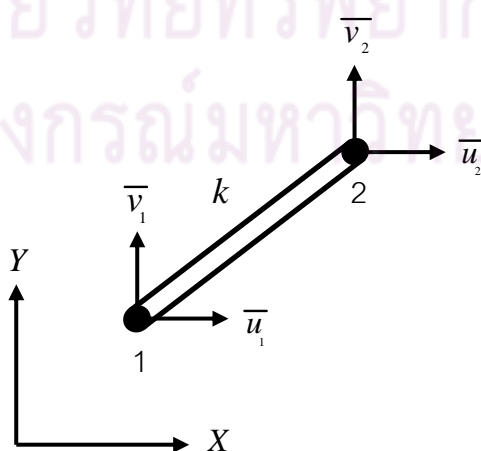
รูปที่ 3.5 เอลิเมนต์ในแนวแกนย่อย  $x$

$$k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

โดยทางด้านซ้ายมือของสมการ (3.8) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบ

$$\underset{(2 \times 2)}{[K]} \{u\} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

แต่หากเอลิเมนต์ดังกล่าวอยู่ในระบบแกนรวมใหญ่  $X - Y$  โดยที่ปลายจุดต่อมีค่าเคลื่อนตัวที่ไม่รู้ค่าอยู่ทั้งหมด 4 ค่าคือ  $\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_2$  ดังแสดงในรูปที่ 3.6 ดังนั้นสมการของเอลิเมนต์จะมีทั้งหมด 4 สมการในการทำงานเดียวกับสมการ (3.8) นั่นคือ



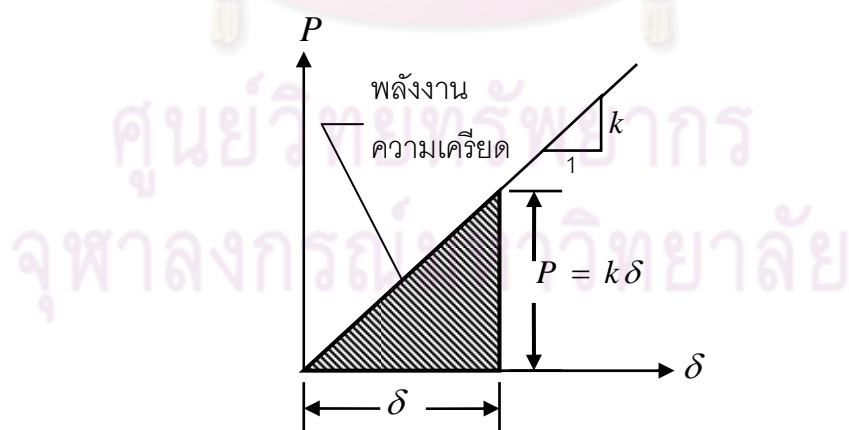
รูปที่ 3.6 เอลิเมนต์ในระบบแกนรวมใหญ่  $X - Y$

$$\begin{bmatrix} \bar{K} \\ (4 \times 4) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{u_1}^- \\ F_{v_1}^- \\ F_{u_2}^- \\ F_{v_2}^- \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

โดยทางด้านซ้ายมือของสมการ (3.10) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบ

$$\begin{bmatrix} \bar{K} \\ (4 \times 4) \end{bmatrix} \{ \bar{u} \} = \begin{bmatrix} \\ (4 \times 4) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

ในที่นี้  $[\bar{K}]$  คือเมตริกซ์ความแข็งแกร่งในระบบแกนรวมใหญ่ ซึ่งสามารถหาได้จากเมตริกซ์ความแข็งแกร่งในแนวแกนย่อย  $x$  โดยหลาย ๆ วิธี เช่นวิธีเรขาคณิตของการเคลื่อนตัว (Geometry of Displacements), วิธีการอนุรักษ์พลังงานความเครียด (Conservation of Strain Energy) เป็นต้น ซึ่งการใช้วิธีการอนุรักษ์พลังงานความเครียดเป็นวิธีที่ง่ายในการทำความเข้าใจ และสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับสมการของเอลิเมนต์ในสามมิติได้โดยตรง วิธีการนี้เริ่มจากนิยามของพลังงานความเครียด (Strain Energy) ที่ว่าหากออกแรงดึง  $P$  ลงบนสปริงที่มีค่าความแข็งแกร่งเท่ากับ  $k$  แล้วสปริงยืดตัวออกเท่ากับ  $\delta$  แล้วค่าพลังงานความเครียดสามารถหาได้จากพื้นที่สามเหลี่ยมใต้กราฟ  $P-\delta$  นั้น ดังแสดงในรูปที่ 3.7 นั่นคือ



รูปที่ 3.7 พลังงานความเครียดในสปริง

$$U = \frac{1}{2} k \delta^2 \quad (3.12)$$



โดย  $U$  แทนค่าพลังงานความเครียดเนื่องจากการยืดตัว  $\delta = u_1 - u_2$  ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} k (u_1 - u_2)^2 \\
 &= \frac{1}{2} k (u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2) \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}_{(1 \times 2)} \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_{(2 \times 1)} \\
 U &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

เมตริกซ์ความแข็งเกร็ง

ในแนวแกนย่อย  $x$

นี่คือพลังงานความเครียดในสปริงหาได้จาก

$$U = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

แต่จากสมการ (3.7) ความสัมพันธ์ระหว่างเวกเตอร์ของค่าเคลื่อนตัวในแนวแกนย่อย  $\{u\}$  และค่าเคลื่อนตัวในระบบแกนรวมใหญ่  $\{\bar{u}\}$  คือ

$$\begin{Bmatrix} u \end{Bmatrix}_{(2 \times 1)} = \begin{bmatrix} R \end{bmatrix}_{(2 \times 4)} \begin{Bmatrix} \bar{u} \end{Bmatrix}_{(4 \times 1)} \quad (3.7)$$

หากแทนสมการ (3.7) ลงในสมการ (3.13) จะได้

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \end{Bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \end{Bmatrix} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \bar{u} \end{Bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} R \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \end{bmatrix}}_{(4 \times 4)} \begin{Bmatrix} \bar{u} \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

เมตริกซ์ความแข็งเกร็ง

ในระบบแกนรวมใหญ่  $X - Y$

นั่นคือ

$$U = \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T [\bar{K}] \{\bar{u}\} \quad (3.14)$$

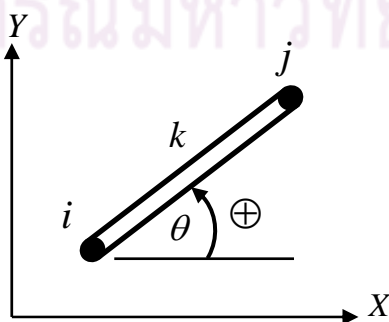
เนื่องจากพลังงานความเครียดจากสมการ (3.13) และ (3.14) จะไม่เปลี่ยนแปลงไม่ว่าสปริงจะอยู่ในระบบแกนใด ดังนั้นเมตริกซ์ความแข็งเกร็งที่มีขนาด  $(4 \times 4)$  ในระบบแกนรวมใหญ่  $X - Y$  คือ

$$\begin{aligned} [\bar{K}] &= \underset{(4 \times 4)}{[R]}^T \underset{(2 \times 2)}{[K]} \underset{(2 \times 4)}{[R]} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \\ \text{จะได้} \quad [\bar{K}] &= k \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ & \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta \\ & & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \text{Sym} & & & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (3.15) \end{aligned}$$

ดังนั้นการแปลงเมตริกซ์ของเอลิเมนต์ดังที่ได้อธิบายในหัวข้อนี้ สามารถสรุปได้ว่าหากทราบค่าเมตริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์ในระบบแกนย่อย  $x$  กล่าวคือ

$$\underset{(2 \times 2)}{[K]} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

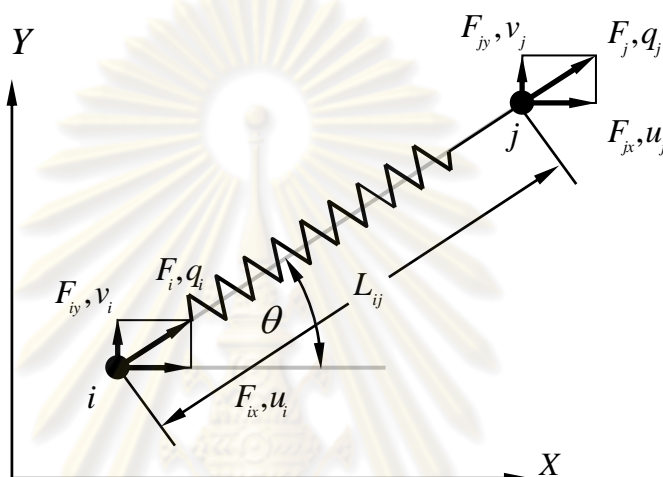
จะสามารถหาเมตริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์  $[\bar{K}]$  ในระบบแกนรวมใหญ่  $X - Y$  ได้ดังสมการ (3.15) ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์ในเมตริกซ์  $[\bar{K}]$  นี้ขึ้นอยู่กับการวางตัวของเอลิเมนต์นั้นโดยวัดด้วยมุม  $\theta$  จากแนวแกน  $X$  ในระบบแกนรวมใหญ่  $X - Y$  โดยมีค่าเป็นบวกในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ดังแสดงในรูปที่ 3.8



รูปที่ 3.8 การวางตัวของเอลิเมนต์เป็นมุม  $\theta$  โดยวัดจากแนวแกน  $X$  ซึ่งมีค่าเป็นบวกในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

### 3.1.3 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในปัญหาสองมิติ

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อของเอลิเมนต์โดยวิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้นในปัญหาสองมิติสามารถสร้างขึ้นได้จากสมการสปริงเชิงเส้นในทำนองเดียวกันกับปัญหาในหนึ่งมิติ โดยทั้งแรงสปริงและระยะเคลื่อนตัวที่จุดต่อทั้งสองจะอยู่ในทิศทางของระบบแกนรวมใหญ่  $X - Y$  ดังแสดงในรูปที่ 3.9



รูปที่ 3.9 แรงสปริงและค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อในระบบแกนรวมใหญ่  $X - Y$

โดย  $F_i, q_i$  และ  $F_j, q_j$  เป็นแรงสปริงและค่าเคลื่อนตัวในแนวขอบเอลิเมนต์ของจุดต่อ  $i$  และ  $j$  ตามลำดับ และ  $F_{ix}, u_i$  และ  $F_{iy}, v_i$  เป็นแรงสปริงและค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อ  $i$  ซึ่งอยู่ในทิศทางของระบบแกนรวมใหญ่  $X - Y$  ในแนวแกน  $X$  และ  $Y$  ตามลำดับ และในทำนองเดียวกัน  $F_{jx}, u_j$  และ  $F_{jy}, v_j$  เป็นแรงสปริงและค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อ  $j$  ในทิศทางของระบบแกนรวมใหญ่  $X - Y$  ในแนวแกน  $X$  และ  $Y$  ตามลำดับ

จากหัวข้อการแปลงเมตริกซ์ของเอลิเมนต์จะทำให้สามารถหาแรงสปริงและค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อใด ๆ ของสปริงเอลิเมนต์ในทิศทางของระบบแกนรวมใหญ่  $X - Y$  ได้ ดังนั้นในกรณีที่สปริงเอลิเมนต์วางตัวทำมุม  $\theta$  ใด ๆ กับแนวแกน  $X$  ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ดังเช่นในรูปที่ 3.9 จะได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของสปริงเอลิเมนต์แบบเชิงเส้นซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\left\{ F^{ij} \right\}_{(4 \times 1) \text{ lineal}} = \left[ K^{ij} \right]_{(4 \times 4) \text{ lineal}} \left\{ \delta^{ij} \right\}_{(4 \times 1)} \quad (3.16)$$

โดย

$$\left\{ F^{ij} \right\}_{(4 \times 1) \text{ lineal}} = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \end{Bmatrix}_{\text{lineal}} \quad (3.17)$$

= โหลดเวกเตอร์ของแรงสปริงเชิงเส้นที่จุดต่อในทิศทางระบบแกนรวมใหญ่  $X - Y$

$$\left[ K^{ij} \right]_{(4 \times 4) \text{ lineal}} = \frac{1}{L_{ij}} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ & \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta \\ \text{Sym} & & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ & & & \sin^2 \theta \end{bmatrix}_{\text{lineal}} \quad (3.18)$$

= เมตริกซ์ความแข็งเกร็งของสปริงเอลิเมนต์แบบสปริงเชิงเส้น

$$\left\{ \delta^{ij} \right\}_{(4 \times 1)} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

= เวกเตอร์ค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อในทิศทางระบบแกนรวมใหญ่  $X - Y$

จากนั้นนำสมการสปริงเอลิเมนต์นี้มาประกอบเข้าด้วยกันก่อให้เกิดระบบสมการรวมซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

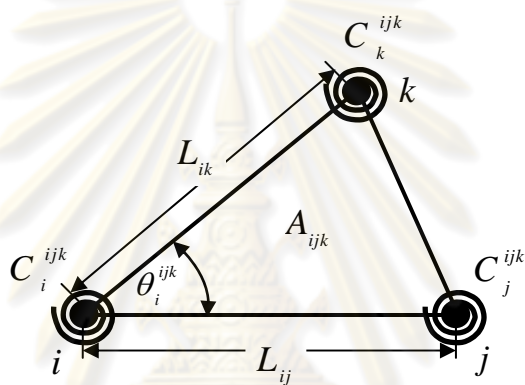
$$\left\{ F \right\}_{(n \times 1) \text{ lineal}} = \left[ K \right]_{(n \times n) \text{ lineal}} \left\{ \delta \right\}_{(n \times 1)} \quad (3.20)$$

โดย  $n$  คือจำนวนตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของทั้งระบบ การประกอบสปริงเอลิเมนต์เข้าด้วยกันมีความหมายทางกายภาพเปรียบเสมือนนำสปริงเอลิเมนต์มาประกอบกันจนได้รูปร่างรวมสุดท้ายที่ต้องการซึ่งก็คือรูปร่างโดเมนของปัญหานั้นเอง จากนั้นทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต โดยในปัญหาการไหลที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ส่วนใหญ่จะทราบค่าเคลื่อนตัวที่ขอบเขต ขั้นตอนสุดท้ายคือการแก้ระบบสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งอยู่ในรูปแบบสมการ (3.20) โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อหาค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อของเอลิเมนต์

### 3.2 วิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริง (Torsional Spring Analogy Technique)

#### 3.2.1 หลักการและสมการพื้นฐาน

วิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริงเป็นอีกวิธีหนึ่งที่ยินยมนำมาใช้ในการหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ ซึ่งถูกคิดค้นขึ้นภายหลังจากวิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้นเพื่อพัฒนาคุณภาพของเอลิเมนต์ให้ดียิ่งขึ้น โดยหลักการของวิธีนี้คือนำทอร์ชันสปริงมาติดไว้ที่แต่ละจุดต่อของเอลิเมนต์จนครบทุกเอลิเมนต์ภายในโดเมนของปัญหา แบบจำลองสปริงเอลิเมนต์ของวิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริงแสดงได้ดังรูปที่ 3.10



รูปที่ 3.10 แบบจำลองสปริงเอลิเมนต์เมื่อใช้วิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริง

โดยธรรมชาติของทอร์ชันสปริงถูกออกแบบมาเพื่อให้รับแรงบิด ดังนั้นภายใต้สภาวะที่ทอร์ชันสปริงรับแรงบิดจะทำให้เกิดโมเมนต์ที่ทอร์ชันสปริงและเกิดการเคลื่อนที่เชิงมุม สมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ของทอร์ชันสปริงและค่าเคลื่อนที่เชิงมุม เรียกว่าสมการทอร์ชันสปริง ซึ่งในกรณีปัญหาหนึ่งมิติจะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$M = C\Delta\theta \quad (3.21)$$

โดย  $M$  คือโมเมนต์ของทอร์ชันสปริง  
 $C$  คือค่าความแข็งเกร็งของทอร์ชันสปริง  
 $\Delta\theta$  คือมุมที่เปลี่ยนไปของทอร์ชันสปริง

ซึ่งค่าความแข็งเกร็งของทอร์ชันสปริงจะแปรผกผันกับมุมภายในเอลิเมนต์ พิจารณารูปที่ 3.10 ถ้ากำหนดให้  $\theta_i^{ijk}$  คือมุมที่จุดต่อ  $i$  ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ประกอบด้วยจุดต่อ  $i, j$  และ  $k$  แล้ว

จะสามารถหาค่าความแข็งเกร็งของทอร์ชันสปริงที่จุดต่อ  $i$  ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม  $ijk$  ได้ดังนี้ [15]

$$C_i^{ijk} = \frac{1}{\sin^2 \theta_i^{ijk}} \quad (3.22)$$

โดย  $C_i^{ijk}$  คือค่าความแข็งเกร็งของทอร์ชันสปริงที่จุดต่อ  $i$  ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม  $ijk$  ซึ่งค่า  $C_i^{ijk}$  นี้จะมีค่าเป็นบวกเสมอ นอกจากนี้จะสังเกตได้ว่าที่แต่ละจุดต่อ  $i$  สามารถติดทอร์ชันสปริงจำนวนเท่าใดก็ได้ขึ้นอยู่กับจำนวนเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่มาติดอยู่กับมัน

ค่า  $\sin$  ของมุม  $\theta_i^{ijk}$  ในสมการ (3.22) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของความยาวขอบเอลิเมนต์คือ  $L_{ij}$  และ  $L_{ik}$  และพื้นที่  $A_{ijk}$  ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม  $ijk$  ดังรูปที่ 3.10 ได้ดังนี้

$$\sin \theta_i^{ijk} = \frac{2A_{ijk}}{L_{ij}L_{ik}} \quad (3.23)$$

แทนสมการ (3.23) ในสมการ (3.22) จะได้ค่าความแข็งเกร็งของทอร์ชันสปริง  $C_i^{ijk}$  ในรูปของความยาวขอบเอลิเมนต์และพื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมนั้นคือ

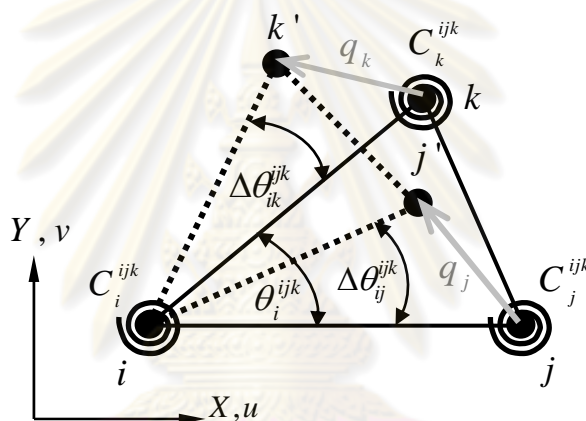
$$C_i^{ijk} = \frac{L_{ij}^2 L_{ik}^2}{4A_{ijk}^2} \quad (3.24)$$

จากสมการ (3.22) และ (3.24) จะเห็นว่าค่าความแข็งเกร็งของทอร์ชันสปริง  $C$  จะขึ้นอยู่กับมุมภายในหรือพื้นที่เอลิเมนต์ ดังนั้นในกรณี  $A \rightarrow 0$  นั่นคือ  $\theta \rightarrow \pi$  หรือ  $\theta \rightarrow 0$  จะทำให้ค่า  $C \rightarrow \infty$  กล่าวคือในขณะที่เอลิเมนต์เกิดการยุบตัวจนเหลือพื้นที่เข้าใกล้ศูนย์ ค่าความแข็งเกร็งของทอร์ชันสปริงจะเพิ่มขึ้นจนเข้าสู่ค่าอนันต์ ส่งผลให้เกิดแรงต้านการเปลี่ยนแปลงของมุมที่จุดต่อนั้น ด้วยเหตุนี้วิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริงจะสามารถป้องกันการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ได้ แม้ว่าเอลิเมนต์จะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างไปมากก็ตาม

### 3.2.2 จลนศาสตร์ (Kinematics) ของทอร์ชันสปริง

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงลักษณะและสมการที่ใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของแบบจำลองทอร์ชันสปริง ซึ่งสมการที่ได้จะถูกนำไปใช้ในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริงในหัวข้อถัดไป

เพื่อให้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อโดยวิธีความคล้ายคลึงทอรัสั้นสปริงอยู่ในรูปแบบสมการเชิงเส้น (Linear Equations) ดังนั้นจึงกำหนดให้ค่าเคลื่อนตัวและมุมที่เปลี่ยนไปที่จุดต่อเปลี่ยนแปลงไปเพียงเล็กน้อย แต่เนื่องจากปัญหาที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ส่วนใหญ่พบว่าขอบเขตของปัญหาจะเคลื่อนที่ไปมากหรือโดเมนเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างไปมาก ดังนั้นจึงต้องทำการแบ่งระยะทางที่ขอบเขตเคลื่อนที่ไปออกเป็นช่วงย่อย ๆ เพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าว รูปที่ 3.11 แสดงการเคลื่อนที่และการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของสปริงเอลิเมนต์ โดยเส้นเต็มแสดงตำแหน่งของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม  $ijk$  และเส้นประแสดงตำแหน่งภายหลังจากที่เอลิเมนต์นี้เคลื่อนตัวไปด้วยระยะทาง  $\vec{q}$  จากจุดต่อ  $j$  และ  $k$  ไปสู่ตำแหน่งใหม่  $j'$  และ  $k'$  ตามลำดับ



รูปที่ 3.11 การเคลื่อนที่และการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของเอลิเมนต์

เมื่อกำหนดให้  $x$  และ  $y$  เป็นเวกเตอร์ย่อยของเวกเตอร์บอกตำแหน่ง  $\vec{P}$  ส่วน  $u$  และ  $v$  เป็นเวกเตอร์ย่อยของเวกเตอร์การกระจัด  $\vec{q}$  นั่นคือ

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

และ  $\Delta\theta_{ik}^{ijk}$  แทนมุมที่เปลี่ยนไปที่จุดต่อ  $k$  เมื่อเทียบกับจุดต่อ  $i$  ซึ่งสามารถหาได้จากผลคูณเชิงเวกเตอร์ (Cross Product) นั่นคือ

$$\|\vec{ik} \times \vec{ik}'\| = \|\vec{ik}\| \|\vec{ik}'\| \sin \Delta\theta_{ik}^{ijk}$$

จะได้

$$\sin \Delta\theta_{ik}^{ijk} = \frac{\|\vec{ik} \times \vec{ik}'\|}{\|\vec{ik}\| \|\vec{ik}'\|} \quad (3.26)$$

โดย 
$$\begin{aligned}\bar{ik} &= (x_k \bar{i} + y_k \bar{j}) - (x_i \bar{i} + y_i \bar{j}) \\ \bar{ik} &= (x_k - x_i) \bar{i} + (y_k - y_i) \bar{j} \\ \bar{ik} &= x_{ik} \bar{i} + y_{ik} \bar{j}\end{aligned}\tag{3.27}$$

และ 
$$\begin{aligned}\bar{ik}' &= \bar{ik} + \bar{q}_k \\ \bar{ik}' &= (x_{ik} \bar{i} + y_{ik} \bar{j}) + (u_k \bar{i} + v_k \bar{j}) \\ \bar{ik}' &= (x_{ik} + u_k) \bar{i} + (y_{ik} + v_k) \bar{j}\end{aligned}\tag{3.28}$$

จะได้ 
$$\begin{aligned}\bar{ik} \times \bar{ik}' &= (x_{ik} (y_{ik} + v_k) - y_{ik} (x_{ik} + u_k)) \bar{k} \\ \bar{ik} \times \bar{ik}' &= (x_{ik} y_{ik} + x_{ik} v_k - y_{ik} x_{ik} - y_{ik} u_k) \bar{k} \\ \bar{ik} \times \bar{ik}' &= (x_{ik} v_k - y_{ik} u_k) \bar{k}\end{aligned}$$

ดังนั้น 
$$\|\bar{ik} \times \bar{ik}'\| = x_{ik} v_k - y_{ik} u_k \tag{3.29}$$

แทนสมการ (3.29) ลงไปในสมการ (3.26) และเนื่องจาก  $\|\bar{ik}\| = \|\bar{ik}'\| = L_{ik}$  ดังนั้นจะได้

$$\sin \Delta \theta_{ik}^{ijk} = \frac{x_{ik} v_k - y_{ik} u_k}{L_{ik}^2} \tag{3.30}$$

เนื่องจากกำหนดให้เอลิเมนต์เคลื่อนตัวไปด้วยระยะทางและมุมที่มีค่าน้อยมาก ๆ นั่นคือ  $\sin \Delta \theta_{ik}^{ijk} \approx \Delta \theta_{ik}^{ijk}$  ดังนั้นจากสมการ (3.30) จะได้

$$\Delta \theta_{ik}^{ijk} = a_{ik} v_k - b_{ik} u_k \tag{3.31}$$

โดย 
$$a_{ik} = \frac{x_{ik}}{L_{ik}^2}, \quad b_{ik} = \frac{y_{ik}}{L_{ik}^2} \tag{3.32}$$

ในการทำงานเดียวกันสามารถหามุมที่เปลี่ยนไปที่จุดต่อ  $j$  เมื่อเทียบกับจุดต่อ  $i$  หรือ  $\Delta \theta_{ij}^{ijk}$  ได้นั้นคือ

$$\Delta \theta_{ij}^{ijk} = -a_{ij} v_j + b_{ij} u_j \tag{3.33}$$

โดย 
$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{L_{ij}^2}, \quad b_{ij} = \frac{y_{ij}}{L_{ij}^2} \tag{3.34}$$

ดังนั้นที่จุดต่อ  $i$  มุมที่เปลี่ยนไปทั้งหมดเนื่องจากเอลิเมนต์เคลื่อนตัวหาได้จาก



$$\Delta\theta_i^{ijk} = \Delta\theta_{ii}^{ijk} + \Delta\theta_{ij}^{ijk} + \Delta\theta_{ik}^{ijk} \quad (3.35)$$

ซึ่ง  $\Delta\theta_{ii}^{ijk}$  สามารถหาได้โดยการสร้างสมการที่มีรูปแบบคล้ายคลึงกับสมการ (3.31), (3.33) ดังนี้

$$\Delta\theta_{ii}^{ijk} = \gamma v_i + \beta u_i \quad (3.36)$$

โดย  $\gamma$  และ  $\beta$  เป็นค่าคงที่ที่ไม่ทราบค่า เมื่อแทนสมการ (3.31), (3.33) และ (3.36) ลงในสมการ (3.35) จะได้

$$\Delta\theta_i^{ijk} = \gamma v_i + \beta u_i - a_{ij} v_j + b_{ij} u_j + a_{ik} v_k - b_{ik} u_k \quad (3.37)$$

ค่าคงที่  $\gamma$  และ  $\beta$  สามารถหาได้โดยการกำหนดให้เอลิเมนต์นี้เปลี่ยนแปลงแบบเลื่อนที่ (Translate) เท่านั้น นั่นคือเคลื่อนตัวไปในแนวแกน  $X$  ด้วยระยะทาง  $u_i = u_j = u_k = u$  และในแนวแกน  $Y$  ด้วยระยะทาง  $v_i = v_j = v_k = v$  ดังนั้นมุมที่เปลี่ยนไปทั้งหมดที่จุดต่อ  $i$  จึงมีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือจากสมการ (3.37) จะได้ว่า

$$\Delta\theta_i^{ijk} = (\gamma - a_{ij} + a_{ik})v + (\beta + b_{ij} - b_{ik})u = 0 \quad (3.38)$$

นั่นคือ 
$$\gamma - a_{ij} + a_{ik} = 0 \Rightarrow \gamma = a_{ij} - a_{ik} \quad (3.39)$$

$$\beta + b_{ij} - b_{ik} = 0 \Rightarrow \beta = -b_{ij} + b_{ik} \quad (3.40)$$

แทนสมการ (3.39)-(3.40) ลงในสมการ (3.37) ดังนั้นจะได้มุมที่เปลี่ยนไปทั้งหมดที่จุดต่อ  $i$  เนื่องจากเอลิเมนต์สามเหลี่ยม  $ijk$  เคลื่อนตัวคือ

$$\Delta\theta_i^{ijk} = (b_{ik} - b_{ij})u_i + (a_{ij} - a_{ik})v_i + b_{ij}u_j - a_{ij}v_j - b_{ik}u_k + a_{ik}v_k \quad (3.41)$$

ในทำนองเดียวกัน สามารถหามุมที่เปลี่ยนไปทั้งหมดที่จุดต่อ  $j$  และ  $k$  เนื่องจากเอลิเมนต์สามเหลี่ยม  $ijk$  เคลื่อนตัวได้ดังนี้

$$\Delta\theta_j^{ijk} = (b_{ji} - b_{jk})u_j + (a_{jk} - a_{ji})v_j + b_{jk}u_k - a_{jk}v_k - b_{ji}u_i + a_{ji}v_i \quad (3.42)$$

$$\Delta\theta_k^{ijk} = (b_{kj} - b_{ki})u_k + (a_{ki} - a_{kj})v_k + b_{ki}u_i - a_{ki}v_i - b_{kj}u_j + a_{kj}v_j \quad (3.43)$$

ซึ่งสมการ (3.41)-(3.43) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\left\{ \Delta\theta^{ijk} \right\}_{(3 \times 1)} = \left[ R^{ijk} \right]_{(3 \times 6)} \left\{ \delta^{ijk} \right\}_{(6 \times 1)} \quad (3.44)$$

$$\text{โดย } \left\{ \Delta \theta^{ijk} \right\}_{(3 \times 1)} = \begin{Bmatrix} \Delta \theta_i^{ijk} \\ \Delta \theta_j^{ijk} \\ \Delta \theta_k^{ijk} \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

= เวกเตอร์มุมที่เปลี่ยนไปทั้งหมดที่จุดต่อ

$$\left[ R^{ijk} \right]_{(3 \times 6)} = \begin{bmatrix} b_{ik} - b_{ij} & a_{ij} - a_{ik} & b_{ij} & -a_{ij} & -b_{ik} & a_{ik} \\ -b_{ji} & a_{ji} & b_{ji} - b_{jk} & a_{jk} - a_{ji} & b_{jk} & -a_{jk} \\ b_{ki} & -a_{ki} & -b_{kj} & a_{kj} & b_{kj} - b_{ki} & a_{ki} - a_{kj} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

= เมตริกซ์การแปลงค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อระหว่างเชิงมุมและเชิงเส้น

$$\left\{ \delta^{ijk} \right\}_{(6 \times 1)} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

= เวกเตอร์ค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อในระบบแกนรวมใหญ่  $X - Y$

สมการ (3.44) เป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อของเอลิเมนต์ในรูปแบบเชิงมุมและเชิงเส้น ซึ่งจะถูกนำไปใช้ในการสร้างไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์และสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังที่จะกล่าวในหัวข้อถัดไป

### 3.2.3 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในปัญหาสองมิติ

ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์และสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของวิธีความคล้ายคลึงทอรัสชั้นสปริงจะถูกสร้างด้วยวิธีการโดยตรง โดยเริ่มพิจารณาจากสมการทอรัสชั้นสปริงในสมการ (3.21) ซึ่งในกรณีปัญหาสองมิติสามารถเขียนสมการทอรัสชั้นสปริงในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\left\{ M^{ijk} \right\}_{(3 \times 1)} = \left[ C^{ijk} \right]_{(3 \times 3)} \left\{ \Delta \theta^{ijk} \right\}_{(3 \times 1)} \quad (3.48)$$

$$\text{โดย } \left\{ M^{ijk} \right\}_{(3 \times 1)} = \begin{Bmatrix} M_i^{ijk} \\ M_j^{ijk} \\ M_k^{ijk} \end{Bmatrix} \quad (3.49)$$

= เวกเตอร์โมเมนต์ของทอรัสชั้นสปริงที่จุดต่อ

$$[C^{ijk}]_{(3 \times 3)} = \begin{bmatrix} C_i^{ijk} & 0 & 0 \\ 0 & C_j^{ijk} & 0 \\ 0 & 0 & C_k^{ijk} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

= เมตริกซ์ความแข็งเกร็งของสปริงเอลิเมนต์แบบทอร์ชันสปริง

$$\{\Delta\theta^{ijk}\}_{(3 \times 1)} = \begin{Bmatrix} \Delta\theta_i^{ijk} \\ \Delta\theta_j^{ijk} \\ \Delta\theta_k^{ijk} \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

= เวกเตอร์มุมที่เปลี่ยนไปทั้งหมดที่จุดต่อ

แทนค่า  $\{\Delta\theta^{ijk}\}$  จากสมการ (3.44) ลงในสมการ (3.48) จะได้สมการโมเมนต์ของทอร์ชันสปริงดังนี้

$$\{M^{ijk}\} = ([C^{ijk}][R^{ijk}])\{\delta^{ijk}\} \quad (3.52)$$

ทั้งนี้เพื่อความสะดวกในการคำนวณและต้องการให้สมการ (3.52) อยู่ในรูปแบบเดียวกันกับสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของวิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้น จึงต้องทำการแปลงโมเมนต์ที่แต่ละจุดต่อให้อยู่ในรูปของแรงในระบบแกนรวมใหญ่  $X-Y$  โดยสมการที่ใช้ในการแปลงเมตริกซ์ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงในระบบแกนรวมใหญ่  $X-Y$  และโมเมนต์ที่จุดต่อสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\{F^{ijk}\}_{(6 \times 1) \text{ torsion}} = [T^{ijk}]_{(6 \times 3)} \{M^{ijk}\}_{(3 \times 1)} \quad (3.53)$$

โดย

$$\{F^{ijk}\}_{(6 \times 1) \text{ torsion}} = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ F_{kx} \\ F_{ky} \end{Bmatrix}_{\text{torsion}} \quad (3.54)$$

= เวกเตอร์แรงทอร์ชันสปริงที่จุดต่อในทิศทางระบบแกนรวมใหญ่  $X-Y$

และ  $[T^{ijk}]$  คือเมตริกซ์การแปลงค่าระหว่างแรงในระบบแกนรวมใหญ่  $X-Y$  กับโมเมนต์ที่จุดต่อ ซึ่งสามารถหาได้จากเงื่อนไขที่ว่า "งานที่กระทำโดยแรงในระบบแกนรวมใหญ่  $X-Y$  จะต้องเท่ากับงานที่กระทำโดยโมเมนต์" นั่นคือ

$$\{F^{ijk}\}_{torsion}^T \{\delta^{ijk}\} = \{M^{ijk}\}^T \{\Delta\theta^{ijk}\} \quad (3.55)$$

โดย  $\{F^{ijk}\}_{torsion}^T$  และ  $\{M^{ijk}\}^T$  คือเมตริกซ์สลับเปลี่ยน (Transposed Matrix) ของ  $\{F^{ijk}\}_{torsion}$  และ  $\{M^{ijk}\}$  ตามลำดับ จากนั้นแทนสมการ (3.44) และ (3.53) ในสมการ (3.55) จะได้

$$\{M^{ijk}\}^T [T^{ijk}]^T \{\delta^{ijk}\} = \{M^{ijk}\}^T [R^{ijk}] \{\delta^{ijk}\} \quad (3.56)$$

ดังนั้น 
$$[T^{ijk}] = [R^{ijk}]^T \quad (3.57)$$

แทนสมการ (3.52) และ (3.57) ลงในสมการ (3.53) จะได้ว่าในแต่ละเอลิเมนต์สามเหลี่ยมมุมมนั้น โมเมนต์ที่แต่ละจุดต่อสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแรงในระบบแกนรวมใหญ่  $X-Y$  ที่แต่ละจุดต่อได้ ดังนี้

$$\{F^{ijk}\}_{torsion} = \underbrace{([R^{ijk}]^T [C^{ijk}] [R^{ijk}])}_{\text{เมตริกซ์ความแข็งเกร็งของสปริงเอลิเมนต์แบบทอร์ชันสปริงในระบบแกนรวมใหญ่ } X-Y} \{\delta^{ijk}\} \quad (3.58)$$

เมตริกซ์ความแข็งเกร็งของสปริงเอลิเมนต์แบบ

ทอร์ชันสปริงในระบบแกนรวมใหญ่  $X-Y$

จะได้ 
$$\underbrace{\{F^{ijk}\}}_{(6 \times 1)} \underbrace{\}_{torsion}}_{(6 \times 6)} = \underbrace{[K^{ijk}]}_{(6 \times 6)} \underbrace{\}_{torsion}}_{(6 \times 6)} \underbrace{\{\delta^{ijk}\}}_{(6 \times 1)} \quad (3.59)$$

สมการ (3.59) คือสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของสปริงเอลิเมนต์แบบทอร์ชันสปริงนั่นเอง ซึ่งอยู่ในรูปแบบเดียวกันกับสมการสปริงเอลิเมนต์แบบเชิงเส้นในสมการ (3.16) โดย  $[K^{ijk}]_{torsion}$  คือ

เมตริกซ์ความแข็งเกร็งของสปริงเอลิเมนต์แบบทอร์ชันสปริงในระบบแกนรวมใหญ่  $X-Y$  ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ ของ  $[K^{ijk}]_{torsion}$  สามารถคำนวณได้ดังนี้

จากสมการ (3.58) จะได้

$$[K^{ijk}]_{torsion} = [R^{ijk}]^T [C^{ijk}] [R^{ijk}] \quad (3.60)$$

โดย 
$$[C^{ijk}] = \begin{bmatrix} C_i^{ijk} & 0 & 0 \\ 0 & C_j^{ijk} & 0 \\ 0 & 0 & C_k^{ijk} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

$$\text{และ } [R^{ijk}] = \begin{bmatrix} b_{ik} - b_{ij} & a_{ij} - a_{ik} & b_{ij} & -a_{ij} & -b_{ik} & a_{ik} \\ -b_{ji} & a_{ji} & b_{ji} - b_{jk} & a_{jk} - a_{ji} & b_{jk} & -a_{jk} \\ b_{ki} & -a_{ki} & -b_{kj} & a_{kj} & b_{kj} - b_{ki} & a_{ki} - a_{kj} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

เนื่องจาก  $a_{ij} = -a_{ji}$ ,  $a_{ik} = -a_{ki}$  และเช่นเดียวกันกับ  $b$  ดังนั้นจำนวนสัมประสิทธิ์  $a$  และ  $b$  จากเดิมทั้งหมด 12 ตัว จึงเหลือเพียง 6 ตัว และสามารถเขียน  $[R^{ijk}]$  ใหม่ได้ดังนี้

$$[R^{ijk}] = \begin{bmatrix} b_{ik} - b_{ij} & a_{ij} - a_{ik} & b_{ij} & -a_{ij} & -b_{ik} & a_{ik} \\ b_{ij} & -a_{ij} & -b_{ij} - b_{jk} & a_{jk} + a_{ij} & b_{jk} & -a_{jk} \\ -b_{ik} & a_{ik} & b_{jk} & -a_{jk} & b_{ik} - b_{jk} & a_{jk} - a_{ik} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

ดังนั้น  $[K^{ijk}]_{\text{torsion}}$  ซึ่งเป็นเมตริกซ์สมมาตรขนาด  $6 \times 6$  สามารถเขียนได้ดังนี้

$$[K^{ijk}]_{\text{torsion}} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์ของ  $[K^{ijk}]_{\text{torsion}}$  แต่ละตัวหาได้จากสูตรดังนี้

$$\begin{aligned} K_{11} &= C_i^{ijk} (b_{ik} - b_{ij})^2 + C_j^{ijk} b_{ij}^2 + C_k^{ijk} b_{ik}^2 \\ K_{12} = K_{21} &= C_i^{ijk} (a_{ij} - a_{ik})(b_{ik} - b_{ij}) - C_j^{ijk} a_{ij} b_{ij} - C_k^{ijk} a_{ik} b_{ik} \\ K_{13} = K_{31} &= C_i^{ijk} b_{ij} (b_{ik} - b_{ij}) - C_j^{ijk} b_{ij} (b_{ij} + b_{jk}) - C_k^{ijk} b_{ik} b_{jk} \\ K_{14} = K_{41} &= -C_i^{ijk} a_{ij} (b_{ik} - b_{ij}) + C_j^{ijk} (a_{jk} + a_{ij}) b_{ij} - C_k^{ijk} a_{ik} b_{ik} \\ K_{15} = K_{51} &= -C_i^{ijk} b_{ik} (b_{ik} - b_{ij}) + C_j^{ijk} b_{ij} b_{jk} - C_k^{ijk} b_{ik} (b_{ik} - b_{jk}) \\ K_{16} = K_{61} &= C_i^{ijk} a_{ik} (b_{ik} - b_{ij}) + C_j^{ijk} a_{jk} b_{ij} - C_k^{ijk} (a_{jk} - a_{ik}) b_{ik} \\ K_{22} &= C_i^{ijk} (a_{ij} - a_{ik})^2 + C_j^{ijk} a_{ij}^2 + C_k^{ijk} a_{ik}^2 \\ K_{23} = K_{32} &= C_i^{ijk} (a_{ij} - a_{ik}) b_{ij} + C_j^{ijk} a_{ij} (b_{ij} + b_{jk}) + C_k^{ijk} a_{ik} b_{jk} \\ K_{24} = K_{42} &= -C_i^{ijk} a_{ij} (a_{ij} - a_{ik}) - C_j^{ijk} a_{ij} (a_{jk} + a_{ij}) - C_k^{ijk} a_{ik} a_{jk} \\ K_{25} = K_{52} &= -C_i^{ijk} (a_{ij} - a_{ik}) b_{ik} - C_j^{ijk} a_{ij} b_{jk} - C_k^{ijk} a_{ik} (b_{ik} - b_{jk}) \\ K_{26} = K_{62} &= C_i^{ijk} a_{ik} (a_{ij} - a_{ik}) + C_j^{ijk} a_{ij} a_{jk} - C_k^{ijk} a_{ik} (a_{jk} - a_{ik}) \\ K_{33} &= C_i^{ijk} b_{ij}^2 + C_j^{ijk} (b_{ij} + b_{jk})^2 + C_k^{ijk} b_{jk}^2 \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned}
K_{34} = K_{43} &= -C_i^{ijk} a_{ij} b_{ij} - C_j^{ijk} (a_{jk} + a_{ij})(b_{ij} + b_{jk}) - C_k^{ijk} a_{jk} b_{jk} \\
K_{35} = K_{53} &= -C_i^{ijk} b_{ij} b_{ik} - C_j^{ijk} b_{jk} (b_{ij} + b_{jk}) + C_k^{ijk} b_{jk} (b_{ik} - b_{jk}) \\
K_{36} = K_{63} &= C_i^{ijk} a_{ik} b_{ij} + C_j^{ijk} a_{jk} (b_{ij} + b_{jk}) + C_k^{ijk} (a_{jk} - a_{ik}) b_{jk} \\
K_{44} &= C_i^{ijk} a_{ij}^2 + C_j^{ijk} (a_{jk} - a_{ij})^2 + C_k^{ijk} a_{jk}^2 \\
K_{45} = K_{54} &= C_i^{ijk} a_{ij} b_{ik} + C_j^{ijk} (a_{jk} - a_{ij}) b_{jk} - C_k^{ijk} a_{jk} (b_{ik} - b_{jk}) \\
K_{46} = K_{64} &= -C_i^{ijk} a_{ij} a_{ik} - C_j^{ijk} a_{jk} (a_{jk} - a_{ij}) - C_k^{ijk} a_{jk} (a_{jk} - a_{ik}) \\
K_{55} &= C_i^{ijk} b_{ik}^2 + C_j^{ijk} b_{jk}^2 + C_k^{ijk} (b_{ik} - b_{jk})^2 \\
K_{56} = K_{65} &= -C_i^{ijk} a_{ij} b_{ik} - C_j^{ijk} a_{jk} b_{jk} + C_k^{ijk} (a_{jk} - a_{ik})(b_{ik} - b_{jk}) \\
K_{66} &= C_i^{ijk} a_{ik}^2 + C_j^{ijk} a_{jk}^2 + C_k^{ijk} (a_{jk} - a_{ik})^2
\end{aligned}$$

ขั้นตอนการคำนวณโดยเทคนิควิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริงจะประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เช่นเดียวกับเทคนิควิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้น กล่าวคือนำสมการสปริงเอลิเมนต์ที่ได้จากสมการ (3.59) มาประกอบเข้าด้วยกันก่อให้เกิดระบบสมการรวม ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\{F\}_{(n \times 1) \text{ torsion}} = [K]_{(n \times n) \text{ torsion}} \{\delta\}_{(n \times 1)} \quad (3.66)$$

โดย  $n$  คือจำนวนตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของทั้งระบบ การประกอบสปริงเอลิเมนต์เข้าด้วยกันเปรียบเสมือนนำสปริงเอลิเมนต์มาประกอบกันจนได้รูปร่างรวมสุดท้ายที่ต้องการซึ่งก็คือรูปร่างโดเมนของปัญหานั้นเอง จากนั้นทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตเช่นเดียวกับเทคนิควิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้น โดยในปัญหาการไหลที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ส่วนใหญ่จะทราบค่าเคลื่อนที่ที่ขอบเขต ขั้นตอนสุดท้ายคือการแก้ระบบสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งอยู่ในรูปแบบสมการ (3.66) โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อหาค่าเคลื่อนที่ที่จุดต่อของเอลิเมนต์

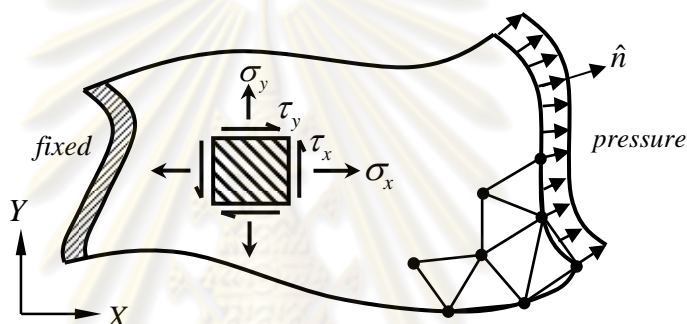
### 3.3 วิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยืดหยุ่นได้ (Elastic Medium Analogy Technique)

#### 3.3.1 หลักการและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

วิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยืดหยุ่นได้จะมองเอลิเมนต์แต่ละเอลิเมนต์ว่าเป็นวัตถุที่มีความยืดหยุ่น ซึ่งจะแตกต่างจากวิธีความคล้ายคลึงสปริงที่นำสปริงเชิงเส้นและทอร์ชัน

สปริงมาติดไว้ที่ขอบและจุดต่อของเอลิเมนต์ตามลำดับ ดังนั้นเมื่อขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่หรือโดเมนเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างจะส่งผลต่อเอลิเมนต์ย่อย ๆ ที่อยู่ภายในโดเมนนั้นผ่านทางแรงยึดหยุ่น ซึ่งวิธีนี้ค่าคุณสมบัติเฉพาะตัวต่าง ๆ ของวัตถุ (Material Properties) ได้แก่ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่นและอัตราส่วนของปัวส์ซง จะถูกนำมาใช้ในการคำนวณด้วย อย่างไรก็ตามวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้ยังไม่ได้รับความนิยมมากเท่ากับวิธีความคล้ายคลึงสปริงทั้งสองแบบดังที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยซึ่งแสดงความสมดุลของแรงในแนวแกน  $x$  และ  $y$  ของของแข็งที่มีการยึดหยุ่นได้ โดยที่ไม่พิจารณามวลของของแข็งดังแสดงในรูปที่ 3.12 คือ



รูปที่ 3.12 ขอบเขตและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาของแข็งที่ยึดหยุ่นได้

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (3.68)$$

โดย  $\sigma_x$  และ  $\sigma_y$  แทนค่าความเค้นฉาก (Normal Stress) ในแนวแกน  $X$  และ  $Y$  ตามลำดับ ส่วน  $\tau_{xy}$  แทนค่าความเค้นเฉือน (Shearing Stress) โดยที่ตลอดผิวรอบนอกของของแข็งอาจประกอบด้วยเงื่อนไขขอบเขตของการกำหนดค่าเคลื่อนตัว  $u$  และ  $v$  ในแนวแกน  $X$  และ  $Y$  ตามลำดับ หรืออาจกำหนดความเค้นที่ผิว (Surface Traction) เช่นความดันหรือแรงเสียดทานที่ผิว ซึ่งอยู่ในรูปแบบสมการ (3.69) โดยทั่วไปแล้วเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่จะกำหนดเป็นค่าเคลื่อนตัวที่ขอบเขต

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad (3.69)$$

โดย  $T_x$  และ  $T_y$  แทนความเค้นที่ผิวในแนวแกน  $X$  และ  $Y$  ตามลำดับ ส่วน  $n_x$  และ  $n_y$  เป็นทิศทางโคไซน์ของเวกเตอร์  $\hat{n}$  ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับผิว ณ จุดที่กำลังพิจารณา

สมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นย่อยและความเครียดย่อยสามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\{\sigma\}_{(3 \times 1)} = [C]_{(3 \times 3)} \{\varepsilon\}_{(3 \times 1)} \quad (3.70)$$

โดย

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.71)$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.72)$$

ซึ่ง  $\varepsilon_x$  และ  $\varepsilon_y$  แทนค่าความเครียดฉาก (Normal Strain) ในแนวแกน  $X$  และแกน  $Y$  ตามลำดับ และ  $\gamma_{xy}$  แทนค่าความเครียดเฉือน (Shearing Strain) ส่วน  $[C]$  คือเมตริกซ์ความยืดหยุ่นของเอลิเมนต์ ซึ่งขึ้นอยู่กับการสมมติจำแนกลักษณะของปัญหาว่าเป็นปัญหาความเค้นในระนาบ (Plane Stress) หรือความเครียดในระนาบ (Plane Strain)

ในกรณีปัญหาความเค้นในระนาบซึ่งใช้กับปัญหาแผ่นระนาบบาง โดยตั้งอยู่บนสมมติฐานที่ว่าความเค้นในทิศทางผ่านความหนาของแผ่นนั้นน้อยมากและกำหนดให้มีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือค่าความเค้นในแนวแกน  $Z$  จะถูกสมมติให้มีค่าเป็นศูนย์ จะได้  $[C]$  ในกรณีปัญหาความเค้นในระนาบคือ

$$C = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

ดังนั้นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นย่อยและความเครียดย่อยดังสมการ (3.70) จะอยู่ในรูปแบบดังนี้



$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.74)$$

โดย  $E$  แทนค่าโมดูลัสของยังส์ (Young's modulus) และ  $\nu$  แทนค่าอัตราส่วนของปัวส์ซง (Poisson's Ratio)

สำหรับปัญหาความเครียดในระนาบซึ่งใช้กับปัญหาที่มีความลึกมาก โดยตั้งอยู่บนสมมติฐานที่ว่าค่าความเครียดในทิศทางผ่านความลึกนั้นไม่เกิดขึ้นและกำหนดให้เป็นศูนย์ นั่นคือค่าความเครียดในแนวแกน  $Z$  จะถูกสมมติให้เท่ากับศูนย์ จะได้  $[C]$  ในกรณีปัญหาความเครียดในระนาบคือ

$$C = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

ดังนั้นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นย่อยและความเครียดย่อยดังสมการ (3.70) จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.76)$$

ซึ่งค่าความเครียดย่อยดังที่แสดงในสมการ (3.74) และ (3.76) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อ  $u$  และ  $v$  ได้ดังนี้

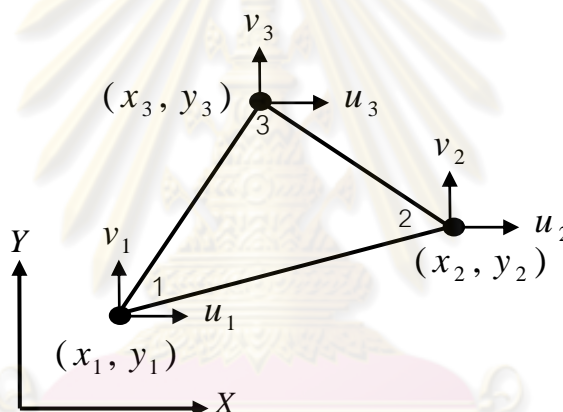
$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3.77)$$

ในกรณีที่ใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อดังแสดงในรูปที่ 3.13 จะสามารถเขียนลักษณะการกระจายของ  $u$  และ  $v$  ให้อยู่ในรูปแบบเดียวกับสมการ (2.6) ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (3.78)$$

หรือ

$$\begin{Bmatrix} \bar{\delta} \end{Bmatrix}_{(2 \times 1)} = \begin{bmatrix} N(x, y) \end{bmatrix}_{(2 \times 6)} \begin{Bmatrix} \delta \end{Bmatrix}_{(6 \times 1)} \quad (3.79)$$



รูปที่ 3.13 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ

เมื่อแทนค่า  $u$  และ  $v$  จากสมการ (3.78) ลงในสมการ (3.77) จะได้สมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อดังนี้

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (3.80)$$

เมตริกซ์การแปลงค่าระหว่างความเครียด

และค่าเคลื่อนตัว  $[B(x, y)]$

$$\text{หรือ} \quad \underbrace{\{\varepsilon\}}_{(3 \times 1)} = \underbrace{[B(x, y)]}_{(3 \times 6)} \underbrace{\{\delta\}}_{(6 \times 1)} \quad (3.81)$$

จากหัวข้อ 2.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์คือ

$$N_i(x, y) = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.82)$$

ดังนั้นเมื่อแทนค่า  $N_i$  ลงในสมการ (3.80) จะได้เมตริกซ์การแปลงค่าระหว่างความเครียดและค่าเคลื่อนตัว  $[B(x, y)]$  ดังนี้

$$\underbrace{[B(x, y)]}_{(3 \times 6)} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

จะพบว่าในปัญหาของแข็งที่มีการยึดหยุ่นจะมีตัวไม่รู้ค่าเพียง 2 ค่าคือ  $u$  และ  $v$  ดังนั้นเมื่อคำนวณหาค่าเคลื่อนตัว  $u$  และ  $v$  ได้แล้วจึงสามารถนำไปคำนวณหาค่าความเครียดย่อยและความเค้นย่อยได้ตามลำดับ

### 3.3.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาของแข็งในสองมิติ

การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาของแข็งที่มีการยึดหยุ่นได้ในสองมิติสามารถกระทำได้โดยใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of Weighted Residuals) โดยพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยดังแสดงในสมการ (3.67)-(3.68) นั่นคือ

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (3.68)$$

ทำการประยุกต์วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างโดยวิธีกาลูร์คิน (Galerkin) นั่นคือคูณสมการ (3.67)-(3.68) ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก (Weighting Function)  $W$  จากนั้นจึงอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนของเอลิเมนต์ แล้วกำหนดผลลัพธ์ที่ได้ให้เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\int_{\Omega} W_i \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \quad (3.84)$$

$$\int_{\Omega} W_i \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \quad (3.85)$$

การกำหนดค่า  $W_i$  สามารถกำหนดให้  $W_i = N_i$  ซึ่งเรียกว่าบับโนฟ-กาเลอร์คิน (Bubnov-Galerkin) หรือกำหนดให้  $W_i \neq N_i$  ซึ่งเรียกว่าเพทรอฟ-กาเลอร์คิน (Petrov-Galerkin) ในที่นี้จะกำหนดให้  $W_i = N_i$  ดังนั้นสมการ (3.84)-(3.85) จะกลายเป็น

$$\int_{\Omega} N_i \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \quad (3.86)$$

$$\int_{\Omega} N_i \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \quad (3.87)$$

โดย  $i = 1, 2, 3$  และจากทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's Theorem) ซึ่งเขียนได้ในรูป

$$\int_{\Omega} u(\nabla \cdot \vec{V}) d\Omega = \int_{\Gamma} u(\vec{V} \cdot \hat{n}) d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \vec{V}) d\Omega \quad (3.88)$$

หากเปรียบเทียบตัวแปรทางด้านซ้ายมือของสมการ (3.88) กับพจน์แรกของสมการ (3.86) จะได้

$$\left. \begin{aligned} u &= N_i \\ \nabla &= \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} \\ \vec{V} &= \sigma_x \hat{i} + \tau_{xy} \hat{j} \end{aligned} \right\} \nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$$

และเนื่องจาก

$$\hat{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \vec{V} \cdot \hat{n} &= \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \\ \nabla u &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{j} \\ \vec{V} \cdot \nabla u &= \sigma_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{aligned}$$

เมื่อแทนค่าต่าง ๆ ลงในสมการ (3.86) แล้วทำการจัดพจน์ใหม่ จะได้เป็น

$$\int_{\Omega} \left( \sigma_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} N_i \underbrace{(\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y)}_{\text{ค่าความเค้นที่ผิว } T_x} d\Gamma \quad (3.89)$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} d\Omega = \int_{\Gamma} N_i T_x d\Gamma \quad (3.90)$$

ในทำนองเดียวกันสามารถเขียนสมการ (3.87) ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] \begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{Bmatrix} d\Omega = \int_{\Gamma} N_i T_y d\Gamma \quad (3.91)$$

เมื่อแทนค่า  $i = 1, 2, 3$  ลงในสมการ (3.90)-(3.91) แล้วทำการแทนค่าฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ดังสมการ (2.8) ในหัวข้อ 2.2 จากนั้นนำสมการทั้งหมดมารวมกัน จะได้สมการรวมในรูปแบบดังนี้

$$\int_{\Omega} [B]^T \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} d\Omega = \int_{\Gamma} [N]^T \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} d\Gamma \quad (3.92)$$

แทนค่าความเค้นย่อยจากสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นย่อยและความเครียดย่อยดังสมการ (3.70) ลงใน (3.92) จะได้

$$\int_{\Omega} [B]^T [C] \{\varepsilon\} d\Omega = \int_{\Gamma} [N]^T \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} d\Gamma \quad (3.93)$$

เมื่อแทนค่าความเครียดย่อยจากสมการ (3.81) ลงใน (3.93) จะได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาของแข็งที่มีการยืดหยุ่นดังนี้

$$\int_{\Omega} [B]^T [C] [B] d\Omega \{\delta\} = \int_{\Gamma} [N]^T \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} d\Gamma \quad (3.94)$$

สำหรับกรณีปัญหาในสองมิติ  $d\Omega = t dA$  ดังนั้นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับปัญหาของแข็งที่มีการยืดหยุ่นในปัญหาสองมิติคือ

$$[K] \{\delta\} = \{F_i\} \quad (3.95)$$

$$\text{โดย} \quad [K] = At [B]^T [C] [B] \quad (3.96)$$

= เมตริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์

$$\{\delta\}_{(6 \times 1)} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (3.97)$$

= เวกเตอร์ค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อ

$$\{F_t\}_{(6 \times 1)} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} \quad (3.98)$$

= โหลดเวกเตอร์เนื่องจากความเค้นที่ผิว

สมการ (3.95) คือสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของแต่ละเอลิเมนต์ ซึ่งต้องนำสมการนี้มาประกอบเข้าด้วยกันก่อให้เกิดระบบสมการรวม ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$[K]_{(n \times n)} \{\delta\}_{(n \times 1)} = \{F_t\}_{(n \times 1)} \quad (3.99)$$

โดย  $n$  คือจำนวนตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของทั้งระบบ จากนั้นทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตโดยในปัญหาการไหลที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ส่วนใหญ่จะทราบค่าเคลื่อนตัวที่ขอบเขต ขั้นตอนสุดท้ายคือการแก้ระบบสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งอยู่ในรูปแบบสมการ (3.99) โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อหาค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อของเอลิเมนต์

### 3.4 เกณฑ์ในการวัดผลลัพธ์ของเอลิเมนต์

ค่าเคลื่อนตัวที่ได้จากเทคนิควิธีต่าง ๆ ที่ใช้ในการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้กล่าวมาแล้วนั้นจะบ่งบอกถึงการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของเอลิเมนต์ ซึ่งแต่ละวิธีจะให้ผลลัพธ์ที่แตกต่างกัน ดังนั้นจึงต้องทำการเปรียบเทียบเอลิเมนต์ที่ได้จากแต่ละวิธี โดยผลลัพธ์ของเอลิเมนต์ที่ได้จะพิจารณาจาก 2 เกณฑ์ได้แก่ [35]

1. **ความสมบูรณ์ของเอลิเมนต์ (Element Validity)** เอลิเมนต์ที่ได้จะถือว่ามี ความสมบูรณ์ก็ต่อเมื่อไม่เกิดการไขว้ตัวหรือบิดตัวของเอลิเมนต์
2. **คุณภาพของเอลิเมนต์ (Element Quality)** เป็นค่าตัวเลขที่บ่งบอกถึงลักษณะ รูปร่างของเอลิเมนต์ โดยคุณภาพของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมในสองมิติสามารถหาได้ จากอัตราส่วนระหว่างพื้นที่และผลรวมกำลังสองของความยาวขอบเอลิเมนต์ [36], [37], [38] นั่นคือ

$$q = \frac{CA}{\sum_{i=1}^3 L_i^2} \quad (3.100)$$

โดย  $q$  คือคุณภาพของเอลิเมนต์ ซึ่ง  $0 \leq q \leq 1$ ,  $A$  คือพื้นที่ของเอลิเมนต์,  $L$  คือ ความยาวขอบเอลิเมนต์ และ  $C$  คือค่าคงที่ซึ่งมีค่าเท่ากับ  $4\sqrt{3}$  ในกรณีของ เอลิเมนต์สามเหลี่ยม ซึ่งเอลิเมนต์ที่มีคุณภาพดีที่สุดคือเอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้านเท่า จะมีค่า  $q=1$  ส่วนเอลิเมนต์ที่มีลักษณะแบนจนเหลือพื้นที่เท่ากับศูนย์จะถือว่ามี คุณภาพแย่มากที่สุดและจะมีค่า  $q=0$  [39]

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ที่ได้สร้างขึ้นในบทนี้จะถูกนำไป ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันด้วยภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) เพื่อใช้ในการ วิเคราะห์ปัญหาขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ในสองมิติ ซึ่งลักษณะการทำงานและรายละเอียดของ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ รวมถึงตัวอย่างการนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้ไปประยุกต์ใช้กับปัญหา อย่างง่ายจะกล่าวถึงในบทถัดไป

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บทที่ 4

### ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์

ในบทนี้จะนำเสนอสมการไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ของเทคนิควิธีต่าง ๆ ที่ใช้ในการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นในบทที่ 3 มาทำการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันด้วยภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN)\* เพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ในสองมิติ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นซึ่งสอดคล้องกับวิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้น, วิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริงและวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้มีชื่อว่า LINEAL2D, TORSION2D และ ELASTIC2D ตามลำดับ โดยเนื้อหาในบทนี้จะอธิบายลักษณะขั้นตอนและรายละเอียดของแต่ละโปรแกรม รวมถึงแสดงตัวอย่างการนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาในสองมิติ

#### 4.1 โปรแกรม LINEAL2D

##### 4.1.1 ลักษณะของโปรแกรม LINEAL2D

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LINEAL2D ถูกประดิษฐ์ขึ้นจากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ของวิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้น โครงสร้างของโปรแกรม LINEAL2D ประกอบด้วยโปรแกรมหลัก (Main Program) และ 5 โปรแกรมย่อย (Subroutines) โดยมีขั้นตอนการทำงานดังนี้

---

\* ภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) ย่อมาจาก FORmular TRANslation มีกำเนิดมาจากทีมงานของ IBM ในปี ค.ศ. 1957 จัดเป็นภาษาเชิงวิธีดำเนินการระดับสูง (Procedural High Level Language) ที่เก่าแก่ที่สุดภาษาหนึ่งโดยมีการพัฒนามาตั้งแต่ FORTRAN I, FORTRAN II, FORTRAN IV, FORTRAN 66, FORTRAN 77 และ FORTRAN 90 ซึ่งใช้กันอยู่ในปัจจุบัน ภาษาฟอร์แทรนได้รับความนิยมกันมากโดยเฉพาะในหมู่ของวิศวกรและนักวิทยาศาสตร์ เนื่องจากมีความสามารถในการคำนวณสูงและมีคำสั่งงานในด้านการคำนวณ เช่น สูตร สมการ ฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ให้เลือกมากมาย ดังนั้นภาษาฟอร์แทรนจึงเป็นภาษาที่เหมาะสมสำหรับการแก้ปัญหาในด้านคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ที่เน้นการคำนวณมาก ๆ อย่างไรก็ตามเนื่องจากเป็นภาษาที่เก่าแก่มากจึงมีปัญหาในเรื่องของโครงสร้างโปรแกรมเมื่อต้องนำไปประยุกต์ใช้กับโปรแกรมสมัยใหม่ รวมถึงปัญหาในการต่อยอดพัฒนาโปรแกรมในด้านอื่น ๆ นอกเหนือจากการคำนวณ (ปฏิพัทธ์ เอี่ยมอร่าม, ภาษาคอมพิวเตอร์ในงานวิศวกรรม, แหล่งที่มา: [www.TumCivil.com](http://www.TumCivil.com) [มีนาคม 2553])



- 4.1.1.1 เริ่มต้นการทำงานโดยการอ่านแฟ้มข้อมูลนำเข้าของปัญหา (Input File) เช่น จำนวนจุดต่อและจำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมดของปัญหา, ตำแหน่งของจุดต่อต่าง ๆ, ลักษณะเงื่อนไขขอบเขต, ค่าเคลื่อนตัวที่ขอบเขต, หมายเลขจุดต่อที่ประกอบกันขึ้นเป็นสปริงเอลิเมนต์, ความยาวของสปริงเอลิเมนต์, มุม  $\theta$  ที่สปริงเอลิเมนต์วางทำตัวกับแนวแกน  $X$  ในทิศทวนเข็มนาฬิกา รวมถึงจำนวนและตำแหน่งของโหนดในกรณีที่มีโหนดภายนอกมากระทำ ซึ่งการอ่านค่าทั้งหมดนี้จะอยู่ในช่วงแรกของโปรแกรมหลัก
- 4.1.1.2 เรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE CEM] เพื่อทำการสร้างเอลิเมนต์เมตริกซ์ต่าง ๆ โดยจะทำการตรวจสอบความสมบูรณ์ของเอลิเมนต์ (Element Validity) ทุก ๆ เอลิเมนต์ที่ถูกสร้างขึ้นในแบบจำลอง จากนั้นจึงทำการสร้างเอลิเมนต์เมตริกซ์ อันได้แก่  $\{F^{ij}\}$ ,  $[K^{ij}]$  และ  $\{\delta^{ij}\}$  ดังสมการ (3.17)-(3.19) แล้วส่งผ่านเอลิเมนต์เมตริกซ์ที่ได้สร้างขึ้นนี้ไปสร้างเมตริกซ์ใหญ่ของระบบสมการรวมโดยเรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE ASSEMBLE]
- 4.1.1.3 กำหนดเงื่อนไขขอบเขตลงในระบบสมการรวม เช่นบางจุดต่อจะถูกตรึงแน่นไม่สามารถเคลื่อนที่ได้ ในขณะที่จุดต่อ ณ บริเวณขอบเขตของโดเมนจะกำหนดเป็นค่าเคลื่อนตัวในช่วงย่อย ๆ โดยเรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE APPLYBC]
- 4.1.1.4 แก้ระบบสมการรวมด้วยวิธี Gauss Elimination เพื่อหาค่าเคลื่อนตัว  $u$  และ  $v$  ที่ทุก ๆ จุดต่อ โดยเรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE SOLVE]
- 4.1.1.5 คำนวณหาคุณภาพของเอลิเมนต์หลังจากเกิดการเคลื่อนที่จากสมการ (3.100) จากนั้นทำการพิมพ์ผลลัพธ์ที่คำนวณได้ ซึ่งได้แก่ค่าเคลื่อนตัว  $u$  และ  $v$  ที่ทุก ๆ จุดต่อและคุณภาพของ

เอลิเมนต์ลงในไฟล์ที่ต้องการ เพื่อนำไปใช้แสดงผลในรูปแบบกราฟฟิกต่อไป

- 4.1.1.6 ตรวจสอบความสมบูรณ์ของเอลิเมนต์หลังจากเกิดการเคลื่อนที่ นั่นคือเอลิเมนต์ที่ได้จะต้องไม่เกิดการไขว้ตัวหรือบิดตัว ในกรณีที่พบการไขว้ตัวหรือบิดตัวของเอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ จะจบการทำงานทันที
- 4.1.1.7 นำค่าเคลื่อนตัว  $u$  และ  $v$  ที่คำนวณได้จากข้อ 4.1.1.4 มาทำการปรับปรุงค่าตัวแปรต่าง ๆ ใหม่ได้แก่ ตำแหน่งของจุดต่อ, ความยาวของสปริงเอลิเมนต์และมุม  $\theta$  ที่สปริงเอลิเมนต์วางทำตัวกับแนวแกน  $X$  ในทิศทวนเข็มนาฬิกา โดยเรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE UPDATE] เพื่อหาค่าเคลื่อนตัว  $u$  และ  $v$  ใหม่สำหรับการคำนวณในช่วงการเคลื่อนที่ย่อยถัดไป ซึ่งจะซ้ำตั้งแต่ขั้นตอนในข้อ 4.1.1.2 - 4.1.1.7 และเมื่อทำการคำนวณจนครบจำนวนครั้งของช่วงการเคลื่อนที่ย่อยแล้ว โปรแกรมจึงจะจบการทำงาน

ลำดับขั้นตอนต่าง ๆ นี้สามารถสรุปดังแสดงในรูปที่ 4.1

#### 4.1.2 รายละเอียดของโปรแกรม LINEAL2D

รายละเอียดของโปรแกรม LINEAL2D ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ก.

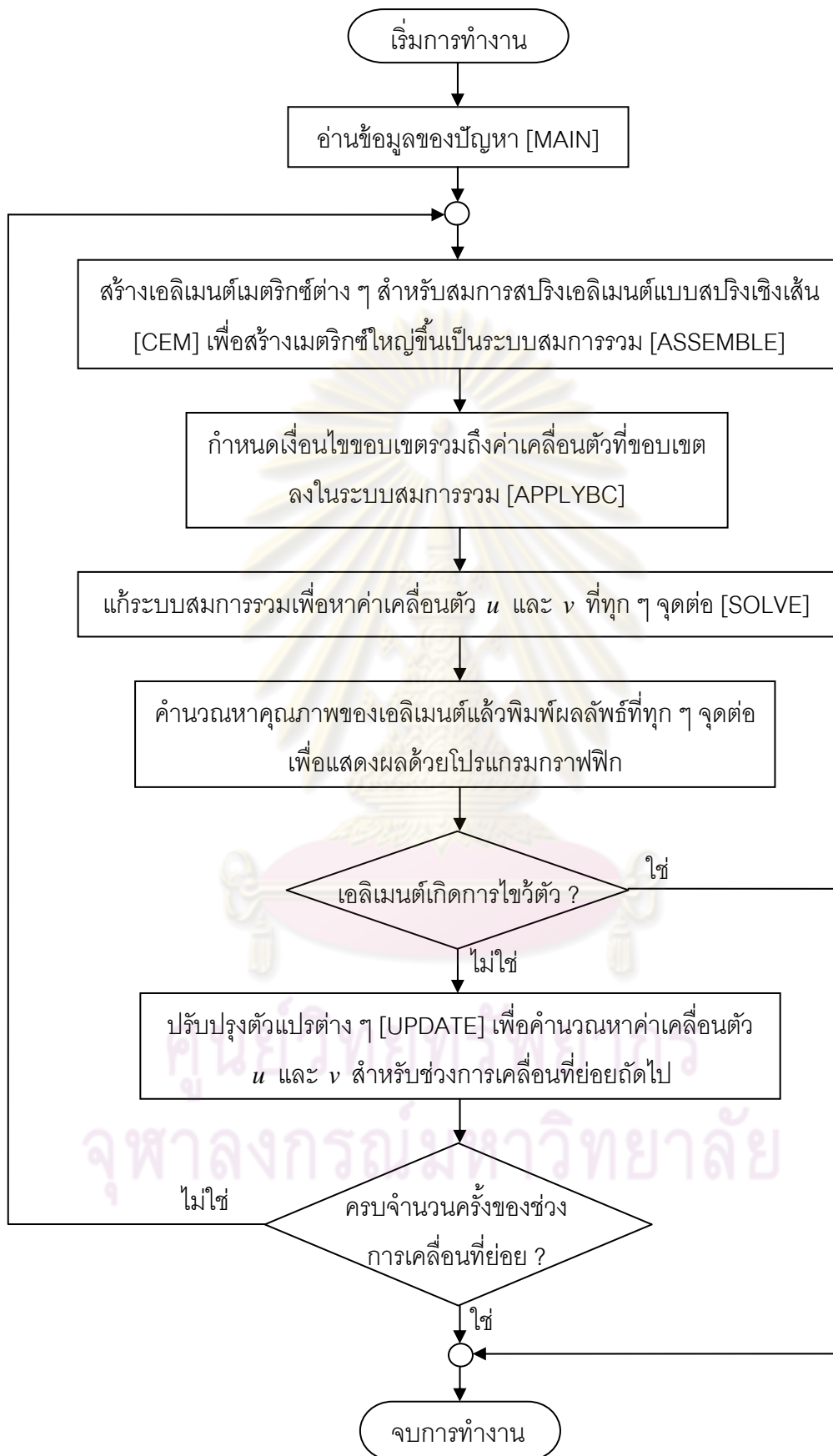
#### 4.1.3 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่โปรแกรม LINEAL2D ต้องการ

ลักษณะของข้อมูลที่โปรแกรมวิเคราะห์การหาค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อด้วยวิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้นนี้ต้องการ สามารถจำแนกออกเป็น 6 ส่วนย่อยได้ดังต่อไปนี้

##### ส่วนที่ 1 ประโยคอธิบายกำกับลักษณะของไฟล์

บรรทัดแรก      ตัวเลขระบุจำนวนบรรทัดที่เป็นตัวอักษร

บรรทัดต่อไป      ประโยคต่าง ๆ ที่เป็นหัวเรื่องของปัญหาโดยมีจำนวนบรรทัดเท่าที่ระบุไว้



รูปที่ 4.1 ลักษณะขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม LINEAL2D

ตัวอย่างเช่น :

2

A LINEAL SPRING ANALOGY METHOD COMPUTER PROGRAM  
A TRANSLATING RECTANGLE IN ANOTHER FIXED ONE PROBLEM

## ส่วนที่ 2 ขนาดของปัญหา

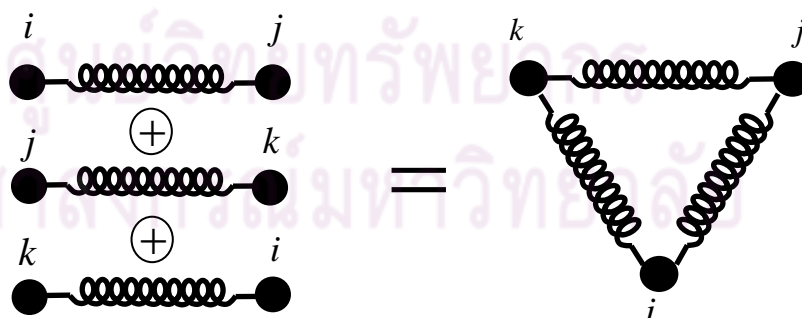
บรรทัดแรก คำระบุจำนวนจุดต่อ, จำนวนเอลิเมนต์, จำนวนแรงภายนอกและจำนวนเอลิเมนต์เมื่อปรับเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ

บรรทัดต่อไป ตัวเลขจำนวนจุดต่อ, จำนวนเอลิเมนต์, จำนวนแรงภายนอกและจำนวนเอลิเมนต์เมื่อปรับเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ

ตัวอย่างเช่น :

NPOIN	NELEM	NFORCE	NETRI
336	912	1	576

หมายเหตุ : โดยปกติสปริงเอลิเมนต์แบบสปริงเชิงเส้นจะประกอบด้วยสองจุดต่อดังรูปที่ 3.2 แต่เนื่องจากต้องทำการตรวจสอบการเกิดการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ ซึ่งสามารถตรวจสอบได้จากพื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ด้วยเหตุนี้จึงจำเป็นต้องแปลงรูปแบบเอลิเมนต์จากสปริงเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยสองจุดต่อไปเป็นสปริงเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ ซึ่งเกิดจากการนำสปริงเอลิเมนต์ในรูปแบบเดิมจำนวน 3 อันมาต่อเข้าด้วยกันดังรูปที่ 4.2 โดย NETRI คือ จำนวนเอลิเมนต์หลังจากทำการปรับเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อแล้ว



รูปที่ 4.2 การแปลงสปริงเอลิเมนต์ให้เป็นสปริงเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ

## ส่วนที่ 3 ลักษณะของจุดต่อและเงื่อนไขขอบเขต

บรรทัดแรก คำระบุลักษณะของจุดต่อและเงื่อนไขขอบเขต

บรรทัดต่อไป ตัวเลขแสดงหมายเลขจุดต่อ, ตำแหน่งจุดต่อในแกน  $X$  และ  $Y$ , เงื่อนไขขอบเขตในแกน  $X$  และ  $Y$  และค่าเคลื่อนตัวที่ขอบเขตในแกน  $X$  และ  $Y$  โดยมีจำนวนบรรทัดเท่ากับจำนวนจุดต่อ

ตัวอย่างเช่น :

NODE	X	Y	IBCX	IBCY	UMBX	VMBY
1	0	0	1	1	0	0
2	0.5	0	1	1	0	0
3	1	0	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
334	7.5	8.5	2	2	2.8	2.8
335	8	8.5	0	0	0	0
336	8.5	8.5	2	2	2.8	2.8

หมายเหตุ : เงื่อนไขขอบเขต IBC ในแนวแกน  $X$  และ  $Y$  หมายถึง

- IBC = 0 จุดต่อนั้นเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระ และคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวในทิศทางนั้น
- IBC = 1 จุดต่อนั้นถูกตรึงไม่ให้เคลื่อนที่ในทิศทางนั้น
- IBC = 2 กำหนดค่าเคลื่อนตัวที่ขอบเขตในทิศทางนั้น

ส่วน UMBX และ VMBY คือค่าเคลื่อนตัวที่ขอบเขตของจุดต่อนั้น ๆ ในแนวแกน  $X$  และ  $Y$  ตามลำดับ

#### ส่วนที่ 4 ลักษณะของเอลิเมนต์

บรรทัดแรก ค่าระบุลักษณะ, ความยาว, มุมการวางตัว  $\theta$  ของเอลิเมนต์

บรรทัดต่อไป ตัวเลขแสดงหมายเลขเอลิเมนต์, หมายเลขจุดต่อในทิศทางแนวนอนที่ประกอบขึ้นเป็นเอลิเมนต์นั้น, ความยาวของเอลิเมนต์และมุม  $\theta$  ที่เอลิเมนต์วางทำตัวกับแกน  $X$  ในทิศทางแนวนอนโดยมีหน่วยวัดเป็นองศา โดยมีจำนวนบรรทัดเท่ากับจำนวนเอลิเมนต์

ตัวอย่างเช่น :

ELEMENT	I	J	L	THETA (DEGREE)
1	1	2	0.5	0
2	1	14	0.5	90

3	1	19	0.70711	45
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
910	333	334	0.5	0
911	334	335	0.5	0
912	335	336	0.5	0

### ส่วนที่ 5 แรงภายนอกที่มากระทำที่จุดต่อต่าง ๆ

บรรทัดแรก	ค่าระบุแรงภายนอก
บรรทัดต่อไป	ตัวเลขจุดต่อที่มีแรงภายนอกมากระทำ, แรงภายนอกในแกน $X$ และแรงภายนอกในแกน $Y$ โดยมีจำนวนบรรทัดเท่ากับ NFORCE ที่ระบุไว้ในข้อมูลส่วนที่ 2

ตัวอย่างเช่น :

NPOIN	FX	FY
1	0	0

### ส่วนที่ 6 ลักษณะของเอลิเมนต์เมื่อปรับเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อ

บรรทัดแรก	ประโยคระบุหัวข้อลักษณะของเอลิเมนต์
บรรทัดที่สอง	ค่าระบุลักษณะของเอลิเมนต์
บรรทัดต่อไป	ตัวเลขแสดงหมายเลขเอลิเมนต์, หมายเลขจุดต่อทั้งสามในทิศทางเข็มนาฬิกาที่ประกอบขึ้นเป็นเอลิเมนต์นั้น โดยมีจำนวนบรรทัดเท่ากับ NETRI ที่ระบุไว้ในข้อมูลส่วนที่ 2

ตัวอย่างเช่น :

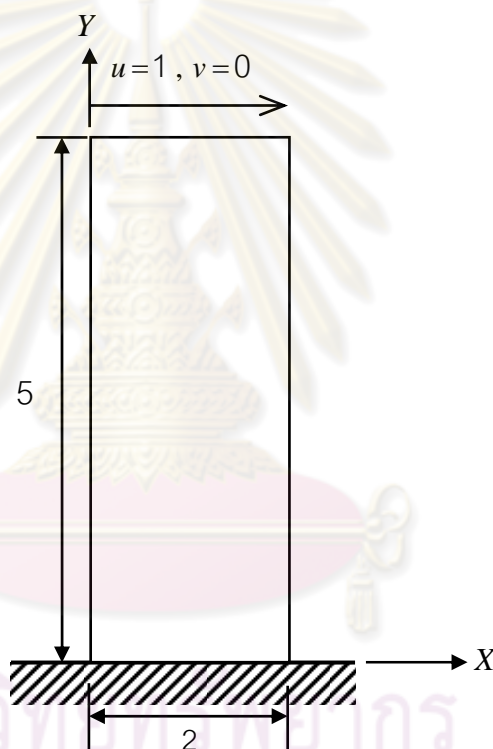
Nodal Connectivity of 3-node Triangular Element

ELEMENT	I	J	K
1	1	19	14
2	1	2	19
3	2	20	19
⋮	⋮	⋮	⋮
574	335	336	310
575	336	311	310
576	336	305	311

ลักษณะของข้อมูลที่โปรแกรม LINEAL2D ต้องการสามารถทำความเข้าใจได้ดียิ่งขึ้นจากการพิจารณาตัวอย่างการใช้โปรแกรมในหัวข้อถัดไป

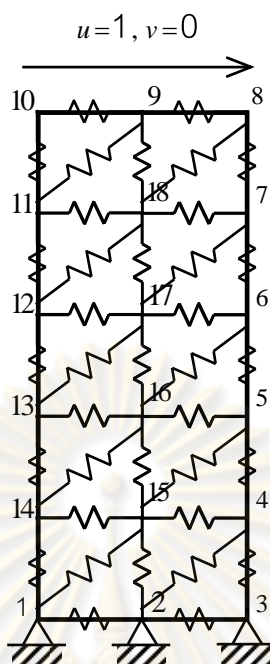
#### 4.1.4 ตัวอย่างการใช้โปรแกรม LINEAL2D

ในหัวข้อนี้จะแสดงตัวอย่างการนำโปรแกรม LINEAL2D ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นมาใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ซึ่งโดเมนของปัญหาเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีขนาดกว้าง  $x$  ยาวเท่ากับ  $2 \times 5$  หน่วย โดยตลอดขอบเขตล่างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้ถูกตรึงแน่น และกำหนดให้ขอบเขตบนเคลื่อนที่ไปเป็นระยะทาง 1 หน่วยในแนวแกน  $X$  ลักษณะของปัญหาแสดงดังรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 ลักษณะปัญหาของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่

ปัญหาดังกล่าวถูกนำไปวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LINEAL2D โดยเริ่มจากการสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบด้วย 18 จุดต่อและ 37 เอลิเมนต์ โดยที่จุดต่อตลอดขอบเขตล่างถูกตรึงแน่น ในขณะที่จุดต่อตลอดขอบเขตบนเคลื่อนที่ไปเป็นระยะทาง 1 หน่วยในแนวแกน  $X$  แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.4 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขต  
เมื่อวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม LINEAL2D

ไฟล์ข้อมูลที่สุดคดคล้องกับแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหานี้กำหนดให้ชื่อว่า  
“RECT\_LIN.DAT” ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

2

A LINEAL SPRING ANALOGY TECHNIQUE COMPUTER PROGRAM

AN UPPER MOVING BOUNDARY OF RECTANGLE PROBLEM

NPOIN	NELEM	NFORCE	NETRI			
18	37	1	20			
NODE	X	Y	IBCX	IBCY	UMBX	VMBY
1	0	0	1	1	0	0
2	1	0	1	1	0	0
3	2	0	1	1	0	0
4	2	1	0	0	0	0
5	2	2	0	0	0	0
6	2	3	0	0	0	0
7	2	4	0	0	0	0
8	2	5	2	2	1	1
9	1	5	2	2	1	1
10	0	5	2	2	1	1
11	0	4	0	0	0	0



12	0	3	0	0	0	0
13	0	2	0	0	0	0
14	0	1	0	0	0	0
15	1	1	0	0	0	0
16	1	2	0	0	0	0
17	1	3	0	0	0	0
18	1	4	0	0	0	0
ELEMENT	I	J	L	THETA(DEGREE)		
1	1	2	1	0		
2	1	14	1	90		
3	1	15	1.4142	45		
4	2	3	1	0		
5	2	4	1.4142	45		
6	2	15	1	90		
7	3	4	1	90		
8	4	5	1	90		
9	4	15	1	180		
10	5	6	1	90		
11	5	15	1.4142	225		
12	5	16	1	180		
13	6	7	1	90		
14	6	16	1.4142	228		
15	6	17	1	180		
16	7	8	1	90		
17	7	17	1.4142	225		
18	7	18	1	180		
19	8	9	1	180		
20	8	18	1.4142	225		
21	9	10	1	180		
22	9	11	1.4142	225		
23	9	18	1	270		
24	10	11	1	270		
25	11	12	1	270		
26	11	18	1	0		
27	12	13	1	270		
28	12	17	1	0		
29	12	18	1.4142	45		

30	13	14	1	270
31	13	16	1	0
32	13	17	1.4142	45
33	14	15	1	0
34	14	16	1.4142	45
35	15	16	1	90
36	16	17	1	90
37	17	18	1	90

NPOIN	FX	FY
1	0	0

Nodal connectivity OF 3-NODE TRIANGULAR ELEMENT

ELEMENT	I	J	K
1	1	15	14
2	1	2	15
3	2	4	15
4	2	3	4
5	14	16	13
6	14	15	16
7	15	5	16
8	15	4	5
9	13	17	12
10	13	16	17
11	16	6	17
12	16	5	6
13	12	18	11
14	12	17	18
15	17	7	18
16	17	6	7
17	11	9	10
18	11	18	9
19	18	8	9
20	18	7	8

รูปที่ 4.5 ลักษณะข้อมูลในไฟล์ "RECT\_LIN.DAT"

เมื่อผู้ใช้ทำการคำนวณโดยใช้โปรแกรม LINEAL2D โปรแกรมจะให้ผู้ใช้ระบุชื่อไฟล์นำเข้า เพื่ออ่านข้อมูล, จำนวนครั้งของการคำนวณ, ชื่อไฟล์ที่จะบรรจุผลลัพธ์ของค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อ, ชื่อไฟล์เพื่อใช้ในการแสดงผลการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของเอลิเมนต์ และชื่อไฟล์เพื่อวัดคุณภาพของ เอลิเมนต์ตามลำดับ ซึ่งผู้ใช้จะพิมพ์ตอบกลับไป จากนั้นโปรแกรมจะเริ่มทำการคำนวณเป็น ขั้นตอนดังอธิบายในหัวข้อย่อย 4.1.1 ทั้งนี้โปรแกรมจะจบการทำงานทันทีถ้าพบการไขว้ตัวของ เอลิเมนต์ ขั้นตอนดังกล่าวทั้งหมดจะปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ดังแสดงในรูปที่ 4.6

```

>LINEAL2D          <Enter>

PLEASE ENTER THE INPUT FILE NAME:
RECT_LIN.DAT

*** THE FINITE ELEMENT MODEL CONSISTS OF  18 NODES AND  37 ELEMENTS ***

PLEASE INPUT NO. OF CALCULATION STEP(S) FOR MOVING BOUNDARY DISPLACEMENT (MAXIMUM OF 100
STEPS):
1

PLEASE ENTER FILE NAME FOR DISPLACEMENT SOLUTIONS :
RECT_LIN_SOL.OUT

PLEASE ENTER PLOTTING FILE NAME (*.PLT):
RECT_LIN_DEF.PLT

PLEASE ENTER FILE NAME FOR MEASURING ELEMENT QUALITY (*.PLT):
RECT_LIN_QLT.PLT

*** STARTING CALCULATION STEP: 1 OF TOTAL 1 STEP(S) ***

*** ESTABLISHING ELEMENT MATRICES AND ASSEMBLING ELEMENT EQUATIONS ***

*** APPLYING BOUNDARY CONDITIONS ***

*** SOLVING A SET OF SIMULTANEOUS EQUATIONS FOR DISPLACEMENT SOLUTIONS ***
(TOTAL OF 36 EQUATIONS)

!!! COMPLETELY DONE !!!

*** THANK YOU ***

```

รูปที่ 4.6 ลำดับขั้นตอนที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ในขณะที่ใช้โปรแกรม LINEAL2D

ผลลัพธ์ของค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อในแนวแกนทั้งสอง ซึ่งบรรจุอยู่ในไฟล์ชื่อ  
"RECT\_LIN\_SOL.OUT" แสดงได้ดังรูปที่ 4.7

FOR CALCULATION STEP: 1 OF TOTAL 1 STEP(S)

NODAL DISPLACEMENT SOLUTIONS [ 18 ]:

NODE	U	V
1	0.000000E+00	0.000000E+00
2	0.000000E+00	0.000000E+00
3	0.000000E+00	0.000000E+00
4	0.129102E+00	-0.624829E-01
5	0.343372E+00	-0.101412E+00
6	0.584572E+00	-0.105330E+00
7	0.808267E+00	-0.722041E-01
8	0.100000E+01	0.000000E+00
9	0.100000E+01	0.000000E+00
10	0.100000E+01	0.000000E+00
11	0.870898E+00	0.624829E-01
12	0.656628E+00	0.101412E+00
13	0.415428E+00	0.105330E+00
14	0.191733E+00	0.722042E-01
15	0.152656E+00	-0.972119E-02
16	0.378383E+00	-0.391816E-02
17	0.621617E+00	0.391819E-02
18	0.847345E+00	0.972122E-02

ELEMENT NO. AS FOLLOWING HAS NEGATIVE AREA:

TOTAL INVALID ELEMENT(S): 0

รูปที่ 4.7 ลักษณะผลลัพธ์ของค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อในไฟล์ "RECT\_LIN\_SOL.OUT"

สำหรับไฟล์ "RECT\_LIN\_DEF.PLT" ที่เกิดขึ้นและสามารถนำไปแสดงผลการ  
เปลี่ยนแปลงรูปร่างของเอลิเมนต์ แสดงได้ดังรูปที่ 4.8

TITLE = "FE PLOTTING DATA BY LINEAL SPRING TECHNIQUE"

VARIABLES = "X-CO", "Y-CO"

ZONE T="COORD", N= 18, E= 20, F=FEPOINT, ET=TRIANGLE

0.000000E+00	0.000000E+00
0.100000E+01	0.000000E+00
0.200000E+01	0.000000E+00
0.200000E+01	0.100000E+01

0.200000E+01	0.200000E+01
0.200000E+01	0.300000E+01
0.200000E+01	0.400000E+01
0.200000E+01	0.500000E+01
0.100000E+01	0.500000E+01
0.000000E+00	0.500000E+01
0.000000E+00	0.400000E+01
0.000000E+00	0.300000E+01
0.000000E+00	0.200000E+01
0.000000E+00	0.100000E+01
0.100000E+01	0.100000E+01
0.100000E+01	0.200000E+01
0.100000E+01	0.300000E+01
0.100000E+01	0.400000E+01

1	15	14
---	----	----

1	2	15
---	---	----

2	4	15
---	---	----

2	3	4
---	---	---

14	16	13
----	----	----

14	15	16
----	----	----

15	5	16
----	---	----

15	4	5
----	---	---

13	17	12
----	----	----

13	16	17
----	----	----

16	6	17
----	---	----

16	5	6
----	---	---

12	18	11
----	----	----

12	17	18
----	----	----

17	7	18
----	---	----

17	6	7
----	---	---

11	9	10
----	---	----

11	18	9
----	----	---

18	8	9
----	---	---

18	7	8
----	---	---

ZONE T="COORD AT STEP: 1", N= 18 , E= 20 , F=FEPOINT, ET=TRIANGLE

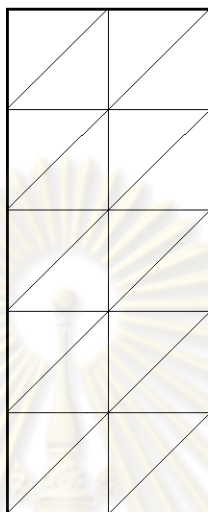
0.000000E+00	0.000000E+00
0.100000E+01	0.000000E+00
0.200000E+01	0.000000E+00
0.212910E+01	0.937517E+00
0.234337E+01	0.189859E+01

0.258457E+01	0.289467E+01	
0.280827E+01	0.392780E+01	
0.300000E+01	0.500000E+01	
0.200000E+01	0.500000E+01	
0.100000E+01	0.500000E+01	
0.870898E+00	0.406248E+01	
0.656628E+00	0.310141E+01	
0.415428E+00	0.210533E+01	
0.191733E+00	0.107220E+01	
0.115266E+01	0.990279E+00	
0.137838E+01	0.199608E+01	
0.162162E+01	0.300392E+01	
0.184734E+01	0.400972E+01	
1	15	14
1	2	15
2	4	15
2	3	4
14	16	13
14	15	16
15	5	16
15	4	5
13	17	12
13	16	17
16	6	17
16	5	6
12	18	11
12	17	18
17	7	18
17	6	7
11	9	10
11	18	9
18	8	9
18	7	8

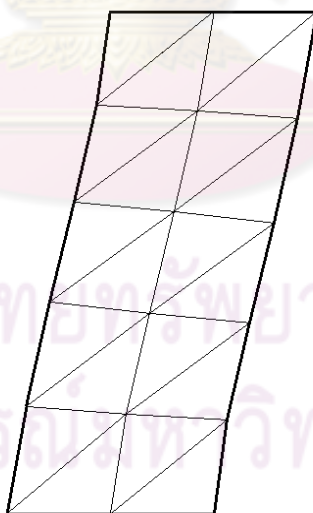
รูปที่ 4.8 ลักษณะไฟล์ "RECT\_LIN\_DEF.PLT" เพื่อใช้ในการแสดงผลพีท  
การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของเอลิเมนต์

ในการแสดงผลพีทการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของเอลิเมนต์ โดยใช้โปรแกรมกราฟฟิก  
TECPLOT ผู้ใช้สามารถเลือกการแสดงผลพีทของเอลิเมนต์ก่อนการเปลี่ยนแปลงหรือหลังการ

เปลี่ยนแปลงหรือแสดงทั้งสองอย่างพร้อม ๆ กันได้ ซึ่งแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ก่อนและหลังการเปลี่ยนแปลงแสดงดังรูปที่ 4.9 และ 4.10 ตามลำดับ



รูปที่ 4.9 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ก่อนการเปลี่ยนแปลงที่ได้จากไฟล์  
“RECT\_LIN\_DEF.PLT”



รูปที่ 4.10 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์หลังการเปลี่ยนแปลงที่ได้จากไฟล์  
“RECT\_LIN\_DEF.PLT”

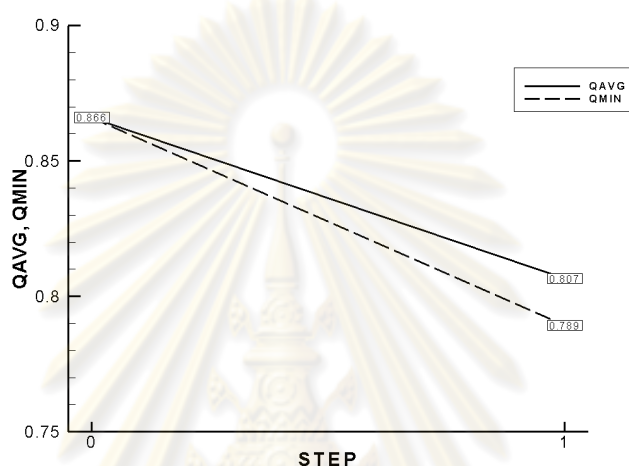
สำหรับไฟล์ “RECT\_LIN\_QLT.PLT” ซึ่งบรรจุข้อมูลคุณภาพของเอลิเมนต์หลังจากเกิดการเปลี่ยนแปลง และสามารถนำไปแสดงผลในรูปแบบกราฟได้ รูปแบบลักษณะของไฟล์ข้อมูล “RECT\_LIN\_QLT.PLT” และกราฟที่ได้แสดงดังรูปที่ 4.11 และ 4.12 ตามลำดับ

```

TITLE = "COMPARISON CHART OF ELEMENT QUALITY BETWEEN EACH METHOD"
VARIABLES = "STEP", "QAVG", "QMIN"
ZONE T="LINEAL", I= 2 , DATAPACKING=POINT
0      0.86602540    0.86602540
1      0.80654114    0.78922617

```

รูปที่ 4.11 ลักษณะไฟล์ "MOV\_RECT\_QLT.PLT" เพื่อใช้ในการแสดงคุณภาพของเอลิเมนต์



รูปที่ 4.12 กราฟแสดงคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากไฟล์ "MOV\_RECT\_QLT.PLT"

## 4.2 โปรแกรม TORSION2D

### 4.2.1 ลักษณะของโปรแกรม TORSION2D

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ TORSION2D ถูกประดิษฐ์ขึ้นจากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ของวิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริง โครงสร้างของโปรแกรม TORSION2D จะคล้ายคลึงกับ LINEAL2D โดยมีข้อแตกต่างเนื่องจากแบบจำลองสปริงเอลิเมนต์แบบทอร์ชันสปริงจะเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อจุดแสดงในรูปที่ 3.10 ดังนั้นจึงไม่จำเป็นต้องทำการแปลงเอลิเมนต์เพื่อตรวจสอบการไขว้ตัวของเอลิเมนต์แต่อย่างใด รวมถึงไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ของ TORSION2D จะแตกต่างกับของ LINEAL2D จึงทำให้ขั้นตอนการคำนวณในส่วนนของโปรแกรมย่อย CEM แตกต่างกัน ซึ่งขั้นตอนการทำงานนของโปรแกรม TORSION2D มีรายละเอียดดังนี้

- 4.2.1.1 เริ่มต้นการทำงานโดยการอ่านแฟ้มข้อมูลนำเข้าของปัญหา (Input File) ได้แก่ จำนวนจุดต่อและจำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมด



ของปัญหา, ตำแหน่งของจุดต่อต่าง ๆ, ลักษณะเงื่อนไขขอบเขต, ค่าเคลื่อนตัวที่ขอบเขต, หมายเลขจุดต่อที่ประกอบกันขึ้นเป็นสปริงเอลิเมนต์, จำนวนและตำแหน่งของโหนดในกรณีที่มีโหนดภายนอกมากระทำ ซึ่งการอ่านค่าทั้งหมดนี้จะอยู่ในช่วงแรกของโปรแกรมหลัก

- 4.2.1.2 เรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE CEM] เพื่อทำการสร้างเอลิเมนต์เมตริกซ์ต่าง ๆ โดยจะทำการตรวจสอบความสมบูรณ์ของเอลิเมนต์ (Element Validity) ทุก ๆ เอลิเมนต์ที่ถูกสร้างขึ้นในแบบจำลอง ในขณะที่ทำการสร้างเอลิเมนต์เมตริกซ์  $\{F^{ijk}\}_{torsion}$  (6x1),  $[K^{ijk}]_{torsion}$  (6x6) และ  $\{\delta^{ijk}\}$  (6x1) ดังสมการ (3.59) - (3.62) แล้วส่งผ่านเอลิเมนต์เมตริกซ์ที่ได้สร้างขึ้นนี้ไปสร้างเมตริกซ์ใหญ่ของระบบสมการรวมโดยเรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE ASSEMBLE]
- 4.2.1.3 กำหนดเงื่อนไขขอบเขตลงในระบบสมการรวม เช่นบางจุดต่อจะถูกตรึงแน่นไม่สามารถเคลื่อนที่ได้ ในขณะที่จุดต่อ ณ บริเวณขอบเขตของโดเมนจะกำหนดเป็นค่าเคลื่อนตัวในช่วงย่อย ๆ โดยเรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE APPLYBC]
- 4.2.1.4 แก่ระบบสมการรวมด้วยวิธี Gauss Elimination เพื่อหาค่าเคลื่อนตัว  $u$  และ  $v$  ที่ทุก ๆ จุดต่อ โดยเรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE SOLVE]
- 4.2.1.5 คำนวณหาคุณภาพของเอลิเมนต์หลังจากเกิดการเคลื่อนที่จากสมการ (3.100) จากนั้นทำการพิมพ์ผลลัพธ์ที่คำนวณได้ ซึ่งได้แก่ค่าเคลื่อนตัว  $u$  และ  $v$  ที่ทุก ๆ จุดต่อและคุณภาพของเอลิเมนต์ลงในไฟล์ที่ต้องการ เพื่อนำไปใช้แสดงผลในรูปแบบกราฟฟิคต่อไป
- 4.2.1.6 ตรวจสอบความสมบูรณ์ของเอลิเมนต์หลังจากเกิดการเคลื่อนที่ นั่นคือ เอลิเมนต์ที่ได้จะต้องไม่เกิดการไขว้ตัวหรือบิดตัว ในกรณี

ที่พบการไขว้ตัวหรือบิดตัวของเอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ จะจบการทำงานทันที

- 4.2.1.7 นำค่าเคลื่อนตัว  $u$  และ  $v$  ที่คำนวณได้จากข้อ 4.2.1.4 มาทำการปรับปรุง ตำแหน่งของจุดต่อ โดยเรียกโปรแกรมย่อย [SUBROUTINE UPDATE] เพื่อหาค่าเคลื่อนตัว  $u$  และ  $v$  ใหม่ สำหรับการคำนวณในช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อยถัดไป ซึ่งจะซ้ำซ้ำ ตั้งแต่ขั้นตอนในข้อ 4.2.1.2 - 4.2.1.7 และเมื่อทำการคำนวณจนครบจำนวนครั้งของช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อยแล้วโปรแกรมจึงจะจบการทำงาน

ลำดับขั้นตอนต่าง ๆ นี้สามารถสรุปดังแสดงในรูปที่ 4.13

#### 4.2.2 รายละเอียดของโปรแกรม TORSION2D

รายละเอียดของโปรแกรม TORSION2D ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ข.

#### 4.2.3 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่โปรแกรม TORSION2D ต้องการ

ลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่โปรแกรม TORSION2D ต้องการจะคล้ายคลึงกับ LINEAL2D โดยสามารถจำแนกออกเป็น 5 ส่วนย่อยได้ดังต่อไปนี้

##### ส่วนที่ 1 ประโยคอธิบายกำกับลักษณะของไฟล์

บรรทัดแรก ตัวเลขระบุจำนวนบรรทัดที่เป็นตัวอักษร

บรรทัดต่อไป ประโยคต่าง ๆ ที่เป็นหัวเรื่องของปัญหาโดยมีจำนวนบรรทัดเท่าที่ระบุไว้

ตัวอย่างเช่น :

2

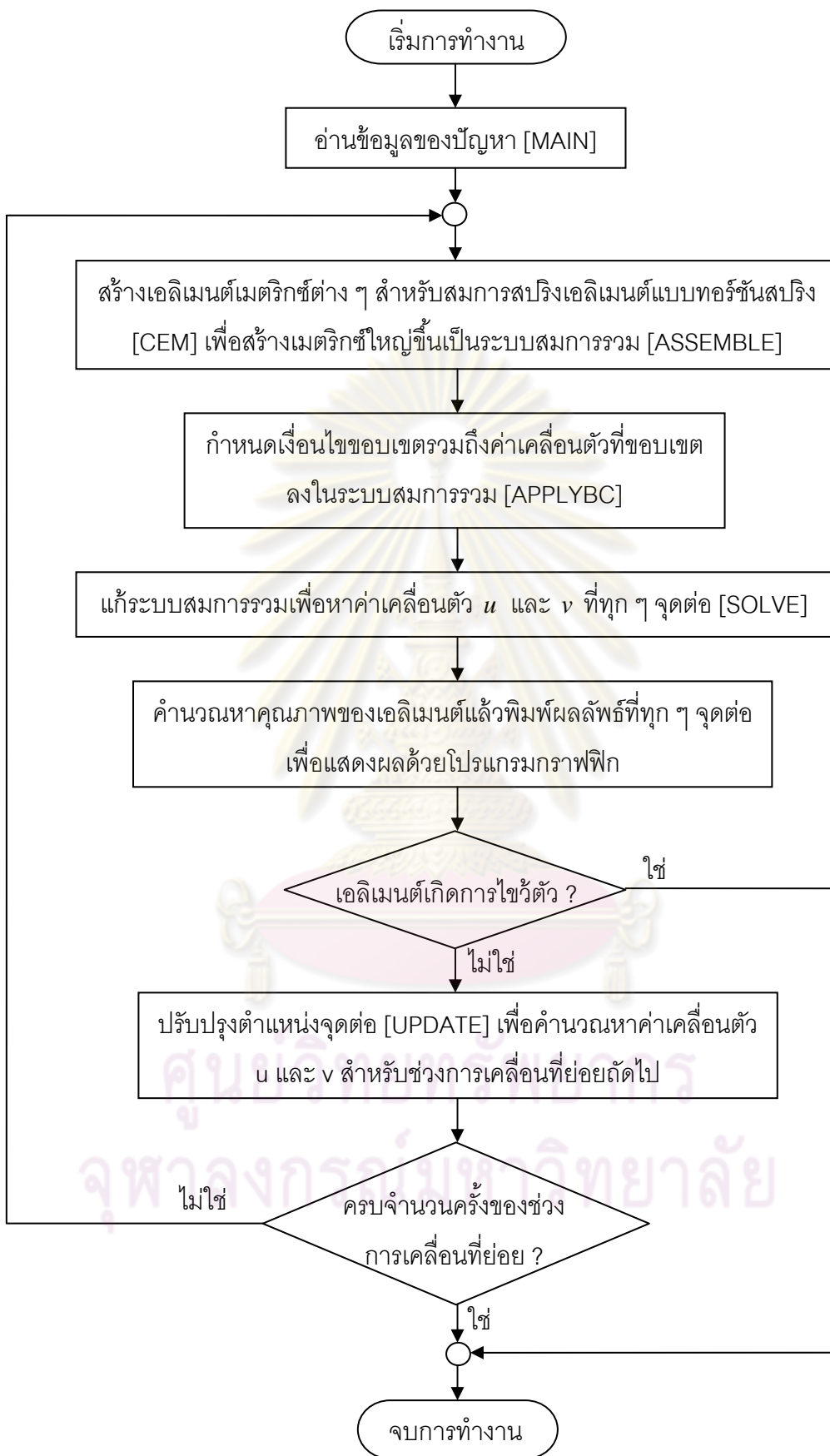
A TORSIONAL SPRING ANALOGY TECHNIQUE COMPUTER PROGRAM

A TRANSLATING RECTANGLE IN ANOTHER FIXED ONE PROBLEM

##### ส่วนที่ 2 ขนาดของปัญหา

บรรทัดแรก คำระบุจำนวนจุดต่อ, จำนวนเอลิเมนต์และจำนวนแรงภายนอก

บรรทัดต่อไป ตัวเลขจำนวนจุดต่อ, จำนวนเอลิเมนต์และจำนวนแรงภายนอก



รูปที่ 4.13 ลักษณะขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม TORSION2D

ตัวอย่างเช่น :

NPOIN	NELEM	NFORCE
336	576	1

### ส่วนที่ 3 ลักษณะของจุดต่อและเงื่อนไขขอบเขต

บรรทัดแรก	คำระบุลักษณะของจุดต่อและเงื่อนไขขอบเขต
บรรทัดต่อไป	ตัวเลขแสดงหมายเลขจุดต่อ, ตำแหน่งจุดต่อในแกน $X$ และ $Y$ , เงื่อนไขขอบเขตในแกน $X$ และ $Y$ และค่าเคลื่อนตัวที่ขอบเขตในแกน $X$ และ $Y$ โดยมีจำนวนบรรทัดเท่ากับจำนวนจุดต่อ

ตัวอย่างเช่น :

NODE	X	Y	IBCX	IBCY	UMBX	VMBY
1	0	0	1	1	0	0
2	0.5	0	1	1	0	0
3	1	0	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
334	7.5	8.5	2	2	2.8	2.8
335	8	8.5	0	0	0	0
336	8.5	8.5	2	2	2.8	2.8

โดยกำหนดให้เงื่อนไขขอบเขต IBC ในแกน  $X$  และ  $Y$  มีลักษณะเดียวกับโปรแกรม LINEAL2D

### ส่วนที่ 4 ลักษณะของเอลิเมนต์

บรรทัดแรก	คำระบุลักษณะของเอลิเมนต์
บรรทัดต่อไป	ตัวเลขแสดงหมายเลขเอลิเมนต์และหมายเลขจุดต่อทั้งสามในทิศทางเข็มนาฬิกาที่ประกอบขึ้นเป็นเอลิเมนต์นั้น

ตัวอย่างเช่น :

ELEMENT	I	J	K
1	1	19	14
2	1	2	19
3	2	20	19
⋮	⋮	⋮	⋮

574	335	336	310
575	336	311	310
576	336	305	311

### ส่วนที่ 5 แรงภายนอกที่มากกระทำที่จุดต่อต่าง ๆ

บรรทัดแรก คำระบุแรงภายนอก

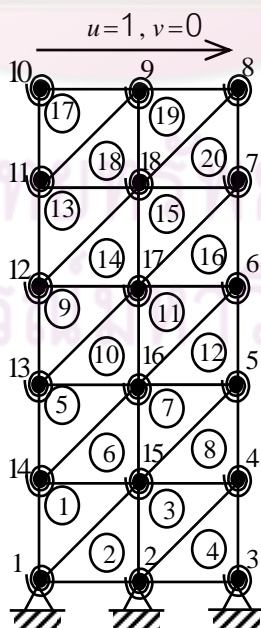
บรรทัดต่อไป ตัวเลขจุดต่อที่มีแรงภายนอกกระทำ, แรงภายนอกในแกน  $X$  และแรงภายนอกในแกน  $Y$  โดยมีจำนวนบรรทัดเท่ากับ NFORCE ที่ระบุไว้ในข้อมูลส่วนที่ 2

ตัวอย่างเช่น :

NPOIN	FX	FY
1	0	0

#### 4.2.4 ตัวอย่างการใช้โปรแกรม TORSION2D

ในหัวข้อนี้จะแสดงตัวอย่างการนำโปรแกรม TORSION2D ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นมาใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ซึ่งเป็นปัญหาที่มีลักษณะเช่นเดียวกันกับปัญหาที่วิเคราะห์ด้วยโปรแกรม LINEAL2D แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เมื่อนำไปวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม TORSION2D ประกอบด้วย 18 จุดต่อและ 20 เอลิเมนต์รวมถึงเงื่อนไขขอบเขตแสดงดังรูปที่ 4.14



รูปที่ 4.14 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาเมื่อวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม TORSION2D

ไฟล์ข้อมูลที่สอดคล้องกับแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหานี้กำหนดให้ชื่อว่า  
 "RECT\_TOR.DAT" ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

2

A TORSIONAL SPRING ANALOGY TECHNIQUE COMPUTER PROGRAM

AN UPPER MOVING BOUNDARY OF RECTANGLE PROBLEM

NPOIN	NELEM	NFORCE				
NODE	X	Y	IBCX	IBCY	UMBX	VMBY
1	0	0	1	1	0	0
2	1	0	1	1	0	0
3	2	0	1	1	0	0
4	2	1	0	0	0	0
5	2	2	0	0	0	0
6	2	3	0	0	0	0
7	2	4	0	0	0	0
8	2	5	2	2	1	1
9	1	5	2	2	1	1
10	0	5	2	2	1	1
11	0	4	0	0	0	0
12	0	3	0	0	0	0
13	0	2	0	0	0	0
14	0	1	0	0	0	0
15	1	1	0	0	0	0
16	1	2	0	0	0	0
17	1	3	0	0	0	0
18	1	4	0	0	0	0
ELEMENT	I	J	K			
1	1	15	14			
2	1	2	15			
3	2	4	15			
4	2	3	4			
5	14	16	13			
6	14	15	16			
7	15	5	16			
8	15	4	5			
9	13	17	12			
10	13	16	17			
11	16	6	17			
12	16	5	6			
13	12	18	11			
14	12	17	18			

15	17	7	18
16	17	6	7
17	11	9	10
18	11	18	9
19	18	8	9
20	18	7	8
NPOIN	FX	FY	
1	0	0	

รูปที่ 4.15 ลักษณะข้อมูลในไฟล์ “RECT\_TOR.DAT”

ลำดับขั้นตอนที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์เมื่อผู้ใช้ทำการคำนวณโดยใช้โปรแกรม TORSION2D จะเหมือนกับ LINEAL2D ทุกประการดังแสดงในรูปที่ 4.16

```

> TORSION2D          <Enter>

PLEASE ENTER THE INPUT FILE NAME:
RECT_TOR.DAT

*** THE FINITE ELEMENT MODEL CONSISTS OF  18 NODES AND  20 ELEMENTS ***

PLEASE INPUT NO. OF CALCULATION STEP(S) FOR MOVING BOUNDARY DISPLACEMENT (MAXIMUM OF 100
STEPS):
1

PLEASE ENTER FILE NAME FOR DISPLACEMENT SOLUTIONS :
RECT_TOR_SOL.OUT

PLEASE ENTER PLOTTING FILE NAME (*.PLT):
RECT_TOR_DEF.PLT

PLEASE ENTER FILE NAME FOR MEASURING ELEMENT QUALITY (*.PLT):
RECT_TOR_QLT.PLT

*** STARTING CALCULATION STEP: 1 OF TOTAL 1 STEP(S) ***

*** ESTABLISHING ELEMENT MATRICES AND ASSEMBLING ELEMENT EQUATIONS ***

*** APPLYING BOUNDARY CONDITIONS ***

*** SOLVING A SET OF SIMULTANEOUS EQUATIONS FOR DISPLACEMENT SOLUTIONS ***
(TOTAL OF 36 EQUATIONS)

```

!!! COMPLETELY DONE !!!

\*\*\* THANK YOU \*\*\*

รูปที่ 4.16 ลำดับขั้นตอนที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ในขณะที่ใช้โปรแกรม TORSION2D

ผลลัพธ์ของค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อในแนวแกนทั้งสอง ซึ่งบรรจุอยู่ในไฟล์ชื่อ "RECT\_TOR\_SOL.OUT" แสดงได้ดังรูปที่ 4.17

FOR CALCULATION STEP: 1 OF TOTAL 1 STEP(S)

NODAL DISPLACEMENT SOLUTIONS [ 18 ]:

NODE	U	V
1	0.000000E+00	0.000000E+00
2	0.000000E+00	0.000000E+00
3	0.000000E+00	0.000000E+00
4	0.873868E-01	-0.154014E+00
5	0.330708E+00	-0.244666E+00
6	0.631444E+00	-0.251451E+00
7	0.889299E+00	-0.165113E+00
8	0.100000E+01	0.000000E+00
9	0.100000E+01	0.000000E+00
10	0.100000E+01	0.000000E+00
11	0.912613E+00	0.154014E+00
12	0.669292E+00	0.244666E+00
13	0.368556E+00	0.251451E+00
14	0.110701E+00	0.165113E+00
15	0.134422E+00	0.725835E-02
16	0.365358E+00	0.329936E-02
17	0.634642E+00	-0.329906E-02
18	0.865578E+00	-0.725817E-02

ELEMENT NO. AS FOLLOWING HAS NEGATIVE AREA:

TOTAL INVALID ELEMENT(S): 0

รูปที่ 4.17 ลักษณะผลลัพธ์ของค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อในไฟล์ "RECT\_TOR\_SOL.OUT"

สำหรับไฟล์ "RECT\_TOR\_DEF.PLT" ที่เกิดขึ้นและสามารถนำไปแสดงผลการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของเอลิเมนต์ แสดงได้ดังรูปที่ 4.18

TITLE = "FE PLOTTING DATA BY TORSIONAL SPRING TECHNIQUE"

VARIABLES = "X-CO", "Y-CO"

ZONE T="COORD", N= 18, E= 20, F=FEPOINT, ET=TRIANGLE



0.000000E+00	0.000000E+00	
0.100000E+01	0.000000E+00	
0.200000E+01	0.000000E+00	
0.200000E+01	0.100000E+01	
0.200000E+01	0.200000E+01	
0.200000E+01	0.300000E+01	
0.200000E+01	0.400000E+01	
0.200000E+01	0.500000E+01	
0.100000E+01	0.500000E+01	
0.000000E+00	0.500000E+01	
0.000000E+00	0.400000E+01	
0.000000E+00	0.300000E+01	
0.000000E+00	0.200000E+01	
0.000000E+00	0.100000E+01	
0.100000E+01	0.100000E+01	
0.100000E+01	0.200000E+01	
0.100000E+01	0.300000E+01	
0.100000E+01	0.400000E+01	
1	15	14
1	2	15
2	4	15
2	3	4
14	16	13
14	15	16
15	5	16
15	4	5
13	17	12
13	16	17
16	6	17
16	5	6
12	18	11
12	17	18
17	7	18
17	6	7
11	9	10
11	18	9
18	8	9
18	7	8

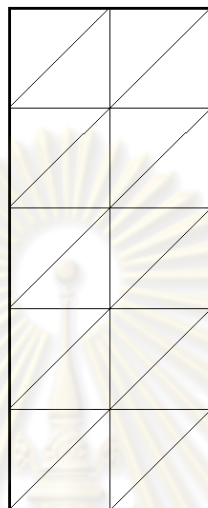
ZONE T="COORD AT STEP: 1 ", N= 18, E= 20, F=FEPOINT, ET=TRIANGLE

0.000000E+00	0.000000E+00
--------------	--------------

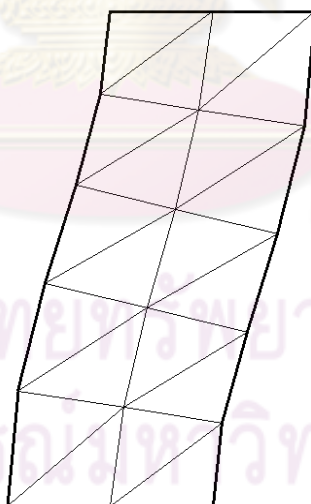
0.100000E+01	0.000000E+00	
0.200000E+01	0.000000E+00	
0.208739E+01	0.845986E+00	
0.233071E+01	0.175533E+01	
0.263144E+01	0.274855E+01	
0.288930E+01	0.383489E+01	
0.300000E+01	0.500000E+01	
0.200000E+01	0.500000E+01	
0.100000E+01	0.500000E+01	
0.912613E+00	0.415401E+01	
0.669292E+00	0.324467E+01	
0.368556E+00	0.225145E+01	
0.110701E+00	0.116511E+01	
0.113442E+01	0.100726E+01	
0.136536E+01	0.200330E+01	
0.163464E+01	0.299670E+01	
0.186558E+01	0.399274E+01	
1	15	14
1	2	15
2	4	15
2	3	4
14	16	13
14	15	16
15	5	16
15	4	5
13	17	12
13	16	17
16	6	17
16	5	6
12	18	11
12	17	18
17	7	18
17	6	7
11	9	10
11	18	9
18	8	9
18	7	8

รูปที่ 4.18 ลักษณะไฟล์ "RECT\_TOR\_DEF.PLT" เพื่อใช้ในการแสดงผลพีธ  
การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของเอลิเมนต์

แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ก่อนและหลังการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของเอลิเมนต์ที่วิเคราะห์  
ด้วยโปรแกรม TORSION2D แสดงได้ดังรูปที่ 4.19 และ 4.20 ตามลำดับ



รูปที่ 4.19 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ก่อนการเปลี่ยนแปลงที่ได้จากไฟล์  
“RECT\_TOR\_DEF.PLT”



รูปที่ 4.20 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์หลังการเปลี่ยนแปลงที่ได้จากไฟล์  
“RECT\_TOR\_DEF.PLT”

รูปแบบลักษณะของไฟล์ข้อมูล “RECT\_TOR\_QLT.PLT” และกราฟซึ่งแสดงข้อมูล  
คุณภาพของเอลิเมนต์ก่อนและหลังการเปลี่ยนแปลงแสดงได้ดังรูปที่ 4.21 และ 4.22 ตามลำดับ

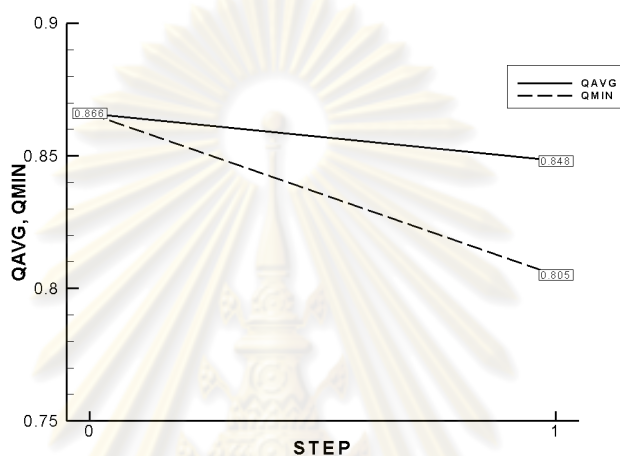
TITLE = "COMPARISON CHART OF ELEMENT QUALITY BETWEEN EACH METHOD"

VARIABLES = "STEP", "QAVG", "QMIN"

ZONE T="TORSION", I= 2 , DATAPACKING=POINT

0	0.86602540	0.86602540
1	0.84805639	0.80506408

รูปที่ 4.21 ลักษณะไฟล์ "RECT\_TOR\_QLT.PLT" เพื่อใช้ในการแสดงคุณภาพของเอลิเมนต์



รูปที่ 4.22 กราฟแสดงคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากไฟล์ "RECT\_TOR\_QLT.PLT"

### 4.3 โปรแกรม ELASTIC2D

#### 4.3.1 ลักษณะของโปรแกรม ELASTIC2D

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ELASTIC2D ถูกประดิษฐ์ขึ้นจากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ของวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้ ข้อแตกต่างระหว่างโปรแกรม ELASTIC2D และ TORSION2D คือโปรแกรม ELASTIC2D จะเพิ่มคุณสมบัติของวัตถุเข้าไปในการคำนวณด้วย รวมถึงมีไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ที่แตกต่างกัน จึงทำให้ขั้นตอนการคำนวณในส่วนของโปรแกรมน้อย CEM แตกต่างกัน อย่างไรก็ตามโครงสร้างส่วนอื่น ๆ ของโปรแกรม ELASTIC2D จะเหมือนกับ TORSION2D ทุกประการ

#### 4.3.2 รายละเอียดของโปรแกรม ELASTIC2D

รายละเอียดของโปรแกรม ELASTIC2D ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ค.

### 4.3.3 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่ใช้โปรแกรม ELASTIC2D ต้องการ

ลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่ใช้โปรแกรม ELASTIC2D ต้องการจะเหมือนกับ TORSION2D ทุกประการ เพียงแต่เพิ่มรายละเอียดของคุณสมบัติต่าง ๆ เข้าไปในส่วนที่ 3 ดังนี้

#### ส่วนที่ 3 คุณสมบัติต่าง ๆ ของปัญหา

บรรทัดแรก      คำระบุคุณสมบัติต่าง ๆ  
 บรรทัดต่อไป    ตัวเลขแสดงค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น, อัตราส่วนของปัวส์ซงและความหนาของวัตถุ

ตัวอย่างเช่น :

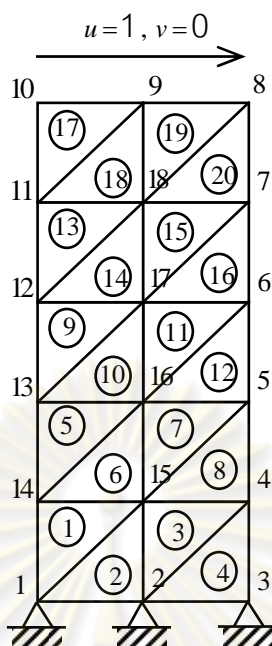
ELAS	PR	THICK
1.E+10	0.3	0.1

โดย ELAS, PR และ THICK คือค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น, อัตราส่วนของปัวส์ซงและความหนาของวัตถุตามลำดับ

### 4.3.4 ตัวอย่างการใช้โปรแกรม ELASTIC2D

ในหัวข้อนี้จะแสดงตัวอย่างการนำโปรแกรม ELASTIC2D ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นมาใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ซึ่งเป็นปัญหาเดียวกันกับปัญหาที่วิเคราะห์ด้วยโปรแกรม LINEAL2D และ TORSION2D ซึ่งแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เมื่อนำไปวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม ELASTIC2D จะมีจำนวน 18 จุดต่อและ 20 เอลิเมนต์เช่นเดียวกับแบบจำลองของ TORSION2D ลักษณะของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตแสดงดังรูปที่ 4.23

ถ้ากำหนดให้คุณสมบัติต่าง ๆ ของปัญหาเป็นดังนี้ ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่นเท่ากับ  $7E+10$ , อัตราส่วนของปัวส์ซงเท่ากับ 0.3 และความหนาของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าเท่ากับ 0.1 จะได้ไฟล์ข้อมูลที่มีชื่อว่า "RECT\_ELAS.DAT" ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้



รูปที่ 4.23 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา  
เมื่อวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม ELASTIC2D

2

AN ELASTIC MEDIUM ANALOGY TECHNIQUE COMPUTER PROGRAM

AN UPPER MOVING BOUNDARY OF RECTANGLE PROBLEM

NPOIN	NELEM	NFORCE				
18	20	1				
ELAS	PR	THICK				
7.E+10	0.3	0.1				
NODE	X	Y	IBCX	IBCY	UMBX	VMBY
1	0	0	1	1	0	0
2	1	0	1	1	0	0
3	2	0	1	1	0	0
4	2	1	0	0	0	0
5	2	2	0	0	0	0
6	2	3	0	0	0	0
7	2	4	0	0	0	0
8	2	5	2	2	1	1
9	1	5	2	2	1	1
10	0	5	2	2	1	1
11	0	4	0	0	0	0
12	0	3	0	0	0	0
13	0	2	0	0	0	0

14	0	1	0	0	0	0
15	1	1	0	0	0	0
16	1	2	0	0	0	0
17	1	3	0	0	0	0
18	1	4	0	0	0	0
ELEMENT	I	J	K			
1	1	15	14			
2	1	2	15			
3	2	4	15			
4	2	3	4			
5	14	16	13			
6	14	15	16			
7	15	5	16			
8	15	4	5			
9	13	17	12			
10	13	16	17			
11	16	6	17			
12	16	5	6			
13	12	18	11			
14	12	17	18			
15	17	7	18			
16	17	6	7			
17	11	9	10			
18	11	18	9			
19	18	8	9			
20	18	7	8			
NPOIN	FX	FY				
1	0	0				

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูปที่ 4.24 ลักษณะข้อมูลในไฟล์ "RECT\_ELAS.DAT"

ลำดับขั้นตอนที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์เมื่อผู้ใช้ทำการคำนวณโดยใช้โปรแกรม ELASTIC2D จะเหมือนกับ TORSION2D ทุกประการ เพียงแต่ผู้ใช้ต้องกำหนดลักษณะของปัญหาว่าเป็นปัญหาความเค้นในระนาบหรือความเครียดในระนาบลงไปด้วย ดังแสดงในรูปที่ 4.25

> ELASTIC2D                    <Enter>

PLEASE ENTER THE INPUT FILE NAME:

RECT\_ELAS.DAT

\*\*\* THE FINITE ELEMENT MODEL CONSISTS OF 18 NODES AND 20 ELEMENTS \*\*\*

WHICH TYPE OF ELASTIC PROBLEM? (1 = PLANE STRESS, 2 = PLANE STRAIN)

1

PLEASE INPUT NO. OF CALCULATION STEP(S) FOR MOVING BOUNDARY DISPLACEMENT (MAXIMUM OF 100 STEPS):

1

PLEASE ENTER FILE NAME FOR DISPLACEMENT SOLUTIONS :

RECT\_ELAS\_SOL.OUT

PLEASE ENTER PLOTTING FILE NAME (\*.PLT):

RECT\_ELAS\_DEF.PLT

PLEASE ENTER FILE NAME FOR MEASURING ELEMENT QUALITY (\*.PLT):

RECT\_ELAS\_QLT.PLT

\*\*\* STARTING CALCULATION STEP: 1 OF TOTAL 1 STEP(S) FOR "PLANE STRESS" PROBLEM \*\*\*

\*\*\* ESTABLISHING ELEMENT MATRICES AND ASSEMBLING ELEMENT EQUATIONS \*\*\*

\*\*\* APPLYING BOUNDARY CONDITIONS \*\*\*

\*\*\* SOLVING A SET OF SIMULTANEOUS EQUATIONS FOR DISPLACEMENT SOLUTIONS \*\*\*

( TOTAL OF 36 EQUATIONS )

!!! COMPLETELY DONE !!!

\*\*\* THANK YOU \*\*\*

รูปที่ 4.25 ลำดับขั้นตอนที่ปรากฏบนจอคอมพิวเตอร์ในขณะที่ใช้โปรแกรม ELASTIC2D

ผลลัพธ์ของค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อในแนวแกนทั้งสอง ซึ่งบรรจุอยู่ในไฟล์ชื่อ "RECT\_ELAS\_SOL.OUT" แสดงได้ดังรูปที่ 4.26



FOR CALCULATION STEP: 1 OF TOTAL 1 STEP(S) FOR "PLANE STRESS"

NODAL DISPLACEMENT SOLUTIONS [ 18]:

NODE	U	V
1	0.000000E+00	0.000000E+00
2	0.000000E+00	0.000000E+00
3	0.000000E+00	0.000000E+00
4	0.143012E+00	-0.108534E+00
5	0.364687E+00	-0.165862E+00
6	0.616266E+00	-0.166382E+00
7	0.841687E+00	-0.111966E+00
8	0.100000E+01	0.000000E+00
9	0.100000E+01	0.000000E+00
10	0.100000E+01	0.000000E+00
11	0.856988E+00	0.108534E+00
12	0.635313E+00	0.165862E+00
13	0.383734E+00	0.166382E+00
14	0.158313E+00	0.111966E+00
15	0.138489E+00	-0.354245E-02
16	0.370216E+00	-0.105598E-02
17	0.629784E+00	0.105598E-02
18	0.861511E+00	0.354245E-02

ELEMENT NO. AS FOLLOWING HAS NEGATIVE AREA:

TOTAL INVALID ELEMENT(S): 0

รูปที่ 4.26 ลักษณะผลลัพธ์ของค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อในไฟล์ "RECT\_ELAS\_SOL.OUT"

สำหรับไฟล์ "RECT\_ELAS\_DEF.PLT" ที่เกิดขึ้นและสามารถนำไปแสดงผลภาพการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของเอลิเมนต์ แสดงได้ดังรูปที่ 4.27

TITLE = "FE PLOTTING DATA BY ELASTIC MEDIUM MTD."

VARIABLES = "X-CO", "Y-CO"

ZONE T="COORD", N= 18, E= 20, F=FEPOINT, ET=TRIANGLE

0.000000E+00	0.000000E+00
0.100000E+01	0.000000E+00
0.200000E+01	0.000000E+00
0.200000E+01	0.100000E+01
0.200000E+01	0.200000E+01
0.200000E+01	0.300000E+01
0.200000E+01	0.400000E+01

0.200000E+01	0.500000E+01
0.100000E+01	0.500000E+01
0.000000E+00	0.500000E+01
0.000000E+00	0.400000E+01
0.000000E+00	0.300000E+01
0.000000E+00	0.200000E+01
0.000000E+00	0.100000E+01
0.100000E+01	0.100000E+01
0.100000E+01	0.200000E+01
0.100000E+01	0.300000E+01
0.100000E+01	0.400000E+01

1	15	14
---	----	----

1	2	15
---	---	----

2	4	15
---	---	----

2	3	4
---	---	---

14	16	13
----	----	----

14	15	16
----	----	----

15	5	16
----	---	----

15	4	5
----	---	---

13	17	12
----	----	----

13	16	17
----	----	----

16	6	17
----	---	----

16	5	6
----	---	---

12	18	11
----	----	----

12	17	18
----	----	----

17	7	18
----	---	----

17	6	7
----	---	---

11	9	10
----	---	----

11	18	9
----	----	---

18	8	9
----	---	---

18	7	8
----	---	---

ZONE T="COORD AT STEP: 1", N= 18, E= 20, F=FEPOINT, ET=TRIANGLE

0.000000E+00	0.000000E+00
0.100000E+01	0.000000E+00
0.200000E+01	0.000000E+00
0.214301E+01	0.891466E+00
0.236469E+01	0.183414E+01
0.261627E+01	0.283362E+01
0.284169E+01	0.388803E+01
0.300000E+01	0.500000E+01

0.200000E+01	0.500000E+01
0.100000E+01	0.500000E+01
0.856988E+00	0.410853E+01
0.635313E+00	0.316586E+01
0.383734E+00	0.216638E+01
0.158313E+00	0.111197E+01
0.113849E+01	0.996458E+00
0.137022E+01	0.199894E+01
0.162978E+01	0.300106E+01
0.186151E+01	0.400354E+01

1	15	14
---	----	----

1	2	15
---	---	----

2	4	15
---	---	----

2	3	4
---	---	---

14	16	13
----	----	----

14	15	16
----	----	----

15	5	16
----	---	----

15	4	5
----	---	---

13	17	12
----	----	----

13	16	17
----	----	----

16	6	17
----	---	----

16	5	6
----	---	---

12	18	11
----	----	----

12	17	18
----	----	----

17	7	18
----	---	----

17	6	7
----	---	---

11	9	10
----	---	----

11	18	9
----	----	---

18	8	9
----	---	---

18	7	8
----	---	---

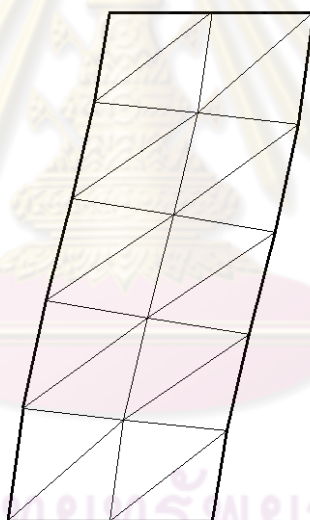
รูปที่ 4.27 ลักษณะไฟล์ "RECT\_ELAS\_DEF.PLT" เพื่อใช้ในการแสดงผลลัพธ์

การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของเอลิเมนต์

แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ก่อนและหลังการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของเอลิเมนต์ที่วิเคราะห์ด้วยโปรแกรม ELASTIC2D แสดงได้ดังรูปที่ 4.28 และ 4.29 ตามลำดับ ในขณะที่รูปแบบลักษณะของไฟล์ข้อมูล "RECT\_ELAS\_QLT.PLT" และกราฟซึ่งแสดงข้อมูลคุณภาพของเอลิเมนต์แสดงดังรูปที่ 4.30 และ 4.31 ตามลำดับ



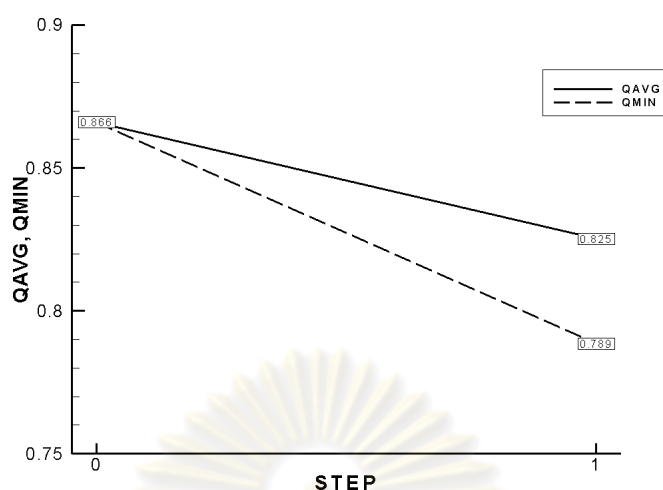
รูปที่ 4.28 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ก่อนการเปลี่ยนแปลงที่ได้จากไฟล์  
“RECT\_ELAS\_DEF.PLT”



รูปที่ 4.29 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์หลังการเปลี่ยนแปลงที่ได้จากไฟล์  
“RECT\_ELAS\_DEF.PLT”

```
TITLE = "COMPARISON CHART OF ELEMENT QUALITY BETWEEN EACH METHOD"
VARIABLES = "STEP", "QAVG", "QMIN"
ZONE T="ELASTIC", I= 2 , DATAPACKING=POINT
      0      0.86602539      0.86602539
      1      0.82519444      0.78852147
```

รูปที่ 4.30 ลักษณะไฟล์ “RECT\_ELAS\_QLT.PLT” เพื่อใช้ในการแสดงคุณภาพของเอลิเมนต์



รูปที่ 4.31 กราฟแสดงคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากไฟล์ “RECT\_ELAS\_QLT.PLT”

สิ่งสำคัญของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ทำการประดิษฐ์ขึ้นคือต้องมีความสอดคล้องกับหลักการและสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ถูกสร้างขึ้นเพื่อใช้ในการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ของแต่ละวิธีทั้งนี้เพื่อให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความถูกต้องและเชื่อถือได้ ซึ่งในบทต่อไปจะทำการทดสอบความสอดคล้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์กับตัวอย่างปัญหาที่มีรูปแบบการเคลื่อนที่ของขอบเขตอย่างง่าย

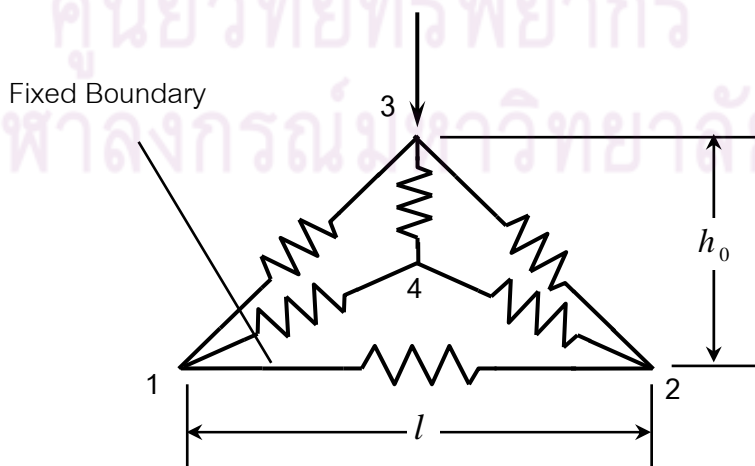
ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บทที่ 5

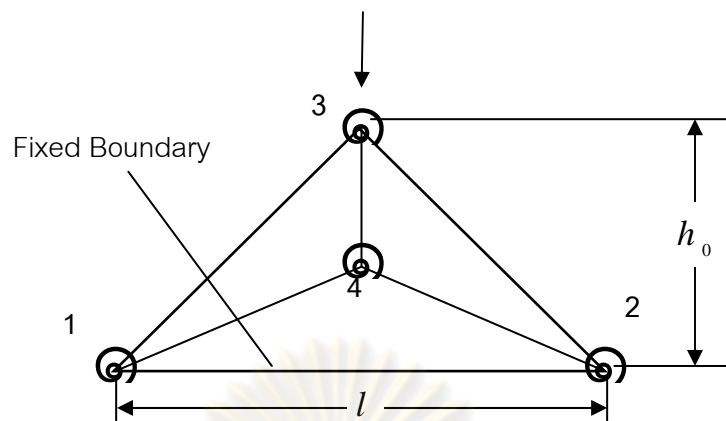
### การตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์

ในบทนี้จะเป็นการตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อใช้ในการหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ ได้แก่ โปรแกรม LINEAL2D, TORSION2D และ ELASTIC2D ทั้งนี้เนื่องจากในปัญหาที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ส่วนใหญ่จะไม่ทราบผลเฉลยแม่นยำตรง (Exact Solution) ดังนั้นในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์จะพิจารณาจากรูปแบบการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์หลังจากขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ รวมถึงโอกาสที่เอลิเมนต์จะเกิดการไขว้ตัว ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์เหล่านี้จะต้องสอดคล้องกับหลักการและสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของแต่ละวิธี โดยจะนำไปทดสอบกับปัญหาที่มีรูปแบบการเคลื่อนที่ของขอบเขตอย่างง่าย ทั้งนี้เพื่อเป็นการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมก่อนที่จะนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาที่มีความซับซ้อนต่อไป

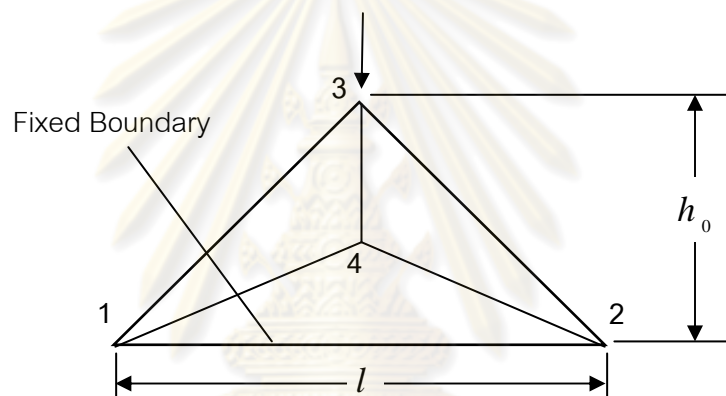
สำหรับปัญหาที่จะนำมาทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมจะมีโครงสร้างเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วประกอบด้วย 4 จุดต่อ และมีอัตราส่วน  $l : h_0$  เท่ากับ 2:1 โดย  $l$  และ  $h_0$  คือความยาวฐานและความสูงของสามเหลี่ยมหน้าจั่วตามลำดับ และกำหนดเงื่อนไขขอบเขตโดยให้จุดต่อ 1 และ 2 ถูกตรึงแน่นในขณะที่จุดต่อ 3 เคลื่อนที่ลงในแนวตั้ง แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เมื่อทำการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม LINEAL2D จะประกอบด้วย 4 จุดต่อและ 6 เอลิเมนต์ และเมื่อทำการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม TORSION2D และ ELASTIC2D จะประกอบด้วย 4 จุดต่อและ 3 เอลิเมนต์ โดยลักษณะของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตทั้งสามแบบแสดงได้ดังรูปที่ 5.1



(ก) โปรแกรม LINEAL2D



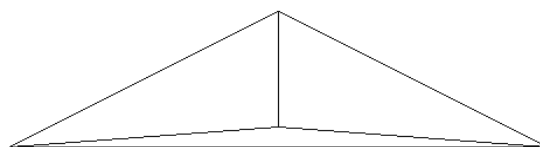
(ข) โปรแกรม TORSION2D



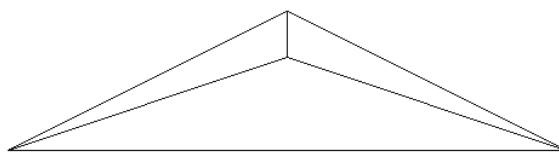
(ค) โปรแกรม ELASTIC2D

รูปที่ 5.1 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาโครงสร้างรูปสามเหลี่ยมเมื่อทำการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมต่าง ๆ

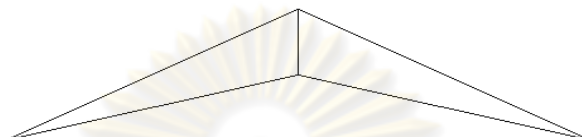
ถ้ากำหนดให้จุดต่อ 3 เคลื่อนที่ลงมาที่ระยะทางต่าง ๆ ได้แก่ที่ระยะ 50%, 58%, 59% และ 90% ของความสูง  $h_0$  จะได้รูปแบบการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากแต่ละโปรแกรมดังแสดงในรูปที่ 5.2-5.5 โดยจะแสดงการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์เมื่อจุดต่อ 3 เคลื่อนที่ไปเป็นระยะทาง 50%, 58%, 59% และ 90% ของความสูง  $h_0$  ตามลำดับ



(ก) โปรแกรม LINEAL2D

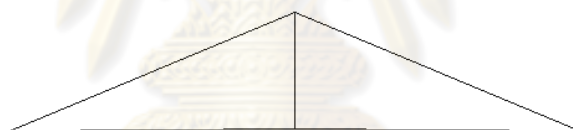


(ข) โปรแกรม TORSION2D

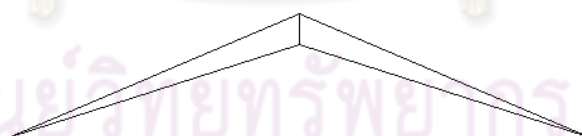


(ค) โปรแกรม ELASTIC2D

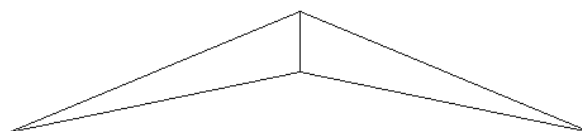
รูปที่ 5.2 ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ เมื่อขอบเขตเคลื่อนที่ลงมา เป็นระยะทาง 50% ของความสูง  $h_0$



(ก) โปรแกรม LINEAL2D



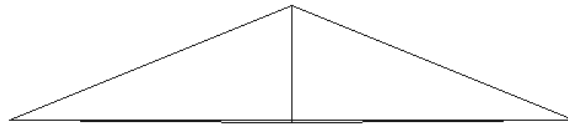
(ข) โปรแกรม TORSION2D



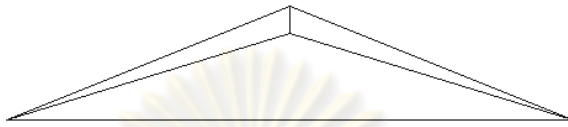
(ค) โปรแกรม ELASTIC2D

รูปที่ 5.3 ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ เมื่อขอบเขตเคลื่อนที่ลงมา เป็นระยะทาง 58% ของความสูง  $h_0$

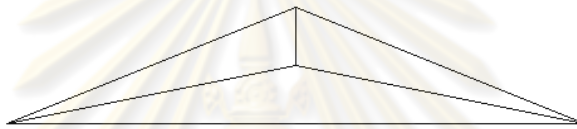




(ก) โปรแกรม LINEAL2D

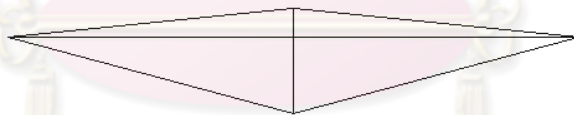


(ข) โปรแกรม TORSION2D



(ค) โปรแกรม ELASTIC2D

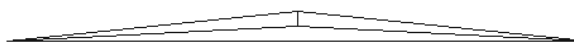
รูปที่ 5.4 ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ เมื่อขอบเขตเคลื่อนที่ลงมา เป็นระยะทาง 59% ของความสูง  $h_0$



(ก) โปรแกรม LINEAL2D



(ข) โปรแกรม TORSION2D



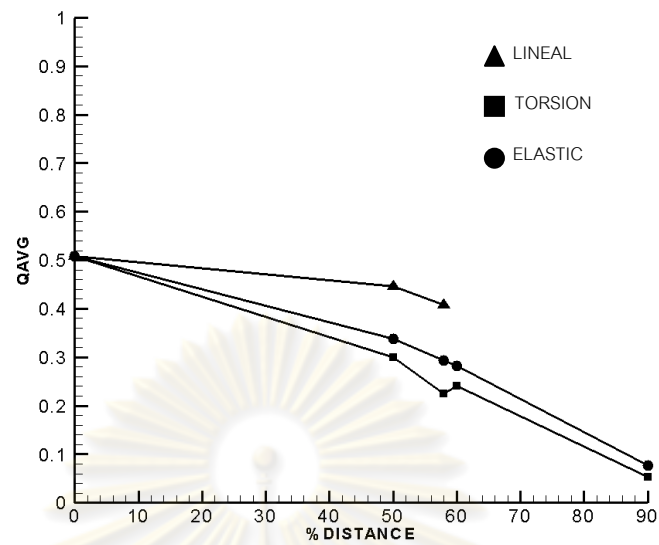
(ค) โปรแกรม ELASTIC2D

รูปที่ 5.5 ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ เมื่อขอบเขตเคลื่อนที่ลงมา เป็นระยะทาง 90% ของความสูง  $h_0$

จากผลลัพธ์ทั้งหมดจะพบว่าเมื่อจุดต่อ 3 ซึ่งเป็นตำแหน่งที่ขอบเขตเคลื่อนที่ลงมาตามแนวตั้ง จะทำให้จุดต่อ 4 ซึ่งสามารถเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระเคลื่อนที่ลงตามแนวตั้งด้วยเช่นกัน จึงเป็นการเคลื่อนที่ที่สอดคล้องกัน นอกจากนี้ยังพบว่าเมื่อจุดต่อ 3 เคลื่อนที่ลงมาเป็นระยะทางตั้งแต่ 59% ของความสูง  $h_0$  ขึ้นไป เอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม LINEAL2D ซึ่งประดิษฐ์ขึ้นโดยมีความสอดคล้องกับวิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้นจะเกิดการไขว้ตัว และจะเกิดการไขว้ตัวมากขึ้นเมื่อเคลื่อนที่ลงมาเป็นระยะทางเพิ่มขึ้น ทำให้เอลิเมนต์ที่ได้ไม่สามารถยอมรับได้ ซึ่งสอดคล้องกับหลักการของวิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้นที่ค่าความแข็งแกร่งของสปริงเชิงเส้นจะยังมีค่ามากขึ้นเมื่อขอบเอลิเมนต์สั้นลง ด้วยเหตุนี้วิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้นจึงสามารถป้องกันจุดต่อไม่ให้เคลื่อนที่มาชนกัน แต่ไม่สามารถป้องกันการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ได้ ในขณะที่เอลิเมนต์ที่ได้จากอีก 2 โปรแกรมที่เหลือคือ TORSION2D และ ELASTIC2D ซึ่งประดิษฐ์ขึ้นโดยมีความสอดคล้องกับวิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริงและวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้ตามลำดับจะไม่เกิดการไขว้ตัวไม่ว่าจุดต่อ 3 จะเคลื่อนที่ลงมาเป็นระยะทางเท่าใดก็ตาม โดยวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้จะก่อให้เกิดการยุบตัวของโครงสร้างอย่างสม่ำเสมอมากกว่าวิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริง จะเห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้จากแต่ละโปรแกรมคอมพิวเตอร์ต่างสอดคล้องกับหลักการที่ใช้ในการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ของแต่ละวิธี ดังนั้นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นนี้จึงมีความน่าเชื่อถือมากยิ่งขึ้น

นอกจากนี้ยังสามารถทำการเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากแต่ละโปรแกรมโดยพิจารณาจากคุณภาพโดยเฉลี่ยของเอลิเมนต์ พบว่าในขณะที่โครงสร้างยุบตัวลงจะทำให้เอลิเมนต์มีคุณภาพน้อยลงตามไปด้วย และเมื่อเคลื่อนที่ลงมาที่ระยะทาง 90% ของความสูง  $h_0$  เอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม ELASTIC2D จะมีคุณภาพลดลงจาก 0.508 เหลือ 0.077 ในขณะที่เอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม TORSION2D จะมีคุณภาพลดลงจาก 0.508 เหลือ 0.052 ส่วนคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม LINEAL2D นั้นไม่สามารถทำการวัดได้เนื่องจากเอลิเมนต์เกิดการไขว้ตัว กราฟแสดงการเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากแต่ละโปรแกรมแสดงดังรูปที่ 5.6

ในบทต่อไปจะนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นนี้ไปประยุกต์ใช้กับปัญหาขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ในรูปแบบต่าง ๆ แล้วทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์ของเอลิเมนต์รวมถึงข้อดี-ข้อเสียที่ได้จากแต่ละวิธี



รูปที่ 5.6 การเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาโครงสร้างรูปสามเหลี่ยม

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บทที่ 6

### การประยุกต์ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อแก้ปัญหา ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ในสองมิติ

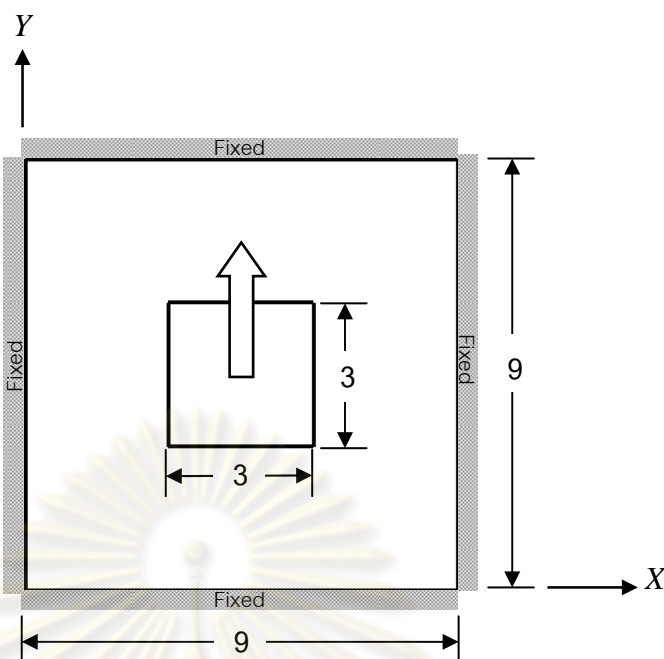
ในบทนี้จะนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นมาทดสอบประสิทธิภาพกับปัญหาขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ในรูปแบบต่าง ๆ 4 ปัญหาด้วยกัน ซึ่งแต่ละปัญหาต่างมีรูปแบบโครงสร้างและรูปแบบการเคลื่อนที่ที่แตกต่างกันดังนี้

- 1) ปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยม
- 2) ปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปวงกลม
- 3) ปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงมุมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยม
- 4) ปัญหาการเคลื่อนที่ทั้งแบบเชิงเส้นและเชิงมุมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยม

จากนั้นจะแสดงตัวอย่างการนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้ไปประยุกต์ใช้กับปัญหาที่พบเห็นได้บ่อยในชีวิตจริง โดยนำไปจำลองการไหลเวียนของเลือดผ่านเส้นเลือด Coronary Artery ซึ่งเป็นหลอดเลือดแดงหล่อเลี้ยงหัวใจ โดยผลลัพธ์ของเอลิเมนต์ที่ได้จากแต่ละวิธีในแต่ละปัญหาจะถูกนำมาวิเคราะห์และเปรียบเทียบตามหลักเกณฑ์ 2 หลักเกณฑ์ด้วยกัน ได้แก่ ความสมบูรณ์ของเอลิเมนต์และคุณภาพของเอลิเมนต์ ซึ่งหลักเกณฑ์ทั้งสองได้กล่าวถึงไว้แล้วในบทที่ 3

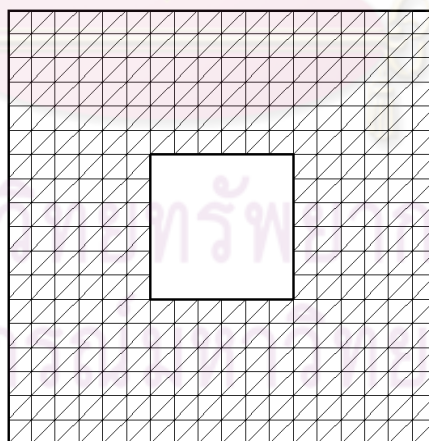
#### 6.1 ปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยม

ปัญหาแรกที่จะนำมาทดสอบประสิทธิภาพของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นคือปัญหาที่มีโดเมนเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดใหญ่  $9 \times 9$  หน่วยและมีสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเล็ก  $3 \times 3$  หน่วยอยู่ตรงตำแหน่งกึ่งกลางภายในสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดใหญ่ และกำหนดเงื่อนไขขอบเขตโดยให้สี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดใหญ่ถูกตรึงแน่น ในขณะที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเล็กเคลื่อนที่ขึ้นไปตามแกน  $Y$  เป็นระยะทาง 1 หน่วยและ 2.8 หน่วยตามลำดับ ลักษณะรูปแบบและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหานี้แสดงได้ดังรูปที่ 6.1



รูปที่ 6.1 ลักษณะของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยม

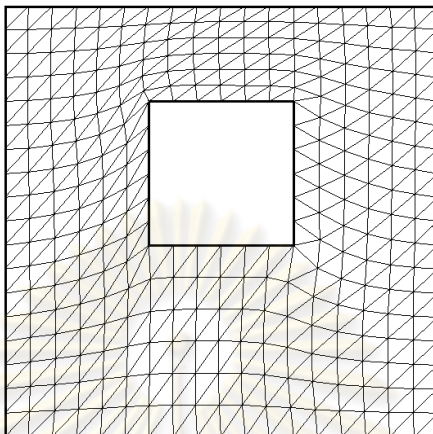
แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์จะใช้เป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อแบบมีระเบียบ โดยเมื่อนำไปวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LINEAL2D, จะประกอบด้วย 336 จุดต่อและ 912 เอลิเมนต์ และเมื่อนำไปวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ TORSION2D และ ELASTIC2D จะประกอบด้วย 336 จุดต่อและ 576 เอลิเมนต์ ซึ่งแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ทั้งสามแบบแสดงได้ดังรูปที่ 6.2



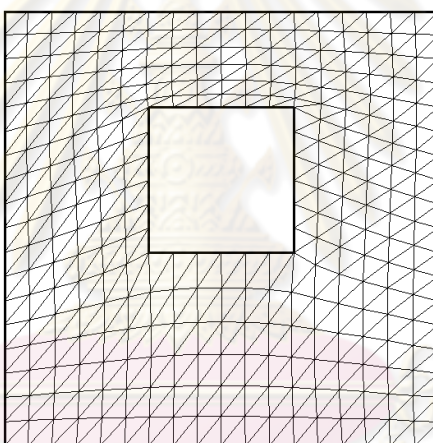
รูปที่ 6.2 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยม

สำหรับค่าคุณสมบัติต่าง ๆ ที่ต้องใช้ในโปรแกรม ELASTIC2D จะกำหนดให้สี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งสองมีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่นเท่ากับ  $1 \times 10^{10}$ , อัตราส่วนของปัวซองเท่ากับ 0.3 และมีความหนาเท่ากับ 0.01 ซึ่งลักษณะของปัญหาเป็นแบบความเค้นในระนาบ (Plane Stress) ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LINEAL2D, TORSION2D

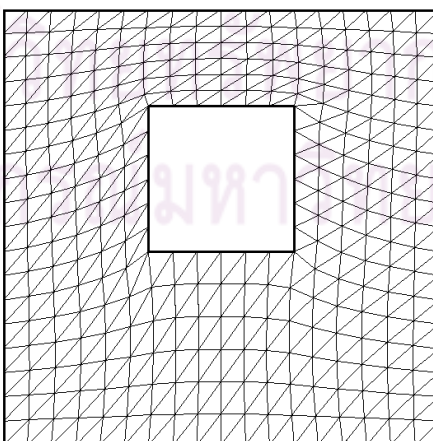
และ ELASTIC2D เมื่อสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเล็กเคลื่อนที่ขึ้นไปตามแกน  $Y$  เป็นระยะทาง 1 และ 2.8 หน่วยแสดงได้ดังรูปที่ 6.3 และ 6.4 ตามลำดับ



(ก) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LINEAL2D

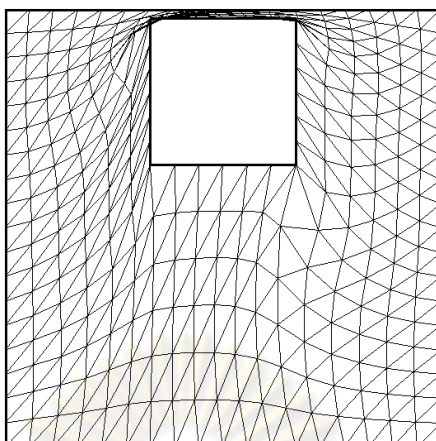


(ข) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ TORSION2D

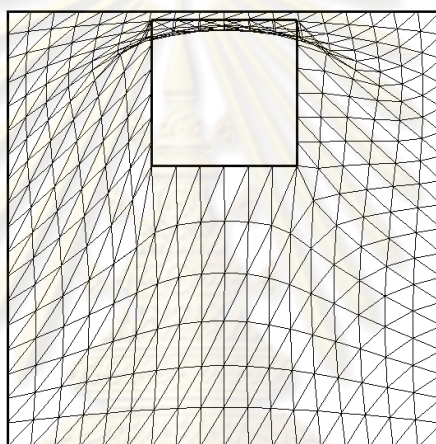


(ค) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ELASTIC2D

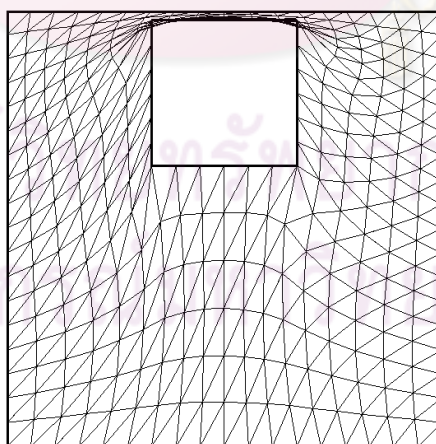
รูปที่ 6.3 ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่างๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยมเมื่อขอบเขตเคลื่อนที่ขึ้นไป 1 หน่วย



(ก) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LINEAL2D



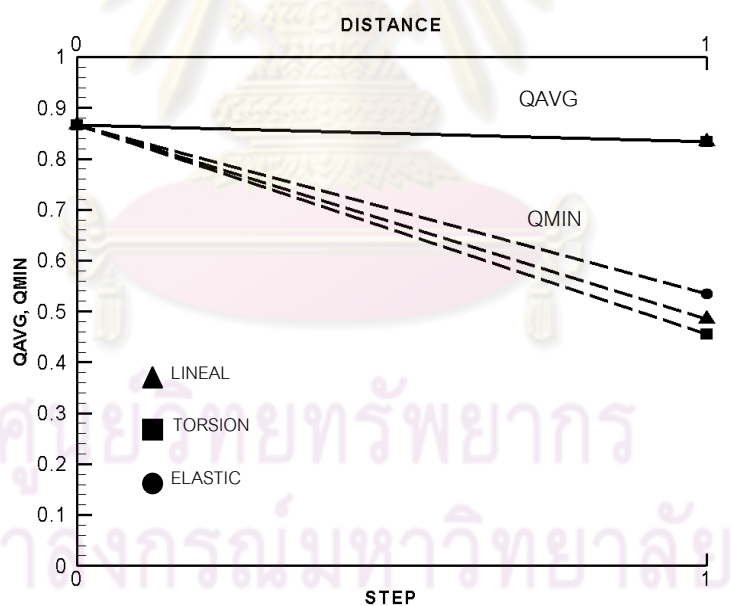
(ข) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ TORSION2D



(ค) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ELASTIC2D

รูปที่ 6.4 ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยมเมื่อขอบเขตเคลื่อนที่ขึ้นไป 2.8 หน่วย

รูปที่ 6.3 และ 6.4 แสดงการเปรียบเทียบรูปร่างของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมทั้งสามเมื่อสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเล็กละเอินที่ขึ้นไปตามแกน  $Y$  เป็นระยะทาง 1 หน่วยและ 2.8 หน่วยตามลำดับ พบว่าที่ระยะทาง 1 หน่วยเอลิเมนต์ที่ได้จากทุกโปรแกรมจะไม่เกิดการไขว้ตัว ในขณะที่ที่ระยะทาง 2.8 หน่วยเอลิเมนต์ที่ได้จากทุกโปรแกรมจะเกิดการไขว้ตัว ซึ่งถือว่าเอลิเมนต์นั้นไม่มีความสมบูรณ์จึงไม่ผ่านเกณฑ์ที่สามารถยอมรับได้ และเมื่อเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากแต่ละโปรแกรมพบว่าที่ระยะทาง 1 หน่วยคุณภาพของเอลิเมนต์โดยเฉลี่ย (QAVG) ที่ได้จากทุกโปรแกรมมีค่าเท่ากันคือมีคุณภาพลดลงจาก 0.866 เหลือ 0.834 แต่เมื่อพิจารณาคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ต่ำที่สุด (QMIN) ที่ได้จากโปรแกรม LINEAL2D, TORSION2D และ ELASTIC2D จะมีค่า 0.485, 0.454 และ 0.535 ตามลำดับ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าโปรแกรม ELASTIC2D จะให้เอลิเมนต์ที่มีคุณภาพดีที่สุดในขณะที่โปรแกรม TORSION2D จะให้เอลิเมนต์ที่มีคุณภาพต่ำที่สุด ส่วนการเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ระยะทาง 2.8 หน่วยนั้นไม่สามารถวัดได้เนื่องจากเอลิเมนต์เกิดการไขว้ตัว กราฟแสดงการเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์เมื่อสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเล็กละเอินที่ขึ้นไปเป็นระยะทาง 1 หน่วยแสดงได้ดังรูปที่ 6.5



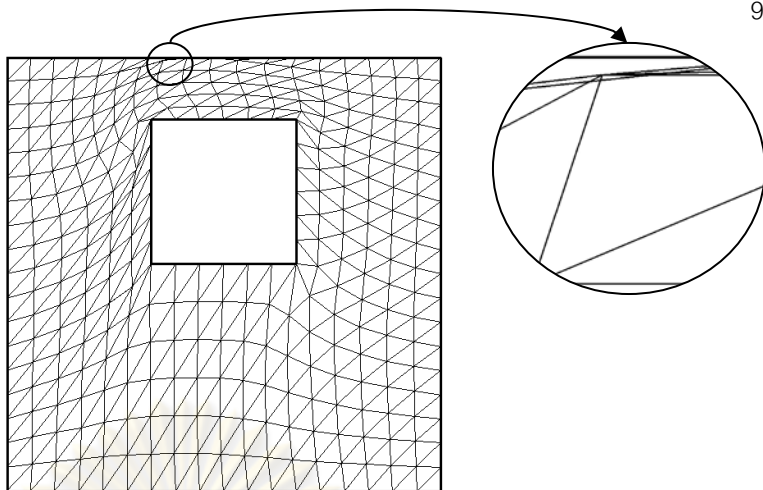
รูปที่ 6.5 การเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยมเมื่อขอบเขตเคลื่อนที่ขึ้นไป 1 หน่วย

สำหรับการแก้ไขปัญหาการไขว้ตัวของเอลิเมนต์นั้นสามารถทำได้หลายวิธี เช่น การสร้างเอลิเมนต์ใหม่, การปรับรูปแบบการติดสปริงในแบบจำลองของวิธีความคล้ายคลึงสปริง หรือการปรับค่าคุณสมบัติเฉพาะตัวของวัตถุในแต่ละตำแหน่งของวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของ

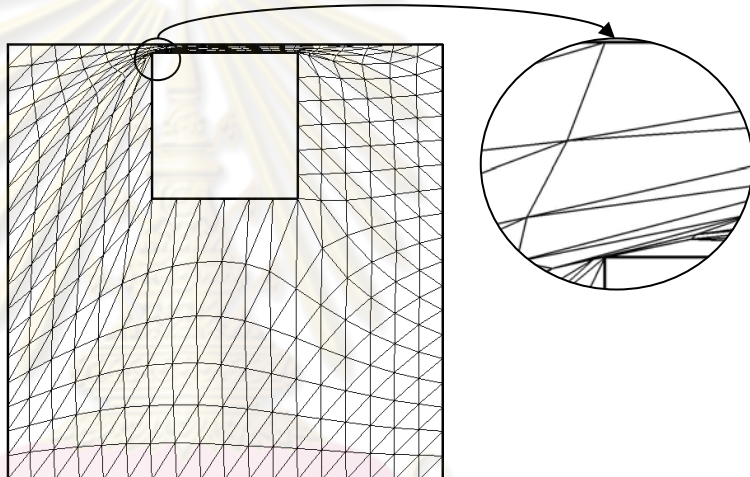


วัตถุที่ยืดหยุ่นได้ เป็นต้น ในที่นี้จะทำการแก้ไขโดยแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ทั้งหมดออกเป็นช่วงย่อย ๆ และทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแต่ละโปรแกรมโดยดูจากจำนวนของช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อย ซึ่งโปรแกรมที่มีจำนวนของช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อยน้อยที่สุดโดยเอลิเมนต์ไม่เกิดการไขว้ตัว จะใช้เวลาในการคำนวณน้อยสุดและมีประสิทธิภาพดีที่สุดด้วย เช่นสำหรับปัญหานี้ในกรณีที่ใช้เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเล็กเคลื่อนที่ขึ้นไปเป็นระยะทาง 2.8 หน่วย จะต้องทำการแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ทั้งหมดออกเป็น 12 และ 42 ช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อยเมื่อทำการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม TORSION2D และ ELASTIC2D ตามลำดับ ถึงจะไม่เกิดการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ ในขณะที่เอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม LINEAL2D จะเกิดการไขว้ตัวเสมอถึงแม้จะแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ออกเป็น 100 ช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อยแล้วก็ตาม ซึ่งโปรแกรมจะจบการทำงานในช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อยที่เกิดการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ ซึ่งในปัญหานี้เอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม LINEAL2D จะเกิดการไขว้ตัวในช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อยที่ 61 หรือเมื่อสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเล็กเคลื่อนที่ขึ้นไปเป็นระยะทาง 1.8 หน่วย ดังนั้นสำหรับปัญหานี้จึงสรุปได้ว่าโปรแกรม TORSION2D จะมีประสิทธิภาพดีที่สุดในการป้องกันการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ เนื่องจากมีจำนวนของช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อยน้อยที่สุด ส่วนโปรแกรม LINEAL2D จะไม่สามารถป้องกันการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ได้ ซึ่งลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ เมื่อทำการแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ออกเป็นช่วงย่อย ๆ แสดงได้ดังรูปที่ 6.6

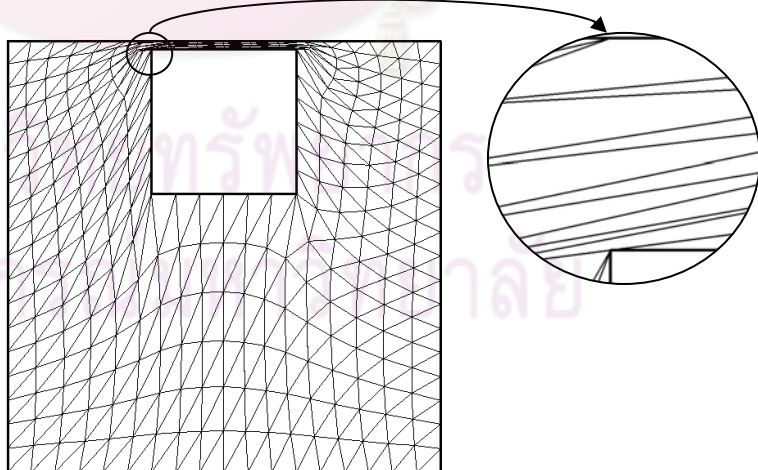
สำหรับการเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากแต่ละโปรแกรมสามารถกระทำได้โดยการเปรียบเทียบที่จำนวนของช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อยเดียวกัน โดยที่จำนวนของช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อยนั้นจะต้องไม่พบการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ เช่นเมื่อทำการแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ทั้งหมด 2.8 หน่วยออกเป็น 60 ช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อย จะได้คุณภาพของเอลิเมนต์จากโปรแกรมต่าง ๆ ดังแสดงในรูปที่ 6.7 ซึ่งจะพบว่าเอลิเมนต์ที่แย่มากที่สุดที่ได้จากโปรแกรม TORSION2D จะมีลักษณะที่แย่มากกว่าเอลิเมนต์ที่แย่มากที่สุดที่ได้จากโปรแกรม ELASTIC2D แต่เมื่อเคลื่อนที่เป็นระยะทางตั้งแต่ 2.14 หน่วยเป็นต้นไป (หรือตั้งแต่ช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อยที่ 46) จะให้ผลลัพธ์ตรงกันข้าม อย่างไรก็ตามเมื่อพิจารณาคุณภาพโดยเฉลี่ยของเอลิเมนต์แล้วพบว่าเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม ELASTIC2D จะมีคุณภาพโดยเฉลี่ยอยู่ที่ 0.635 ซึ่งมากกว่าเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม TORSION2D ซึ่งมีคุณภาพโดยเฉลี่ยอยู่ที่ 0.6 ส่วนเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม LINEAL2D นั้นไม่สามารถทำการเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ได้เนื่องจากเอลิเมนต์เกิดการไขว้ตัว



(ก) โปรแกรม LINEAL2D เมื่อแบ่งเป็น 100 ช่วงการเคลื่อนที่น้อยซึ่งจะจบการทำงานที่ช่วงการเคลื่อนที่น้อยที่ 61 เนื่องจากเอลิเมนต์เกิดการไขว้ตัว

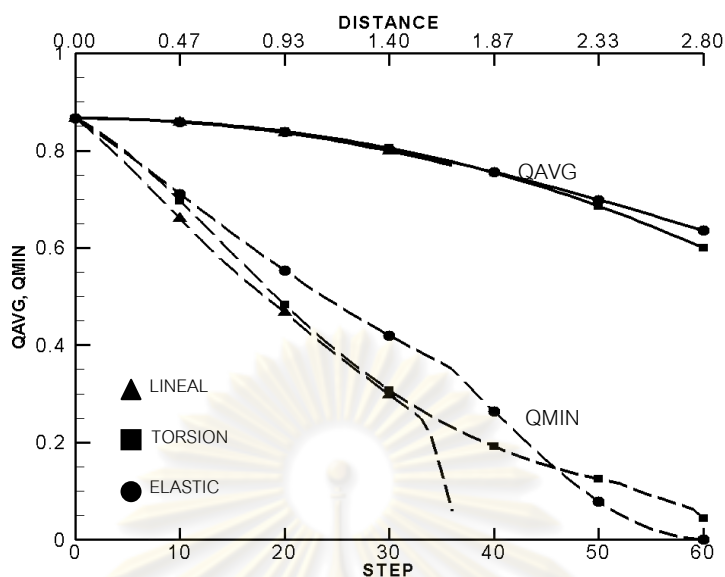


(ข) โปรแกรม TORSION2D เมื่อแบ่งเป็น 12 ช่วงการเคลื่อนที่น้อย



(ค) โปรแกรม ELASTIC2D เมื่อแบ่งเป็น 42 ช่วงการเคลื่อนที่น้อย

รูปที่ 6.6 ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยมเมื่อแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ทั้งหมด 2.8 หน่วย ออกเป็นช่วงการเคลื่อนที่น้อยต่าง ๆ

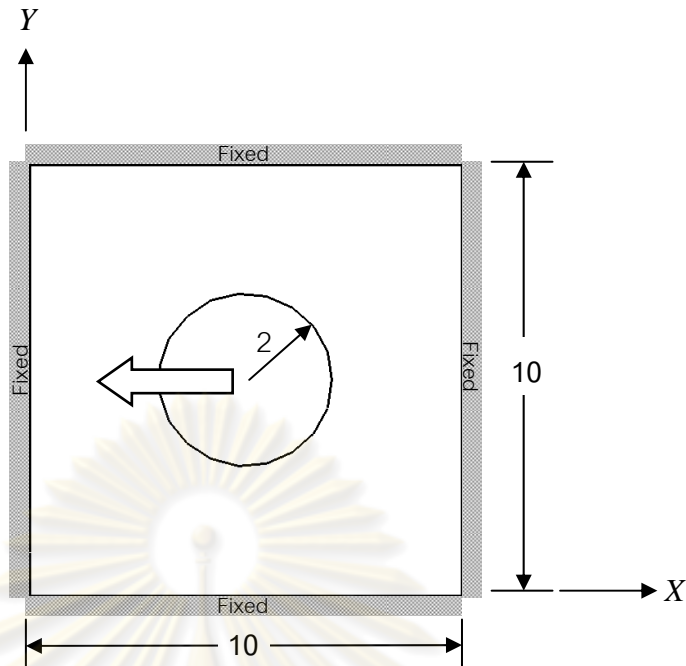


รูปที่ 6.7 การเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยมเมื่อแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ทั้งหมด 2.8 หน่วย ออกเป็น 60 ช่วงการเคลื่อนที่ย่อย

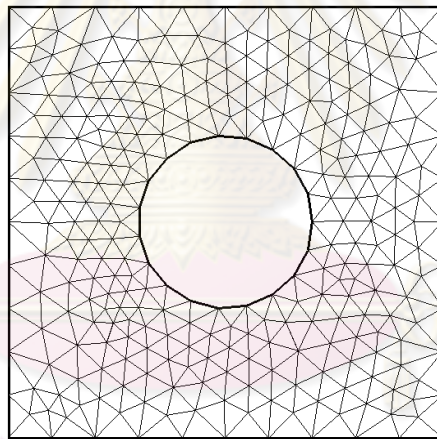
## 6.2 ปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปวงกลม

ปัญหาที่สองที่จะนำมาทดสอบประสิทธิภาพของโปรแกรมคอมพิวเตอร์จะมีลักษณะคล้ายคลึงกับปัญหาแรกคือมีโดเมนเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดใหญ่  $10 \times 10$  หน่วยและมีวงกลมขนาดเล็กเส้นผ่าศูนย์กลาง 4 หน่วยอยู่ตรงตำแหน่งกึ่งกลางภายในสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดใหญ่ และกำหนดเงื่อนไขขอบเขตโดยให้สี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดใหญ่ถูกตรึงแน่น ในขณะที่วงกลมขนาดเล็กเคลื่อนที่ไปทางซ้ายตามแนวแกน  $X$  เป็นระยะทาง 1 หน่วยและ 2.9 หน่วย ลักษณะรูปแบบและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหานี้แสดงได้ดังรูปที่ 6.8

แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์จะใช้เป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อแบบไร้ระเบียบ โดยเมื่อนำไปวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LINEAL2D, จะประกอบด้วย 294 จุดต่อและ 823 เอลิเมนต์ และเมื่อนำไปวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ TORSION2D และ ELASTIC2D จะประกอบด้วย 294 จุดต่อและ 529 เอลิเมนต์ ซึ่งแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ทั้งสามแบบแสดงได้ดังรูปที่ 6.9

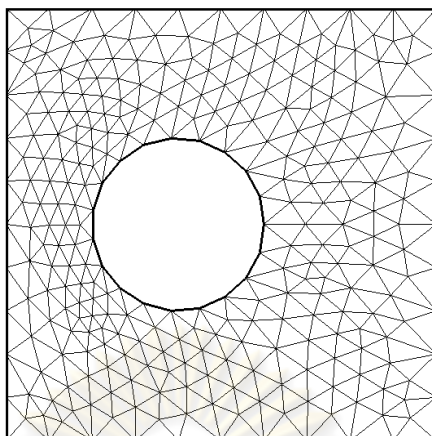


รูปที่ 6.8 ลักษณะของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปวงกลม

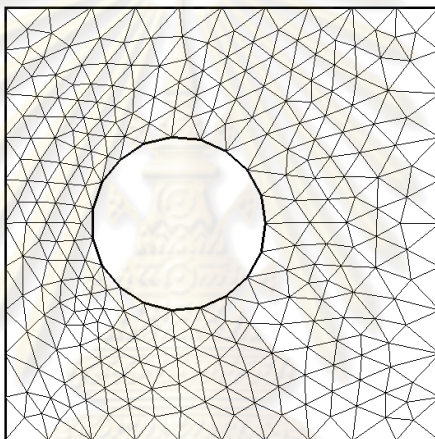


รูปที่ 6.9 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปวงกลม

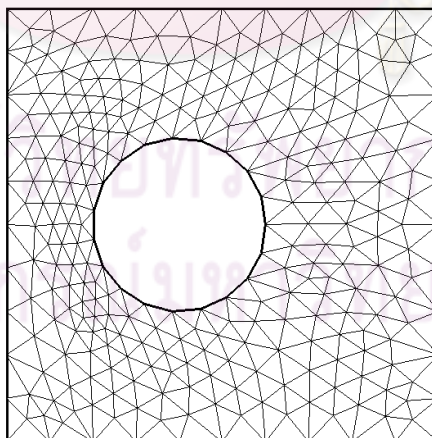
ถ้ากำหนดให้ค่าคุณสมบัติต่าง ๆ ที่ต้องใช้ในโปรแกรม ELASTIC2D ของปัญหานี้มีค่าเช่นเดียวกับในปัญหาแรกคือมีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่นเท่ากับ  $1 \times 10^{10}$ , อัตราส่วนของปัวส์ซงเท่ากับ 0.3 และความหนาเท่ากับ 0.01 ซึ่งลักษณะของปัญหาเป็นแบบความเค้นในระนาบ (Plane Stress) ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LINEAL2D, TORSION2D และ ELASTIC2D เมื่อวงกลมขนาดเล็กเคลื่อนที่ไปทางซ้ายตามแนวแกน X เป็นระยะทาง 1 หน่วยและ 2.9 หน่วยแสดงได้ดังรูปที่ 6.10 และ 6.11 ตามลำดับ



(ก) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LINEAL2D

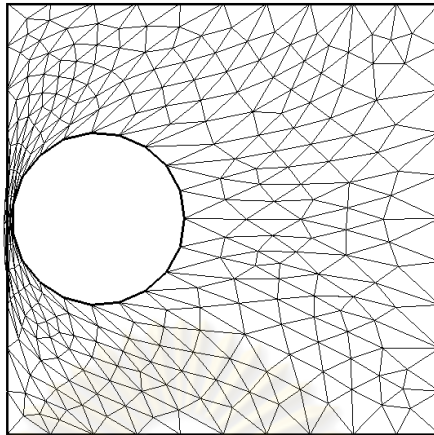


(ข) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ TORSION2D

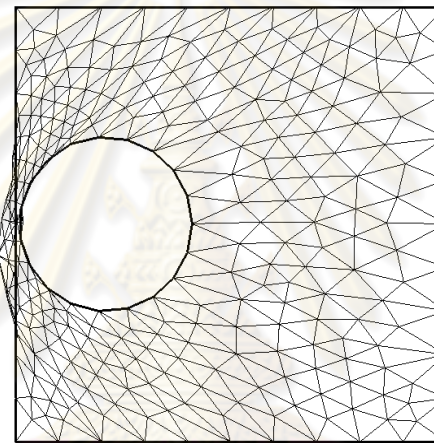


(ค) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ELASTIC2D

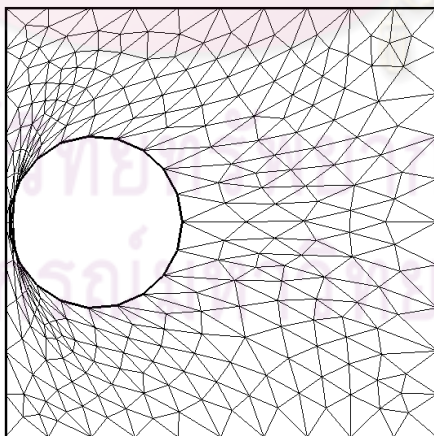
รูปที่ 6.10 ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปวงกลมเมื่อขอบเขตเคลื่อนที่ไปทางซ้าย 1 หน่วย



(ก) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LINEAL2D



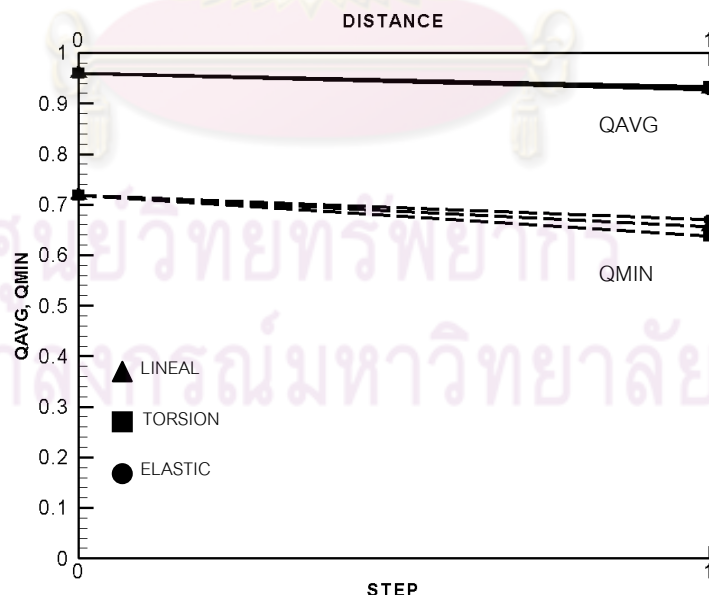
(ข) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ TORSION2D



(ค) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ELASTIC2D

รูปที่ 6.11 ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปวงกลมเมื่อขอบเขตเคลื่อนที่ไปทางซ้าย 2.9 หน่วย

รูปที่ 6.10 และ 6.11 แสดงการเปรียบเทียบรูปร่างของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมทั้งสาม เมื่อวงกลมเคลื่อนที่ไปทางซ้ายตามแนวแกน  $X$  เป็นระยะทาง 1 หน่วยและ 2.9 หน่วยตามลำดับ พบว่าที่ระยะทาง 1 หน่วยเอลิเมนต์ที่ได้จากทุกโปรแกรมจะไม่เกิดการไขว้ตัว ในขณะที่ที่ระยะทาง 2.9 หน่วยเอลิเมนต์ที่ได้จากทุกโปรแกรมจะเกิดการไขว้ตัว ซึ่งถือว่าเอลิเมนต์นั้นไม่มีความสมบูรณ์ จึงไม่ผ่านเกณฑ์ที่สามารถยอมรับได้ และเมื่อเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากแต่ละโปรแกรมพบว่าที่ระยะทาง 1 หน่วยคุณภาพของเอลิเมนต์โดยเฉลี่ย (QAVG) ที่ได้จากแต่ละโปรแกรมมีค่าใกล้เคียงกันมากคือมีคุณภาพลดลงจาก 0.960 เหลือ 0.928, 0.933 และ 0.926 เมื่อวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม LINEAL2D, TORSION2D และ ELASTIC2D ตามลำดับ แต่เมื่อพิจารณาเปรียบเทียบที่คุณภาพของเอลิเมนต์ที่ต่ำที่สุด (QMIN) ที่ได้จากแต่ละโปรแกรม พบว่าเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม TORSION2D จะมีคุณภาพต่ำสุดคืออยู่ที่ 0.637 ในขณะที่เอลิเมนต์ที่มีคุณภาพต่ำที่สุดที่ได้จากโปรแกรม LINEAL2D และ ELASTIC2D มีค่า 0.656 และ 0.670 ตามลำดับ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าโปรแกรม ELASTIC2D จะให้เอลิเมนต์ที่มีคุณภาพดีที่สุดในขณะที่โปรแกรม TORSION2D จะให้เอลิเมนต์ที่มีคุณภาพต่ำที่สุด ส่วนการเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ระยะทาง 2.9 หน่วยนั้นไม่สามารถวัดได้เนื่องจากเอลิเมนต์เกิดการไขว้ตัว กราฟแสดงการเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์เมื่อวงกลมเคลื่อนที่ไปทางซ้ายตามแนวแกน  $X$  เป็นระยะทาง 1 หน่วยแสดงได้ดังรูปที่ 6.12

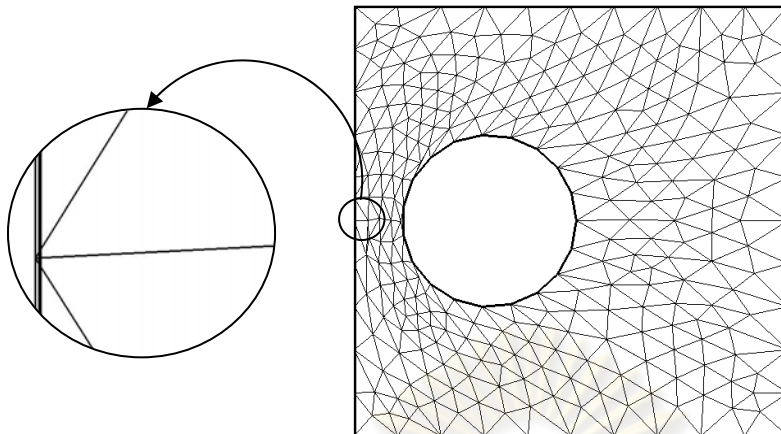


รูปที่ 6.12 การเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปวงกลมเมื่อขอบเขตเคลื่อนที่ไปทางซ้าย 1 หน่วย

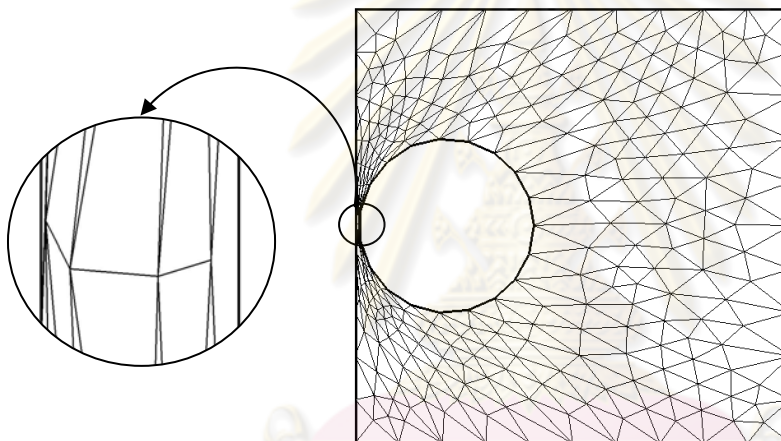
สำหรับการแก้ไขปัญหาการไขว้ตัวของเอลิเมนต์นั้นจะทำในลักษณะเช่นเดียวกันกับปัญหาแรก คือทำการแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ทั้งหมดออกเป็นช่วงย่อย ๆ แล้วเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแต่ละโปรแกรมโดยดูจากจำนวนของช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อย ซึ่งโปรแกรมที่มีจำนวนของช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อยน้อยที่สุดจะใช้เวลาในการคำนวณน้อยที่สุด และมีประสิทธิภาพดีที่สุดในด้วย ดังนั้นสำหรับปัญหานี้พบว่าต้องทำการแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ทั้งหมด 2.9 หน่วย ออกเป็น 5 ช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อยเมื่อทำการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม TORSION2D และ ELASTIC2D ถึงจะไม่เกิดการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ ในขณะที่เอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม LINEAL2D จะเกิดการไขว้ตัวเสมอถึงแม้จะแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ที่ออกเป็น 100 ช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อยแล้วก็ตาม ซึ่งโปรแกรมจะจบการทำงานที่ช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อยที่เกิดการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ ซึ่งในปัญหานี้เอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม LINEAL2D จะเกิดการไขว้ตัวที่ช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อยที่ 65 หรือเมื่อวงกลมขนาดเล็กเคลื่อนที่ไปทางซ้ายเป็นระยะทาง 1.885 หน่วย ดังนั้นสำหรับปัญหานี้จึงสรุปได้ว่าโปรแกรม TORSION2D และ ELASTIC2D มีประสิทธิภาพในการป้องกันการไขว้ตัวของเอลิเมนต์เท่ากัน ซึ่งดีกว่าโปรแกรม LINEAL2D ที่ไม่สามารถป้องกันการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ได้ ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ เมื่อทำการแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ที่ออกเป็นช่วงย่อย ๆ แสดงได้ดังรูปที่ 6.13

สำหรับการเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากแต่ละโปรแกรมสามารถกระทำได้โดยการเปรียบเทียบที่จำนวนของช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อยเดียวกัน โดยที่จำนวนของช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อยนั้นจะต้องไม่พบการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ เช่นเมื่อทำการแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ทั้งหมด 2.9 หน่วยออกเป็น 20 ช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อย จะได้คุณภาพของเอลิเมนต์จากโปรแกรมต่าง ๆ ดังแสดงในรูปที่ 6.14 ซึ่งจะพบว่าคุณภาพโดยเฉลี่ยของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม TORSION2D และ ELASTIC2D มีค่าใกล้เคียงกันมาก โดยตลอดระยะเวลาที่เอลิเมนต์เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างนั้น คุณภาพโดยเฉลี่ยของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม TORSION2D จะมากกว่าคุณภาพโดยเฉลี่ยของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม ELASTIC2D เพียงเล็กน้อย ในขณะที่เอลิเมนต์ที่แย่ที่สุดที่ได้จากโปรแกรม TORSION2D จะมีลักษณะที่แย่กว่าเอลิเมนต์ที่แย่ที่สุดที่ได้จากโปรแกรม ELASTIC2D อย่างเห็นได้ชัด แต่เมื่อเคลื่อนที่มาที่ระยะทาง 2.9 หน่วย (หรือช่วงการเคลื่อนที่ที่ย่อยที่ 20) จะให้ผลลัพธ์ตรงกันข้าม กล่าวคือเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม ELASTIC2D จะมีคุณภาพโดยเฉลี่ยอยู่ที่ 0.695 ซึ่งมากกว่าเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม TORSION2D ซึ่งมีคุณภาพโดยเฉลี่ยอยู่ที่ 0.689 เพียงเล็กน้อย ส่วนเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม LINEAL2D นั้นไม่สามารถทำการเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ได้เนื่องจากเอลิเมนต์เกิดการไขว้ตัว

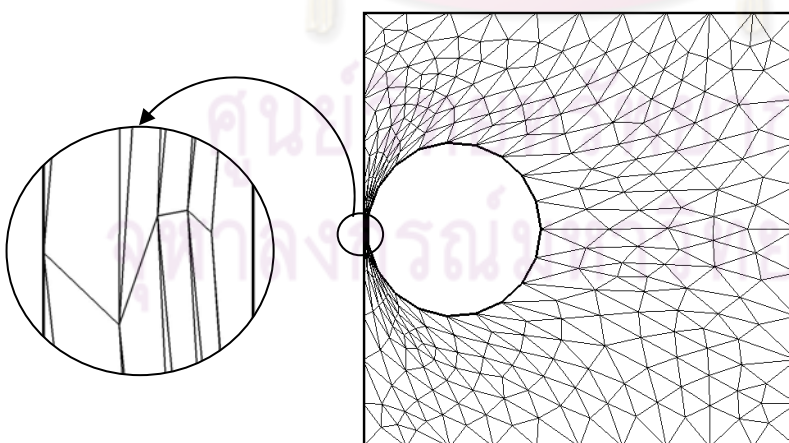




(ก) โปรแกรม LINEAL2D เมื่อแบ่งเป็น 100 ช่วงการเคลื่อนที่น้อยซึ่งจะจบการทำงานที่ช่วงการเคลื่อนที่น้อยที่ 65 เนื่องจากเอลิเมนต์เกิดการไขว้ตัว

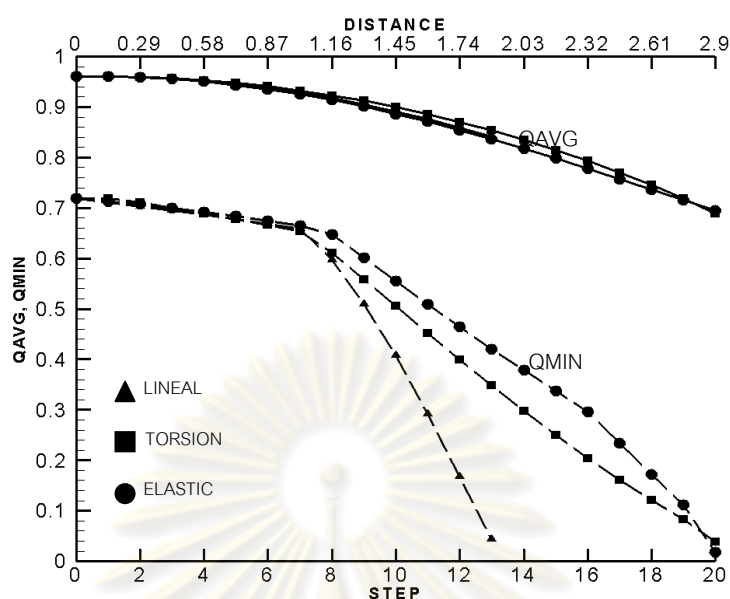


(ข) โปรแกรม TORSION2D เมื่อแบ่งเป็น 5 ช่วงการเคลื่อนที่น้อย



(ค) โปรแกรม ELASTIC2D เมื่อแบ่งเป็น 5 ช่วงการเคลื่อนที่น้อย

รูปที่ 6.13 ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปวงกลมเมื่อแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ทั้งหมด 2.9 หน่วย ออกเป็นช่วงการเคลื่อนที่น้อยต่าง ๆ

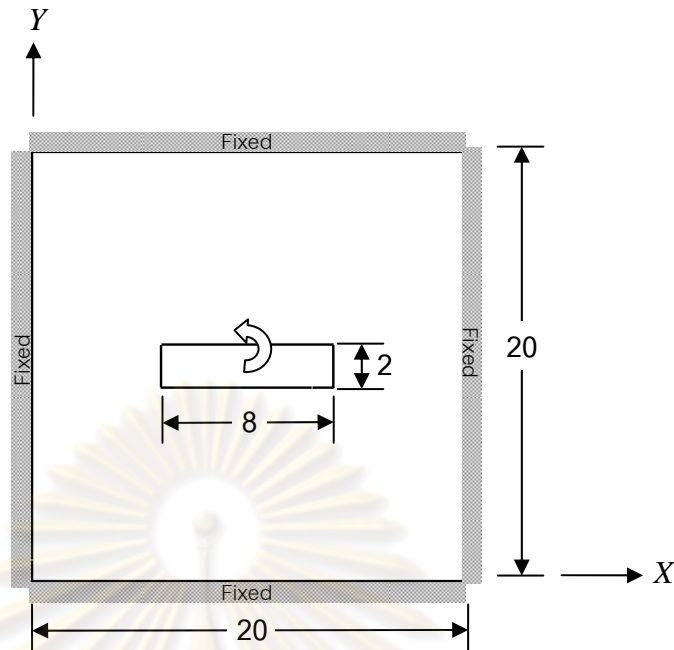


รูปที่ 6.14 การเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปวงกลมเมื่อแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ทั้งหมด 2.9 หน่วย ออกเป็น 20 ช่วงการเคลื่อนที่ย่อย

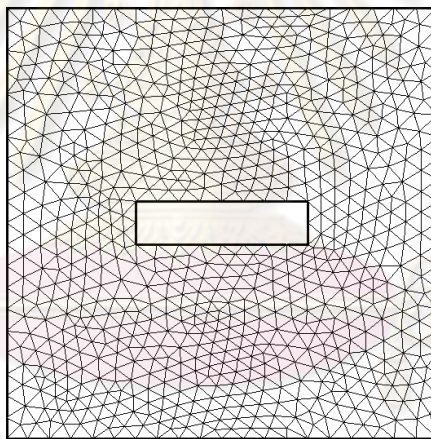
### 6.3 ปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงมุมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยม

ปัญหาถัดมาที่จะนำมาทดสอบประสิทธิภาพของโปรแกรมคอมพิวเตอร์จะมีลักษณะการเคลื่อนที่ของขอบเขตเป็นแบบเชิงมุม ซึ่งแตกต่างจากทั้งสองปัญหาที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น โดยมีโดเมนเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดใหญ่  $20 \times 20$  หน่วยและมีสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาดกว้าง  $x$  ยาวเท่ากับ  $2 \times 8$  หน่วยอยู่ตรงตำแหน่งกึ่งกลางภายในสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดใหญ่ และกำหนดเงื่อนไขขอบเขตโดยให้สี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดใหญ่ถูกตรึงแน่น ในขณะที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าบิดไปทำมุม 10 องศาและ 45 องศา กับแกน  $X$  ในทิศทวนเข็มนาฬิกา ลักษณะรูปแบบและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหานี้แสดงได้ดังรูปที่ 6.15

แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์จะใช้เป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อแบบไร้ระเบียบ โดยเมื่อนำไปวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LINEAL2D จะประกอบด้วย 814 จุดต่อและ 2,342 เอลิเมนต์ และเมื่อนำไปวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ TORSION2D และ ELASTIC2D จะประกอบด้วย 814 จุดต่อและ 1,528 เอลิเมนต์ ซึ่งแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ทั้งสามแบบแสดงได้ดังรูปที่ 6.16

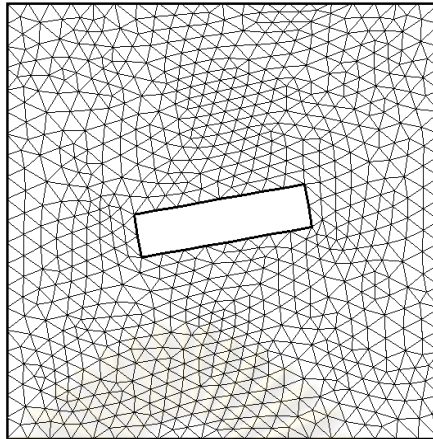


รูปที่ 6.15 ลักษณะของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงมุมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยม

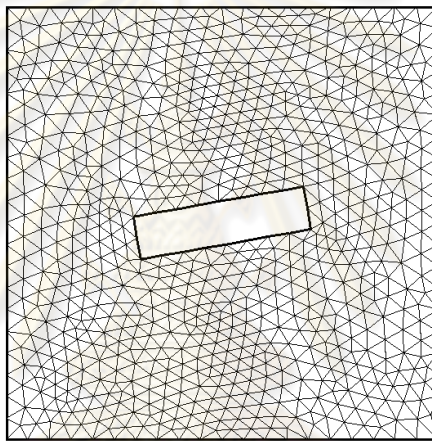


รูปที่ 6.16 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงมุมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยม

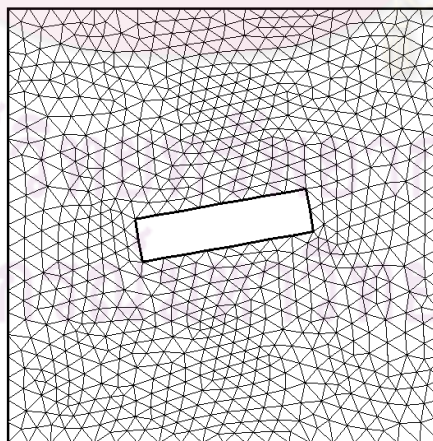
ถ้ากำหนดให้ค่าคุณสมบัติต่าง ๆ ที่ต้องใช้ในโปรแกรม ELASTIC2D ของปัญหานี้มีค่าเช่นเดียวกับสองปัญหาแรกคือมีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่นเท่ากับ  $1 \times 10^{10}$ , อัตราส่วนของปัวส์ซงเท่ากับ 0.3 และความหนาเท่ากับ 0.01 ซึ่งลักษณะของปัญหาเป็นแบบความเค้นในระนาบ (Plane Stress) ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LINEAL2D, TORSION2D และ ELASTIC2D เมื่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าบิดไปทำมุม 10 และ 45 องศา กับแกน X ในทิศทางเข็มนาฬิกาแสดงได้ดังรูปที่ 6.17 และ 6.18 ตามลำดับ



(ก) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LINEAL2D

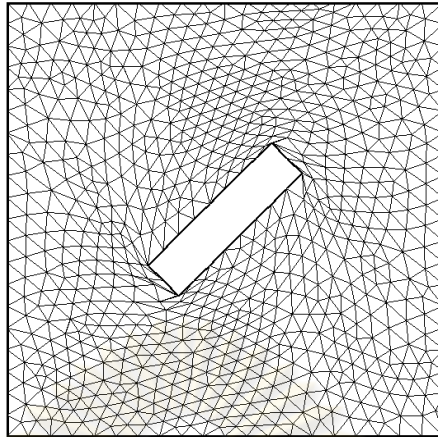


(ข) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ TORSION2D

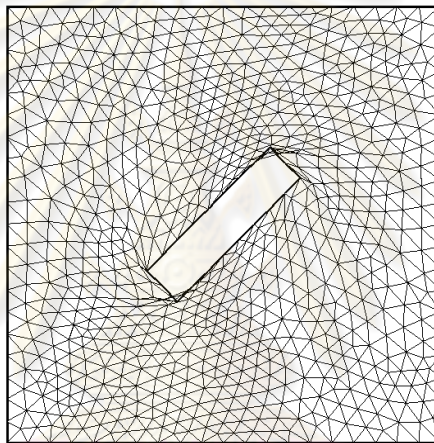


(ค) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ELASTIC2D

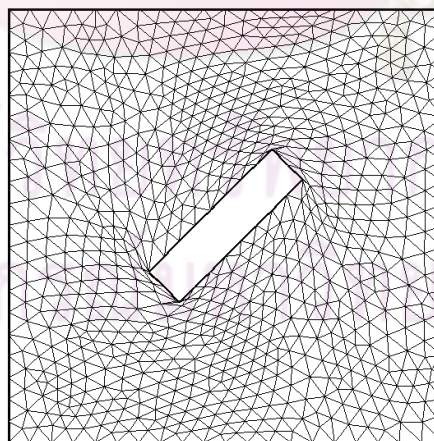
รูปที่ 6.17 ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงมุมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยมเมื่อขอบเขตบิดไปทำมุม 10 องศากับแนวแกน  $X$



(ก) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LINEAL2D



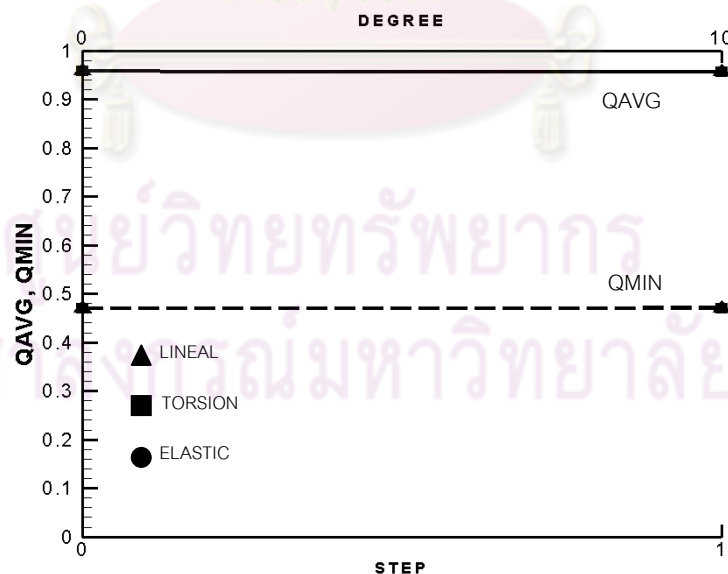
(ข) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ TORSION2D



(ค) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ELASTIC2D

รูปที่ 6.18 ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงมุมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยมเมื่อขอบเขตบิดไปทำมุม 45 องศากับแนวแกน  $X$

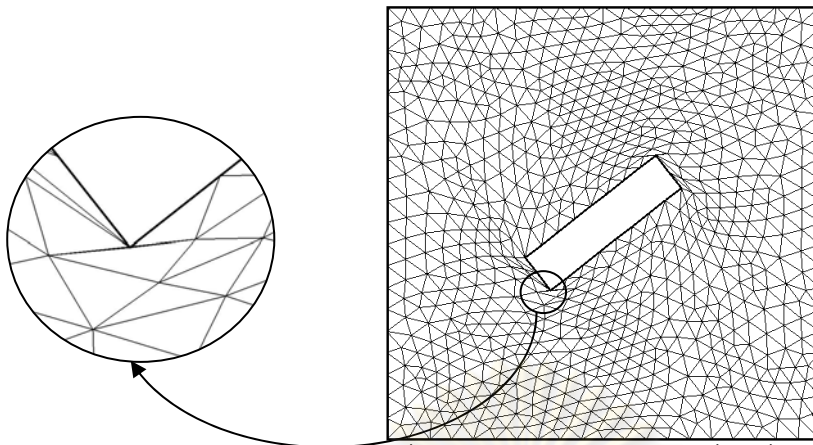
รูปที่ 6.17 และ 6.18 แสดงการเปรียบเทียบรูปร่างของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมทั้งสาม เมื่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าบิดไปทำมุม 10 และ 45 องศากับแนวแกน  $X$  ในทิศทวนเข็มนาฬิกาตามลำดับ พบว่าเมื่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าบิดไป 10 องศาเอลิเมนต์ที่ได้จากทุกโปรแกรมจะไม่เกิดการไขว้ตัว ในขณะที่เมื่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าบิดไป 45 องศาเอลิเมนต์ที่ได้จากทุกโปรแกรมจะเกิดการไขว้ตัว ซึ่งถือว่าเอลิเมนต์นั้นไม่มีความสมบูรณ์จึงไม่ผ่านเกณฑ์ที่สามารถยอมรับได้ และเมื่อเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากแต่ละโปรแกรมพบว่าเมื่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าบิดไปเป็นมุม 10 องศา เอลิเมนต์ที่ได้จากแต่ละโปรแกรมมีคุณภาพโดยเฉลี่ย (QAVG) เท่ากันและมีค่าลดลงจากคุณภาพโดยเฉลี่ยของเอลิเมนต์เริ่มต้นเพียงเล็กน้อยเท่านั้น กล่าวคือมีคุณภาพลดลงเหลือ 0.956 จากคุณภาพโดยเฉลี่ยเริ่มต้นที่ 0.957 และเมื่อพิจารณาเปรียบเทียบที่คุณภาพของเอลิเมนต์ที่ต่ำที่สุด (QMIN) ที่ได้จากแต่ละโปรแกรม พบว่าเอลิเมนต์ที่มีคุณภาพต่ำที่สุดที่ได้จากแต่ละโปรแกรมมีคุณภาพเท่ากันโดยมีค่าเท่ากับ 0.47 ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าในกรณีที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าบิดไปเป็นมุม 10 องศา กับแนวแกน  $X$  รูปแบบของเอลิเมนต์ที่ได้จะไม่เปลี่ยนแปลงไปจากรูปแบบของเอลิเมนต์เริ่มต้นมากนัก และมีคุณภาพเท่ากันจากทุกโปรแกรม ส่วนการเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์เมื่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าบิดไปเป็นมุม 45 องศา นั้นไม่สามารถวัดได้เนื่องจากเอลิเมนต์เกิดการไขว้ตัว กราฟแสดงการเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์เมื่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าบิดไปทำมุม 10 องศา กับแนวแกน  $X$  ในทิศทวนเข็มนาฬิกาแสดงได้ดังรูปที่ 6.19



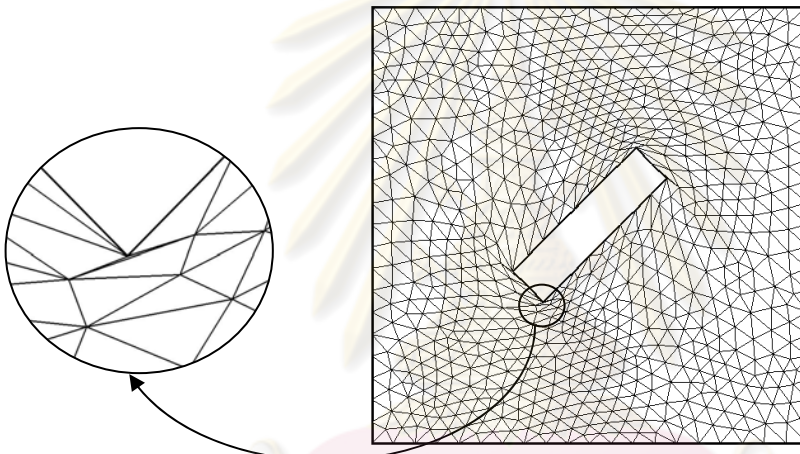
รูปที่ 6.19 การเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงมุมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยมเมื่อขอบเขตบิดไปทำมุม 10 องศา กับแนวแกน  $X$

สำหรับการแก้ไขปัญหาการไขว้ตัวของเอลิเมนต์นั้นจะกระทำในลักษณะเช่นเดียวกันกับปัญหาที่ผ่านมา คือทำการแบ่งมุมที่บิดไปทั้งหมดออกเป็นช่วงย่อย ๆ แล้วเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแต่ละโปรแกรมโดยดูจากจำนวนของช่วงการเคลื่อนที่ย่อย ซึ่งโปรแกรมที่มีจำนวนของช่วงการเคลื่อนที่ย่อยน้อยที่สุดจะใช้เวลาในการคำนวณน้อยที่สุด และมีประสิทธิภาพดีที่สุดในที่สุดด้วย สำหรับปัญหานี้พบว่าจะต้องทำการแบ่งมุมที่บิดไปทั้งหมด 45 องศาออกเป็น 4 และ 2 ช่วงการเคลื่อนที่ย่อยเมื่อทำการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม TORSION2D และ ELASTIC2D ตามลำดับ ถึงจะไม่เกิดการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ ในขณะที่เอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม LINEAL2D จะเกิดการไขว้ตัวเสมอถึงแม้จะแบ่งมุมที่บิดไปทั้งหมดออกเป็น 100 ช่วงการเคลื่อนที่ย่อยแล้วก็ตาม ซึ่งโปรแกรมจะจบการทำงานที่ช่วงการเคลื่อนที่ย่อยที่เกิดการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ ซึ่งในปัญหานี้เอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม LINEAL2D จะเกิดการไขว้ตัวที่ช่วงการเคลื่อนที่ย่อยที่ 84 หรือเมื่อสี่เหลี่ยมจัตุรัสบิดไปเป็นมุม 37.8 องศาในแนวแกน X ในทิศทางเข็มนาฬิกา ดังนั้นสำหรับปัญหานี้จึงสรุปได้ว่าโปรแกรม ELASTIC2D จะมีประสิทธิภาพดีที่สุดในแง่ของการป้องกันการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ เนื่องจากมีจำนวนของช่วงการเคลื่อนที่ย่อยน้อยที่สุด ส่วนโปรแกรม LINEAL2D จะไม่สามารถป้องกันการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ได้ ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ เมื่อทำการแบ่งมุมที่บิดไปทั้งหมดออกเป็นช่วงย่อย ๆ แสดงได้ดังรูปที่ 6.20

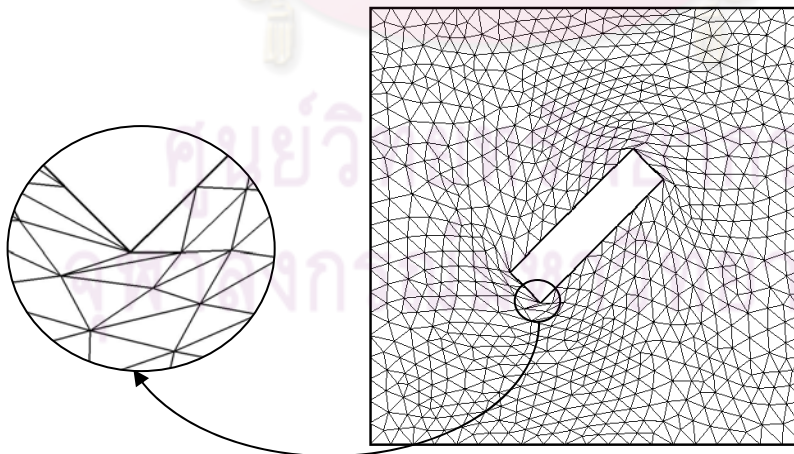
สำหรับการเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากแต่ละโปรแกรมสามารถกระทำได้โดยการเปรียบเทียบที่จำนวนของช่วงการเคลื่อนที่ย่อยเดียวกัน โดยที่จำนวนของช่วงการเคลื่อนที่ย่อยนั้นจะต้องไม่พบการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ เช่นเมื่อทำการแบ่งมุมที่บิดไปทั้งหมด 45 องศาออกเป็น 20 ช่วงการเคลื่อนที่ย่อย จะได้คุณภาพของเอลิเมนต์จากโปรแกรมต่าง ๆ ดังแสดงในรูปที่ 6.21 ซึ่งจะพบว่าคุณภาพโดยเฉลี่ยของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม TORSION2D จะมีค่าเท่ากับ 0.916 ซึ่งมากกว่าคุณภาพโดยเฉลี่ยของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม ELASTIC2D ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.904 เพียงเล็กน้อย ในขณะที่เอลิเมนต์ที่แย่ที่สุดที่ได้จากโปรแกรม TORSION2D จะมีลักษณะที่แย่กว่าเอลิเมนต์ที่แย่ที่สุดที่ได้จากโปรแกรม ELASTIC2D อย่างเห็นได้ชัด ส่วนเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม LINEAL2D นั้นไม่สามารถทำการเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ได้เนื่องจากเอลิเมนต์เกิดการไขว้ตัว



(ก) โปรแกรม LINEAL2D เมื่อแบ่งเป็น 100 ช่วงการเคลื่อนที่ย่อยซึ่งจะจบการทำงานที่ช่วงการเคลื่อนที่ย่อยที่ 84 เนื่องจากเอลิเมนต์เกิดการไขว้ตัว



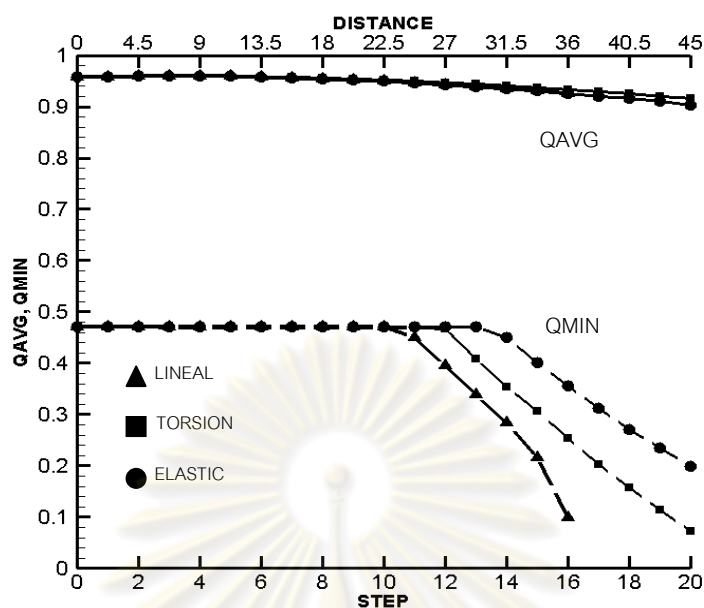
(ข) โปรแกรม TORSION2D เมื่อแบ่งเป็น 4 ช่วงการเคลื่อนที่ย่อย



(ค) โปรแกรม ELASTIC2D เมื่อแบ่งเป็น 2 ช่วงการเคลื่อนที่ย่อย

รูปที่ 6.20 ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงมุมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยมเมื่อทำการแบ่งมุมที่ปิดไปทั้งหมด 45 องศา ออกเป็นช่วงย่อย ๆ

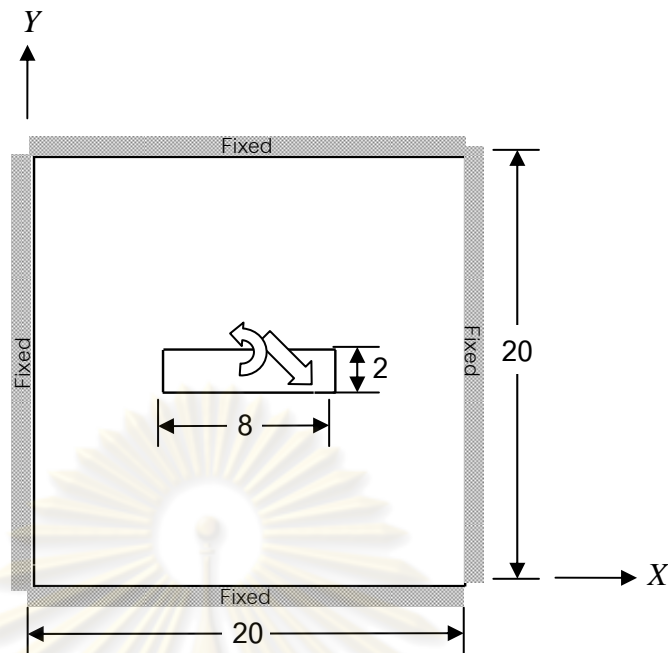




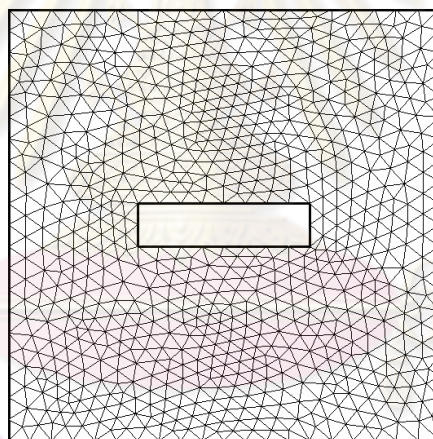
รูปที่ 6.21 การเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงมุมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยมเมื่อทำการแบ่งมุมที่ปิดไปทั้งหมด 45 องศา ออกเป็น 20 ช่วงการเคลื่อนที่ย่อย

#### 6.4 ปัญหาการเคลื่อนที่แบบผสมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยม

ปัญหานี้จะมีลักษณะใกล้เคียงกับปัญหาที่แล้วโดยกำหนดให้มีรูปแบบการเคลื่อนที่ของขอบเขตแตกต่างกันเล็กน้อย โดยในปัญหาที่แล้วกำหนดให้สี่เหลี่ยมผืนผ้าเกิดการบิดเพียงอย่างเดียว ในขณะที่ปัญหานี้จะกำหนดให้สี่เหลี่ยมผืนผ้าเกิดการบิดพร้อมกับเคลื่อนที่ลงตามแนวเส้นทแยงมุมในเวลาเดียวกัน นั่นคือกำหนดเงื่อนไขขอบเขตโดยให้สี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดใหญ่ถูกตรึงแน่นในขณะที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาดเล็กบิดไปทำมุม 45 องศากับแนวแกน  $X$  ในทิศทวนเข็มนาฬิกา แต่ในขณะเดียวกันสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้จะเคลื่อนที่ไปทางขวาตามแนวแกน  $X$  เป็นระยะทาง 4 หน่วย และเคลื่อนที่ลงตามแนวแกน  $Y$  เป็นระยะทาง 4 หน่วยด้วย รูปแบบลักษณะของปัญหาและแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งมีจำนวน 814 จุดต่อและ 2,342 เอลิเมนต์ เมื่อวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LINEAL2D และมีจำนวน 814 จุดต่อและ 1,528 เอลิเมนต์ เมื่อวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ TORSION2D และ ELASTIC2D สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 6.22 และ 6.23 ตามลำดับ

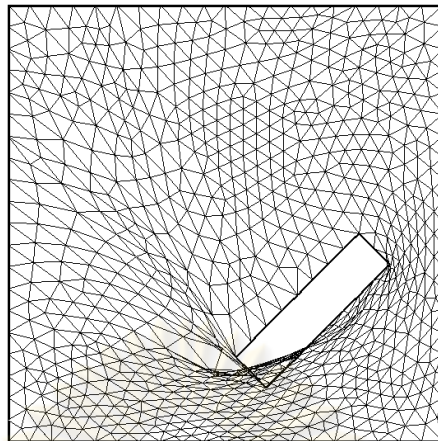


รูปที่ 6.22 ลักษณะของปัญหาการเคลื่อนที่แบบผสมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยม

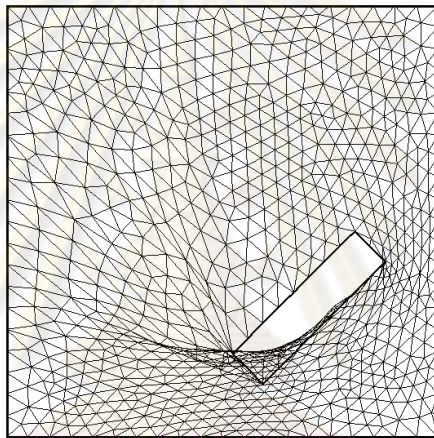


รูปที่ 6.23 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบผสมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยม

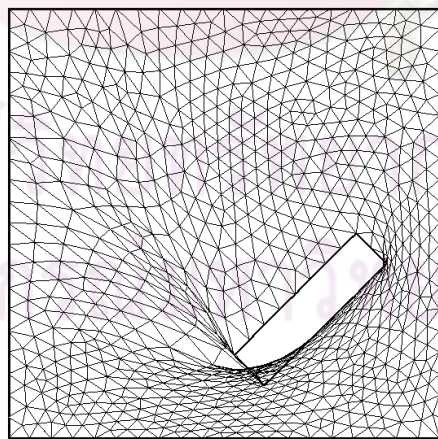
ถ้ากำหนดให้ค่าคุณสมบัติต่าง ๆ ที่ต้องใช้ในโปรแกรม ELASTIC2D ของปัญหานี้มีค่าเช่นเดียวกับปัญหาที่ผ่านมาคือมีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่นเท่ากับ  $1 \times 10^{10}$ , อัตราส่วนของปัวส์ซงเท่ากับ 0.3 และความหนาเท่ากับ 0.01 ซึ่งลักษณะของปัญหาเป็นแบบความเค้นในระนาบ (Plane Stress) ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LINEAL2D, TORSION2D และ ELASTIC2D เมื่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าบิดไปทำมุม 45 องศากับแกน  $X$  ในทิศทวนเข็มนาฬิกาพร้อมกับเคลื่อนที่ลงตามแนวเส้นทแยงมุมโดยเคลื่อนที่ไปทางขวาตามแนวแกน  $X$  เป็นระยะทาง 4 หน่วยและเคลื่อนที่ลงตามแนวแกน  $Y$  เป็นระยะทาง 4 หน่วยแสดงได้ดังรูปที่ 6.24



(ก) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LINEAL2D



(ข) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ TORSION2D



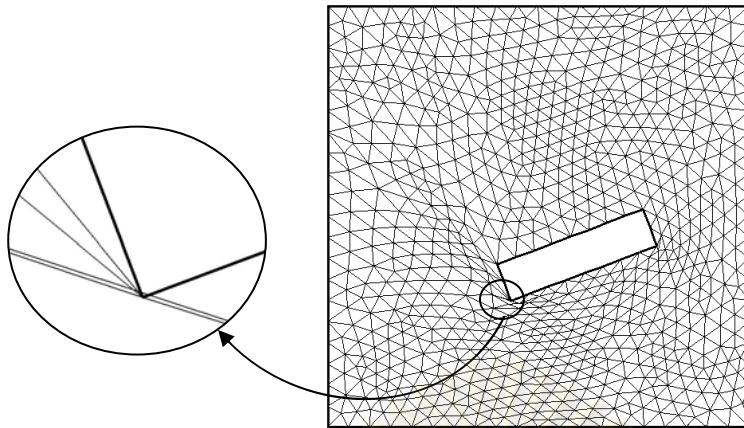
(ค) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ELASTIC2D

รูปที่ 6.24 ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบผสมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยม

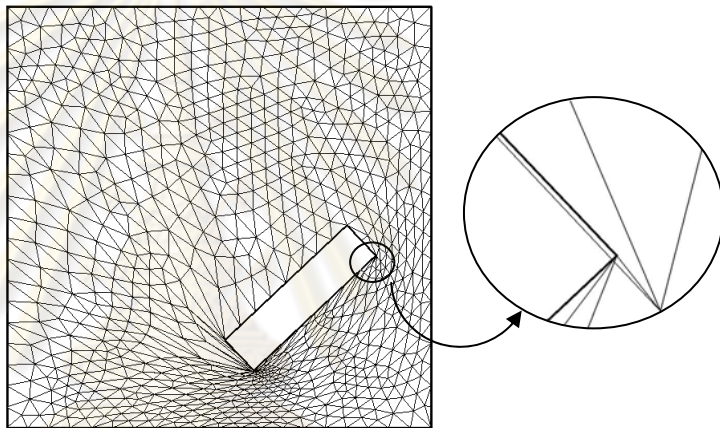
รูปที่ 6.24 แสดงการเปรียบเทียบรูปร่างของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมทั้งสามเมื่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าบิดไปทำมุม 45 องศากับแนวแกน  $X$  ในทิศทวนเข็มนาฬิกาพร้อมกับเคลื่อนที่ไปทางขวาตามแนวแกน  $X$  และเคลื่อนที่ลงตามแนวแกน  $Y$  เป็นระยะทาง 4 หน่วยในเวลาเดียวกัน พบว่าเอลิเมนต์ที่ได้จากทุกโปรแกรมจะเกิดการไขว้ตัวอย่างเห็นได้ชัด โดยคุณภาพโดยเฉลี่ยของเอลิเมนต์ (QAVG) เริ่มต้นอยู่ที่ 0.957 แต่ไม่สามารถทำการเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากแต่ละโปรแกรมหลังจากเกิดการเคลื่อนตัวได้เนื่องจากเอลิเมนต์เกิดการไขว้ตัว

สำหรับการแก้ไขปัญหาการไขว้ตัวของเอลิเมนต์นั้นจะกระทำในลักษณะเช่นเดียวกับปัญหาที่ผ่านมา คือทำการแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ทั้งหมดออกเป็นช่วงย่อย ๆ แล้วเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแต่ละโปรแกรมโดยดูจากจำนวนของช่วงการเคลื่อนที่ย่อย ซึ่งโปรแกรมที่มีจำนวนของช่วงการเคลื่อนที่ย่อยน้อยที่สุดจะใช้เวลาในการคำนวณน้อยที่สุด และมีประสิทธิภาพดีที่สุดในด้วย สำหรับปัญหานี้พบว่าจะต้องทำการแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ทั้งหมดออกเป็น 15 ช่วงการเคลื่อนที่ย่อยเมื่อทำการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม ELASTIC2D ถึงจะไม่เกิดการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ ในขณะที่เอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม LINEAL2D และ TORSION2D จะเกิดการไขว้ตัวเสมอถึงแม้จะแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ทั้งหมดออกเป็น 100 ช่วงการเคลื่อนที่ย่อยแล้วก็ตาม ซึ่งโปรแกรมจะจบการทำงานที่ช่วงการเคลื่อนที่ย่อยที่เกิดการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ โดยเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม LINEAL2D จะเกิดการไขว้ตัวที่ช่วงการเคลื่อนที่ย่อยที่ 46 ในขณะที่เอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม TORSION2D จะเกิดการไขว้ตัวที่ช่วงการเคลื่อนที่ย่อยที่ 96 ดังนั้นสำหรับปัญหานี้จึงสรุปได้ว่าโปรแกรม ELASTIC2D จะมีประสิทธิภาพดีที่สุดในการป้องกันการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ ส่วนโปรแกรม LINEAL2D และ TORSION2D จะไม่สามารถป้องกันการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ได้ ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ เมื่อทำการแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ทั้งหมดออกเป็นช่วงย่อย ๆ แสดงได้ดังรูปที่ 6.25

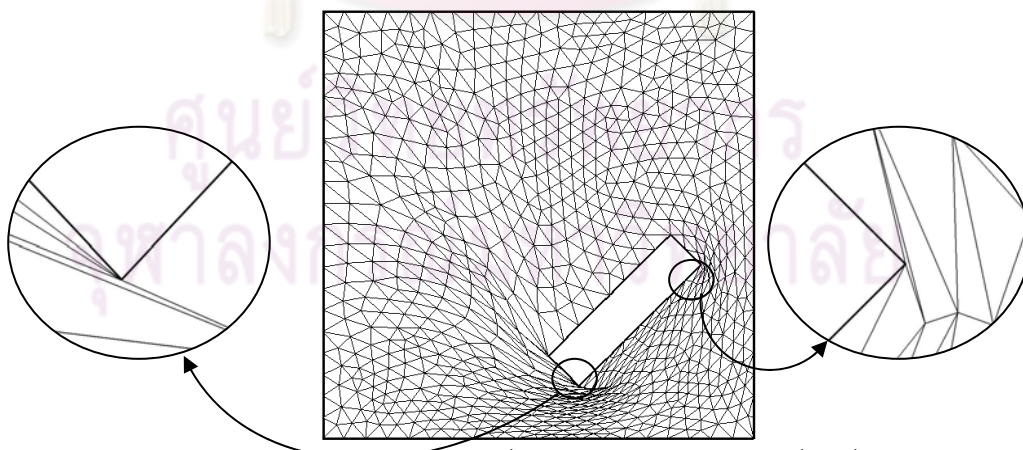
สำหรับการเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์จะกระทำโดยแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ทั้งหมดออกเป็น 20 ช่วงการเคลื่อนที่ย่อย พบว่าคุณภาพของเอลิเมนต์โดยเฉลี่ยที่ได้จากโปรแกรม ELASTIC2D จะมีค่าเท่ากับ 0.783 ซึ่งลดลงจากคุณภาพของเอลิเมนต์โดยเฉลี่ยเริ่มต้นที่ 0.957 ส่วนเอลิเมนต์ที่มีลักษณะแย่มากที่สุดที่ได้จากโปรแกรม ELASTIC2D จะมีคุณภาพเท่ากับ 0.001 ซึ่งถือว่าเอลิเมนต์นั้นมีคุณภาพต่ำมาก ส่วนเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม LINEAL2D และ TORSION2D นั้นไม่สามารถทำการเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ได้เนื่องจากเอลิเมนต์เกิดการไขว้ตัว กราฟแสดงการเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ แสดงได้ดังรูปที่ 6.26



(ก) โปรแกรม LINEAL2D เมื่อแบ่งเป็น 100 ช่วงการเคลื่อนที่ย่อยซึ่งจะจบการทำงานที่ช่วงการเคลื่อนที่ย่อยที่ 46 เนื่องจากเอลิเมนต์เกิดการไขว้ตัว

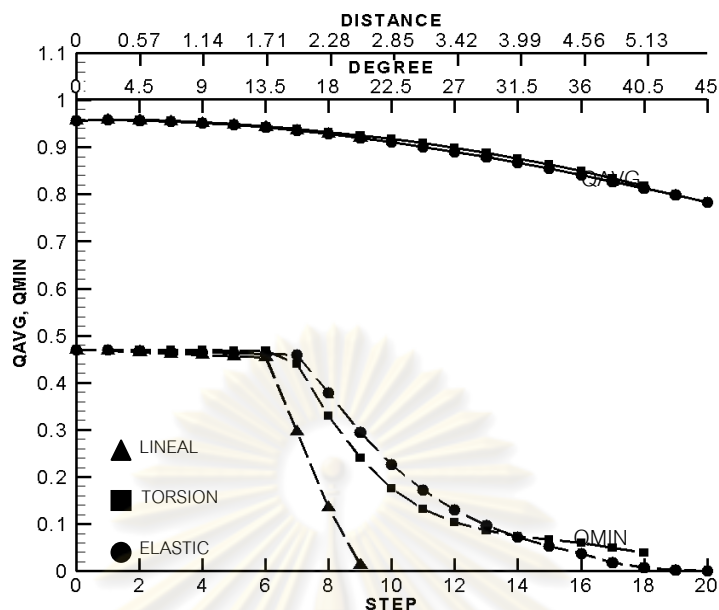


(ข) โปรแกรม TORSION2D เมื่อแบ่งเป็น 100 ช่วงการเคลื่อนที่ย่อยซึ่งจะจบการทำงานที่ช่วงการเคลื่อนที่ย่อยที่ 96 เนื่องจากเอลิเมนต์เกิดการไขว้ตัว



(ค) โปรแกรม ELASTIC2D เมื่อแบ่งเป็น 15 ช่วงการเคลื่อนที่ย่อย

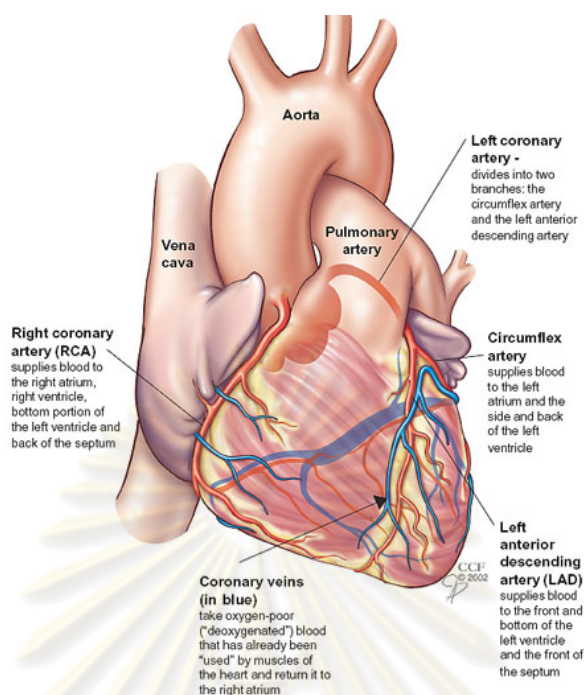
รูปที่ 6.25 ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบผสมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยมเมื่อทำการแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ทั้งหมดออกเป็นช่วงย่อย ๆ



รูปที่ 6.26 การเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการเคลื่อนที่แบบผสมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยมเมื่อทำการแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ทั้งหมดออกเป็น 20 ช่วงการเคลื่อนที่ย่อย

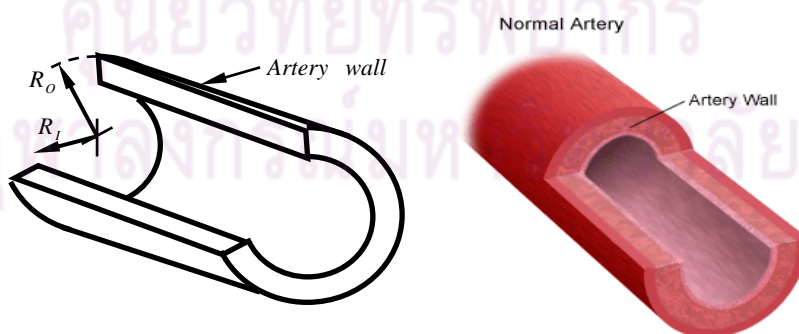
## 6.5 การจำลองการไหลเวียนของเลือดผ่านเส้นเลือด Coronary Artery

ตัวอย่างสุดท้ายจะแสดงการนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นมาประยุกต์ใช้กับปัญหาที่พบเห็นได้ในชีวิตจริงเพื่อสามารถทำความเข้าใจได้ดียิ่งขึ้น โดยจะจำลองการไหลเวียนของเลือดในเส้นเลือด Coronary Artery ซึ่งเป็นหลอดเลือดแดงที่มีหน้าที่นำเลือดและออกซิเจนมาเลี้ยงกล้ามเนื้อหัวใจ จึงนับว่าเป็นหลอดเลือดที่มีความสำคัญมาก ลักษณะโดยทั่วไปของหลอดเลือด Coronary Artery จะมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางโดยเฉลี่ยอยู่ที่ 3.5 – 4.5 มิลลิเมตรและความหนาของผนังหลอดเลือดโดยเฉลี่ยมีค่า 0.5 – 1 มิลลิเมตร [40] โดยปกติแล้วเส้นเลือด Coronary Artery จะเกิดการขยายตัวและหดตัวตามจังหวะการเต้นของหัวใจ โดยเส้นเลือด Coronary Artery จะขยายตัวเพื่อนำเลือดและออกซิเจนมาเลี้ยงกล้ามเนื้อหัวใจมากขึ้นและจะหดตัวเข้าสู่สภาวะเดิมต่อการเต้นของหัวใจ 1 ครั้ง ซึ่งขนาดของหลอดเลือดในขณะขยายตัวจะขึ้นอยู่กับความยืดหยุ่นของผนังเส้นเลือด อีกทั้งค่าความยืดหยุ่นของผนังเส้นเลือดในแต่ละบุคคลจะแตกต่างกันไป ขึ้นอยู่กับปัจจัยต่าง ๆ เช่น อายุ เพศ การออกกำลังกาย การสูบบุหรี่ โรคภัยไข้เจ็บ เป็นต้น รูปที่ 6.27 แสดงลักษณะของหัวใจและตำแหน่งของเส้นเลือดหลัก ๆ ที่มีความสำคัญรวมถึงเส้นเลือด Coronary Artery [41]



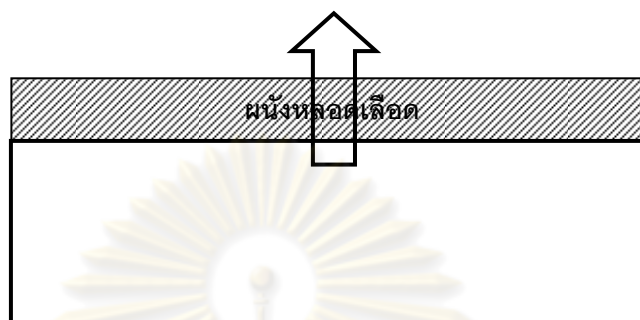
รูปที่ 6.27 ลักษณะของหัวใจและตำแหน่งของเส้นเลือด Coronary Artery

ในที่นี้จะทำการจำลองการไหลเวียนของเลือดในเส้นเลือด Coronary Artery ในขณะที่เกิดการขยายตัวโดยประยุกต์ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น รูปแบบลักษณะของปัญหานี้จะกำหนดให้มีรูปแบบลักษณะเช่นเดียวกับของ Lally et al. [42] ดังแสดงในรูปที่ 6.28 โดยมีเส้นผ่าศูนย์กลางของหลอดเลือดเท่ากับ 4 มิลลิเมตร ผนังหลอดเลือดมีความหนา 0.5 มิลลิเมตร และมีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น  $3.9 \times 10^6$  Pa และอัตราส่วนของปัวส์ซงเท่ากับ 0.3 ซึ่งค่าคุณสมบัติต่าง ๆ เหล่านี้จะถูกนำมาใช้ในโปรแกรม ELASTIC2D



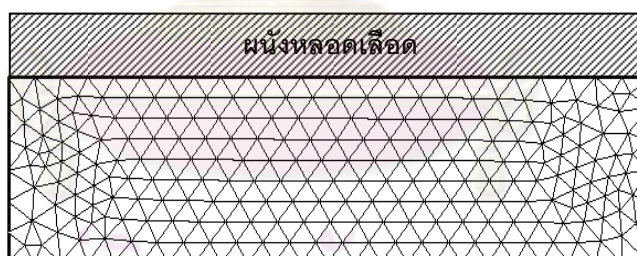
รูปที่ 6.28 ลักษณะของเส้นเลือด Coronary Artery โดยหลอดเลือดมีรัศมีภายนอก  $R_o = 2$  มม. และรัศมีภายใน  $R_i = 1.5$  มม.

เนื่องจากปัญหานี้เป็นปัญหาสมมาตร จึงสามารถพิจารณาเฉพาะครึ่งบนของปัญหาได้ ถ้ากำหนดให้ในขณะที่เส้นเลือด Coronary Artery ขยายตัวนั้นจะมีขนาดเพิ่มขึ้นประมาณ 20% จากขนาดเส้นเลือดปกติ ลักษณะรูปแบบและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหานี้แสดงได้ดังรูปที่ 6.29



รูปที่ 6.29 ลักษณะของปัญหาการไหลเวียนของเลือดในเส้นเลือด Coronary Artery

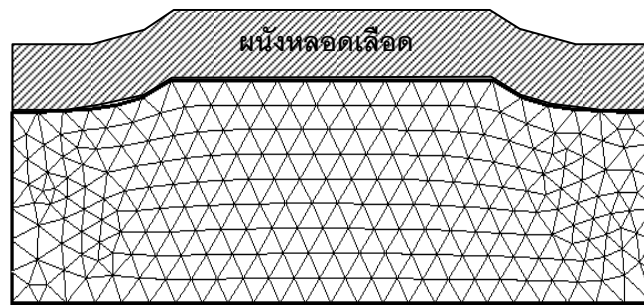
แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เมื่อมองตามความยาวของหลอดเลือดจะประกอบด้วย 271 จุดต่อและ 750 เอลิเมนต์ เมื่อนำไปวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LINEAL2D และประกอบด้วย 271 จุดต่อและ 480 เอลิเมนต์เมื่อนำไปวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ TORSION2D และ ELASTIC2D ซึ่งแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ทั้งสามแบบแสดงได้ดังรูปที่ 6.30



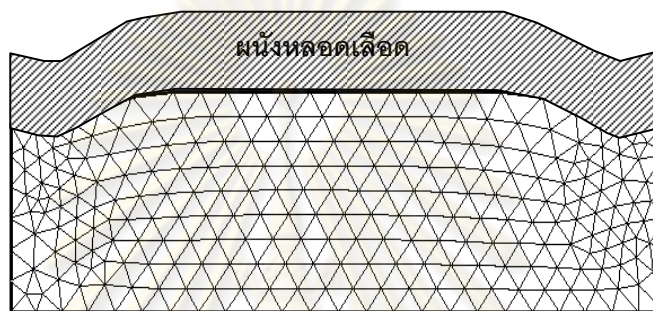
รูปที่ 6.30 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการไหลเวียนของเลือดในเส้นเลือด Coronary Artery

เมื่อเส้นเลือด Coronary Artery ขยายตัว จะได้ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ดังแสดงในรูปที่ 6.31

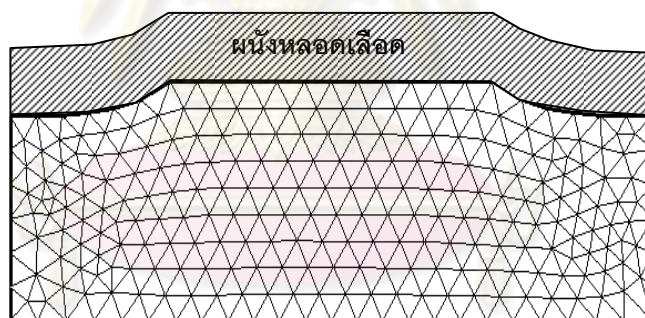




(ก) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LINEAL2D



(ข) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ TORSION2D



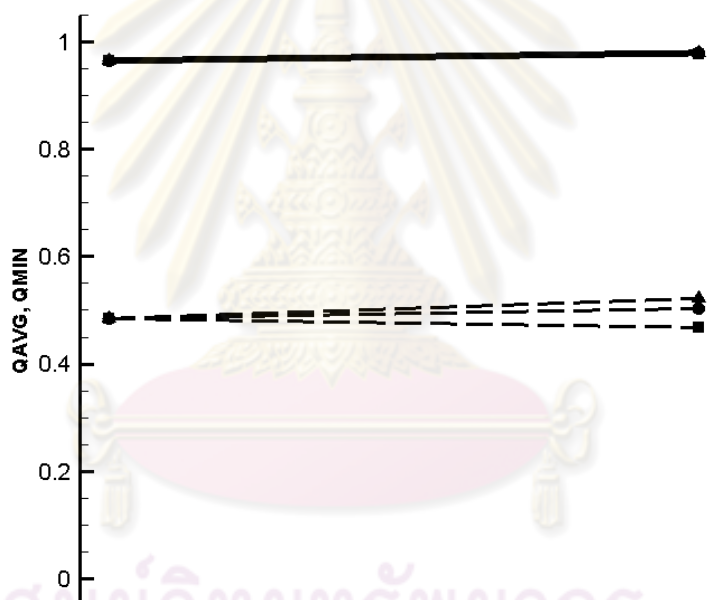
(ค) โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ELASTIC2D

รูปที่ 6.31 ลักษณะการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการไหลเวียนของเลือดในเส้นเลือด Coronary Artery

คุณภาพโดยเฉลี่ยของเอลิเมนต์เมื่อเส้นเลือด Coronary Artery ขยายตัวที่ได้จากทั้งสามโปรแกรมจะมีค่าใกล้เคียงกัน โดยเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม LINEAL2D จะมีคุณภาพโดยเฉลี่ยมากที่สุดอยู่ที่ 0.978 ในขณะที่เอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม ELASTIC2D จะมีคุณภาพโดยเฉลี่ยรองลงมาอยู่ที่ 0.977 และเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม TORSION2D จะมีคุณภาพโดยเฉลี่ยน้อยสุดอยู่ที่ 0.976 ดังนั้นสำหรับปัญหานี้จึงสรุปได้ว่าโปรแกรม LINEAL2D จะให้เอลิเมนต์ที่มี

คุณภาพที่ดีที่สุด ตามมาด้วยโปรแกรม ELASTIC2D และ TORSION2D ตามลำดับ กราฟแสดงการเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ แสดงได้ดังรูปที่ 6.31

ตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นถึงประโยชน์ของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นโดยการนำไปจำลองการไหลเวียนของเลือดในเส้นเลือด Coronary Artery ซึ่งในที่นี้รูปแบบการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์จะแสดงถึงลักษณะการไหลเวียนของเลือดนั่นเอง นอกจากนี้ยังสามารถนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นนี้ไปจำลองหรือทำนายปัญหาอื่น ๆ ได้อย่างกว้างขวาง เช่น การจำลองการเคลื่อนที่ของลิ้นหัวใจเทียม, การจำลองการเคลื่อนที่ของกล้ามเนื้อส่วนต่าง ๆ ของร่างกาย หรือการจำลองลักษณะของเนื้องอกที่เติบโตขึ้นในร่างกายซึ่งมีประโยชน์อย่างมากต่อการวางแผนการผ่าตัด เป็นต้น



รูปที่ 6.32 การเปรียบเทียบคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรมต่าง ๆ ของปัญหาการจำลองการไหลเวียนของเลือดในเส้นเลือด Coronary Artery ในสภาวะที่ขยายตัว

## 6.6 ข้อสรุปและข้อเปรียบเทียบ

จากปัญหาตัวอย่างที่แสดงมาทั้งหมดสามารถสรุปภาพรวมและเปรียบเทียบผลลัพธ์ของเอลิเมนต์ที่ได้จากแต่ละวิธีได้ดังนี้ ในกรณีที่ชอบเขตเคลื่อนที่ไปเป็นระยะทางไม่มากนัก เอลิเมนต์ที่ได้จากทุกวิธีจะไม่เกิดการไขว้ตัว และเมื่อพิจารณาคุณภาพโดยเฉลี่ยและคุณภาพที่ต่ำที่สุดของเอลิเมนต์ที่ได้จากแต่ละวิธีแล้วพบว่าวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยืดหยุ่นได้จะให้

เอลิเมนต์ที่มีคุณภาพดีที่สุด ตามมาด้วยวิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้นและวิธีความคล้ายคลึงทอรัชันสปริงตามลำดับ ซึ่งเป็นผลมาจากแบบจำลองของแต่ละวิธีที่มีลักษณะที่แตกต่างกัน กล่าวคือแบบจำลองของวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยืดหยุ่นได้จะมองโดเมนทั้งก่อนว่าเป็นวัตถุที่มีความยืดหยุ่น ดังนั้นเมื่อขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่จะส่งผลให้เอลิเมนต์ที่อยู่ภายในโดเมนทั้งหมดเคลื่อนตัวตามไปด้วยผ่านทางแรงยืดหยุ่น ซึ่งการที่กำหนดให้เอลิเมนต์แต่ละเอลิเมนต์มีคุณสมบัติยืดหยุ่นได้นั้น จะทำให้เกิดการส่งผ่านแรงยืดหยุ่นได้อย่างทั่วถึงทั้งโดเมน ดังนั้นรูปแบบของเอลิเมนต์ที่ได้จึงมีความต่อเนื่องและมีการกระจายตัวอย่างสม่ำเสมอ ซึ่งแตกต่างจากแบบจำลองของวิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้นซึ่งจะติดสปริงเชิงเส้นที่ขอบแต่ละขอบของเอลิเมนต์ ดังนั้นค่าเคลื่อนตัวที่ขอบเขตจึงส่งผลต่อเอลิเมนต์ที่อยู่ภายในโดเมนผ่านทางค่าความแข็งแกร่งของสปริงที่ติดอยู่ที่ขอบเอลิเมนต์เท่านั้น อย่างไรก็ตามคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากทั้งสองวิธีจะไม่แตกต่างกันมากนัก ส่วนแบบจำลองของวิธีความคล้ายคลึงทอรัชันสปริงจะนำทอรัชันสปริงมาติดที่ทุก ๆ จุดต่อของแต่ละเอลิเมนต์ โดยเมื่อขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่จะส่งผลต่อเอลิเมนต์ที่อยู่ภายในโดเมนผ่านทางแรงสปริงที่แต่ละจุดต่อเท่านั้น ทำให้การส่งผ่านการเคลื่อนที่ภายในโดเมนซึ่งผ่านทางแรงสปริงที่จุดต่อนั้นไม่มีความสม่ำเสมอ ซึ่งดูได้จากรูปแบบของเอลิเมนต์แต่ละเอลิเมนต์ที่ได้จะมีลักษณะที่แตกต่างกันอย่างเห็นได้ชัด

อย่างไรก็ตามในกรณีที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ไปมาก เอลิเมนต์ที่ได้จากทุกวิธีจะเกิดการไขว้ตัว ซึ่งในที่นี้ได้ทำการแก้ไขปัญหาค่าการไขว้ตัวของเอลิเมนต์โดยการแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ทั้งหมดออกเป็นช่วงย่อย ๆ พบว่าวิธีความคล้ายคลึงทอรัชันสปริงและวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยืดหยุ่นได้จะมีประสิทธิภาพในการป้องกันการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ได้ทั้งคู่ โดยวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยืดหยุ่นได้จะมีประสิทธิภาพดีกว่าเล็กน้อย ในขณะที่วิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้นจะไม่สามารถป้องกันการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ได้เลยไม่ว่ารูปแบบลักษณะของปัญหาจะเป็นอย่างไรหรือได้ทำการแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ออกเป็นช่วงย่อย ๆ ให้มากที่สุดแล้วก็ตาม ทั้งนี้เป็นเพราะค่าความแข็งแกร่งของสปริงเชิงเส้นที่ถูกออกแบบมาเพื่อรับเฉพาะแรงกดหรือแรงดึงนั้น จะขึ้นอยู่กับความยาวของขอบเอลิเมนต์เท่านั้น ไม่เกี่ยวกับพื้นที่หรือมุมภายในของเอลิเมนต์แต่อย่างใด ดังนั้นเมื่อขอบเอลิเมนต์สั้นลงหรือพืดอีกนัยหนึ่งคือเมื่อจุดต่อเคลื่อนที่เข้ามาใกล้กันเรื่อยๆ ค่าความแข็งแกร่งของสปริงเชิงเส้นจะมีค่ามากขึ้นเรื่อยๆ จนมีค่านันต์ ด้วยเหตุนี้วิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้นจึงสามารถป้องกันไม่ให้จุดต่อของเอลิเมนต์เคลื่อนที่มาชนกันได้เท่านั้น แต่ไม่สามารถป้องกันไม่ให้จุดต่อทะลุไปยังเอลิเมนต์ที่อยู่ข้างเคียง (Crossover) ได้ จึงเกิดการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ ซึ่งนับว่าเป็นข้อเสียของวิธีความคล้ายคลึงสปริง

เชิงเส้น ในขณะที่ค่าความแข็งแรงของทอร์ชันสปริงถูกกำหนดให้แปรผกผันกับพื้นที่ของเอลิเมนต์ กล่าวคือในขณะที่เอลิเมนต์ยุบตัวลง ค่าความแข็งแรงของทอร์ชันสปริงจะมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จนมีค่าอนันต์ ซึ่งส่งผลให้เกิดแรงต้านการเปลี่ยนแปลงของมุมที่จุดต่อ ด้วยเหตุนี้วิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริงจึงสามารถป้องกันการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ได้ อย่างไรก็ตามในปัญหาที่การเคลื่อนที่ของขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ไปมาก วิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริงยังไม่สามารถป้องกันการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ได้เสมอไป ซึ่งดูได้จากปัญหาการเคลื่อนที่แบบผสมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยมในหัวข้อ 6.4 เป็นต้น

เมื่อพิจารณาคุณภาพของเอลิเมนต์โดยทำการเปรียบเทียบคุณภาพโดยเฉลี่ยและคุณภาพที่ต่ำที่สุดของเอลิเมนต์ที่ได้จากวิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริงกับวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้ พบว่าเอลิเมนต์ที่ได้จากวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้จะมีคุณภาพดีกว่า ถึงแม้ว่าในบางปัญหาคุณภาพโดยเฉลี่ยของเอลิเมนต์ที่ได้จากวิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริงจะมีค่ามากกว่าก็ตามแต่มากกว่าเพียงเล็กน้อยเท่านั้น เมื่อเทียบกับคุณภาพของเอลิเมนต์ที่มีลักษณะแย่งที่สุดที่ได้จากวิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริงซึ่งมีคุณภาพน้อยกว่าเอลิเมนต์ที่มีลักษณะแย่งที่สุดที่ได้จากวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้ อย่างเห็นได้ชัด ทั้งนี้เป็นผลมาจากลักษณะของแบบจำลองที่แตกต่างกันดังที่ได้กล่าวไปแล้ว

กล่าวโดยสรุปวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้เป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพมากที่สุด เนื่องจากมีประสิทธิภาพในการป้องกันการไขว้ตัวของเอลิเมนต์มากที่สุด และให้เอลิเมนต์ที่มีคุณภาพดีที่สุดเมื่อเทียบกับอีกสองวิธีที่เหลือ

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บทสรุป ปัญหาที่พบและข้อเสนอแนะ

### 7.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์นี้ได้แสดงเทคนิควิธีต่าง ๆ ที่ใช้ในการหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ในปัญหาที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ภายใต้สภาวะอยู่ตัวในสองมิติโดยประยุกต์ใช้ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยเทคนิควิธีเหล่านี้ต้องให้รูปแบบการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับการเคลื่อนที่ของขอบเขต ในขณะที่เดียวกันรูปแบบลักษณะของเอลิเมนต์ที่ได้ต้องอยู่ในเกณฑ์ที่สามารถยอมรับได้ ในที่นี้ได้กล่าวถึง 3 เทคนิควิธีด้วยกัน ได้แก่วิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้น (Lineal Spring Analogy Technique), วิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริง (Torsional Spring Analogy Technique) และวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยืดหยุ่นได้ (Elastic Medium Analogy Technique) ซึ่งทั้งสามวิธีจะมีจำนวนจุดต่อและรูปแบบการเชื่อมโยงของเอลิเมนต์คงเดิมไม่เปลี่ยนแปลงตลอดช่วงเวลาที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่

ในการวิเคราะห์ปัญหาที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ด้วยเทคนิควิธีดังกล่าวจำเป็นต้องมีความรู้พื้นฐานในเรื่องของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยในบทที่ 2 ได้อธิบายถึงขั้นตอนของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และหลักการต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ได้แก่การหาฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ของปัญหาในสองมิติ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่มีความสำคัญในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์เนื่องจากส่งผลต่อความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้

สำหรับบทที่ 3 ได้กล่าวถึงแนวคิดและทฤษฎีของเทคนิควิธีต่าง ๆ ที่ใช้ในการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ โดยแนวคิดในการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ของทั้ง 3 วิธีได้จำลองมาจากโครงสร้างที่มีคุณสมบัติยืดหยุ่นได้ ซึ่งได้แก่สปริงเชิงเส้น, ทอร์ชันสปริงและวัตถุที่มีความยืดหยุ่น ทั้งนี้เพื่อให้การเคลื่อนที่ของขอบเขตส่งผลมายังเอลิเมนต์ทั้งหมดที่อยู่ภายในโดเมนผ่านทางแรงยืดหยุ่นนี้ นอกจากนี้ยังได้แสดงขั้นตอนการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เข้ากับสมการพื้นฐานที่สอดคล้องกัน โดยในวิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้นได้นำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาประยุกต์ใช้กับสมการสมดุลแรงของสปริงเชิงเส้น และยังสามารถนำหลักการอนุรักษ์พลังงานความเครียดมาประยุกต์ใช้เพิ่มเติมเพื่อทำการแปลงเมตริกซ์ของเอลิเมนต์จากแนวแกนย่อยให้อยู่

ในระบบแกนรวมใหญ่ เพื่อให้การคำนวณสมการทั้งระบบมีความง่ายขึ้น ส่วนวิธีความคล้ายคลึงทอรัสชั้นสปริงได้นำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาประยุกต์ใช้กับสมการสมดุลโมเมนต์ของทอรัสชั้นสปริง และยังได้ทำการแปลงโมเมนต์เนื่องจากทอรัสชั้นสปริงให้อยู่ในรูปของแรงในระบบแกนรวมใหญ่ ทั้งนี้เพื่อให้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้อยู่ในรูปแบบเดียวกับวิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้น และเพื่อความสะดวกในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ส่วนวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยืดหยุ่นได้ได้นำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาประยุกต์ใช้กับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของของแข็งที่มีความยืดหยุ่น โดยใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างแบบบับโนฟกาเลอรคิน (Bubnov-Galerkin) เพื่อสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งสุดท้ายแล้วสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้จากแต่ละวิธีจะอยู่ในรูปแบบเดียวกัน ทำให้สะดวกต่อการประดิษฐ์เอลิเมนต์เมตริกซ์และไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์และสามารถทำความเข้าใจได้โดยง่าย นอกจากนี้ในหัวข้อสุดท้ายยังได้กล่าวถึงหลักเกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบผลลัพธ์ของเอลิเมนต์ที่ได้จากแต่ละวิธี โดยพิจารณาจาก 1) ความสมบูรณ์ของเอลิเมนต์ ซึ่งเป็นเกณฑ์แรกในการพิจารณาว่าเอลิเมนต์นั้นมีรูปแบบที่ยอมรับได้หรือไม่ โดยเอลิเมนต์ที่เกิดการไขว้ตัวจะถือว่าไม่สามารถยอมรับได้ และ 2) คุณภาพของเอลิเมนต์ โดยอ้างอิงจากเอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้านเท่าซึ่งถือว่าเป็นเอลิเมนต์ที่มีคุณภาพดีที่สุด

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ของเทคนิควิธีต่าง ๆ ที่ใช้ในการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นในบทที่ 3 นั้นสามารถนำมาประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง ซึ่งในบทที่ 4 ได้แสดงรายละเอียดขั้นตอนในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกับเทคนิควิธีต่าง ๆ ด้วยภาษาฟอร์แทรน โดยกำหนดให้มีชื่อว่า LINEAL2D, TORSION2D และ ELASTIC2D รวมถึงแสดงตัวอย่างขั้นตอนการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์แต่ละโปรแกรมโดยละเอียด

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นถูกนำไปตรวจสอบความถูกต้องก่อนที่จะนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาต่าง ๆ เพื่อป้องกันความผิดพลาดที่อาจเกิดขึ้น ดังนั้นในบทที่ 5 จึงได้ทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นกับปัญหาที่มีรูปแบบการเคลื่อนที่ของขอบเขตอย่างง่าย ทั้งนี้เนื่องจากปัญหาที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ส่วนใหญ่จะไม่ทราบผลเฉลยแม่นยำตรง ดังนั้นในการตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาเหล่านี้จึงพิจารณาจากรูปแบบการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ภายหลังจากขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ รวมถึงโอกาสที่เอลิเมนต์จะเกิดการไขว้ตัว พบว่าผลลัพธ์ที่ได้จากแต่ละโปรแกรมมีความสอดคล้องกับหลักการและสมการของแต่ละวิธีที่นำมาประดิษฐ์โปรแกรมนั้น ๆ

สำหรับในบทที่ 6 เป็นการแสดงการนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นมาประยุกต์ใช้กับปัญหาในสองมิติทั้งที่มีรูปแบบการเคลื่อนที่ของขอบเขตอย่างง่ายและซับซ้อนซึ่งแต่ละปัญหาต่างมีรูปแบบโครงสร้างและรูปแบบการเคลื่อนที่ที่แตกต่างกันดังนี้

- 1) ปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยม
- 2) ปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นของขอบเขตรูปวงกลม
- 3) ปัญหาการเคลื่อนที่แบบเชิงมุมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยม
- 4) ปัญหาการเคลื่อนที่ทั้งแบบเชิงเส้นและเชิงมุมของขอบเขตรูปสี่เหลี่ยม
- 5) ปัญหาการจำลองการไหลเวียนของเลือดในเส้นเลือด Coronary Artery

และทำการเปรียบเทียบเอลิเมนต์ที่ได้จากแต่ละวิธีในแต่ละปัญหาโดยพิจารณาจากหลักเกณฑ์ที่ได้กล่าวถึงไปแล้วในบทที่ 3 พบว่าในกรณีที่ขอบเขตเคลื่อนที่ไปเป็นระยะทางไม่มากนัก เอลิเมนต์ที่ได้จากทุกวิธีจะไม่เกิดการไขว้ตัว ซึ่งวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้จะให้เอลิเมนต์ที่มีคุณภาพดีที่สุด ตามมาด้วยวิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้นและวิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริงตามลำดับ แต่ในกรณีที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ไปมาก เอลิเมนต์ที่ได้จากทุกวิธีจะเกิดการไขว้ตัว ซึ่งในที่นี้ได้ทำการแก้ไขปัญหาการไขว้ตัวของเอลิเมนต์โดยการแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ทั้งหมดออกเป็นช่วงย่อย ๆ พบว่าวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้มีประสิทธิภาพในการป้องกันการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ได้ดีกว่าวิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริงเล็กน้อย ในขณะที่วิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้นไม่สามารถป้องกันการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ได้เลย ส่วนคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้มีค่ามากกว่าคุณภาพของเอลิเมนต์ที่ได้จากวิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริง

กล่าวโดยสรุปได้ว่าวิทยานิพนธ์นี้สามารถนำเทคนิควิธีต่าง ๆ ร่วมกับการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาใช้ในการหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ได้เป็นอย่างดีและให้ผลลัพธ์เป็นที่น่าพอใจ รวมทั้งยังสามารถสรุปข้อดี-ข้อเสียของแต่ละวิธีได้นั้นคือ วิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้นเป็นวิธีที่ง่ายต่อการทำความเข้าใจและการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์มากที่สุด แต่ในกรณีของปัญหาที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ไปมาก วิธีความคล้ายคลึงสปริงเชิงเส้นจะไม่สามารถป้องกันการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ได้เลยถึงแม้ว่าได้ทำการแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ทั้งหมดออกเป็นช่วงย่อย ๆ แล้วก็ตาม ในขณะที่ขั้นตอนการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของวิธีความคล้ายคลึงทอร์ชันสปริงและวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้จะมีความยุ่งยาก

ซับซ้อน แต่ในกรณีของปัญหาที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ไปมาก ทั้งสองวิธีจะสามารถป้องกันการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ได้เมื่อทำการแบ่งระยะทางการเคลื่อนที่ทั้งหมดออกเป็นช่วงย่อย ๆ

## 7.2 ปัญหาที่พบในขณะทำวิทยานิพนธ์

ปัญหาสำคัญที่พบในขณะทำวิทยานิพนธ์ ได้แก่

- การใช้ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ (Gauss Elimination Method) ซึ่งเป็นวิธีการคำนวณแบบตรง (Direct Method) ในการแก้ระบบสมการรวมที่มีขนาดใหญ่ ซึ่งต้องใช้เวลาในการคำนวณนานมาก ทำให้เป็นข้อจำกัดในการวิเคราะห์ปัญหาที่ซับซ้อนและมีขนาดใหญ่
- ความยากในการทำความเข้าใจในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของวิธีความคล้ายคลึงทอรัสสปริง เนื่องจากมีขั้นตอนที่ยุ่งยากซับซ้อน
- การเลือกค่าคุณสมบัติต่าง ๆ ของวัตถุให้เหมาะสมกับลักษณะของปัญหาของวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้

## 7.3 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

ในการคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ในปัญหาที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่สามารถนำทฤษฎีและโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นจากวิทยานิพนธ์นี้ไปปรับปรุงและพัฒนาเพิ่มเติมเพื่อนำไปวิเคราะห์ปัญหาที่มีความซับซ้อนยิ่งขึ้น ซึ่งควรมีการปรับปรุงและพัฒนาเพิ่มเติมในบางส่วนดังนี้

- ปรับปรุงและคิดค้นวิธีการใหม่ ๆ เพื่อแก้ไขปัญหาการไขว้ตัวของเอลิเมนต์ซึ่งเป็นปัญหาที่สำคัญที่สุดในปัญหาที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ โดยอาจกำหนดค่าความแข็งแกร่งของสปริงในวิธีความคล้ายคลึงสปริงหรือค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่นในวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้ในแต่ละตำแหน่งให้มีความแตกต่างกัน หรือนำวิธีต่าง ๆ มารวมกัน เช่นเพิ่มสปริงเชิงเส้นเข้าไปในแบบจำลองของทอรัสสปริง หรือเพิ่มทอรัสสปริงเข้าไปในแบบจำลองของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้ เป็นต้น ซึ่งนับว่าเป็นวิธีที่มีความน่าสนใจเป็นอย่างยิ่ง
- ปรับปรุงขั้นตอนในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของวิธีความคล้ายคลึงทอรัสสปริงให้อยู่ในรูปแบบที่ง่ายและกระชับมากขึ้น



- เปลี่ยนระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการแก้ระบบสมการจากระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์เป็นระเบียบวิธีอื่นที่สามารถแก้ระบบสมการที่มีขนาดใหญ่ได้โดยใช้ระยะเวลาสั้น
- ปรับปรุงโปรแกรมคอมพิวเตอร์ให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ในสถานะชั่วครู่ (Transient Problem) ได้
- พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ในสามมิติได้



ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## รายการอ้างอิง

- [1] Moller, H. Analysis and Optimization for Fluid-Structure Interaction Problems.  
Doctoral Dissertation, Faculty of Technology and Science, Institute of  
Mechanical Engineering, Aalborg University, 2002.
- [2] Barone, M. F., and Payne, J. L. Methods for simulation-based analysis of fluid-  
structure interaction. California: Sandia National Laboratories, 2005.
- [3] Douglass, R. W., et al. Current views on grid generation: summaries of a panel  
discussion. Numerical Heat Transfer (Part B: Fundamentals) 41 (March 2002):  
211-237.
- [4] Samareh, A. J. Status and future of geometry modeling and grid generation for  
design and optimization. J. Aircraft 36 (January-February 1999): 97-104.
- [5] Teng, Shang-Hua., and Wong, Chi Wai. Unstructured mesh generation: theory,  
practice and perspectives. International journal Computational Geometry and  
Applications 10-3 (June 200): 227-266.
- [6] Gaitonde, A. L., Jones, D. P., and Fiddes, S.P. A 2D Navier–Stokes method for  
unsteady compressible flow calculations on moving meshes. Aeronautical  
Journal 102 (1998): 89-97.
- [7] Haber, R., Shephard, M. S., Abel, J. F., Gallagher, R. H., and Greenberg, D. P.  
A general two-dimensional, graphical finite-element preprocessor utilizing  
discrete transfinite mappings. International journal for Numerical Methods in  
Engineering 17-7 (June 2005): 1015-1044.
- [8] Morton, S. A., Melville, R. B., and Visbal, M. R. Accuracy and coupling issues of  
aeroelastic Navier–Stokes solutions on deforming meshes. J. Aircraft 35 (1998):  
798-805.
- [9] Reuther, J. J., Alonso, J. J., Jameson, A., Rimlinger, M. J., and Saunders, D.  
Constrained multipoint aerodynamic shape optimization using an adjoint  
formulation and parallel computers. J. Aircraft 36 (1997): 51-60.

- [10] Gadala, M. S., Movahhedy, M. R., and Wang, J. On the mesh motion for ALE modeling of metal forming processes. Finite Elements in Analysis and Design 38 (January 2002): 435-459.
- [11] Zienkiewicz, O. C., and Phillips, D. V. An automatic mesh generation scheme for plane and curved surfaces by 'isoparametric' co-ordinates. International journal for Numerical Methods in Engineering 3-4 (June 2005): 519-528.
- [12] Nakahashi, K., and Deiwert, G. S. A practical adaptive grid method for complex fluid flow problems. Ninth International conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics. France, 1984, also edited by Soubbaramayer and Broujot. pp. 422-426. Springer-Verlag, 1985.
- [13] Nakahashi, K., and Deiwert, G. S. Three-dimensional adaptive grid method. AIAA Journal 24-6 (1986): 948-954.
- [14] Batina, J. T. Unsteady Euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes. AIAA Journal 28-8 (1990): 1381-1388.
- [15] Farhat, C., Degand, C., Koobus, B., and Lesoinne, M. Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 163 (1998): 231-245.
- [16] Farhat, C., Degand, C., Koobus, B., and Lesoinne, M. An improved method of spring analogy for dynamic unstructured fluid meshes. AIAA Paper 98-2070 (April 1998).
- [17] Degand, C., and Farhat, C. A three-dimensional torsional spring analogy method for unstructured dynamic meshes. Computers and Structures 80 (2002): 305-316.
- [18] Blom, F. J. Consideration on the spring analogy. International journal for Numerical Methods in Fluids 32 (2000): 647-668.
- [19] Zeng, D., and Ethier, C. R. A semi-torsional spring analogy model for updating unstructured meshes in 3D moving domains. Finite Elements in Analysis and Design 41 (2005): 1118-1139.
- [20] Murayama, M., Nakahashi, K., and Matsushima, K. Unstructured dynamic mesh for large movement and deformation. AIAA Paper 2002-0122 (2002).

- [21] Burg, C. O. E. A robust unstructured grid movement strategy using three-dimensional torsional springs. 34<sup>th</sup> AIAA Fluid Dynamics Conference 2004-2529 (June 2004).
- [22] Bottasso, C. L., Detomi, D., and Serra, R. The ball-vertex method: a new simple spring analogy method for unstructured dynamic meshes. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 194 (2005): 4244-4264.
- [23] Anderson, W. K. Aerodynamic design optimization on unstructured grids with a continuous adjoint formulation. 35<sup>th</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting 97-0643 (January 1997).
- [24] Johnson, A. A., and Tezduyar, T. E. Mesh update strategies in parallel finite element computations of flow problems with moving boundaries and interfaces. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 119 (1994): 73-94.
- [25] Johnson, A. A., and Tezduyar, T. E. Advanced mesh generation and update methods for 3D flow simulations. Computational Mechanics 23 (1999): 130-143.
- [26] Stein, K., Tezduyar, T. E., and Benney, R. Mesh moving techniques for fluid-structure interactions with large displacements. Journal of Applied Mechanics 70 (January 2003): 58-63.
- [27] Nielsen, E. J., and Anderson, W. K. Recent improvements in aerodynamic design optimization on unstructured meshes. AIAA Journal 40-6 (June 2002): 1155-1163.
- [28] Bar-Yoseph, P. Z., Mereu, S., Chippada, S., and Kalro, V. J. Automatic monitoring of element shape quality in 2-D and 3-D computational mesh dynamics. Computational Mechanics 27 (2001): 378-395.
- [29] Hsu, Su-Yuen and Chang, Chau-Lyan. Mesh deformation based on fully stressed design: the method and two-dimensional examples. International journal for Numerical Methods in Engineering 72-5 (October 2007): 606-629.
- [30] Dwight, R. P. Robust mesh deformation using the linear elasticity equations. Fourth International conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD4). Belgium, 2006.

- [31] Ferrant, M., and et al. 3D image matching using a finite element based elastic deformation model. In C. Taylor and A. Colchester (eds.), MICCAI 1999, LNCS 1679, pp. 202-210. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999.
- [32] Bartels, R. E. Mesh strategies for accurate computational of unsteady spoiler and aeroelastic problems. J. Aircraft 37 (2000): 521-525.
- [33] Bartels, R. E. Finite macro-element mesh deformation in a structured multi-block Navier-Stokes code. NASA 2005-213789 (July 2005).
- [34] ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2544.
- [35] Jasak, H., and Tukovic, Z. Automatic mesh motion for the unstructured finite volume method. Transactions of FAMENA 30-2 (2007): 1-18.
- [36] Lopez, E. J., Nigro, N. M., Storti, M. A., and Toth, J. A. A minimal element distortion strategy for computational mesh dynamics. International journal for Numerical Methods in Engineering 69-9 (February 2007): 1898-1929.
- [37] Lopez, E. J., Nigro, N. M., and Storti, M. A. Simultaneous untangling and smoothing of moving and fixed grids. International journal for Numerical Methods in Engineering 76-7 (June 2008): 994-1019.
- [38] Freitag, J., Jones, M., and Plassmann, P. A parallel algorithm for mesh smoothing. SIAM J. on Scientific Computing 20 (1999): 2023-2040.
- [39] Battaglia, L., D'Elia, J., Storti, M. A., and Nigro, N. M. Free-surface flows in a multi-physics programming paradigm. Mechanical Computational XXIV (November 2005): 105-116.
- [40] Balázs, T., Bognár, E., Zima, E., and Dobránszky, J. Mechanical properties of coronary veins. Gépészet G-2008-N-07 (May 2008).
- [41] Coronary Artery [Online]. 2001. Available from: <https://www.clevelandclinic.org/heartcenter/pub/guide/heartworks/coronaryartery.htm> [2010, March 22]
- [42] Lally, C., Dolan, F., and Prendergast, P. J. Cardiovascular stent design and vessel stresses: a finite element analysis. Journal of Biomechanics 38 (2005): 1574-1581.



ภาคผนวก

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ภาคผนวก ก

## รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ LINEAL2D

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ LINEAL2D ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อวิเคราะห์ปัญหาขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ดังที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 4 มีรายละเอียดดังนี้

```

C*****
C*                                     PROGRAM LINEAL2D                               *
C*  A FINITE ELEMENT PROGRAM FOR STUDY OF MESH MOVEMENT BY LINEAL SPRING          *
C*                                     ANALOGY TECHNIQUE FOR TWO-DIMENSIONAL MOVING    *
C*                                     BOUNDARY PROBLEMS                               *
C*****
C
C   THE VALUE DECLARED IN THE PARAMETER STATEMENT BELOW SHOULD BE
C   ASSIGNED ACCORDING TO THE SIZE OF THE PROBLEMS
C
C           MXPOI = MAXIMUM NUMBER OF NODES IN THE MODEL
C           MXELE  = MAXIMUM NUMBER OF ELEMENTS IN THE MODEL
C
C   PARAMETER      (MXPOI=1000, MXELE=2500)
C   IMPLICIT REAL*8  (A-H, O-Z)
C   DIMENSION      SYSK(MXPOI*2,MXPOI*2), SYSF(MXPOI*2), STORESYSF(MXPOI*2)
C   DIMENSION      THETA(MXELE), COORD(MXPOI,2), UMB(MXPOI,2)
C   DIMENSION      INTMATRI(MXELE,3)
C   REAL           L12, L13, L23, LENGTH(MXELE), NEWCOORD(MXPOI,2)
C   INTEGER        INTMAT(MXELE,2), IBC(MXPOI,2)
C   INTEGER        CONDA(MXELE), STEP, SUMA
C   CHARACTER*20   NAME1, NAME2, NAME3, NAME4
C
C   5  WRITE(6,10)
C   10 FORMAT(/, ' PLEASE ENTER THE INPUT FILE NAME:')
C   READ(5, '(A)', ERR=5) NAME1
C   OPEN(UNIT=8, FILE=NAME1, STATUS='OLD', ERR=5)
C
C-----
C   READ INPUT DATA:
C-----
C
C   READ(8,*) NLines
C   DO 20 ILine=1,NLines
C   READ(8,1) TEXT
C   1  FORMAT(20A4)
C   20 CONTINUE
C   READ(8,1) TEXT
C   READ(8,*) NPOIN, NELEM, NFORCE, NETRI
C   READ(8,1) TEXT
C   DO 40 IP=1,NPOIN
C   READ(8,*) I, (COORD(I,J),J=1,2), (IBC(I,K),K=1,2), (UMB(I,L),L=1,2)
C   IF(I.NE.IP) WRITE(6,30) IP
C   30 FORMAT(/, ' NODE NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
C   IF(I.NE.IP) STOP
C   40 CONTINUE
C   READ(8,1) TEXT
C   DO 60 IE=1,NELEM
C   READ(8,*) I, (INTMAT(I,J), J=1,2), LENGTH(I), THETA(I)
C   IF(I.NE.IE) WRITE(6,50) IE
C   50 FORMAT(/, ' ELEMENT NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
C   IF(I.NE.IE) STOP

```

```

60 CONTINUE
C
  NDF = 2.
  NEQ = NPOIN*NDF
  DO 70 I=1,NEQ
    STORESYSF(I) = 0.
70 CONTINUE
  READ(8,1) TEXT
  DO 80 II=1,NFORCE
    READ(8,*) N, FX, FY
    IEQ = (N-1)*NDF
    STORESYSF(IEQ+1) = FX
    STORESYSF(IEQ+2) = FY
80 CONTINUE
  READ(8,1) TEXT
  READ(8,1) TEXT
  DO 90 IE=1,NETRI
    READ(8,*) I, (INTMATRI(I,J), J=1,3)
90 CONTINUE
C
  WRITE(6,100) NPOIN, NELEM
100 FORMAT(/, ' *** THE FINITE ELEMENT MODEL CONSISTS OF', I5,
*         ' NODES AND', I5, ' ELEMENTS ***')
C
110 WRITE(6,120)
120 FORMAT(/, ' PLEASE INPUT NO. OF CALCULATION STEP(S) FOR MOVING',
*         ' BOUNDARY DISPLACEMENT (MAXIMUM OF 100 STEPS):')
  READ(5,*) STEP
  IF(STEP.GT.100) GO TO 110
C
C-----
C   CREATE FILE FOR DISPLACEMENT SOLUTIONS:
C-----
C
130 WRITE(6,140)
140 FORMAT(/, ' PLEASE ENTER FILE NAME FOR DISPLACEMENT SOLUTIONS :')
  READ(5, '(A)', ERR=130) NAME2
  OPEN(UNIT=9, FILE=NAME2, STATUS='NEW', ERR=130)
C
C-----
C   CREATE FILE FOR 2-D PLOTTING DIAGRAM:
C-----
C
150 WRITE(6,160)
160 FORMAT(/, ' PLEASE ENTER PLOTTING FILE NAME (*.PLT):')
  READ(5, '(A)', ERR=150) NAME3
  OPEN(UNIT=10, FILE=NAME3, STATUS='NEW', ERR=150)
C
C-----
C   CREATE FILE FOR MEASURING ELEMENT QUALITY:
C-----
C
170 WRITE(6,180)
180 FORMAT(/, ' PLEASE ENTER FILE NAME FOR MEASURING ELEMENT QUALITY
*         ' (*.PLT):')
  READ(5, '(A)', ERR=170) NAME4
  OPEN(UNIT=11, FILE=NAME4, STATUS='NEW', ERR=170)
C
C-----
C   START CALCULATION FOR EACH STEP:
C-----
C
  DO 5000 ISTEP=1,STEP
  WRITE(6,190) ISTEP, STEP
190 FORMAT(///, ' *** STARTING CALCULATION STEP:', I3, ' OF TOTAL', I3,

```



```

*           ' STEP(S) ***' )
C
      DO 200 I=1,NEQ
      SYSF(I) = STORESYSF(I)
200  CONTINUE
      DO 210 I=1,NEQ
      DO 210 J=1,NEQ
      SYSK(I,J) =0.
210  CONTINUE
C
C-----
C      CREATE ELEMENT MATRICES, ASSEMBLE THEM FOR SYSTEM MATRICES,
C      APPLY BOUNDARY CONDITIONS AND SOLVE THEM FOR THE SOLUTIONS:
C-----
C
      WRITE(6,220)
220  FORMAT(/, ' *** ESTABLISHING ELEMENT MATRICES AND ASSEMBLING ELEMENT',
*        ' EQUATIONS ***' )
      CALL CEM( STEP, ISTEP, NETRI, INTMATRI, COORD, NELEM, INTMAT, LENGTH
*        THETA, SYSK, SYSF, MXPOI, MXELE)
C
      WRITE(6,230)
230  FORMAT(/, ' *** APPLYING BOUNDARY CONDITIONS ***' )
      CALL APPLYBC(NPOIN, IBC, SYSK, SYSF, UMB, STEP, MXPOI)
C
      WRITE(6,240)
240  FORMAT(/, ' *** SOLVING A SET OF SIMULTANEOUS EQUATIONS FOR',
*        ' DISPLACEMENT SOLUTIONS ***' )
      WRITE(6,250) NEQ
250  FORMAT(5X, ' ( TOTAL OF', I5, ' EQUATIONS )' )
      CALL SOLVE(NEQ, SYSK, SYSF, MXPOI)
C
C-----
C      PRINT OUT THESE NODAL DISPLACEMENT SOLUTIONS:
C-----
C
      WRITE(9,260) ISTEP, STEP
260  FORMAT(/, 'FOR CALCULATION STEP:', I3, ' OF TOTAL', I3, ' STEP(S)')
      WRITE(9,270) NPOIN
270  FORMAT(' NODAL DISPLACEMENT SOLUTIONS [', I5, ' ]:' /, 2X, 'NODE', 13X,
*        'U', 19X, 'V')
      I1 = 1
      DO 290 IP=1,NPOIN
      I2 = I1 + 1
      WRITE(9,280) IP, (SYSF(I), I=I1,I2)
280  FORMAT(I6, 2E20.6)
      I1 = I2 + 1
290  CONTINUE
C
C-----
C      FIND NEW COORDINATES:
C-----
C
      DO 300 IP=1,NPOIN
      J1 = (IP-1)*2 + 1
      J2 = J1 + 1
      NEWCOORD(IP,1) = COORD(IP,1) + SYSF(J1)
      NEWCOORD(IP,2) = COORD(IP,2) + SYSF(J2)
300  CONTINUE
C
C-----
C      CHECK ELEMENT VALIDITIES:
C-----
C
      DO 310 IE=1,NETRI

```

```

CONDA(IE) = 1.
310 CONTINUE
SUMA = 0.
DO 320 IE=1,NETRI
II = INTMATTRI(IE,1)
JJ = INTMATTRI(IE,2)
KK = INTMATTRI(IE,3)
XG1 = NEWCOORD(II,1)
YG1 = NEWCOORD(II,2)
XG2 = NEWCOORD(JJ,1)
YG2 = NEWCOORD(JJ,2)
XG3 = NEWCOORD(KK,1)
YG3 = NEWCOORD(KK,2)
AREA = 0.5*(XG1*(YG2-YG3) + XG2*(YG3-YG1) + XG3*(YG1-YG2))
IF(AREA.LT.0) THEN
CONDA(IE) = 0.
SUMA = SUMA + 1.
ENDIF
320 CONTINUE
C
C ! CONDA = 0 : AREA OF ELEMENT IS NEGATIVE (AN INVALID ELEMENT)
C ! CONDA = 1 : AREA OF ELEMENT IS POSITIVE OR EQUAL ZERO
C (A VALID ELEMENT)
C
WRITE(9,330)
330 FORMAT(/, 'ELEMENT NO. AS FOLLOWING HAS NEGATIVE AREA:')
DO 350 IE=1,NETRI
IF(CONDA(IE).EQ.0) WRITE(9,340) IE
340 FORMAT(I5)
350 CONTINUE
WRITE(9,360) SUMA
360 FORMAT('TOTAL INVALID ELEMENT(S):', I5)
C
C-----
C PRINT OUT 2-D PLOTTING DIAGRAM:
C-----
C
IF(ISTEP.EQ.1) THEN
WRITE(10,*) ' TITLE = "FE PLOTTING DATA BY LINEAL SPRING MTD."'
WRITE(10,*) ' VARIABLES = "X-CO", "Y-CO"'
WRITE(10,370) NPOIN, NETRI
370 FORMAT(' ZONE T="COORD",N=', I5,', E=', I5,', F=FEPOINT, ET=TRIANGLE')
DO 390 IP=1,NPOIN
WRITE(10,380) (COORD(IP,J), J=1,2)
380 FORMAT(2E20.6)
390 CONTINUE
DO 410 IE=1,NETRI
WRITE(10,400) (INTMATTRI(IE,J), J=1,3)
400 FORMAT(3I8)
410 CONTINUE
ENDIF
C
WRITE(10,420) ISTEP, NPOIN, NETRI
420 FORMAT(' ZONE T="COORD AT STEP:', I3,', " , N=', I5,', E=', I5,', F=FEPOINT',
* ' ET=TRIANGLE')
DO 440 IP=1,NPOIN
WRITE(10,430) (NEWCOORD(IP,J), J=1,2)
430 FORMAT(2E20.6)
440 CONTINUE
DO 460 IE=1,NETRI
WRITE(10,450) (INTMATTRI(IE,J), J=1,3)
450 FORMAT(3I8)
460 CONTINUE
C
C-----

```

```

C      EXIT THE PROGRAM IF INVALID ELEMENTS OCCUR:
C-----
C
      IF(SUMA.GT.0.) WRITE(6,470) SUMA, ISTEP
470  FORMAT(/,'!!! ERROR !!!',/, ' THERE IS(ARE)',I5,' INVALID ELEMENT(S)',
*      ' WHICH HAS(HAVE) NEGATIVE AREA AT THE', I4, ' STEP')
      IF(SUMA.GT.0.) STOP
C
C-----
C      FIND & PRINT OUT THE NEW ELEMENT QUALITY:
C-----
C
      SUMQ = 0.
      QMIN = 1.
      DO 490 IE=1,NETRI
      II = INTMATTRI(IE,1)
      JJ = INTMATTRI(IE,2)
      KK = INTMATTRI(IE,3)
      XG1 = NEWCOORD(II,1)
      YG1 = NEWCOORD(II,2)
      XG2 = NEWCOORD(JJ,1)
      YG2 = NEWCOORD(JJ,2)
      XG3 = NEWCOORD(KK,1)
      YG3 = NEWCOORD(KK,2)
      AREA = 0.5*(XG1*(YG2-YG3) + XG2*(YG3-YG1) + XG3*(YG1-YG2))
      L12 = SQRT((XG2-XG1)**2 + (YG2-YG1)**2)
      L13 = SQRT((XG3-XG1)**2 + (YG3-YG1)**2)
      L23 = SQRT((XG3-XG2)**2 + (YG3-YG2)**2)
C
      Q = (4*SQRT(3.0)*AREA)/(L12**2 + L13**2 + L23**2)
      IF(Q.LT.0.OR.Q.GT.1) WRITE(6,480) ISTEP
480  FORMAT(/,' !!! ERROR!!! ',/, ' ELEMENT QUALITY VALUE (Q) IS NOT IN ',
*      ' RANGE [0,1] AT THE', I4, ' STEP')
      IF(Q.LT.0.OR.Q.GT.1) STOP
      SUMQ = SUMQ + Q
      IF(Q.LT.QMIN) QMIN = Q
490  CONTINUE
C
      QAVG = SUMQ/NETRI
      WRITE(11,500) ISTEP, QAVG, QMIN
500  FORMAT(I4, 2F20.8)
C
C-----
C      UPDATE VARIABLES(LENGTH, THETA AND COORD) FOR NEXT STEP:
C-----
C
      IF(STEP.EQ.1) GO TO 520
      WRITE(6,510)
510  FORMAT(/, '*** UPDATING VARIABLES FOR NEXT STEP ***')
      CALL UPDATE(NEWCOORD, COORD, INTMAT, LENGTH, THETA, NPOIN, NELEM,
*              MXPOI, MXELE)
C
5000  CONTINUE
C
520  WRITE(6,530)
530  FORMAT(///, ' !!! COMPLETELY DONE !!!', /, ' *** THANK YOU ***')
      STOP
      END
C
C=====
C
      SUBROUTINE CEM( STEP, ISTEP, NETRI, INTMATTRI, COORD, NELEM, INTMAT,
*              LENGTH, THETA, SYSK, SYSF, MXPOI, MXELE)
C
C-----

```

```

C      COMPUTE ELEMENT MATRICES AND ASSEMBLE THEM FOR SYSTEM EQUATIONS:
C-----
C
C      PARAMETER (PI = 3.1415926)
C
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C      DIMENSION SYSK(MXPOI*2,MXPOI*2), SYSF(MXPOI*2)
C      DIMENSION COORD(MXPOI,2), THETA(MXELE), INTMATTRI(MXELE,3)
C      REAL L12, L13, L23, LENGTH(MXELE), K(4,4)
C      INTEGER STEP, INTMAT(MXELE,2)
C
C-----
C      CHECK ELEMENT VALIDITIES FOR ONLY INITIAL ELEMENTS:
C-----
C
C      IF(ISTEP.EQ.1) THEN
C      SUMQ = 0.
C      QMIN = 1.
C      DO 300 IE=1, NETRI
C      II = INTMATTRI(IE,1)
C      JJ = INTMATTRI(IE,2)
C      KK = INTMATTRI(IE,3)
C      XG1 = COORD(II,1)
C      YG1 = COORD(II,2)
C      XG2 = COORD(JJ,1)
C      YG2 = COORD(JJ,2)
C      XG3 = COORD(KK,1)
C      YG3 = COORD(KK,2)
C      AREA = 0.5*(XG1*(YG2-YG3) + XG2*(YG3-YG1) + XG3*(YG1-YG2))
C      IF(AREA.LT.0.) WRITE(6,100)
100  FORMAT(/, ' !!! ERROR !!!', /, ' THERE IS INVALID ELEMENT WHICH HAS ',
*          ' NEGATIVE AREA', /, ' --- CHECK F.E. MODEL FOR NODAL ',
*          ' COORDINATES AND ELEMENT NODAL CONNECTIONS ---')
C      IF(AREA.LT.0.) STOP
C
C-----
C      FIND & PRINT OUT THE ELEMENT QUALITY FOR ONLY INITIAL ELEMENTS:
C-----
C
C      L12 = SQRT((XG2-XG1)**2 + (YG2-YG1)**2)
C      L13 = SQRT((XG3-XG1)**2 + (YG3-YG1)**2)
C      L23 = SQRT((XG3-XG2)**2 + (YG3-YG2)**2)
C      Q = (4*SQRT(3.0)*AREA)/(L12**2 + L13**2 + L23**2)
C      IF(Q.LT.0.OR.Q.GT.1) WRITE(6,200)
200  FORMAT(/, ' !!! ERROR !!!', /, ' ELEMENT QUALITY VALUE (Q) MUST BE ',
*          ' IN RANGE [0,1], /,--- CHECK F.E. MODEL FOR NODAL
*          ' COORDINATES AND ELEMENT NODAL CONNECTIONS ---')
C      IF(Q.LT.0.OR.Q.GT.1) STOP
C      SUMQ = SUMQ + Q
C      IF(Q.LT.QMIN) QMIN = Q
300  CONTINUE
C
C      QAVG = SUMQ/NETRI
C      IMAX = STEP + 1.
C      WRITE(11,*) ' TITLE = "COMPARISON CHART OF ELEMENT QUALITY BETWEEN ',
*          ' EACH METHOD"'
C      WRITE(11,*) ' VARIABLES = "STEP", "QAVG", "QMIN"'
C      WRITE(11,400) IMAX
400  FORMAT(' ZONE T="LINEAL", I=', I4, ' , DATAPACKING=POINT')
C      WRITE(11,500) 0, QAVG, QMIN
500  FORMAT(I4, 2F20.8)
C      ENDIF
C
C-----
C      LOOP OVER THE NUMBER OF ELEMENTS:

```

```

C-----
C
      DO 1000  IE=1, NELEM
C
C-----
C      CONVERT ANGLE UNIT FROM DEGREE TO RADIAN:
C-----
      THETA(IE) = THETA(IE)*2*PI/360
C
      K(1,1) = COS(THETA(IE))**2
      K(1,2) = SIN(THETA(IE))*COS(THETA(IE))
      K(1,3) = -COS(THETA(IE))**2
      K(1,4) = -SIN(THETA(IE))*COS(THETA(IE))
      K(2,1) = K(1,2)
      K(2,2) = SIN(THETA(IE))**2
      K(2,3) = -SIN(THETA(IE))*COS(THETA(IE))
      K(2,4) = -SIN(THETA(IE))**2
      K(3,1) = K(1,3)
      K(3,2) = K(2,3)
      K(3,3) = COS(THETA(IE))**2
      K(3,4) = SIN(THETA(IE))*COS(THETA(IE))
      K(4,1) = K(1,4)
      K(4,2) = K(2,4)
      K(4,3) = K(3,4)
      K(4,4) = SIN(THETA(IE))**2
C
      FAC = 1./LENGTH(IE)
      DO 600  I=1,4
      DO 600  J=1,4
      K(I,J) = K(I,J)*FAC
600  CONTINUE
C
C-----
C      ASSEMBLE THESE ELEMENT EQUATIONS INTO THE SYSTEM EQUATIONS:
C-----
      CALL ASSEMBLE(IE, INTMAT, K, SYSK, MXPOI, MXELE)
C
1000 CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
C-----
C
      SUBROUTINE ASSEMBLE(IE, INTMAT, K, SYSK, MXPOI, MXELE)
C
C-----
C      ASSEMBLE ELEMENT EQUATIONS INTO SYSTEM EQUATIONS:
C-----
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION SYSK(MXPOI*2,MXPOI*2)
      REAL K(4,4)
      INTEGER INTMAT(MXELE,2)
C
      NNODE = 2
      NDF = 2
C
      DO 200 NR=1,NNODE
      NODR = INTMAT(IE,NR)
      DO 200 MR=1,NDF
C
      NSR = (NODR-1)*NDF + MR
      NER = (NR -1)*NDF + MR
C

```

```

DO 100 NC=1,NNODE
NODC = INTMAT(IE,NC)
DO 100 MC=1,NDF
C
NSC = (NODC-1)*NDF + MC
NEC = (NC -1)*NDF + MC
C
SYSK(NSR,NSC) = SYSK(NSR,NSC) + K(NER,NEC)
100 CONTINUE
C
200 CONTINUE
C
RETURN
END
C
C=====
C
SUBROUTINE APPLYBC(NPOIN, IBC, SYSK, SYSF, UMB, STEP, MXPOI)
C-----
C APPLY DISPLACEMENT BOUNDARY CONDITIONS WITH CONDITION CODE OF:
C 0 = FREE TO MOVE
C 1 = FIXED BOUNDARY
C 2 = MOVING BOUNDARY
C-----
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION SYSK(MXPOI*2,MXPOI*2), SYSF(MXPOI*2)
DIMENSION UMB(MXPOI,2)
INTEGER IBC(MXPOI,2), STEP
C
NDF = 2.
DO 700 IN=1,NPOIN
DO 600 ID=1,NDF
C
C-----
C CHECK IF IBC = 0, DO NOTHING
C-----
C
IF(IBC(IN,ID).EQ.0) THEN
GO TO 600
C
C-----
C CHECK IF IBC = 1, APPLY U = 0
C-----
C
ELSE IF(IBC(IN,ID).EQ.1) THEN
IEQ = (IN-1)*NDF + ID
DO 100 IC=1,NPOIN*2
SYSK(IEQ,IC) = 0.
100 CONTINUE
SYSK(IEQ,IEQ) = 1.
SYSF(IEQ) = 0.
C
DO 200 IR=1,NPOIN*2
IF(IR.EQ.IEQ) GO TO 200
SYSK(IR,IEQ) = 0.
200 CONTINUE
C
C-----
C CHECK IF IBC = 2, APPLY U = UMB
C-----
C
ELSE IF(IBC(IN,ID).EQ.2) THEN
IEQ = (IN-1)*NDF + ID

```

```

DO 300 IC=1,NPOIN*2
  SYSK(IEQ,IC) = 0.
300 CONTINUE
  SYSK(IEQ,IEQ) = 1.
  SYSF(IEQ) = UMB(IN, ID)/STEP
C
DO 400 IR=1,NPOIN*2
  IF(IR.EQ.IEQ) GO TO 400
  SYSF(IR) = SYSF(IR) - SYSK(IR,IEQ)*(UMB(IN, ID)/STEP)
  SYSK(IR,IEQ) = 0.
400 CONTINUE
C
C-----
C   CHECK IF INPUT IBC IS WRONG
C-----C
      ELSE
      WRITE(6,500) IN, ID
500  FORMAT(/, ' ERROR!!!',/, ' PLEASE CHECK IBC OF NODE', I5, ' ID =', I5)
      ENDIF
C
600 CONTINUE
700 CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
C-----
C
      SUBROUTINE SOLVE(NEQ, SYSK, SYSF, MXPOI)
C
C-----
C   SOLVE A SET OF SIMULTANEOUS EQUATIONS USING GUASS ELIMINATION.
C   THE OUTPUT SOLUTIONS WILL BE STORED IN VARIABLE SYSF.
C-----
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION SYSK(MXPOI*2,MXPOI*2), SYSF(MXPOI*2)
      REAL KMAX
C
      NR = NEQ
      NC = NEQ
C
C-----
C   SCALING:
C-----C
      DO 300 IE=1,NEQ
        BIG = ABS(SYSK(IE,1))
        DO 100 IC=2,NC
          KMAX = ABS(SYSK(IE,IC))
          IF(KMAX.GT.BIG) BIG = KMAX
100  CONTINUE
        DO 200 IC=1,NC
          SYSK(IE,IC) = SYSK(IE,IC)/BIG
200  CONTINUE
          SYSF(IE) = SYSF(IE)/BIG
300  CONTINUE
C
C-----
C   FORWARD ELIMINATION : STARTING FROM 'PRIME' IP=1,NEQ-1
C-----
      DO 900 IP=1,NEQ-1
C
C-----

```

```

C      PIVOTING:
C-----
C
      JP = IP
      BIG = ABS(SYSK(IP,IP))
      DO 400 I=IP+1,NR
      KMAX = ABS(SYSK(I,IP))
      IF(KMAX.GT.BIG) THEN
          BIG = KMAX
          JP = I
      ENDIF
400 CONTINUE
C
      IF(JP.NE.IP) THEN
      DO 500 J=IP,NC
      DUMY = SYSK(JP,J)
      SYSK(JP,J) = SYSK(IP,J)
      SYSK(IP,J) = DUMY
500 CONTINUE
      DUMY = SYSF(JP)
      SYSF(JP) = SYSF(IP)
      SYSF(IP) = DUMY
      ENDIF
C
C-----
C      PERFORMING FORWARD ELIMINATION ACCORDING TO THE ORDER OF
C      'PRIME' FROM 1 TO NEQ-1
C-----
C
      DO 700 IE=IP+1,NEQ
      RATIO = SYSK(IE,IP)/SYSK(IP,IP)
      DO 600 IC=IP+1,NC
      SYSK(IE,IC) = SYSK(IE,IC)-SYSK(IP,IC)*RATIO
600 CONTINUE
      SYSF(IE) = SYSF(IE)-SYSF(IP)*RATIO
700 CONTINUE
C
      DO 800 IE=IP+1,NEQ
      SYSK(IE,IP) = 0.
800 CONTINUE
900 CONTINUE
C
C-----
C      CHECK PIVOT ZERO OF THE LAST EQUATION
C-----
C
      PIVOT = ABS(SYSK(NEQ,NEQ))
      IF(ABS(PIVOT).LT.10.E-10) THEN
      WRITE(6,950) NEQ, PIVOT
950 FORMAT(' EQUATION NO.', I5, ' HAS NEARLY ZERO PIVOT OF', E14.6, '
*      ' **STOP **', '//,*** CHECK NODE AND ELEMENT NUMBERING IN F.E.
*      ' MODEL ****')
      STOP
      ENDIF
C
C-----
C      BACK SUBSTITUTION:
C-----
C
      SYSF(NEQ) = SYSF(NEQ)/SYSK(NEQ,NEQ)
      DO 1100 IE=NEQ-1,1,-1
      SUM = 0.
      DO 1000 IC=IE+1,NEQ
      SUM = SUM + SYSK(IE,IC)*SYSF(IC)
1000 CONTINUE

```



```

        SYSF(IE) = (SYSF(IE)-SUM)/SYSK(IE,IE)
1100 CONTINUE
C
        RETURN
        END
C
C-----
C
        SUBROUTINE UPDATE(NEWCOORD, COORD, INTMAT, LENGTH, THETA, NPOIN,
*
*                               NELEM, MXPOI, MXELE)
C-----
C
        CALCULATE NEW VARIABLES(COORD, LENGTH, THETA) FOR NEXT STEP:
C-----
C
        PARAMETER (PI = 3.1415926)
C
        IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
        DIMENSION COORD(MXPOI,2), THETA(MXELE)
        REAL NEWCOORD(MXPOI,2), LENGTH(MXELE)
        INTEGER INTMAT(MXELE,2)
C
C-----
C
        CALCULATE NEW COORD:
C-----
C
        DO 100 IP=1,NPOIN
        DO 100 J=1,2
        COORD(IP,J) = NEWCOORD(IP,J)
100 CONTINUE
C
C-----
C
        CALCULATE NEW LENGTH:
C-----
C
        DO 300 IE=1,NELEM
        II = INTMAT(IE,1)
        JJ = INTMAT(IE,2)
        XG1 = COORD(II,1)
        YG1 = COORD(II,2)
        XG2 = COORD(JJ,1)
        YG2 = COORD(JJ,2)
        DX = XG2 - XG1
        DY = YG2 - YG1
        LENGTH(IE) = SQRT(DX**2 + DY**2)
C
C-----
C
        CALCULATE NEW THETA:
C-----
C
        IF(DX.GT.0) THEN
        IF(DY.GT.0) THEN
        THETA(IE) = ABS(ATAN(DY/DX))*(360/(2*PI))
        ELSE IF(DY.LT.0) THEN
        THETA(IE) = (2*PI - ABS(ATAN(DY/DX)))*(360/(2*PI))
        ELSE
        THETA(IE) = 0.
        ENDIF
        ENDIF
C
        IF(DX.EQ.0) THEN
        IF(DY.GT.0) THEN
        THETA(IE) = (PI/2)*(360/(2*PI))
        ELSE IF(DY.LT.0) THEN
        THETA(IE) = (3*PI/2)*(360/(2*PI))

```

```

ELSE
WRITE(6,200) IE
200 FORMAT(/, ' !!! ELEMENT NO.', I5, ' IS A POINT.')
ENDIF
ENDIF
C
IF(DX.LT.0) THEN
IF(DY.GT.0) THEN
THETA(IE) = (PI - ABS(ATAN(DY/DX)))*(360/(2*PI))
ELSE IF(DY.LT.0) THEN
THETA(IE) = (PI + ABS(ATAN(DY/DX)))*(360/(2*PI))
ELSE
THETA(IE) = PI*(360/(2*PI))
ENDIF
ENDIF
C
300 CONTINUE
C
RETURN
END
C
C=====
C
C   END PROGRAM LINEAL2D
C
C*****

```

ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ภาคผนวก ข

## รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ TORSION2D

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ TORSION2D ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อวิเคราะห์ปัญหาขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ดังที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 4 มีรายละเอียดดังนี้

```

C*****
C*          PROGRAM TORSION2D          *
C* A FINITE ELEMENT PROGRAM FOR STUDY OF MESH MOVEMENT BY TORSIONAL SPRING *
C*          ANALOGY TECHNIQUE FOR TWO-DIMENSIONAL MOVING          *
C*          BOUNDARY PROBLEMS          *
C*****
C
C   ASSIGNED ACCORDING TO THE SIZE OF THE PROBLEMS
C
C           MXPOI = MAXIMUM NUMBER OF NODES IN THE MODEL
C           MXELE = MAXIMUM NUMBER OF ELEMENTS IN THE MODEL
C
C   PARAMETER (MXPOI=1000, MXELE=2500)
C
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C   DIMENSION   SYSK(MXPOI*2,MXPOI*2), SYSF(MXPOI*2)
C   DIMENSION   STORESYSF(MXPOI*2), COORD(MXPOI,2), UMB(MXPOI*2)
C   REAL        NEWCOORD(MXPOI,2), L12, L13, L23
C   INTEGER     INTMAT(MXELE,3), IBC(MXPOI,2), STEP, SUMA, CONDA(MXELE)
C   CHARACTER*20 NAME1, NAME2, NAME3, NAME4
C
C   10 WRITE(6,20)
C   20 FORMAT(/, ' PLEASE ENTER THE INPUT FILE NAME:')
C   READ(5, '(A)', ERR=10) NAME1
C   OPEN(UNIT=8, FILE=NAME1, STATUS='OLD', ERR=10)
C
C-----
C   READ INPUT DATA:
C-----
C
C   READ(8,*) NLines
C   DO 30 ILINE=1,NLines
C   READ(8,1) TEXT
C   1  FORMAT(20A4)
C   30 CONTINUE
C   READ(8,1) TEXT
C   READ(8,*) NPOIN, NELEM, NFORCE
C
C   NDF = 2.
C   NEQ = NPOIN*NDF
C   DO 40 I=1,NEQ
C   UMB(I) = 0.
C   40 CONTINUE
C   READ(8,1) TEXT
C   DO 60 IP=1,NPOIN
C   READ(8,*) I, (COORD(I,J), J=1,2), (IBC(I,K), K=1,2), UX, UY
C   IF(I.NE.IP) WRITE(6,20) IP
C   50 FORMAT(/, ' NODE NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
C   IF(I.NE.IP) STOP
C   IEQ = (I-1)*NDF
C   UMB(IEQ+1) = UX
C   UMB(IEQ+2) = UY

```

```

60 CONTINUE
  READ(8,1) TEXT
  DO 80 IE=1,NELEM
    READ(8,*) I, (INTMAT(I,J), J=1,3)
    IF(I.NE.IE) WRITE(6,70) IE
70  FORMAT(/, ' ELEMENT NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
    IF(I.NE.IE) STOP
80  CONTINUE
C
  DO 90 I=1,NEQ
    STORESYSF(I) = 0.
90  CONTINUE
  READ(8,1) TEXT
  DO 100 II=1,NFORCE
    READ(8,*) N, FX, FY
    IEQ = (N-1)*NDF
    STORESYSF(IEQ+1) = FX
    STORESYSF(IEQ+2) = FY
100 CONTINUE
C
  WRITE(6,110) NPOIN, NELEM
110 FORMAT(/, ' *** THE FINITE ELEMENT MODEL CONSISTS OF', I5, ' NODES',
*        ' AND ,I5, ' ELEMENTS ***')
C
120 WRITE(6,130)
130 FORMAT(/, ' PLEASE INPUT NO. OF CALCULATION STEP(S) FOR MOVING ',
*        ' BOUNDARY DISPLACEMENT (MAXIMUM OF 100 STEPS):')
  READ(5,*) STEP
  IF(STEP.GT.100) GO TO 120
C
C-----
C  CREATE FILE FOR DISPLACEMENT SOLUTIONS:
C-----
C
140 WRITE(6,150)
150 FORMAT(/, ' PLEASE ENTER FILE NAME FOR DISPLACEMENT SOLUTIONS :')
  READ(5, '(A)', ERR=140) NAME2
  OPEN(UNIT=9, FILE=NAME2, STATUS='NEW', ERR=140)
C
C-----
C  CREATE FILE FOR 2-D PLOTTING DIAGRAM:
C-----
C
160 WRITE(6,170)
170 FORMAT(/, ' PLEASE ENTER PLOTTING FILE NAME (*.PLT):')
  READ(5, '(A)', ERR=160) NAME3
  OPEN(UNIT=10, FILE=NAME3, STATUS='NEW', ERR=160)
C
C-----
C  CREATE FILE FOR MEASURING ELEMENT QUALITY:
C-----
C
180 WRITE(6,190)
190 FORMAT(/, ' PLEASE ENTER FILE NAME FOR MEASURING ELEMENT QUALITY',
*        ' (*.PLT):')
  READ(5, '(A)', ERR=180) NAME4
  OPEN(UNIT=11, FILE=NAME4, STATUS='NEW', ERR=180)
C
C-----
C  START CALCULATING FOR EACH STEP:
C-----
C
  DO 5000 ISTEP=1,STEP
  WRITE(6,200) ISTEP, STEP
200 FORMAT(///, ' *** STARTING CALCULATION STEP:', I3, ' OF TOTAL', I3, '

```

```

*           ' STEP(S) ***' )
C
DO 210 I=1,NEQ
SYSF(I) = STORESYSF(I)
210 CONTINUE
DO 220 I=1,NEQ
DO 220 J=1,NEQ
SYSK(I,J) =0.
220 CONTINUE
C
C-----
C      CREATE ELEMENT MATRICES, ASSEMBLE THEM FOR SYSTEM MATRICES,
C      APPLY BOUNDARY CONDITIONS AND SOLVE THEM FOR THE SOLUTIONS:
C-----
C
WRITE(6,230)
230 FORMAT(/, ' *** ESTABLISHING ELEMENT MATRICES AND ASSEMBLING ELEMENT',
*           ' EQUATIONS ***' )
CALL CEM( ISTEP, STEP, NELEM, NPOIN, COORD, INTMAT, SYSK, SYSF,
*         MXPOI, MXELE)
C
WRITE(6,240)
240 FORMAT(/, ' *** APPLYING BOUNDARY CONDITIONS ***' )
CALL APPLYBC(NPOIN, IBC, SYSK, SYSF, UMB, STEP, MXPOI)
C
WRITE(6,250)
250 FORMAT(/, ' *** SOLVING A SET OF SIMULTANEOUS EQUATIONS FOR ',
*           ' DISPLACEMENT SOLUTIONS ***' )
WRITE(6,260) NEQ
260 FORMAT(5X, ' ( TOTAL OF', I5, ' EQUATIONS )' )
CALL SOLVE(NEQ, SYSK, SYSF, MXPOI)
C
C-----
C      PRINT OUT THESE NODAL DISPLACEMENT SOLUTIONS:
C-----
C
WRITE(9,270) ISTEP, STEP
270 FORMAT(/, 'FOR CALCULATION STEP:', I3, ' OF TOTAL', I3, ' STEP(S)')
WRITE(9,280) NPOIN
280 FORMAT(' NODAL DISPLACEMENT SOLUTIONS [', I5, ' ]:', /, 2X, 'NODE',
*         13X, 'U', 19X, 'V')
I1 = 1
DO 300 IP=1,NPOIN
I2 = I1 + 1
WRITE(9,290) IP, (SYSF(I), I=I1,I2)
290 FORMAT(I6, 2E20.6)
I1 = I2 + 1
300 CONTINUE
C
C-----
C      FIND NEW COORDINATES:
C-----
C
DO 310 IP=1,NPOIN
J1 = (IP-1)*2 + 1
J2 = J1 + 1
NEWCOORD(IP,1) = COORD(IP,1) + SYSF(J1)
NEWCOORD(IP,2) = COORD(IP,2) + SYSF(J2)
310 CONTINUE
C
C-----
C      CHECK ELEMENT VALIDITIES:
C-----
C
DO 320 IE=1,NELEM

```

```

CONDA(IE) = 1.
320 CONTINUE
SUMA = 0.
DO 330 IE=1,NELEM
II = INTMAT(IE,1)
JJ = INTMAT(IE,2)
KK = INTMAT(IE,3)
XG1 = NEWCOORD(II,1)
YG1 = NEWCOORD(II,2)
XG2 = NEWCOORD(JJ,1)
YG2 = NEWCOORD(JJ,2)
XG3 = NEWCOORD(KK,1)
YG3 = NEWCOORD(KK,2)
AREA = 0.5*(XG1*(YG2-YG3) + XG2*(YG3-YG1) + XG3*(YG1-YG2))
IF(AREA.LT.0) THEN
CONDA(IE) = 0.
SUMA = SUMA + 1
ENDIF
330 CONTINUE
C
C ! CONDA = 0 : AREA OF ELEMENT IS NEGATIVE (AN INVALID ELEMENT)
C ! CONDA = 1 : AREA OF ELEMENT IS POSITIVE OR EQUAL ZERO
C (A VALID ELEMENT)
C
WRITE(9,340)
340 FORMAT(/, 'ELEMENT NO. AS FOLLOWING HAS NEGATIVE AREA:')
DO 360 IE=1,NELEM
IF(CONDA(IE).EQ.0) WRITE(9,350) IE
350 FORMAT(I5)
360 CONTINUE
WRITE(9,370) SUMA
370 FORMAT('TOTAL INVALID ELEMENT(S):', I5)
C
C-----
C PRINT OUT 2-D PLOTTING DIAGRAM:
C-----
C
IF(ISTEP.EQ.1) THEN
WRITE(10,*) ' TITLE = "FE PLOTTING DATA BY TORSIONAL SPRING MTD."'
WRITE(10,*) ' VARIABLES = "X-CO", "Y-CO"'
WRITE(10,380) NPOIN, NELEM
380 FORMAT(' ZONE T="COORD", N=', I5, ', E=', I5, ', F=FEPOINT,
* ' ET=TRIANGLE')
DO 400 IP=1,NPOIN
WRITE(10,390) (COORD(IP,J), J=1,2)
390 FORMAT(2E20.6)
400 CONTINUE
DO 420 IE=1,NELEM
WRITE(10,410) (INTMAT(IE,J), J=1,3)
410 FORMAT(3I8)
420 CONTINUE
ENDIF
C
WRITE(10,430) ISTEP, NPOIN, NELEM
430 FORMAT(' ZONE T="COORD AT STEP:', I3, ' ", N=', I5, ', E=', I5,
* ' F=FEPOINT ET=TRIANGLE')
DO 450 IP=1,NPOIN
WRITE(10,440) (NEWCOORD(IP,J), J=1,2)
440 FORMAT(2E20.6)
450 CONTINUE
DO 470 IE=1,NELEM
WRITE(10,460) (INTMAT(IE,J), J=1,3)
460 FORMAT(3I8)
470 CONTINUE
C

```

```

C-----
C      EXIT THE PROGRAM IF INVALID ELEMENTS OCCUR:
C-----
C
      IF(SUMA.GT.0.) WRITE(6,480) SUMA, ISTEP
480  FORMAT(/, ' !!! ERROR !!!', /, ' THERE IS(ARE)', I5, ' INVALID ',
*      ' ELEMENT(S) WHICH HAS(HAVE) NEGATIVE AREA AT THE', I4,
*      ' STEP')
      IF(SUMA.GT.0.) STOP
C
C-----
C      FIND & PRINT OUT THE NEW ELEMENT QUALITY:
C-----
C
      SUMQ = 0.
      QMIN = 1.
      DO 500 IE=1,NELEM
      II = INTMAT(IE,1)
      JJ = INTMAT(IE,2)
      KK = INTMAT(IE,3)
      XG1 = NEWCOORD(II,1)
      YG1 = NEWCOORD(II,2)
      XG2 = NEWCOORD(JJ,1)
      YG2 = NEWCOORD(JJ,2)
      XG3 = NEWCOORD(KK,1)
      YG3 = NEWCOORD(KK,2)
      AREA = 0.5*(XG1*(YG2-YG3) + XG2*(YG3-YG1) + XG3*(YG1-YG2))
      L12 = SQRT((XG2-XG1)**2 + (YG2-YG1)**2)
      L13 = SQRT((XG3-XG1)**2 + (YG3-YG1)**2)
      L23 = SQRT((XG3-XG2)**2 + (YG3-YG2)**2)
C
      Q = (4*SQRT(3.0)*AREA)/(L12**2 + L13**2 + L23**2)
      IF(Q.LT.0.OR.Q.GT.1) WRITE(6,490) ISTEP
490  FORMAT(/, ' !!! ERROR !!!', /, ' ELEMENT QUALITY VALUE (Q) IS NOT IN',
*      ' RANGE [0,1] AT THE', I4, ' STEP')
      IF(Q.LT.0.OR.Q.GT.1) STOP
      SUMQ = SUMQ + Q
      IF(Q.LT.QMIN) QMIN = Q
500  CONTINUE
C
      QAVG = SUMQ/NELEM
      WRITE(11,510) ISTEP, QAVG, QMIN
510  FORMAT(I4, 2F20.8)
C
C-----
C      UPDATE VARIABLES FOR NEXT STEP:
C-----
C
      IF(STEP.EQ.1) GO TO 530
      WRITE(6,520)
520  FORMAT(/, ' *** UPDATING VARIABLES FOR NEXT STEP ***')
      CALL UPDATE(NEWCOORD, COORD, NPOIN, MXPOI)
C
5000 CONTINUE
C
530  WRITE(6,540)
540  FORMAT(///, ' !!! COMPLETELY DONE !!!', /, ' *** THANK YOU ***')
      STOP
      END
C
C=====
C
      SUBROUTINE CEM(ISTEP, STEP, NELEM, NPOIN, COORD, INTMAT, SYSF, SYSF,
*      MXPOI, MXELE)
C

```

```

C-----
C   COMPUTE ELEMENT MATRICES AND ASSEMBLE THEM FOR SYSTEM EQUATIONS:
C-----
C
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C   DIMENSION   SYSK(MXPOI*2,MXPOI*2), SYSF(MXPOI*2), COORD(MXPOI,2)
C   DIMENSION   C(3,3), R(3,6), RT(6,3), DUMA(3,6)
C   REAL        K(6,6), L12, L13, L23
C   INTEGER     INTMAT(MXELE,3), STEP
C
C   SUMQ = 0.
C   QMIN = 1.
C-----
C   LOOP OVER THE NUMBER OF ELEMENTS:
C-----
C
C   DO 1000 IE=1, NELEM
C-----
C   FIND ELEMENT LOCAL COORDINATES:
C-----
C
C   II = INTMAT(IE,1)
C   JJ = INTMAT(IE,2)
C   KK = INTMAT(IE,3)
C   XG1 = COORD(II,1)
C   YG1 = COORD(II,2)
C   XG2 = COORD(JJ,1)
C   YG2 = COORD(JJ,2)
C   XG3 = COORD(KK,1)
C   YG3 = COORD(KK,2)
C   AREA = 0.5*(XG1*(YG2-YG3) + XG2*(YG3-YG1) + XG3*(YG1-YG2))
C-----
C   CHECK ELEMENT VALIDITIES FOR ONLY INITIAL ELEMENTS:
C-----
C
C   IF(ISTEP.EQ.1) THEN
C   IF(AREA.LT.0.) WRITE(6,100) IE
100  FORMAT(/, ' !!! ERROR !!! ELEMENT NO.', I5, ' HAS NEGATIVE AREA', /,
*      ' --- CHECK F.E. MODEL FOR NODAL COORDINATES AND ELEMENT',
*      ' NODAL CONNECTIONS ---')
C   IF(AREA.LT.0.) STOP
C-----
C   FIND THE ELEMENT QUALITY FOR ONLY THE INITIAL ELEMENTS:
C-----
C
C   L12 = SQRT((XG2-XG1)**2 + (YG2-YG1)**2)
C   L13 = SQRT((XG3-XG1)**2 + (YG3-YG1)**2)
C   L23 = SQRT((XG3-XG2)**2 + (YG3-YG2)**2)
C   Q = (4*SQRT(3.0)*AREA)/(L12**2 + L13**2 + L23**2)
C   IF(Q.LT.0.OR.Q.GT.1) WRITE(6,200)
200  FORMAT(/, ' !!! ERROR !!!', /, ' ELEMENT QUALITY VALUE (Q) MUST BE IN',
*      ' RANGE [0,1]', /, --- CHECK F.E.MODEL FOR NODAL COORDINATES',
*      ' AND ELEMENT NODAL CONNECTIONS ---')
C   IF(Q.LT.0.OR.Q.GT.1) STOP
C   SUMQ = SUMQ + Q
C   IF(Q.LT.QMIN) QMIN = Q
C   ENDIF
C
C   FAC = 4*AREA**2
C   C1 = (L12*L12*L13*L13)/FAC
C   C2 = (L12*L12*L23*L23)/FAC

```



```

C          C3 = (L13*L13*L23*L23)/FAC
C-----
C          TORSIONAL SPRING STIFFNESS MATRIX [C]:
C-----
C
DO 300  I=1,3
DO 300  J=1,3
C(I,J) = 0.
300 CONTINUE
C(1,1) = C1
C(2,2) = C2
C(3,3) = C3
C
A12 = (XG2-XG1)/L12**2
A13 = (XG3-XG1)/L13**2
A23 = (XG3-XG2)/L23**2
B12 = (YG2-YG1)/L12**2
B13 = (YG3-YG1)/L13**2
B23 = (YG3-YG2)/L23**2
C-----
C          TRANSFORMATION MATRIX [R]:
C-----
C
R(1,1) = B13 - B12
R(1,2) = A12 - A13
R(1,3) = B12
R(1,4) = -A12
R(1,5) = -B13
R(1,6) = A13
R(2,1) = B12
R(2,2) = -A12
R(2,3) = -B12 - B23
R(2,4) = A23 + A12
R(2,5) = B23
R(2,6) = -A23
R(3,1) = -B13

R(3,2) = A13
R(3,3) = B23
R(3,4) = -A23
R(3,5) = B13 - B23
R(3,6) = A23 - A13
C-----
C          DO 500 I=1,3
DO 400  J=1,6
RT(J,I) = R(I,J)
400 CONTINUE
500 CONTINUE
C-----
C          TORSIONAL SPRING STIFFNESS ELEMENT MATRIX [K]:
C-----
C
DO 700  I=1,3
DO 700  J=1,6
DUMA(I,J) = 0.
DO 600  L=1,3
DUMA(I,J) = DUMA(I,J) + C(I,L)*R(L,J)
600 CONTINUE
700 CONTINUE
C
DO 900  I=1,6
DO 900  J=1,6

```

```

      K(I,J) = 0.
      DO 800 L = 1,3
      K(I,J) = K(I,J) + RT(I,L)*DUMA(L,J)
800  CONTINUE
900  CONTINUE
C
C-----
C      ASSEMBLE THESE ELEMENT EQUATIONS INTO THE SYSTEM EQUATIONS:
C-----
C
      CALL ASSEMBLE(IE, INTMAT, K, SYSK, MXPOI, MXELE)
C
1000 CONTINUE
C
C-----
C      PRINT OUT THE ELEMENT QUALITY FOR ONLY THE INITIAL ELEMENTS:
C-----
C
      IF(ISTEP.EQ.1) THEN
      QAVG = SUMQ/NELEM
      IMAX = STEP + 1.
      WRITE(11,*) ' TITLE = "COMPARISON CHART OF ELEMENT QUALITY BETWEEN ',
*              ' EACH METHOD" '
      WRITE(11,*) ' VARIABLES = "STEP", "QAVG", "QMIN" '
      WRITE(11,1100) IMAX
1100  FORMAT(' ZONE T="TORSION", I=', I4, ' , DATAPACKING=POINT')
      WRITE(11,1200) 0, QAVG, QMIN
1200  FORMAT(I4, 2F20.8)
      ENDIF
C
      RETURN
      END
C
C=====
C
      SUBROUTINE ASSEMBLE(IE, INTMAT, K, SYSK, MXPOI, MXELE)
C
C-----
C      ASSEMBLE ELEMENT EQUATIONS INTO SYSTEM EQUATIONS:
C-----
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION SYSK(MXPOI*2,MXPOI*2)
      REAL K(6,6)
      INTEGER INTMAT(MXELE,3)
C
      NNODE = 3
      NDF = 2
C
      DO 200 NR=1,NNODE
      NODR = INTMAT(IE,NR)
      DO 200 MR=1,NDF
C
      NSR = (NODR-1)*NDF + MR
      NER = (NR -1)*NDF + MR
C
      DO 100 NC=1,NNODE
      NODC = INTMAT(IE,NC)
      DO 100 MC=1,NDF
C
      NSC = (NODC-1)*NDF + MC
      NEC = (NC -1)*NDF + MC
C
      SYSK(NSR,NSC) = SYSK(NSR,NSC) + K(NER,NEC)
100  CONTINUE

```

```

C
200 CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
C=====C
      SUBROUTINE APPLYBC(NPOIN, IBC, SYSK, SYSF, UMB, STEP, MXPOI)
C
C-----C
C      APPLY DISPLACEMENT BOUNDARY CONDITIONS WITH CONDITION CODE OF:
C          0 = FREE TO MOVE
C          1 = FIXED BOUNDARY
C          2 = MOVING BOUNDARY
C-----C
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION SYSK(MXPOI*2,MXPOI*2), SYSF(MXPOI*2)
      DIMENSION UMB(MXPOI*2)
      INTEGER IBC(MXPOI,2), STEP
C
      NDF = 2.
      DO 700 IN=1,NPOIN
      DO 600 ID=1,NDF
C
C-----C
C          CHECK IF IBC = 0, DO NOTHING
C-----C
C
C          IF(IBC(IN,ID).EQ.0) THEN
C              GO TO 600
C
C-----C
C          CHECK IF IBC = 1, APPLY U = 0
C-----C
C
C          ELSE IF(IBC(IN,ID).EQ.1) THEN
C              IEQ = (IN-1)*NDF + ID
C              DO 100 IC=1,NPOIN*2
C              SYSK(IEQ,IC) = 0.
100          CONTINUE
C              SYSK(IEQ,IEQ) = 1.
C              SYSF(IEQ) = 0.
C
C
C          DO 200 IR=1,NPOIN*2
C          IF(IR.EQ.IEQ) GO TO 200
C          SYSK(IR,IEQ) = 0.
200          CONTINUE
C
C-----C
C          CHECK IF IBC = 2, APPLY U = UMB
C-----C
C
C          ELSE IF(IBC(IN,ID).EQ.2) THEN
C              IEQ = (IN-1)*NDF + ID
C              DO 300 IC=1,NPOIN*2
C              SYSK(IEQ,IC) = 0.
300          CONTINUE
C              SYSK(IEQ,IEQ) = 1.
C              SYSF(IEQ) = UMB(IEQ)/STEP
C
C
C          DO 400 IR=1,NPOIN*2
C          IF(IR.EQ.IEQ) GO TO 400
C          SYSF(IR) = SYSF(IR) - SYSK(IR,IEQ)*(UMB(IEQ)/STEP)
C          SYSK(IR,IEQ) = 0.

```

```

400 CONTINUE
C
C-----
C   CHECK IF INPUT IBC IS WRONG
C-----
C
      ELSE
      WRITE(6,500) IN, ID
500  FORMAT(/,'!!! ERROR !!!',/, ' PLEASE CHECK IBC OF NODE',I5,' ID =', I5)
      ENDIF
C
600 CONTINUE
700 CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
C=====
C
      SUBROUTINE SOLVE(NEQ, SYSK, SYSF, MXPOI)
C-----
C   SOLVE A SET OF SIMULTANEOUS EQUATIONS USING GUASS ELIMINATION.
C   THE OUTPUT SOLUTIONS WILL BE STORED IN VARIABLE SYSF.
C-----
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION SYSK(MXPOI*2,MXPOI*2), SYSF(MXPOI*2)
      REAL KMAX
C
      NR = NEQ
      NC = NEQ
C
C-----
C   SCALING:
C-----
C
      DO 300 IE=1,NEQ
      BIG = ABS(SYSK(IE,1))
      DO 100 IC=2,NC
      KMAX = ABS(SYSK(IE,IC))
      IF(KMAX.GT.BIG) BIG = KMAX
100  CONTINUE
      DO 200 IC=1,NC
      SYSK(IE,IC) = SYSK(IE,IC)/BIG
200  CONTINUE
      SYSF(IE) = SYSF(IE)/BIG
300  CONTINUE
C
C-----
C   FORWARD ELIMINATION : STARTING FROM 'PRIME' IP=1,NEQ-1
C-----
C
      DO 900 IP=1,NEQ-1
C
C-----
C   PIVOTING:
C-----
C
      JP = IP
      BIG = ABS(SYSK(IP,IP))
      DO 400 I=IP+1,NR
      KMAX = ABS(SYSK(I,IP))
      IF(KMAX.GT.BIG) THEN
          BIG = KMAX

```

```

          JP = I
        ENDIF
400    CONTINUE
C
      IF(JP.NE.IP) THEN
        DO 500 J=IP,NC
          DUMY = SYSK(JP,J)
          SYSK(JP,J) = SYSK(IP,J)
          SYSK(IP,J) = DUMY
        500 CONTINUE
          DUMY = SYSF(JP)
          SYSF(JP) = SYSF(IP)
          SYSF(IP) = DUMY
        ENDIF
C
C-----
C    PERFORMING FORWARD ELIMINATION ACCORDING TO THE ORDER OF
C    'PRIME' FROM 1 TO NEQ-1
C-----
C
      DO 700 IE=IP+1,NEQ
        RATIO = SYSK(IE,IP)/SYSK(IP,IP)
        DO 600 IC=IP+1,NC
          SYSK(IE,IC) = SYSK(IE,IC)-SYSK(IP,IC)*RATIO
        600 CONTINUE
          SYSF(IE) = SYSF(IE)-SYSF(IP)*RATIO
        700 CONTINUE
C
      DO 800 IE=IP+1,NEQ
        SYSK(IE,IP) = 0.
      800 CONTINUE
      900 CONTINUE
C
C-----
C    CHECK PIVOT ZERO OF THE LAST EQUATION
C-----
C
      PIVOT = ABS(SYSK(NEQ,NEQ))
      IF(ABS(PIVOT).LT.10.E-10) THEN
        WRITE(6,950) NEQ, PIVOT
      950 FORMAT(' EQUATION NO.', I5, ' HAS NEARLY ZERO PIVOT OF', E14.6,
*           ' ** STOP **', //, ' *** CHECK NODE AND ELEMENT NUMBERING',
*           ' IN F.E. MODEL ***')
        STOP
      ENDIF
C
C-----
C    BACK SUBSTITUTION:
C-----
C
      SYSF(NEQ) = SYSF(NEQ)/SYSK(NEQ,NEQ)
      DO 1100 IE=NEQ-1,1,-1
        SUM = 0.
        DO 1000 IC=IE+1,NEQ
          SUM = SUM + SYSK(IE,IC)*SYSF(IC)
        1000 CONTINUE
        SYSF(IE) = (SYSF(IE)-SUM)/SYSK(IE,IE)
      1100 CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
C=====
C
      SUBROUTINE UPDATE(NEWCOORD, COORD, NPOIN, MXPOI)

```

```
C
C-----
C   UPDATING NODAL COORDINATE MATRIX FOR NEXT STEP:
C-----
C
C   IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C
C   DIMENSION      COORD(MXPOI,2)
C   REAL           NEWCOORD(MXPOI,2)
C
C   DO 100 IP=1,NPOIN
C   DO 100 J=1,2
C   COORD(IP,J) = NEWCOORD(IP,J)
100 CONTINUE
C
C   RETURN
C   END
C
C=====
C
C   END PROGRAM TORSION2D
C
C*****
```



ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ภาคผนวก ค

## รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ELASTIC2D

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ELASTIC2D ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อวิเคราะห์ปัญหาขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ดังที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 4 มีรายละเอียดดังนี้

```

C*****
C*                                     PROGRAM ELASTIC2D                               *
C*  A FINITE ELEMENT PROGRAM FOR STUDY OF MESH MOVEMENT BY ELASTIC MEDIUM          *
C*                                     ANALOGY TECHNIQUE FOR TWO-DIMENSIONAL MOVING    *
C*                                     BOUNDARY PROBLEMS                             *
C*****
C
C          MXPOI = MAXIMUM NUMBER OF NODES IN THE MODEL
C          MXELE = MAXIMUM NUMBER OF ELEMENTS IN THE MODEL
C
C          PARAMETER (MXPOI=1000, MXELE=2500)
C
C          IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C          DIMENSION COORD(MXPOI,2), UMB(MXPOI*2), TEXT(20)
C          DIMENSION SYSK(MXPOI*2,MXPOI*2), SYSF(MXPOI*2)
C          DIMENSION STORESYSF(MXPOI*2)
C          REAL NEWCOORD(MXPOI,2), L12, L13, L23
C          INTEGER IBC(MXPOI,2), INTMAT(MXELE,3), STEP
C          INTEGER CONDA(MXELE), SUMA
C          CHARACTER*20 NAME1, NAME2, NAME3, NAME4
C
C          10 WRITE(6,20)
C          20 FORMAT(/, ' PLEASE ENTER THE INPUT FILE NAME:')
C          READ(5, '(A)', ERR=10) NAME1
C          OPEN(UNIT=8, FILE=NAME1, STATUS='OLD', ERR=10)
C
C-----
C          READ INPUT DATA:
C-----
C
C          READ(8,*) NLines
C          DO 30 ILine=1,NLines
C          READ(8,1) TEXT
C          1 FORMAT(20A4)
C          30 CONTINUE
C          READ(8,1) TEXT
C          READ(8,*) NPOIN, NELEM, NFORCE
C          READ(8,1) TEXT
C          READ(8,*) ELAS, PR, THICK
C
C          NDF = 2.
C          NEQ = NPOIN*NDF
C          DO 40 I=1,NEQ
C          UMB(I) = 0.
C          40 CONTINUE
C          READ(8,1) TEXT
C          DO 60 IP=1,NPOIN
C          READ(8,*) I, (COORD(I,J), J=1,2), (IBC(I,K), K=1,2), UMBX, UMBY
C          IF(I.NE.IP) WRITE(6,50) IP
C          50 FORMAT(/, ' NODE NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
C          IF(I.NE.IP) STOP
C          IEQ = (I-1)*NDF

```

```

        UMB(IEQ+1) = UMBX
        UMB(IEQ+2) = UMBY
60    CONTINUE
        READ(8,1) TEXT
        DO 80 IE=1,NELEM
            READ(8,*) I, (INTMAT(I,J), J=1,3)
            IF(I.NE.IE) WRITE(6,70) IE
70    FORMAT(/, ' ELEMENT NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
            IF(I.NE.IE) STOP
80    CONTINUE
C
        DO 90 I=1,NEQ
            STORESYSF(I) = 0.
90    CONTINUE
        READ(8,1) TEXT
        DO 100 II=1,NFORCE
            READ(8,*) N, FX, FY
            IEQ = (N-1)*NDF
            STORESYSF(IEQ+1) = FX
            STORESYSF(IEQ+2) = FY
100   CONTINUE
C
        WRITE(6,110) NPOIN,NELEM
110   FORMAT(/, ' ***THE FINITE ELEMENT MODEL CONSISTS OF', I5, ' NODES',
*         ' AND', I5,ELEMENTS ***')
C
120   WRITE(6,130)
130   FORMAT(/, ' WHICH TYPE OF ELASTIC PROBLEM?',/, '(1 = PLANE STRESS ',
*         ' 2 = PLANE STRAIN)')
*
        READ(5,*) ITYPE
        IF(ITYPE.NE.1.AND.ITYPE.NE.2) GO TO 120
C
140   WRITE(6,150)
150   FORMAT(/, ' PLEASE INPUT NO. OF CALCULATION STEP(S) FOR MOVING',
*         ' BOUNDARY DISPLACEMENT ( MAXIMUM OF 100 STEPS ) :')
        READ(5,*) STEP
        IF(STEP.GT.100) GO TO 140
C
C-----
C        CREATE FILE FOR DISPLACEMENT SOLUTIONS:
C-----
C
160   WRITE(6,170)
170   FORMAT(/, ' PLEASE ENTER FILE NAME FOR DISPLACEMENT SOLUTIONS:')
        READ(5, '(A)', ERR=160) NAME2
        OPEN(UNIT=9, FILE=NAME2, STATUS='NEW', ERR=160)
C
C-----
C        CREATE FILE FOR 2-D PLOTTING PROGRAM:
C-----
C
180   WRITE(6,190)
190   FORMAT(/, ' PLEASE ENTER PLOTTING FILE NAME (*.PLT):')
        READ(5, '(A)', ERR=180) NAME3
        OPEN(UNIT=10, FILE=NAME3, STATUS='NEW', ERR=180)
C
C-----
C        CREATE FILE FOR MEASURING ELEMENT QUALITY:
C-----
C
200   WRITE(6,210)
210   FORMAT(/, ' PLEASE ENTER FILE NAME FOR MEASURING ELEMENT QUALITY ',
*         ' (*.PLT):')
        READ(5, '(A)', ERR=200) NAME4
        OPEN(UNIT=11, FILE=NAME4, STATUS='NEW', ERR=200)

```



```

C
C-----
C   START CALCULATING FOR EACH STEP:
C-----
C
      DO 5000 ISTEP=1,STEP
      IF(ITYPE.EQ.1) THEN
      WRITE(6,220) ISTEP,STEP
220  FORMAT(///, ' *** STARTING CALCULATION STEP:', I3, ' OF TOTAL', I3,
*         ' STEP(S) FOR "PLANE STRESS" PROBLEM ***')
      ELSE
      WRITE(6,230) ISTEP,STEP
230  FORMAT(///, ' *** STARTING CALCULATION STEP:', I3, ' OF TOTAL', I3,
*         ' STEP(S) FOR "PLANE STRAIN" PROBLEM ***')
      ENDIF
C
      DO 240 I=1,NEQ
      SYSF(I) = STORESYSF(I)
240  CONTINUE
      DO 250 I=1,NEQ
      DO 250 J=1,NEQ
      SYSK(I,J) = 0.
250  CONTINUE
C
C-----
C   CREATE ELEMENT MATRICES, ASSEMBLE THEM FOR SYSTEM MATRICES,
C   APPLY BOUNDARY CONDITIONS AND SOLVE THEM FOR THE SOLUTIONS:
C-----
      WRITE(6,260)
260  FORMAT(/, ' ***ESTABLISHING ELEMENT MATRICES AND ASSEMBLING ELEMENT ',
*         ' EQUATIONS ***')
      CALL CEM( ISTEP, STEP, NELEM, INTMAT, COORD, ELAS, PR, THICK, SYSK,
*         SYSF, ITYPE, MXPOI, MXELE)
C
      WRITE(6,270)
270  FORMAT(/, ' *** APPLYING BOUNDARY CONDITIONS ***')
      CALL APPLYBC(NPOIN, IBC, UMB, STEP, SYSK, SYSF, MXPOI)
C
      WRITE(6,280)
280  FORMAT(/, ' *** SOLVING A SET OF SIMULTANEOUS EQS. FOR DISPLACEMENT ',
*         ' SOLUTIONS ***')
      WRITE(6,290) NEQ
290  FORMAT(5X, '( TOTAL OF', I5, ' EQUATIONS )')
      CALL SOLVE(NEQ, SYSK, SYSF, MXPOI)
C
C-----
C   PRINT OUT NODAL DISPLACEMENT SOLUTIONS:
C-----
C
      IF(ITYPE.EQ.1) THEN
      WRITE(9,300) ISTEP,STEP
300  FORMAT(/, ' FOR CALCULATION STEP:', I3, ' OF TOTAL', I3, ' STEP(S)',
*         ' FOR "PLANE STRESS"')
      ELSE
      WRITE(9,310) ISTEP,STEP
310  FORMAT(/, ' FOR CALCULATION STEP:', I3, ' OF TOTAL', I3, ' STEP(S)',
*         ' FOR "PLANE STRAIN"')
      ENDIF
      WRITE(9,320) NPOIN
320  FORMAT(' NODAL DISPLACEMENT SOLUTIONS [', I5, ']:', /, 2X, 'NODE', 13X,
*         'U', 19X, 'V')
      I1 = 1
      DO 340 IP=1,NPOIN
      I2 = IP*NDF
      WRITE(9,330) IP, (SYSF(I), I=I1,I2)

```

```

330 FORMAT(I6, 2E20.6)
      I1 = I2+1
340 CONTINUE
C
C-----
C      FIND NEW COORDINATES:
C-----
C
      DO 350 IP=1,NPOIN
      J1 = (IP-1)*2 + 1
      J2 = J1 + 1
      NEWCOORD(IP,1) = COORD(IP,1) + SYSF(J1)
      NEWCOORD(IP,2) = COORD(IP,2) + SYSF(J2)
350 CONTINUE
C
C-----
C      CHECK ELEMENT VALIDITIES:
C-----
C
      DO 360 IE=1,NELEM
      CONDA(IE) = 1.
360 CONTINUE
      SUMA = 0.
      DO 370 IE=1,NELEM
      II = INTMAT(IE,1)
      JJ = INTMAT(IE,2)
      KK = INTMAT(IE,3)
      XG1 = NEWCOORD(II,1)
      YG1 = NEWCOORD(II,2)
      XG2 = NEWCOORD(JJ,1)
      YG2 = NEWCOORD(JJ,2)
      XG3 = NEWCOORD(KK,1)
      YG3 = NEWCOORD(KK,2)
      AREA = 0.5*(XG1*(YG2-YG3) + XG2*(YG3-YG1) + XG3*(YG1-YG2))
      IF(AREA.LT.0) THEN
      CONDA(IE) = 0.
      SUMA = SUMA + 1.
      ENDIF
370 CONTINUE
C
C      ! CONDA = 0 : AREA OF ELEMENT IS NEGATIVE (AN INVALID ELEMENT)
C      ! CONDA = 1 : AREA OF ELEMENT IS POSITIVE OR EQUAL ZERO
C                  (A VALID ELEMENT)
C
      WRITE(9,380)
380 FORMAT(/, 'ELEMENT NO. AS FOLLOWING HAS NEGATIVE AREA:')
      DO 400 IE=1,NELEM
      IF(CONDA(IE).EQ.0) WRITE(9,390) IE
390 FORMAT(I5)
400 CONTINUE
      WRITE(9,410) SUMA
410 FORMAT('TOTAL INVALID ELEMENT(S):', I5)
C
C-----
C      PRINT OUT 2-D PLOTTING DIAGRAM:
C-----
C
      IF(ISTEP.EQ.1) THEN
      WRITE(10,*) ' TITLE = "FE PLOTTING DATA BY ELASTIC MEDIUM MTD."'
      WRITE(10,*) ' VARIABLES = "X-CO", "Y-CO"'
      WRITE(10,420) NPOIN, NELEM
420 FORMAT(' ZONE T="COORD", N=', I5, ', E=', I5, ', F=FEPOINT, ET=TRIANGLE')
      DO 440 IP=1,NPOIN
      WRITE(10,430) (COORD(IP,J), J=1,2)
430 FORMAT(2E20.6)

```

```

440 CONTINUE
    DO 460 IE=1,NELEM
      WRITE(10,450) (INTMAT(IE,J), J=1,3)
450 FORMAT(3I8)
460 CONTINUE
    ENDIF
C
    WRITE(10,470) ISTEP, NPOIN, NELEM
470 FORMAT(' ZONE T="COORD AT STEP:', I3, '" , N=', I5, ' , E=', I5,
*         ' F=FEPOINT, ET=TRIANGLE')
    DO 490 IP=1,NPOIN
      WRITE(10,480) (NEWCOORD(IP,J), J=1,2)
480 FORMAT(2E20.6)
490 CONTINUE
    DO 510 IE=1,NELEM
      WRITE(10,500) (INTMAT(IE,J), J=1,3)
500 FORMAT(3I8)
510 CONTINUE
C
C-----
C   EXIT THE PROGRAM IF INVALID ELEMENTS OCCUR:
C-----
C
    IF(SUMA.GT.0.) WRITE(6,520) SUMA, ISTEP
520 FORMAT(/, ' !!! ERROR !!!', /, ' THERE IS(ARE)', I5, ' INVALID ',
*         ' ELEMENT(S) WHICH HAS(HAVE) NEGATIVE AREA AT THE', I4,
*         ' STEP')
    IF(SUMA.GT.0.) STOP
C
C-----
C   FIND & PRINT OUT THE NEW ELEMENT QUALITY:
C-----
C
    SUMQ = 0.
    QMIN = 1.
    DO 540 IE=1,NELEM
      II = INTMAT(IE,1)
      JJ = INTMAT(IE,2)
      KK = INTMAT(IE,3)
      XG1 = NEWCOORD(II,1)
      YG1 = NEWCOORD(II,2)
      XG2 = NEWCOORD(JJ,1)
      YG2 = NEWCOORD(JJ,2)
      XG3 = NEWCOORD(KK,1)
      YG3 = NEWCOORD(KK,2)
      AREA = 0.5*(XG1*(YG2-YG3) + XG2*(YG3-YG1) + XG3*(YG1-YG2))
      L12 = SQRT((XG2-XG1)**2 + (YG2-YG1)**2)
      L13 = SQRT((XG3-XG1)**2 + (YG3-YG1)**2)
      L23 = SQRT((XG3-XG2)**2 + (YG3-YG2)**2)
C
      Q = (4*SQRT(3.0)*AREA)/(L12**2 + L13**2 + L23**2)
      IF(Q.LT.0.OR.Q.GT.1) WRITE(6,530) ISTEP
530 FORMAT(/, ' !!! ERROR !!!', /, ' ELEMENT QUALITY VALUE (Q) IS NOT IN ',
*         ' RANGE [0,1] AT THE', I4, ' STEP')
      IF(Q.LT.0.OR.Q.GT.1) STOP
      SUMQ = SUMQ + Q
      IF(Q.LT.QMIN) QMIN = Q
540 CONTINUE
C
    QAVG = SUMQ/NELEM
    WRITE(11,550) ISTEP, QAVG, QMIN
550 FORMAT(I4, 2F20.8)
C
C-----
C   UPDATE VARIABLES FOR NEXT STEP:

```

```

C-----
C
      IF(STEP.EQ.1) GO TO 570
      WRITE(6,560)
560  FORMAT(/, ' *** UPDATING VARIABLES FOR NEXT STEP ***')
      CALL UPDATE(COORD, NEWCOORD, NPOIN, MXPOI)
C
5000 CONTINUE
C
570  WRITE(6,580)
580  FORMAT(///, ' !!! COMPLETELY DONE !!!', /, ' *** THANK YOU ***')
C
      STOP
      END
C
C=====
C
      SUBROUTINE CEM(ISTEP, STEP, NELEM, INTMAT, COORD, ELAS, PR, THICK,
*
*          SYSK, SYSF, ITYPE, MXPOI, MXELE)
C-----
C      COMPUTE ELEMENT MATRICES AND ASSEMBLE THEM FOR SYSTEM EQS.
C-----
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION COORD(MXPOI,2)
      DIMENSION SYSK(MXPOI*2,MXPOI*2), SYSF(MXPOI*2)
      DIMENSION DUMA(3,6), C(3,3), B(3,6), BT(6,3)
      REAL*8 K(6,6), L12, L13, L23
      INTEGER INTMAT(MXELE,3), STEP
C
      SUMQ = 0.
      QMIN = 1.
C
C-----
C      LOOP OVER THE NUMBER OF ELEMENTS:
C-----
C
      DO 2000 IE=1,NELEM
C-----
C      FIND ELEMENT LOCAL COORDINATES:
C-----
C
      II = INTMAT(IE,1)
      JJ = INTMAT(IE,2)
      KK = INTMAT(IE,3)
      XG1 = COORD(II,1)
      YG1 = COORD(II,2)
      XG2 = COORD(JJ,1)
      YG2 = COORD(JJ,2)
      XG3 = COORD(KK,1)
      YG3 = COORD(KK,2)
      AREA = 0.5*(XG1*(YG2-YG3) + XG2*(YG3-YG1) + XG3*(YG1-YG2))
C
C-----
C      CHECK ELEMENT VALIDITIES FOR ONLY INITIAL ELEMENTS:
C-----
C
      IF(ISTEP.EQ.1) THEN
      IF(AREA.LT.0.) WRITE(6,100) IE
100  FORMAT(/, ' !!! ERROR !!! ELEMENT NO.', I5, ' HAS NEGATIVE AREA ', /,
*
*          ' --- CHECK F.E.MODEL FOR NODAL COORDINATES AND ELEMENT ',
*
*          ' NODAL CONNECTIONS ---'
      IF(AREA.LT.0.) STOP

```

```

C
C-----
C   FIND THE ELEMENT QUALITY FOR ONLY THE INITIAL ELEMENTS:
C-----
C
      L12 = SQRT((XG2-XG1)**2 + (YG2-YG1)**2)
      L13 = SQRT((XG3-XG1)**2 + (YG3-YG1)**2)
      L23 = SQRT((XG3-XG2)**2 + (YG3-YG2)**2)
      Q = (4*SQRT(3.0)*AREA)/(L12**2 + L13**2 + L23**2)
      IF(Q.LT.0.OR.Q.GT.1) WRITE(6,200)
200  FORMAT(/, ' !!! ERROR !!!',/, ' ELEMENT QUALITY VALUE (Q) MUST BE IN ',
*      ' RANGE [0,1] --- CHECK F.E MODEL FOR NODAL COORDINATES ',
*      ' AND ELEMENT NODAL CONNECTIONS ---')
      IF(Q.LT.0.OR.Q.GT.1) STOP
      SUMQ = SUMQ + Q
      IF(Q.LT.QMIN) QMIN = Q
      ENDIF
C
      B1 = YG2 - YG3
      B2 = YG3 - YG1
      B3 = YG1 - YG2
      C1 = XG3 - XG2
      C2 = XG1 - XG3
      C3 = XG2 - XG1
C
C-----
C   STRAIN - DISPLACEMENT RELATION MATRIX:
C-----
C
      DO 300 I=1,3
      DO 300 J=1,6
      B(I,J) = 0.
300  CONTINUE
C
      B(1,1) = B1
      B(1,3) = B2
      B(1,5) = B3
      B(2,2) = C1
      B(2,4) = C2
      B(2,6) = C3
      B(3,1) = C1
      B(3,2) = B1
      B(3,3) = C2
      B(3,4) = B2
      B(3,5) = C3
      B(3,6) = B3
C
      DO 500 I=1,3
      DO 400 J=1,6
      B(I,J) = B(I,J)/(2.*AREA)
      BT(J,I) = B(I,J)
400  CONTINUE
500  CONTINUE
C
C-----
C   ELASTICITY MATRIX:
C-----
C
      IF(ITYPE.EQ.1) THEN
      FAC = ELAS/(1.-PR*PR)
      C(1,1) = FAC
      C(1,2) = FAC*PR
      C(1,3) = 0.
      C(2,1) = C(1,2)
      C(2,2) = C(1,1)

```

```

C(2,3) = 0.
C(3,1) = 0.
C(3,2) = 0.
C(3,3) = FAC*(1.-PR)/2.
C
ELSE
FAC = ELAS/((1.+PR)*(1.-2.*PR))
C(1,1) = FAC*(1-PR)
C(1,2) = FAC*PR
C(1,3) = 0.
C(2,1) = C(1,2)
C(2,2) = C(1,1)
C(2,3) = 0.
C(3,1) = 0.
C(3,2) = 0.
C(3,3) = FAC*(1.-2.*PR)/2.
ENDIF
C
C-----
C      ELEMENT STIFFNESS MATRIX:
C-----
C
DO 700 I=1,3
DO 700 J=1,6
DUMA(I,J) = 0.
DO 600 M=1,3
DUMA(I,J) = DUMA(I,J) + C(I,M)*B(M,J)
600 CONTINUE
700 CONTINUE
C
DO 900 I=1,6
DO 900 J=1,6
K(I,J) = 0.
DO 800 M=1,3
K(I,J) = K(I,J) + BT(I,M)*DUMA(M,J)
800 CONTINUE
900 CONTINUE
C
DO 1000 I=1,6
DO 1000 J=1,6
K(I,J) = K(I,J)*AREA*THICK
1000 CONTINUE
C
C-----
C      ASSEMBLE THESE ELEMENT EQS. INTO THE SYSTEM EQS.
C-----
C
CALL ASSEMBLE(IE, INTMAT, K, SYSK, MXPOI, MXELE)
C
2000 CONTINUE
C
C-----
C      PRINT OUT THE ELEMENT QUALITY FOR ONLY THE INITIAL ELEMENTS:
C-----
C
IF(ISTEP.EQ.1) THEN
QAVG = SUMQ/NELEM
IMAX = STEP + 1.
WRITE(11,*) ' TITLE = "COMPARISON CHART OF ELEMENT QUALITY BETWEEN ',
*           ' EACH METHOD"'
WRITE(11,*) ' VARIABLES = "STEP", "QAVG", "QMIN"'
WRITE(11,1100) IMAX
1100 FORMAT(' ZONE T="ELASTIC", I=', I4, ' , DATAPACKING=POINT' )
WRITE(11,1200) 0, QAVG, QMIN
1200 FORMAT(I4, 2F20.8)

```

```

C      ENDIF
C
C      RETURN
C      END
C
C=====
C
C      SUBROUTINE ASSEMBLE(IE, INTMAT, K, SYSK, MXPOI, MXELE)
C
C-----
C      ASSEMBLE ELEMENT EQUATIONS INTO SYSTEM EQUATIONS
C-----
C
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C      DIMENSION SYSK(MXPOI*2,MXPOI*2)
C      REAL*8 K(6,6)
C      INTEGER INTMAT(MXELE,3)
C
C      NNODE = 3.
C      NDF = 2.
C
C      DO 100 NR=1,NNODE
C      NODR = INTMAT(IE,NR)
C      DO 100 MR=1,NDF
C
C      NSR = (NODR-1)*NDF + MR
C      NER = (NR-1)*NDF + MR
C
C      DO 200 NC=1,NNODE
C      NODC = INTMAT(IE,NC)
C      DO 200 MC=1,NDF
C
C      NSC = (NODC-1)*NDF + MC
C      NEC = (NC-1)*NDF + MC
C      SYSK(NSR,NSC) = SYSK(NSR,NSC) + K(NER,NEC)
C
C      200 CONTINUE
C      100 CONTINUE
C
C      RETURN
C      END
C
C=====
C
C      SUBROUTINE APPLYBC(NPOIN, IBC, UMB, STEP, SYSK, SYSF, MXPOI)
C
C-----
C      APPLY DISPLACEMENT BOUNDARY CONDITIONS WITH CONDITION CODE OF:
C      0 = FREE TO MOVE
C      1 = FIXED BOUNDARY
C      2 = MOVING BOUNDARY
C-----
C
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C      DIMENSION SYSK(MXPOI*2,MXPOI*2), SYSF(MXPOI*2)
C      DIMENSION UMB(MXPOI*2)
C      INTEGER IBC(MXPOI,2), STEP
C
C      NDF = 2.
C      DO 700 IN=1,NPOIN
C      DO 600 ID=1,NDF
C
C-----
C      CHECK IF IBC = 0, DO NOTHING
C-----

```

```

C
      IF(IBC(IN, ID).EQ.0) THEN
      GO TO 600
C
C-----
C      CHECK IF IBC = 1, APPLY U = 0
C-----
C
      ELSE IF(IBC(IN, ID).EQ.1) THEN
      IEQ = (IN-1)*NDF + ID
      DO 100 IC=1, NPOIN*2
      SYSK(IEQ, IC) = 0.
100  CONTINUE
      SYSK(IEQ, IEQ) = 1.
      SYSF(IEQ) = 0.
C
      DO 200 IR=1, NPOIN*2
      IF(IR.EQ.IEQ) GO TO 200
      SYSK(IR, IEQ) = 0.
200  CONTINUE
C
C-----
C      CHECK IF IBC = 2, APPLY U = UMB
C-----
C
      ELSE IF(IBC(IN, ID).EQ.2) THEN
      IEQ = (IN-1)*NDF + ID
      DO 300 IC=1, NPOIN*2
      SYSK(IEQ, IC) = 0.
300  CONTINUE
      SYSK(IEQ, IEQ) = 1.
      SYSF(IEQ) = UMB(IEQ)/STEP
C
      DO 400 IR=1, NPOIN*2
      IF(IR.EQ.IEQ) GO TO 400
      SYSF(IR) = SYSF(IR) - SYSK(IR, IEQ)*(UMB(IEQ)/STEP)
      SYSK(IR, IEQ) = 0.
400  CONTINUE
C
C-----
C      CHECK IF INPUT IBC IS WRONG
C-----
C
      ELSE
      WRITE(6, 500) IN, ID
500  FORMAT(/, ' ERROR!!!!', /, ' PLEASE CHECK IBC OF NODE', I5, ' ID =',
I5)
      ENDIF
C
600  CONTINUE
700  CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
C-----
C
      SUBROUTINE SOLVE(NEQ, SYSK, SYSF, MXPOI)
C-----
C      SOLVE A SET OF SIMULTANEOUS EQUATIONS USING GUASS ELIMINATION.
C      THE OUTPUT SOLUTIONS WILL BE STORED IN VARIABLE SYSF.
C-----
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)

```



```

      DIMENSION      SYSK(MXPOI*2,MXPOI*2), SYSF(MXPOI*2)
      REAL          KMAX
C
      NR = NEQ
      NC = NEQ
C
C-----
C      SCALING:
C-----
C
      DO 300 IE=1,NEQ
      BIG = ABS(SYSK(IE,1))
      DO 100 IC=2,NC
      KMAX = ABS(SYSK(IE,IC))
      IF(KMAX.GT.BIG) BIG = KMAX
100  CONTINUE
      DO 200 IC=1,NC
      SYSK(IE,IC) = SYSK(IE,IC)/BIG
200  CONTINUE
      SYSF(IE) = SYSF(IE)/BIG
300  CONTINUE
C
C-----
C      FORWARD ELIMINATION : STARTING FROM 'PRIME' IP=1,NEQ-1
C-----
C
      DO 900 IP=1,NEQ-1
C
C-----
C      PIVOTING:
C-----
C
      JP = IP
      BIG = ABS(SYSK(IP,IP))
      DO 400 I=IP+1,NR
      KMAX = ABS(SYSK(I,IP))
      IF(KMAX.GT.BIG) THEN
          BIG = KMAX
          JP = I
      ENDIF
400  CONTINUE
C
      IF(JP.NE.IP) THEN
      DO 500 J=IP,NC
      DUMY = SYSK(JP,J)
      SYSK(JP,J) = SYSK(IP,J)
      SYSK(IP,J) = DUMY
500  CONTINUE
      DUMY = SYSF(JP)
      SYSF(JP) = SYSF(IP)
      SYSF(IP) = DUMY
      ENDIF
C
C-----
C      PERFORMING FORWARD ELIMINATION ACCORDING TO THE ORDER OF
C      'PRIME' FROM 1 TO NEQ-1
C-----
C
      DO 700 IE=IP+1,NEQ
      RATIO = SYSK(IE,IP)/SYSK(IP,IP)
      DO 600 IC=IP+1,NC
      SYSK(IE,IC) = SYSK(IE,IC)-SYSK(IP,IC)*RATIO
600  CONTINUE
      SYSF(IE) = SYSF(IE)-SYSF(IP)*RATIO
700  CONTINUE

```

```

C
      DO 800 IE=IP+1,NEQ
      SYSK(IE,IP) = 0.
800 CONTINUE
900 CONTINUE
C
C-----
C      CHECK PIVOT ZERO OF THE LAST EQUATION
C-----
C
      PIVOT = ABS(SYSK(NEQ,NEQ))
      IF(ABS(PIVOT).LT.10.E-10) THEN
      WRITE(6,950) NEQ, PIVOT
950  FORMAT(' EQAUTION NO.', I5, ' HAS NEARLY ZERO PIVOT OF', E14.6,
*         ' ** STOP **', //, '*** CHECK NODE AND ELEMENT NUMBERING IN',
*         ' F.E. MODEL ***')
      STOP
      ENDIF
C
C-----
C      BACK SUBSTITUTION
C-----
C
      SYSF(NEQ) = SYSF(NEQ)/SYSK(NEQ,NEQ)
      DO 1100 IE=NEQ-1,1,-1
      SUM = 0.
      DO 1000 IC=IE+1,NEQ
      SUM = SUM + SYSK(IE,IC)*SYSF(IC)
1000 CONTINUE
      SYSF(IE) = (SYSF(IE)-SUM)/SYSK(IE,IE)
1100 CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
C=====
C
      SUBROUTINE UPDATE(COORD, NEWCOORD, NPOIN, MXPOI)
C-----
C      CALCULATING NODAL COORDINATE MATRIX FOR NEXT STEP:
C-----
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION COORD(MXPOI,2)
      REAL NEWCOORD(MXPOI,2)
C
      DO 100 IP=1,NPOIN
      DO 100 J=1,2
      COORD(IP,J) = NEWCOORD(IP,J)
100 CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
C=====
C
      END PROGRAM ELASTIC2D
C*****

```

## ภาคผนวก ง

การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 23  
4 – 7 พฤศจิกายน 2552 จังหวัดเชียงใหม่

### การศึกษาระเบียบวิธีการหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ในปัญหา 2 มิติ

### A Study on Three Different Schemes for 2D Mesh Movement Problems

นิภาพร เต็มแสงศิริศักดิ์ และ นิพนธ์ วรรณโสภาคย์ \*

คณะวิศวกรรมศาสตร์ ภาควิชาเครื่องกล จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 254 พญาไท ปทุมวัน กทม. 10330

\*ผู้ติดต่อ: niphon.w@eng.chula.ac.th, (662) 2186589, (662) 2186621

#### บทคัดย่อ

ในปัญหาการไหลที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ การวิเคราะห์ปัญหาจำเป็นต้องมีระเบียบวิธีที่ใช้เพื่อคำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่อยู่ภายในโดเมนซึ่งเคลื่อนที่ไปในทิศทางที่สอดคล้องกับการเคลื่อนที่ของขอบเขตนั้น ในบทความฉบับนี้จะทำการศึกษาระเบียบวิธีต่าง ๆ ที่ใช้คำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ด้วยกัน 3 วิธีได้แก่ วิธีความคล้ายคลึงสปริงแบบเชิงเส้น, วิธีความคล้ายคลึงสปริงแบบทอรัชันและวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยืดหยุ่นได้ ระเบียบวิธีต่าง ๆ เหล่านี้จะถูกนำมาทดสอบประสิทธิภาพด้วยปัญหาการเคลื่อนที่ที่ขอบเขตอย่างง่าย 2 ปัญหาด้วยกัน จากผลการคำนวณพบว่าในกรณีที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ไปด้วยระยะทางที่มาก วิธีความคล้ายคลึงสปริงแบบเชิงเส้นจะป้องกันไม่ให้อุบัติเคลื่อนที่มาชนกันแต่ไม่สามารถป้องกันการบิดตัวของเอลิเมนต์ ในขณะที่วิธีความคล้ายคลึงสปริงแบบทอรัชันสามารถป้องกันการบิดตัวของเอลิเมนต์ได้ แต่อย่างไรก็ดีรูปร่างของเอลิเมนต์หลังจากที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ในบางปัญหาจะมีรูปร่างที่ไม่เหมาะสม ทำให้เอลิเมนต์ที่ได้มีคุณภาพน้อยกว่าวิธีอื่น ส่วนวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยืดหยุ่นได้จะให้เอลิเมนต์ที่มีคุณภาพมากกว่า 2 วิธีดังกล่าวข้างต้น

**คำหลัก:** การเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์, ปัญหาขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่, วิธีความคล้ายคลึงสปริง, วิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยืดหยุ่นได้

## Abstract

In flow problems with moving boundaries, computational modeling in deforming domain requires a method for updating the computational mesh as the domains deform while maintaining mesh quality and element connections. In this paper, three methods for updating mesh movement are studied such as lineal spring analogy method, torsional spring analogy method and elastic medium analogy method. Two simple example problems are illustrated for evaluating these three methods. It is demonstrated that the lineal spring analogy method prevent two vertices from colliding but cannot prevent neighboring triangles from penetrating each other when meshes undergo large displacements or deformations which caused invalid triangulations. For the torsional spring analogy method, element cross-overs do not occur, however, it provides irregular shapes which caused less mesh quality in some problems. In any case, the elastic medium analogy method provides more mesh quality than two former methods.

**Keywords:** Mesh movement, Moving boundary problem, Spring analogy method, Elastic medium analogy method

## 1. บทนำ

ปัญหาการไหลที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่เป็นปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์รูปแบบหนึ่งที่ได้รับ ความสนใจและมีการค้นคว้าวิจัยมากขึ้น เช่น การวิเคราะห์ปัญหาปฏิสัมพันธ์กันระหว่างโครงสร้างและของไหล, ปัญหาชีวของไหล และปัญหาการไหลที่พื้นผิวอย่างอิสระ ระเบียบวิธีหนึ่งที่ยอมรับใช้ในการแก้ปัญหาดังกล่าวคือระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งภายในโดเมนของปัญหาจะถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ดังนั้นเมื่อขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ เอลิเมนต์ย่อยแต่ละเอลิเมนต์จะต้องเคลื่อนตัวไปในทิศทางที่สอดคล้องกับการเคลื่อนที่ที่ขอบเขตนั้น วิธีการต่าง ๆ จึงถูกคิดค้นขึ้นเพื่อทำการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของเอลิเมนต์ให้สอดคล้องกับการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่ขอบเขตอย่าง

แม่นยำและใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากที่สุด โดยที่คุณภาพของเอลิเมนต์ยังอยู่ในเกณฑ์ที่ยอมรับได้ ในบทความฉบับนี้จะนำเสนอวิธีการหาผลลัพธ์เมื่อเอลิเมนต์ที่ขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ ได้แก่ วิธีความคล้ายคลึงสปริงแบบเชิงเส้น, วิธีความคล้ายคลึงสปริงแบบทอรัชัน และวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยืดหยุ่นได้ ซึ่งจำนวนจุดต่อและรูปแบบการเชื่อมโยงของเอลิเมนต์ที่ได้จากทั้ง 3 วิธีจะยังคงเดิมไม่เปลี่ยนแปลงตลอดช่วงเวลาที่เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของโดเมนนั้น จากนั้นจึงนำระเบียบวิธีเหล่านี้ไปทดสอบกับปัญหาตัวอย่าง และเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากแต่ละวิธี

## 2. แนวคิดและทฤษฎี

วิธีความคล้ายคลึงสปริงจะมองเอลิเมนต์แต่ละเอลิเมนต์เสมือนว่าเป็นสปริงเชื่อมต่อกันเป็นโครงข่าย และอาศัยสมการ

สมมูลแรงที่ว่าผลรวมของแรงสปริงที่แต่ละจุดต่อของเอลิเมนต์ต้องเท่ากับศูนย์เมื่อขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ ในขณะที่วิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้จะมองโดเมนที่กำลังพิจารณาว่าเป็นวัตถุที่มีความยึดหยุ่น ดังนั้นค่าเคลื่อนที่ที่ขอบเขตจึงส่งผลต่อเอลิเมนต์ ย่อย ๆ ที่อยู่ภายในโดเมนนั้นผ่านทางแรงยึดหยุ่น ซึ่งวิธีนี้จะพิจารณาคุณสมบัติเฉพาะตัวของวัตถุร่วมด้วย

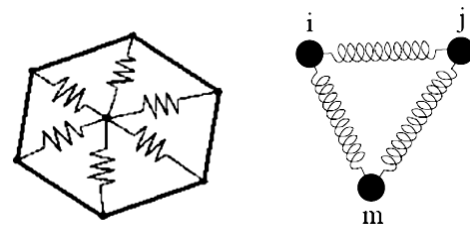
## 2.1 วิธีความคล้ายคลึงสปริงแบบเชิงเส้น

หลักการของวิธีนี้คือการติดสปริงเชิงเส้นที่ขอบแต่ละขอบของเอลิเมนต์จนครบทุกเอลิเมนต์ภายในโดเมนที่กำลังพิจารณา ดังแสดงในรูปที่ 1 ซึ่งค่าความแข็งเกร็งของสปริง  $k$  หาได้จาก [1]

$$k_{ij} = \frac{1}{L_{ij}} \quad (1)$$

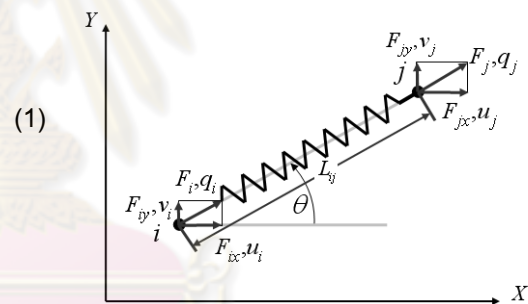
โดย  $k_{ij}$  แทนค่าความแข็งเกร็งของสปริง (Spring stiffness) ที่ขอบเอลิเมนต์  $ij$  และ  $L_{ij}$  แทนความยาวขอบเอลิเมนต์  $ij$

ในขณะที่โดเมนเกิดการเคลื่อนที่ เอลิเมนต์จะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างตามไปด้วยโดยสอดคล้องกับการเคลื่อนที่ของโดเมนเมื่อขอบเอลิเมนต์สั้นลง หรือพืดอีกนัยหนึ่งคือเมื่อจุดต่อเข้าใกล้กันมากขึ้น ค่า  $k_{ij}$  จะมีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งจะช่วยป้องกันไม่ให้จุดต่อเกิดการชนกันหรือเหลื่อมกันจนทำให้เอลิเมนต์เกิดการบิดตัวได้



รูปที่ 1 แบบจำลองเอลิเมนต์วิธีความคล้ายคลึงสปริงแบบเชิงเส้น

ขั้นตอนการคำนวณจะประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยพิจารณาที่ลักษณะของเอลิเมนต์ และเขียนความสัมพันธ์ระหว่างแรงสปริงกับระยะเคลื่อนที่ที่จุดต่อทั้ง 2 ในรูปแบบของสมการสปริง  $F = kx$  โดยทั้งแรงสปริงและระยะเคลื่อนที่ที่จุดต่อจะอยู่ในทิศทางของแกนรวมใหญ่  $X - Y$  ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 แรงสปริงและค่าเคลื่อนที่ที่จุดต่อในแกนรวมใหญ่  $X - Y$

โดย  $F_i, q_i$  และ  $F_j, q_j$  เป็นแรงสปริงและค่าเคลื่อนที่ในแนวขอบเอลิเมนต์ของจุดต่อ  $i$  และ  $j$  ตามลำดับ และ  $F_{ix}, u_i$  และ  $F_{iy}, v_i$  เป็นแรงสปริงและค่าเคลื่อนที่ที่จุดต่อ  $i$  ซึ่งอยู่ในทิศทางของระบบแกนรวมใหญ่  $X$  และ  $Y$  ตามลำดับ โดยที่จุดต่อ  $j$  สามารถอธิบายได้ในทำนองเดียวกันนี้

ในกรณีที่ขอบเอลิเมนต์วางตัวทำมุม  $\theta$  ใด ๆ กับแกน  $X$  ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จะได้สมการสปริงในรูปแบบดังนี้ [2]

$$\{F^{ij}\}_{lineal} = [K^{ij}]_{lineal} \{q^{ij}\} \quad (2)$$

$$\text{โดย } \{F^{ij}\}_{lineal} = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \end{Bmatrix}_{lineal} \quad (3)$$

$$[K^{ij}]_{(4 \times 4) \text{ lineal}} = \frac{1}{L_{ij}} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (4)$$

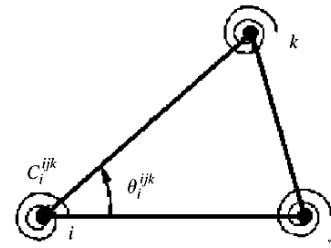
$$\{q^{ij}\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (5)$$

สมการ(2) คือสมการสปริงเอลิเมนต์ ซึ่งต้องนำสมการสปริงเอลิเมนต์นี้มาประกอบเข้าด้วยกันก่อให้เกิดระบบสมการเชิงเส้นของปัญหานั้นนั่นคือ

$$\{F\}_{(n \times 1)} = [K]_{(n \times n)} \{q\}_{(n \times 1)} \quad (6)$$

## 2.2. วิธีความคล้ายคลึงสปริงแบบทอร์ชัน

จากสมการ (1) จะพบว่าค่าความแข็งแรงของสปริงแบบเชิงเส้นนั้นจะขึ้นอยู่กับความยาวของขอบ เอลิเมนต์ไม่เกี่ยวกับพื้นที่หรือมุมภายในของเอลิเมนต์แต่อย่างใด ดังนั้นจึงป้องกันไม่ให้อุณหภูมิของเอลิเมนต์เกิดการชนกันได้นั่น แต่ไม่สามารถป้องกันการเกิดการบิดตัวของเอลิเมนต์ได้ ด้วยเหตุนี้วิธีความคล้ายคลึงสปริงแบบทอร์ชันจึงถูกคิดค้นขึ้น โดยนำทอร์ชันสปริงมาติดไว้ที่แต่ละจุดต่อของเอลิเมนต์จนครบทุกเอลิเมนต์ จุดประสงค์เพื่อต้านการเปลี่ยนแปลงของมุมที่จุดต่อเหล่านั้นนี้เพื่อรักษาคุณภาพของเอลิเมนต์นั้นไว้แม้ว่าจะเกิดการเคลื่อนตัวไปด้วยระยะทางที่มากก็ตาม



รูปที่ 3 แบบจำลองเอลิเมนต์วิธีความคล้ายคลึงสปริงแบบทอร์ชัน

ค่าความแข็งแรงเกร็งของทอร์ชันสปริงหาได้จาก[2]

$$C_i^{ijk} = \frac{1}{\sin^2 \theta_i^{ijk}} \quad (7)$$

เมื่อ  $\theta_i^{ijk}$  คือมุมระหว่างขอบ  $ij$  และ  $ik$  จะพบว่าในขณะที่เอลิเมนต์เกิดการยุบตัวจนเหลือพื้นที่เข้าใกล้ศูนย์ ค่าความแข็งแรงเกร็งของสปริงจะเพิ่มขึ้นจนเข้าสู่ค่าอนันต์ดังนั้นจึงสามารถป้องกันไม่ให้อเอลิเมนต์ที่อยู่ติดกันเกิดการไขว้กันได้ จากรูปที่ 3 จะได้

$$\sin \theta_i^{ijk} = \frac{2A_{ijk}}{L_{ij}L_{ik}} \quad (8)$$

ดังนั้นค่าความแข็งแรงเกร็งของทอร์ชันสปริงคือ

$$C_i^{ijk} = \frac{L_{ij}^2 L_{ik}^2}{4A_{ijk}^2} \quad (9)$$

ทั้งนี้ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\theta_i^{ijk}$  และ  $\{q^{ijk}\}$  สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้ [2]

$$\{\Delta \theta^{ijk}\} = [R^{ijk}] \{q^{ijk}\} \quad (10)$$

$$\text{โดย } \{\Delta \theta^{ijk}\} = \begin{Bmatrix} \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \\ \Delta \theta_k \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$[R^{ijk}] = \begin{bmatrix} b_k - b_j & a_j - a_k & b_j & -a_j & -b_k & a_k \\ -b_j & a_j & b_j - b_k & a_k - a_j & b_k & -a_k \\ b_k & -a_k & -b_j & a_j & b_j - b_k & a_k - a_j \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\{q^{ijk}\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \quad (13)$$

โดย  $a_{ik} = \frac{x_{ik}}{L_{ik}^2}$ ,  $b_{ik} = \frac{y_{ik}}{L_{ik}^2}$ ,  $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{L_{ij}^2}$  และ

$$b_{ij} = \frac{y_{ij}}{L_{ij}^2}$$

เนื่องจากโมเมนต์ที่เกิดจากทอร์ชันสปริงที่แต่ละจุดต่อของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม  $J_{ijk}$  คือ  $M = C\Delta\theta$  ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\{M^{ijk}\} = [C^{ijk}]\{\Delta\theta^{ijk}\} \quad (14)$$

$$\text{โดย } \{M^{ijk}\} = \begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \\ M_k \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$[C^{ijk}] = \begin{bmatrix} C_i^{ijk} & 0 & 0 \\ 0 & C_j^{ijk} & 0 \\ 0 & 0 & C_k^{ijk} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\{\Delta\theta^{ijk}\} = \begin{Bmatrix} \Delta\theta_i \\ \Delta\theta_j \\ \Delta\theta_k \end{Bmatrix} \quad (17)$$

แทน  $\Delta\theta^{ijk}$  จากสมการ (10) จะได้สมการโมเมนต์ดังนี้

$$\{M^{ijk}\} = ([C^{ijk}][R^{ijk}])\{q^{ijk}\} \quad (18)$$

ทั้งนี้สามารถแปลงโมเมนต์ที่แต่ละจุดต่อให้อยู่ในรูปของแรงในแนวแกนรวม  $X-Y$  ซึ่งเขียนได้ในรูปแบบ

$$\{F^{ijk}\}_{torsion} = [T^{ijk}]\{M^{ijk}\} \quad (19)$$

$$\text{โดย } \{F^{ijk}\}_{torsion} = \begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ F_{kx} \\ F_{ky} \end{Bmatrix}_{torsion} \quad (20)$$

เนื่องจากการที่กระทำโดยแรงในแนวแกนรวม  $X-Y$  จะต้องเท่ากับงานที่ทำโดยโมเมนต์ นั่นคือ

$$\{F^{ijk}\}_{torsion}^T \{q^{ijk}\} = \{M^{ijk}\}^T \{\Delta\theta^{ijk}\} \quad (20)$$

แทนสมการ (10) และ (19) ในสมการ (20) จะได้

$$\{M^{ijk}\}^T [T^{ijk}]^T \{q^{ijk}\} = \{M^{ijk}\}^T [R^{ijk}]\{q^{ijk}\} \quad (21)$$

$$\text{นั่นคือ } [T^{ijk}] = [R^{ijk}]^T \quad (22)$$

จากสมการ (18), (19) และ (22) จะได้ว่าในแต่ละเอลิเมนต์สามเหลี่ยมนั้นโมเมนต์ที่แต่ละจุดต่อสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแรงที่แต่ละจุดต่อได้ นั่นคือ

$$\{F^{ijk}\}_{torsion} = ([R^{ijk}]^T [C^{ijk}][R^{ijk}])\{q^{ijk}\} \quad (23)$$

เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของทอร์ชันสปริงในระบบแกนรวมใหญ่

$X-Y$

หรือ

$$\{F^{ijk}\}_{(6 \times 1) \text{ torsion}} = [K^{ijk}]_{(6 \times 6) \text{ torsion}} \{q^{ijk}\}_{(6 \times 1)} \quad (24)$$

### 2.3. วิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้

วิธีนี้จะมองเอลิเมนต์แต่ละเอลิเมนต์ว่าเป็นวัตถุที่ยึดหยุ่นได้ ซึ่งจะแตกต่างจากวิธีความคล้ายคลึงสปริงที่มองแต่ละเอลิเมนต์เป็นสปริงเชิงเส้นหรือทอร์ชันสปริง ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยซึ่งแสดงความสมดุลของแรงในแนวแกน  $x$  และ  $y$  ของของแข็งที่มีการยึดหยุ่นได้คือ [3]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (26)$$

โดย  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  แทนค่าความเค้นจาก (Normal stress) ในแนวแกน  $x$  และ  $y$  ตามลำดับ ส่วน  $\tau_{xy}$  แทนค่าความเค้นเฉือน (Shearing stress)

จากนั้นทำการประยุกต์วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตักค้ำกับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (25) ดังนี้

$$\int_{\Omega} \{N\} \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \quad (27)$$

เมื่อประยุกต์ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) เข้ากับสมการ (27) จะได้

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial N}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial N}{\partial y} \tau_{xy} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \{N\} (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y) d\Gamma \quad (28)$$

ในทำนองเดียวกันกับสมการ (26) จะได้

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial N}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial N}{\partial y} \sigma_y \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \{N\} (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y) d\Gamma \quad (29)$$

ถ้ากำหนดให้แรงกระทำกับขอบนอกของโครงสร้างสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบเมตริกซ์ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad (30)$$

แทนความสัมพันธ์จากสมการ (30) ลงในสมการ (28) และ (29) แล้วจัดสมการใหม่ให้อยู่ในรูปแบบเมตริกซ์จะได้

$$\int_{\Omega} [B]^T \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} d\Omega = \int_{\Gamma} [N]^T \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} d\Gamma \quad (31)$$

โดย

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$[N]_{(2 \times 6)} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (33)$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด

$$\begin{Bmatrix} \sigma \end{Bmatrix}_{(3 \times 1)} = [C]_{(3 \times 3)} \begin{Bmatrix} \varepsilon \end{Bmatrix}_{(3 \times 1)} \quad (34)$$

โดยเมตริกซ์  $[C]$  นั้นขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหาว่าเป็นแบบความเค้นในระนาบ (Plane stress) หรือความเครียดในระนาบ (Plane strain) ซึ่งในกรณีของความเค้นในระนาบจะได้

$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (35)$$



และกรณีของความเครียดในระนาบจะได้

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (36)$$

สำหรับความเครียดนั้นสามารถเขียนให้อยู่ใน  
รูปแบบของค่าเคลื่อนตัวได้ดังนี้

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์ได้นั้นคือ

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \end{Bmatrix}_{(3 \times 1)} = [B] \begin{Bmatrix} \delta \end{Bmatrix}_{(6 \times 1)} \quad (37)$$

โดย

$$\begin{Bmatrix} \delta \end{Bmatrix}_{(6 \times 1)}^T = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3]$$

แทนค่าสมการ (34) และ (37) ลงในสมการ  
(31) แล้วทำการจัดรูปใหม่จะได้สมการไฟไนต์  
เอลิเมนต์เมตริกซ์ดังนี้

$$\int_{\Omega} [B]^T [C] [B] d\Omega \{ \delta \} = \int_{\Gamma} [N]^T \{ F \} d\Gamma \quad (38)$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบที่สั้นขึ้นได้  
ดังนี้

$$[K] \begin{Bmatrix} \delta \end{Bmatrix}_{(6 \times 1)} = \begin{Bmatrix} F \end{Bmatrix}_{(6 \times 1)} \quad (39)$$

โดย

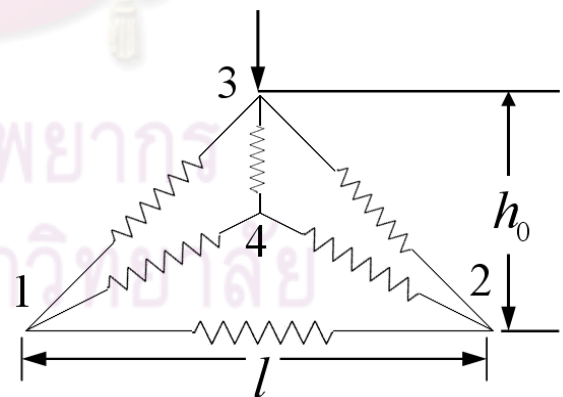
$$[K] = \int_{\Omega} [B]^T [C] [B] d\Omega \quad (40)$$

$$\begin{Bmatrix} F \end{Bmatrix}_{(6 \times 1)} = \int_{\Gamma} [N]^T \begin{Bmatrix} F \end{Bmatrix}_{(3 \times 1)} d\Gamma \quad (41)$$

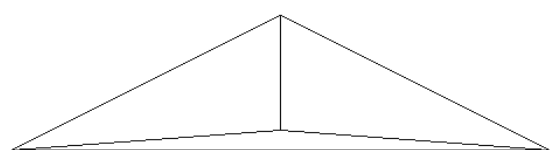
ในที่นี้  $[K]$  แทนเมตริกซ์ของความแข็ง  
เกร็งและ  $\{F\}$  แทนโพลตเวกเตอร์ของแรง  
ที่ผิว

### 3. ตัวอย่างปัญหา

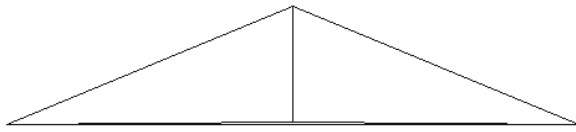
ในหัวข้อนี้จะแสดงและเปรียบเทียบ  
ผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากแต่ละวิธี โดยปัญหา  
แรกมีโครงสร้างเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี  
ประกอบด้วย 4 จุดต่อและมีอัตราส่วน  $l : h_0 =$   
 $2:1$  โดยจุดต่อ 1 และ 2 ถูกยึดอยู่กับที่ใน  
ขณะที่จุดต่อ 3 เคลื่อนที่ลงในแนวดิ่ง รูปที่ 4,  
5 และ 6 แสดงการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้  
จากวิธีความคล้ายคลึงสปริงแบบเชิงเส้น,  
ความคล้ายคลึงสปริงแบบทอร์ชันและความ  
คล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่น  
โดยรูปย่อย (ก) แสดงแบบจำลองเอลิเมนต์  
ในขณะที่รูปย่อย (ข) - (จ) จะแสดงการเคลื่อน  
ตัวของเอลิเมนต์เมื่อจุดต่อ 3 เคลื่อนที่ลงมา  
เป็นระยะทาง 50%, 58%, 60% และ 90%  
ของความสูง  $h_0$  ตามลำดับ



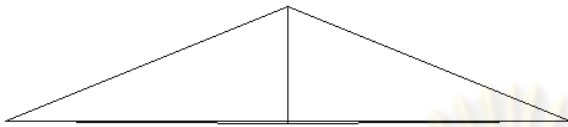
รูปที่ 4(ก) แบบจำลองเอลิเมนต์



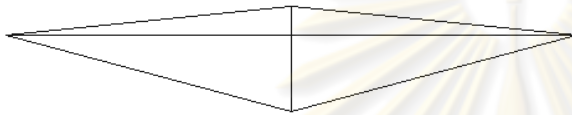
รูป 4(ข) ที่ 50 % ของความสูง  $h_0$



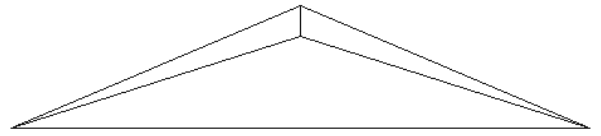
รูป 4(ค) ที่ 58 % ของความสูง  $h_0$



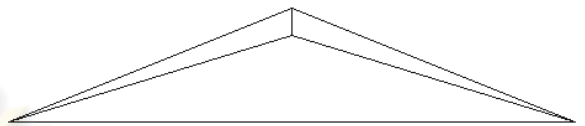
รูป 4(ง) ที่ 59 % ของความสูง  $h_0$



รูป 4(จ) ที่ 90 % ของความสูง  $h_0$   
รูปที่ 4 การเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากวิธี  
ความคล้ายคลึงสปริงแบบเชิงเส้น



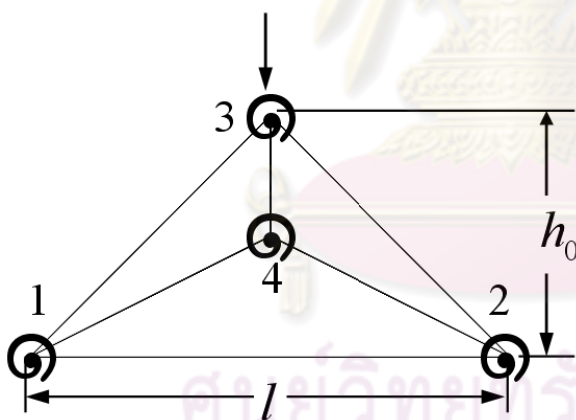
รูป 5(ค) ที่ 58 % ของความสูง  $h_0$



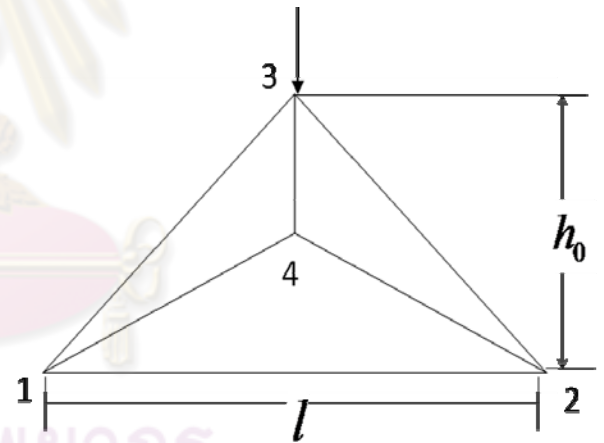
รูป 5(ง) ที่ 59 % ของความสูง  $h_0$



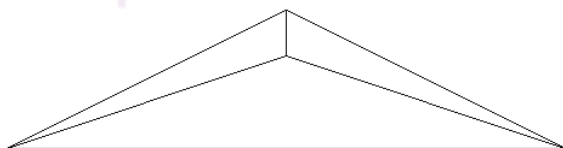
รูป 5(จ) ที่ 90 % ของความสูง  $h_0$   
รูปที่ 5 การเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากวิธี  
ความคล้ายคลึงสปริงแบบทอร์ชัน



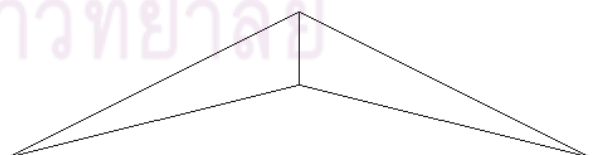
รูป 5(ก) แบบจำลองเอลิเมนต์



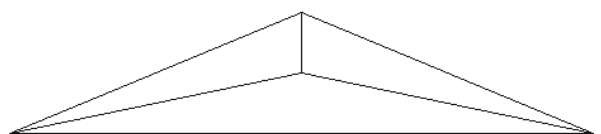
รูป 6(ก) แบบจำลองเอลิเมนต์



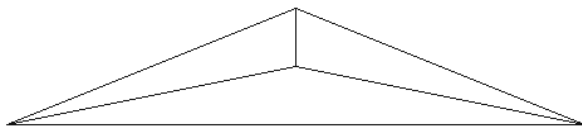
รูป 5(ข) ที่ 50 % ของความสูง  $h_0$



รูป 6(ข) ที่ 50 % ของความสูง  $h_0$



รูป 6(ค) ที่ 58 % ของความสูง  $h_0$



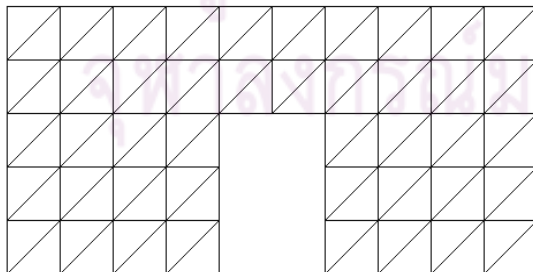
รูป 6(ง) ที่ 59 % ของความสูง  $h_0$



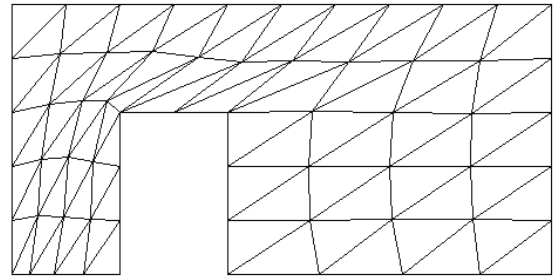
รูป 6(จ) ที่ 90 % ของความสูง  $h_0$

รูปที่ 6 การเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากวิธี  
ความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่  
ยืดหยุ่นได้

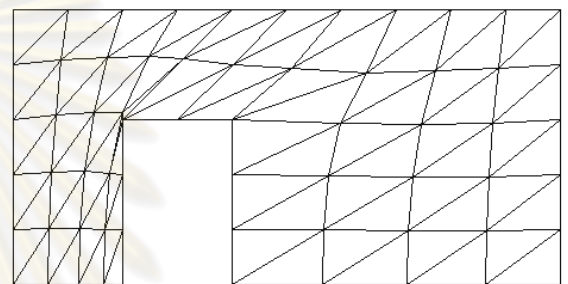
สำหรับปัญหาที่สองมีโครงสร้างเป็น  
รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 5 x 10 หน่วย และมี  
สี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 2 x 3 หน่วยอยู่ที่  
ตำแหน่งกึ่งกลางความยาวของขอบล่าง รูปที่  
7 แสดงแบบจำลองเอลิเมนต์ ในขณะที่รูปที่ 8,  
9 และ 10 แสดงการเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่  
ได้จากวิธีความคล้ายคลึงสปริงแบบเชิงเส้น,  
ความคล้ายคลึงสปริงแบบทอร์ชันและความ  
คล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยืดหยุ่นเมื่อ  
สี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 2 x 3 นี้ เคลื่อนที่ไป  
ทางด้านซ้ายมือเป็นระยะทาง 2 หน่วย



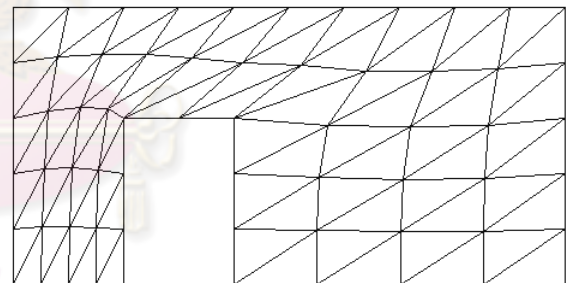
รูปที่ 7 แบบจำลองเอลิเมนต์



รูปที่ 8 การเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากวิธี  
ความคล้ายคลึงสปริงแบบเชิงเส้น



รูปที่ 9 การเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จากวิธี  
ความคล้ายคลึงสปริงแบบทอร์ชัน



รูปที่ 10 การเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ที่ได้จาก  
วิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่  
ยืดหยุ่นได้

ในปัญหาแรกจะพบว่าเมื่อจุดต่อที่ 3  
เคลื่อนที่ลงมาที่ระยะ 59 % ของความสูง  $h_0$   
วิธีความคล้ายคลึงสปริงแบบเชิงเส้นจะ  
ก่อให้เกิดการบิดตัวของเอลิเมนต์ ทำให้  
เอลิเมนต์ที่ได้ไม่มีคุณภาพ ในขณะที่เอลิเมนต์  
ที่ได้จากอีก 2 วิธีที่เหลือจะไม่เกิดการบิดตัว  
ไม่ว่าจุดต่อที่ 3 จะเคลื่อนที่ลงมาเป็นระยะทาง  
เท่าใดก็ตาม ทั้งนี้วิธีความคล้ายคลึงทาง

โครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้จะก่อให้เกิดการยุบตัวของโครงสร้างอย่างสม่ำเสมอมากกว่าวิธีความคล้ายคลึงสปริงแบบทอรัชัน สำหรับปัญหาที่สองจะพบว่าวิธีความคล้ายคลึงสปริงแบบเชิงเส้นและวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้จะให้เอลิเมนต์ที่มีรูปร่างคล้ายคลึงกัน จึงทำให้เอลิเมนต์ที่ได้มีคุณภาพเท่าๆ กัน ในขณะที่เอลิเมนต์ที่ได้จากวิธีความคล้ายคลึงสปริงแบบทอรัชันจะเกิดการยุบตัวมากกว่าวิธีอื่นสังเกตได้จากเอลิเมนต์ที่ตำแหน่งมุมบนด้านซ้ายมือของสี่เหลี่ยมขนาด  $2 \times 3$  จึงทำให้เอลิเมนต์ที่ได้มีคุณภาพน้อยกว่าวิธีอื่น ดังนั้นจากตัวอย่างปัญหาทั้ง 2 นี้สามารถสรุปได้ว่าวิธีความคล้ายคลึงสปริงแบบเชิงเส้นจะไม่สามารถป้องกันการบิดตัวของเอลิเมนต์ได้ ถ้าขอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ไปด้วยระยะทางที่มากพอ ในขณะที่ในบางปัญหาวิธีความคล้ายคลึงสปริงแบบทอรัชันจะก่อให้เกิดการยุบตัวของเอลิเมนต์มากกว่าวิธีอื่น ทำให้เอลิเมนต์ที่ได้มีคุณภาพน้อยกว่าวิธีอื่น ส่วนวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้จะให้เอลิเมนต์ที่มีคุณภาพมากกว่า 2 วิธีดังกล่าวข้างต้น

#### 4. บทสรุป

ในบทความฉบับนี้ได้ทำการศึกษาระเบียบวิธีต่าง ๆ เพื่อใช้คำนวณหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ได้แก่ วิธีความคล้ายคลึงสปริงแบบเชิงเส้น, วิธีความคล้ายคลึงสปริงแบบทอรัชันและวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้ โดยปัญหาอย่างง่าย 2 ปัญหาได้ถูกนำมาทดสอบประสิทธิภาพของระเบียบวิธีเหล่านี้ จากผลการคำนวณพบว่าวิธีความคล้ายคลึงสปริง

แบบเชิงเส้นสามารถป้องกันไม่ให้เกิดต่อเคลื่อนที่มาชนกัน แต่จะเกิดการบิดตัวของเอลิเมนต์ในกรณีที่ชอบเขตเกิดการเคลื่อนที่ด้วยระยะทางที่มาก ในขณะที่วิธีความคล้ายคลึงสปริงแบบทอรัชันสามารถป้องกันการบิดตัวของเอลิเมนต์ได้ แต่ในบางปัญหาเอลิเมนต์ที่ได้มีรูปร่างที่ไม่เหมาะสม ทำให้เอลิเมนต์ที่ได้มีคุณภาพน้อยกว่าวิธีอื่น ส่วนวิธีความคล้ายคลึงทางโครงสร้างของวัตถุที่ยึดหยุ่นได้จะให้เอลิเมนต์ที่มีคุณภาพมากกว่า 2 วิธีดังกล่าวข้างต้น

#### 5. เอกสารอ้างอิง

- [1] Botasso, C.L., Detomi, D. and Serra, R. (2005). The ball-vertex method : a new simple spring analogy method for unstructured dynamic meshes, *Computational Methods Application Mechanical Engineering*, vol. 194, pp. 4244-4264.
- [2] Farhat, C., Degand, C., Koobus, B. and Lesoinne, M. (1998). Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes, *Computational Methods Application Mechanical Engineering*, vol. 163, pp. 231-245.
- [3] ปราโมทย์ เตชะอำไพ (2547). ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม, กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- [4] Zeng, D. and Ethier, C.R. (2005). A semi torsional spring analogy model for updating unstructured meshes in 3D moving domains, *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 41, pp. 1118-1139.

## ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาวนิภาพร เต็มแสงสิริศักดิ์ เกิดเมื่อวันอาทิตย์ที่ 10 เดือนตุลาคม พุทธศักราช 2525 จังหวัดกรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิตจากภาควิชาเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี เมื่อปีการศึกษา 2547 มีประสบการณ์การทำงานที่บริษัท ซีเกต เทคโนโลยี (ประเทศไทย) จำกัด และได้เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2549 มีผลงานตีพิมพ์ในการประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 23 (ME-NETT 23) ภายใต้หัวข้อเรื่อง “การศึกษาระเบียบวิธีการหาค่าเคลื่อนตัวของเอลิเมนต์ในปัญหา 2 มิติ ( A Study on Three Different Schemes for 2D Mesh Movement Problems)”



ศูนย์วิทยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย