การพัฒนาประสิทธิภาพการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างจากผลตอบสนองเชิงโหมด โดยวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ

นาย ณัฐพล จารุศิริสมบัติ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิศวกรรมโยธา ภาควิชาวิศวกรรมโยธา

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2547

ISBN 974-53-1132-4

PERFORMANCE IMPROVEMENT OF STRUCTURAL PARAMETER ESTIMATION FROM MODAL RESPONSE BY KRYLOV SUBSPACE METHODS

Mr. Nattapol Charuusirisombhat

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Civil Engineering
Department of Civil Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2004
ISBN 974-53-1132-4

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การพัฒนาประสิทธิภาพการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างจากผลตอบสนองเชิงโหมดโดยวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ
โดย	นายณัฐพล จารุศิริสมบัติ
สาขาวิชา	วิศวกรรมโยธา
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธัญวัฒน์ โพธิศิริ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(ศาสตราจารย์ ดร.ทักษิณ เทพชาตรี)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธัญวัฒน์ โพธิศิริ)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.ธีรพงศ์ เสนจันทร์ฒิไชย)

ณัฐพล จารุศิริสมบัติ : การพัฒนาประสิทธิภาพการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างจากผลตอบสนองเชิงโหมดโดยวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ (PERFORMANCE IMPROVEMENT OF STRUCTURAL PARAMETER ESTIMATION FROM MODAL RESPONSE BY KRYLOV SUBSPACE METHODS) อ. ที่ปรึกษา : ผศ.ดร. ธัญวัฒน์ โพธิศิริ 133 หน้า. ISBN:974-53-1132-4

วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างโดยทั่วไปใช้ในการหาคุณสมบัติด้านวัสดุของโครงสร้าง ได้แก่ ค่าสติฟเนสพารามิเตอร์ ที่ทำให้ผลตอบสนองของโครงสร้างที่ได้จากการจำลองทางคณิตศาสตร์มีความแตกต่างจากการวัดจริงน้อยที่สุด ปัญหาการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างสามารถเขียนในรูปแบบการหาค่ากำลังสองน้อยที่สุดของผลต่างระหว่างผลตอบสนองเชิงโหมดที่ได้จากการคำนวณและที่ได้จากการวัด โดยใช้วิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติกโปรแกรมมิงในการคำนวณค่าคำตอบที่เหมาะสม จากการศึกษาเบื้องต้นพบว่าประสิทธิภาพของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างนี้ถูกจำกัดโดยวิธีที่เลือกใช้ในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่เกี่ยวข้อง ในกรณีที่แบบจำลองโครงสร้างมีความซับซ้อนหรือมีจำนวนระดับขั้นความเสรีมากขึ้น จะส่งผลให้เวลาที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างเพิ่มขึ้น งานวิจัยนี้ศึกษาการประยุกต์ใช้วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ กล่าวคือ วิธีเกรเดียนต์สังยุค (CG) วิธีแอลคิวสมมาตร (SYMMLQ) วิธีเวกเตอร์คงค้างน้อยที่สุด (MINRES) และ วิธีเวกเตอร์คงค้างเสมือนน้อยที่สุดสมมาตร (SQMR) เปรียบเทียบกับวิธีการแยกแบบแอลยูในขั้นตอนการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นเหล่านี้ โดยทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของต่างๆ โดยใช้กรณีศึกษาเพื่อประเมินความเหมาะสมของการประยุกต์ใช้วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟสำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้าง

การเปรียบเทียบประสิทธิภาพการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้าง ใช้การทดสอบด้วยวิธีเชิงตัวเลขโดยใช้กรณีศึกษาเป็นแบบจำลองโครงข้อหมุน 3 มิติ จากผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพพบว่า การใช้วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟสามารถปรับปรุงประสิทธิภาพทางด้านเวลาในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในขั้นตอนของการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้าง อย่างไรก็ตามในกรณีที่ไม่สามารถวัดข้อมูลรูปแบบการสั่นไหวได้ทุกระดับขั้นความเสรี วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟจะมีความเหมาะสมทางด้านเวลาในการคำนวณเฉพาะการใช้ข้อมูลรูปแบบการสั่นไหวในโหมดแรกๆเท่านั้น นอกจากนี้ประสิทธิภาพในการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟมีแนวโน้มลดลงเมื่อจำนวนระดับขั้นความเสรีที่ทำการวัดรูปแบบการสั่นไหวลดลง

ภาควิชา วิศวกรรมโยธา	ลายมือชื่อนิสิต..
สาขาวิชา วิศวกรรมโยธา	ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา..............................
ปีการศึกษา 2547	

4570310621 : MAJOR CIVIL ENGINEERING

KEY WORDS : PARAMETER ESTIMATION / KRYLOV SUBSPACE

NATTAPOL CHARUUSIRISOMBHAT : PERFORMANCE IMPROVEMENT OF STRUCTURAL PARAMETER ESTIMATION FROM MODAL RESPONSE BY KRYLOV SUBSPACE METHODS, THESIS ADVISOR : THANYAWAT POTHISIRI ,Ph.D. 133 pp. ISBN:974-53-1132-4

Structural parameter estimation schemes are generally used for the identification of certain constitutive properties, e.g. stiffness parameters, of the structures that minimize the discrepancies between the responses obtained from mathematical modeling and the actual measurements. The structural parameter estimation problem can be cast as the least-squares minimization of the deviation between the computed and the measured modal response, using the recursive quadratic programming to obtain the optimal solution. It was found from a preliminary study that the performance of the method is limited by the choice of the algorithm for solving the corresponding systems of linear equations. When the structural model is more complex or composed of more degrees of freedom, the estimation time can significantly increase. The current study investigates the use of the Krylov subspace methods, e.g. conjugate gradient (CG), symmetric LQ (SYMMLQ), minimum residual (MINRES), and symmetric quasi-minimum residual (SQMR) in comparison with the LU decomposition method in solving these systems of linear equations. The performance of these methods will be compared through case studies in order to assess the efficiency of the Krylov subspace methods in structural parameter estimation.

The comparison of the computational efficiency in structural parameter estimation is based upon a three-dimensional truss model as the case study. It is found from the simulation results that the use of the Krylov subspace methods is able to improve the computation time in solving the system of linear equations involved in the parameter estimation of the structure. Nonetheless, for the case in which the measurements are incomplete, the Krylov subspace methods are computationally efficient when using only the low-frequency modes. Furthermore, the performance of the Krylov subspace methods in structural parameter estimation tends to decrease with the reducing number of the measured degree of freedom for the vibration modes.

Department……Civil Engineering……..

Student's signature……………………………...

Field of study……Civil Engineering…….

Advisor's signature…………………………..........

Academic year……2004……………

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงลงได้ด้วยความช่วยเหลืออย่างดียิ่งของ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ธัญวัฒน์ โพธิศิริ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งท่านเป็นผู้ให้ความรู้ คำแนะนำและข้อเสนอแนะต่างๆที่เป็นประโยชน์อย่างยิ่งในงานวิจัย ตลอดจนมีส่วนช่วยผลักดันให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้อย่างสมบูรณ์

นอกจากนี้ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร. ทักษิณ เทพชาตรี และรองศาสตราจารย์ ดร. ธีรพงศ์ เสนจันทร์ฒิไชย ซึ่งเป็นคณะกรรมการในการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ได้กรุณาตรวจสอบและให้คำชี้แนะที่เป็นประโยชน์ อันทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ท้ายสุดนี้ คุณประโยชน์อันพึงได้รับจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้เขียนขอมอบให้แก่ บิดา มารดา และญาติ ซึ่งได้ให้โอกาสในการศึกษาเล่าเรียน และคอยสนับสนุนให้กำลังใจแก่ผู้เขียนเสมอมา

สารบัญ

หน้า

หน้า

สารบัญตาราง

หน้า

หน้า

หน้า

สารบัญรูป

หน้า

หน้า

หน้า

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความนำ

การประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างจากผลตอบสนองของโครงสร้างที่วัดค่า เป็นวิธีการหาคุณสมบัติของวัสดุในโครงสร้างได้แก่ ค่าสติฟเนสของชิ้นส่วนโครงสร้าง โดยที่พฤติกรรมของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโครงสร้างที่ใช้ค่าของพารามิเตอร์ที่ประมาณมีความแตกต่างจากพฤติกรรมของโครงสร้างจริงน้อยที่สุด ข้อมูลที่ได้จากผลการตอบสนองจริงของโครงสร้างที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์สามารถใช้วิธีการทดสอบโครงสร้างภายใต้แรงพลวัตในแต่ละโหมดของการสั่นไหว (modal test) ซึ่งทำการวัดผลการตอบสนองของโครงสร้างขณะที่โครงสร้างสั่นด้วยความถี่ธรรมชาติในแต่ละโหมดของการสั่นไหวที่ทำให้เกิดการกำทอน (resonance) การทดสอบภายใต้แรงพลวัตจะทำการติดตั้งอุปกรณ์ที่ใช้สำหรับสั่น (shaker) กับโครงสร้าง และจะทำการสั่นด้วยแรงที่มีความถี่ใกล้เคียงกับความถี่ธรรมชาติ (natural frequency) ของโครงสร้างในแต่ละโหมดที่ต้องการวัดผลการตอบสนองของโครงสร้าง

วิธีการที่นิยมใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างเชิงโหมดคือการหาค่าต่ำสุดของสมการเป้าหมาย (objective function) ซึ่งอยู่ในรูปกำลังสองน้อยที่สุดของผลต่างระหว่างรูปแบบการสั่นไหวเทียบเท่าของแบบจำลองโครงสร้างที่ได้จากการคำนวณเทียบกับรูปแบบการสั่นไหวเทียบเท่าจากผลการทดสอบ โดยใช้วิธีการคำนวณซ้ำเพื่อให้ได้ค่าพารามิเตอร์คำตอบที่เหมาะสมที่สุด ค่าพารามิเตอร์คำตอบที่ได้จากวิธีการนี้อาจขาดความเป็นเอกภาพ (non-uniqueness) ซึ่งเป็นผลมาจากความไม่สมบูรณ์ของข้อมูลรูปแบบการสั่นไหวในแต่ละระดับขั้นความเสรีของโครงสร้างที่ทำการวัดข้อมูล (Banan และ Hjelmstad 1993) วิธีที่สามารถประยุกต์ใช้ในการบรรเทาปัญหาดังกล่าวคือ วิธีเรกูลาร์ไรเซชัน (regularization) ซึ่งอาศัยการเพิ่มฟังก์ชันเรกูลาร์ไรเซชันเข้าไปในสมการเป้าหมายเพื่อช่วยกำหนดขอบเขตค่าพารามิเตอร์คำตอบที่เหมาะสม (Pothisiri และ Vatcharathanyakorn 2002)

ขั้นตอนวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างโดยวิธีการกำลังสองน้อยที่สุดในปัจจุบันยังมีข้อจำกัดเรื่องเวลาที่ใช้ในการคำนวณเมื่อระดับขั้นความเสรีของแบบจำลองมีค่ามากขึ้น จากการศึกษาเบื้องต้นพบว่าขั้นตอนในการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ใช้เวลาคำนวณมากที่สุดคือขั้นตอนในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นเพื่อหาเวกเตอร์ของรูปแบบการสั่นไหวที่คำนวณได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโครงสร้างภายใต้การสั่นแบบอิสระ เมื่อโครงสร้างมีความซับซ้อนหรือมีขนาดใหญ่ขึ้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโครงสร้างจะเกี่ยวข้องกับระบบสมการที่มีจำนวนสมการและตัวแปรมากขึ้น ดังนั้นหากวิธีที่ใช้ในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่ได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ไม่มีประสิทธิภาพเพียงพอย่อมส่งผลถึงประสิทธิภาพด้านเวลาในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้าง งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์หลักเพื่อปรับปรุง

ประสิทธิภาพด้านการคำนวณของการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างในขั้นตอนของการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยการเลือกใช้เทคนิคการหาคำตอบที่เหมาะสม

Hestenes และ Stiefel (1952) ได้นำเสนอวิธีเกรเดียนต์สังยุค (Conjugate Gradient : CG) ซึ่งเป็นวิธีการหนึ่งสำหรับการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีการคำนวณซ้ำ (iterative method) โดยมีพื้นฐานมาจากวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ (Krylov subspace method) วิธีดังกล่าวมีประสิทธิภาพในการหาคำตอบของระบบของสมการขนาดใหญ่ในกรณีที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ (coefficient matrix) มีสมาชิกแบบไม่หนาแน่น (sparse) โดยที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์จะต้องมีคุณสมบัติสมมาตร (symmetric) และคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอน (positive definite) นอกจากนี้วิธีดังกล่าวยังไม่คำนึงถึงสภาพแถบของเมตริกซ์ (matrix band) ที่ใช้จัดเก็บข้อมูล ซึ่งคุณสมบัติเหล่านี้สอดคล้องกับระบบสมการเชิงเส้นในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างเพื่อหาเวกเตอร์ของรูปแบบการสั่นไหวเทียบเท่าที่คำนวณได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโครงสร้างภายใต้การสั่นแบบอิสระ สำหรับกรณีที่สามารถใช้ข้อมูลรูปแบบการสั่นไหวครบทุกระดับขั้นความเสรี วิธีเกรเดียนต์สังยุคสามารถนำมาประยุกต์ใช้เพื่อช่วยประหยัดหน่วยเก็บข้อมูล (storage) และเวลาที่ใช้ในการหาคำตอบ (Reid 1971)

สำหรับกรณีที่ไม่สามารถใช้ข้อมูลรูปแบบการสั่นไหวได้ครบทุกระดับขั้นความเสรี เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้นที่พิจารณาจะขาดคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอน (non-positive definite) ส่งผลให้กระบวนการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีเกรเดียนต์สังยุคขาดเสถียรภาพ จากการศึกษาเบื้องต้นพบว่าวิธีแอลคิวสมมาตร (Symmetric LQ : SYMMLQ) และวิธีเวกเตอร์คงค้างน้อยที่สุด (Minimum residual : MINRES) ที่นำเสนอโดย Paige และ Saunders (1975) นอกเหนือจากนี้ยังมีวิธีเวกเตอร์คงค้างเสมือนน้อยที่สุดสมมาตร (Symmetric-quasi minimum residual : SQMR) ที่นำเสนอโดย Freund และ Nachtigal (1994) ซึ่งทั้งสามวิธีดังกล่าวนี้มีพื้นฐานมาจากวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ เช่นเดียวกับวิธีเกรเดียนต์สังยุคแต่สามารถใช้กับการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นเมื่อเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขาดคุณสมบัติความเป็นบวกแน่นอนได้อย่างมีประสิทธิภาพ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาความเหมาะสมในการปรับปรุงประสิทธิภาพของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างในขั้นตอนการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น โดยการประยุกต์ใช้วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ ซึ่งได้แก่วิธี CG MINRES SYMMLQ และ SQMR โดยเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีดังกล่าวกับวิธีการแยกแอลยู (LU-decomposition) ซึ่งเป็นวิธีการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในขั้นตอนของการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ใช้อยู่ในปัจจุบัน การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแต่ละวิธีจะพิจารณาในส่วนของหน่วยเก็บข้อมูล (storage) และเวลาที่ใช้ในการคำนวณ โดยพิจารณาในกรณีที่สามารถใช้ข้อมูลรูปแบบการสั่นไหวครบทุกระดับขั้นความเสรีและกรณีที่ไม่สามารถใช้ข้อมูลรูปแบบการสั่นไหวครบทุกระดับขั้นความเสรี

1.2 งานวิจัยที่ผ่านมา

การศึกษาผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้แบ่งออกเป็น 2 ส่วนได้แก่ งานวิจัยเกี่ยวกับการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างและงานวิจัยเกี่ยวกับวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ

1.2.1 งานวิจัยเกี่ยวกับการประมาณค่าพารามิเตอร์

Hjelmstad และคณะ (1995) เสนอวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์จากแรงกระทำเชิงโหมด (Modal Force Error Estimator : MFEE) และวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์จากการเคลื่อนที่เชิงโหมด (Modal Displacement Error Estimator : MDEE) ในการประมาณค่าสติฟเนสและมวลของโครงสร้าง โดยใช้ข้อมูลที่ได้จากการวัดความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหวของโครงสร้างในแต่ละโหมดภายใต้แรงพลวัต สมการเป้าหมายของวิธี MFEE และ MDEE อยู่ในรูปกำลังสองน้อยที่สุดของฟังก์ชันค่าผิดพลาดของแรงคงค้างและการเคลื่อนที่ในแต่ละโหมดของการเสียรูปตามลำดับ และทำการแก้ปัญหาเพื่อหาค่าสติฟเนสที่เป็นคำตอบของสมการเป้าหมาย โดยใช้วิธี รีเคอร์ซีฟควอดราติกโปรแกรมมิง (Recursive Quadratic Programming : RQP) จนกระทั่งได้คำตอบที่เหมาะสมเมื่อค่าสติฟเนสและมวลของโครงสร้างลู่เข้า

Hjelmstad (1996) พบว่าการประมาณค่าพารามิเตอร์จากรูปแบบการสั่นไหวของโครงสร้างในแต่ละโหมดภายใต้แรงพลวัตด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุดของฟังก์ชันค่าผิดพลาดมีปัญหาความไม่เป็นเอกภาพของคำตอบ ซึ่งเป็นผลมาจากรูปแบบการสั่นไหวที่ทำการวัดข้อมูลทำได้ไม่ครบทุกระดับขั้นความเสรีในแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของโครงสร้างเนื่องจากอุปกรณ์ที่ใช้วัดมีจำกัด หรือพื้นที่ที่จะติดตั้งอุปกรณ์เข้าถึงได้ยาก นอกจากนี้ระดับความคลาดเคลื่อนของข้อมูลที่ได้จากการวัดรูปแบบการสั่นไหวมีผลทำให้เกิดกลุ่มของคำตอบที่กระจายตัวอีกด้วย Hjelmstad (1996) เสนอวิธีการกำหนดค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นแบบสุ่ม (random starting point scheme) สำหรับปัญหาที่สมการเป้าหมายให้จำนวนคำตอบมากกว่าหนึ่ง วิธีนี้ช่วยให้สามารถหาคำตอบที่ไม่เป็นเอกภาพได้ถ้ามีการกำหนดจำนวนค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นให้มีจำนวนมากเพียงพอ ในกรณีที่ข้อมูลไม่มีความคลาดเคลื่อน Hjelmstad เสนอว่าคำตอบที่แท้จริงที่รวมอยู่กับคำตอบอื่นๆจะสามารถหาได้โดยพิจารณา อัตราส่วนของจำนวนค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นที่ลู่เข้าหาคำตอบที่แท้จริงต่อจำนวนพารามิเตอร์เริ่มต้นทั้งหมด และค่าของสมการเป้าหมายสำหรับคำตอบที่แท้จริงนั้นจะให้อัตราส่วนของจำนวนค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นที่ลู่เข้าหาคำตอบที่แท้จริงต่อจำนวนค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นทั้งหมดสูงที่สุด และมีค่าของสมการเป้าหมายต่ำที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับคำตอบอื่น

เพื่อแก้ปัญหาที่เกิดจากการที่ข้อมูลรูปแบบการสั่นไหวที่วัดได้ไม่ครบทุกระดับขั้นความเสรีของโครงสร้างและข้อมูลรูปแบบการสั่นไหวที่ทำการวัดมีความคลาดเคลื่อน Pothisiri และ Vatcharathanyakorn (2002) เสนอวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์จากรูปแบบการสั่นไหวของโครงสร้างโดยใช้วิธีเรกูลาร์ไรเซชันร่วมกับวิธีกำลังสองน้อยสุดของฟังก์ชันค่าผิดพลาด ซึ่งทำการเพิ่มฟังก์ชันเรกูลาร์ไรเซชันเข้าไปในสมการเป้าหมายเพื่อทำหน้าที่ปรับค่าพารามิเตอร์คำตอบไม่ให้ลู่ออกจากค่าพารามิเตอร์คำตอบที่แท้จริง ส่งผลให้สามารถ

ลดปัญหาความไม่มีเอกภาพของค่าพารามิเตอร์คำตอบได้ นอกจากนี้ยังพบว่าการเลือกค่าสัมประสิทธิ์เรกูลาร์ไรเซชันอย่างเหมาะสมยังสามารถลดความไหวตัวของค่าพารามิเตอร์คำตอบต่อระดับความคลาดเคลื่อนของข้อมูลที่วัดได้

1.2.2 งานวิจัยเกี่ยวกับการประยุกต์ใช้วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ

Cornelius Lanczos และ Walter Arnoldi (1950) ได้นำเสนอวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ ซึ่งเป็นวิธีที่อ้างอิงถึงคุณสมบัติเชิงตั้งฉาก (orthogonalization) ของเวกเตอร์เพื่อเปลี่ยนเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ให้อยู่ในรูปแบบของเมตริกซ์สามแถวหลัก (tridiagonal matrix) โดยวิธีการดังกล่าวถูกนำมาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้นที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีคุณสมบัติสมมาตร ซึ่งในทางทฤษฎีกล่าวว่ากระบวนการหาคำตอบของวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟจะสิ้นสุดเมื่อจำนวนรอบการคำนวณมีค่าเท่ากับ $n-1$ เมื่อ n เป็นมิติของระบบสมการเชิงเส้น

อย่างไรก็ตามได้มีผลงานวิจัยเกี่ยวกับการนำวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟไปใช้ในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น พบว่าภายหลังจากการคำนวณในรอบที่ $n-1$ คำตอบที่ได้มีความผิดพลาดค่อนข้างสูงเมื่อเทียบกับคำตอบที่แท้จริงซึ่งไม่สอดคล้องกับทฤษฎี ซึ่งต่อมา Lanczos และคณะ (1952) ได้นำเสนอวิธีเกรเดียนต์สังยุค (CG) ซึ่งพัฒนามาจากวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟสำหรับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ที่มีลักษณะสมมาตรและเป็นบวกแน่นอน โดยทำการทดลองที่แสดงให้เห็นถึงการลู่เข้าของคำตอบที่ดีขึ้นเมื่อเทียบกับวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ แต่วิธีเกรเดียนต์สังยุคยังไม่สามารถแก้ปัญหาในเรื่องของความถูกต้องแม่นยำของคำตอบจึงทำให้วิธีเกรเดียนต์สังยุคยังไม่ได้รับการยอมรับในช่วง 20 ปีแรก

Reid (1972) ได้นำเสนอถึงข้อดีของวิธีเกรเดียนต์สังยุคในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งผลการวิเคราะห์พบว่าอัตราส่วนระหว่างค่าลักษณะจำเพาะ (eigen value) ที่มากที่สุดและน้อยที่สุดของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นปัจจัยสำคัญที่มีผลต่อการลู่เข้าของคำตอบโดยวิธีเกรเดียนต์สังยุค โดยที่ระบบสมการเชิงเส้นที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีอัตราส่วนดังกล่าวค่อนข้างน้อย จะถือว่าระบบสมการเชิงเส้นมีสภาวะที่ดี (well condition) ส่งผลให้วิธีเกรเดียนต์สังยุคมีอัตราการลู่เข้าของคำตอบที่สูง ซึ่งจากงานวิจัยนี้ได้ทำให้วิธีเกรเดียนต์สังยุคกลับมามีบทบาทอีกครั้ง และยังส่งผลให้เกิดงานวิจัยเกี่ยวกับการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในอีกหลายแนวทาง ได้แก่การขยายขอบเขตระบบสมการเชิงเส้นให้คลอบคลุมระบบสมการที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขาดคุณสมบัติสมมาตร หรือ ขาดคุณสมบัติความเป็นบวกแน่นอน รวมทั้งวิธีการปรับปรุงสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้น (precondition) ซึ่งสามารถช่วยเพิ่มอัตราการลู่เข้าหาคำตอบ

การขยายขอบเขตของวิธีเกรเดียนต์สังยุคไปสู่ระบบสมการเชิงเส้นที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีคุณสมบัติสมมาตรแต่ขาดคุณสมบัติความเป็นบวกแน่นอน (symmetric non-positive definite linear system) ได้ถูกพัฒนาขึ้น โดย Paige และ Saunders (1975) ซึ่งได้นำเสนอวิธีแอลคิวสมมาตร (SYMMLQ) และวิธีเวกเตอร์คงค้างน้อยที่สุด (MINRES) ซึ่งมีพื้นฐานมาจากวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟเช่นเดียวกับวิธีเกรเดียนต์สังยุค และ Freund

(1994) ได้นำเสนอวิธีเวกเตอร์คงค้างเสมือนน้อยที่สุดสมมาตร (SQMR) ซึ่งได้พัฒนามาจากวิธีเวกเตอร์คงค้างเสมือนน้อยที่สุด (QMR) โดยอาศัยคุณสมบัติสมมาตรของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ ซึ่งวิธีนี้สามารถเพิ่มอัตราการลู่เข้าของคำตอบจากวิธี MINRES และ SYMMLQ โดยใช้หน่วยเก็บข้อมูลเท่าเดิม

ในขณะเดียวกันได้มีผู้ทำการศึกษาวิธีการปรับปรุงสภาวะเริ่มต้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เพื่อลดอัตราส่วนระหว่างค่าลักษณะจำเพาะที่มากที่สุดและน้อยที่สุดของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ ซึ่งส่งผลให้การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีที่ได้รับการพัฒนาจากวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟมีอัตราการลู่เข้าของคำตอบที่สูงขึ้น สำหรับงานวิจัยเกี่ยวกับการปรับปรุงสภาวะเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ Jacobi (1845) ได้นำเสนอเมตริกซ์ปรับสภาวะแบบจาโคบี (Jacobi precondition matrix) ซึ่งเป็นเมตริกซ์แนวทแยงมุมและเป็นส่วนกลับของสมาชิกในแนวทแยงของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ เมตริกซ์ปรับสภาวะโดยวิธีนี้ง่ายในการคำนวณแต่ไม่ได้เป็นเมตริกซ์ปรับสภาวะที่มีประสิทธิภาพดีเท่าที่ควร ต่อมา Meijerink และ Van der vorst (1977) ได้นำเสนอวิธีการปรับปรุงสภาวะเมตริกซ์สัมประสิทธิ์โดยใช้วิธีแยกส่วนเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบไม่สมบูรณ์ (incomplete factorization precondition) ซึ่งมีความซับซ้อนในการคำนวณยิ่งขึ้นและถือได้ว่าเป็นวิธีการปรับปรุงสภาวะเมตริกซ์ที่มีประสิทธิภาพที่ดีกว่าวิธีเมตริกซ์ปรับสภาวะแบบจาโคบี และ Ajiz และ Jenning (1984) ได้นำเสนอวิธีการปรับสภาวะของเมตริกซ์โดยใช้วิธีแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์ (incomplete cholesky factorization precondition) สำหรับปัญหาไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element) ของโครงสร้างในทางวิศวกรรมโดยที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้นมีลักษณะสมมาตรและมีคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอน

สำหรับงานวิจัยนี้เป็นการนำวิธี CG SYMMLQ MINRES และ SQMR ซึ่งต่างมีรากฐานจากวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟมาประยุกต์ใช้ในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในขั้นตอนของการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้าง เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้นจะมีคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอนในกรณีที่สามารถใช้ข้อมูลรูปแบบการสั่นไหวได้ครบทุกระดับขั้นความเสรีของโครงสร้าง ในทางกลับกันเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้นจะขาดคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอนในกรณีที่ไม่สามารถใช้ข้อมูลรูปแบบการสั่นไหวได้ครบทุกระดับขั้นความเสรีของโครงสร้าง การศึกษานี้ทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟทั้งในเรื่องของเวลาที่ใช้ในการหาคำตอบและจำนวนของหน่วยเก็บข้อมูล ในกรณีที่ระบบสมการเชิงเส้นมีคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอนและกรณีที่ระบบสมการเชิงเส้นขาดคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอน รวมทั้งการใช้วิธีการปรับสภาวะเริ่มต้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ในระบบสมการเชิงเส้นเพื่อเพิ่มอัตราการลู่เข้าของคำตอบ โดยใช้กรณีศึกษาแบบจำลองโครงข้อหมุน 3 มิติ และสรุปถึงความเหมาะสมของการประยุกต์ใช้วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในขั้นตอนของการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้าง

1.3 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาและเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นระหว่าง วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟในแต่ละวิธี กับ วิธีแยกแบบแอลยู
2. เพื่อศึกษาถึงความเหมาะสมในการนำวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟเข้ามาใช้ในขั้นตอนของการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้าง
3. เปรียบเทียบประสิทธิภาพของการประมาณค่าพารามิเตอร์ก่อนและหลังการใช้วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ

1.4 ขอบเขตของการวิจัย

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ระหว่าง วิธีแยกแบบแอลยู และวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ เป็นหลัก ดังนั้นจึงพยายามจำกัดผลกระทบในเรื่องต่างๆ ออกไป ได้แก่ความคลาดเคลื่อนของข้อมูลเป็นต้น ส่งผลให้ของเขตของงานวิจัยเป็นตามที่แสดง

1. โครงสร้างที่พิจารณาเป็นโครงข้อหมุน 3 มิติ ที่มีจำนวนชิ้นส่วนและระดับขั้นความเสรีตามที่กำหนด และกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างในแต่ละกลุ่มมีค่าเท่ากัน
2. พิจารณาเฉพาะการประมาณค่าสติฟเนสพารามิเตอร์เท่านั้น และถือว่าทราบค่ามวลของโครงสร้าง
3. แบบจำลองของโครงสร้างที่พิจารณาสามารถวัดความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหวได้ครบทุกโหมดของการสั่นแบบอิสระและถือว่าไม่มีความผิดพลาดของข้อมูลค่าความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหวในแต่ละโหมดที่ได้จากการวัด

บทที่ 2

ทฤษฎีเบื้องต้นเกี่ยวกับการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้าง

2.1 ความนำ

เนื้อหาในบทนี้กล่าวถึงทฤษฎีที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างจากข้อมูลความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหวที่ได้จากการทดสอบโครงสร้างภายใต้แรงพลวัตในแต่ละโหมดของการสั่นไหว ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างนี้ สามารถอาศัยการหาค่าน้อยที่สุดของสมการเป้าหมายในรูปของกำลังสองของฟังก์ชันค่าผิดพลาดระหว่างรูปแบบการสั่นไหวเทียบเท่าที่คำนวณได้กับรูปแบบการสั่นไหวที่ได้จากการวัด ทฤษฎีเบื้องต้นที่เกี่ยวข้องประกอบด้วย การสร้างแบบจำลองโครงสร้างภายใต้การสั่นอิสระแบบไร้ความหน่วง ร่วมกับการแก้ปัญหาการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างที่เหมาะสมโดยวิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติกโปรแกรมมิง (Recursive Quadratic Programming : RQP) ซึ่งเป็นการหาค่าพารามิเตอร์คำตอบที่ทำให้สมการเป้าหมายมีค่าน้อยที่สุด โดยค่าพารามิเตอร์คำตอบอาจมีความไม่เป็นเอกภาพ (non-uniqueness) ในกรณีที่วัดข้อมูลรูปแบบการสั่นไหวได้ไม่ครบทุกระดับขั้นความเสรีของโครงสร้าง นอกจากนี้ค่าพารามิเตอร์คำตอบยังอาจมีความไหวตัวเนื่องจากความคลาดเคลื่อนของข้อมูลที่ใช้ ซึ่งปัญหาดังกล่าวสามารถบรรเทาได้โดยใช้วิธีเรกูลาร์ไรเซชัน (regularization) โดยการเพิ่มฟังก์ชันเรกูลาร์ไรเซชันเข้าไปในสมการเป้าหมายเพื่อทำหน้าที่ปรับค่าพารามิเตอร์ของคำตอบไม่ให้ลู่ออกจากเซตของคำตอบที่แท้จริง

เนื้อหาในส่วนต่อมาจะกล่าวถึงขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้าง โดยแสดงให้เห็นถึงเวลาที่ใช้ในการคำนวณในแต่ละขั้นตอนของโปรแกรม รวมทั้งชี้ให้เห็นถึงขั้นตอนที่สามารถปรับปรุงประสิทธิภาพในด้านเวลาที่ใช้ในการคำนวณ เพื่อให้โปรแกรมประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างจากผลตอบสนองเชิงโหมดมีศักยภาพในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างที่มีระดับขั้นความเสรีหรือจำนวนพารามิเตอร์เพิ่มมากขึ้น

2.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างจากผลตอบสนองเชิงโหมดที่วัดค่า

สมการประมาณค่าพารามิเตอร์ในรูปของกำลังสองน้อยที่สุดของฟังก์ชันค่าผิดพลาด ระหว่างเวกเตอร์รูปแบบการสั่นไหวเทียบเท่าจากการคำนวณ และเวกเตอร์รูปแบบการสั่นไหวที่ได้จากการวัด ณ ตำแหน่งของระดับขั้นความเสรีที่ทำการวัดข้อมูล สามารถแสดงได้ในสมการที่ (2.2.1)

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Minimize}} \qquad J_E(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{nlc} \delta_i \left\|\mathbf{e}_i(\mathbf{x})\right\|^2$$

$$\text{subject to} \qquad \mathbf{c}(\mathbf{x}) \le \mathbf{0} \qquad (2.2.1)$$

โดยที่ δ_i คือ ตัวคูณน้ำหนักสำหรับโหมดที่ i ซึ่งใช้บอกความสำคัญของแต่ละโหมด

nlc คือ จำนวนโหมดที่ทำการวัดข้อมูลความถี่ธรรมชาติ และรูปแบบการสั่นไหว

$\left\|\mathbf{e}_i(\mathbf{x})\right\|$ คือ ยูคลิเดียนนอร์มของเวกเตอร์ค่าผิดพลาด

$\mathbf{c}(\mathbf{x})$ คือ เวกเตอร์ของอสมการขอบเขตของค่าพารามิเตอร์ $\mathbf{x}$

ในสมการที่ (2.2.1) เทอม $\mathbf{e}_i(\mathbf{x})$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์ค่าผิดพลาดสำหรับการสั่นอิสระแบบไร้ความหน่วง ณ ตำแหน่งของระดับขั้นความเสรีที่ทำการวัดข้อมูลสำหรับโหมดที่ i สามารถเขียนในรูป

$$\mathbf{e}_i(\mathbf{x}) = \hat{\boldsymbol{\varphi}}_i - \hat{\boldsymbol{\varphi}}_i^{\,c}(\mathbf{x}) \qquad (2.2.2)$$

เมื่อ $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_i$ คือรูปแบบการสั่นไหวที่ทำการวัดข้อมูลในโหมดที่ i และ $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_i^c$ คือรูปแบบการสั่นไหวเทียบเท่าที่ได้จากการคำนวณ (สุวิทย์ 2545)

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_i^{\,c}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_i^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{f}_i \qquad (2.2.3)$$

โดยที่ $\mathbf{B}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{K}(\mathbf{x}) - \lambda_i\bar{\mathbf{M}}$ คือสติฟเนสเมตริกซ์แปลงของโครงสร้าง ที่มีความสัมพันธ์ของสติฟเนสเมตริกซ์ของโครงสร้าง $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ เมตริกซ์มวลของโครงสร้างที่สอดคล้องกับระดับขั้นความเสรีที่ไม่ได้วัดข้อมูล $\bar{\mathbf{M}}$ และค่าความถี่ธรรมชาติในโหมดที่ i λ_i

ในขณะที่ $\mathbf{f}_i = \lambda_i\hat{\mathbf{M}}\hat{\boldsymbol{\varphi}}_i$ คือเวกเตอร์แรงลัพธ์ที่มีความสัมพันธ์ของค่าความถี่ธรรมชาติในโหมดที่ i λ_i เมตริกซ์มวลของโครงสร้างที่สอดคล้องกับระดับขั้นความเสรีที่วัดข้อมูล $\hat{\mathbf{M}}$ และเวกเตอร์รูปแบบการสั่นไหวที่ทำการวัดข้อมูลในโหมดที่ i $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_i$

สมการที่ (2.2.1) สามารถพิจารณาจัดเรียงเวกเตอร์รูปแบบการสั่นไหวของแต่ละโหมดให้อยู่ในสดมภ์เดียวกัน ดังแสดงในสมการข้างล่างนี้

$$J_E(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left\|\hat{\boldsymbol{\psi}} - \hat{\boldsymbol{\psi}}^c(\mathbf{x})\right\|^2 \qquad (2.2.4)$$

โดยที่ $\hat{\boldsymbol{\psi}} = \begin{Bmatrix} \sqrt{\delta_1}\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1 \\ \sqrt{\delta_2}\hat{\boldsymbol{\varphi}}_2 \\ \vdots \\ \sqrt{\delta_{N_m}}\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{N_m} \end{Bmatrix}$ และ $\hat{\boldsymbol{\psi}}^c(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} \sqrt{\delta_1}\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1^{\,c} \\ \sqrt{\delta_2}\hat{\boldsymbol{\varphi}}_2^{\,c} \\ \vdots \\ \sqrt{\delta_{N_m}}\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{N_m}^{c} \end{Bmatrix}$

จากปัญหาเรื่องข้อจำกัดในการเก็บข้อมูลกล่าวคือไม่สามารถวัดค่ารูปแบบการสั่นไหวได้ครบทุกระดับขั้นความเสรีและจำนวนโหมดทำให้การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดของฟังก์ชันค่าผิดพลาดได้ค่าพารามิเตอร์คำตอบที่ขาดความเป็นเอกภาพและมีความไหวตัวสูงต่อระดับความคลาดเคลื่อนของข้อมูล (Lee และคณะ 1999)

ปัญหาดังกล่าวสามารถบรรเทาได้โดยอาศัยวิธีเรกูลาร์ไรเซชัน ในวิธีนี้ฟังก์ชันเรกูลาร์ไรเซชันจะทำหน้าที่ปรับค่าพารามิเตอร์คำตอบมิให้ลู่ออกจากเซตคำตอบที่แท้จริง ฟังก์ชันเรกูลาร์ไรเซชันสามารถนิยามได้ดังนี้

$$J_R(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\alpha^2 \|\mathbf{x}\|^2 \qquad (2.2.5)$$

โดยที่ α = สัมประสิทธิ์เรกูลาร์ไรเซชัน

$\|\mathbf{x}\|$ = ยูคลิดนอร์มของค่าพารามิเตอร์คำตอบ

Pothisiri และ Vatcharatanyakorn (2002) เสนอวิธีการหาค่าสัมประสิทธิ์เรกูลาร์ไรเซชันโดยวิธีค่าซิงกูลาร์มากที่สุดแปรผันได้ (Variable Maximum Singular Value : VMSV) ซึ่งอาศัยการแยกส่วนแบบซิงกูลาร์ (singular value decomposition) ของเมตริกซ์ความไหวตัว $\mathbf{S} \equiv \nabla \hat{\boldsymbol{\psi}}^c(\mathbf{x})$ โดยที่ ∇ คือเกรเดียนต์โอเปอเรเตอร์ (gradient operator) เทียบกับพารามิเตอร์ $\mathbf{x}$ สัมประสิทธิ์เรกูลาร์ไรเซชันโดยวิธี VMSV คำนวณได้ดังนี้

$$\alpha_{VMSV} = \sigma_{max} \qquad (2.2.6)$$

โดยที่ α_{VMSV} คือ สัมประสิทธิ์เรกูลาร์ไรเซชันโดยวิธีค่าซิงกูลาร์มากที่สุดแปรผันได้

σ_{max} คือ ค่าซิงกูลาร์มากที่สุดของเมตริกซ์ความไหวตัว ด้วยวิธีการแยกส่วนแบบซิงกูลาร์

เมื่อเพิ่มฟังก์ชันเรกูลาร์ไรเซชันตามสมการที่ (2.2.5) ในสมการเป้าหมายที่ (2.2.1) จะได้สมการดังนี้

$$J(\mathbf{x}) = J_E(\mathbf{x}) + J_R(\mathbf{x})$$

$$J(\mathbf{x}) \quad = \quad \frac{1}{2}\left\|\hat{\boldsymbol{\psi}} - \hat{\boldsymbol{\psi}}^c(\mathbf{x})\right\|^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\left\|\mathbf{x}\right\|^2 \tag{2.2.7}$$

ฟังก์ชันเรกูลาร์ไรเซชันจะต้องไม่มีค่ามากเกินไปจนทำให้สมการเป้าหมายมีผลของฟังก์ชันเรกูลาร์ไรเซชันมากกว่าผลของฟังก์ชันค่าผิดพลาด

$$\alpha^2\left\|\mathbf{x}\right\|^2 \le \frac{1}{2}\left\|\hat{\boldsymbol{\psi}} - \hat{\boldsymbol{\psi}}^c(\mathbf{x})\right\|^2 \tag{2.2.8}$$

ในอสมการดังกล่าวผลของฟังก์ชันเรกูลาร์ไรเซชัน จะต้องน้อยกว่าหรือเท่ากับ ผลของฟังก์ชันค่าผิดพลาดเสมอ ดังนั้นในแต่ละรอบการคำนวณหากผลของฟังก์ชันเรกูลาร์ไรเซชันมากกว่าผลของฟังก์ชันค่าผิดพลาด จะต้องทำการปรับค่าสัมประสิทธิ์เรกูลาร์ไรเซชันลงตามสมการ

$$\alpha_{k+1} \quad = \quad \gamma\alpha_k \tag{2.2.9}$$

โดยที่ k คือดัชนีบอกลำดับที่ของรอบการคำนวณ การแก้ปัญหาค่าน้อยที่สุดของสมการเป้าหมาย (2.2.7) เริ่มจากการสุ่มค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นภายใต้เงื่อนไขของอสมการขอบเขต $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ จากนั้นจึงหาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ที่เหมาะสมในการปรับค่าพารามิเตอร์ โดยค่าพารามิเตอร์ใหม่ควรทำให้สมการเป้าหมายมีค่าน้อยลง จนสุดท้ายค่าพารามิเตอร์คำตอบที่ต้องการควรทำให้สมการเป้าหมายมีค่าน้อยที่สุด ค่าพารามิเตอร์ในแต่ละรอบของการคำนวณหาได้จากสมการ

$$\mathbf{x}_{k+1} \quad = \quad \mathbf{x}_k + \beta_k\mathbf{d}_k \tag{2.2.10}$$

โดยที่ β_k คือ ค่าปรับขนาด (step length) ในรอบการคำนวณที่ k

$\mathbf{d}_k$ คือ เวกเตอร์ปรับทิศทาง (search direction) ในรอบการคำนวณที่ k

การหาค่าพารามิเตอร์ในรอบถัดไปของการคำนวณตามสมการที่(2.2.10) สามารถใช้วิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติกโปรแกรมมิง (Recursive Quadratic Programming) ซึ่งประมาณค่าเวกเตอร์ปรับทิศทาง $\mathbf{d}_k$ ที่เหมาะสมจากการแก้ปัญหาย่อยแบบควอดราติก (quadratic subproblem) ดังแสดงในสมการข้างล่างนี้

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{d}_k}{\text{Minimize}} && \frac{1}{2}\mathbf{d}_k^{\mathrm{T}}\,\nabla^2 J^k(\mathbf{x}_k)\mathbf{d}_k + \nabla J^k(\mathbf{x}_k)^{\mathrm{T}}\mathbf{d}_k \\ &\text{subject to} && \mathbf{c}(\mathbf{x}_k) + \nabla\mathbf{c}(\mathbf{x}_k)^{\mathrm{T}}\mathbf{d}_k \le \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

เวกเตอร์เกรเดียนต์และเมตริกซ์เฮชเชียน (Hessian matrix) ของสมการเป้าหมายสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\nabla J^k(\mathbf{x}) \;=\; \mathbf{G_k} \;=\; \nabla \mathbf{e}(\mathbf{x}_k)^{\mathrm{T}} \mathbf{e}(\mathbf{x}_k) + \alpha_k{}^2 \left\| \mathbf{x}_k \right\| \tag{2.2.12}$$

$$\nabla^2 J^k(\mathbf{x}) \;=\; \mathbf{H}_k \;=\; \nabla \mathbf{e}(\mathbf{x}_k)^{\mathrm{T}} \nabla \mathbf{e}(\mathbf{x}_k) + \nabla^2 \mathbf{e}(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}(\mathbf{x}_k) + \alpha_k{}^2 \mathbf{I} \tag{2.2.13}$$

เมตริกซ์เฮชเชียนในสมการที่ (2.2.13) ต้องการอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชันค่าผิดพลาดซึ่งยากต่อการคำนวณ อีกทั้งเมตริกซ์ผลลัพธ์อาจขาดคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอน (positive definite) ดังนั้นเพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาดังกล่าวจึงใช้การประมาณด้วยวิธี เกาซ์-นิวตัน (Banan และ Hjelmstad 1993) ตามสมการ

$$\mathbf{H}_k \;\approx\; \nabla \mathbf{e}(\mathbf{x}_k)^{\mathrm{T}} \nabla \mathbf{e}(\mathbf{x}_k) + \alpha_k{}^2 \mathbf{I} \tag{2.2.14}$$

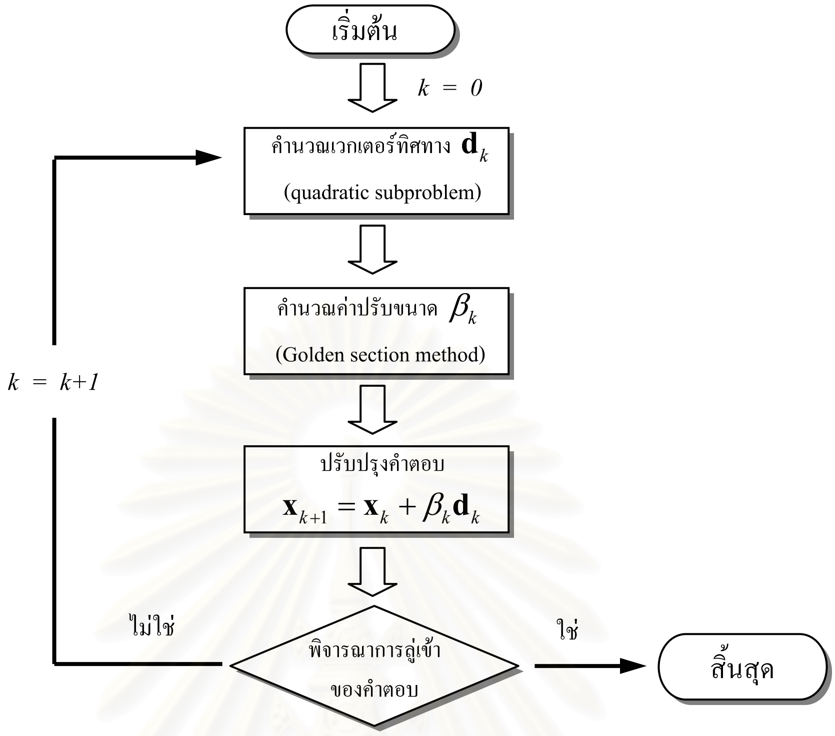
และสมการที่ (2.2.11) จะสามารถลดรูปได้เป็น

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{d}_k}{\text{Minimize}} \quad \frac{1}{2} \mathbf{d}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{H}_k \mathbf{d}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{d}_k + \alpha_k{}^2 \left[\frac{1}{2} \mathbf{d}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{d}_k - \mathbf{d}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_k \right] \\ &\text{subject to} \quad \mathbf{c}(\mathbf{x}_k) + \nabla \mathbf{c}(\mathbf{x}_k)^{\mathrm{T}} \mathbf{d}_k \le 0 \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

สำหรับค่าปรับขนาด β_k ที่เหมาะสมในรอบการคำนวณที่ k สามารถหาได้จากการแก้ปัญหาค่าน้อยที่สุดของสมการเป้าหมายในหนึ่งมิติ

$$\underset{\beta_k}{\text{Minimize}} \quad J(\mathbf{x}_k + \beta_k \mathbf{d}_k) \tag{2.2.16}$$

การคำนวณหาค่าพารามิเตอร์คำตอบโดยวิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติกประกอบด้วยขั้นตอนวิธีดังแสดงในรูปที่ 2.2.1



รูปที่ 2.2.1 การคำนวณหาค่าพารามิเตอร์คำตอบโดยวิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติกโปรแกรมมิง

2.3 เงื่อนไขในการลู่เข้าของค่าพารามิเตอร์คำตอบ

วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้าง ซึ่งมีสมการเป้าหมายในรูปกำลังสองน้อยที่สุดของฟังก์ชันค่าผิดพลาด โดยการใช้รีเคอร์ซีฟควอดราติกโปรแกรมมิงซึ่งเป็นการคำนวณซ้ำเพื่อปรับปรุงค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมยิ่งขึ้นในรอบการคำนวณถัดไป และจะหยุดการคำนวณซ้ำเมื่อเกิดการลู่เข้าของค่าพารามิเตอร์สู่คำตอบที่เหมาะสม การตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบใช้การพิจารณาเกณฑ์ต่างๆดังต่อไปนี้

$$J_k < \eta_J \tag{2.3.1}$$

$$\|\nabla J_k\| < \eta_{\nabla J} \tag{2.3.2}$$

$$\|\mathbf{d}_k\| < \eta_d \tag{2.3.3}$$

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}_k\|} < \eta_x \tag{2.3.4}$$

โดยที่ J_k และ ∇J_k คือ สมการเป้าหมายและเกรเดียนต์ของสมการเป้าหมายในรอบการคำนวณที่ k ส่วน $\Delta \mathbf{x}$ คือ ผลต่างของค่าพารามิเตอร์ในรอบการคำนวณปัจจุบัน (k) กับรอบการคำนวณที่ ผ่านมา ($k-1$)

ในขณะที่ η_J $\eta_{\nabla J}$ η_d และ η_x คือ ค่าความคลาดเคลื่อนยินยอมของ J_k $\|\nabla J_k\|$ $\|\mathbf{d}_k\|$ และ $\dfrac{\|\Delta \mathbf{x}_k\|}{\|\mathbf{x}_k\|}$ ตามลำดับ

การกำหนดค่าความคลาดเคลื่อนยินยอมในสมการที่ (2.3.1) ถึง (2.3.4) มีความสำคัญอย่างยิ่งในกระบวนการหาค่าพารามิเตอร์คำตอบที่เหมาะสม ซึ่งหากกำหนดค่าเหล่านี้น้อยเกินไปอาจทำให้ไม่สามารถหยุดการคำนวณซ้ำได้หรือใช้เวลานานมากเกินไปในการหยุดการคำนวณ ในทางกลับกันหากกำหนดค่าขอบเขตที่ยอมให้มากเกินไปจะทำให้ค่าพารามิเตอร์คำตอบที่ได้มีความผิดพลาดสูง การศึกษานี้ใช้ค่าขอบเขตที่ยอมให้ ดังแสดงในตารางที่ 2.3.1 เป็นเกณฑ์ในการตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบ (Vatcharatanyakorn , 2002)

ตารางที่ 2.3.1 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนยินยอมสำหรับแต่ละเกณฑ์ในการตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบ

เกณฑ์การลู่เข้า	ค่าความคลาดเคลื่อนยินยอม
η_J	10^{-14}
$\eta_{\nabla J}$	10^{-15}
η_d	10^{-15}
η_x	10^{-15}

2.4 ขั้นตอนวิธีสำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์

วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างจากผลการตอบสนองเชิงโหมดที่วัดค่า โดยการใช้รีเคอร์ซีฟควอดราติกโปรแกรมมิง ดังที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น สามารถนำมาเขียนเป็นขั้นตอนได้ดังนี้

ก. กระบวนการเริ่มต้น

ก.1 เก็บข้อมูลกำลังสองของความถี่ธรรมชาติ λ และ รูปแบบการสั่นไหวที่สอดคล้องกับความถี่ธรรมชาติ ในแต่ละโหมด $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ จากการทดสอบภายใต้การสั่นแบบอิสระ

ก.2 กำหนดค่าพารามิเตอร์เริ่มต้น $\mathbf{x}_0$ และกำหนดค่าดัชนี $k = 0$

ก.3 จากแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ภายใต้การสั่นอิสระแบบไร้ความหน่วง สามารถหารูปแบบการสั่นไหวเทียบเท่าจากการคำนวณ $\hat{\boldsymbol{\varphi}}^c(\mathbf{x}_0)$

ก.4 คำนวณเวกเตอร์ค่าผิดพลาด $\mathbf{e}(\mathbf{x}_0)$ ของรูปแบบการสั่นไหวที่วัดได้ กับรูปแบบการสั่นไหวเทียบเท่าจากการคำนวณ ตามสมการที่ (2.2.2)

ก.5 คำนวณเมตริกซ์ความไหวตัว $\mathbf{S}_0$ และใช้วิธีการแยกส่วนแบบซิงกูลาร์ เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์เรกูลาร์ไรเซชัน $\alpha_0 = \sigma_{max}$ โดยวิธี VMSV พร้อมทั้งปรับค่าสัมประสิทธิ์เรกูลาร์ไรเซชันอย่างเหมาะสมตามขั้นตอนของสมการที่ (2.2.8) และ (2.2.9)

ก.6 คำนวณสมการเป้าหมาย $J(\mathbf{x}_0)$ เกรเดียนต์ของสมการเป้าหมาย $\nabla J(\mathbf{x}_0)$ และเมตริกซ์เฮชเชียน $\mathbf{H}_0$ ที่มีผลของฟังก์ชันเรกูลาร์ไรเซชัน ตามสมการที่ (2.2.7) (2.2.12) และ (2.2.14) ตามลำดับ

ก.7 คำนวณเวกเตอร์ปรับทิศทางที่เหมาะสม $\mathbf{d}_k = \mathbf{d}_0$ จากการแก้ปัญหาย่อยแบบควอดราติกตามสมการที่ (2.2.15)

ข. ตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบในรอบการคำนวณเริ่มต้น

ถ้า $J(\mathbf{x}_0) < \eta_J$ หรือ $\|\nabla J(\mathbf{x}_0)\| < \eta_{\nabla J}$ หรือ $\|\mathbf{d}_0\| < \eta_d$ ตามสมการที่ (2.3.1) ถึง (2.3.3) ให้หยุดการคำนวณในรอบถัดไป และ $\mathbf{x}_0$ จะเป็นค่าพารามิเตอร์คำตอบ

ค. กระบวนการหาค่าพารามิเตอร์คำตอบด้วยวิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติกโปรแกรมมิง

ค.1 คำนวณค่าที่เพิ่มขึ้นในแต่ละรอบของการคำนวณ β_k จากการแก้ปัญหาค่าน้อยที่สุดของสมการเป้าหมายในหนึ่งมิติ จากสมการที่ (2.2.12)

ค.2 ปรับค่าพารามิเตอร์ในรอบการคำนวณถัดไป $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \beta_k \mathbf{d}_k$

ค.3 สร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ภายใต้การสั่นอิสระแบบไร้ความหน่วงโดยใช้ค่าพารามิเตอร์ในรอบการคำนวณปัจจุบัน และคำนวณรูปแบบการสั่นไหวเทียบเท่าจากการคำนวณ $\hat{\boldsymbol{\varphi}}^c(\mathbf{x}_{k+1})$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของค่าพารามิเตอร์คำตอบ $\mathbf{x}_{k+1}$

ค.4 คำนวณเวกเตอร์ค่าผิดพลาด $\mathbf{e}(\mathbf{x}_{k+1})$ ตามสมการที่ (2.2.2)

ค.5 คำนวณเมตริกซ์ความไหวตัว $\mathbf{S}_{k+1}$ และใช้วิธีการแยกส่วนแบบซิงกูลาร์ เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์เรกูลาร์ไรเซชัน $\alpha_{k+1} = \sigma_{max}$ โดยวิธี VMSV พร้อมทั้งปรับค่าสัมประสิทธิ์เรกูลาร์ไรเซชันอย่างเหมาะสมตามขั้นตอนของสมการที่ (2.2.8) และ (2.2.9)

ค.6 คำนวณสมการเป้าหมาย $J(\mathbf{x}_{k+1})$ เกรเดียนต์ของสมการเป้าหมาย $\nabla J(\mathbf{x}_{k+1})$ และเมตริกซ์เฮชเชียน $\mathbf{H}_{k+1}$ ที่มีผลของฟังก์ชันเรกูลาร์ไรเซชัน ตามสมการที่ (2.2.7) (2.2.12) และ (2.2.14) ตามลำดับ

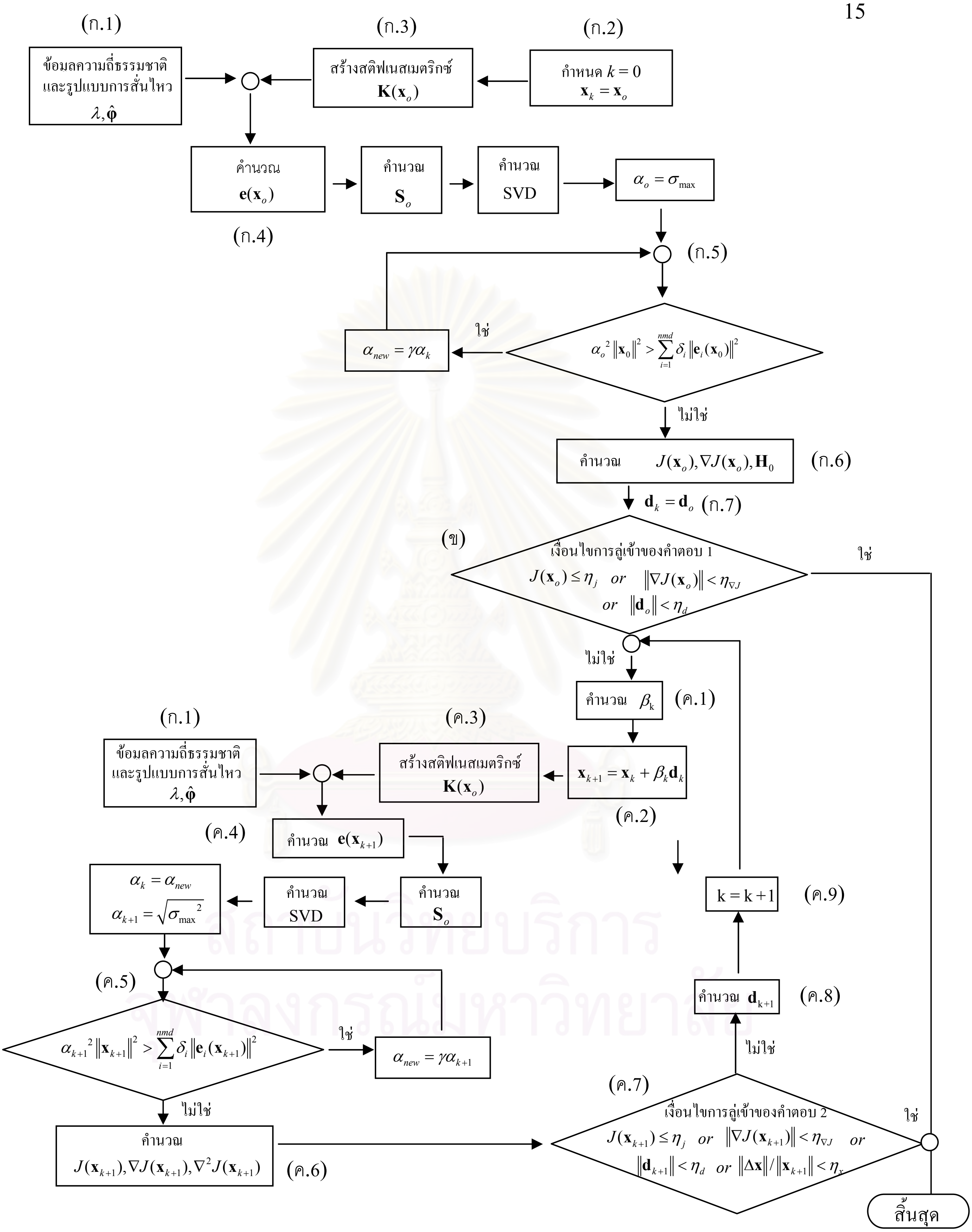
ค.7 ตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบ

ถ้า $J(\mathbf{x}_{k+1}) < \eta_J$ หรือ $\|\nabla J(\mathbf{x}_{k+1})\| < \eta_{\nabla J}$ หรือ $\|\mathbf{d}_{k+1}\| < \eta_d$ หรือ $\dfrac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}_{k+1}\|} < \eta_x$ ตามสมการที่ (2.3.1) ถึง (2.3.4) ให้หยุดการคำนวณในรอบถัดไป และ $\mathbf{x}_{k+1}$ จะเป็นค่าพารามิเตอร์คำตอบ

ค.8 คำนวณเวกเตอร์ปรับทิศทางที่เหมาะสม $\mathbf{d}_{k+1}$ จากการแก้ปัญหาย่อยแบบควอดราติกตามสมการที่ (2.2.15)

ค.9 กำหนดให้ค่าดัชนี $k = k+1$ และย้อนกลับไปในขั้นตอนที่ ค.1

จากขั้นตอนวิธีดังกล่าวข้างต้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของแผนภาพดังแสดงในรูปที่ 2.4.1

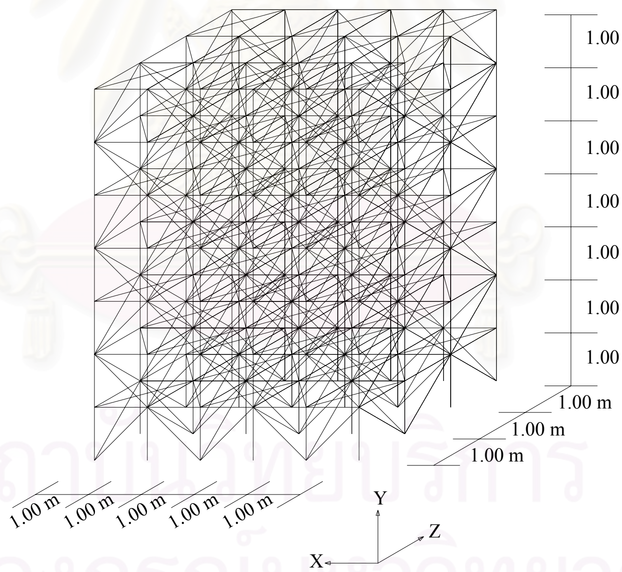


รูปที่ 2.4.1 แผนภาพแสดงขั้นตอนวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์จากผลตอบสนองเชิงโหมดที่วัดค่าโดยใช้วิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติกโปรแกรมมิง (สุวิทย์ 2545)

2.5 การปรับปรุงประสิทธิภาพของการประมาณค่าพารามิเตอร์ในกรณีศึกษาโครงข้อหมุน 3 มิติ

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาแนวทางการปรับปรุงประสิทธิภาพการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้าง โดยพิจารณาในประเด็นของเวลาที่ใช้คำนวณในขั้นตอนของการประมาณค่าพารามิเตอร์ พร้อมทั้งชี้ให้เห็นถึงขั้นตอนของการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ขาดประสิทธิภาพ และเสนอแนวทางในการปรับปรุงประสิทธิภาพในขั้นตอนดังกล่าว เพื่อทำให้โปรแกรมที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างมีประสิทธิภาพดีขึ้นทางด้านเวลาในการคำนวณซึ่งจะมีผลอย่างเห็นได้ชัดในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างที่มีขนาดใหญ่และมีความซับซ้อน

เพื่อให้เห็นภาพชัดเจนในการศึกษาถึงเวลาที่ใช้ในการคำนวณในแต่ละขั้นตอนของโปรแกรมการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้าง จะทำการศึกษาแบบจำลองโครงข้อหมุนในสามมิติที่มีขนาดความกว้างในแนวแกน x เท่ากับ 5 เมตร ความสูงในแนวแกน y เท่ากับ 7 เมตร และความลึกในแนวแกน z เท่ากับ 3 เมตร ดังแสดงในรูปที่ 2.5.1



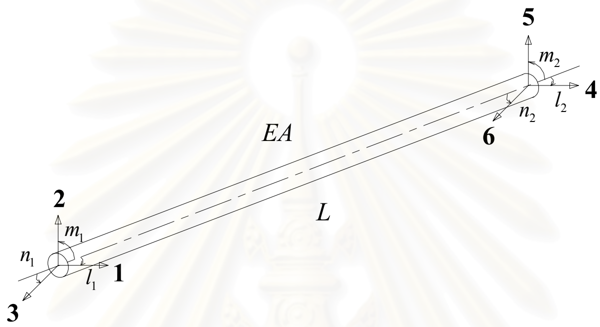
รูปที่ 2.5.1 แบบจำลองโครงข้อหมุน 3 มิติที่ใช้ในการศึกษา

การศึกษาประสิทธิภาพการทำงานของโปรแกรมการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างนี้ใช้วิธีการจำลองข้อมูลความถี่ธรรมชาติและรูปแบบของการสั่นไหว โดยกำหนดให้สามารถวัดข้อมูลความถี่ธรรมชาติได้ครบทุกโหมดรวมทั้งสามารถวัดรูปแบบการสั่นไหวได้ทุกระดับขั้นความเสรีของแบบจำลองโครงสร้าง ดังนั้น

คำตอบที่ได้จึงมีความเป็นเอกภาพและค่าพารามิเตอร์คำตอบที่ได้จะตรงกับค่าพารามิเตอร์เริ่มต้นที่ได้กำหนดไว้ การสร้างแบบจำลองโครงข้อหมุน 3 มิติที่ใช้ในการศึกษาดังกล่าวมีประเด็นสำคัญที่ควรกล่าวถึงดังนี้

2.5.1 สติฟเนสพารามิเตอร์ของชิ้นส่วนโครงข้อหมุน 3 มิติ

ระดับขั้นความเสรีของชิ้นส่วนโครงข้อหมุนใน 3 มิติในระบบพิกัดรวม (global coordinate) สามารถแสดงได้ในรูปที่ 2.5.2



รูปที่ 2.5.2 ระดับขั้นความเสรีในระบบพิกัดรวมของชิ้นส่วนโครงข้อหมุน 3 มิติ

จากรูปที่ 2.5.2 พบว่าชิ้นส่วนโครงข้อหมุน 3 มิติมีระดับขั้นความเสรี 6 ค่าในระบบพิกัดรวม เส้นประในรูปแสดงระบบแกนพิกัดของชิ้นส่วน (local coordinate) โดยสติฟเนสเมตริกซ์ของชิ้นส่วนโครงข้อหมุน 3 มิติในระบบพิกัดรวมสามารถเขียนได้ดังนี้

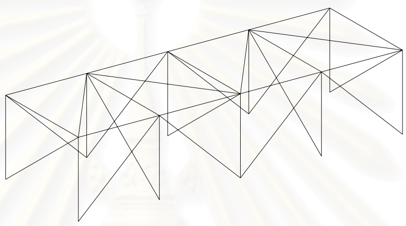
$$\mathbf{K} = \frac{EA}{L}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{array} \\ \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1m_1 & l_1n_1 & -l_1l_2 & -l_1m_2 & -l_1n_2 \\ & m_1^2 & m_1n_1 & -m_1l_2 & -m_1m_2 & -m_1n_2 \\ & & n_1^2 & -n_1l_2 & -n_1m_2 & -n_1n_2 \\ & & & l_2^2 & l_2m_2 & l_2n_2 \\ & Sym & & & m_2^2 & m_2n_2 \\ & & & & & n_2^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \end{array} \qquad (2.5.1)$$

ในสมการที่ (2.5.1) l_1 m_1 และ n_1 คือโคไซน์แสดงทิศทาง (direction cosine) ระหว่างแกนพิกัดของชิ้นส่วนกับแกนพิกัดรวมที่ 1 2 และ 3 ตามลำดับ ส่วน l_2 m_2 และ n_2 คือโคไซน์ทิศทางระหว่างแกนพิกัดของชิ้นส่วนกับแกนพิกัดรวมที่ 4 5 และ 6 ตามลำดับ ค่าสติฟเนสพารามิเตอร์ของโครงสร้างที่ต้องการศึกษาอยู่ใน

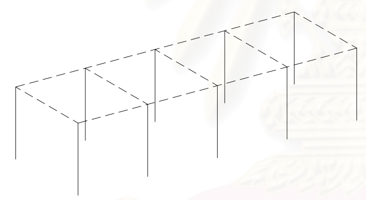
รูปของผลคูณระหว่างโมดูลัสยืดหยุ่นและพื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วน EA โดยที่ E คือโมดูลัสยืดหยุ่น (Modulus of elasticity) A คือพื้นที่หน้าตัด และ L เป็นความยาวของชิ้นส่วน ดังนั้นในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน 1 ชิ้น จะมีพารามิเตอร์ที่ต้องทำการประมาณอยู่เพียง 1 ค่า คือค่าสติฟเนสพารามิเตอร์ (EA) ในแนวแกนของโครงข้อหมุน

2.5.2 การจัดกลุ่มของสติฟเนสพารามิเตอร์ในโครงสร้าง

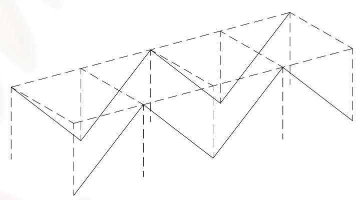
เนื่องจากแบบจำลองโครงสร้างที่ทำการศึกษามีขนาดใหญ่ และมีจำนวนชิ้นส่วนมาก ดังนั้นจึงทำการจัดกลุ่มของชิ้นส่วนโครงสร้างที่มีสติฟเนสพารามิเตอร์ค่าเดียวกัน ซึ่งสามารถแสดงได้ในรูปที่ 2.5.3



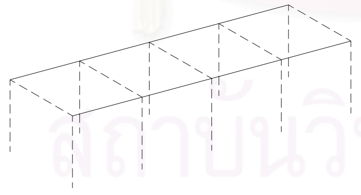
(ก) ชิ้นส่วนทั้งหมดในแบบจำลองโครงสร้างแต่ละชั้น



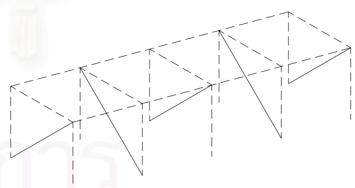
(ข) ชิ้นส่วน กลุ่มที่ 1



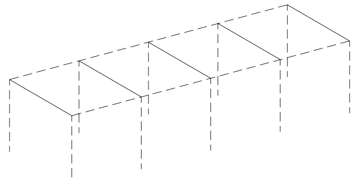
(ค) ชิ้นส่วน กลุ่มที่ 2



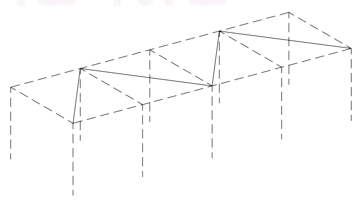
(ง) ชิ้นส่วน กลุ่มที่ 3



(จ) ชิ้นส่วน กลุ่มที่ 4



(ฉ) ชิ้นส่วน กลุ่มที่ 5



(ช) ชิ้นส่วน กลุ่มที่ 6

รูปที่ 2.5.3 การแบ่งกลุ่มของสติฟเนสพารามิเตอร์ในแบบจำลองโครงสร้างทดสอบแต่ละชั้น

จากรูปที่ 2.5.3 (ข) ถึง (ช) เส้นทึบที่แสดงหมายถึงชิ้นส่วนของโครงสร้างที่อยู่ในแต่ละกลุ่มที่พิจารณา ซึ่งพบว่าในแต่ละชั้นแบบจำลองโครงข้อหมุนจะมีสติฟเนสพารามิเตอร์แยกได้เป็น 6 กลุ่ม เนื่องจากแบบจำลองโครงสร้างที่พิจารณานี้มีจำนวน 7 ชั้น ดังนั้นจะมีจำนวนสติฟเนสพารามิเตอร์ที่พิจารณาอยู่ 42 กลุ่มหรือมีค่าพารามิเตอร์ EA ที่ต้องการประมาณค่าทั้งสิ้น 42 ค่า แต่ในกรณีศึกษาที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ได้กำหนดค่าสติฟเนสพารามิเตอร์ทั้ง 42 กลุ่มให้มีค่าเดียวกัน

แบบจำลองโครงข้อหมุนในรูปที่ 2.5.1 มีข้อมูลเบื้องต้นดังนี้

จำนวนของชิ้นส่วน	=	805	ชิ้นส่วน
จำนวนจุดต่อ	=	192	จุด
จำนวนระดับขั้นความเสรีทั้งหมด	=	504	ระดับขั้น
จำนวนระดับขั้นความเสรีที่วัดข้อมูล	=	504	ระดับขั้น
จำนวนโหมดที่วัดข้อมูล	=	504	โหมด
จำนวนกลุ่มของพารามิเตอร์	=	42	กลุ่ม
สติฟเนสพารามิเตอร์ (EA)	=	40,000,000	กิโลกรัม
น้ำหนักต่อหน่วยความยาว (M)	=	15	กิโลกรัม/เมตร
กำหนดค่าสติฟเนสพารามิเตอร์เริ่มต้น	=	39,500,000	กิโลกรัม

โดยมีสภาพฐานรองรับทุกจุดของโครงสร้างเป็นแบบยึดหมุน (hinge)

ชิ้นส่วนของแบบจำลองโครงข้อหมุนมีอัตราส่วน EA/M = 2,666,666.667 เมตร ซึ่งเป็นคุณสมบัติทางด้านวัสดุที่ใกล้เคียงกับเหล็กรูปพรรณมาตรฐาน จากการทดลองใช้โปรแกรมประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงข้อหมุนดังกล่าว พบว่าเวลาที่ใช้ในการคำนวณ สำหรับแต่ละขั้นตอนที่สำคัญในการประมาณค่าพารามิเตอร์ดังแสดงในตารางที่ 2.5.1 (ก) - (ค)

ตารางที่ 2.5.1(ก) เวลาที่ใช้ในกระบวนการเริ่มต้น

ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ ชั่วโมง : นาที : วินาที
1. กำหนดค่าพารามิเตอร์คำตอบเริ่มต้น $\mathbf{x}_0$	0 : 0 : 0.000
2. คำนวณหารูปแบบการสั่นไหวเทียบเท่าจากพารามิเตอร์เริ่มต้น $\hat{\boldsymbol{\varphi}}^c(\mathbf{x}_0)$ รวมทั้งคำนวณหา $J(\mathbf{x}_0)$, $\nabla J(\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{S}_0$ และแยกส่วนค่าซิงกูลาร์ของ $\mathbf{S}_0$	0 : 1 : 16.343
3. คำนวณสัมประสิทธิ์เรกูลาร์ไรเซชัน α_0 พร้อมทั้งปรับค่า	0 : 0 : 0.05
4. ปรับค่า $J(\mathbf{x}_0)$, $\nabla J(\mathbf{x}_0)$ และ $\mathbf{H}_0$ โดยเพิ่มผลของฟังก์ชันเรกูลาร์ไรเซชัน	0 : 0 : 0.48
5. คำนวณ $\mathbf{d}_0$ จากปัญหาย่อยควอดราติก	0 : 0 : 0.26

ตารางที่ 2.5.1(ข) เวลาที่ใช้ในตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบในรอบของการคำนวณเริ่มต้น

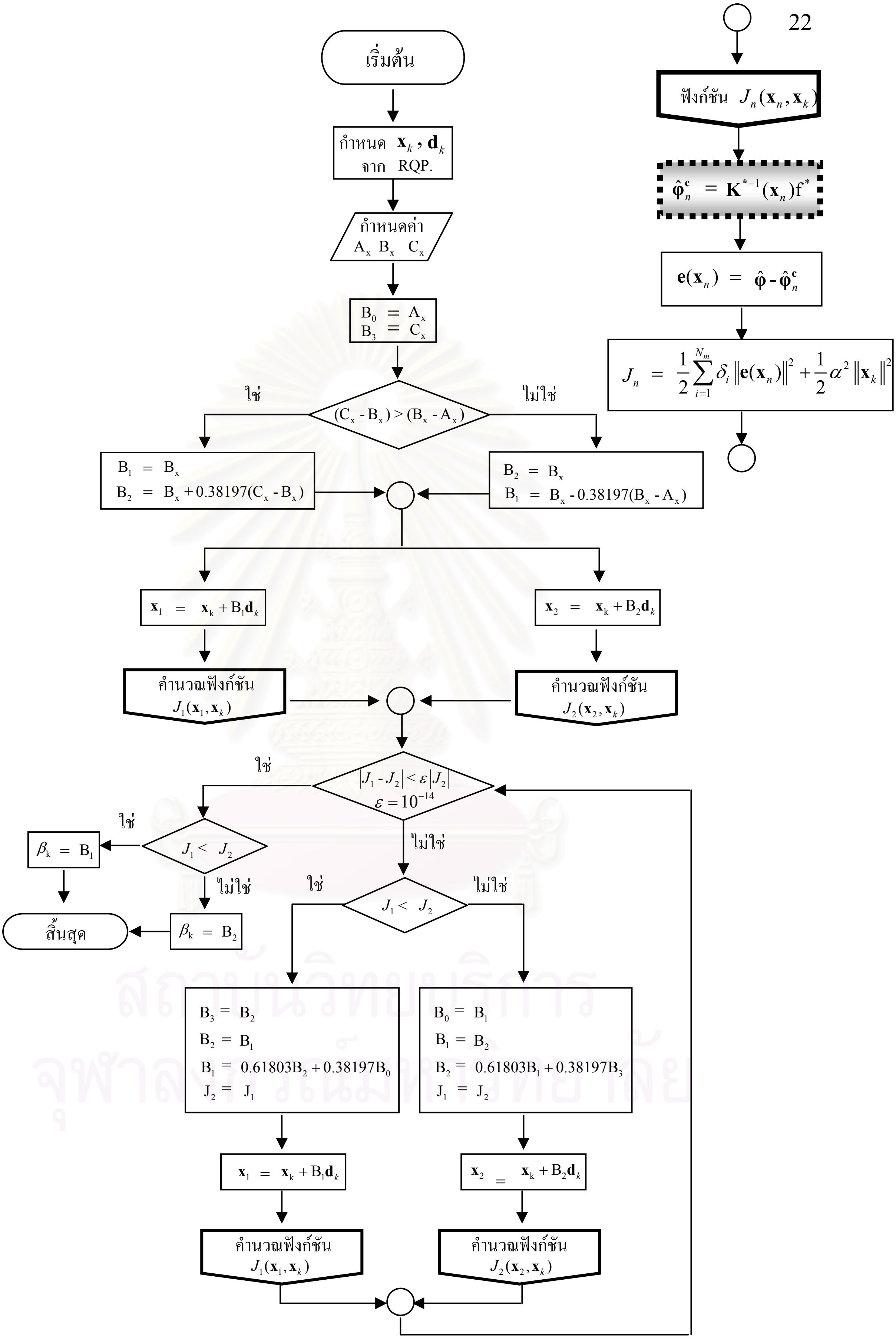
ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ ชั่วโมง : นาที : วินาที
1. ตรวจสอบเงื่อนไขการลู่เข้าของคำตอบ	0 : 0 : 0.00

ตารางที่ 2.5.1(ค) เวลาที่ใช้ในกระบวนการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติกโปรแกรมมิง

ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ ชั่วโมง : นาที : วินาที
1. คำนวณหาขนาดที่เพิ่มขึ้นในแต่ละรอบของการคำนวณ β_k จากปัญหาค่าน้อยสุดในหนึ่งมิติ	**0 : 28 : 46.007**
2. ปรับค่าพารามิเตอร์คำตอบ $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \beta_k \mathbf{d}_k$	0 : 0 : 0.010
3. คำนวณหารูปแบบการสั่น $\hat{\boldsymbol{\varphi}}^c(\mathbf{x}_{k+1})$ รวมทั้งคำนวณหา $J(\mathbf{x}_{k+1}), \nabla J(\mathbf{x}_{k+1})$, $\mathbf{H}_{k+1}$, $\mathbf{S}_{k+1}$ และแยกส่วนค่าซิงกูลาร์ของ $\mathbf{S}_{k+1}$	0 : 1 : 16.500
4. คำนวณสัมประสิทธิ์เรกูลาร์ไรเซชัน α_{k+1} พร้อมทั้งปรับค่า	0 : 0 : 0.078
5. ปรับค่า $J(\mathbf{x}_{k+1})$, $\nabla J(\mathbf{x}_{k+1})$ และ $\mathbf{H}_{k+1}$ โดยเพิ่มผลของฟังก์ชันเรกูลาร์ไรเซชัน	0 : 0 : 0.780
6. ตรวจสอบเงื่อนไขการลู่เข้าของคำตอบ	0 : 0 : 0.000
7. คำนวณ $\mathbf{d}_{k+1}$ จากปัญหาย่อยควอดราติก	0 : 0 : 0.220
8. รวมเวลาที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์	0 : 31 : 20.728

กระบวนการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างที่ทำการศึกษา โดยวิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติก โปรแกรมมิงดังที่ได้แสดงในตารางที่ 2.5.1 (ก) – (ค) จากการที่ได้กำหนดค่าสติฟเนสพารามิเตอร์เริ่มต้นให้มีค่าใกล้เคียงกับสติฟเนสพารามิเตอร์คำตอบ ส่งผลให้จำนวนรอบการคำนวณโดยวิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติก โปรแกรมมิงลู่เข้าหาค่าพารามิเตอร์คำตอบใน 2 รอบการคำนวณ โดยที่กระบวนการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างใช้เวลาทั้งสิ้น 31 นาที 20.728 วินาที

จากตารางสรุปเวลาที่ใช้ในการทำงานของโปรแกรมในขั้นตอนต่างๆของการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างที่ทำการศึกษา พบว่าขั้นตอนที่ใช้เวลาในการคำนวณมากที่สุดคือขั้นตอนของการหาค่าปรับขนาดในรอบการคำนวณที่ k (β_k) ซึ่งได้มาจากการแก้ปัญหาค่าน้อยที่สุดในหนึ่งมิติโดยใช้วิธีโกลเดนเซคชัน (Golden section) ซึ่งวิธีนี้อาศัยการคำนวณหาค่า β_k ที่เหมาะสมที่ทำให้สมการเป้าหมายมีค่าน้อยที่สุด ขั้นตอนวิธีในการหาขนาดที่เพิ่มขึ้นในแต่ละรอบของการคำนวณ β_k โดยใช้วิธีโกลเดนเซคชันสามารถแสดงในรูปที่ 2.5.4



รูปที่ 2.7.4 แผนภาพแสดงขั้นตอนของวิธีโกลเดนเซคชัน

2.6 บทสรุป

จากขั้นตอนการทำงานของวิธีโกลเดนเซคชันดังที่ได้แสดงในรูปที่ 2.7.4 พบว่าเริ่มจากการรับค่าพารามิเตอร์คำตอบ ($\mathbf{x}_k$) และ เวกเตอร์ทิศทางของคำตอบ ($\mathbf{d}_k$) จากการคำนวณรอบที่ k ในขั้นตอนของวิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติก ซึ่งทั้ง $\mathbf{x}_k$ และ $\mathbf{d}_k$ ถูกกำหนดให้มีค่าคงที่ในการคำนวณโดยวิธีโกลเดนเซคชัน จากนั้นรับค่าของเขตของ β_k ซึ่งก็คือ Ax Bx และ Cx โดยที่ $Ax < Bx < Cx$ ในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้กำหนดให้ $Ax = -1$ $Bx = 0$ และ $Cx = 1$ ซึ่งค่าของ β_k ที่ทำให้สมการเป้าหมายมีค่าน้อยที่สุดจะอยู่ในช่วงขอบเขตดังกล่าว ค่าของ β_k ที่เหมาะสมในแต่ละรอบของการคำนวณ ซึ่งก็คือ B_1 และ B_2 และจำเป็นต้องปรับค่า B_1 และ B_2 ให้อยู่ในรูปของค่าพารามิเตอร์ $\mathbf{x}_1$ และ $\mathbf{x}_2$ เพื่อที่จะได้ไปใช้หาสมการเป้าหมาย $J(\mathbf{x}_1)$ และ $J(\mathbf{x}_2)$ ตามลำดับ จากนั้นเข้าสู่การเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมาย $J(\mathbf{x}_1)$ และ $J(\mathbf{x}_2)$ เพื่อนำไปสู่การหาค่า B_1 และ B_2 ที่เหมาะสมในรอบการคำนวณต่อไป และจะหยุดการคำนวณเมื่อ $\frac{|J(\mathbf{x}_1) - J(\mathbf{x}_2)|}{|J(\mathbf{x}_2)|} < \varepsilon$ โดยที่ $\varepsilon = 10^{-14}$ ค่า β_k ที่เหมาะสมจะเท่ากับ B_1 หรือ B_2 ขึ้นอยู่กับค่าของ $J(\mathbf{x}_1)$ และ $J(\mathbf{x}_2)$

การหาค่าของสมการเป้าหมายในแต่ละรอบของการคำนวณจะเรียกใช้ฟังก์ชัน $J_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_k)$ ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอนต่างๆที่ใช้ในการหาค่าของสมการเป้าหมาย ดังแสดงในรูปที่ 2.7.4 จากขั้นตอนดังกล่าวนี้พบว่า ขั้นตอนที่สำคัญและใช้เวลาในการแก้ปัญหามากที่สุดคือ การหาคำตอบของสมการเชิงเส้น $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_i^c = \mathbf{B}_i^{-1}(\mathbf{x}_n)\mathbf{f}_i$ เพื่อหาค่าของรูปแบบการสั่นไหวจากการคำนวณ ซึ่งเป็นขั้นตอนที่ได้แรเงาไว้ในรูปที่ 2.7.4 เนื่องจากฟังก์ชัน $J_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_k)$ ถูกเรียกใช้เพื่อหาค่าของสมการเป้าหมายทุกรอบของการคำนวณจนกว่าจะได้ค่า β_k ที่เหมาะสม ดังนั้นการหาคำตอบของระบบสมการจึงเกิดขึ้นทุกรอบในการคำนวณเช่นกัน และเมื่อระบบสมการมีขนาดใหญ่เนื่องจากระดับขั้นความเสรีของโครงสร้างมีมากทำให้เวลาที่ใช้ในการหาคำตอบของระบบสมการมากขึ้น ดังนั้นถ้าสามารถปรับปรุงวิธีการหาคำตอบของสมการเชิงเส้นให้สามารถหาคำตอบได้โดยใช้เวลาน้อยลงในแต่ละรอบของการคำนวณ ก็จะทำให้ขั้นตอนของการคำนวณ β_k โดยใช้วิธีโกลเดนเซคชันใช้เวลาในการคำนวณน้อยลง ซึ่งส่งผลให้เพิ่มประสิทธิภาพการทำงานของโปรแกรมประมาณค่าพารามิเตอร์

จากการศึกษาพบว่าการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ (Krylov subspace method) ซึ่งเป็นวิธีหนึ่งในวิธีการคำนวณซ้ำ (iterative method) มีความเป็นเหมาะสมในทางทฤษฎีที่จะนำมาประยุกต์ใช้ในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_i^c = \mathbf{B}_i^{-1}(\mathbf{x}_n)\mathbf{f}_i$ แทนที่วิธีการหาคำตอบโดยการใช้วิธีแยกแบบแอลยู (LU-decomposition) เพื่อช่วยปรับปรุงประสิทธิภาพด้านเวลาในการคำนวณ สำหรับรายละเอียดของวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นจะได้กล่าวถึงในบทต่อไป

บทที่ 3

วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

3.1 ความนำ

เนื้อหาในบทนี้กล่าวถึงทฤษฎีเบื้องต้นของวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ (Krylov subspace method) ในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่เกี่ยวข้องกับการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างจากผลตอบสนองเชิงโหมดในขั้นตอนของการหาค่าน้อยที่สุดในหนึ่งมิติ ซึ่งจากการศึกษาเบื้องต้นพบว่าวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟมีประสิทธิภาพด้านเวลาในการคำนวณและจำนวนหน่วยเก็บข้อมูลในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีแยกแบบแอลยู นอกจากนี้วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟยังสามารถเพิ่มอัตราการลู่เข้าของคำตอบโดยการใช้เมตริกซ์ปรับสภาวะเริ่มต้น (precondition matrix) กับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ในระบบสมการเชิงเส้นส่งผลให้ระยะเวลาในการคำนวณลดลง โดยที่จำนวนหน่วยเก็บข้อมูลเพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อย โดยทฤษฎีที่เกี่ยวข้องของวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ และวิธีการปรับสภาวะเริ่มต้นที่เลือกใช้ในการศึกษานี้จะแสดงให้เห็นในรายละเอียดต่อไป

3.2 ทฤษฎีเบื้องต้นของวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ

วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟเป็นวิธีการคำนวณซ้ำ (iterative method) ที่มีความเหมาะสมในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น โดยที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้นมีคุณสมบัติสมมาตร พิจารณาระบบสมการเชิงเส้นในรูปของ

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \qquad (3.2.1)$$

โดยที่ $\mathbf{A}$ คือ เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้น
$\mathbf{b}$ คือ เวกเตอร์ของระบบสมการเชิงเส้น
$\mathbf{x}$ คือ เวกเตอร์คำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

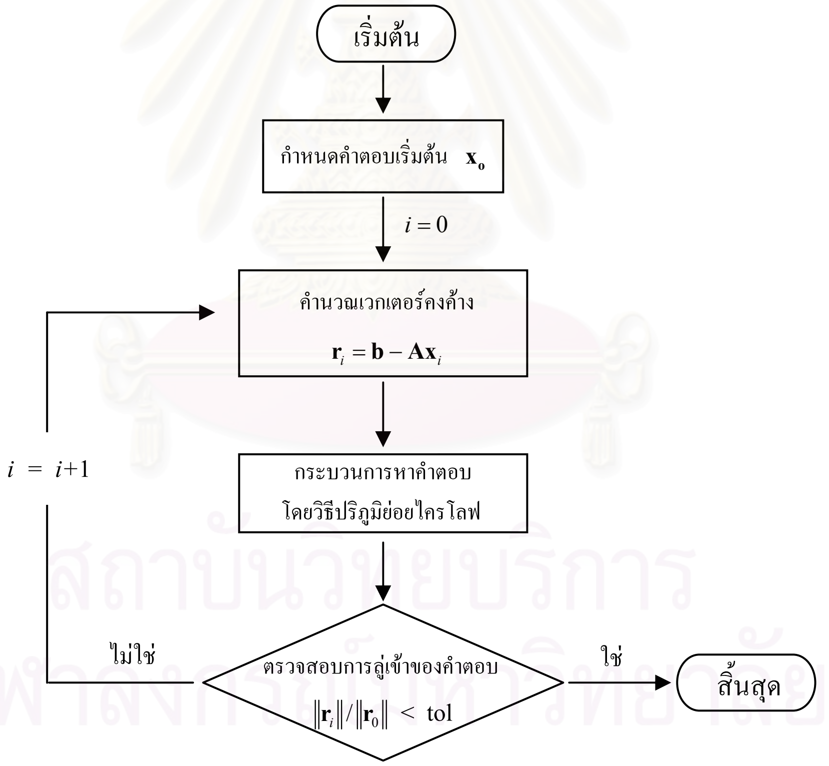
กำหนดให้เวกเตอร์คงค้าง (residual vector) ของระบบสมการเชิงเส้นในรอบการคำนวณซ้ำที่ i ของวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟเป็นดังแสดงในสมการที่ (3.2.2)

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i \qquad (3.2.2)$$

โดยที่ $\mathbf{r}_i$ คือ เวกเตอร์คงค้างของระบบสมการเชิงเส้นในรอบการคำนวณที่ i

$\mathbf{x}_i$ คือ เวกเตอร์คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในรอบการคำนวณที่ i

การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ เริ่มจากการกำหนดเวกเตอร์คำตอบเริ่มต้น ($\mathbf{x}_0$) ซึ่งจะทำให้ได้เวกเตอร์คงค้างเริ่มต้น ($\mathbf{r}_0$) ของระบบสมการเชิงเส้น จากนั้นจะเข้าสู่กระบวนการคำนวณซ้ำ เพื่อค้นหาเซตคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่ทำให้เวกเตอร์คงค้างมีค่าลดลงในทุกรอบของการคำนวณซ้ำ จนกระทั่งนอร์มของเวกเตอร์คงค้างในรอบการคำนวณที่ i ต่อนอร์มของเวกเตอร์คงค้างเริ่มต้น ($\|\mathbf{r}_i\|/\|\mathbf{r}_0\|$) มีค่าน้อยกว่าเกณฑ์ที่ยอมให้ จึงหยุดการคำนวณซ้ำ และเวกเตอร์คำตอบในรอบการคำนวณปัจจุบัน ($\mathbf{x}_i$) คือเวกเตอร์คำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งสามารถแสดงขั้นตอนการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟได้ในรูปที่ 3.2.1



รูปที่ 3.2.1 แผนภาพแสดงการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ

ในขั้นตอนวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ เวกเตอร์คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นจะถูกคำนวณในแต่ละรอบการคำนวณซ้ำโดยอาศัยเวกเตอร์ทิศทางและค่าปรับขนาดที่เหมาะสม โดยเวกเตอร์คำตอบจะถูกเลือกให้เหมาะสมที่สุดสำหรับปริภูมิย่อยของเวกเตอร์ทิศทางที่ได้ถูกคำนวณมาก่อนหน้าแล้วทั้งหมด

$$\left\langle \mathbf{A}\mathbf{x}_j - \mathbf{r}_0, \mathbf{d} \right\rangle \quad = \quad 0 \quad ; \forall \mathbf{d} \in span\left\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_j\right\} \qquad (3.2.3)$$

เมื่อ $\mathbf{x}_j$ คือเวกเตอร์คำตอบในรอบการคำนวณที่ j ที่เหมาะสมที่สุดสำหรับปริภูมิย่อยของเวกเตอร์ทิศทางก่อนหน้า โดยที่สมาชิกทุกตัวของ $\mathbf{d}$ คือปริภูมิย่อย ของเวกเตอร์ทิศทางตั้งแต่รอบการคำนวณเริ่มต้นจนถึงรอบการคำนวณที่ j การคำนวณเวกเตอร์คำตอบในรอบการคำนวณถัดไป $\mathbf{x}_{j+1}$ จะได้จากเวกเตอร์ทิศทาง $\mathbf{p}_j$ และค่าปรับขนาดที่เหมาะสม α_j ดังแสดงในสมการที่ (3.2.4)

$$\mathbf{x}_{j+1} \quad = \quad \mathbf{x}_j + \alpha_j \mathbf{p}_j \qquad (3.2.4)$$

สำหรับวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟที่นำมาศึกษาในงานวิจัยนี้มีอยู่ 4 วิธี ได้แก่ วิธีเกรเดียนต์สังยุค (Conjugate Gradient : CG) วิธีแอลคิวสมมาตร (Symmetric LQ : SYMMLQ) วิธีเวกเตอร์คงค้างน้อยที่สุด (Minimum Residual : MINRES) และวิธีเวกเตอร์คงค้างเสมือนน้อยที่สุดสมมาตร (Symmetric-Quasi Minimum Residual : SQMR) นอกเหนือจากนี้วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟสามารถเพิ่มอัตราการลู่เข้าของคำตอบได้โดยใช้วิธีการปรับสภาวะเริ่มต้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ซึ่งจะได้กล่าวถึงในรายละเอียดต่อไป

3.3 การปรับปรุงสภาวะเริ่มต้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์

ในระบบสมการเชิงเส้นสภาวะเริ่มต้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ พิจารณาได้จากตัวเลขบอกสภาวะ (condition number) ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากนอร์มของเมตริกซ์ $\mathbf{A}$ คูณกับนอร์มของส่วนกลับของเมตริกซ์ $\mathbf{A}$

$$\kappa \quad = \quad \|\mathbf{A}\| . \|\mathbf{A}^{-1}\| \qquad (3.3.1)$$

เมื่อ κ คือตัวเลขบอกสภาวะสำหรับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ ที่ไม่ใช่เมตริกซ์เอกฐาน (non-singular matrix) สำหรับระบบสมการเชิงเส้นใดๆ ตัวเลขบอกสภาวะจะแสดงถึงขอบเขตความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (relative error bound) ของคำตอบที่ได้จากระบบสมการเชิงเส้น โดยตัวเลขบอกสภาวะที่มีค่ามากจะส่งผลให้ขอบเขตความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของคำตอบกว้างขึ้น ในทำนองเดียวกันตัวเลขบอกสภาวะที่มีค่าน้อยก็จะส่งผลให้ขอบเขตความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของคำตอบลดลง ซึ่งกล่าวได้ว่าตัวเลขบอกสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ในระบบสมการเชิงเส้นส่งผลถึงระดับความคลาดเคลื่อนของคำตอบที่ได้กับคำตอบที่แท้จริง

นอกเหนือจากนี้พบว่าตัวเลขบอกสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ในระบบสมการเชิงเส้นส่งผลถึงอัตราการลู่เข้าของคำตอบโดยวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ โดยระบบสมการเชิงเส้นที่อยู่ในสภาวะที่ดี (well condition) จะมีตัวเลขบอกสภาวะที่มีค่าน้อย และระบบสมการเชิงเส้นที่อยู่ในสภาวะที่ไม่ดี (ill condition) ตัวเลขบอกสภาวะ

จะมีค่ามาก ดังนั้นการปรับปรุงสภาวะเริ่มต้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ ให้มีสภาวะที่ดีขึ้นก่อนการคำนวณโดยวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ จะส่งผลให้ใช้จำนวนรอบในการคำนวณซ้ำลดลง ซึ่งจะส่งผลให้เวลาที่ใช้ในคำนวณลดลงตามไปด้วย

Shewchuk (1994) ได้แสดงวิธีการปรับปรุงสภาวะของเมตริกซ์โดยการนำเมตริกซ์ปรับสภาวะที่มีคุณสมบัติสมมาตรและมีคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอน ซึ่งมีลักษณะคล้ายกับเมตริกซ์ $\mathbf{A}$ แต่สามารถหาเมตริกซ์ส่วนกลับ (inverse matrix) ได้ง่ายกว่า มาปรับปรุงคุณสมบัติเริ่มต้นของระบบสมการเชิงเส้น

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \tag{3.3.2}$$

โดยที่ $\mathbf{M}$ จากสมการที่ (3.3.2) คือเมตริกซ์ปรับสภาวะ (precondition matrix) ของระบบสมการเชิงเส้น เมตริกซ์ปรับสภาวะที่เหมาะสมจะทำให้ตัวเลขบอกสภาวะของ $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}$ มีค่าน้อยกว่าตัวเลขบอกสภาวะของ $\mathbf{A}$ ส่งผลให้ระบบสมการเชิงเส้นจากสมการที่ (3.3.2) มีสภาวะที่ดีกว่าในสมการที่ (3.2.1)

จากคำกล่าวที่ว่าเมตริกซ์ปรับสภาวะที่ดีจะต้องมีลักษณะใกล้เคียงกับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ แต่สามารถหาเมตริกซ์ส่วนกลับได้ง่ายมีความขัดแย้งกันเอง กล่าวคือถ้าเมตริกซ์ปรับสภาวะที่มีลักษณะใกล้เคียงกับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ก็จะไม่สามารถหาเมตริกซ์ส่วนกลับได้ง่าย ในทำนองเดียวกันถ้าเมตริกซ์ปรับสภาวะที่เลือกใช้สามารถหาเมตริกซ์ส่วนกลับได้ง่ายเมตริกซ์ปรับสภาวะนั้นก็ไม่น่าจะมีลักษณะใกล้เคียงกับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ ดังนั้นจึงพบว่าไม่สามารถที่จะหาเมตริกซ์ปรับสภาวะใดๆ ที่เป็นตัวแทนที่ดีของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์และในขณะเดียวกันก็สามารถหาเมตริกซ์ส่วนกลับได้ง่าย การศึกษาถึงเมตริกซ์ปรับสภาวะที่เหมาะสมของระบบสมการเชิงเส้นยังเป็นประเด็นที่ทำการศึกษาอยู่ในปัจจุบัน

Gene และ Cherles (1993) ได้นำเสนอวิธีการปรับสภาวะเบื้องต้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์โดยใช้วิธีปรับสภาวะจาโคบี (Jacobi precondition) ซึ่งจะได้เมตริกซ์ปรับสภาวะที่คำนวณง่าย และให้อัตราการลู่เข้าของคำตอบเป็นที่น่าพอใจ

$$\mathbf{M}_{\text{JACOBI}} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.3.3}$$

ในสมการที่ (3.3.3) ค่า $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ คือสมาชิกในแนวทแยงของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ ซึ่งพบว่าเมตริกซ์ปรับสภาวะแบบจาโคบีได้มาจากสมาชิกในแนวทแยงของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ ส่งผลให้เมตริกซ์ปรับสภาวะจาโคบีคำนวณหาเมตริกซ์ส่วนกลับได้ง่ายเนื่องจากมีสมาชิกในแนวทแยงเท่านั้น

$$\mathbf{M}_{\text{JACOBI}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (3.3.4)$$

อย่างไรก็ตามเมตริกซ์ปรับสภาวะจาโคบีสามารถปรับปรุงให้มีคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอนได้ โดยการใช้ค่าสัมบูรณ์กับสมาชิกในแนวทแยง ตามสมการที่ (3.3.5)

$$\mathbf{M}_{\text{JACOBI}}^{-1} = \begin{bmatrix} \left\| 1/a_{11} \right\| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \left\| 1/a_{22} \right\| & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \left\| 1/a_{nn} \right\| \end{bmatrix} \qquad (3.3.5)$$

ถึงแม้ว่าวิธีการปรับสภาวะเบื้องต้นโดยใช้เมตริกซ์ปรับสภาวะจาโคบีจะคำนวณหาเมตริกซ์ส่วนกลับได้ง่าย แต่ไม่ได้มีลักษณะที่ใกล้เคียงกับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้น อย่างไรก็ตามจากงานวิจัยของ Gene และ Cherles พบว่าการใช้วิธีเกรเดียนต์สังยุคร่วมกับการปรับสภาวะจาโคบีในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสำหรับปัญหาลักษณะเฉพาะ ให้อัตราการลู่เข้าของคำตอบเป็นที่น่าพอใจ

สำหรับการคำนวณหาเมตริกซ์ปรับสภาวะของระบบสมการเชิงเส้นที่มีความซับซ้อนในการคำนวณและใช้จำนวนหน่วยเก็บข้อมูลมากกว่า แต่ให้เมตริกซ์ปรับสภาวะที่มีลักษณะใกล้เคียงกับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มากขึ้น คือ วิธีการปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ (incomplete factorization precondition) ซึ่งคำนวณได้จากการแยกส่วนแบบไม่สมบูรณ์ของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ ดังแสดงในสมการที่ (3.3.6)

$$\mathbf{M}_{\text{IC}} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 \qquad (3.3.6)$$

เมื่อ $\mathbf{M}_{\text{IC}}$ คือเมตริกซ์ปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ โดยที่ $\mathbf{M}_1$ และ $\mathbf{M}_2$ คือเมตริกซ์ผลลัพธ์ที่ได้จากการแยกส่วนไม่สมบูรณ์ สมการการปรับสภาวะโดยการใช้เมตริกซ์ปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์แสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{IC}}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{M}_{\text{IC}}^{-1}\mathbf{b} \\ (\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x} &= \mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{b} \qquad (3.3.7) \\ \mathbf{G}\mathbf{x} &= \mathbf{c} \end{aligned}$$

สมการที่ (3.3.7) แสดงการปรับปรุงระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปของการปรับสภาวะโดยวิธีแยกส่วนไม่สมบูรณ์ เมื่อกำหนดให้ $\mathbf{G} = \mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{A}$ และ $\mathbf{c} = \mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{b}$ โดยที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{G}$ จากสมการที่ (3.3.7) จะมีสภาวะที่ดีกว่าเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ ในสมการที่ (3.2.1) ดังนั้นเมื่อใช้วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟในการหาคำตอบของสมการที่ (3.3.7) ส่งผลให้เกิดอัตราการลู่เข้าของคำตอบที่มากกว่า โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีที่เมตริกซ์ปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์มีลักษณะที่ใกล้เคียงกับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ อย่างไรก็ตามพบว่าการคำนวณเมตริกซ์ปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์และการคำนวณหาเมตริกซ์ส่วนกลับ ไม่สามารถทำได้ง่ายเหมือนในกรณีของเมตริกซ์ปรับสภาวะแบบจาโคบี

ในกรณีที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ จากสมการที่ (3.2.1) มีคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอน วิธีปรับสภาวะแบบแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์ (incomplete cholesky factorization precondition) เป็นวิธีการที่มีความเหมาะสมในการหาเมตริกซ์ปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ (Ajiz และ Jennings 1984) นอกจากนี้เมตริกซ์ปรับสภาวะที่คำนวณได้ก็จะมีคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอนเช่นเดียวกับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์

กำหนดการแยกส่วนเมตริกซ์สัมประสิทธิ์โดยวิธีโชเลสกีในสมการที่ (3.3.8)

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{L}}^{\mathrm{T}} \tag{3.3.8}$$

เมื่อ $\tilde{\mathbf{L}}$ คือเมตริกซ์เส้นทแยงมุมล่าง (lower triangular matrix) ที่ได้จากการแยกส่วนโดยวิธีโชเลสกี ในทำนองเดียวกันการแยกส่วนโชเลสกีแบบไม่สมบูรณ์ของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์สามารถพิจารณาได้ในสมการที่ (3.3.9)

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{L}}^{\mathrm{T}} = \tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}} + \mathbf{F} \tag{3.3.9}$$

เมื่อ $\tilde{\mathbf{E}}$ คือเมตริกซ์เส้นทแยงมุมล่างที่ได้จากการแยกส่วนโชเลสกีแบบไม่สมบูรณ์ และ $\mathbf{F}$ คือเมตริกซ์เติมเต็ม (fill-in matrix) จากสมการที่ (3.3.9) พบว่าเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ที่ได้จากวิธีการแยกส่วนโชเลสกีโดยสมบูรณ์จะเท่ากับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ที่ได้จากการแยกส่วนโชเลสกีแบบไม่สมบูรณ์รวมกับเมตริกซ์เติมเต็ม ในกรณีที่จำนวนสมาชิกในเมตริกซ์เติมเต็มมีน้อย หมายถึงเมตริกซ์ที่ได้การแยกส่วนโชเลสกีแบบไม่สมบูรณ์มีความใกล้เคียงกับการแยกส่วนโชเลสกีแบบสมบูรณ์ ในทำนองเดียวกันจำนวนสมาชิกในเมตริกซ์เติมเต็มที่มีค่ามากขึ้นหมายถึงความแตกต่างระหว่างเมตริกซ์ที่ได้จากการแยกส่วนโชเลสกีแบบไม่สมบูรณ์กับการแยกส่วนโชเลสกีแบบสมบูรณ์ที่เพิ่มขึ้น

จากสมการที่ (3.3.9) ระดับขั้นความไม่สมบูรณ์ของวิธีการแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์สามารถพิจารณาได้จากสัมประสิทธิ์เติมเต็ม (fill-in parameter) ซึ่งแทนด้วย δ โดยที่ $0 \le \delta \le 1$ ในกรณีที่ $\delta = 0$ หมายถึงไม่มีสมาชิกในเมตริกซ์เติมเต็ม การแยกส่วนเมตริกซ์สัมประสิทธิ์โดยวิธีโชเลสกีจะเป็นการแยกส่วนโดยสมบูรณ์ ในทำนองเดียวกันเมื่อ δ มีค่าเพิ่มขึ้นระดับความไม่สมบูรณ์ของการแยกส่วนโดยวิธีโชเลสกีจะเพิ่มมากขึ้น และมีค่า

มากที่สุดเมื่อ $\delta = 1$ ซึ่งเมตริกซ์เติมเต็มจะจำนวนมีสมาชิกมากที่สุด และการแยกส่วนโดยวิธีโชเลสกีในกรณีนี้จะเรียกว่า การแยกส่วนโชเลสกีแบบไม่เติมเต็มสมบูรณ์

เนื่องจากการเก็บข้อมูลจะเก็บเฉพาะเมตริกซ์เส้นทแยงมุมล่างที่ได้จากการแยกส่วนโชเลสกีเท่านั้น โดยที่เมตริกซ์เติมเต็มคือเมตริกซ์ที่สมมติขึ้นมาในสมการที่ (3.3.9) ซึ่งจะไม่มีการเก็บข้อมูล ดังนั้นเมื่อพิจารณาในด้านของจำนวนหน่วยเก็บข้อมูล (storage) พบว่าการแยกส่วนโชเลสกีโดยสมบูรณ์จะใช้หน่วยเก็บข้อมูลมากกว่าในกรณีของการแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์ และการแยกส่วนแบบไม่เติมเต็มสมบูรณ์จะใช้หน่วยเก็บข้อมูลน้อยที่สุด สำหรับการเก็บข้อมูลของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์จะใช้รูปแบบการจัดเก็บของแถวลำดับในหนึ่งมิติ (one-dimension array) ซึ่งได้แสดงรายละเอียดในภาคผนวก ก

การปรับสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์โดยวิธีการแยกส่วนโชเลสกีแบบไม่สมบูรณ์สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\mathbf{M}_{\mathrm{ICHO}} = \tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}} \tag{3.3.10}$$

$$\mathbf{M}_{\mathrm{ICHO}}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{M}_{\mathrm{ICHO}}^{-1}\mathbf{b}$$

$$(\tilde{\mathbf{E}}^{-\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{E}}^{-\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\mathbf{b} \tag{3.3.11}$$

สมการที่ (3.3.10) การปรับสภาวะโดยวิธีแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์สามารถทำได้ในกรณีที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ มีคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอนเท่านั้น ซึ่งจะส่งผลให้เมตริกซ์ปรับสภาวะโดยวิธีแยกส่วนแบบโชเลสกีไม่สมบูรณ์ $\mathbf{M}_{\mathrm{ICHO}}$ มีคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอน อีกทั้งยังส่งผลให้เมตริกซ์ $\tilde{\mathbf{E}}^{-\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{E}}^{-1}\mathbf{A}$ จากสมการที่ (3.3.11) ที่ได้จากการปรับสภาวะมีคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอน สำหรับรายละเอียดของวิธีการปรับสภาวะแบบแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์ได้แสดงในภาคผนวก ข

ในกรณีที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ จากสมการที่ (3.2.1) ขาดคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอนวิธีปรับสภาวะแบบแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์ไม่สามารถนำมาใช้ได้เนื่องจากขาดเสถียรภาพในขั้นตอนของการคำนวณ ดังนั้นวิธีการแยกส่วนไม่สมบูรณ์ โดยอาศัยวิธีการแยกแบบแอลยู (Jinming และ Baodong 2004) สามารถนำมาใช้ในการคำนวณเมตริกซ์ปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ได้ พิจารณาสมการที่ (3.3.12) เมื่อใช้วิธีการแยกแบบแอลยู

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U} \tag{3.3.12}$$

เมื่อ $\mathbf{L}$ คือเมตริกซ์เส้นทแยงมุมล่างและ $\mathbf{U}$ คือเมตริกซ์เส้นทแยงมุมบนของการแยกแบบแอลยู ในกรณีที่ $\mathbf{A}$ มีคุณสมบัติสมมาตร สมการที่ (3.3.12) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^{\mathrm{T}} \tag{3.3.13}$$

เมื่อ $\mathbf{D}$ คือเมตริกซ์ในแนวเส้นทแยงมุมของการแยกส่วน ในทำนองเดียวกับการแยกส่วนแบบโชเลสกีไม่สมบูรณ์

$$\mathbf{M}_{\mathrm{IC}} = \hat{\mathbf{E}}\hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}} \tag{3.3.14}$$

จากสมการที่ (3.3.14) เมื่อ $\mathbf{M}_{\mathrm{IC}}$ คือเมตริกซ์ปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ในสมการที่ (3.3.6) โดยที่ $\mathbf{M}_1 = \hat{\mathbf{E}}$ และ $\mathbf{M}_2 = \hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}$ เช่นเดียวกับการแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์ การแปลงระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปของการปรับสภาวะโดยวิธีแยกส่วนไม่สมบูรณ์ สามารถแสดงได้ในสมการที่ (3.3.15)

$$(\hat{\mathbf{E}}^{-\mathrm{T}}\hat{\mathbf{D}}^{-1}\hat{\mathbf{E}}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x} = \hat{\mathbf{E}}^{-\mathrm{T}}\hat{\mathbf{D}}^{-1}\hat{\mathbf{E}}^{-1}\mathbf{b} \tag{3.3.15}$$

การปรับสภาวะโดยวิธีแยกส่วนไม่สมบูรณ์สามารถทำได้ถึงแม้ว่าเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ จะไม่มีคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอนก็ตาม ซึ่งในกรณีนี้เมตริกซ์ปรับสภาวะที่ได้จึงไม่มีคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอน สำหรับรายละเอียดของวิธีการปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์แสดงในภาคผนวก ข

วิธีการปรับสภาวะเริ่มต้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ เพื่อเพิ่มอัตราการลู่เข้าของคำตอบโดยวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ สำหรับงานวิจัยนี้สามารถแบ่งออกได้เป็น 3 วิธี วิธีแรกคือ วิธีปรับสภาวะเริ่มต้นแบบ จาโคบี โดยมีสมาชิกของเมตริกซ์ปรับสภาวะในแนวทแยงเป็นสมาชิกของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งเมตริกซ์ปรับสภาวะจาโคบีสามารถคำนวณหาเมตริกซ์ส่วนกลับได้ง่าย ในขณะที่อีกวิธีหนึ่งคือการปรับสภาวะเริ่มต้นแบบแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์ ซึ่งมีความซับซ้อนในการคำนวณและหาเมตริกซ์ส่วนกลับได้ยากกว่าวิธีปรับสภาวะจาโคบี นอกจากนี้ยังต้องการเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้นที่มีคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอน แต่เมื่อนำมาใช้กับวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟสามารถให้อัตราในการลู่เข้าของคำตอบที่เพิ่มขึ้นจากวิธีปรับสภาวะจาโคบี และวิธีการปรับสภาวะแบบสุดท้ายคือ วิธีการปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ซึ่งมีความซับซ้อนในขั้นตอนของการคำนวณและขั้นตอนการหาเมตริกซ์ส่วนกลับเช่นเดียวกับวิธีแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์ เพียงแต่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้นไม่จำเป็นต้องมีคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอน สำหรับวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟที่ได้นำมาศึกษาในงานวิจัยนี้ร่วมกับการปรับสภาวะเบื้องต้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์จะได้แสดงรายละเอียดในหัวข้อต่อไป

3.4 วิธีเกรเดียนต์สังยุค

วิธีเกรเดียนต์สังยุค (CG) เป็นวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟที่มีความเหมาะสมที่สุดในกรณีที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้นมีคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอน โดยมีสมการเป้าหมายอยู่ในรูปของฟังก์ชันกำลังสอง (quadratic function)

$$\underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}}{\text{Minimize}}\, F(\mathbf{x}) \quad = \quad \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} \qquad (3.4.1)$$

ในกรณีที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ ของระบบสมการเชิงเส้นมีคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอน ปัญหาค่าน้อยที่สุดของฟังก์ชันกำลังสองจากสมการที่ (3.4.1) จะมีเพียงคำตอบเดียว ซึ่งเซตคำตอบ $\mathbf{x}$ ที่ทำให้ฟังก์ชันกำลังสองมีค่าน้อยที่สุดก็คือคำตอบเดียวกับที่ได้จากการแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้นที่ (3.2.1)

$$\mathbf{x} \quad = \quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \qquad (3.4.2)$$

ผลลัพธ์จากสมการที่ (3.4.2) แสดงให้เห็นว่าระบบสมการเชิงเส้นจากสมการที่ (3.2.1) เทียบได้กับการแก้ปัญหาค่าน้อยที่สุดของฟังก์ชันกำลังสองโดยวิธี CG จากสมการที่ (3.4.1)

การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธี CG จะเริ่มจากการกำหนดเวกเตอร์คงค้างเริ่มต้นของระบบสมการเชิงเส้น

$$\mathbf{r}_0 \quad = \quad \mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}_0 \qquad (3.4.3)$$

เมื่อ $\mathbf{r}_0$ เท่ากับเวกเตอร์คงค้างเริ่มต้นของระบบสมการเชิงเส้นและ $\mathbf{x}_0$ คือเวกเตอร์คำตอบเริ่มต้น เมื่อแทนเวกเตอร์ของระบบสมการเชิงเส้น $\mathbf{b}$ ในสมการที่ (3.4.1) ด้วยเวกเตอร์คงค้างเริ่มต้น $\mathbf{r}_0$ จากสมการที่ (3.4.3) จะได้ปัญหาค่าน้อยที่สุดของฟังก์ชันกำลังสองที่อยู่ในรูปของเวกเตอร์คงค้างเริ่มต้น

$$\underset{\mathbf{x}\in\mathbb{R}}{\text{Minimize}}\, F(\mathbf{x}) \quad = \quad \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_0 \qquad (3.4.4)$$

กระบวนการหาคำตอบโดยวิธี CG จะพิจารณาจากการเปลี่ยนแปลงทิศทางของเวกเตอร์คำตอบในแต่ละรอบของการคำนวณเพื่อให้ฟังก์ชันกำลังสองมีค่าน้อยที่สุด โดยทิศทางของคำตอบที่เปลี่ยนแปลงสามารถหาได้จากเกรเดียนต์ของฟังก์ชันกำลังสองเทียบกับเวกเตอร์คำตอบ $\mathbf{x}$ จากคุณสมบัติสมมาตรของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ ดังนั้น เกรเดียนต์ของฟังก์ชันกำลังสองเทียบกับเวกเตอร์คำตอบสามารถเขียนได้ในรูปของ

$$\nabla F(\mathbf{x}) \quad = \quad \mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{r}_0 \qquad (3.4.5)$$

เมื่อ $\nabla F(\mathbf{x})$ คือเกรเดียนต์ของฟังก์ชันกำลังสองเทียบกับเวกเตอร์คำตอบจากสมการที่ (3.4.4) ในกรณีที่ $\left\|\nabla F(\mathbf{x})\right\| \neq 0$ จะมีค่าปรับขนาดที่เหมาะสมในทิศทางของเกรเดียนต์ ที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงเวกเตอร์คำตอบ โดยที่ค่าของฟังก์ชันกำลังสองมีค่าลดลงกล่าวคือ

$$F(\mathbf{x}-\alpha\nabla\mathbf{F}(\mathbf{x})) \quad < \quad F(\mathbf{x}) \qquad (3.4.6)$$

เมื่อ α คือค่าปรับขนาดที่เหมาะสมในทิศทางของเกรเดียนต์ ดังนั้นจากการพิจารณาวิธี CG ในลักษณะของการคำนวณซ้ำ เมื่อกำหนดให้ $\mathbf{x}_j$ คือเวกเตอร์คำตอบในรอบการคำนวณที่ j กระบวนการลู่เข้าของคำตอบในรอบการคำนวณที่ j+1 ในทิศทางตรงข้ามกับเกรเดียนต์ด้วยค่าปรับขนาดที่เหมาะสม จะทำให้ค่าของฟังก์ชันกำลังสองมีค่าลดลง

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j - \alpha_j \nabla F(\mathbf{x}_j) \qquad (3.4.7)$$

เมื่อ $\mathbf{x}_{j+1}$ คือเวกเตอร์คำตอบในรอบการคำนวณที่ j+1 แทนค่าเกรเดียนต์ของฟังก์ชันกำลังสองจากสมการที่ (3.4.5) ลงในสมการที่ (3.4.7) จะได้

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{j+1} &= \mathbf{x}_j - \alpha_j(\mathbf{A}\mathbf{x}_j - \mathbf{r}_0) \\ \mathbf{x}_{j+1} &= \mathbf{x}_j - \alpha_j \mathbf{r}_j \qquad (3.4.8) \end{aligned}$$

เมื่อ $\mathbf{r}_j = \mathbf{A}\mathbf{x}_j - \mathbf{r}_0$ คือเวกเตอร์คงค้างสำหรับรอบการคำนวณที่ j ค่าปรับขนาดในรอบการคำนวณที่ j ที่ทำให้ฟังก์ชันกำลังสองมีค่าน้อยที่สุดในทิศทางของเกรเดียนต์หาได้จาก

$$\alpha_j = \frac{\mathbf{r}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_j}{\mathbf{r}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{r}_j} \qquad (3.4.9)$$

เวกเตอร์คงค้างสำหรับรอบการคำนวณที่ j ในสมการที่ (3.4.8) ทำหน้าที่เป็นเวกเตอร์ทิศทางของคำตอบเพื่อปรับทิศทางของคำตอบในรอบการคำนวณถัดไปให้มีความเหมาะสมที่สุด อย่างไรก็ตามการหาเวกเตอร์คำตอบในแต่ละรอบการคำนวณจากสมการที่ (3.4.8) ยังไม่ใช่แนวทางที่เหมาะสมที่สุด เนื่องจากเวกเตอร์คำตอบที่คำนวณได้เหมาะสมสำหรับเวกเตอร์ทิศทางในรอบการคำนวณปัจจุบันเท่านั้น แต่ไม่ได้หมายความว่าเหมาะสมที่สุดสำหรับเวกเตอร์ทิศทางในรอบการคำนวณก่อนหน้าทั้งหมด

พิจารณาจากสมการที่ (3.2.3) เมื่อ $\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{j-1}\}$ คือปริภูมิย่อยของเวกเตอร์ทิศทางก่อนรอบการคำนวณที่ j และ $\mathbf{x}_j$ คือเวกเตอร์คำตอบในรอบการคำนวณที่ j ที่มีความเหมาะสมที่สุดสำหรับปริภูมิย่อย $\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{j-1}\}$ ดังนั้นถ้าต้องการคำนวณเวกเตอร์คำตอบ $\mathbf{x}_{j+1}$ ที่มีความเหมาะสมที่สุดสำหรับเวกเตอร์ทิศทาง $\mathbf{p}_j$ ซึ่งอยู่ในปริภูมิย่อยเดียวกับ $\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{j-1}\}$ เมื่อกำหนดให้ $i = 0, \ldots, j-1$

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{A}\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_i \right\rangle &= 0 \\ \left\langle \mathbf{A}(\mathbf{x}_j + \alpha_j \mathbf{p}_j) - \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_i \right\rangle &= 0 \\ \left\langle \mathbf{A}\mathbf{x}_j - \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_i \right\rangle + \alpha_j \left\langle \mathbf{A}\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_i \right\rangle &= 0 \\ \alpha_j \left\langle \mathbf{A}\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_i \right\rangle &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{เมื่อ } \alpha_j \neq 0 \;; \qquad \left\langle \mathbf{Ap}_j, \mathbf{p}_i \right\rangle = 0 \tag{3.4.10}$$

โดยที่ $\langle .,. \rangle$ แสดงผลคูณจุด (dot product) จากสมการที่ (3.4.10) $\left\langle \mathbf{Ap}_j, \mathbf{p}_i \right\rangle = 0$ เมื่อ $i \neq j$ แสดงให้เห็นว่าเวกเตอร์ทิศทางมีคุณสมบัติเชิงสังยุค (conjugate) ซึ่งกันและกัน ดังนั้นถ้าต้องการให้คำตอบที่ได้มีความเหมาะสมที่สุดสำหรับเวกเตอร์ทิศทางในรอบการคำนวณก่อนหน้าทั้งหมด เวกเตอร์ทิศทางจะต้องมีคุณสมบัติเชิงสังยุคซึ่งกันและกัน

การสร้างเวกเตอร์ทิศทางในแต่ละรอบการคำนวณให้มีคุณสมบัติเชิงสังยุคซึ่งกันและกันสามารถทำได้โดยใช้วิธีแกรมชมิตสังยุค (Gram-Schmidt conjugation) ซึ่งเริ่มจากการกำหนดเวกเตอร์ทิศทางเริ่มต้นจากเวกเตอร์คงค้างเริ่มต้น สำหรับรายละเอียดของวิธีแกรมชมิตสังยุคแสดงในภาคผนวก ค

เวกเตอร์ทิศทางในแต่ละรอบการคำนวณที่มีคุณสมบัติเชิงสังยุคซึ่งกันและกันสามารถแสดงได้ในสมการที่ (3.4.11)

$$\mathbf{p}_{j+1} = \mathbf{r}_j + \xi_j \mathbf{p}_j \tag{3.4.11}$$

โดยที่

$$\xi_j = \frac{\mathbf{r}_j^{\mathrm{T}} \mathbf{r}_j}{\mathbf{r}_{j-1}^{\mathrm{T}} \mathbf{r}_{j-1}} \tag{3.4.12}$$

เมื่อ $\mathbf{p}_{j+1}$ คือเวกเตอร์ทิศทางในรอบการคำนวณที่ $j+1$ ซึ่งมีคุณสมบัติเชิงสังยุคกับ $\mathbf{p}_i$ เมื่อ $i = 0, \ldots, j$ และ ξ_j คือค่าปรับขนาดโดยวิธีแกรมชมิตสังยุคในการสร้างเวกเตอร์ทิศทางที่มีคุณสมบัติเชิง สังยุค จากการใช้เวกเตอร์ทิศทางในการปรับทิศทางของคำตอบแทนการใช้เวกเตอร์คงค้าง ส่งผลให้สมการที่ (3.4.8) และสมการที่ (3.4.9) เปลี่ยนรูปเป็น

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j - \alpha_j \mathbf{p}_j \tag{3.4.13}$$

$$\alpha_j = \frac{\mathbf{r}_j^{\mathrm{T}} \mathbf{r}_j}{\mathbf{p}_j^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{p}_j} \tag{3.4.14}$$

กล่าวโดยสรุปการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธี CG เริ่มจากการกำหนดเวกเตอร์คำตอบเริ่มต้นในระบบสมการเชิงเส้น $\mathbf{x}_0$ เพื่อคำนวณเวกเตอร์คงค้างเริ่มต้นของระบบสมการเชิงเส้น $\mathbf{r}_0$ จากสมการที่ (3.4.3) จากนั้นกำหนดเวกเตอร์ทิศทางเริ่มต้นให้มีค่าเท่ากับเวกเตอร์คงค้างเริ่มต้น และคำนวณหาค่าปรับขนาดที่เหมาะสมจากสมการที่ (3.4.14) และคำนวณค่าเวกเตอร์คำตอบที่เหมาะสมในรอบการคำนวณถัดไปจากสมการที่ (3.4.13) โดยเวกเตอร์ทิศทางที่มีคุณสมบัติเชิงสังยุคคำนวณได้จากสมการที่ (3.4.11) และ (3.4.12) ขั้นตอนวิธีในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธี CG สามารถแสดงได้จากรูปที่ 3.4.1

$$
\begin{aligned}
&\text{Given } \mathbf{x}_0 \\
\mathbf{r}_0 &= \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \\
\mathbf{p}_0 &= \mathbf{r}_0 \\
i &= 0 \\
&\text{While } \frac{\|\mathbf{r}_i\|}{\|\mathbf{r}_0\|} \geq tol \\
\mathbf{q} &= \mathbf{A}\mathbf{p}_i \\
\alpha &= \frac{\mathbf{r}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_i}{\mathbf{p}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{q}} \\
\mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{x}_i + \alpha\mathbf{p}_i \\
\mathbf{r}_{i+1} &= \mathbf{r}_i - \alpha\mathbf{q} \\
\xi &= \frac{\mathbf{r}_{i+1}^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_{i+1}}{\mathbf{r}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_i} \\
\mathbf{p}_{i+1} &= \mathbf{r}_i + \xi\mathbf{p}_i
\end{aligned}
$$

$$i = i+1$$

รูปที่ 3.4.1 ขั้นตอนวิธีการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธี CG

ในทำนองเดียวกันการปรับสภาวะเริ่มต้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ร่วมกับการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธี CG สามารถแสดงได้ในรูปที่ 3.4.2

เมื่อพิจารณาจากขั้นตอนวิธีจากรูปที่ 3.4.1 และรูปที่ 3.4.2 พบว่าวิธี CG เป็นวิธีการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น โดยการคำนวณซ้ำจนกระทั่งนอร์มของเวกเตอร์คงค้างสัมพัทธ์มีค่าน้อยกว่าค่าที่ยอมให้ (tol) จึงหยุดการคำนวณซ้ำ เมตริกซ์ปรับสภาวะเริ่มต้น $\mathbf{M}$ ในรูปที่ 3.4.2 สามารถใช้วิธีการปรับสภาวะจาโคบีในสมการที่ (3.3.3) และในขณะเดียวกันสามารถใช้วิธีปรับสภาวะแบบแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์ในสมการที่ (3.3.10) เนื่องจากเมตริกซ์ปรับสภาวะที่ใช้ร่วมกับวิธี CG จะต้องมีคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอน ดังนั้นวิธีการแยกส่วนแบบไม่สมบูรณ์ในสมการที่ (3.3.14) จึงไม่สามารถนำมาใช้ได้เนื่องจากเมตริกซ์ปรับสภาวะเริ่มต้นที่ได้จากการปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์จะไม่มีคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอน และสำหรับในกรณีที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ ไม่มีคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอน พบว่าวิธีการปรับสภาวะที่สามารถใช้ได้มีเพียงกรณีเดียวคือวิธีการปรับสภาวะแบบจาโคบีเนื่องจากวิธีการปรับสภาวะแบบจาโคบีสามารถสร้างเมตริกซ์ปรับสภาวะที่มีคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอนได้จากเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ที่ไม่มีคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอน ดังแสดงในสมการที่ (3.3.5)

วิธี CG ใช้หน่วยเก็บข้อมูลของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ ในขั้นตอนการคำนวณซ้ำร่วมกับหน่วยเก็บข้อมูลของเวกเตอร์ $\mathbf{r}$ $\mathbf{p}$ และ $\mathbf{q}$ สำหรับในกรณีของการใช้เมตริกซ์ปรับสภาวะ จะมีการเพิ่มหน่วยเก็บข้อมูลในส่วนของเมตริกซ์ปรับสภาวะ $\mathbf{M}$

$$
\begin{aligned}
&\text{Given } \mathbf{x}_0 \\
\mathbf{r}_0 &= \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \\
\mathbf{p}_0 &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}_0 \\
i &= 0 \\
&\text{While } \frac{\|\mathbf{r}_i\|}{\|\mathbf{r}_0\|} \geq tol \\
\mathbf{q} &= \mathbf{A}\mathbf{p}_i \\
\alpha &= \frac{\mathbf{r}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_i}{\mathbf{p}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{q}} \\
\mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{x}_i + \alpha\mathbf{p}_i \\
\mathbf{r}_{i+1} &= \mathbf{r}_i - \alpha\mathbf{q} \\
\xi &= \frac{\mathbf{r}_{i+1}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}_{i+1}}{\mathbf{r}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}_i} \\
\mathbf{p}_{i+1} &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}_i + \xi\mathbf{p}_i
\end{aligned}
$$

$i = i + 1$

รูปที่ 3.4.2 ขั้นตอนวิธีการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธี CG ร่วมกับการปรับสภาวะเริ่มต้น

3.5 วิธีแอลคิวสมมาตรและวิธีเวกเตอร์คงค้างน้อยที่สุด

วิธีแอลคิวสมมาตร (SYMMLQ) และวิธีเวกเตอร์คงค้างน้อยที่สุด (MINRES) เป็นวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟที่ดัดแปลงมาจากวิธีเกรเดียนต์สังยุค (CG) สำหรับปัญหาในระบบสมการเชิงเส้นที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีคุณสมบัติสมมาตรแต่ขาดคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอน จากลักษณะดังกล่าวพบว่าปัญหาค่าน้อยที่สุดของฟังก์ชันกำลังสองจากสมการที่ (3.4.1) ไม่สามารถหาคำตอบได้ในกรณีที่ค่าลักษณะจำเพาะ (eigen value) ของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีค่าเป็นลบทั้งหมด และอาจหาคำตอบไม่ได้สำหรับกรณีที่ค่าลักษณะจำเพาะของเมตริกซ์บางค่าเท่ากับศูนย์

ในกรณีที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขาดคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอน การหาเวกเตอร์คำตอบที่เหมาะสมจากปัญหาค่าน้อยที่สุดในสมการที่ (3.4.1) โดยวิธี CG ไม่สามารถทำได้ ดังนั้นในวิธี SYMMLQ การหาเวกเตอร์คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นจะพิจารณาจากเวกเตอร์คำตอบในรอบการคำนวณที่ k เมื่อ $\mathbf{x}_k \in span\{\mathbf{r}_0, \mathbf{A}\mathbf{r}_0, \ldots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{r}_0\}$ โดยที่ทำให้เงื่อนไขในสมการที่ (3.5.1) เป็นจริง

$$\langle \mathbf{r}_0 - \mathbf{A}\mathbf{x}_k, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad ; \forall \mathbf{v} \in span\{\mathbf{r}_0, \mathbf{A}\mathbf{r}_0, ..., \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{r}_0\} \qquad (3.5.1)$$

โดยที่ $\mathbf{x}_k \in span\{\mathbf{r}_0, \mathbf{Ar}_0, \ldots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{r}_0\}$ คือการประมาณค่ากาเลอคิน (Galerkin approximation) ของเวกเตอร์คำตอบ $\mathbf{x}$ สำหรับปัญหาในระบบสมการเชิงเส้นในปริภูมิย่อยไครโลฟ $span\{\mathbf{r}_0, \mathbf{Ar}_0, ..., \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{r}_0\}$ ในกรณีที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ มีคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอนผลลัพธ์ที่ได้จากสมการที่ (3.5.1) จะมีเพียงคำตอบเดียวและวิธี SYMMLQ จะมีลักษณะเทียบเท่ากับวิธี CG

วิธี MINRES สำหรับการหาคำตอบระบบสมการเชิงเส้น มีพื้นฐานในการประมาณค่าที่แตกต่างกับวิธี CG และ SYMMLQ ในรอบการคำนวณซ้ำที่ k เมื่อ $k = 0, 1, 2, \ldots$ วิธี MINRES คำนวณหาเวกเตอร์คำตอบในรอบการคำนวณที่ k โดยที่ $\mathbf{x}_k \in span\{\mathbf{r}_0, \mathbf{Ar}_0, \ldots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{r}_0\}$ ทำให้เงื่อนไขของปัญหากำลังสองน้อยที่สุดในสมการที่ (3.5.2) เป็นจริง

$$\underset{\mathbf{x} \in span(\mathbf{r}_0, \ldots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{r}_0)}{\text{Minimize}} \left\| \mathbf{r}_0 - \mathbf{Ax} \right\| \tag{3.5.2}$$

การคำนวณซ้ำเพื่อหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธี MINRES เวกเตอร์คงค้างในรอบการคำนวณที่ k กล่าวคือ $\mathbf{Ax}_k - \mathbf{r}_0$ จะพิจารณาให้มีค่าน้อยที่สุด ซึ่งเวกเตอร์คำตอบในรอบการคำนวณที่ k ถูกเรียกว่าค่าประมาณเวกเตอร์คงค้างน้อยที่สุด (minimum residual approximation) สำหรับระบบสมการเริ่มต้น $\mathbf{Ax} = \mathbf{r}_0$ ปัญหากำลังสองน้อยที่สุดจากสมการที่ (3.5.2) จะมีเพียงคำตอบเดียวเท่านั้น

ขั้นตอนวิธีในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธี SYMMLQ สามารถแสดงได้จากรูปที่ 3.5.1

$$
\begin{aligned}
&\text{Given } \mathbf{x}_0 \\
&\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \\
&\hat{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{r}_0 \\
&\delta_1 = \|\mathbf{r}_0\| \\
&\text{If } \delta_1 \neq 0 \text{ then } \mathbf{v}_1 = \hat{\mathbf{v}}_1 / \delta_1 \\
&\text{else } \mathbf{v}_1 = \hat{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{0} \\
&\bar{\mathbf{w}}_1 = \mathbf{v}_1 \text{ , } \mathbf{v}_0 = \mathbf{0} \\
&i = 1 \text{ , } s_1 = 0 \text{ , } c_1 = -1 \text{ , } \varsigma_2 = \delta_1 \\
&\text{While } \frac{\|\mathbf{r}_i\|}{\|\mathbf{r}_0\|} \geq tol \\
&\quad \hat{\mathbf{v}}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{v}_i - \delta_i \mathbf{v}_{i-1} \\
&\quad \gamma_i = \langle \hat{\mathbf{v}}_{i+1}, \mathbf{v}_i \rangle \\
&\quad \hat{\mathbf{v}}_{i+1} = \hat{\mathbf{v}}_{i+1} - \gamma_i \mathbf{v}_i \\
&\quad \delta_{i+1} = \|\hat{\mathbf{v}}_{i+1}\| \\
&\quad \text{If } \delta_{i+1} \neq 0 \text{ then } \mathbf{v}_{i+1} = \hat{\mathbf{v}}_{i+1} / \delta_{i+1} \\
&\quad \text{else } \mathbf{v}_{i+1} = \hat{\mathbf{v}}_{i+1} = \mathbf{0} \\
&\quad \bar{d}_i = s_i \tilde{e}_i - c_i \gamma_i \text{ , } e_i = c_i \tilde{e}_i + s_i \gamma_i \\
i = i+1 \quad &\quad f_{i+1} = s_i \delta_{i+1} \text{ , } \tilde{e}_{i+1} = -c_i \delta_{i+1} \\
&\quad d_i = \sqrt{\bar{d}_i^2 + \delta_{i+1}^2} \\
&\quad c_{i+1} = \bar{d}_i / d_i \text{ , } s_{i+1} = \delta_{i+1} / d_i \\
&\quad \varsigma_1 = \varsigma_2 - e_i \varsigma_3 \text{ , } \varsigma_2 = -f_{i+1} \varsigma_3 \text{ , } \varsigma_3 = \varsigma_1 / d_i \\
&\quad \mathbf{w}_i = c_{i+1} \bar{\mathbf{w}}_i + s_{i+1} \mathbf{v}_{i+1} \\
&\quad \bar{\mathbf{w}}_{i+1} = s_{i+1} \bar{\mathbf{w}}_i - c_{i+1} \mathbf{v}_{i+1} \\
&\quad \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + \varsigma_1 \mathbf{w}_i \\
&\quad \text{If } i = 1 \text{ then } res = \|\mathbf{r}_0\| . |s_2| \\
&\quad \text{else } res = res . |s_{i+1}| \\
&\quad \|\mathbf{r}_i\| = res / c_{i+1} \\
&\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i + (\varsigma_3 s_{i+1} / c_{i+1}) \bar{\mathbf{w}}_{i+1}
\end{aligned}
$$

รูปที่ 3.5.1 ขั้นตอนวิธีการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธี SYMMLQ

ในทำนองเดียวกันการปรับสภาวะเริ่มต้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ร่วมกับการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธี SYMMLQ สามารถแสดงได้ในรูปที่ 3.5.2

Given $\mathbf{x}_0$

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$$

$$\hat{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{r}_0$$

$$\hat{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}_0$$

$$\delta_1 = \langle \hat{\mathbf{u}}_1, \mathbf{r}_0 \rangle, \ \|\mathbf{r}_0\| = \sqrt{\delta_1}$$

If $\delta_1 \neq 0$ then $\mathbf{v}_1 = \hat{\mathbf{v}}_1 / \delta_1$, $\hat{\mathbf{u}}_1 = \hat{\mathbf{u}}_1 / \delta_1$

else $\mathbf{v}_1 = \hat{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{0}$

$$\overline{\mathbf{w}}_1 = \hat{\mathbf{u}}_1 \ , \ \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$$

$$i = 1 \ , \ s_1 = 0 \ , \ c_1 = -1 \ , \ \varsigma_2 = \delta_1$$

While $\dfrac{\|\mathbf{r}_i\|}{\|\mathbf{r}_0\|} \geq tol$

$$\hat{\mathbf{v}}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{v}_i - \delta_i \mathbf{v}_{i-1}$$

$$\gamma_i = \langle \hat{\mathbf{v}}_{i+1}, \hat{\mathbf{u}}_i \rangle$$

$$\hat{\mathbf{v}}_{i+1} = \hat{\mathbf{v}}_{i+1} - \gamma_i \mathbf{v}_i$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{i+1} = \mathbf{M}^{-1}\hat{\mathbf{v}}_{i+1}$$

$$\delta_{i+1} = \langle \hat{\mathbf{v}}_{i+1}, \hat{\mathbf{u}}_{i+1} \rangle \ , \ \delta_{i+1} = \sqrt{\delta_{i+1}}$$

If $\delta_{i+1} \neq 0$ then $\mathbf{v}_{i+1} = \hat{\mathbf{v}}_{i+1} / \delta_{i+1}$, $\hat{\mathbf{u}}_{i+1} = \hat{\mathbf{u}}_{i+1} / \delta_{i+1}$

else $\mathbf{v}_{i+1} = \hat{\mathbf{v}}_{i+1} = \mathbf{0}$

$$\bar{d}_i = s_i \tilde{e}_i - c_i \gamma_i \ , \ e_i = c_i \tilde{e}_i + s_i \gamma_i$$

$i = i + 1$

$$f_{i+1} = s_i \delta_{i+1} \ , \ \tilde{e}_{i+1} = -c_i \delta_{i+1}$$

$$d_i = \sqrt{\bar{d}_i^{\,2} + \delta_{i+1}^2}$$

$$c_{i+1} = \bar{d}_i / d_i \ , \ s_{i+1} = \delta_{i+1} / d_i$$

$$\varsigma_1 = \varsigma_2 - e_i \varsigma_3 \ , \ \varsigma_2 = -f_{i+1}\varsigma_3 \ , \ \varsigma_3 = \varsigma_1 / d_i$$

$$\mathbf{w}_i = c_{i+1}\overline{\mathbf{w}}_i + s_{i+1}\mathbf{v}_{i+1}$$

$$\overline{\mathbf{w}}_{i+1} = s_{i+1}\overline{\mathbf{w}}_i - c_{i+1}\mathbf{v}_{i+1}$$

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + \varsigma_1 \mathbf{w}_i$$

If $i = 1$ then $res = \|\mathbf{r}_0\| . |s_2|$

else $res = res . |s_{i+1}|$

$$\|\mathbf{r}_i\| = res / c_{i+1}$$

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i + (\varsigma_3 s_{i+1} / c_{i+1})\overline{\mathbf{w}}_{i+1}$$

รูปที่ 3.5.2 ขั้นตอนวิธีการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธี SYMMLQ ร่วมกับการปรับสภาวะเริ่มต้น

วิธี SYMMLQ ใช้หน่วยเก็บข้อมูลของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ ในขั้นตอนการคำนวณซ้ำร่วมกับหน่วยเก็บข้อมูลของเวกเตอร์ $\hat{\mathbf{v}}$ $\mathbf{v}_i$ $\mathbf{v}_{i-1}$ และ $\bar{\mathbf{w}}$ สำหรับในกรณีของการใช้เมตริกซ์ปรับสภาวะหน่วยเก็บข้อมูลที่เพิ่มขึ้นมาคือเวกเตอร์ $\hat{\mathbf{u}}$ และ เมตริกซ์ปรับสภาวะ $\mathbf{M}$

สำหรับขั้นตอนวิธีในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธี MINRES สามารถแสดงได้ใน รูปที่ 3.5.3

$$
\begin{aligned}
&\text{Given } \mathbf{x}_0 \\
&\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \\
&\hat{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{r}_0 \\
&\delta_1 = \|\mathbf{r}_0\| \\
&\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}\ ,\ \mathbf{m}_0 = \mathbf{m}_{-1} = \mathbf{0} \\
&i = 1 \\
&\text{While } \frac{\|\mathbf{r}_i\|}{\|\mathbf{r}_0\|} \geq tol \\
&\quad \text{If } \delta_i \neq 0 \text{ then } \mathbf{v}_i = \hat{\mathbf{v}}_i / \delta_i \\
&\quad \text{else } \mathbf{v}_i = \hat{\mathbf{v}}_i = \mathbf{0} \\
&\quad \hat{\mathbf{v}}_{i+1} = \mathbf{A}\mathbf{v}_i - \delta_i \mathbf{v}_{i-1} \\
&\quad \gamma_i = \langle \hat{\mathbf{v}}_{i+1}, \mathbf{v}_i \rangle \\
&\quad \hat{\mathbf{v}}_{i+1} = \hat{\mathbf{v}}_{i+1} - \gamma_i \mathbf{v}_i \\
&\quad \delta_{i+1} = \|\hat{\mathbf{v}}_{i+1}\| \\
i = i+1 \qquad &\quad \bar{d}_i = s_i \tilde{e}_i - c_i \gamma_i\ ,\ e_i = c_i \tilde{e}_i + s_i \gamma_i \\
&\quad f_{i+1} = s_i \delta_{i+1}\ ,\ \tilde{e}_{i+1} = -c_i \delta_{i+1} \\
&\quad d_i = \sqrt{\bar{d}_i^2 + \delta_{i+1}^2} \\
&\quad c_{i+1} = \bar{d}_i / d_i\ ,\ s_{i+1} = \delta_{i+1} / d_i \\
&\quad \text{If } i = 1 \text{ then } \tau_1 = \|\mathbf{r}_0\| c_2 \\
&\quad \text{else } \tau_i = \|\mathbf{r}_0\| s_2 s_3 \ldots s_i c_{i+1} \\
&\quad \mathbf{m}_i = (\mathbf{v}_i - e_i \mathbf{m}_{i-1} - f_i \mathbf{m}_{i-2}) / d_i \\
&\quad \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + \tau_i \mathbf{m}_i \\
&\quad \|\mathbf{r}_i\| = |s_{i+1}| \|\mathbf{r}_{i-1}\|
\end{aligned}
$$

รูปที่ 3.5.3 ขั้นตอนวิธีการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธี MINRES

การปรับสภาวะเริ่มต้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ร่วมกับการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธี MINRES สามารถแสดงได้ในรูปที่ 3.5.4

$$
\begin{aligned}
&\text{Given } \mathbf{x}_0 \\
&\hat{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \\
&\hat{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{M}^{-1}\hat{\mathbf{u}}_1 \\
&\delta_1 = \langle \hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{u}}_1 \rangle \\
&\mathbf{v}_0 = \mathbf{0} \;,\; \|\mathbf{r}_0\| = \sqrt{\delta_1} \\
&i = 1 \;,\; \hat{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{0} \;,\; \mathbf{m}_0 = \mathbf{m}_{-1} = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{While } \frac{\|\mathbf{r}_i\|}{\|\mathbf{r}_0\|} \ge tol \\
&\quad \text{If } \delta_i \ne 0 \text{ then } \mathbf{v}_i = \hat{\mathbf{v}}_i / \delta_i \\
&\quad \text{else } \mathbf{v}_i = \hat{\mathbf{v}}_i = \mathbf{0} \\
&\quad \hat{\mathbf{u}}_{i+1} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{v}}_i - \delta_i \mathbf{v}_{i-1} \\
&\quad \gamma_i = \langle \hat{\mathbf{v}}_i, \hat{\mathbf{u}}_{i+1} \rangle \\
&\quad \hat{\mathbf{u}}_{i+1} = \hat{\mathbf{u}}_{i+1} - \gamma_i \mathbf{v}_i \\
&\quad \hat{\mathbf{v}}_{i+1} = \mathbf{M}^{-1}\hat{\mathbf{u}}_{i+1} \\
&\quad \delta_{i+1} = \langle \hat{\mathbf{v}}_{i+1}, \hat{\mathbf{u}}_{i+1} \rangle \;,\; \delta_{i+1} = \sqrt{\delta_{i+1}} \\
i = i+1 &\quad \bar{d}_i = s_i \tilde{e}_i - c_i \gamma_i \;,\; e_i = c_i \tilde{e}_i + s_i \gamma_i \\
&\quad f_{i+1} = s_i \delta_{i+1} \;,\; \tilde{e}_{i+1} = -c_i \delta_{i+1} \\
&\quad d_i = \sqrt{\bar{d}_i^{\,2} + \delta_{i+1}^2} \\
&\quad c_{i+1} = \bar{d}_i / d_i \;,\; s_{i+1} = \delta_{i+1} / d_i \\
&\quad \tau_i = c_{i+1} \|\mathbf{r}_{i-1}\| \\
&\quad \mathbf{m}_i = (\hat{\mathbf{v}}_i - e_i \mathbf{m}_{i-1} - f_i \mathbf{m}_{i-2}) / d_i \\
&\quad \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + \tau_i \mathbf{m}_i \\
&\quad \|\mathbf{r}_i\| = |s_{i+1}| \, \|\mathbf{r}_{i-1}\|
\end{aligned}
$$

รูปที่ 3.5.4 ขั้นตอนวิธีการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธี MINRES ร่วมกับการปรับสภาวะเริ่มต้น

วิธี MINRES ใช้หน่วยเก็บข้อมูลของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ ในขั้นตอนการคำนวณซ้ำร่วมกับหน่วยเก็บข้อมูลของเวกเตอร์ $\hat{\mathbf{v}}$ $\mathbf{v}_i$ $\mathbf{v}_{i-1}$ $\mathbf{m}_i$ และ $\mathbf{m}_{i-1}$ สำหรับในกรณีของการใช้เมตริกซ์ปรับสภาวะ หน่วยเก็บข้อมูลที่เพิ่มขึ้นมาได้แก่เวกเตอร์ $\hat{\mathbf{u}}$ และเมตริกซ์ปรับสภาวะ $\mathbf{M}$

กล่าวโดยสรุปสำหรับวิธี SYMMLQ และวิธี MINRES เมตริกซ์ปรับสภาวะเริ่มต้น $\mathbf{M}$ สามารถใช้วิธีการปรับสภาวะจาโคบีจากสมการที่ (3.3.3) และสามารถใช้วิธีปรับสภาวะแบบแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์จากสมการที่ (3.3.10) ถึงแม้ว่าวิธี SYMMLQ และ MINRES สามารถหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในกรณีที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ไม่มีคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอน แต่เมตริกซ์ปรับสภาวะที่ใช้ร่วมกับวิธี SYMMLQ และ

MINRES จะต้องมีคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอนเท่านั้น ดังนั้นวิธีการแยกส่วนแบบไม่สมบูรณ์จากสมการที่ (3.3.14) จึงไม่สามารถนำมาใช้ได้ นอกจากนี้ในกรณีที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ ขาดคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอน จะสามารถใช้วิธีการปรับสภาวะแบบจาโคบีได้เพียงวิธีเดียว เช่นเดียวกับวิธี CG

3.6 วิธีเวกเตอร์คงค้างเสมือนน้อยที่สุดสมมาตร

วิธีเวกเตอร์คงค้างเสมือนน้อยที่สุดสมมาตร (SQMR) เป็นวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟอีกวิธีหนึ่ง ที่สามารถหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในกรณีที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้นไม่มีคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอน วิธี SQMR พัฒนามาจากวิธี เวกเตอร์คงค้างเสมือนน้อยที่สุด (Quasi-Minimal Residual) สำหรับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ที่มีคุณสมบัติสมมาตร ในกรณีที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้นมีคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอนวิธี SQMR จะมีลักษณะเทียบเท่ากับวิธี MINRES รายละเอียดของวิธี SQMR สามารถศึกษาได้จากงานวิจัยของ Freund (1994)

ขั้นตอนวิธีในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธี SQMR สามารถแสดงได้จากรูปที่ 3.6.1

$$
\begin{aligned}
&\text{Given } \mathbf{x}_0 \\
\mathbf{r}_0 &= \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \;,\; \mathbf{q}_0 = \mathbf{r}_0 \\
\tau_0 &= \|\mathbf{r}_0\| \;,\; \rho_0 = \mathbf{r}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_0 \\
i &= 1 \;,\; \vartheta_0 = 0 \\
&\text{While } \frac{\|\mathbf{r}_i\|}{\|\mathbf{r}_0\|} \geq tol \\
\mathbf{t} &= \mathbf{A}\mathbf{q}_{i-1} \\
\sigma_{i-1} &= \mathbf{q}_{i-1}^{\mathrm{T}}\mathbf{t} \\
\alpha_{i-1} &= \rho_{i-1} / \sigma_{i-1} \\
\mathbf{r}_i &= \mathbf{r}_{i-1} - \alpha_{i-1}\mathbf{t} \\
\vartheta_i &= \|\mathbf{r}_i\| / \tau_{i-1} \;,\; c_i = 1/\sqrt{1+\vartheta_i^2} \;,\; \tau_i = \tau_{i-1}\vartheta_i c_i \\
\mathbf{d}_i &= c_i^2\vartheta_{i-1}^2\mathbf{d}_{i-1} + c_i^2\alpha_{i-1}\mathbf{q}_{i-1} \\
\mathbf{x}_i &= \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{d}_i \\
\rho_i &= \mathbf{r}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_i \\
\|\mathbf{r}_i\| &= \sqrt{\rho_i} \\
\beta_i &= \rho_i / \rho_{i-1} \\
\mathbf{q}_i &= \mathbf{r}_i + \beta_i\mathbf{q}_{i-1}
\end{aligned}
$$

$i = i + 1$

รูปที่ 3.6.1 ขั้นตอนวิธีการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธี SQMR

การปรับสภาวะเริ่มต้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ร่วมกับการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธี SQMR สามารถแสดงได้ในรูปที่ 3.6.2

$$
\begin{aligned}
&\text{Given } \mathbf{x}_0 \\
\mathbf{r}_0 &= \mathbf{b}-\mathbf{A}\mathbf{x}_0 \\
\tau_0 &= \|\mathbf{r}_0\| \\
\mathbf{q}_0 &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}_0 \\
i &= 1\ ,\ \vartheta_0 = 0\ ,\ \rho_0 = \mathbf{r}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{q}_0 \\
&\text{While } \frac{\|\mathbf{r}_i\|}{\|\mathbf{r}_0\|} \geq tol \\
\mathbf{t} &= \mathbf{A}\mathbf{q}_{i-1} \\
\sigma_{i-1} &= \mathbf{q}_{i-1}^{\mathrm{T}}\mathbf{t} \\
\alpha_{i-1} &= \rho_{i-1}/\sigma_{i-1} \\
\mathbf{r}_i &= \mathbf{r}_{i-1}-\alpha_{i-1}\mathbf{t} \\
\vartheta_i &= \|\mathbf{r}_i\|/\tau_{i-1}\ ,\ c_i = 1/\sqrt{1+\vartheta_i^2}\ ,\ \tau_i = \tau_{i-1}\vartheta_i c_i \\
\mathbf{d}_i &= c_i^2\vartheta_{i-1}^2\mathbf{d}_{i-1} + c_i^2\alpha_{i-1}\mathbf{q}_{i-1} \\
\mathbf{x}_i &= \mathbf{x}_{i-1}+\mathbf{d}_i \\
\mathbf{u}_i &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{r}_i \\
\rho_i &= \mathbf{r}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_i \\
\|\mathbf{r}_i\| &= \sqrt{\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_i} \\
\beta_i &= \rho_i/\rho_{i-1} \\
\mathbf{q}_i &= \mathbf{u}_i + \beta_i\mathbf{q}_{i-1} \\
i &= i+1
\end{aligned}
$$

รูปที่ 3.6.2 ขั้นตอนวิธีการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธี SQMR ร่วมกับการปรับสภาวะเริ่มต้น

วิธี SQMR ใช้หน่วยเก็บข้อมูลของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ ในขั้นตอนการคำนวณซ้ำร่วมกับหน่วยเก็บข้อมูลของเวกเตอร์ $\mathbf{r}$ $\mathbf{d}$ $\mathbf{q}$ และ $\mathbf{t}$ สำหรับในกรณีของการใช้เมตริกซ์ปรับสภาวะ หน่วยเก็บข้อมูลที่เพิ่มขึ้นมาได้แก่เวกเตอร์ $\mathbf{u}$ และเมตริกซ์ปรับสภาวะ $\mathbf{M}$

วิธี SQMR เป็นวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟที่มีความยืดหยุ่นในการใช้เมตริกซ์ปรับสภาวะเริ่มต้นมากที่สุด เมื่อเปรียบเทียบกับ วิธี CG SYMMLQ และ MINRES กล่าวคือ วิธี SQMR ต้องการเมตริกซ์ปรับสภาวะที่มีคุณสมบัติสมมาตรเท่านั้น โดยไม่จำเป็นต้องมีคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอน ดังนั้นเมตริกซ์ปรับสภาวะทุกวิธีที่กล่าวมาข้างต้นสามารถนำมาใช้กับวิธี SQMR ได้

3.7 บทสรุป

วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟเป็นวิธีการคำนวณซ้ำที่ใช้สำหรับการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น โดยที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้นไม่ใช่เมตริกซ์เอกฐานและ มีคุณสมบัติสมมาตร วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟที่นำมาศึกษามีอยู่ 4 วิธีได้แก่ วิธี เกรเดียนต์สังยุค (CG) วิธีแอลคิวสมมาตร (SYMMLQ) วิธีเวกเตอร์คงค้างน้อยที่สุด (MINRES) และวิธีเวกเตอร์คงค้างเสมือนน้อยที่สุดสมมาตร (SQMR) โดยในทางทฤษฎีวิธี CG สามารถหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นเมื่อเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอนเท่านั้นในขณะที่ วิธี SYMMLQ MINRES และ SQMR สามารถหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นเมื่อเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ขาดคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอนได้

นอกจากนี้วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟสามารถเพิ่มอัตราการลู่เข้าของคำตอบได้จากการปรับสภาวะเบื้องต้นของระบบสมการเชิงเส้นโดยอาศัยวิธีการปรับสภาวะแบบต่างๆ ซึ่งได้แก่ วิธีปรับสภาวะจาโคบี วิธีปรับสภาวะแบบแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์ และวิธีปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ เนื่องจากเมตริกซ์ปรับสภาวะที่สามารถใช้ได้กับวิธี CG SYMMLQ และ MINRES จะต้องมีคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอนเท่านั้น ดังนั้นวิธีการปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์จึงไม่สามารถนำมาใช้ร่วมกับวิธีดังกล่าวได้ ในขณะที่วิธี SQMR สามารถใช้เมตริกซ์ปรับสภาวะได้ทุกวิธี สำหรับในกรณีที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้นขาดคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอน วิธีปรับสภาวะที่นำมาใช้ได้กับวิธี CG SYMMLQ และ MINRES มีเพียงวิธีการปรับสภาวะแบบจาโคบีเท่านั้น ในขณะที่วิธี SQMR สามารถใช้วิธีการปรับสภาวะแบบจาโคบีและวิธีการปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ได้ สำหรับหน่วยเก็บข้อมูลซึ่งแสดงในรูปของจำนวนเมตริกซ์และเวกเตอร์ที่ต้องใช้ในขั้นตอนการคำนวณซ้ำของวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟแต่ละวิธีสามารถแสดงได้ในตารางที่ 3.7.1

ตารางที่ 3.7.1 จำนวนเมตริกซ์และเวกเตอร์ที่ใช้สำหรับวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟแต่ละวิธี

วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ	เมตริกซ์สัมประสิทธิ์	เมตริกซ์ปรับสภาวะ	เวกเตอร์
1. เกรเดียนต์สังยุค	1	-	3
2. เกรเดียนต์สังยุค ร่วมกับการปรับสภาวะเบื้องต้น	1	1	3
3. แอลคิวสมมาตร	1	-	4
4. แอลคิวสมมาตร ร่วมกับการปรับสภาวะเบื้องต้น	1	1	5
5. เวกเตอร์คงค้างน้อยที่สุด	1	-	5
6. เวกเตอร์คงค้างน้อยที่สุด ร่วมกับการปรับสภาวะเบื้องต้น	1	1	6
7. เวกเตอร์คงค้างเสมือนน้อยที่สุดสมมาตร	1	-	4
8. เวกเตอร์คงค้างเสมือนน้อยที่สุดสมมาตร ร่วมกับการปรับสภาวะเบื้องต้น	1	1	5

บทที่ 4

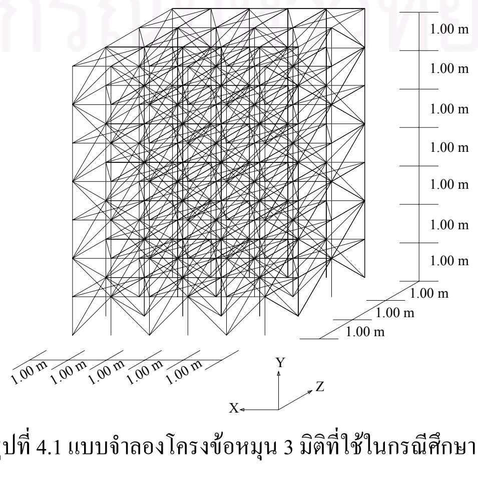
กรณีศึกษาและเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

4.1 ความนำ

เนื้อหาในบทนี้จะเป็นการทดลองเปรียบเทียบประสิทธิภาพการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในขั้นตอนของการหาค่าต่ำสุดในหนึ่งมิติ (one-dimensional minimization) ซึ่งเป็นขั้นตอนที่มีความสำคัญและใช้เวลามากที่สุดในขั้นตอนวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างโดยวิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติกโปรแกรมมิง (Recursive- Quadratic Programming : RQP) ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 2 ประสิทธิภาพในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่พิจารณาแบ่งออกได้เป็นประสิทธิภาพด้านเวลาที่ใช้ในการหาคำตอบ และประสิทธิภาพทางด้านหน่วยเก็บข้อมูล การเปรียบเทียบประสิทธิภาพจะพิจารณาระหว่างวิธีแยกแบบแอลยู (LU-decomposition) และวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟซึ่งได้แก่ วิธีเกรเดียนต์สังยุค (CG) วิธีแอลคิวสมมาตร (SYMMLQ) วิธีเวกเตอร์คงค้างน้อยที่สุด (MINRES) และวิธีเวกเตอร์คงค้างเสมือนน้อยที่สุดสมมาตร (SQMR) โดยพิจารณาทั้งในกรณีที่ใช้ข้อมูลรูปแบบการสั่นไหวครบทุกระดับขั้นความเสรีและในกรณีที่ไม่สามารถใช้ข้อมูลรูปแบบการสั่นไหวครบทุกระดับขั้นความเสรี อีกทั้งได้มีการนำวิธีปรับสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เข้ามาใช้ร่วมกับวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสำหรับแต่ละกรณี

4.2 แบบจำลองโครงสร้างที่ใช้ในกรณีศึกษา

แบบจำลองที่ใช้ในกรณีศึกษาคือแบบจำลองโครงข้อหมุน 3 มิติ มีสภาพฐานรองรับของโครงสร้างเป็นแบบยึดหมุน (hinge support) และมีค่าสติฟเนสพารามิเตอร์ของชิ้นส่วนโครงข้อหมุนดังแสดงรายละเอียดในบทที่ 2



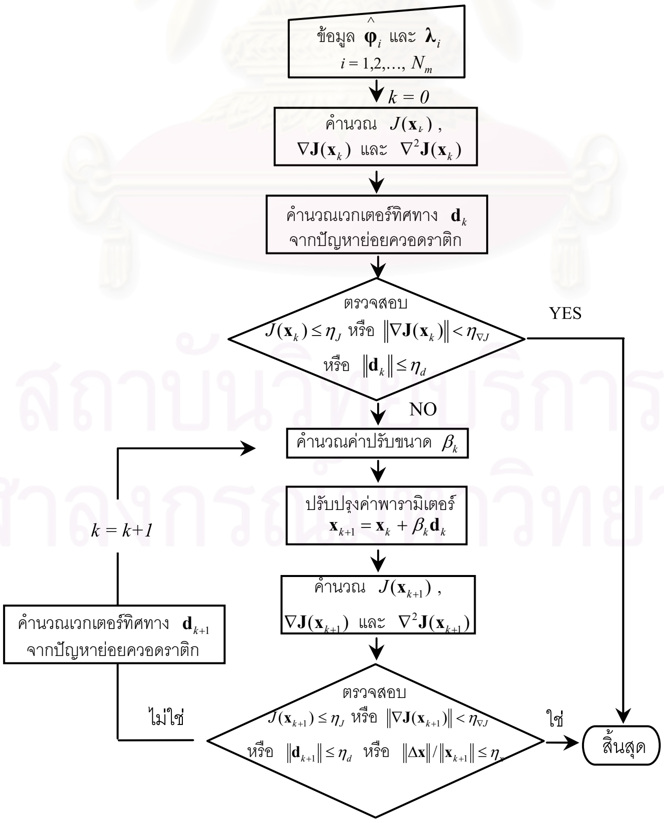
รูปที่ 4.1 แบบจำลองโครงข้อหมุน 3 มิติที่ใช้ในกรณีศึกษา

แบบจำลองโครงข้อหมุนในรูปที่ 4.1 มีข้อมูลเบื้องต้นดังนี้

จำนวนของชิ้นส่วน	=	805	ชิ้นส่วน
จำนวนจุดต่อ	=	192	จุด
จำนวนระดับขั้นความเสรี	=	504	ระดับขั้น
จำนวนกลุ่มของพารามิเตอร์	=	42	กลุ่ม
สติฟเนสพารามิเตอร์ (EA) ในแต่ละกลุ่ม	=	40,000,000	กิโลกรัม
น้ำหนักต่อหน่วยความยาว (M) ในแต่ละกลุ่ม	=	15	กิโลกรัม/เมตร

4.3 แนวทางในการประเมินประสิทธิภาพ

การประเมินประสิทธิภาพการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในแต่ละวิธีที่เลือกใช้จะพิจารณาในเรื่องของเวลาในการหาคำตอบและขนาดของหน่วยเก็บข้อมูลที่ใช้ โดยใช้วิธีการเชิงตัวเลขเพื่อสร้างแบบจำลองโครงข้อหมุน3 มิติ ในรูปที่ 4.2.1 ภายใต้การสั่นอิสระแบบไร้ความหน่วงเพื่อจำลองความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหวในแต่ละโหมด กระบวนการในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่พิจารณาอยู่ในขั้นตอนของการหาค่าน้อยที่สุดในหนึ่งมิติ เพื่อคำนวณค่าปรับขนาด β_k ในรอบการคำนวณที่ k



รูปที่ 4.2 ขั้นตอนวิธีในการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติกโปรแกรมมิง

จากการศึกษาถึงขั้นตอนการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติกโปรแกรมมิงในบทที่ 2 พบว่าขั้นตอนในการหาค่าปรับขนาด β_k โดยวิธีโกลเดนเซคชัน ใช้เวลาในการคำนวณมากที่สุด ซึ่งในขั้นตอนของวิธีโกลเดนเซคชันนั้นเกี่ยวข้องกับการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นจำนวนมาก ดังนั้นอาจกล่าวได้ว่าเวลาในการคำนวณค่าปรับขนาดขึ้นอยู่กับเวลาในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

$$\left[\mathbf{K}(\mathbf{x})-\lambda_i\bar{\mathbf{M}}\right]\boldsymbol{\varphi}_i^c \quad = \quad \lambda_i\hat{\mathbf{M}}\hat{\boldsymbol{\varphi}}_i \qquad ;\ i=1,2,...,nlc \qquad (4.3.1)$$

สมการที่ (4.3.1) แสดงถึงระบบสมการเชิงเส้นที่เกี่ยวข้องในขั้นตอนการคำนวณค่าปรับขนาดโดยวิธีโกลเดนเซคชัน โดยที่ $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ คือ สติฟเนสเมตริกซ์ของโครงสร้างที่ประกอบด้วยเซตของค่าพารามิเตอร์ $\mathbf{x}$ $\bar{\mathbf{M}}$ คือเมตริกซ์มวลของโครงสร้างที่มีตำแหน่งตรงกับระดับขั้นความเสรีที่ไม่ได้วัดข้อมูล และ $\hat{\mathbf{M}}$ คือเมตริกซ์มวลของโครงสร้างที่มีตำแหน่งตรงกับระดับขั้นความเสรีที่วัดข้อมูล λ_i คือความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างที่สอดคล้องกับรูปแบบการสั่นไหวที่วัดข้อมูล $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_i$ ในโหมดที่ i เมื่อ nlc คือจำนวนโหมดที่ทำการวัดข้อมูล และ $\boldsymbol{\varphi}_i^c$ คือรูปแบบการสั่นไหวเทียบเท่าจากการคำนวณในโหมดที่ i

สมการที่ (4.3.1) สามารถเขียนใหม่ได้ในรูปของ

$$\mathbf{B}_i(\mathbf{x})\boldsymbol{\varphi}_i^c \quad = \quad \mathbf{f}_i \qquad ;\ i=1,2,...,nlc \qquad (4.3.2)$$

เมื่อ $\mathbf{B}_i(\mathbf{x})=\left[\mathbf{K}(\mathbf{x})-\lambda_i\bar{\mathbf{M}}\right]$ และ $\mathbf{f}_i=\lambda_i\hat{\mathbf{M}}\hat{\boldsymbol{\varphi}}_i$ โดยที่สามารถคำนวณหารูปแบบการสั่นไหวเทียบเท่าในโหมดที่ i ($\boldsymbol{\varphi}_i^c$) ได้จากการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่ (4.3.2) เมื่อ $\mathbf{B}_i(\mathbf{x})$ ไม่เป็นเมตริกซ์เอกฐาน (non-singular matrix)

ในกรณีที่แต่ละโหมดสามารถวัดรูปแบบการสั่นไหวได้ทุกระดับขั้นความเสรี เมตริกซ์มวลของโครงสร้างที่มีตำแหน่งตรงกับระดับขั้นความเสรีที่ไม่ได้วัดข้อมูลจะมีค่า $\bar{\mathbf{M}}=\mathbf{0}$ ส่งผลให้ $\mathbf{B}_i(\mathbf{x})$ มีคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอนเนื่องจากสติฟเนสเมตริกซ์ของโครงสร้าง $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ มีคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอน ในทางตรงกันข้ามสำหรับกรณีที่แต่ละโหมดไม่สามารถวัดรูปแบบการสั่นไหวได้ทุกระดับขั้นความเสรี เมตริกซ์มวลของโครงสร้าง $\bar{\mathbf{M}}$ จะมีค่าในตำแหน่งที่ไม่ได้วัดข้อมูล ส่งผลให้ $\mathbf{B}_i(\mathbf{x})$ สามารถสูญเสียคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอนโดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อจำนวนของระดับขั้นความเสรีที่ไม่ได้วัดข้อมูลเพิ่มมากขึ้น หรือเมื่อทำการวัดข้อมูลในโหมดที่มีค่าของความถี่ธรรมชาติมากขึ้น

จะเห็นได้ว่าจำนวนระดับขั้นความเสรีของรูปแบบการสั่นไหวที่ทำการวัดข้อมูลส่งผลต่อคุณสมบัติความเป็นบวกแน่นอนของ $\mathbf{B}_i(\mathbf{x})$ ซึ่งจะส่งผลถึงวิธีที่เลือกใช้ในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟดังที่ได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 3 ดังนั้นในกรณีศึกษาต่อไปนี้จะเป็นการประเมินประสิทธิภาพการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในขั้นตอนของการหาค่าปรับขนาด ตามสมการที่ (4.3.2) โดยจะพิจารณา

ในกรณีที่สามารถวัดรูปแบบการสั่นไหวได้ครบทุกระดับขั้นความเสรี และกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้เพียงบางระดับขั้นความเสรี เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพด้านเวลาในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นระหว่างวิธีแยกแบบแอลยู และวิธีไครโลฟสับเปซในแต่ละวิธี พร้อมทั้งสรุปวิธีการที่เหมาะสมในแต่ละกรณีศึกษา

4.4 การทดลองด้วยวิธีเชิงตัวเลข

การทดลองด้วยวิธีเชิงตัวเลขในกรณีศึกษานี้ จะทำการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโครงข้อหมุน 3 มิติ ที่มีรูปร่างและคุณสมบัติดังที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ 4.2 การสร้างแบบจำลองเริ่มจากการกำหนดค่าสติฟเนสพารามิเตอร์ และน้ำหนักต่อหน่วยความยาวให้กับแต่ละกลุ่มของชิ้นส่วนโครงสร้าง จากนั้นใช้วิธีทางคณิตศาสตร์ในการวิเคราะห์หาความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหวในทุกโหมดของโครงสร้าง ขั้นตอนต่อมาจึงทำการกำหนดระดับขั้นความเสรีที่ทำการวัดข้อมูลแบบสุ่ม โดยให้กระจายครอบคลุมระดับขั้นความเสรีทั้งหมดของโครงสร้าง ซึ่งสามารถแบ่งกรณีศึกษาออกได้เป็น 4 กรณี ได้แก่ กรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวครบทุกระดับขั้นความเสรี และกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้เพียง 90% 50% และ 10% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมดตามลำดับ ในขณะที่ข้อมูลของความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหวสามารถวัดได้ครบทุกโหมดและสมมุติให้ไม่มีความคลาดเคลื่อนของข้อมูลจากการวัด

ในกรณีศึกษาดังกล่าวนี้สำหรับวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟได้มีการกำหนดเวกเตอร์คำตอบเริ่มต้นเป็นเวกเตอร์ศูนย์ (null vector) กล่าวคือ $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ และได้กำหนดเกณฑ์ในการลู่เข้าของคำตอบของแต่ละวิธีในตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1 เกณฑ์ในการลู่เข้าของคำตอบของวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ

วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ	นอร์มของเวกเตอร์คงค้างสัมพัทธ์ ($\frac{\|\mathbf{r}_i\|_2}{\|\mathbf{r}_0\|_2}$)
1. เกรเดียนต์สังยุค (CG)	1×10^{-8}
2. แอลคิวสมมาตร (SYMMLQ)	1×10^{-8}
3. เวกเตอร์คงค้างน้อยที่สุด (MINRES)	1×10^{-8}
4. เวกเตอร์คงค้างเสมือนน้อยที่สุดสมมาตร (SQMR)	1×10^{-8}

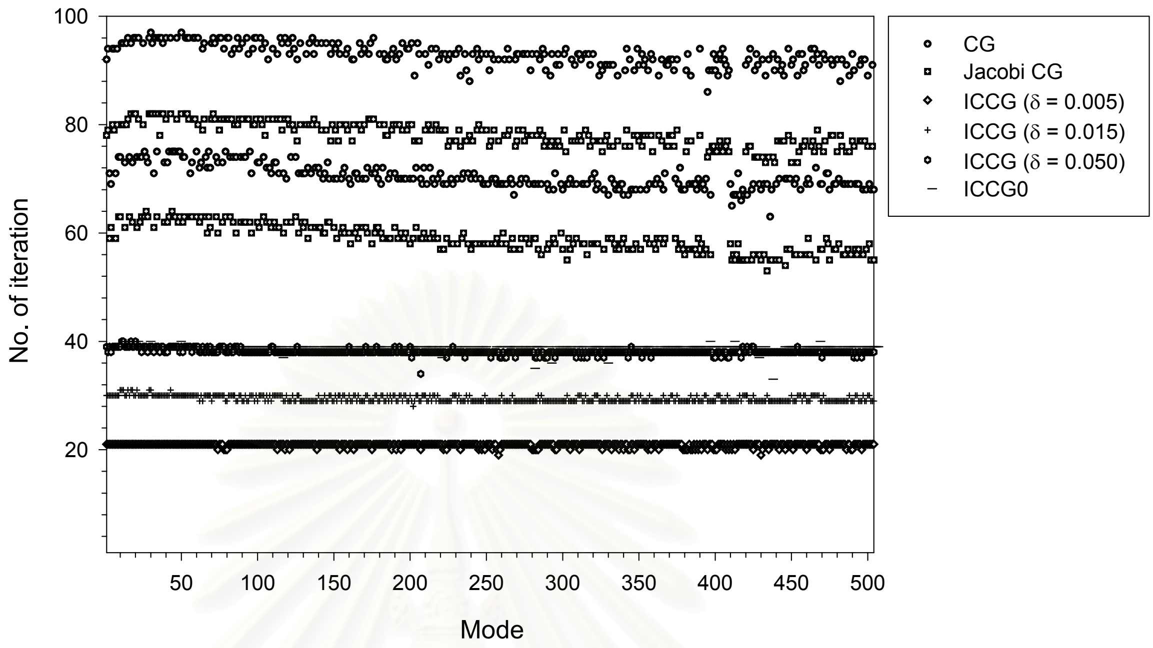
สำหรับการเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างวิธีแยกแบบแอลยูและวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ จะพิจารณาทั้งประสิทธิภาพทางด้านเวลาในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น และจำนวนหน่วยเก็บข้อมูลโดยนำวิธีการปรับสภาวะเริ่มต้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แต่ละวิธีเข้ามาใช้ในการทดลองด้วย สำหรับผลการศึกษาในแต่ละกรณีศึกษาจะแสดงในขั้นตอนต่อไป

4.4.1 กรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ครบทุกระดับขั้นความเสรีในแต่ละโหมด

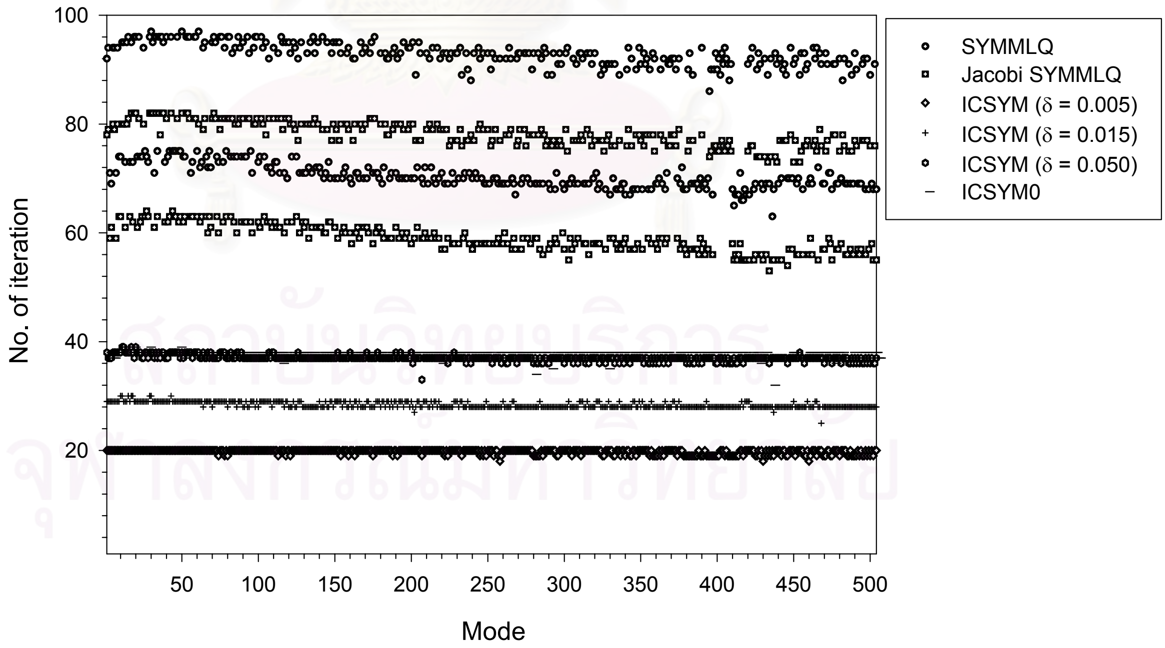
ในกรณีนี้ $\mathbf{B}_i(\mathbf{x})$ จากสมการที่ (4.3.2) จะมีคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอนในทุกโหมดของการวัดข้อมูล รูปที่ 4.3 แสดงถึงจำนวนรอบการคำนวณซ้ำในแต่ละโหมดของวิธี CG และวิธี SYMMLQ ส่วนรูปที่ 4.4 แสดงถึงจำนวนรอบการคำนวณซ้ำในแต่ละโหมดของวิธี MINRES และ SQMR ผลการทดลองจากวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟทั้ง 4 วิธี แสดงให้เห็นว่าเมื่อพิจารณาในโหมดที่สูงขึ้นจำนวนรอบการคำนวณซ้ำในแต่ละโหมดยังคงมีค่าใกล้เคียงกัน ถึงแม้ว่าจะมีการกวัดแกว่งของจำนวนรอบการคำนวณซ้ำในแต่ละโหมดอยู่บ้าง สำหรับกรณีที่ไม่ปรับสภาวะเริ่มต้นให้กับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์และการใช้เมตริกซ์ปรับสภาวะเริ่มต้นจาโคบี พบว่าจำนวนรอบการคำนวณมีค่ากวัดแกว่งอยู่ระหว่าง 72-95 รอบ และ 60-80 รอบ ตามลำดับ นอกจากนี้เนื่องจากเมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอนในทุกโหมด จึงสามารถใช้วิธีการปรับสภาวะเริ่มต้นแบบแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์โดยมีสัมประสิทธิ์เติมเต็มเท่ากับ 0.005 0.015 และ 0.050 ซึ่งพบว่าจำนวนรอบการคำนวณซ้ำในแต่ละโหมดมีค่าเกือบจะคงที่โดยมีค่าประมาณ 20 29 และ 38 รอบ ตามลำดับ สำหรับวิธีแยกส่วนโชเลสกีแบบไม่เติมเต็มสมบูรณ์พบว่ามีจำนวนรอบการคำนวณซ้ำในแต่ละโหมดที่ใกล้เคียงกันมากกับวิธีแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์ที่มีสัมประสิทธิ์การเติมเต็มเท่ากับ 0.050

พฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบของวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟสามารถแสดงได้จากความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของอัตราส่วนเวกเตอร์คงค้างสัมพัทธ์ที่ลดลงเมื่อเพิ่มจำนวนรอบการคำนวณซ้ำดังแสดงในรูปที่ 4.5 และ 4.6 เมื่อพิจารณารูปที่ 4.5 (ก) และ (ข) ซึ่งแสดงถึงพฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบระหว่างวิธี CG และ SYMMLQ ในโหมดที่ 1 พบว่ามีลักษณะไม่แตกต่างกัน กล่าวคืออัตราส่วนเวกเตอร์คงค้างสัมพัทธ์มีค่าเพิ่มขึ้นในช่วงรอบการคำนวณแรกและมีค่าลดลงเมื่อรอบการคำนวณซ้ำมากขึ้น แต่อาจมีค่าเพิ่มขึ้นอีกในบางช่วงและมีค่าลดลงสลับกันจนมีค่าเท่ากับ 10^{-8} จึงเกิดการลู่เข้าของคำตอบ จากพฤติกรรมดังกล่าวพบว่ามีความแตกต่างจากวิธี MINRES และ SQMR กล่าวคือเมื่อพิจารณาจากรูปที่ 4.6 (ก) และ (ข) พบว่าอัตราส่วนเวกเตอร์คงค้างสัมพัทธ์มีค่าลดลงอย่างต่อเนื่อง ถึงแม้ว่าในบางช่วงจะมีการลดลงที่ค่อนข้างช้าเมื่อเทียบกับจำนวนรอบการคำนวณซ้ำที่เพิ่มขึ้น แต่อัตราส่วนเวกเตอร์คงค้างสัมพัทธ์ก็ไม่มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างในกรณีของวิธี CG และ SYMMLQ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าพฤติกรรมลู่เข้าของคำตอบของวิธี MINRES และ SQMR มีลักษณะราบเรียบกว่าวิธี CG และ SYMMLQ ทั้งนี้สำหรับวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟทุกวิธีพบว่า การปรับปรุงสภาวะเริ่มต้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์โดยวิธีแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์โดยมีสัมประสิทธิ์เติมเต็มเท่ากับ 0.005 ให้อัตราการลู่เข้าของคำตอบมากที่สุด รองลงมาคือ วิธีแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์โดยมีสัมประสิทธิ์เติมเต็มเท่ากับ 0.015 สำหรับวิธีแยกส่วนโชเลสกีแบบไม่เติมเต็มสมบูรณ์แบบมีอัตราการลู่เข้าของคำตอบที่ใกล้เคียงกับการใช้สัมประสิทธิ์เติมเต็มที่มีค่าเท่ากับ 0.050 วิธีปรับสภาวะเริ่มต้นจาโคบีให้อัตราการลู่เข้าของคำตอบที่รองลงมา และการไม่ปรับสภาวะเริ่มต้นแก่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ให้อัตราการลู่เข้าของคำตอบที่น้อยที่สุด

ตารางที่ 4.2 แสดงถึงตัวเลขบอกสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ในแต่ละวิธีที่ได้ทำการศึกษา ซึ่งพบว่ามีความสอดคล้องกับผลการทดลองจากรูปที่ 4.5 และ 4.6 กล่าวคือการปรับสภาวะเริ่มต้นให้แก่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ส่งผลให้มีสภาวะที่ดีขึ้น ดังจะเห็นได้จากตัวเลขบอกสภาวะที่มีค่าน้อยลง

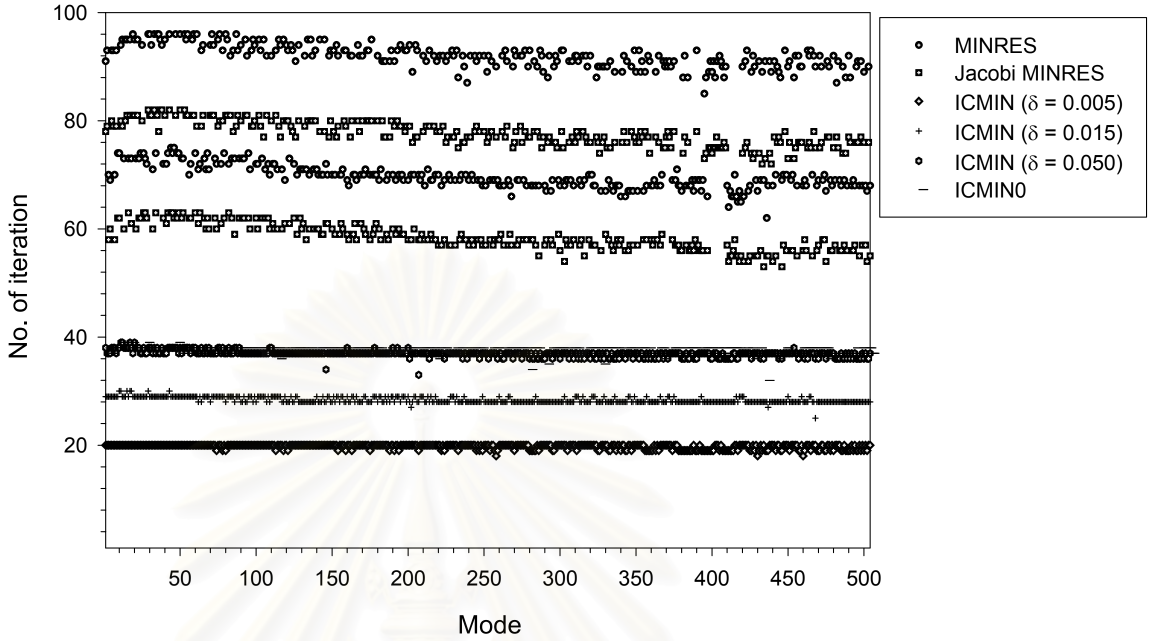


(ก) วิธีเกรเดียนต์สังยุค (CG)

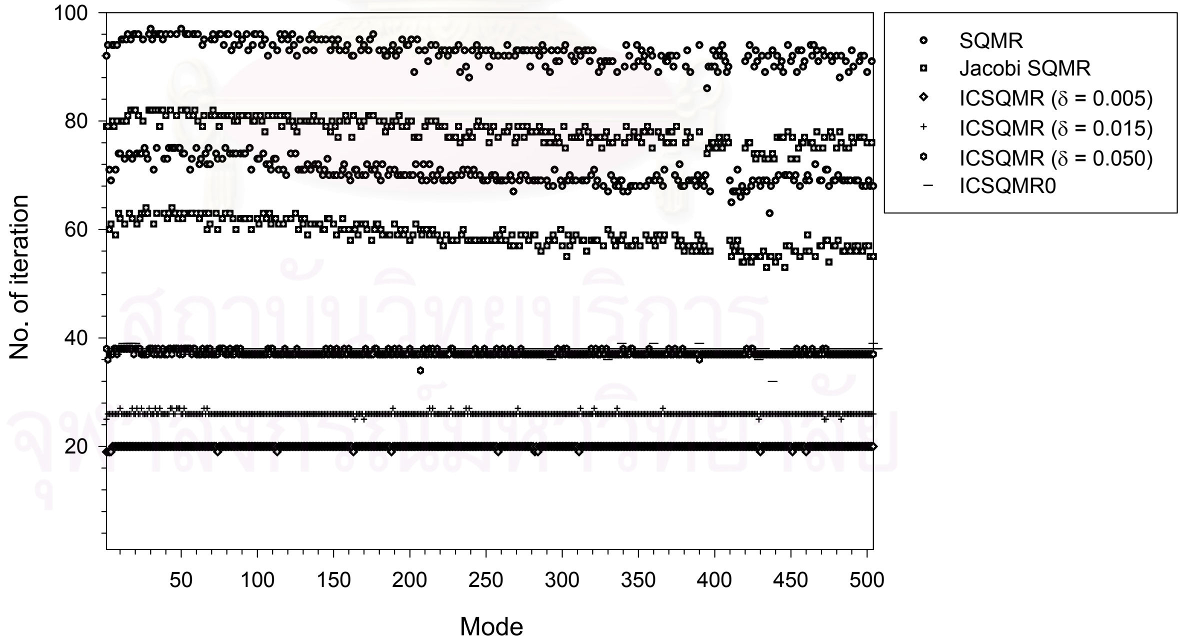


(ข) วิธีสมมาตรแอลคิว (SYMMLQ)

รูปที่ 4.3 จำนวนรอบการคำนวณซ้ำในแต่ละโหมดของวิธี CG และ SYMMLQ ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ครบทุกระดับขั้นความเสรี

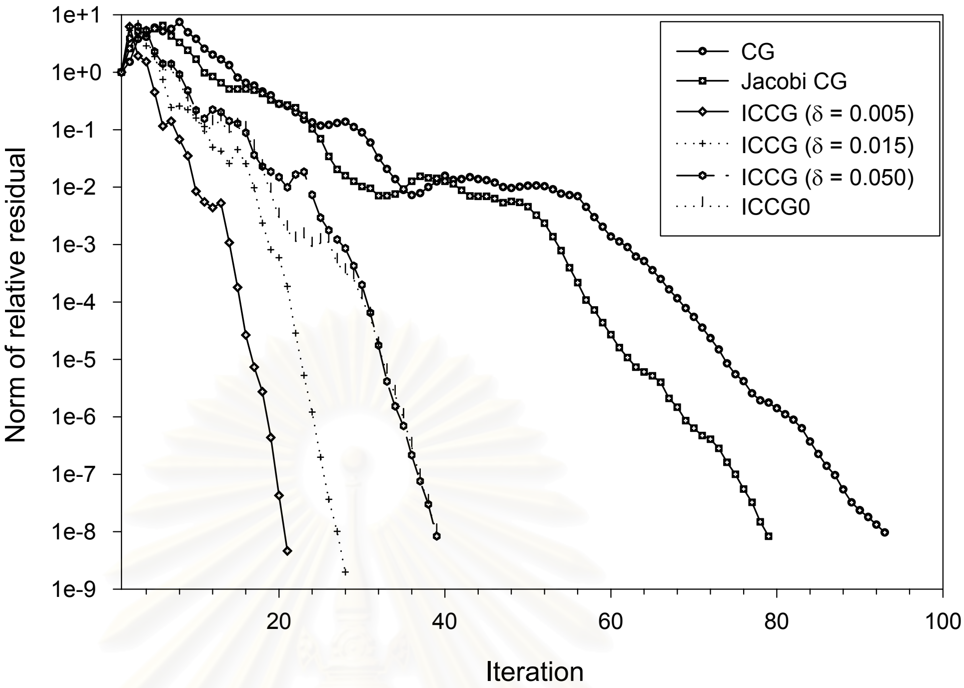


(ก) วิธีเวกเตอร์คงค้างน้อยที่สุด (MINRES)

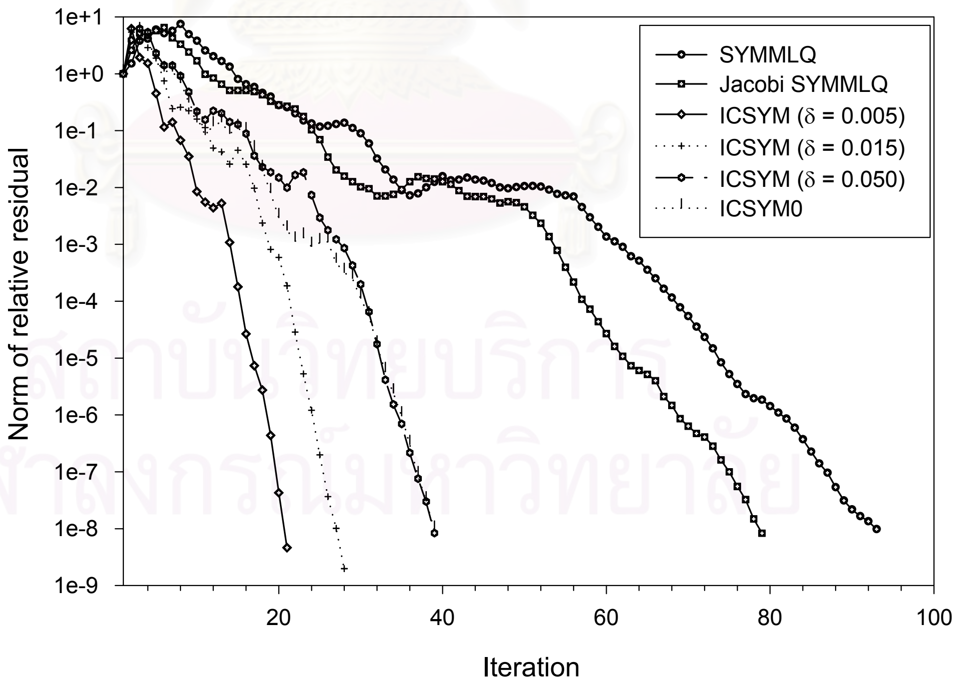


(ข) วิธีเวกเตอร์คงค้างเสมือนน้อยที่สุดสมมาตร (SQMR)

รูปที่ 4.4 จำนวนรอบการคำนวณซ้ำในแต่ละโหมดของวิธี MINRES และ SQMR ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ครบทุกระดับขั้นความเสรี

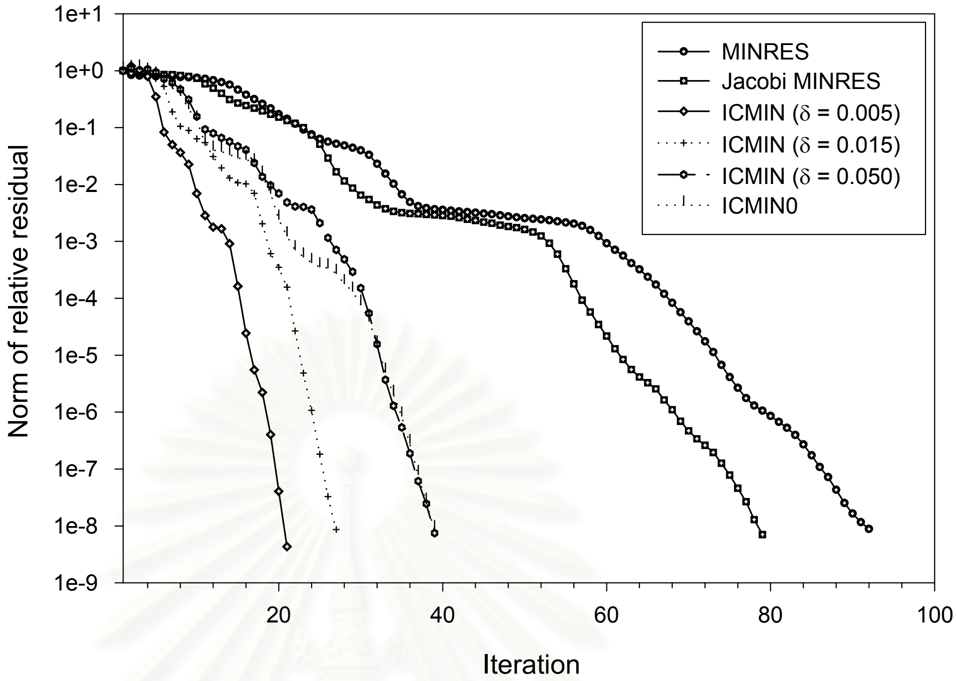


(ก) วิธีเกรเดียนต์สังยุค (CG)

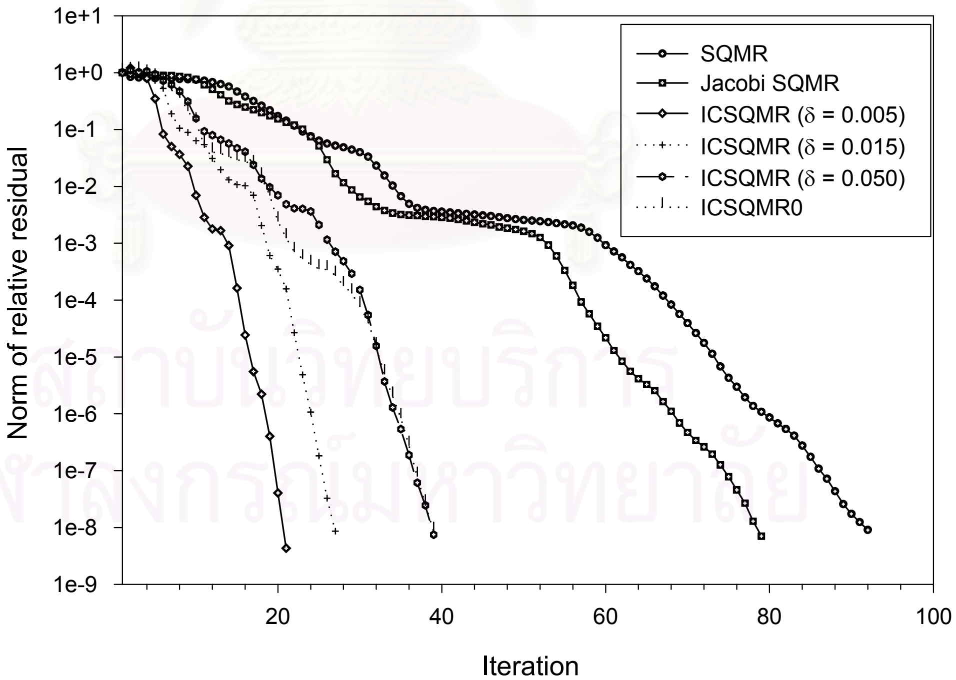


(ข) วิธีแอลคิวสมมาตร (SYMMLQ)

รูปที่ 4.5 นอร์มของเวกเตอร์คงค้างสัมพัทธ์กับจำนวนรอบการคำนวณที่เพิ่มขึ้นในโหมดที่ 1 ของวิธี CG และ SYMMLQ ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ครบทุกระดับขั้นความเสรี



(ก) วิธีเวกเตอร์คงค้างน้อยที่สุด (MINRES)



(ข) วิธีเวกเตอร์คงค้างเสมือนน้อยที่สุดสมมาตร (SQMR)

รูปที่ 4.6 นอร์มของเวกเตอร์คงค้างสัมพัทธ์กับจำนวนรอบการคำนวณที่เพิ่มขึ้นในโหมดที่ 1 ของวิธี MINRES และ SQMR ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ครบทุกระดับขั้นความเสรี

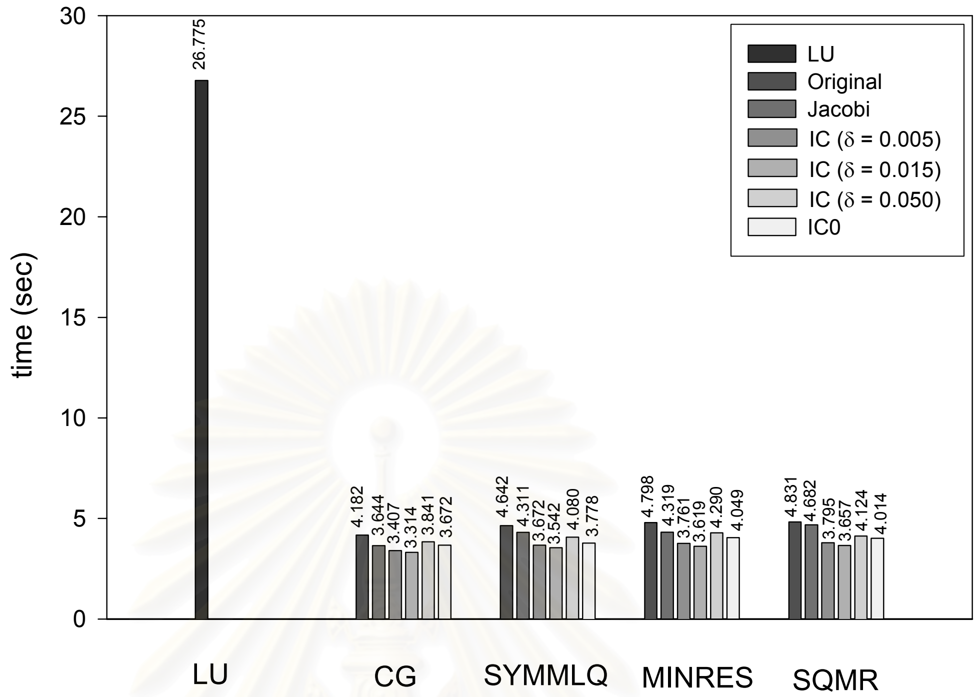
ตารางที่ 4.2 ตัวเลขบอกสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ภายหลังการปรับสภาวะสำหรับแต่ละวิธีในทุกโหมด กรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ครบทุกระดับขั้นความเสรีของโครงสร้าง

วิธีการปรับสภาวะเริ่มต้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์	ตัวเลขบอกสภาวะ (κ)
1. ไม่ใช้การปรับสภาวะ	1,758.18
2. การปรับสภาวะแบบจาโคบี	1,482.16
3. การปรับสภาวะแบบแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์ ($\delta = 0.005$)	53.73
4. การปรับสภาวะแบบแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์ ($\delta = 0.015$)	107.09
5. การปรับสภาวะแบบแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์ ($\delta = 0.050$)	257.78
6. การปรับสภาวะแบบแยกส่วนโชเลสกีไม่เติมเต็มสมบูรณ์	206.44

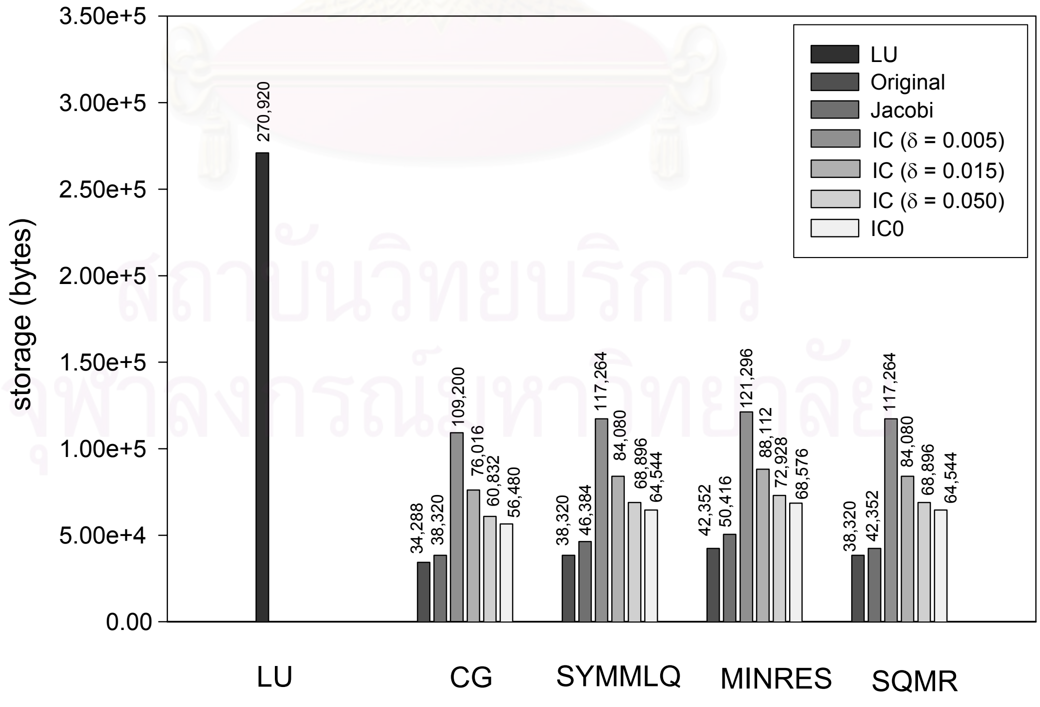
สำหรับเวลาที่ใช้ในการคำนวณรวมทุกโหมด และจำนวนหน่วยเก็บข้อมูลเป็นดังแสดงในรูปที่ 4.7 และ 4.8 ตามลำดับ จากรูปที่ 4.7 พบว่าวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟทุกวิธีซึ่งมีการปรับสภาวะเริ่มต้นแบบต่างๆใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีแยกแบบแอลยูในทุกกรณี โดยเฉพาะอย่างยิ่งการใช้เมตริกซ์ปรับสภาวะเริ่มต้นแบบแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์ที่มีสัมประสิทธิ์เติมเต็มเท่ากับ 0.015 ใช้เวลาในการคำนวณน้อยที่สุด ถึงแม้ว่าจะมีอัตราการลู่เข้าของคำตอบที่น้อยกว่ากรณีที่สัมประสิทธิ์เติมเต็มเท่ากับ 0.005 สำหรับในกรณีศึกษานี้วิธีการที่ใช้เวลาในการคำนวณรวมทุกโหมดน้อยที่สุดคือ วิธี CG ที่ใช้เมตริกซ์การปรับปรุงสภาวะเริ่มต้นแบบแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์ที่มีสัมประสิทธิ์เติมเต็มเท่ากับ 0.015 ในทำนองเดียวกันเมื่อพิจารณาถึงหน่วยเก็บข้อมูลที่ใช้ในรูปที่ 4.8 พบว่าวิธีแยกแบบแอลยูใช้จำนวนหน่วยเก็บข้อมูลมากกว่าวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟในทุกกรณี

4.4.2 กรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 90% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมดในแต่ละโหมด

ในกรณีนี้กำหนดให้วัดรูปแบบการสั่นไหวได้เพียง 454 ระดับขั้นความเสรีจากรูปแบบการสั่นไหวทั้งหมด 504 ระดับขั้นความเสรี โดยรูปแบบการสั่นไหวที่วัดได้กระจายไปทั่วทั้งโครงสร้าง ซึ่งในกรณีนี้ $\mathbf{B}_i(\mathbf{x})$ จากสมการที่ (4.3.2) ยังคงมีคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอนเฉพาะในช่วง 3 โหมดแรกของการวัดข้อมูล ซึ่งทำให้เกิดข้อจำกัดในการเลือกใช้วิธีการปรับสภาวะเบื้องต้นของวิธี CG SYMMLQ และ MINRES ที่ต้องการเมตริกซ์ปรับสภาวะเริ่มต้นที่มีคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอน จึงไม่สามารถใช้เมตริกซ์ปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์รวมทั้งวิธีแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์กับวิธีเหล่านี้ได้ ดังนั้นวิธีปรับสภาวะเริ่มต้นที่สามารถใช้ได้กับวิธี CG SYMMLQ และ MINRES มีเพียงวิธีปรับสภาวะจาโคบีเท่านั้น เนื่องจากวิธีการปรับสภาวะจาโคบีสามารถสร้างเมตริกซ์ปรับสภาวะที่มีคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอนได้จากเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เริ่มต้นที่ไม่มีคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอน โดยการใช้ค่าสัมบูรณ์ของสมาชิกเมตริกซ์ในแนวทแยงดังที่ได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 3 สำหรับวิธี SQMR ถึงแม้ว่าไม่สามารถใช้วิธีปรับสภาวะแบบแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์ แต่ยังสามารถใช้วิธีปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ได้ เนื่องจากวิธี SQMR เมตริกซ์ปรับสภาวะเริ่มต้นที่นำมาใช้งานไม่จำเป็นจะต้องมีคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอน



รูปที่ 4.7 การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณครบทุกโหมดระหว่างวิธีแยกแบบแอลยูและวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟในแต่ละวิธี ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ครบทุกระดับขั้นความเสรี



รูปที่ 4.8 การเปรียบเทียบจำนวนหน่วยเก็บข้อมูลระหว่างวิธีแยกแบบแอลยูและวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟแต่ละวิธีในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ครบทุกระดับขั้นความเสรี

เมื่อพิจารณาจำนวนรอบการคำนวณซ้ำในแต่ละโหมดของวิธี CG SYMMLQ MINRES และ SQMR ดังแสดงในรูปที่ 4.9 (ก)-(ข) และ 4.10 (ก)-(ข) ตามลำดับ พบว่าจำนวนรอบในการคำนวณซ้ำของวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟทั้ง 4 วิธี มีแนวโน้มเดียวกัน กล่าวคือ มีค่าเพิ่มขึ้นในช่วงโหมดแรกและเพิ่มขึ้นถึงจุดสูงสุดในช่วงโหมดกลาง จากนั้นเริ่มจะมีค่าลดลงและมีค่าน้อยที่สุดในโหมดสุดท้าย ตารางที่ 4.3 แสดงตัวเลขบอกสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ภายหลังการปรับสภาวะสำหรับแต่ละวิธีที่เลือกใช้ในโหมดต่างๆ

ตารางที่ 4.3 ตัวเลขบอกสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ภายหลังการปรับสภาวะสำหรับแต่ละวิธีในทุกโหมด กรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 90% ของทุกระดับขั้นความเสรี

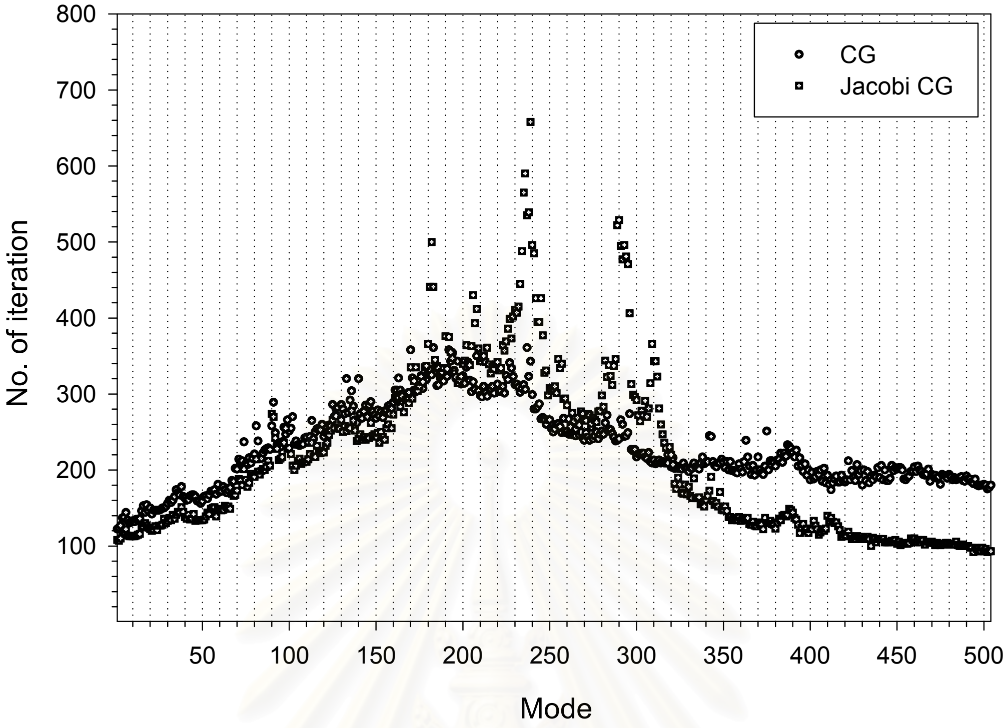
วิธีการปรับสภาวะเริ่มต้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์	ตัวเลขบอกสภาวะ (κ)		
	โหมดที่ 1	โหมดที่ 239	โหมดที่ 504
1. ไม่ใช้การปรับสภาวะ	1,946.08	10,681.94	325.56
2. การปรับสภาวะแบบจาโคบี	1,641.44	588,860.39	93.52
3. การปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ (δ = 0.015)	70.65	5,916.27	9.18
4. การปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ (δ = 0.035)	111.97	4,879.72	13.89
5. การปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ (δ = 0.050)	167.08	10,769.97	16.14
6. การปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่เติมเต็มสมบูรณ์	232.46	65,277.31	22.69

จากตารางที่ 4.3 พบว่าวิธีปรับสภาวะเริ่มต้นที่เลือกใช้ในโหมดที่ 1 และโหมดที่ 504 มีแนวโน้มเช่นเดียวกับในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ครบทุกระดับขั้นความเสรี นั่นคือการปรับสภาวะเริ่มต้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ส่งผลให้เมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีสภาวะที่ดีขึ้นซึ่งพิจารณาได้จากตัวเลขบอกสภาวะที่มีค่าลดลง แต่สำหรับในโหมดที่ 239 กลับมีแนวโน้มที่กลับกัน กล่าวคือการปรับสภาวะเริ่มต้นโดยวิธีจาโคบี ให้ค่าของตัวเลขบอกสภาวะที่มากขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 4.9 และ รูปที่ 4.10 ซึ่งพบว่าวิธีการปรับสภาวะเริ่มต้นจาโคบีส่งผลให้จำนวนรอบการคำนวณซ้ำในโหมดที่ 239 มีค่ามากที่สุด และตั้งแต่โหมดที่ 320 ถึงโหมดที่ 504 วิธีปรับสภาวะจาโคบีส่งผลให้จำนวนรอบการคำนวณซ้ำน้อยกว่า การไม่ใช้วิธีปรับสภาวะอย่างชัดเจน เมื่อพิจารณารูปที่ 4.10 (ข) พบว่าเมื่อใช้วิธี SQMR ร่วมกับการปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์จะส่งผลให้จำนวนรอบการคำนวณซ้ำในแต่ละโหมดน้อยกว่า วิธี SQMR ที่ไม่มีการปรับสภาวะ และ วิธี SQMR ที่ใช้วิธีการปรับสภาวะจาโคบี ยกเว้นการปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่เติมเต็มสมบูรณ์ที่จะมีจำนวนรอบการคำนวณซ้ำสูงมากในช่วงโหมดที่ 120 ถึงโหมดที่ 200

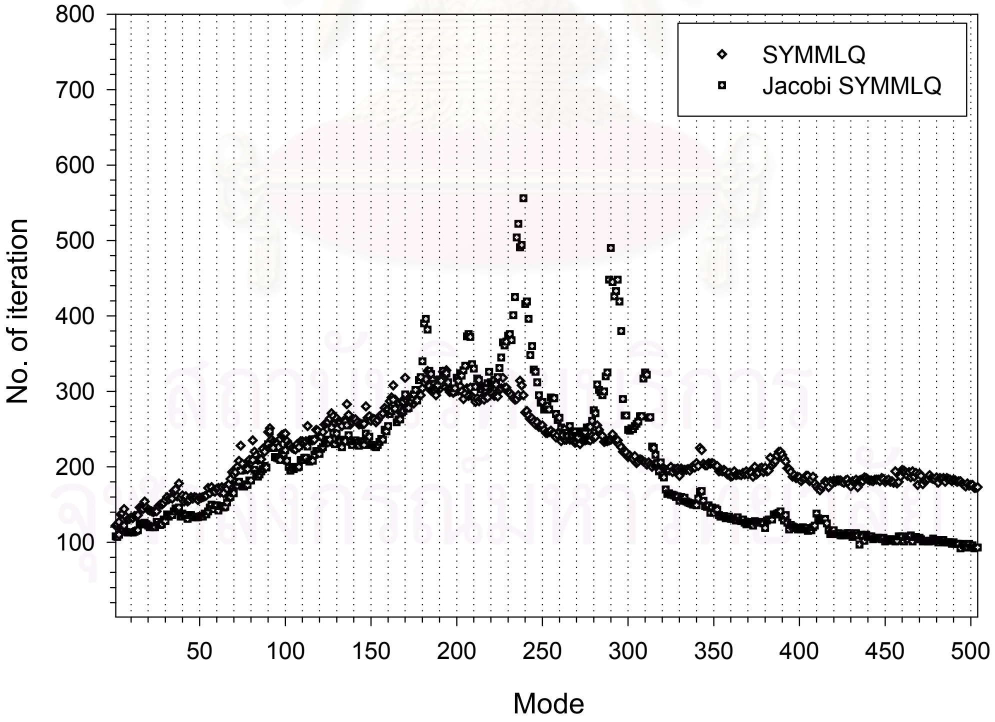
พฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบของวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟแต่ละวิธีเป็นดังแสดงในรูปที่ 4.11 – 4.14 รูปที่ 4.11 - 4.12 แสดงพฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบในโหมดที่ 1 และรูปที่ 4.13 – 4.14 แสดงพฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบในโหมดที่ 239 เมื่อพิจารณาพฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบระหว่างวิธี CG และ SYMMLQ เปรียบเทียบกับวิธี MINRES และ SQMR ในโหมดที่ 1 และโหมดที่ 239 พบว่าวิธี MINRES และ SQMR ให้พฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบที่ราบเรียบกว่าวิธี CG และ SYMMLQ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในโหมดที่ 239 วิธี CG

และ SYMMLQ มีพฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบที่กวัดแกว่งอย่างชัดเจน ในขณะที่วิธี MINRES และ SQMR มีพฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบที่ราบเรียบกว่า ถึงแม้ว่าสุดท้ายแล้วจำนวนรอบการคำนวณซ้ำเมื่อเกิดการลู่เข้าของคำตอบจะมีค่าใกล้เคียงกันก็ตาม และในโหมดที่ 239 การปรับสภาวะเริ่มต้นแบบจาโคบีกลับให้อัตราการลู่เข้าของคำตอบที่ต่ำกว่าการไม่ใช้วิธีการปรับสภาวะเริ่มต้น แต่วิธี SQMR ที่ใช้วิธีการปรับสภาวะเริ่มต้นแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์กลับให้อัตราการลู่เข้าของคำตอบที่น่าพอใจ โดยอัตราการลู่เข้าของคำตอบจะสูงที่สุดเมื่อใช้ค่าสัมประสิทธิ์เติมเต็มเท่ากับ 0.035 0.015 และ 0.050 ตามลำดับ สำหรับการปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่เติมเต็มสมบูรณ์ให้อัตราการลู่เข้าของคำตอบที่ต่ำกว่า

เมื่อพิจารณารูปที่ 4.15 ซึ่งแสดงถึงเวลาในการคำนวณรวมทุกโหมดพบว่า วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟทุกวิธีที่มีการปรับสภาวะเริ่มต้นแบบต่างๆยังคงใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีแยกแบบแอลยู โดยวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟที่ใช้วิธีการปรับสภาวะเริ่มต้นจะใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีปริภูมิย่อยที่ไม่มีการปรับสภาวะเริ่มต้นยกเว้นวิธีการปรับสภาวะเริ่มต้นแบบแยกส่วนไม่เติมเต็มสมบูรณ์ร่วมกับวิธี SQMR ที่ใช้เวลาในการคำนวณมากที่สุดในวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟทั้งหมด สำหรับวิธีที่ใช้เวลาในการคำนวณรวมทุกโหมดน้อยที่สุดคือวิธี SQMR ซึ่งใช้การปรับสภาวะเริ่มต้นแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ที่มีสัมประสิทธิ์เติมเต็มเท่ากับ 0.035 สำหรับหน่วยเก็บข้อมูลที่ใช้ในแต่ละวิธีเป็นดังแสดงในรูปที่ 4.16 ซึ่งพบว่าวิธีแยกแบบแอลยูยังคงใช้จำนวนหน่วยเก็บข้อมูลมากกว่าวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟทุกวิธี

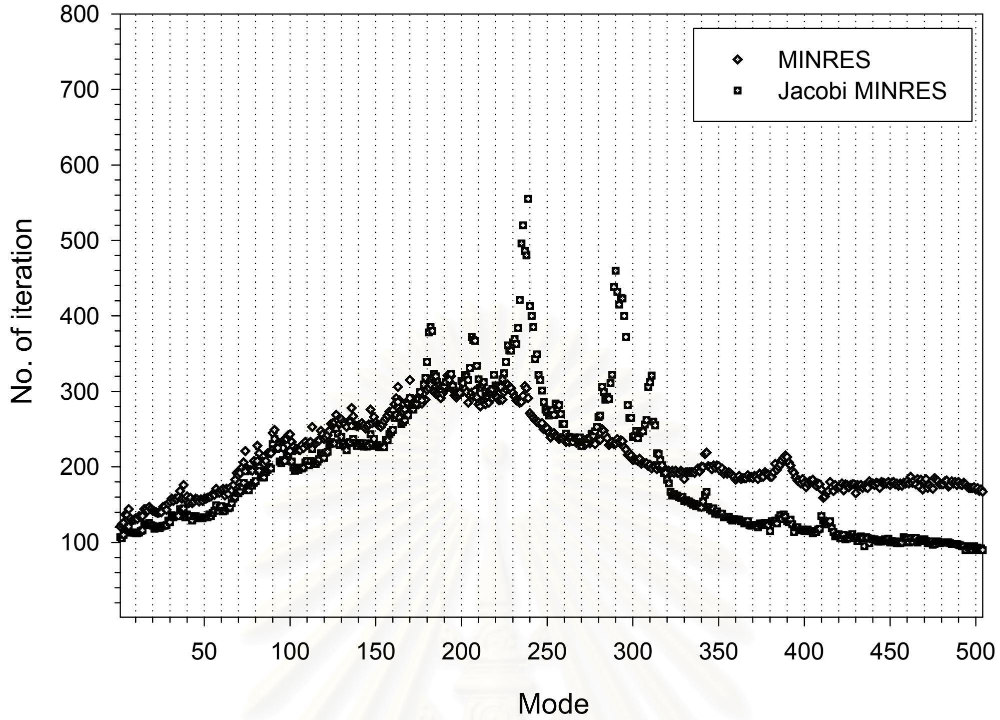


(ก) วิธีเกรเดียนต์สังยุค (CG)

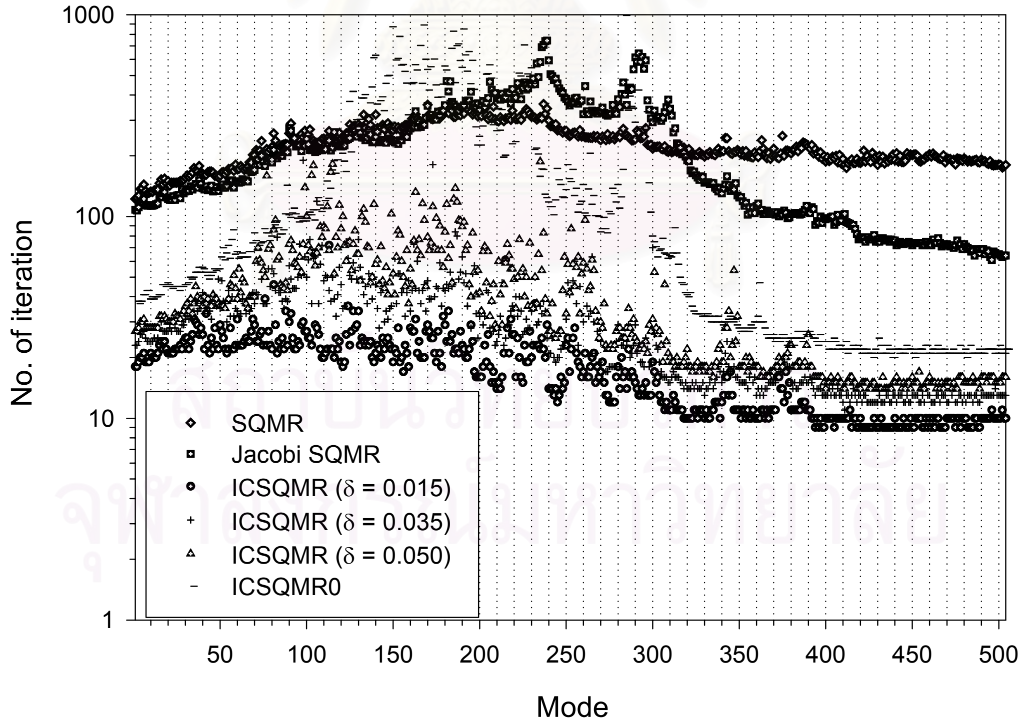


(ข) วิธีแอลคิวสมมาตร (SYMMLQ)

รูปที่ 4.9 จำนวนรอบการคำนวณซ้ำในแต่ละโหมดของวิธี CG และ SYMMLQ ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 90% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด

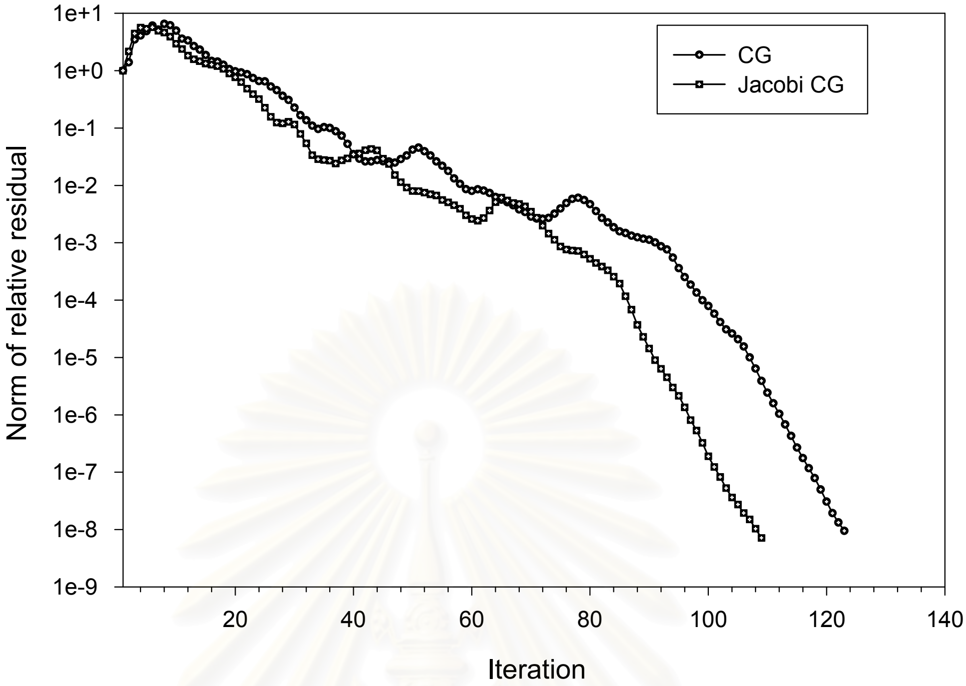


(ก) วิธีเวกเตอร์คงค้างน้อยที่สุด (MINRES)

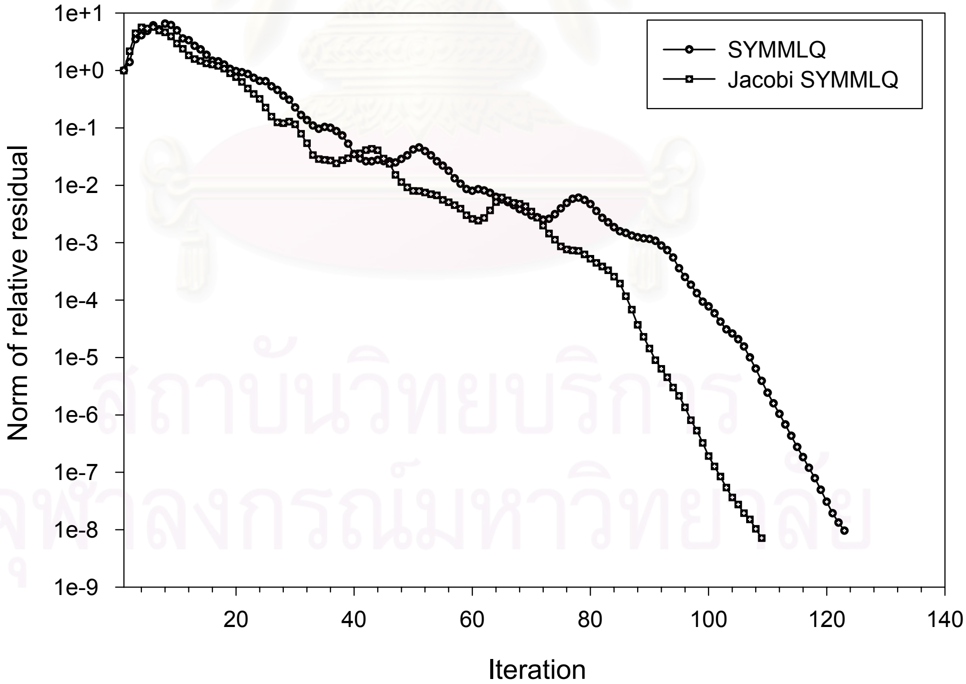


(ข) วิธีเวกเตอร์คงค้างเสมือนน้อยที่สุดสมมาตร (SQMR)

รูปที่ 4.10 จำนวนรอบการคำนวณซ้ำในแต่ละโหมดของวิธี MINRES และ SQMR ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 90% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด

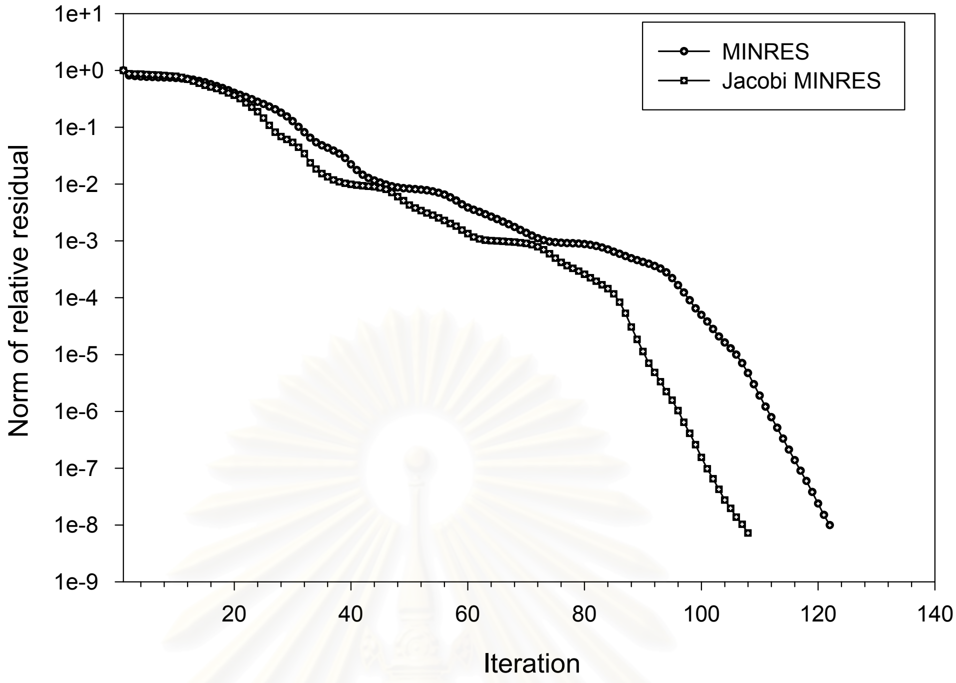


(ก) วิธีเกรเดียนต์สังยุค (CG)

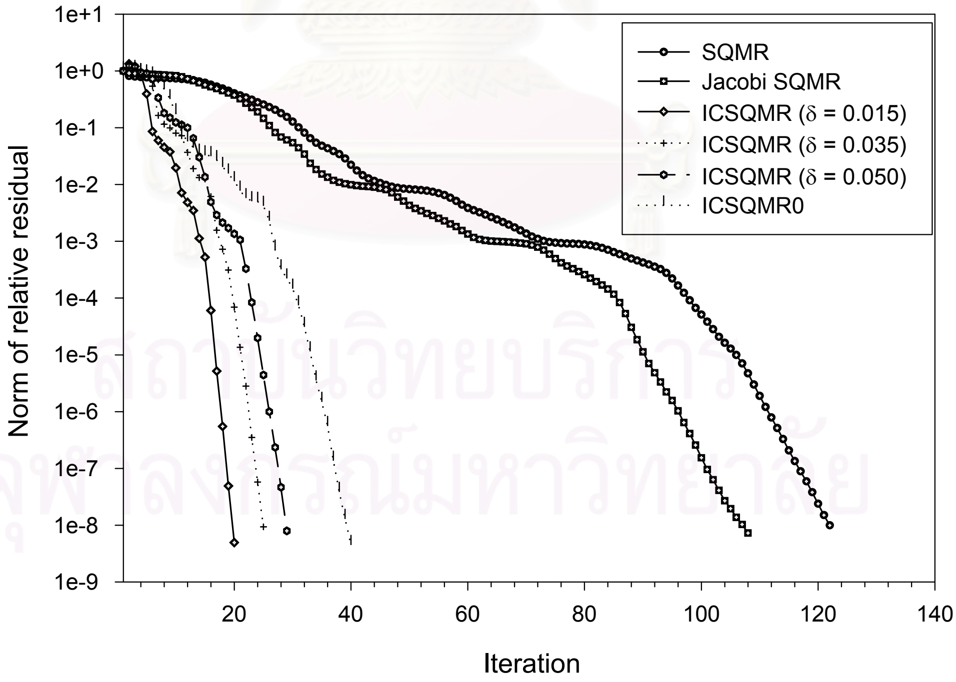


(ข) วิธีแอลคิวสมมาตร (SYMMLQ)

รูปที่ 4.11 นอร์มของเวกเตอร์คงค้างสัมพัทธ์กับจำนวนรอบการคำนวณที่เพิ่มขึ้นในโหมดที่ 1 ของวิธี CG และ SYMMLQ ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 90% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด

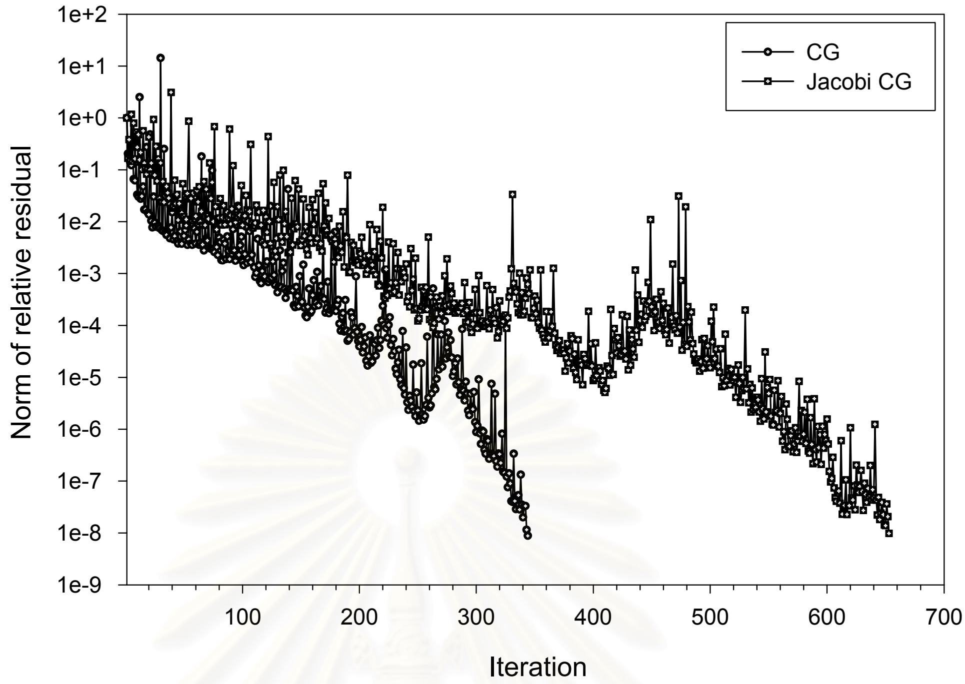


(ก) วิธีเวกเตอร์คงค้างน้อยที่สุด (MINRES)

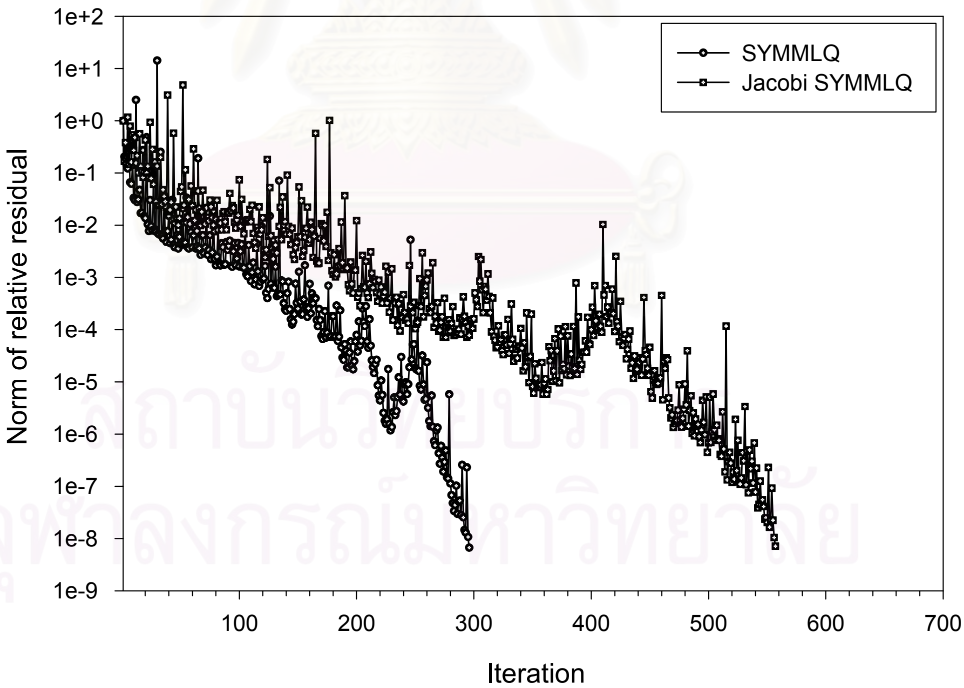


(ข) วิธีเวกเตอร์คงค้างเสมือนน้อยที่สุดสมมาตร (SQMR)

รูปที่ 4.12 นอร์มของเวกเตอร์คงค้างสัมพัทธ์กับจำนวนรอบการคำนวณที่เพิ่มขึ้นในโหมดที่ 1 ของวิธี MINRES และ SQMR ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 90% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด

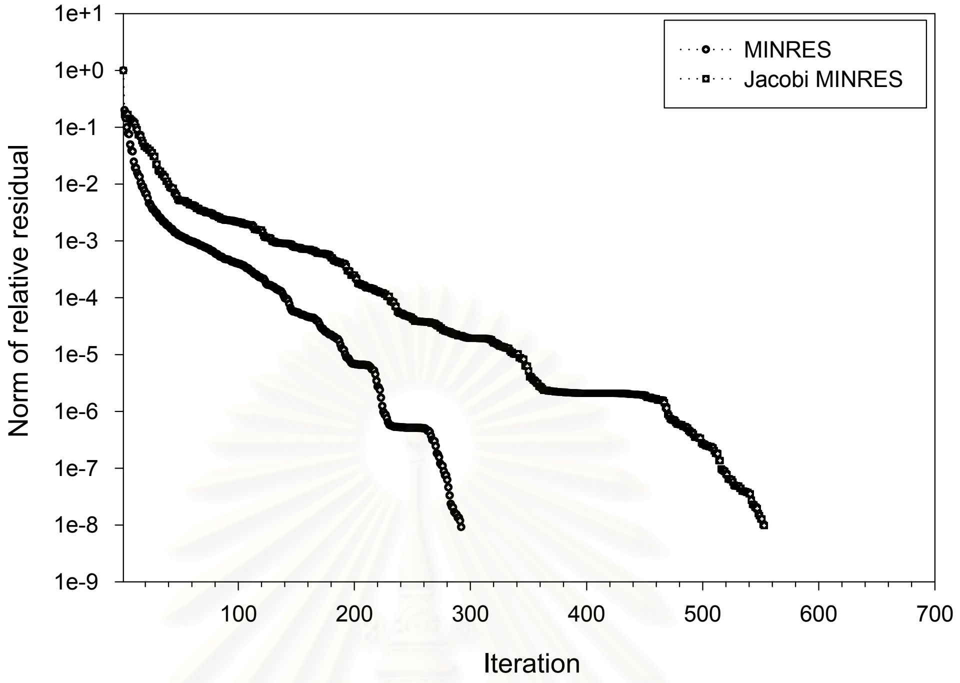


(ก) วิธีเกรเดียนต์สังยุค (CG)

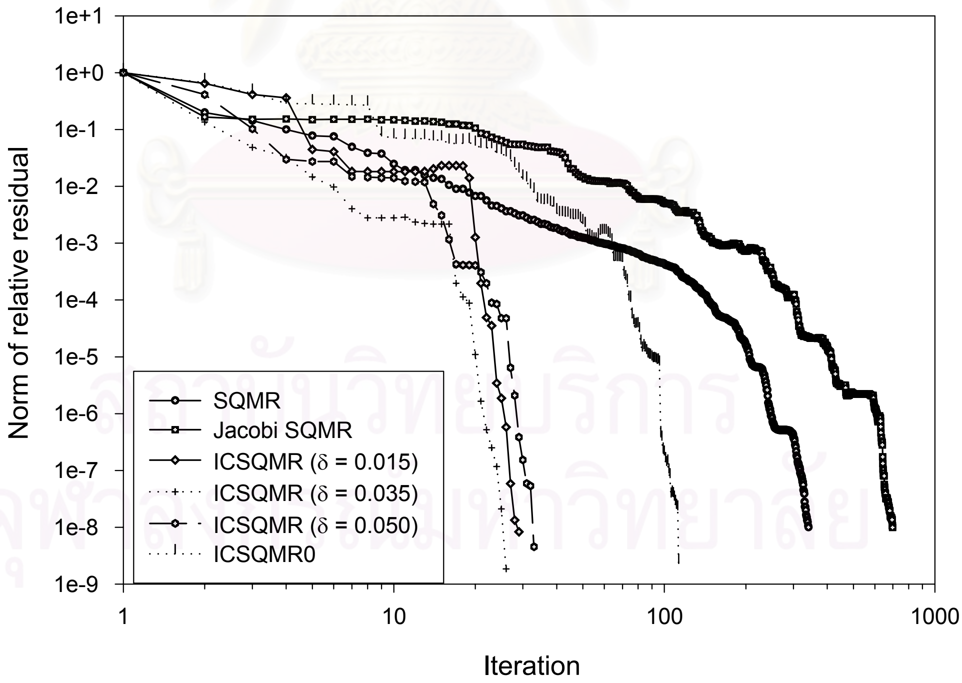


(ข) วิธีแอลคิวสมมาตร (SYMMLQ)

รูปที่ 4.13 นอร์มของเวกเตอร์คงค้างสัมพัทธ์กับจำนวนรอบการคำนวณที่เพิ่มขึ้นในโหมดที่ 239 ของวิธี CG และ SYMMLQ ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 90% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด

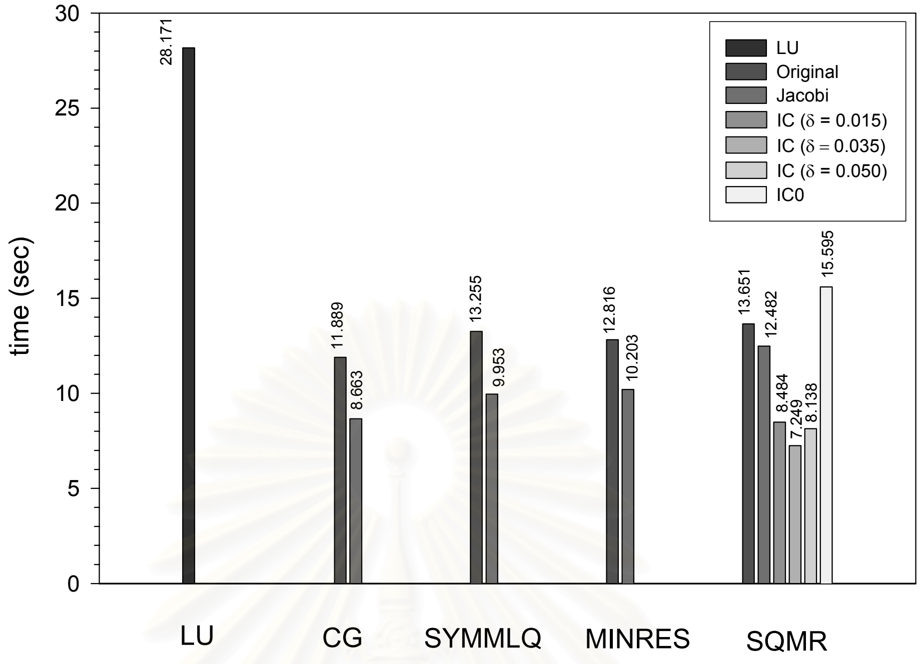


(ก) วิธีเวกเตอร์คงค้างน้อยที่สุด (MINRES)

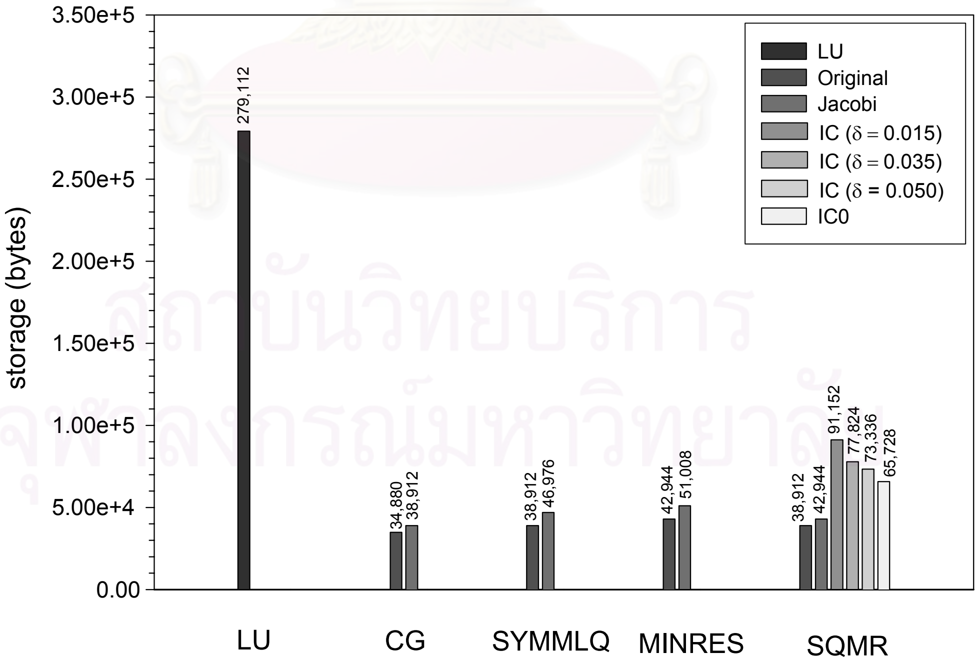


(ข) วิธีเวกเตอร์คงค้างเสมือนน้อยที่สุดสมมาตร (SQMR)

รูปที่ 4.14 นอร์มของเวกเตอร์คงค้างสัมพัทธ์กับจำนวนรอบการคำนวณที่เพิ่มขึ้นในโหมดที่ 239 ของวิธี MINRES และ SQMR ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 90% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด



รูปที่ 4.15 การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณครบทุกโหมดระหว่างวิธีแยกแบบแอลยูและวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟในแต่ละวิธี ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 90% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด



รูปที่ 4.16 การเปรียบเทียบจำนวนหน่วยเก็บระหว่างวิธีแยกแบบแอลยูและวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟแต่ละวิธี ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 90% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด

4.4.3 กรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 50% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมดในแต่ละโหมด

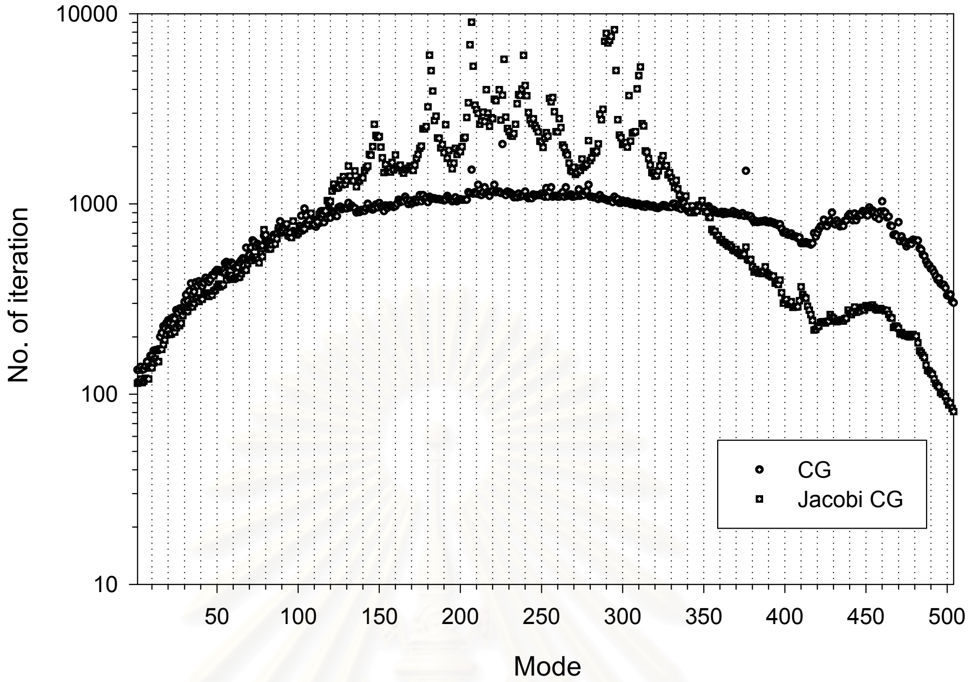
ในกรณีนี้กำหนดให้สามารถวัดรูปแบบการสั่นไหวได้เพียง 252 ระดับขั้นความเสรีจากรูปแบบการสั่นไหวทั้งหมด 504 ระดับขั้นความเสรีโดยรูปแบบการสั่นไหวที่วัดได้กระจายไปทั่วทั้งโครงสร้าง ในกรณีนี้ $\mathbf{B}_i(\mathbf{x})$ จากสมการที่ (4.3.2) จะมีคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอนเฉพาะในโหมดแรกของการวัดข้อมูลเท่านั้น ซึ่งทำให้เกิดข้อจำกัดในการเลือกใช้วิธีการปรับสภาวะเบื้องต้นของเมตริกซ์สำหรับวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟในแต่ละวิธีเช่นเดียวกับในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 10% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด

เมื่อพิจารณาจำนวนรอบการคำนวณซ้ำในแต่ละโหมดของวิธี CG SYMMLQ MINRES และ SQMR ดังแสดงในรูปที่ 4.17 (ก)-(ข) และ 4.18 (ก)-(ข) ตามลำดับ พบว่าจำนวนรอบการคำนวณซ้ำของวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟทั้ง 4 วิธี มีแนวโน้มเดียวกัน กล่าวคือมีค่าเพิ่มขึ้นในช่วงโหมดแรกและเพิ่มขึ้นถึงจุดสูงสุดในช่วงโหมดกลาง จากนั้นเริ่มจะมีค่าลดลงและมีค่าน้อยที่สุดในโหมดสุดท้าย ซึ่งแนวโน้มดังกล่าวมีความคล้ายคลึงกับในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 10% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมดแต่จะมีความแตกต่างกันตรงที่จำนวนรอบการคำนวณซ้ำในแต่ละโหมดในรูปที่ 4.17 และ 4.18 มีค่ามากกว่าในรูปที่ 4.11 และ 4.12

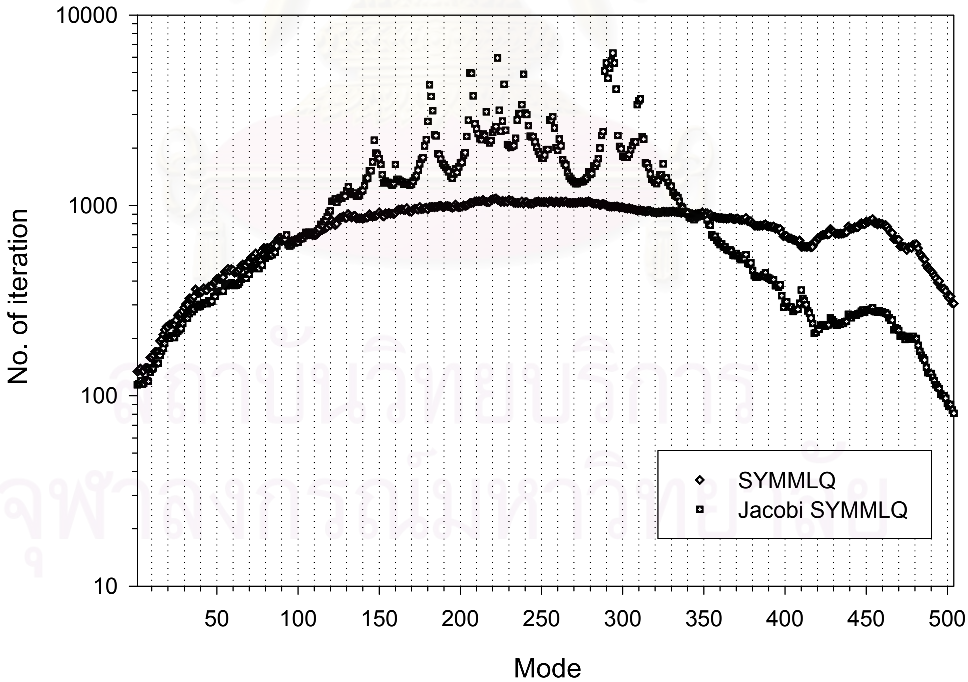
ตารางที่ 4.4 ตัวเลขบอกสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ภายหลังการปรับสภาวะสำหรับแต่ละวิธีในทุกโหมด กรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 50% ของทุกระดับขั้นความเสรี

วิธีการปรับสภาวะเริ่มต้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์	ตัวเลขบอกสภาวะ (κ)		
	โหมดที่ 1	โหมที่ 294	โหมดที่ 504
1. ไม่ใช้การปรับสภาวะ	4,712.49	436.47	67.66
2. การปรับสภาวะแบบจาโคบี	3,975.70	47,477.40	16.41
3. การปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ ($\delta = 0.0005$)	33.90	2.19	1.03
4. การปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ ($\delta = 0.0050$)	127.52	32.61	1.21
5. การปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ ($\delta = 0.0150$)	173.82	31,253.63	1.46

ตารางที่ 4.4 แสดงตัวเลขบอกสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ภายหลังการปรับสภาวะสำหรับแต่ละวิธีที่เลือกใช้ในโหมดต่างๆที่นำมาพิจารณา ซึ่งจากตัวเลขบอกสภาวะในตารางที่ 4.4 สำหรับวิธีปรับสภาวะเริ่มต้นที่เลือกใช้ในโหมดที่ 1 และโหมดที่ 504 แสดงให้เห็นว่าการปรับสภาวะเริ่มต้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ ส่งผลให้เมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีสภาวะที่ดีขึ้นซึ่งพิจารณาได้จากตัวเลขบอกสภาวะที่มีค่าน้อยลง ในทางตรงกันข้ามสำหรับในโหมดที่ 294 เฉพาะการปรับสภาวะเริ่มต้นโดยวิธีจาโคบีเท่านั้นที่ให้ค่าของตัวเลขบอกสภาวะมากขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 4.17 และ 4.18 ซึ่งพบว่าวิธีการปรับสภาวะเริ่มต้นจาโคบีส่งผลให้จำนวนรอบการคำนวณซ้ำในโหมดที่ 294 มีค่ามากที่สุด และตั้งแต่โหมดที่ 350 ถึงโหมดที่ 504 วิธีปรับสภาวะจาโคบี ส่งผลให้จำนวนรอบการคำนวณซ้ำน้อยกว่าการไม่ใช้วิธีปรับสภาวะ และเมื่อพิจารณารูปที่ 4.18 (ข) พบว่าวิธี SQMR ร่วมกับการปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ส่งผลให้จำนวนรอบการคำนวณซ้ำในแต่ละโหมดน้อยกว่า วิธี SQMR ที่ไม่มีการปรับสภาวะ และ วิธี SQMR ที่ใช้วิธีการปรับสภาวะจาโคบี

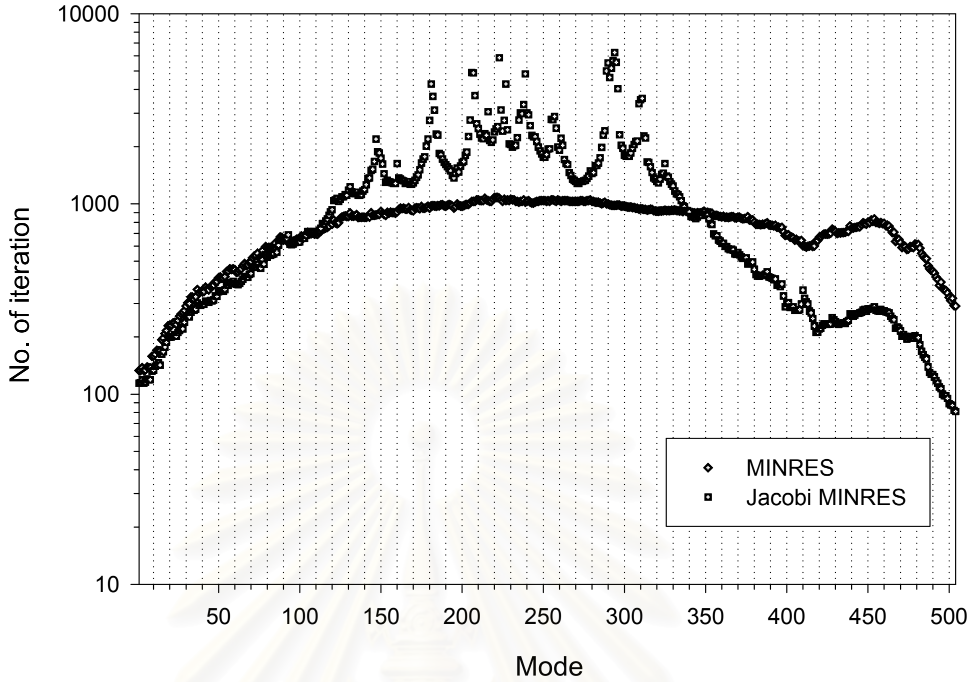


(ก) วิธีเกรเดียนต์สังยุค (CG)

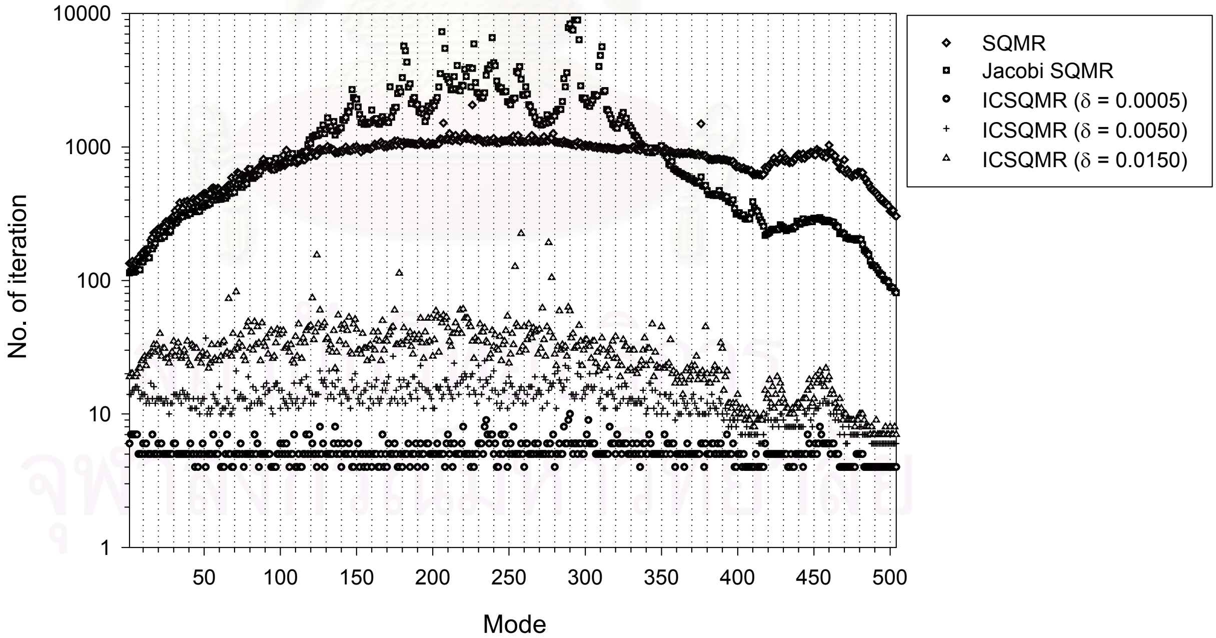


(ข) วิธีแอลคิวสมมาตร (SYMMLQ)

รูปที่ 4.17 จำนวนรอบการคำนวณซ้ำในแต่ละโหมดของวิธี CG และ SYMMLQ ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 50% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด



(ก) วิธีเวกเตอร์คงค้างน้อยที่สุด (MINRES)



(ข) วิธีเวกเตอร์คงค้างเสมือนน้อยที่สุดสมมาตร (SQMR)

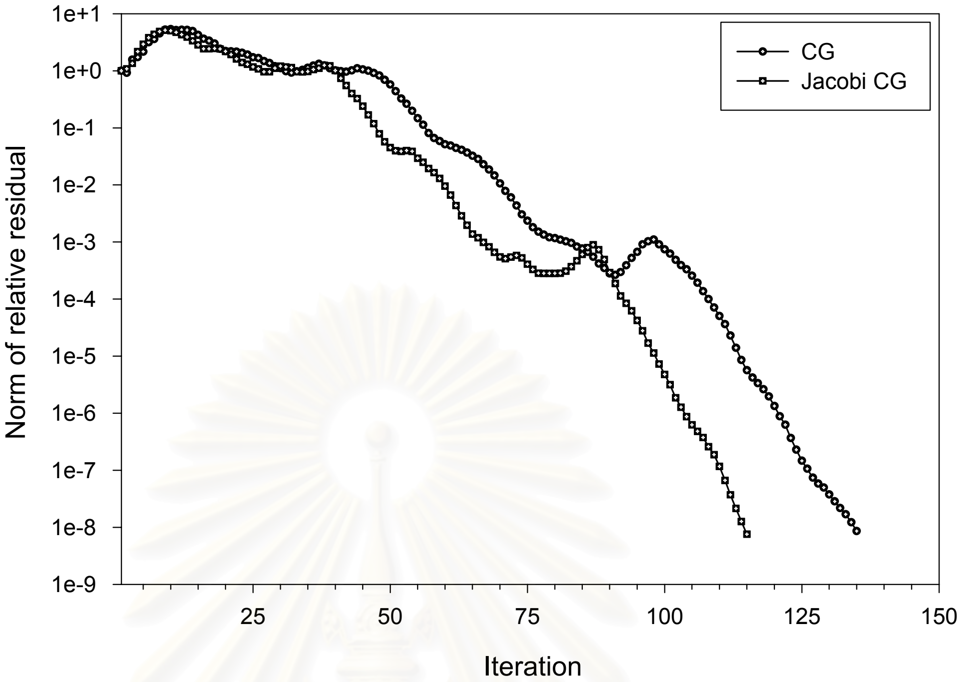
รูปที่ 4.18 จำนวนรอบการคำนวณซ้ำในแต่ละโหมดของวิธี MINRES และ SQMR ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 50% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด

พฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบของวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟแต่ละวิธีเป็นดังแสดงในรูปที่ 4.19 – 4.22 โดยรูปที่ 4.19 - 4.20 แสดงพฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบในโหมดที่ 1 และรูปที่ 4.21 – 4.22 แสดงพฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบในโหมดที่ 294 เมื่อพิจารณาพฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบระหว่างวิธี CG และ SYMMLQ เปรียบเทียบกับวิธี MINRES และ SQMR ในโหมดที่ 1 และโหมดที่ 294 พบว่าวิธี MINRES และ SQMR มีพฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบที่ราบเรียบกว่าวิธี CG และ SYMMLQ โดยเมื่อพิจารณาในโหมดที่ 294 พบว่าวิธี CG และ SYMMLQ มีพฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบที่กวัดแกว่งอย่างชัดเจนโดยเฉพาะอย่างยิ่งในช่วงก่อนที่จะลู่เข้าหาคำตอบ ในขณะที่วิธี MINRES และ SQMR มีพฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบที่ราบเรียบกว่าถึงแม้ว่าสุดท้ายแล้วจำนวนรอบการคำนวณซ้ำเมื่อเกิดการลู่เข้าของคำตอบจะมีค่าใกล้เคียงกันก็ตาม

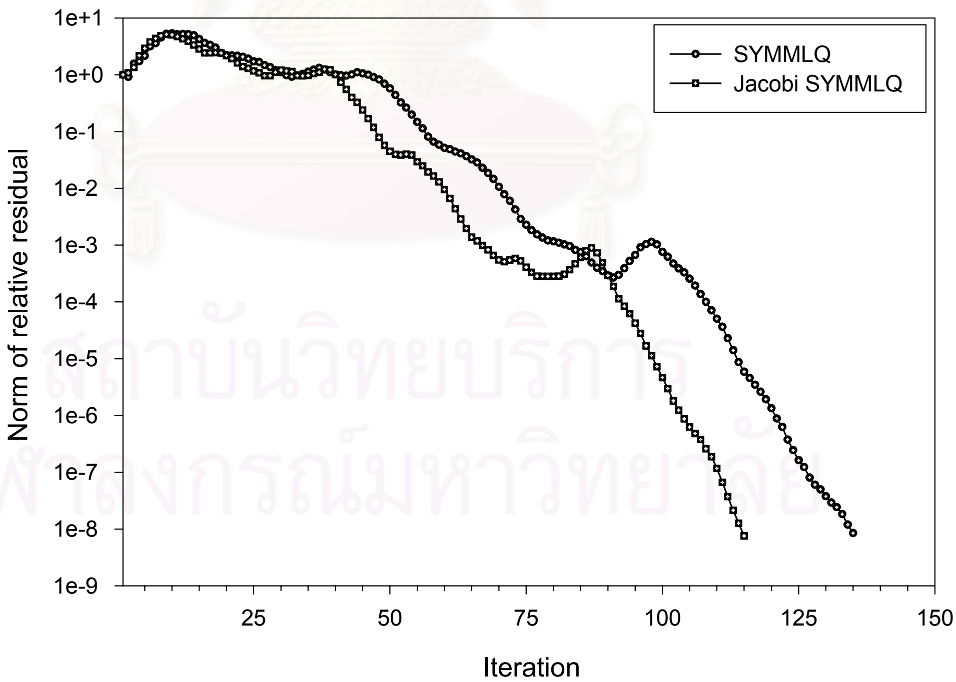
จากรูปที่ 4.31 และ 4.32 พบว่าการปรับสภาวะเริ่มต้นแบบจาโคบีส่งผลให้อัตราการลู่เข้าของคำตอบต่ำกว่าการไม่ใช้วิธีปรับสภาวะเริ่มต้น สำหรับวิธี SQMR ที่ใช้วิธีการปรับสภาวะเริ่มต้นแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ให้อัตราการลู่เข้าของคำตอบที่สูงกว่าโดยอัตราการลู่เข้าของคำตอบจะสูงขึ้นเมื่อใช้ค่าสัมประสิทธิ์เติมเต็มเท่ากับ 0.0005 0.0050 และ 0.0150 ตามลำดับ

เมื่อพิจารณารูปที่ 4.23 ซึ่งแสดงถึงเวลาในการคำนวณรวมทุกโหมดพบว่าวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟโดยส่วนใหญ่จะใช้เวลาในการคำนวณมากกว่าวิธีแยกแบบแอลยู และการใช้วิธีปรับสภาวะเริ่มต้นแบบจาโคบีใช้เวลาในการคำนวณมากกว่าการไม่ใช้วิธีปรับสภาวะเริ่มต้น มีเพียงวิธี SQMR ที่ใช้วิธีปรับสภาวะเริ่มต้นแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์เท่านั้นที่ใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีแยกแบบแอลยู โดยที่การแยกส่วนไม่สมบูรณ์ที่ใช้สัมประสิทธิ์เติมเต็มเท่ากับ 0.0050 ใช้เวลาในการคำนวณน้อยที่สุด สำหรับในส่วนของหน่วยเก็บข้อมูลเมื่อพิจารณาจากรูปที่ 4.24 พบว่าวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟยังคงใช้จำนวนหน่วยเก็บข้อมูลน้อยกว่าวิธีแยกแบบแอลยู

ถึงแม้ว่าเวลาในการคำนวณรวมทุกโหมดของวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟโดยส่วนใหญ่จะมากกว่าวิธีแยกแบบแอลยู แต่เมื่อพิจารณา รูปที่ 4.25 และ 4.26 ซึ่งแสดงถึงเวลาที่ใช้ในการคำนวณแต่ละโหมดของวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟเปรียบเทียบกับวิธีแยกแบบแอลยู พบว่าวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีแยกแบบแอลยูในช่วงโหมดแรกๆและช่วงโหมดท้ายๆ รูปที่ 4.27 แสดงเวลาที่ใช้ในการคำนวณในช่วง 130 โหมดแรกซึ่งพบว่าวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟส่วนใหญ่จะใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีแยกแบบแอลยู ยกเว้นวิธี SQMR โดยใช้การปรับสภาวะเริ่มต้นแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ที่ใช้สัมประสิทธิ์เติมเต็มเท่ากับ 0.0005 และ 0.0150 ที่ยังคงใช้เวลามากกว่าวิธีแยกแบบแอลยู โดยที่วิธี CG ที่ใช้การปรับสภาวะเริ่มต้นแบบจาโคบีใช้เวลาในการคำนวณน้อยที่สุด

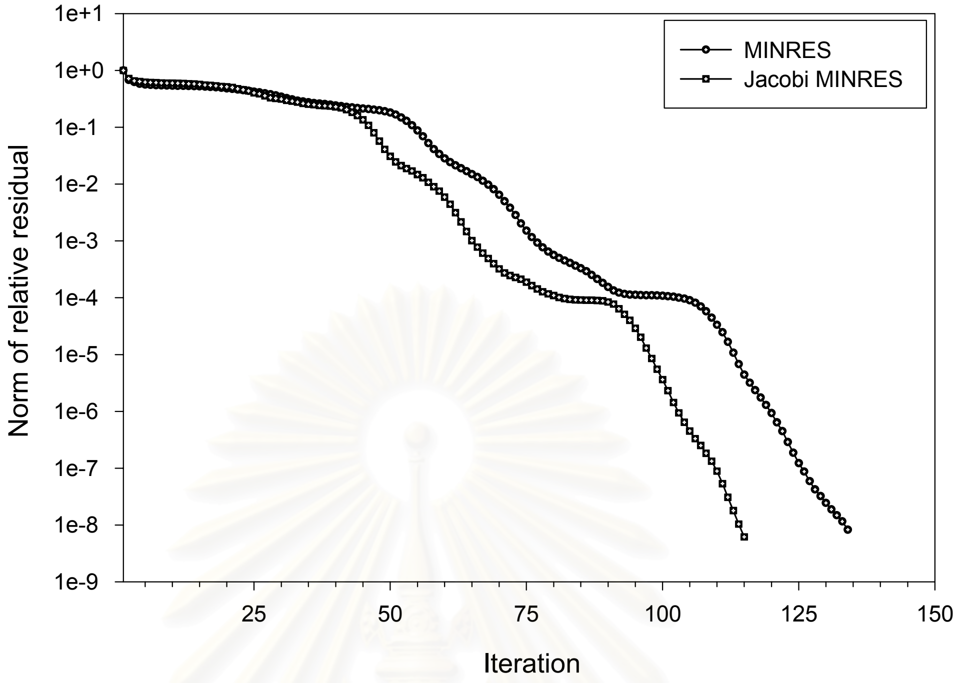


(ก) วิธีเกรเดียนต์สังยุค (CG)

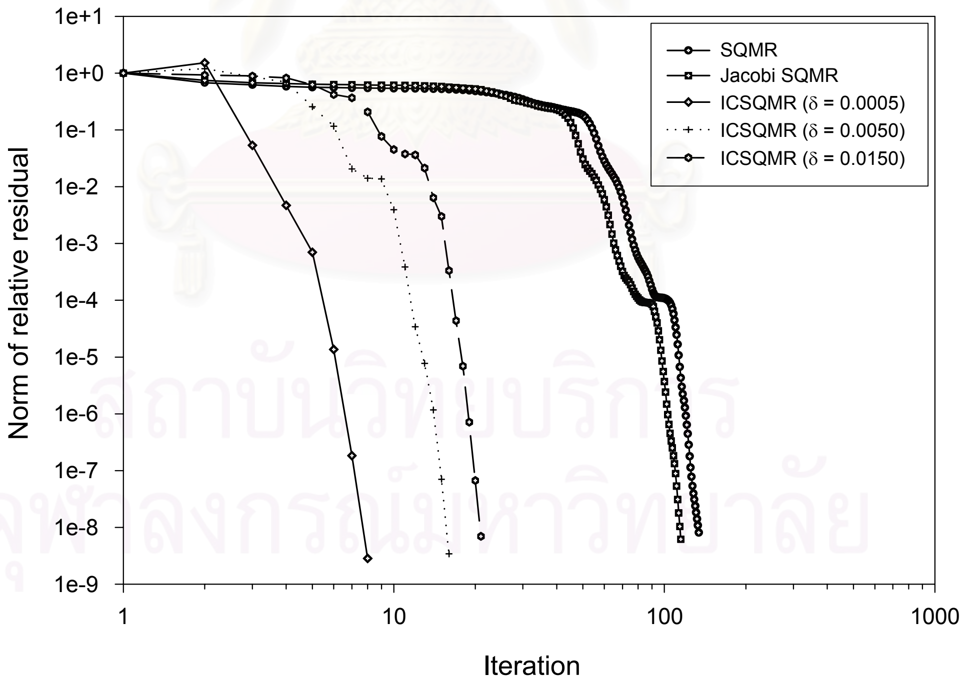


(ข) วิธีแอลคิวสมมาตร (SYMMLQ)

รูปที่ 4.19 นอร์มของเวกเตอร์คงค้างสัมพัทธ์กับจำนวนรอบการคำนวณที่เพิ่มขึ้นในโหมดที่ 1 ของวิธี CG และ SYMMLQ ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 50% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด

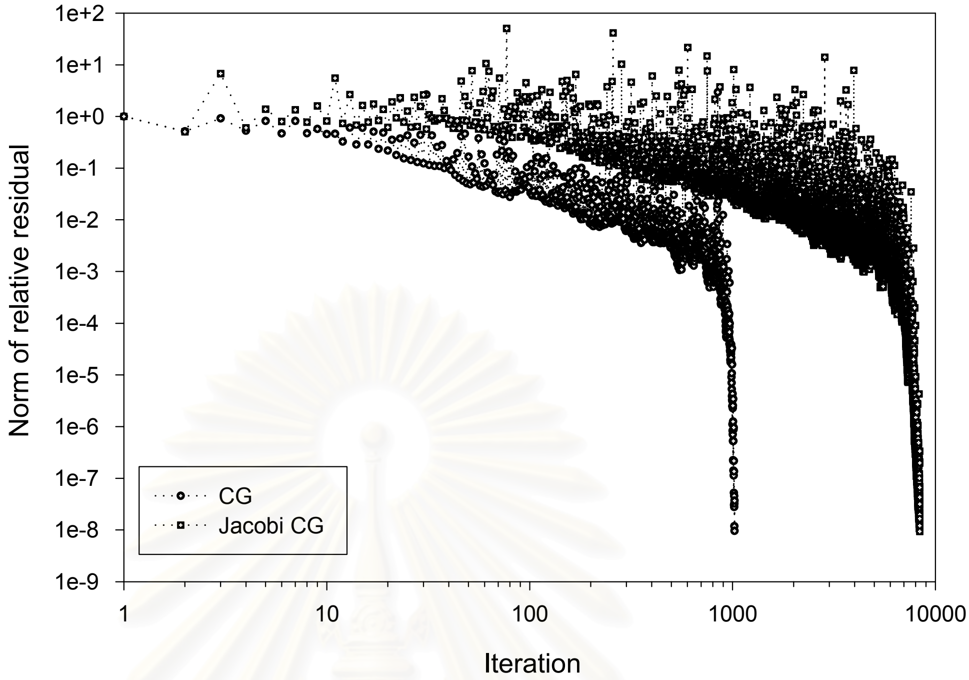


(ก) วิธีเวกเตอร์คงค้างน้อยที่สุด (MINRES)

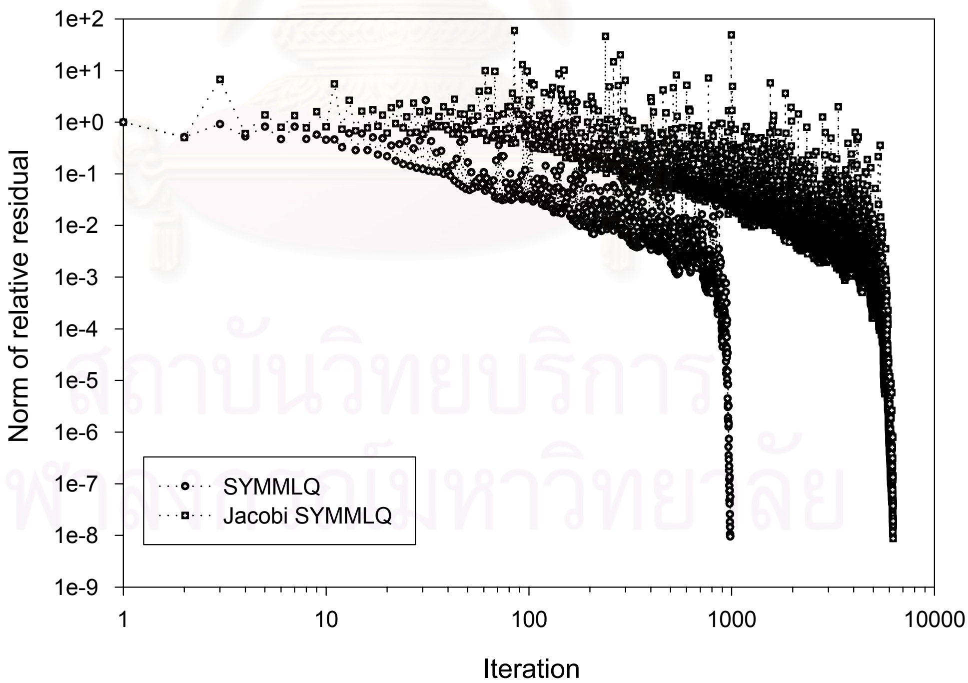


(ข) วิธีเวกเตอร์คงค้างเสมือนน้อยที่สุดสมมาตร (SQMR)

รูปที่ 4.20 นอร์มของเวกเตอร์คงค้างสัมพัทธ์กับจำนวนรอบการคำนวณที่เพิ่มขึ้นในโหมดที่ 1 ของวิธี MINRES และ SQMR ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 50% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด

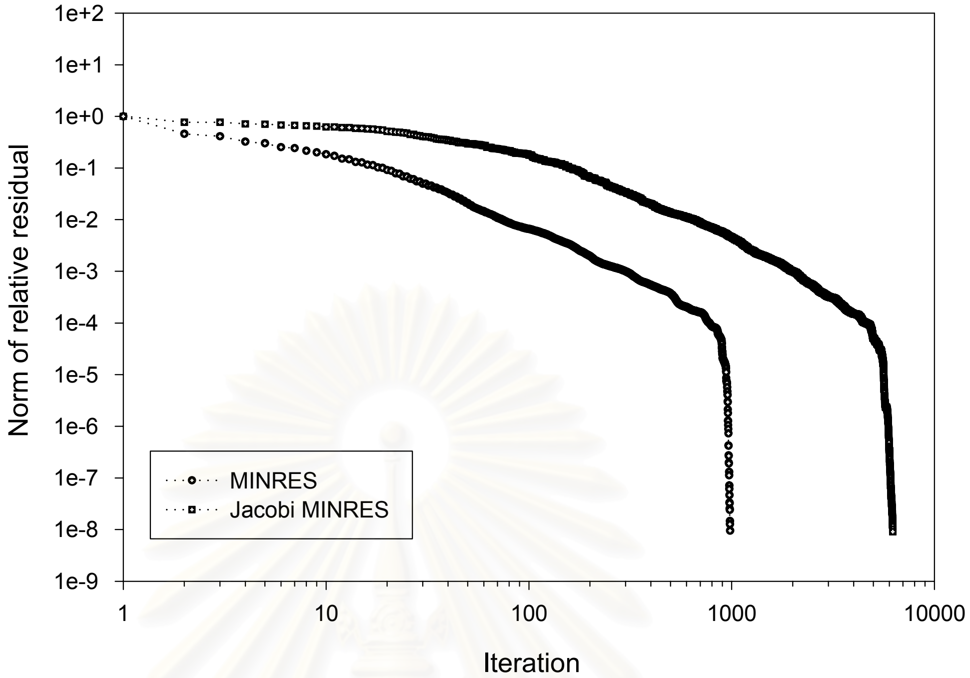


(ก) วิธีเกรเดียนต์สังยุค (CG)

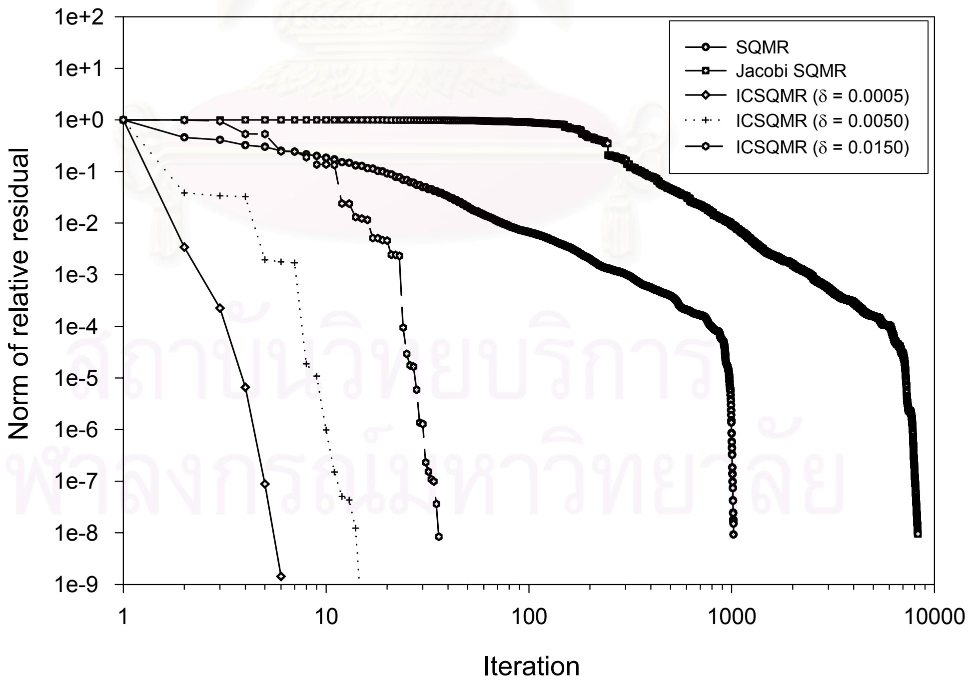


(ข) วิธีแอลคิวสมมาตร (SYMMLQ)

รูปที่ 4.21 นอร์มของเวกเตอร์คงค้างสัมพัทธ์กับจำนวนรอบการคำนวณที่เพิ่มขึ้นในโหมดที่ 294 ของวิธี CG และ SYMMLQ ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 50% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด

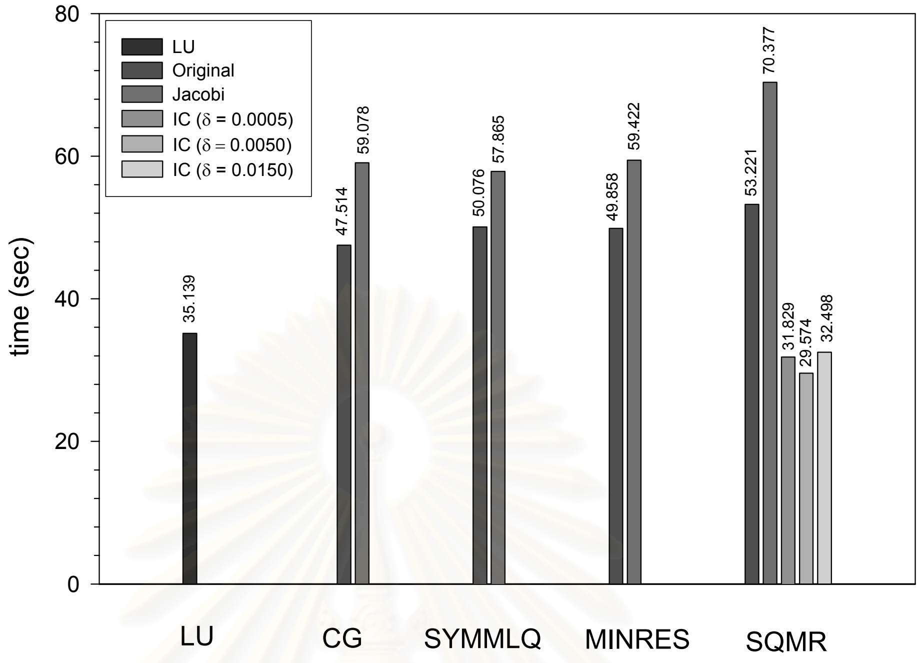


(ก) วิธีเวกเตอร์คงค้างน้อยที่สุด (MINRES)

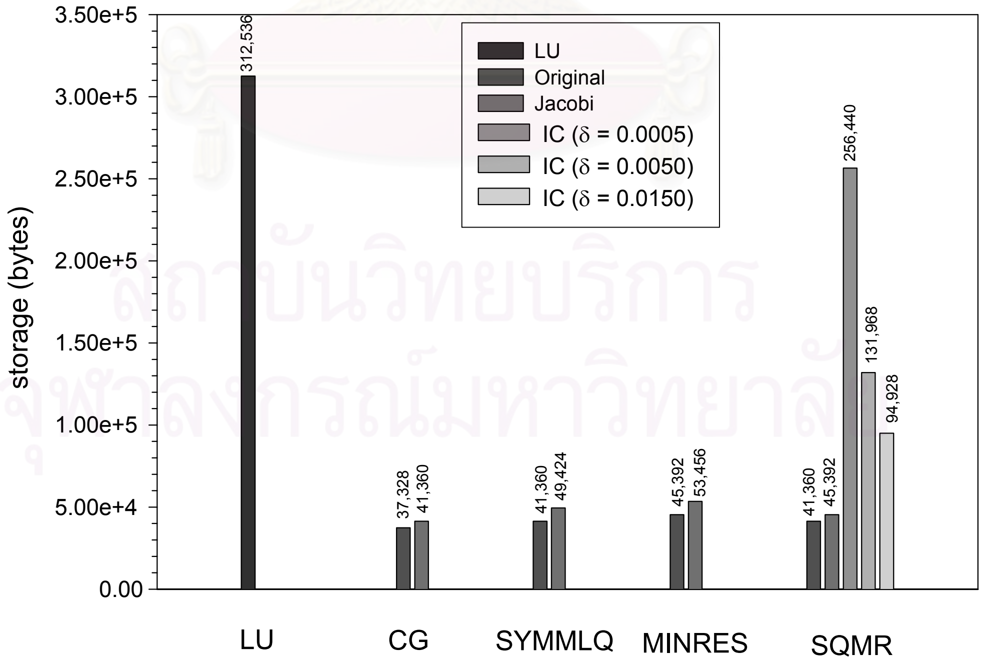


(ข) วิธีเวกเตอร์คงค้างเสมือนน้อยที่สุดสมมาตร (SQMR)

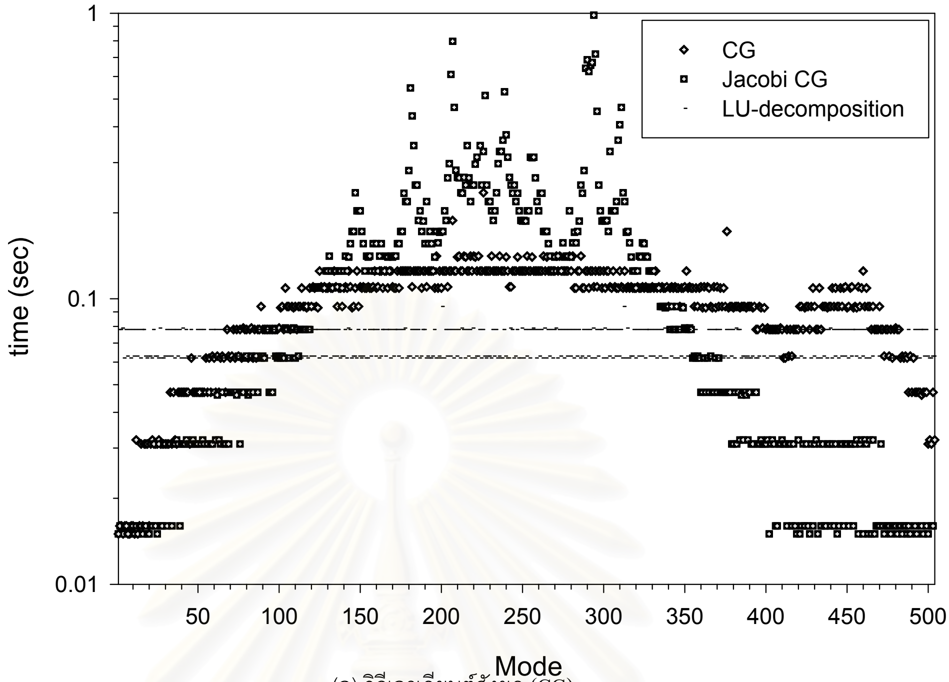
รูปที่ 4.22 นอร์มของเวกเตอร์คงค้างสัมพัทธ์กับจำนวนรอบการคำนวณที่เพิ่มขึ้นในโหมดที่ 294 ของวิธี MINRES และ SQMR ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 50% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด



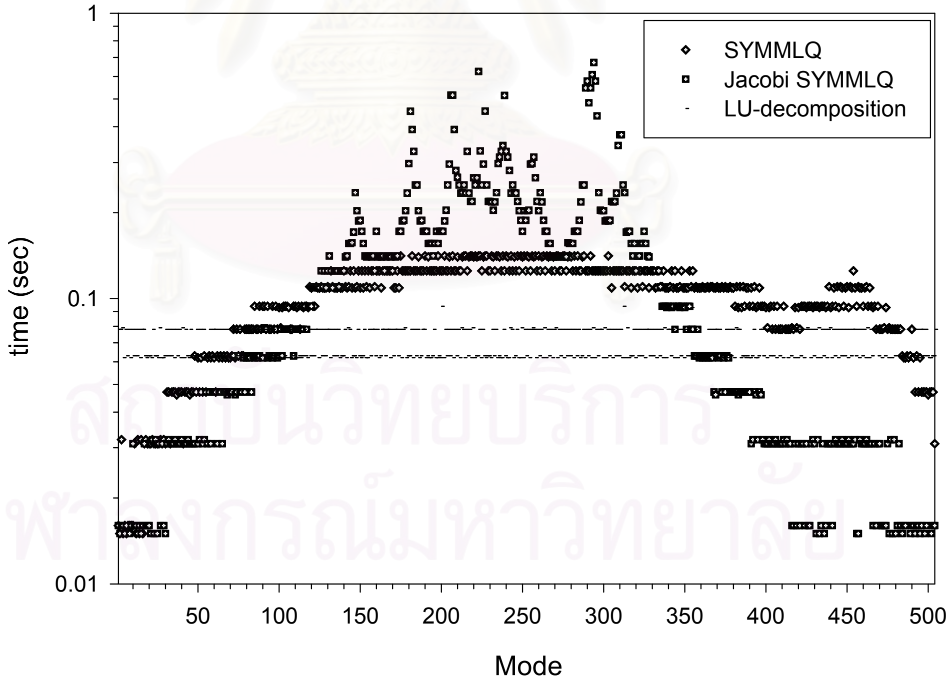
รูปที่ 4.23 การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณครบทุกโหมดระหว่างวิธีแยกแบบแอลยูและวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟในแต่ละวิธี ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 50% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด



รูปที่ 4.24 การเปรียบเทียบจำนวนหน่วยเก็บระหว่างวิธีแยกแบบแอลยูและวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟแต่ละวิธี ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 50% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด

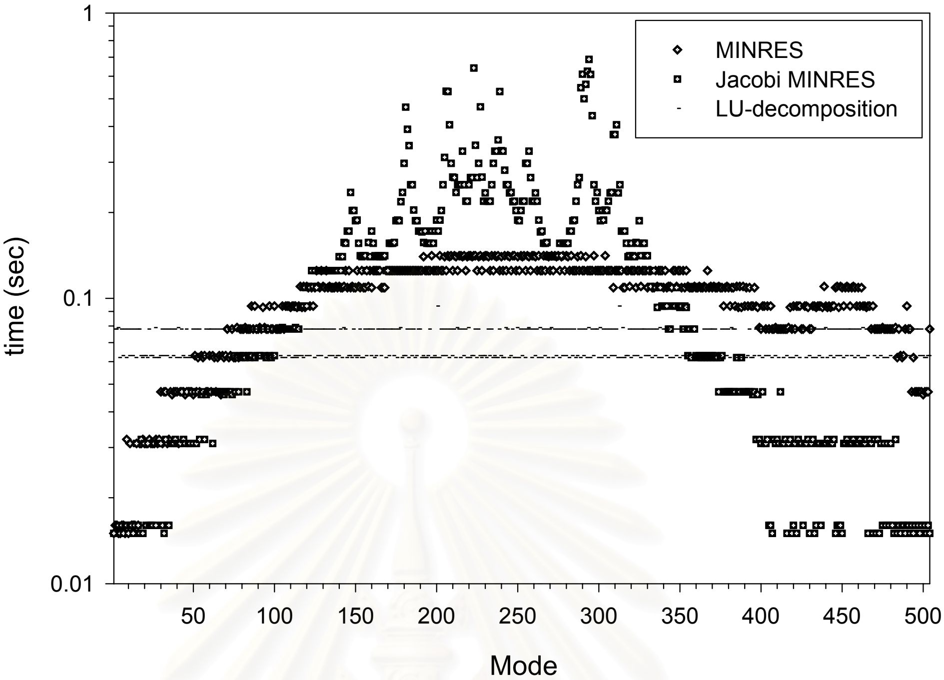


(ก) วิธีเกรเดียนต์สังยุค (CG)

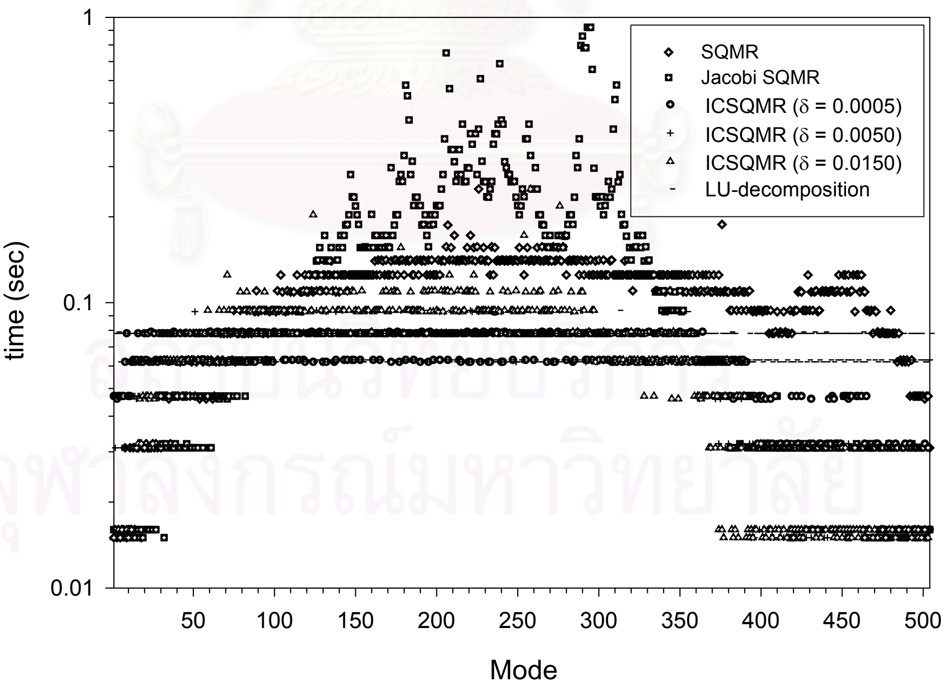


(ก) วิธีเกรเดียนต์สังยุค (CG)

รูปที่ 4.25 เวลาที่ใช้ในการคำนวณแต่ละโหมดของวิธี CG และ SYMMLQ ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 50% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด

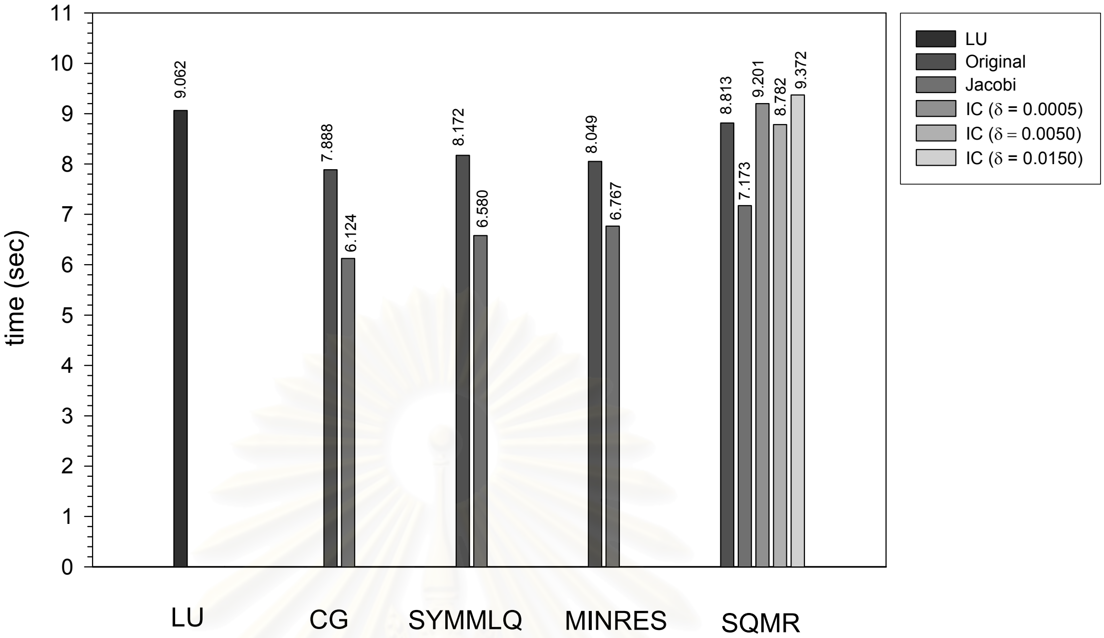


(ก) วิธีเวกเตอร์คงค้างน้อยที่สุด (MINRES)



(ข) วิธีเวกเตอร์คงค้างเสมือนน้อยที่สุดสมมาตร (SQMR)

รูปที่ 4.26 เวลาที่ใช้ในการคำนวณแต่ละโหมดของวิธี MINRES และ SQMR ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 50% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด



รูปที่ 4.27 การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณในช่วง 130 โหมดแรก ระหว่างวิธีแยกแบบแอลยูและวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟในแต่ละวิธี ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 50% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด

4.4.4 กรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 10% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมดในแต่ละโหมด

ในกรณีนี้วัดรูปแบบการสั่นไหวได้เพียง 50 ระดับขั้นความเสรีจากรูปแบบการสั่นไหวทั้งหมด 504 ระดับขั้นความเสรี โดยรูปแบบการสั่นไหวที่วัดได้กระจายไปทั่วทั้งโครงสร้าง ซึ่ง $\mathbf{B}_i(\mathbf{x})$ จากสมการที่ (4.3.2) จะมีคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอนเฉพาะในโหมดแรกของการวัดข้อมูลเท่านั้น จึงทำให้เกิดข้อจำกัดในการเลือกใช้วิธีการปรับสภาวะเบื้องต้นของเมตริกซ์สำหรับวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟในแต่ละวิธี เช่นเดียวกับในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 10% และ 50% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด

เมื่อพิจารณาจำนวนรอบการคำนวณซ้ำในแต่ละโหมดของวิธี CG SYMMLQ MINRES และ SQMR ดังแสดงในรูปที่ 4.28 (ก)-(ข) และ 4.29 (ก)-(ข) ตามลำดับ จำนวนรอบในการคำนวณซ้ำของวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟทั้ง 4 วิธี มีแนวโน้มเดียวกับในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 10% และ 50% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด กล่าวคือมีค่าเพิ่มขึ้นในช่วงโหมดแรกและเพิ่มขึ้นถึงจุดสูงสุดในช่วงโหมดกลาง จากนั้นเริ่มจะมีค่าลดลงและมีค่าน้อยที่สุดในโหมดสุดท้าย แต่ในกรณีนี้จะมีจำนวนรอบการคำนวณซ้ำในแต่ละโหมดมากที่สุด

ตารางที่ 4.5 ตัวเลขบอกสภาวะของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ภายหลังการปรับสภาวะสำหรับแต่ละวิธีในทุกโหมด กรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 50% ของทุกระดับขั้นความเสรี

วิธีการปรับสภาวะเริ่มต้นของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์	ตัวเลขบอกสภาวะ (κ)		
	โหมดที่ 1	โหมที่ 294	โหมดที่ 504
1. ไม่ใช้การปรับสภาวะ	24,940.51	13,311.97	130.11
2. การปรับสภาวะแบบจาโคบี	21,051.75	1,197,030.98	70.77
3. การปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ (δ = 0.0005)	121.34	36.62	1.08
4. การปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ (δ = 0.0025)	1,328.42	3,332.99	1.32
5. การปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ (δ = 0.0150)	925.14	229,589.72	2.09

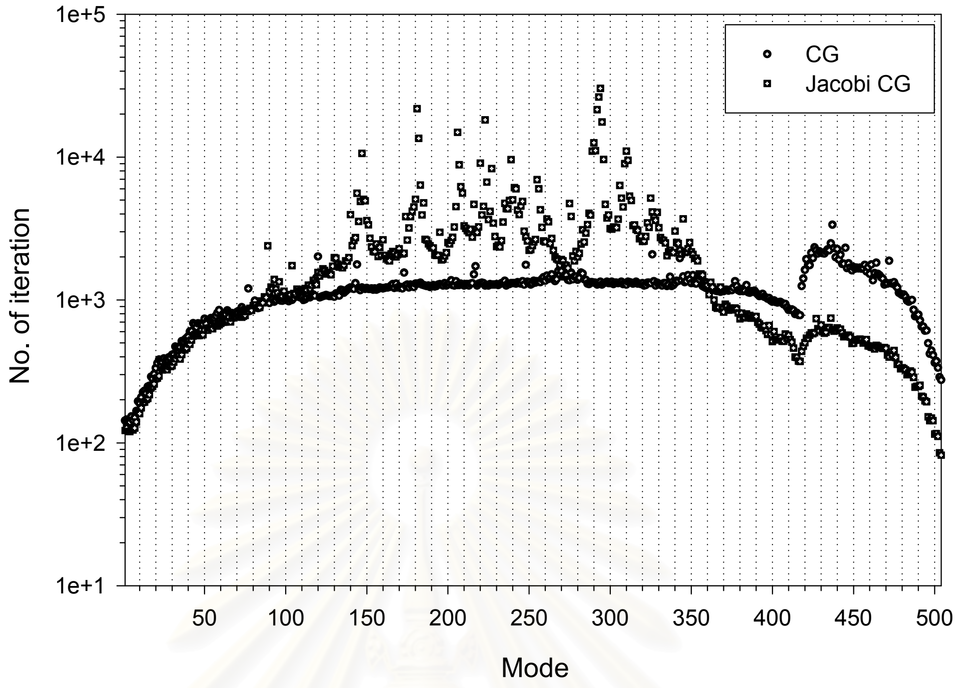
ตารางที่ 4.5 ได้แสดงถึงตัวเลขบอกสภาวะของการปรับสภาวะแต่ละวิธีที่เลือกใช้ในโหมดต่างๆที่นำมาพิจารณา ซึ่งจากตัวเลขบอกสภาวะในตารางที่ 4.5 สำหรับวิธีปรับสภาวะเริ่มต้นที่เลือกใช้ในโหมดที่ 1 และโหมดที่ 504 สามารถอธิบายได้ถึงการปรับสภาวะเริ่มต้นให้แก่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ส่งผลให้เมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีสภาวะที่ดีขึ้นซึ่งพิจารณาได้จากตัวเลขบอกสภาวะที่มีค่าน้อยลง ในทางตรงกันข้ามสำหรับในโหมดที่ 294 เฉพาะการปรับสภาวะเริ่มต้นโดยวิธีจาโคบีเท่านั้นที่ให้ค่าของตัวเลขบอกสภาวะที่มากขึ้น ซึ่งสามารถแสดงให้ในรูปที่ 4.28 และ 4.29 วิธีการปรับสภาวะเริ่มต้นจาโคบีส่งผลให้จำนวนรอบการคำนวณในโหมดที่ 294 มีค่ามากที่สุด และตั้งแต่โหมดที่ 360 ถึงโหมดที่ 504 วิธีปรับสภาวะจาโคบีให้จำนวนรอบการคำนวณน้อยกว่าการไม่ใช้วิธีปรับสภาวะ และเมื่อพิจารณารูปที่ 4.29 (ข) วิธี SQMR ร่วมกับการปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์จะได้จำนวนรอบการคำนวณในแต่ละโหมดน้อยกว่า วิธี SQMR ที่ไม่มีการปรับสภาวะ และ วิธี SQMR ที่ใช้วิธีการปรับสภาวะจาโคบี

พฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบของวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟแต่ละวิธีแสดงได้ในรูปที่ 4.30 – 4.33 โดยในรูปที่ 4.30 - 4.31 เป็นพฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบในโหมดที่ 1 และรูปที่ 4.32 – 4.33 จะเป็นพฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบในโหมดที่ 294 เมื่อพิจารณาพฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบระหว่างวิธี CG และ SYMMLQ เปรียบเทียบกับวิธี MINRES และ SQMR ในโหมดที่ 1 และโหมดที่ 294 พบว่าวิธี MINRES และ SQMR ให้พฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบที่ราบเรียบกว่าวิธี CG และ SYMMLQ เมื่อพิจารณาในโหมดที่ 294 วิธี CG และ SYMMLQ มีพฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบที่กวัดแกว่งอย่างมากตลอดช่วงและอัตราการลู่เข้าจะมีค่ามากในช่วงท้าย ในขณะที่วิธี MINRES และ SQMR มีพฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบที่ราบเรียบกว่าถึงแม้ว่าสุดท้ายแล้วจำนวนรอบการคำนวณเมื่อเกิดการลู่เข้าของคำตอบจะมีค่าใกล้เคียงกันก็ตาม

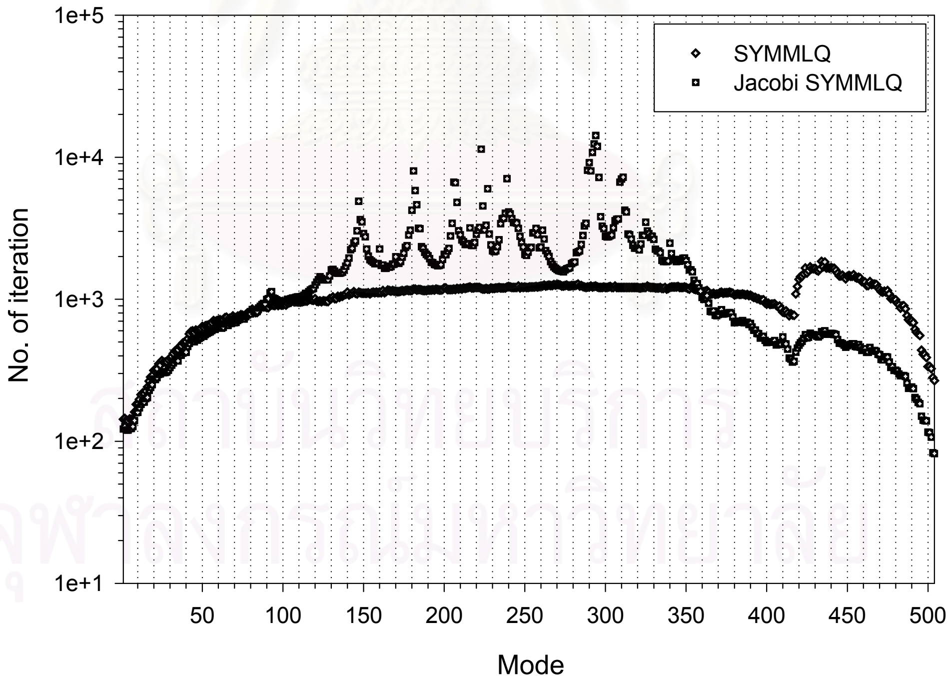
จากรูปที่ 4.32 และ 4.33 การปรับสภาวะเริ่มต้นแบบจาโคบีให้อัตราการลู่เข้าของคำตอบที่น้อยกว่าการไม่ใช้วิธีปรับสภาวะเริ่มต้น สำหรับวิธี SQMR ที่ใช้วิธีการปรับสภาวะเริ่มต้นแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ให้อัตราการลู่เข้าของคำตอบที่ดีกว่าโดยอัตราการลู่เข้าของคำตอบจะมากที่สุดเมื่อมีสัมประสิทธิ์เติมเต็มเท่ากับ 0.0005 0.0025 และ 0.0150 ตามลำดับ

เมื่อพิจารณารูปที่ 4.34 ซึ่งแสดงถึงเวลาในการคำนวณรวมทุกโหมดพบว่าในกรณีนี้ วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟทุกวิธีใช้เวลาในการหาคำตอบมากกว่าวิธีแยกแบบแอลยู ยกเว้นวิธี SQMR ที่ใช้การปรับสภาวะเริ่มต้นแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ที่มีสัมประสิทธิ์เติมเต็มเท่ากับ 0.0005 และ 0.0025 ที่ใช้เวลาน้อยกว่าวิธีแยกแบบแอลยู โดยที่การแยกส่วนไม่สมบูรณ์ที่มีสัมประสิทธิ์เติมเต็มเท่ากับ 0.0025 ใช้เวลาในการคำนวณน้อยที่สุด นอกจากนี้การใช้วิธีปรับสภาวะเริ่มต้นแบบจาโคบีใช้เวลาในการคำนวณมากกว่าการไม่ใช้วิธีปรับสภาวะเริ่มต้น สำหรับในส่วนของหน่วยเก็บข้อมูลเมื่อพิจารณาจากรูปที่ 4.35 พบว่าวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟยังคงใช้จำนวนหน่วยเก็บข้อมูลน้อยกว่าวิธีแยกแบบแอลยู

ถึงแม้ว่าเวลาในการคำนวณรวมทุกโหมดของวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟโดยส่วนใหญ่จะใช้เวลามากกว่าวิธีแยกแบบแอลยู แต่เมื่อพิจารณา รูปที่ 4.36 และ 4.37 ซึ่งแสดงถึงเวลาที่ใช้ในการคำนวณแต่ละโหมดของวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟเปรียบเทียบกับวิธีแยกแบบแอลยู พบว่าวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีแยกแบบแอลยูในช่วงโหมดแรกๆและช่วงโหมดท้ายๆของการวัดข้อมูล ดังนั้นจากรูปที่ 4.27 ซึ่งแสดงถึงเวลาที่ใช้ในการคำนวณช่วง 70 โหมดแรกพบว่าวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟส่วนใหญ่จะใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีแยกแบบแอลยู ยกเว้นวิธี SQMR โดยใช้การปรับสภาวะเริ่มต้นแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ที่มีสัมประสิทธิ์เติมเต็มเท่ากับ 0.0150 ที่ยังคงใช้เวลามากกว่าวิธีแยกแบบแอลยู โดยที่วิธี CG ที่ใช้การปรับสภาวะเริ่มต้นแบบจาโคบีใช้เวลาในการคำนวณน้อยที่สุด

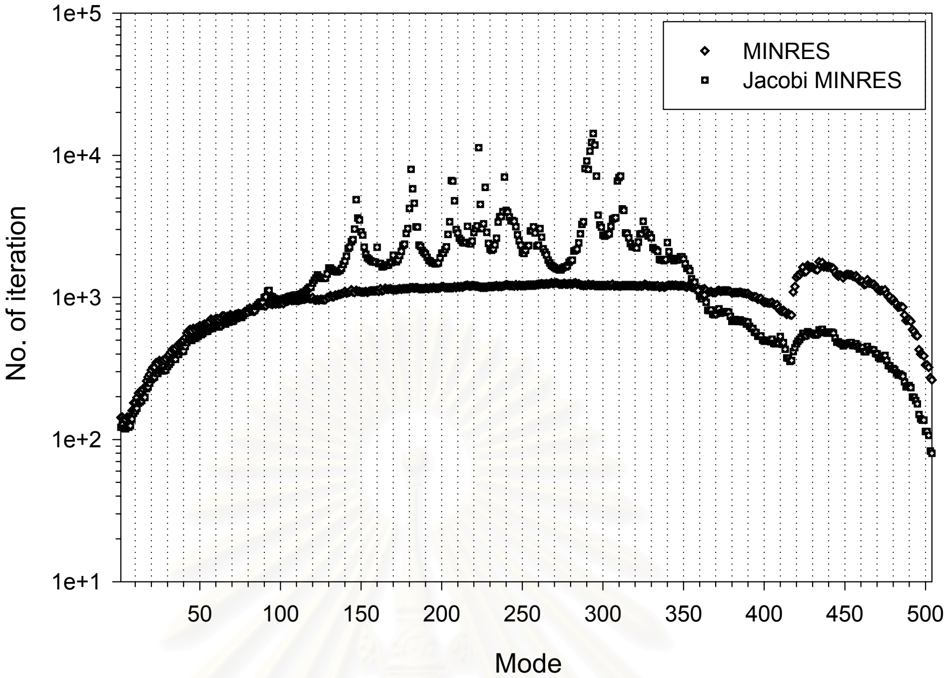


(ก) วิธีเกรเดียนต์สังยุค (CG)

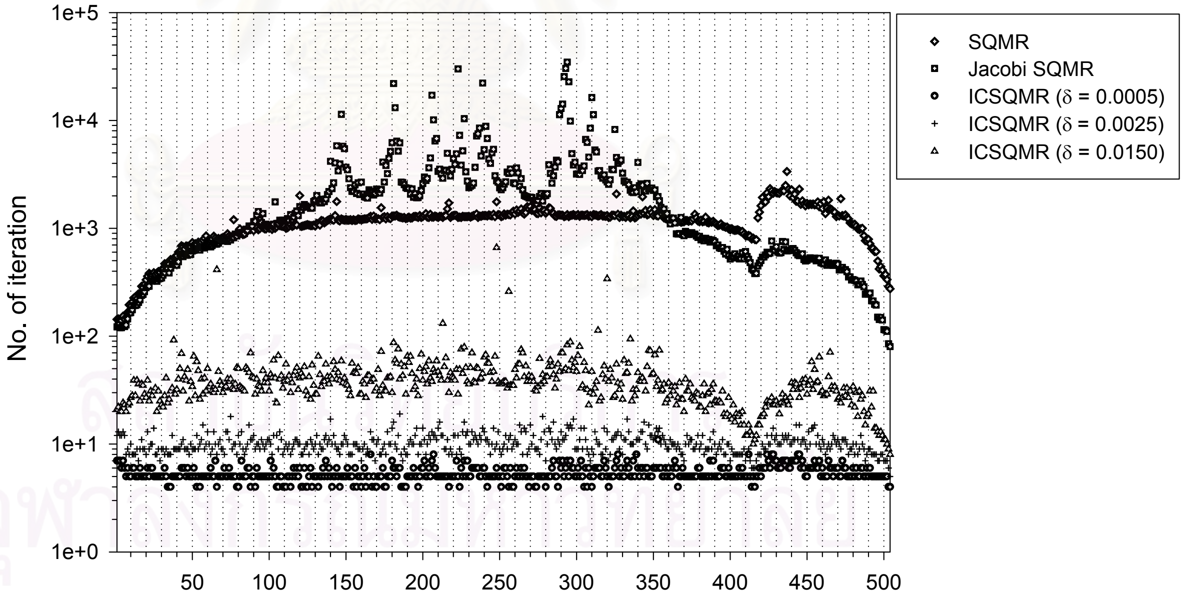


(ข) วิธีแอลคิวสมมาตร (SYMMLQ)

รูปที่ 4.28 จำนวนรอบการคำนวณซ้ำในแต่ละโหมดของวิธี CG และ SYMMLQ ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 10% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด

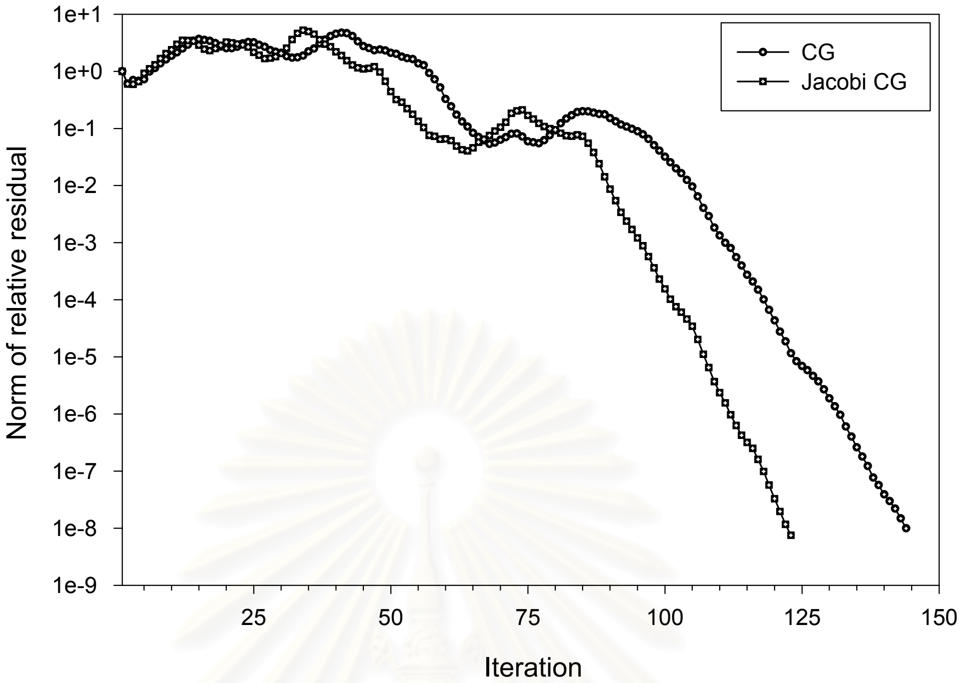


(ก) เวกเตอร์คงค้างน้อยที่สุด (MINRES)

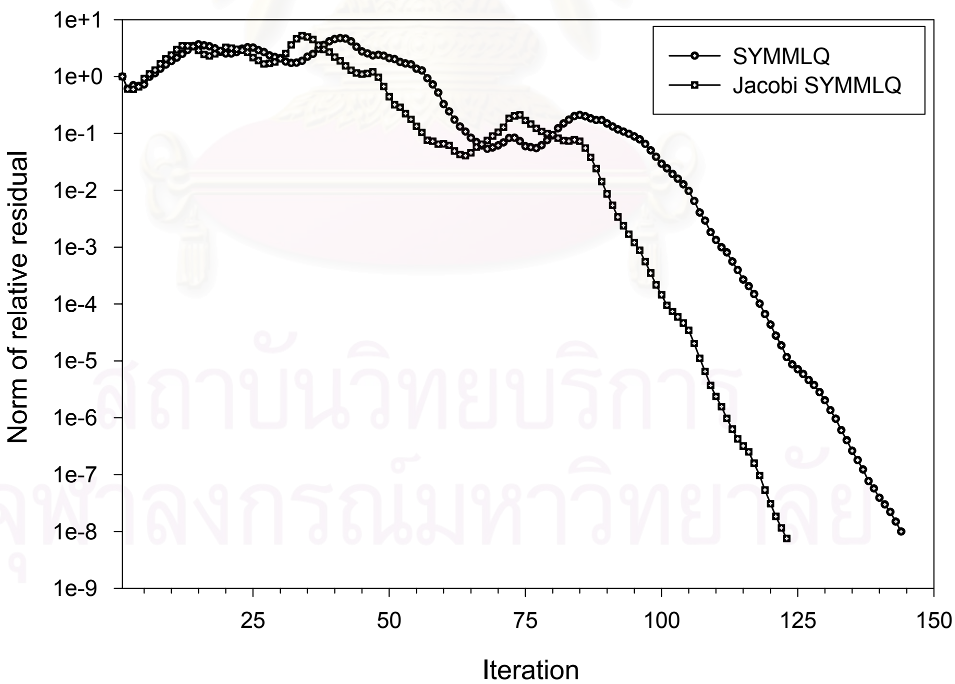


(ข) วิธีเวกเตอร์คงค้างน้อยที่สุดสมมาตร (SQMR)

รูปที่ 4.29 จำนวนรอบการคำนวณซ้ำในแต่ละโหมดของวิธี MINRES และ SQMR ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 10% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด

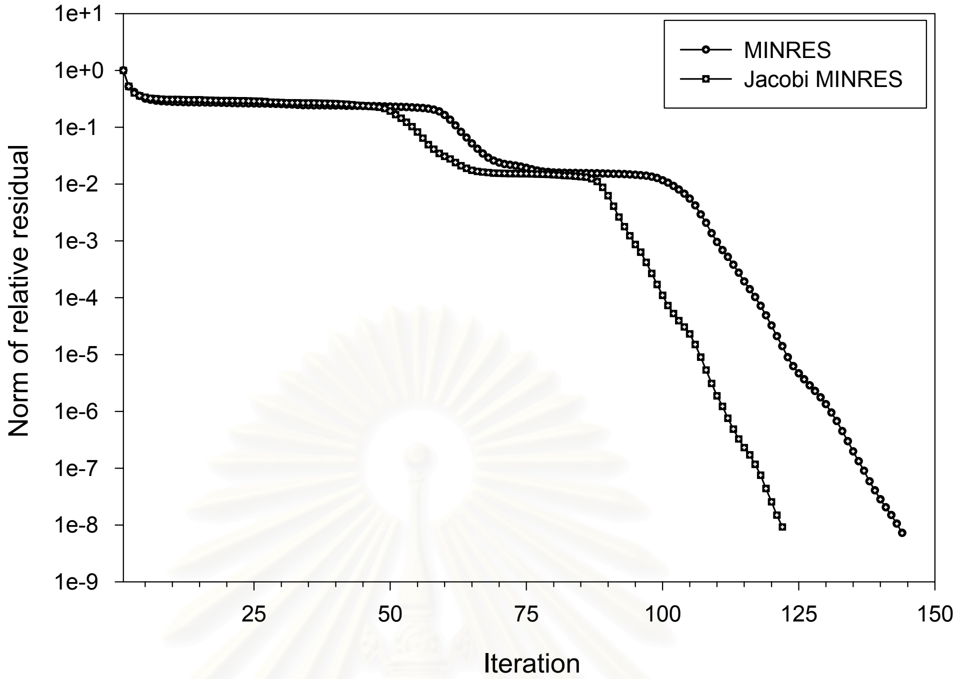


(ก) วิธีเกรเดียนต์สังยุค (CG)

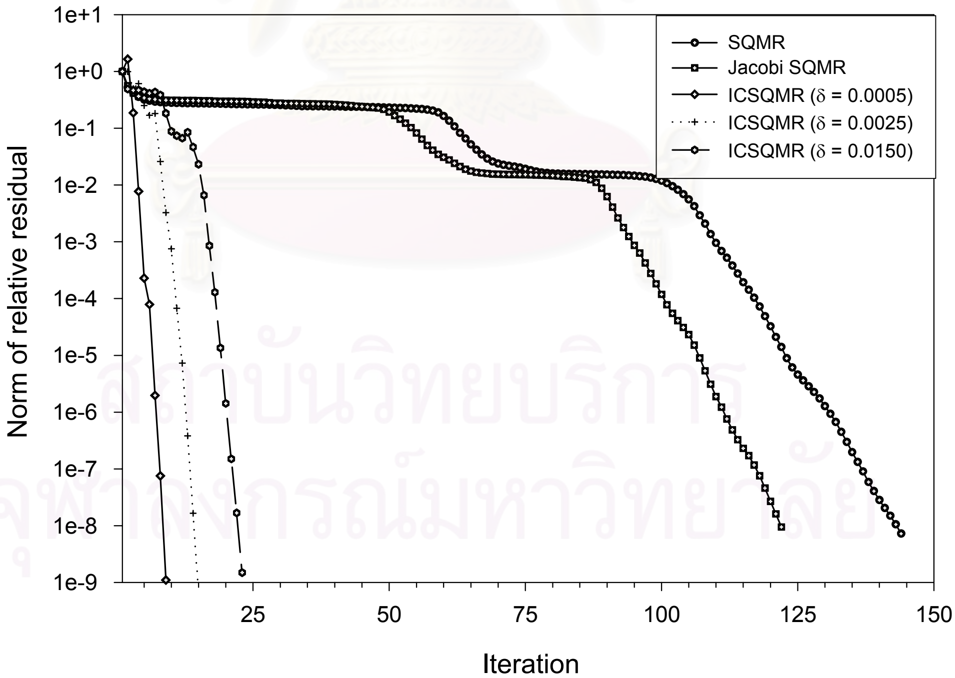


(ข) วิธีแอลคิวสมมาตร (SYMMLQ)

รูปที่ 4.30 นอร์มของเวกเตอร์คงค้างสัมพัทธ์กับจำนวนรอบการคำนวณที่เพิ่มขึ้นในโหมดที่ 1 ของวิธี CG และ SYMMLQ ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 10% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด

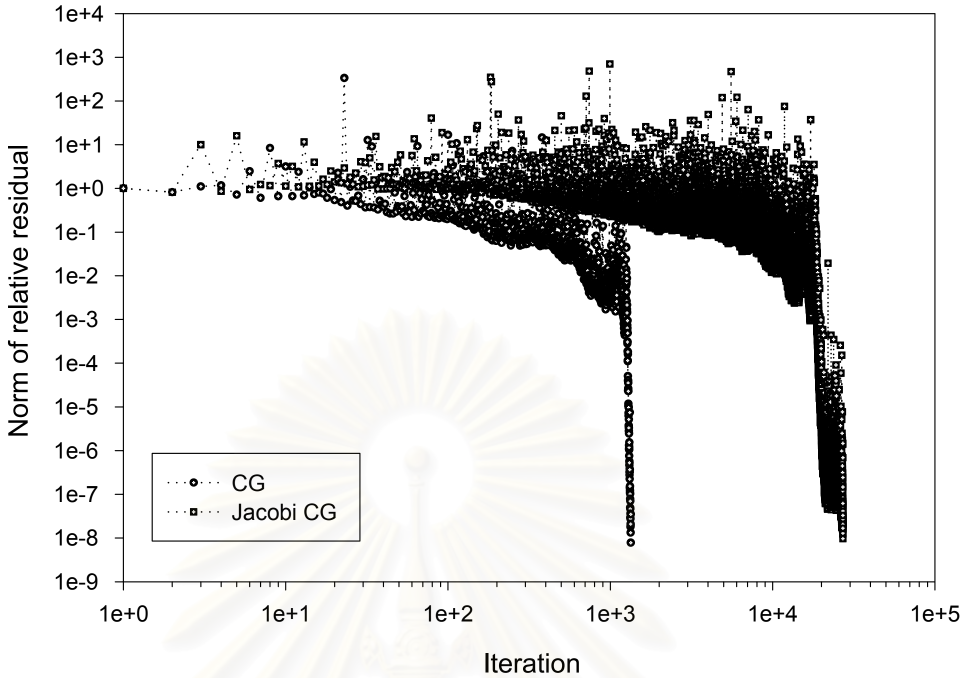


(ก) วิธีเวกเตอร์คงค้างน้อยที่สุด (MINRES)

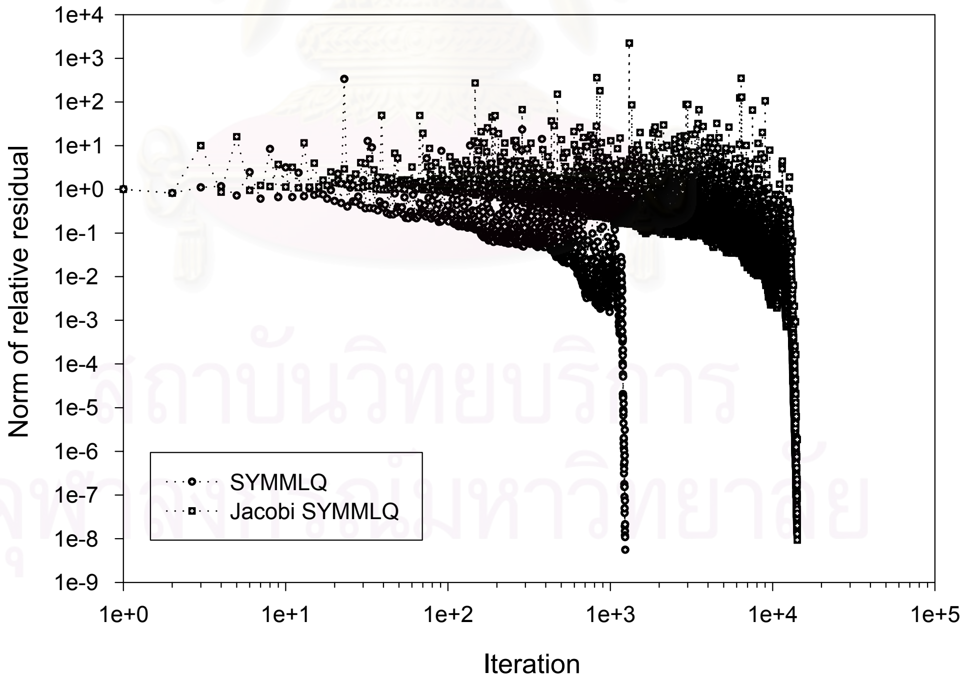


(ข) วิธีเวกเตอร์คงค้างเสมือนน้อยที่สุดสมมาตร (SQMR)

รูปที่ 4.31 นอร์มของเวกเตอร์คงค้างสัมพัทธ์กับจำนวนรอบการคำนวณที่เพิ่มขึ้นในโหมดที่ 1 ของวิธี MINRES และ SQMR ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 10% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด

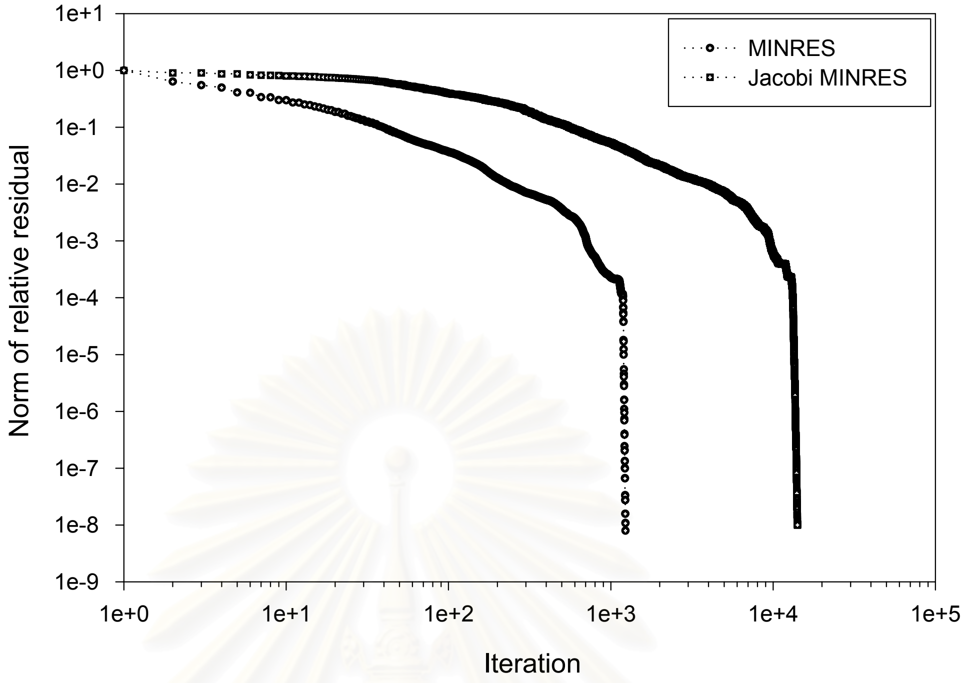


(ก) วิธีเกรเดียนต์สังยุค (CG)

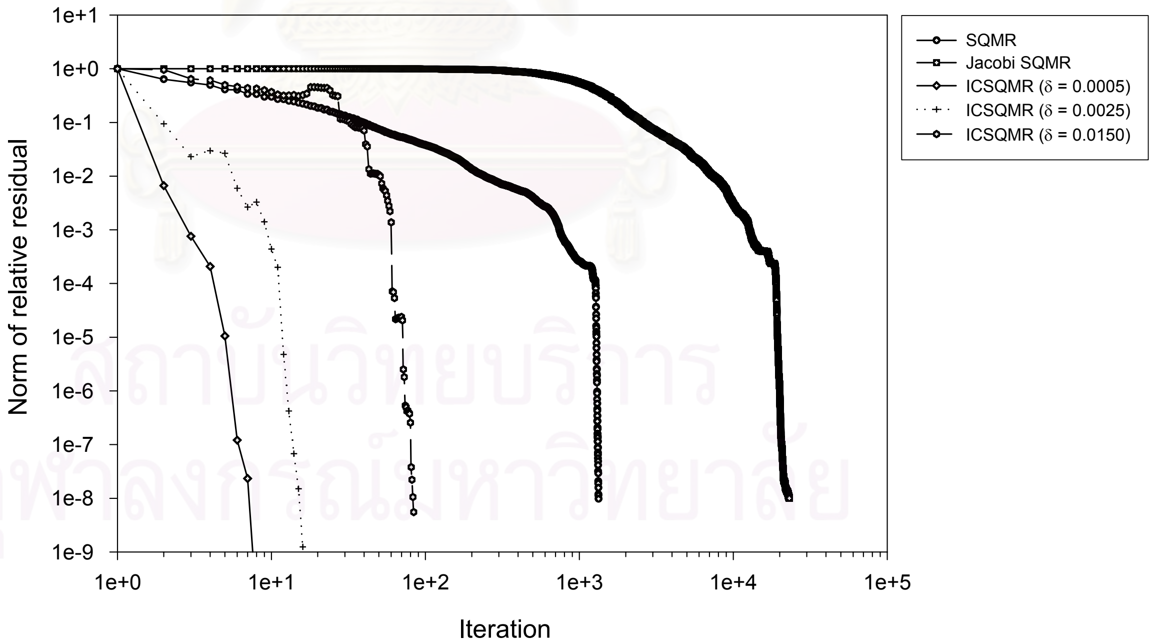


(ข) วิธีแอลคิวสมมาตร (SYMMLQ)

รูปที่ 4.32 นอร์มของเวกเตอร์คงค้างสัมพัทธ์กับจำนวนรอบการคำนวณที่เพิ่มขึ้นในโหมดที่ 294 ของวิธี CG และ SYMMLQ ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 10% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด

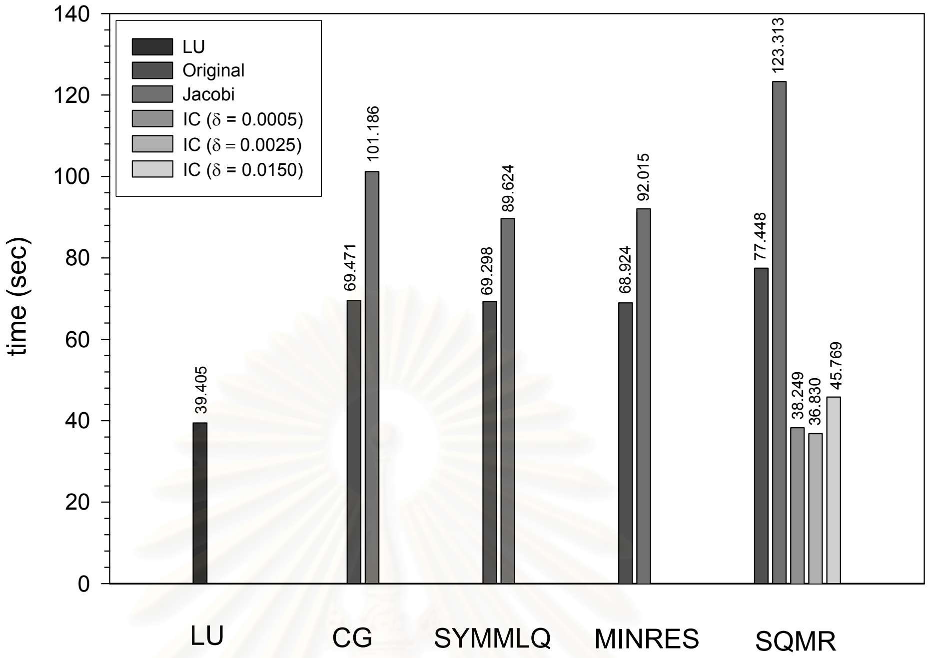


ก) วิธีเวกเตอร์คงค้างน้อยที่สุด (MINRES)

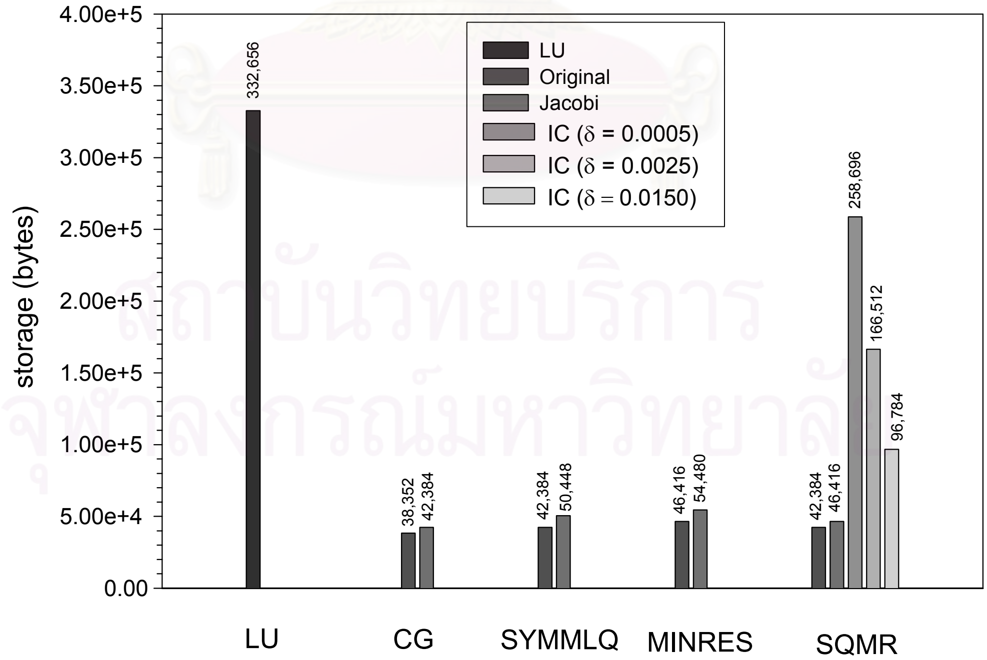


(ข) วิธีเวกเตอร์คงค้างเสมือนน้อยที่สุดสมมาตร (SQMR)

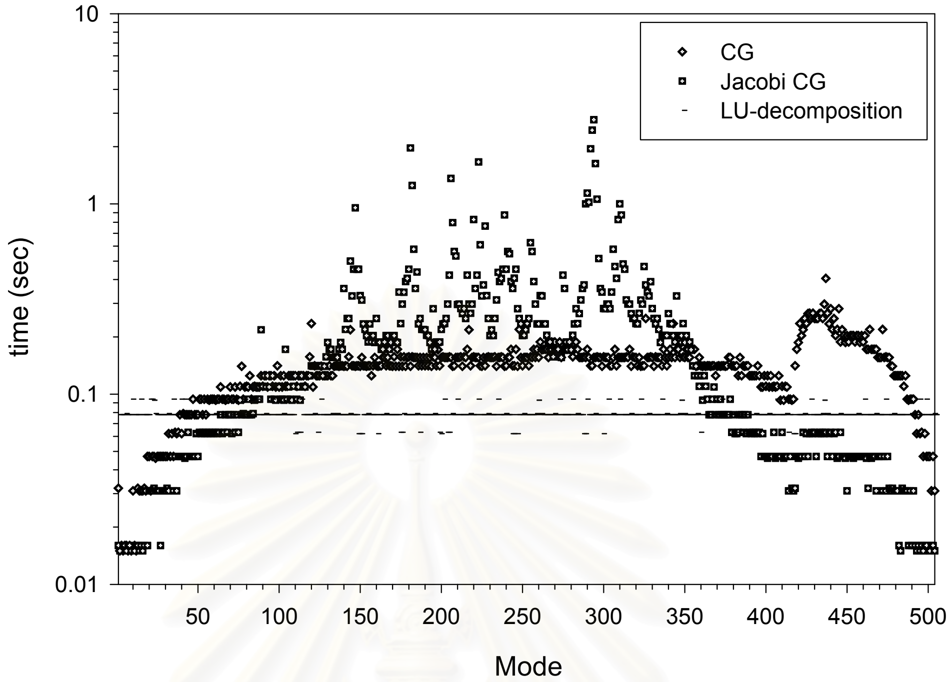
รูปที่ 4.33 นอร์มของเวกเตอร์คงค้างสัมพัทธ์กับจำนวนรอบการคำนวณที่เพิ่มขึ้นในโหมดที่ 294 ของวิธี MINRES และ SQMR ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 10% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด



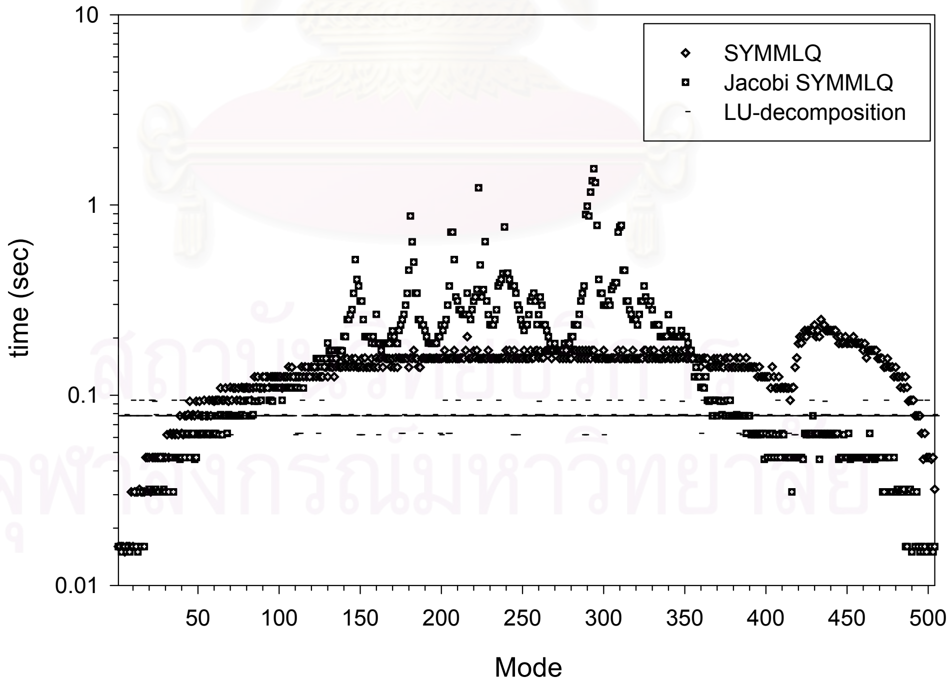
รูปที่ 4.34 การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณครบทุกโหมดระหว่างวิธีแยกแบบแอลยูและวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟในแต่ละวิธี ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 10% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด



รูปที่ 4.35 การเปรียบเทียบจำนวนหน่วยเก็บระหว่างวิธีแยกแบบแอลยูและวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟแต่ละวิธี ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 10% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด

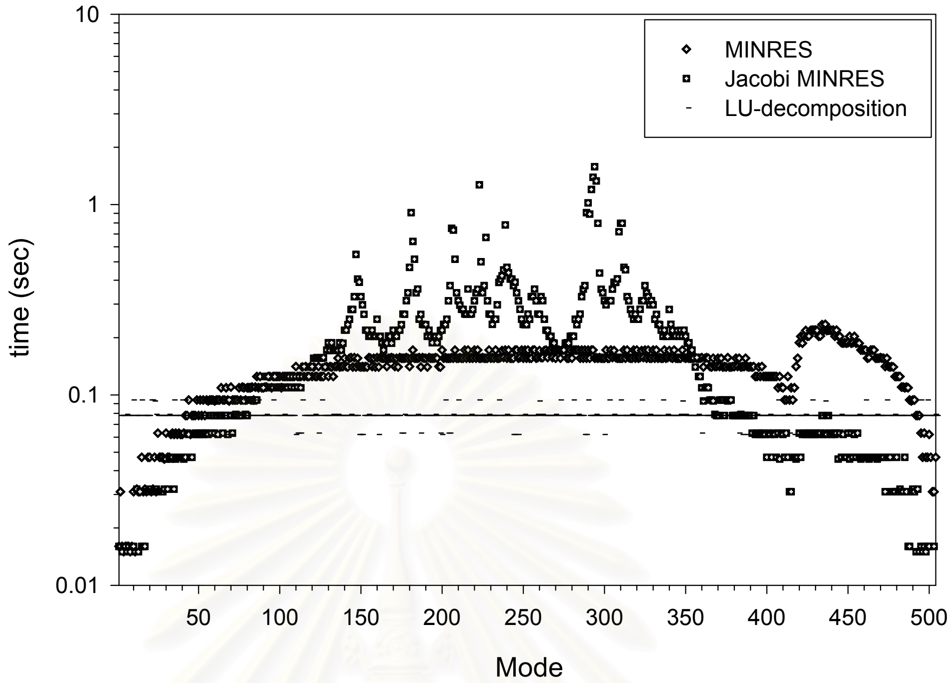


(ก) วิธีเกรเดียนต์สังยุค (CG)

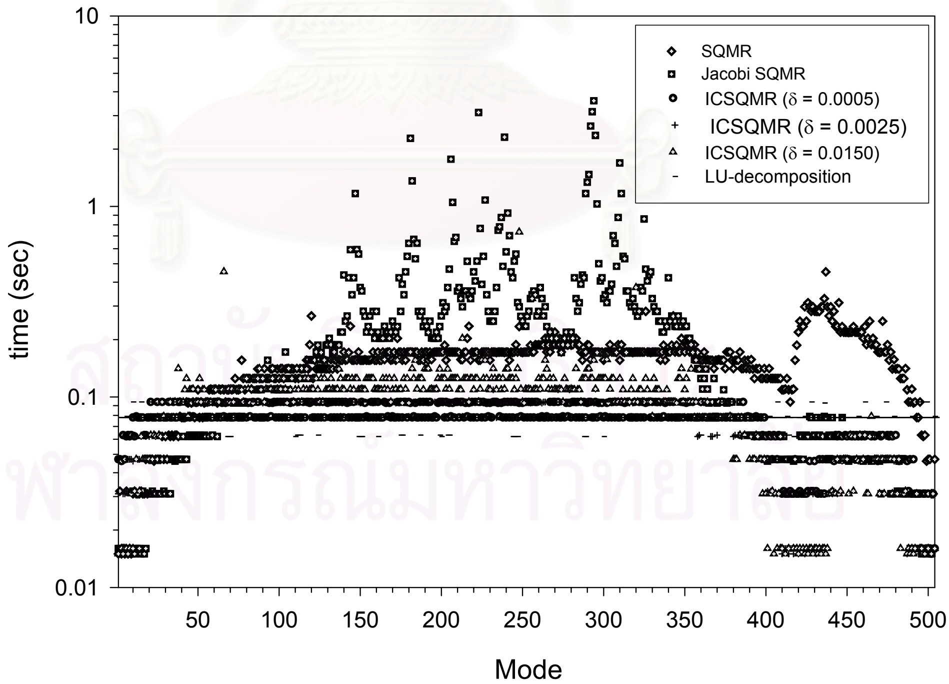


(ข) วิธีแอลคิวสมมาตร (SYMMLQ)

รูปที่ 4.36 เวลาที่ใช้ในการคำนวณแต่ละโหมดของวิธี CG และ SYMMLQ โดยเปรียบเทียบกับวิธีแยกแบบแอลยู ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 10% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด

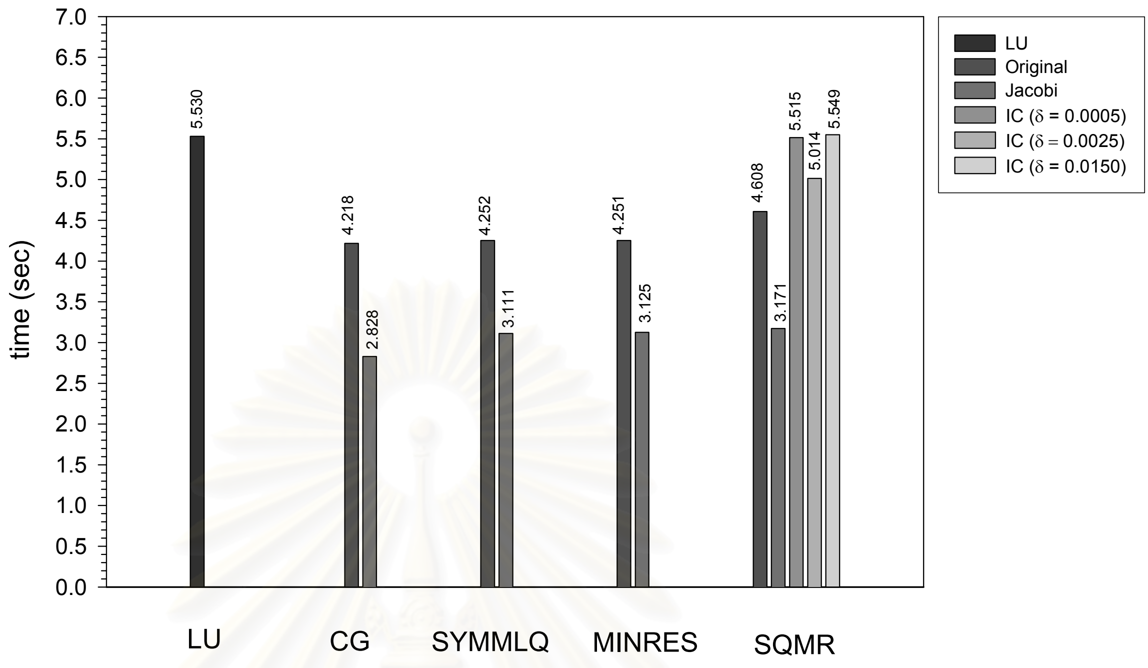


(ก) วิธีเวกเตอร์คงค้างน้อยที่สุด (MINRES)



(ข) วิธีเวกเตอร์คงค้างเสมือนน้อยที่สุดสมมาตร (SQMR)

รูปที่ 4.37 เวลาที่ใช้ในการคำนวณแต่ละโหมดของวิธี MINRES และ SQMR โดยเปรียบเทียบกับวิธีแยกแบบแอลยู ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 10% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด



รูปที่ 4.38 การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณในช่วง 70 โหมดแรก ระหว่างวิธีแยกแบบแอลยูและวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟในแต่ละวิธีในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 10% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด

4.5 บทสรุป

จากการทดลองเชิงตัวเลขเพื่อศึกษาและเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ กับวิธีแยกแบบแอลยู พบว่าวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟจะมีประสิทธิภาพด้านเวลาในการคำนวณลดลงเมื่อจำนวนระดับขั้นความเสรีของรูปแบบการสั่นไหวที่สามารถวัดได้มีค่าน้อยลง ดังจะเห็นได้จากกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ครบทุกระดับขั้นความเสรี เวลาที่ใช้ในการคำนวณหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นครบทุกโหมดมีค่าน้อยที่สุด ในขณะที่เมื่อลดจำนวนระดับขั้นความเสรีของรูปแบบการสั่นไหวที่วัดได้ลงเหลือ 90% 50% และ 10% ตามลำดับ เวลาในการคำนวณในแต่ละกรณีดังกล่าวมีค่าเพิ่มขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 4.7 4.15 4.23 และ 4.34 ตามลำดับ ในขณะเดียวกันเมื่อพิจารณาประสิทธิภาพทางด้านหน่วยเก็บข้อมูล ถึงแม้ว่าวิธีไครโลฟสับสเปซจะใช้จำนวนหน่วยเก็บข้อมูลน้อยกว่าวิธีแยกแบบแอลยูในทุกกรณีศึกษา แต่ในกรณีที่ต้องการให้เวลาในการคำนวณรวมทุกโหมดมีค่าน้อยที่สุดโดยที่จำนวนระดับขั้นความเสรีของรูปแบบการสั่นไหวสามารถวัดได้น้อยลง จะต้องใช้จำนวนหน่วยเก็บข้อมูลมากขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 4.8 4.16 4.24 และ 4.35 ตามลำดับ

เมื่อพิจารณาเวลาที่ใช้ในการคำนวณหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นครบทุกโหมดในทุกกรณีศึกษา วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟร่วมกับการปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์จะใช้เวลาในการคำนวณน้อยที่สุด ดังแสดงในรูปที่ 4.7 4.15 4.23 และ 4.34 ตามลำดับ แต่ในกรณีที่พิจารณาเฉพาะเวลาที่ใช้ในการคำนวณโหมดแรกๆ วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟร่วมกับการปรับสภาวะจาโคบีใช้เวลาในการคำนวณน้อยที่สุด ดังแสดงในรูปที่ 4.27 และ 4.38 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าในช่วงโหมดแรกๆในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นได้ 50% และ 10% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟร่วมกับการปรับสภาวะแบบปรับสภาวะจาโคบีมีประสิทธิภาพทางด้านเวลามากที่สุด

ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ครบทุกระดับขั้นความเสรีจำนวนรอบการคำนวณของวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟในแต่ละโหมดมีค่าใกล้เคียงกัน ดังแสดงในรูปที่ 4.3 และ 4.4 ในขณะที่เมื่อจำนวนระดับขั้นความเสรีของรูปแบบการสั่นไหวที่วัดได้ลดลงจำนวนรอบการคำนวณซ้ำในแต่ละโหมดจะมีค่าเพิ่มขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 4.9 4.10 4.17 4.18 4.28 และ 4.29 ตามลำดับ สำหรับในกรณีที่ไม่สามารถวัดรูปแบบการสั่นไหวได้ครบทุกระดับขั้นความเสรี จำนวนรอบการคำนวณซ้ำในแต่ละโหมดจะมีแนวโน้มเดียวกัน กล่าวคือเริ่มจากที่มีค่าน้อยในโหมดแรกและมีค่าเพิ่มขึ้นจนมีค่าสูงสุดที่โหมดช่วงกลาง หลังจากนั้นก็มีค่าลดลงจนมีค่าน้อยที่สุดในโหมดสุดท้าย รูปที่ 4.13 4.14 4.21 4.22 4.32 และ 4.33 แสดงถึงอัตราการลู่เข้าของคำตอบในโหมดช่วงกลาง ซึ่งพบว่าวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟร่วมกับการปรับสภาวะจาโคบีส่งผลให้อัตราการลู่เข้าของคำตอบต่ำที่สุด ซึ่งสอดคล้องกับค่าของตัวเลขบอกสภาวะจากตารางที่ 4.3 - 4.5 เนื่องจากวิธีการปรับสภาวะจาโคบีในโหมดช่วงกลางให้ค่าของตัวเลขบอกสภาวะมากที่สุด ซึ่งแสดงให้เห็นว่าในโหมดช่วงกลางพฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบมีความอ่อนไหวต่อวิธีการปรับสภาวะที่ใช้มากกว่าในโหมดช่วงแรกและโหมดช่วงท้าย

จากผลการทดลองที่แสดงถึงพฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบโดยวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟในแต่ละกรณีศึกษา พบว่าวิธี CG มีพฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบที่คล้ายกับวิธี SYMMLQ และวิธี MINRES มีพฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบที่คล้ายกับวิธี SQMR กล่าวคือพฤติกรรมการลู่เข้าของคำตอบของวิธี CG และ SYMMLQ จะมีลักษณะกวัดแกว่งโดยเฉพาะอย่างยิ่งในโหมดช่วงกลาง ในขณะที่วิธี MINRES และ SQMR มีการลู่เข้าของคำตอบที่ราบเรียบกว่า อย่างไรก็ตามจำนวนรอบการคำนวณซ้ำสุดท้ายเมื่อเกิดการลู่เข้าของคำตอบของทุกวิธีมีค่าใกล้เคียงกัน

ในกรณีที่วัดข้อมูลรูปแบบการสั่นไหวได้ครบทุกระดับขั้นความเสรี วิธี CG ร่วมกับการปรับสภาวะแบบแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์ที่ใช้สัมประสิทธิ์เติมเต็มเท่ากับ 0.015 ใช้เวลาในการคำนวณคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นรวมทุกโหมดน้อยที่สุด สำหรับกรณีที่วัดข้อมูลรูปแบบการสั่นไหวได้ 90% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด วิธี SQMR ร่วมกับการปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ที่ใช้สัมประสิทธิ์เติมเต็มเท่ากับ 0.035 ใช้เวลาในการคำนวณรวมทุกโหมดน้อยที่สุด และในที่กรณีที่วัดข้อมูลรูปแบบการสั่นไหวได้ 50% และ 10% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมดวิธีที่ใช้เวลาในการคำนวณรวมทุกโหมดน้อยที่สุดคือ วิธี SQMR ร่วมกับการปรับสภาวะแยกส่วนไม่สมบูรณ์ที่ใช้สัมประสิทธิ์เติมเต็มเท่ากับ 0.0050 และ วิธี SQMR ร่วมกับการปรับสภาวะแยกส่วนไม่สมบูรณ์ที่ใช้สัมประสิทธิ์เติมเต็มเท่ากับ 0.0025 ตามลำดับ

สำหรับในกรณีที่วัดข้อมูลรูปแบบการสั่นไหวได้ 50% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมดเมื่อคิดในช่วง 130 โหมดแรก วิธี CG ร่วมกับการปรับสภาวะแบบจาโคบีใช้เวลาในการคำนวณน้อยที่สุด และในกรณีที่วัดข้อมูลรูปแบบการสั่นไหวได้ 10% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมดเมื่อคิดในช่วง 70 โหมดแรก วิธี CG ร่วมกับการปรับสภาวะแบบจาโคบีใช้เวลาในการคำนวณน้อยที่สุด

บทที่ 5

การเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้าง โดยใช้ข้อมูลผลตอบสนองเชิงโหมดที่วัดค่าไม่ครบทุกโหมด

5.1 ความนำ

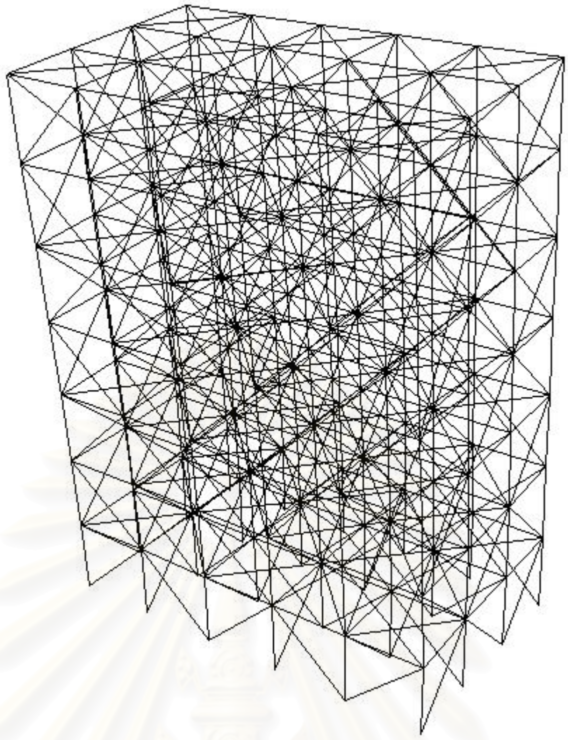
จากการศึกษาประสิทธิภาพในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในบทที่ 4 พบว่าวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟจะมีประสิทธิภาพทางด้านเวลาสูงสุดเมื่อเลือกใช้ข้อมูลรูปแบบการสั่นไหวไม่ครบทุกโหมด ดังนั้นในบทที่ 5 นี้จะทำการศึกษาการประยุกต์ใช้วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟในขั้นตอนของการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้าง โดยเลือกใช้ข้อมูลผลตอบสนองเชิงโหมด 10 โหมดแรกเป็นกรณีศึกษา

5.2 แบบจำลองโครงสร้างในการประมาณค่าพารามิเตอร์

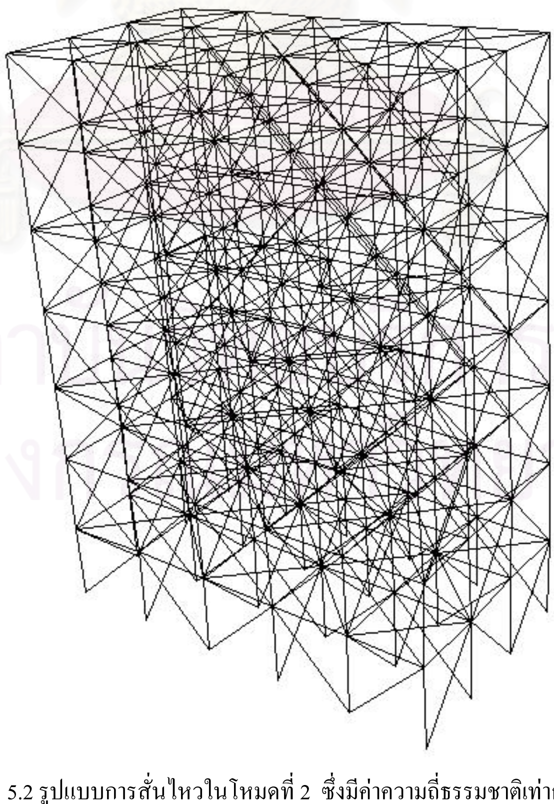
แบบจำลองโครงสร้างที่ใช้ในกรณีศึกษานี้เป็นแบบจำลองโครงข้อหมุน 3 มิติซึ่งประกอบด้วยจำนวนกลุ่มของพารามิเตอร์ทั้งหมด 42 กลุ่ม ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 4 ค่าสติฟเนส พารามิเตอร์ (EA) และน้ำหนักต่อหน่วยความยาว (M) ในแต่ละกลุ่มมีค่าเท่ากับ 40,000,000 กิโลกรัมและ 15 กิโลกรัม/เมตร ตามลำดับ ค่าพารามิเตอร์ดังกล่าวอ้างอิงจากหน้าตัดเหล็กฉากรูปพรรณขนาด 100 x 100 x 10 ตามมาตรฐาน JIS G 3192

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์สมมติให้ทราบค่าของน้ำหนักต่อความยาวของชิ้นส่วนโครงสร้างในแต่ละกลุ่มก่อนการประมาณค่า สิ่งที่ต้องการคือค่าสติฟเนสพารามิเตอร์ของโครงสร้างซึ่งไม่ทราบค่า โดยกำหนดให้ค่าสติฟเนสพารามิเตอร์เริ่มต้นของแต่ละกลุ่มมีค่าเท่ากับ 39,500,000 กิโลกรัม และทำการคำนวณค่าสติฟเนส พารามิเตอร์ที่ต้องการในแต่ละกลุ่มโดยใช้วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติกโปรแกรมมิงโดยอาศัยข้อมูลค่าความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหวใน 10 โหมดแรกของแบบจำลองโครงสร้าง ซึ่งผลลัพธ์สุดท้ายของค่าสติฟเนสพารามิเตอร์ของแต่ละกลุ่มจะมีค่าเท่ากับ 40,000,000 กิโลกรัม

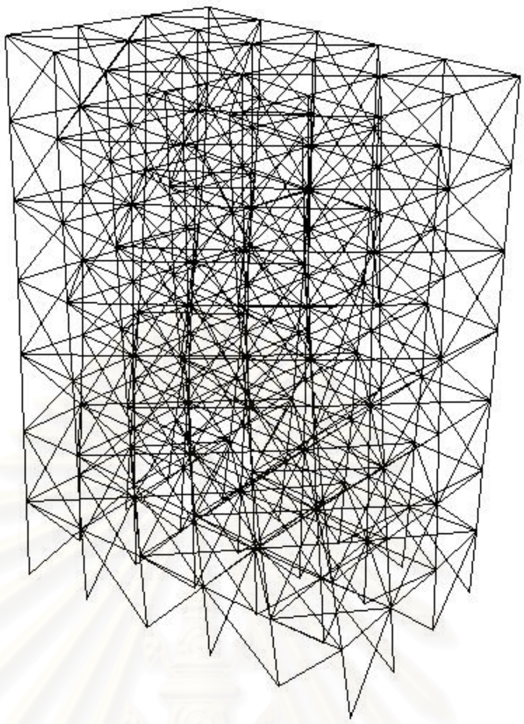
รูปที่ 5.1 – 5.10 แสดงรูปแบบการสั่นไหวใน 10 โหมดแรก ของแบบจำลองโครงข้อหมุน 3 มิติที่ใช้ในกรณีศึกษา



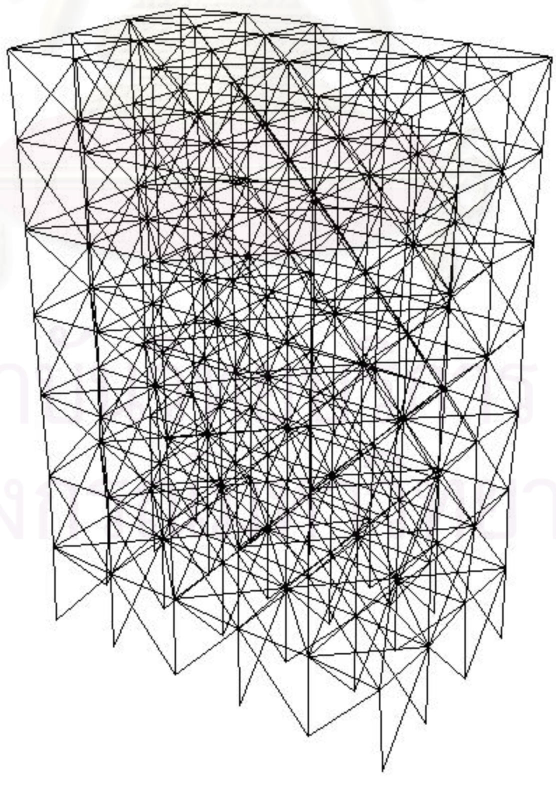
รูปที่ 5.1 รูปแบบการสั่นไหวในโหมดที่ 1 ซึ่งมีค่าความถี่ธรรมชาติเท่ากับ 7.06



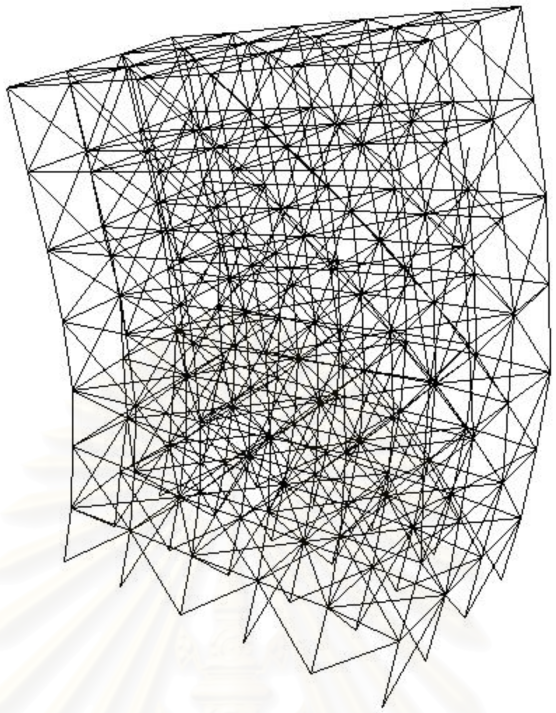
รูปที่ 5.2 รูปแบบการสั่นไหวในโหมดที่ 2 ซึ่งมีค่าความถี่ธรรมชาติเท่ากับ 7.46



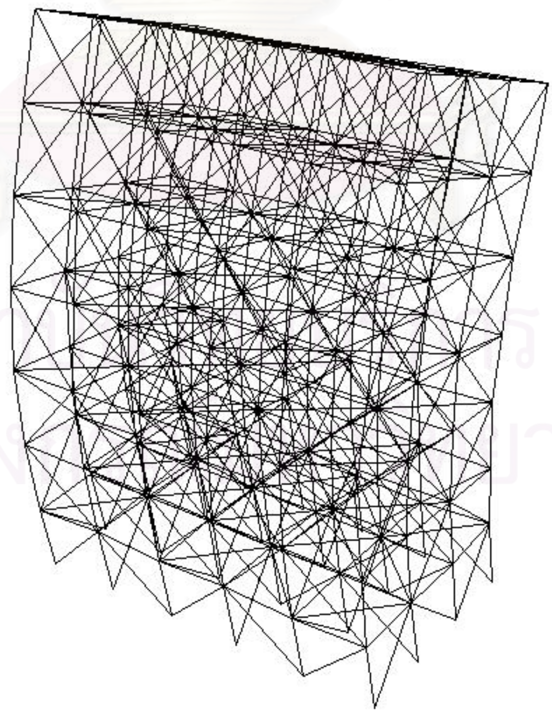
รูปที่ 5.3 รูปแบบการสั่นไหวในโหมดที่ 3 ซึ่งมีค่าความถี่ธรรมชาติเท่ากับ 10.91



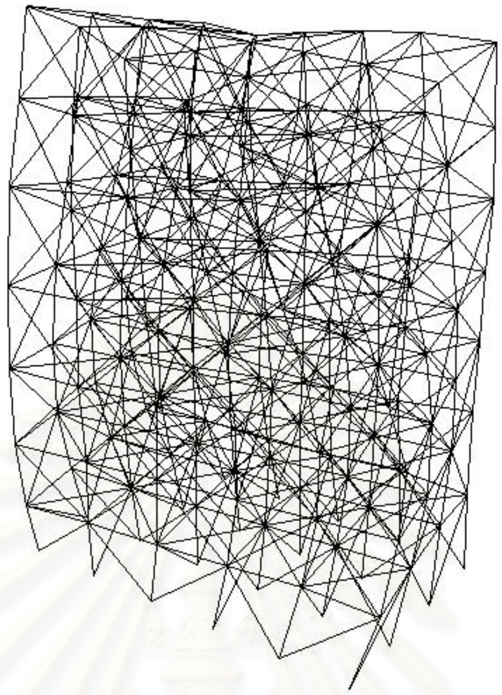
รูปที่ 5.4 รูปแบบการสั่นไหวในโหมดที่ 4 ซึ่งมีค่าความถี่ธรรมชาติเท่ากับ 17.72



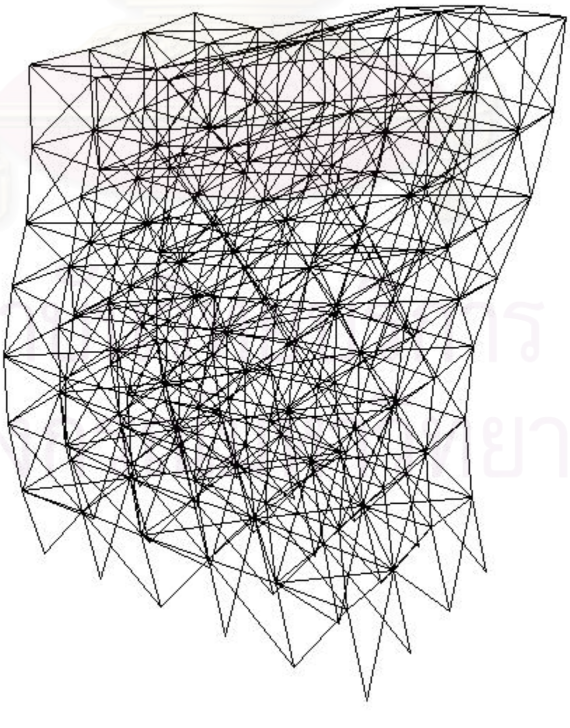
รูปที่ 5.5 รูปแบบการสั่นไหวในโหมดที่ 5 ซึ่งมีค่าความถี่ธรรมชาติเท่ากับ 20.05



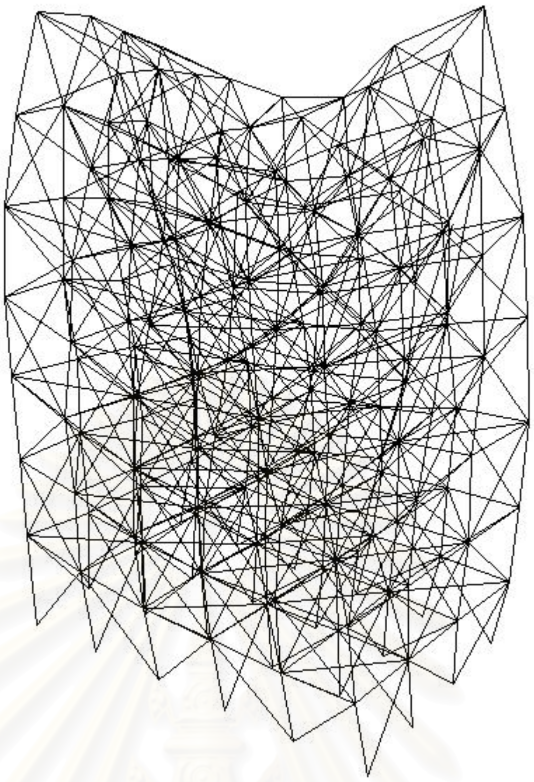
รูปที่ 5.6 รูปแบบการสั่นไหวในโหมดที่ 6 ซึ่งมีค่าความถี่ธรรมชาติเท่ากับ 22.04



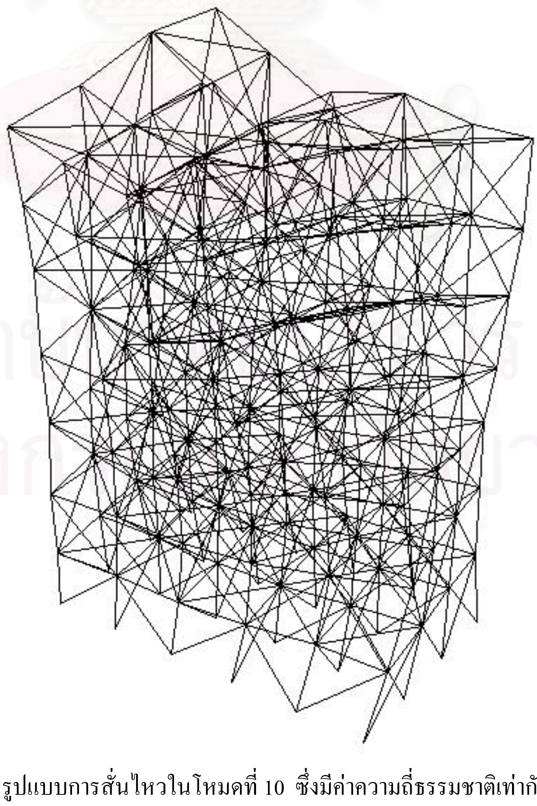
รูปที่ 5.7 รูปแบบการสั่นไหวในโหมดที่ 7 ซึ่งมีค่าความถี่ธรรมชาติเท่ากับ 31.07



รูปที่ 5.8 รูปแบบการสั่นไหวในโหมดที่ 8 ซึ่งมีค่าความถี่ธรรมชาติเท่ากับ 34.04



รูปที่ 5.9 รูปแบบการสั่นไหวในโหมดที่ 9 ซึ่งมีค่าความถี่ธรรมชาติเท่ากับ 39.95



รูปที่ 5.10 รูปแบบการสั่นไหวในโหมดที่ 10 ซึ่งมีค่าความถี่ธรรมชาติเท่ากับ 40.08

5.3 กรณีศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้าง

สำหรับกรณีศึกษาเพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพทางด้านเวลาในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างในบทที่ 5 นี้ สามารถแบ่งออกเป็น 4 กรณีเช่นเดียวกับบทที่ 4 ได้แก่ กรณี I แบบจำลองโครงสร้างวัดรูปแบบการสั่นไหวได้ครบทุกระดับขั้นความเสรี กรณี II แบบจำลองโครงสร้างวัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 90% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด กรณี III แบบจำลองโครงสร้างวัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 50% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด และกรณี IV แบบจำลองโครงสร้างวัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 10% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด โดยกำหนดให้สามารถวัดข้อมูลค่าความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหวได้เพียง 10 โหมดแรกเท่านั้น

การเปรียบเทียบประสิทธิภาพการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างในบทที่ 5 นี้ได้กำหนดเกณฑ์ในการตรวจสอบการลู่เข้าของค่าพารามิเตอร์คำตอบที่ได้จากการประมาณด้วยวิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติก โปรแกรมมิง ดังแสดงในตารางที่ 5.1

ตารางที่ 5.1 เกณฑ์ในการตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบ

เกณฑ์การลู่เข้า	ค่าความคลาดเคลื่อนยินยอม
η_d	10^{-15}
η_x	10^{-15}

ในตารางที่ 5.1 ค่า η_d และ η_x คือ ค่าความคลาดเคลื่อนยินยอมของ $\|\mathbf{d}_k\|$ และ $\|\Delta\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}_k\|$ ตามลำดับ โดยที่ $\|\mathbf{d}_k\|$ คือนอร์มของเวกเตอร์ปรับทิศทางโดยวิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติกโปรแกรมมิงของรอบการคำนวณที่ k และ $\|\Delta\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}_k\|$ คืออัตราส่วนนอร์มของค่าพารามิเตอร์คำตอบที่เพิ่มขึ้นต่อนอร์มของค่าพารามิเตอร์ในรอบการคำนวณที่ k ค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการประมาณด้วยวิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติกโปรแกรมมิงในรอบการคำนวณที่ k จะพิจารณาได้ว่าเกิดการลู่เข้าของคำตอบเมื่อมีค่าความคลาดเคลื่อนไม่เกินค่าความคลาดเคลื่อนยินยอมที่กำหนดไว้ในตารางที่ 5.1

สำหรับกรณีศึกษาต่อไปนี้จะแสดงเวลาที่ใช้ในการคำนวณ และค่าของสมการเป้าหมายในแต่ละรอบของการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติกโปรแกรมมิง โดยเปรียบเทียบประสิทธิภาพก่อนและหลังการนำวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟเข้ามาใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ เวลาที่ใช้ในการคำนวณแต่ละรอบของวิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติกโปรแกรมมิงแสดงถึงประสิทธิภาพด้านเวลาของแต่ละวิธีที่พิจารณา ในขณะที่ค่าของสมการเป้าหมายในแต่ละรอบการคำนวณแสดงถึงความละเอียดถูกต้องของค่าพารามิเตอร์สำหรับแต่ละวิธีที่พิจารณา

สำหรับวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟแต่ละวิธีที่นำมาใช้ในขั้นตอนการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นจะพิจารณาเกณฑ์ในการลู่เข้าของคำตอบดังที่ได้แสดงในตารางที่ 5.2

ตารางที่ 5.2 เกณฑ์ในการลู่เข้าของคำตอบของวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ

วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ	นอร์มของเวกเตอร์คงค้างสัมพัทธ์ ($\frac{\\|\mathbf{r}_i\\|_2}{\\|\mathbf{r}_0\\|_2}$)
1. เกรเดียนต์สังยุค (CG)	1×10^{-8}
2. แอลคิวสมมาตร (SYMMLQ)	1×10^{-8}
3. เวกเตอร์คงค้างน้อยที่สุด (MINRES)	1×10^{-8}
4. เวกเตอร์คงค้างเสมือนน้อยที่สุดสมมาตร (SQMR)	1×10^{-8}

5.3.1 กรณี I แบบจำลองโครงสร้างที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ทุกระดับขั้นความเสรี

กรณีนี้กำหนดให้สามารถวัดรูปแบบการสั่นไหวได้ครบทั้ง 504 ระดับขั้นความเสรี สำหรับข้อมูลค่าความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหว 10 โหมดแรก ผลการทดลองที่เปรียบเทียบถึงประสิทธิภาพทางด้านเวลาในการคำนวณก่อนและหลังการนำวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟเข้ามาประยุกต์ใช้สามารถแสดงได้ในตารางที่ 5.3-5.6

ตารางที่ 5.3 การเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมายและเวลาการคำนวณสะสมในแต่ละรอบการคำนวณ รวมถึงจำนวนหน่วยเก็บข้อมูลที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ ระหว่างวิธีแยกแบบแอลยูกับวิธี CG สำหรับกรณี I

รอบการคำนวณซ้ำ	ค่าของสมการเป้าหมาย				เวลาการคำนวณสะสม (วินาที)			
	LU	CG	Jacobi CG	ICCG ($\delta=0.015$)	LU	CG	Jacobi CG	ICCG ($\delta=0.015$)
1	.1791E-04	.1791E-04	.1792E-04	.1792E-04	32.06	32.08	31.95	32.06
2	.3278E-06	.3278E-06	.3278E-06	.3278E-06	67.34	38.53	36.66	40.33
3	.1634E-08	.1634E-08	.1634E-08	.1635E-08	134.08	76.91	72.62	80.03
4	.4451E-13	.4452E-13	.4451E-13	.4452E-13	201.28	115.11	109.20	120.14
5	.5273E-22	.1096E-18	.6906E-19	.2449E-18	267.34	153.12	145.33	159.98
หน่วยเก็บข้อมูล (ไบต์)	90,083,908	89,847,276	89,851,308	89,889,004				

ตารางที่ 5.4 การเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมายและเวลาการคำนวณสะสมในแต่ละรอบการคำนวณ รวมถึงจำนวนหน่วยเก็บข้อมูลที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ ระหว่างวิธีแยกแบบแอลยูกับวิธี SYMMLQ สำหรับกรณี I

รอบการคำนวณซ้ำ	ค่าของสมการเป้าหมาย				เวลาการคำนวณสะสม (วินาที)			
	LU	SYMMLQ	Jacobi SYMMLQ	ICSYMMLQ ($\delta = 0.015$)	LU	SYMMLQ	Jacobi SYMMLQ	ICSYMMLQ ($\delta = 0.015$)
1	.1791E-04	.1792E-04	.1792E-04	.1792E-04	32.06	31.72	31.78	31.75
2	.3278E-06	.3278E-06	.3278E-06	.3278E-06	67.34	38.41	36.67	40.05
3	.1634E-08	.1634E-08	.1634E-08	.1634E-08	134.08	76.09	72.61	79.52
4	.4451E-13	.4452E-13	.4451E-13	.4452E-13	201.28	114.12	108.92	119.42
5	.5273E-22	.1115E-18	.6909E-19	.2449E-18	267.34	151.67	146.05	159.11
หน่วยเก็บข้อมูล (ไบต์)	90,083,908	89,851,308	89,859,372	89,897,068				

ตารางที่ 5.5 การเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมายและเวลาการคำนวณสะสมในแต่ละรอบการคำนวณ รวมถึงจำนวนหน่วยเก็บข้อมูลที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ ระหว่างวิธีแยกแบบแอลยูกับวิธี MINRES สำหรับกรณี I

รอบการคำนวณซ้ำ	ค่าของสมการเป้าหมาย				เวลาการคำนวณสะสม (วินาที)			
	LU	MINRES	Jacobi MINRES	ICMINRES ($\delta = 0.015$)	LU	MINRES	Jacobi MINRES	ICMINRES ($\delta = 0.015$)
1	.1791E-04	.1792E-04	.179/E-04	.1792E-04	32.06	31.76	31.75	31.81
2	.3278E-06	.3278E-06	.3278E-06	.3278E-06	67.34	38.48	36.86	40.22
3	.1634E-08	.1634E-08	.1634E-08	.1634E-08	134.08	75.98	73.06	79.75
4	.4451E-13	.4452E-13	.4450E-13	.4452E-13	201.28	113.91	109.77	119.77
5	.5273E-22	.3466E-18	.3391E-18	.3067E-18	267.34	151.28	146.84	159.55
หน่วยเก็บข้อมูล (ไบต์)	90,083,908	89,855,340	89,863,404	89,901,100				

ตารางที่ 5.6 การเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมายและเวลาการคำนวณสะสมในแต่ละรอบการคำนวณ รวมถึงจำนวนหน่วยเก็บข้อมูลที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ ระหว่างวิธีแยกแบบแอลยูกับวิธี SQMR สำหรับกรณี I

รอบการคำนวณซ้ำ	ค่าของสมการเป้าหมาย				เวลาการคำนวณสะสม (วินาที)			
	LU	SQMR	Jacobi SQMR	ICSQMR ($\delta = 0.015$)	LU	SQMR	Jacobi SQMR	ICSQMR ($\delta = 0.015$)
1	.1791E-04	.1792E-04	.1792E-04	.1792E-04	32.06	32.03	31.76	31.94
2	.3278E-06	.3278E-06	.3278E-06	.3278E-06	67.34	38.89	37.61	40.31
3	.1634E-08	.1634E-08	.1634E-08	.1634E-08	134.08	76.84	74.61	79.95
4	.4451E-13	.4452E-13	.4451E-13	.4454E-13	201.28	115.16	111.80	120.06
5	.5273E-22	.2032E-18	.1957E-18	.1509E-17	267.34	153.22	148.58	159.97
หน่วยเก็บข้อมูล (ไบต์)	90,083,908	89,851,308	89,855,340	89,897,068				

จากตารางที่ 5.3-5.6 พบว่าต้องใช้จำนวนรอบการคำนวณของวิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติกโปรแกรมมิง 5 รอบค่าสติฟเนสพารามิเตอร์จึงลู่เข้าหาคำตอบ โดยวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟได้แก่ วิธี CG SYMMLQ MINRES และ SQMR ใช้เวลาในการประมาณค่าพารามิเตอร์น้อยกว่าการใช้วิธีแยกแบบแอลยู และเมื่อพิจารณาวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟแต่ละวิธีพบว่าการใช้วิธีการปรับสภาวะแบบจาโคบีใช้เวลาในการคำนวณน้อยที่สุด ในขณะที่การปรับสภาวะแบบแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์กลับใช้เวลาในการคำนวณมากกว่าการที่ไม่ใช้วิธีการปรับสภาวะเริ่มต้น สำหรับวิธีที่ใช้เวลาในการคำนวณน้อยที่สุดสำหรับกรณี I คือวิธี CG ร่วมกับการปรับสภาวะจาโคบีซึ่งใช้เวลาในการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้งหมดเท่ากับ 145.33 วินาที

จากตารางที่ 5.3-5.6 เมื่อพิจารณาค่าของสมการเป้าหมายพบว่าวิธีแยกแบบแอลยูให้ค่าของสมการเป้าหมายน้อยที่สุดในรอบการคำนวณที่ 5 ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.5273×10^{-22} นอกจากนั้นวิธี CG และ SYMMLQ โดยใช้วิธีปรับสภาวะจาโคบีให้ค่าของสมการเป้าหมายรองลงมาซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.6909×10^{-19} และวิธี SQMR โดยใช้วิธีปรับสภาวะแบบแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์ให้ค่าของสมการเป้าหมายมากที่สุดซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.1509×10^{-17} และเมื่อพิจารณาหน่วยเก็บข้อมูลทั้งหมดที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ พบว่าหน่วยเก็บข้อมูลจากการใช้วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟลดลงจากวิธีแยกแบบแอลยูเพียงเล็กน้อยเท่านั้น

5.3.2 กรณี II แบบจำลองโครงสร้างวัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 90% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด

กรณีนี้กำหนดให้สามารถวัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 454 ระดับขั้นความเสรี สำหรับข้อมูลค่าความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหว 10 โหมดแรก ผลการทดลองที่เปรียบเทียบถึงประสิทธิภาพทางด้านเวลาในการคำนวณก่อนและหลังการนำวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟเข้ามาประยุกต์ใช้สามารถแสดงได้ในตารางที่ 5.7-5.10

ตารางที่ 5.7 การเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมายและเวลาการคำนวณสะสมในแต่ละรอบการคำนวณ รวมถึงจำนวนหน่วยเก็บข้อมูลที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ ระหว่างวิธีแยกแบบแอลยูกับวิธี CG สำหรับกรณี II

รอบการคำนวณซ้ำ	ค่าของสมการเป้าหมาย			เวลาการคำนวณสะสม (วินาที)		
	LU	CG	Jacobi CG	LU	CG	Jacobi CG
1	.9133E-03	.9133E-03	.9133E-03	27.59	27.50	27.41
2	.5221E-04	.5221E-04	.5221E-04	57.76	34.83	32.38
3	.2207E-04	.2207E-04	.2207E-04	115.94	69.98	65.24
4	.8639E-05	.8639E-05	.8639E-05	174.31	105.50	98.36
5	.1395E-05	.1395E-05	.1395E-05	233.17	140.88	131.45
6	.7111E-08	.7110E-08	.7112E-08	297.14	176.92	164.67
7	.8026E-11	.8026E-11	.8026E-11	359.81	212.52	197.88
8	.8895E-19	.5757E-18	.2775E-18	421.83	247.66	230.75
หน่วยเก็บข้อมูล (ไบต์)	90,092,100	89,847,868	89,851,900			

ตารางที่ 5.8 การเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมายและเวลาการคำนวณสะสมในแต่ละรอบการคำนวณ รวมถึงจำนวนหน่วยเก็บข้อมูลที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ ระหว่างวิธีแยกแบบแอลยูกับวิธี SYMMLQ สำหรับกรณี II

รอบการคำนวณซ้ำ	ค่าของสมการเป้าหมาย			เวลาการคำนวณสะสม (วินาที)		
	LU	SYMMLQ	Jacobi SYMMLQ	LU	SYMMLQ	Jacobi SYMMLQ
1	.9133E-03	.9133E-03	.9133E-03	27.59	27.55	27.45
2	.5221E-04	.5221E-04	.5221E-04	57.76	35.50	32.88
3	.2207E-04	.2207E-04	.2207E-04	115.94	71.39	66.20
4	.8639E-05	.8639E-05	.8639E-05	174.31	107.66	99.81
5	.1395E-05	.1395E-05	.1395E-05	233.17	143.81	133.50
6	.7111E-08	.7111E-08	.7112E-08	297.14	180.77	167.59
7	.8026E-11	.8026E-11	.8026E-11	359.81	218.02	201.55
8	.8895E-19	.3469E-18	.2486E-18	421.83	254.14	235.14
หน่วยเก็บข้อมูล (ไบต์)	90,092,100	89,851,900	89,859,964			

ตารางที่ 5.9 การเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมายและเวลาการคำนวณสะสมในแต่ละรอบการคำนวณ รวมถึงจำนวนหน่วยเก็บข้อมูลที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ ระหว่างวิธีแยกแบบแอลยูกับวิธี MINRES สำหรับกรณี II

รอบการคำนวณซ้ำ	ค่าของสมการเป้าหมาย			เวลาการคำนวณสะสม (วินาที)		
	LU	MINRES	Jacobi MINRES	LU	MINRES	Jacobi MINRES
1	.9133E-03	.9133E-03	.9133E-03	27.59	27.45	27.38
2	.5221E-04	.5221E-04	.5221E-04	57.76	35.45	33.12
3	.2207E-04	.2207E-04	.2207E-04	115.94	71.17	66.76
4	.8639E-05	.8639E-05	.8639E-05	174.31	107.20	100.67
5	.1395E-05	.1395E-05	.1395E-05	233.17	143.26	134.56
6	.7111E-08	.7111E-08	.7108E-08	297.14	180.30	168.88
7	.8026E-11	.8026E-11	.8025E-11	359.81	216.80	203.08
8	.8895E-19	.1084E-17	.8694E-18	421.83	252.64	237.09
หน่วยเก็บข้อมูล (ไบต์)	90,092,100	89,855,932	89,863,996			

ตารางที่ 5.10 การเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมายและเวลาการคำนวณสะสมในแต่ละรอบการคำนวณ รวมถึงจำนวนหน่วยเก็บข้อมูลที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ ระหว่างวิธีแยกแบบแอลยูกับวิธี SQMR สำหรับกรณี II

รอบการคำนวณซ้ำ	ค่าของสมการเป้าหมาย				เวลาการคำนวณสะสม (วินาที)			
	LU	SQMR	Jacobi SQMR	ICSQMR ($\delta = 0.035$)	LU	SQMR	Jacobi SQMR	ICSQMR ($\delta = 0.035$)
1	.9133E-03	.9133E-03	.9133E-03	.9133E-03	27.59	27.41	27.64	27.67
2	.5221E-04	.5221E-04	.5221E-04	.5221E-04	57.76	35.45	34.25	32.75
3	.2207E-04	.2207E-04	.2207E-04	.2207E-04	115.94	71.33	68.88	65.92
4	.8639E-05	.8639E-05	.8639E-05	.8639E-05	174.31	107.41	103.86	99.33
5	.1395E-05	.1395E-05	.1395E-05	.1395E-05	233.17	143.42	138.80	132.62
6	.7111E-08	.7110E-08	.7112E-08	.7110E-08	297.14	180.30	174.17	166.42
7	.8026E-11	.8026E-11	.8026E-11	.8026E-11	359.81	216.92	209.78	199.91
8	.8895E-19	.8931E-18	.3822E-18	.1874E-17	421.83	252.80	245.34	232.97
หน่วยเก็บข้อมูล (ไบต์)	90,092,100	89,851,900	89,855,932	89,890,812				

ในกรณี II วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟมีข้อจำกัดในการเลือกใช้วิธีการปรับสภาวะเบื้องต้นดังที่ได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 4 ซึ่งมีแต่วิธี SQMR เท่านั้นที่สามารถใช้การปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ จากตารางที่ 5.7-5.10 พบว่าจำนวนรอบการคำนวณของวิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติกโปรแกรมมิงเท่ากับ 8 รอบค่าสติฟเนสพารา

มิเตอร์จึงลู่เข้าหาคำตอบ ซึ่งพบว่าใช้จำนวนรอบการคำนวณมากกว่าในกรณี I และในขณะเดียวกันก็ใช้เวลาในการประมาณค่าพารามิเตอร์มากกว่าในกรณี I เมื่อพิจารณาจากตารางที่ 5.7-5.10 วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟใช้เวลาในการประมาณค่าพารามิเตอร์น้อยกว่าการใช้วิธีแยกแบบแอลยู และเมื่อพิจารณาวิธี SQMR พบว่าการปรับสภาวะเริ่มต้นแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ใช้เวลารวมในการคำนวณน้อยกว่าการปรับสภาวะแบบจาโคบี สำหรับวิธีที่ใช้เวลาในการคำนวณน้อยที่สุดในกรณี II คือวิธี CG ร่วมกับการปรับสภาวะจาโคบีซึ่งใช้เวลาในการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้งหมดเท่ากับ 230.75 วินาที

จากตารางที่ 5.7-5.10 เมื่อพิจารณาค่าของสมการเป้าหมายพบว่าวิธีแยกแบบแอลยูให้ค่าของสมการเป้าหมายน้อยที่สุดในรอบการคำนวณที่ 8 ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.8895×10^{-19} นอกจากนั้นวิธี SYMMLQ โดยใช้วิธีปรับสภาวะจาโคบีให้ค่าของสมการเป้าหมายรองลงมาซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.2486×10^{-18} และวิธี SQMR โดยใช้วิธีปรับสภาวะแบบแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์ให้ค่าของสมการเป้าหมายมากที่สุดซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.1874×10^{-17} และเมื่อพิจารณาหน่วยเก็บข้อมูลทั้งหมดที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ พบว่าหน่วยเก็บข้อมูลจากการใช้วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟลดลงจากวิธีแยกแบบแอลยูเพียงเล็กน้อยเท่านั้น และหน่วยเก็บข้อมูลมีขนาดเพิ่มขึ้นจากกรณี I เล็กน้อย

5.3.3 กรณี III แบบจำลองโครงสร้างวัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 50% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด

กรณีนี้กำหนดให้สามารถวัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 252 ระดับขั้นความเสรี สำหรับข้อมูลค่าความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหวใน 10 โหมดแรก ผลการทดลองที่เปรียบเทียบถึงประสิทธิภาพทางด้านเวลาในการคำนวณก่อนและหลังการนำวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟเข้ามาประยุกต์ใช้สามารถแสดงได้ในตารางที่ 5.11-5.14

ตารางที่ 5.11 การเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมายและเวลาการคำนวณสะสมในแต่ละรอบการคำนวณ รวมถึงจำนวนหน่วยเก็บข้อมูลที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ ระหว่างวิธีแยกแบบแอลยูกับวิธี CG สำหรับกรณี III

รอบการคำนวณซ้ำ	ค่าของสมการเป้าหมาย			เวลาการคำนวณสะสม (วินาที)		
	LU	CG	Jacobi CG	LU	CG	Jacobi CG
1	.6962E-04	.6962E-04	.6962E-04	15.70	15.64	15.80
2	.1021E-04	.1021E-04	.1021E-04	53.17	24.02	21.36
3	.1190E-05	.1190E-05	.1190E-05	114.66	48.94	43.20
4	.3057E-07	.3057E-07	.3056E-07	176.09	74.02	65.06
5	.5623E-10	.5623E-10	.5622E-10	237.64	99.00	86.91
6	.2160E-15	.2158E-15	.2164E-15	298.58	123.78	108.89
7	.6164E-26	.1327E-18	.3837E-19	356.45	147.88	130.28
หน่วยเก็บข้อมูล (ไบต์)	90,125,524	89,850,316	89,854,348			

ตารางที่ 5.12 การเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมายและเวลาการคำนวณสะสมในแต่ละรอบการคำนวณ รวมถึงจำนวนหน่วยเก็บข้อมูลที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ ระหว่างวิธีแยกแบบแอลยูกับวิธี SYMMLQ สำหรับกรณี III

รอบการคำนวณซ้ำ	ค่าของสมการเป้าหมาย			เวลาการคำนวณสะสม (วินาที)		
	LU	SYMMLQ	Jacobi SYMMLQ	LU	SYMMLQ	Jacobi SYMMLQ
1	.6962E-04	.6962E-04	.6962E-04	15.70	15.62	15.98
2	.1021E-04	.1021E-04	.1021E-04	53.17	24.65	22.05
3	.1190E-05	.1190E-05	.1190E-05	114.66	50.67	44.59
4	.3057E-07	.3057E-07	.3057E-07	176.09	76.52	67.08
5	.5623E-10	.5624E-10	.5624E-10	237.64	102.22	89.66
6	.2160E-15	.2157E-15	.2160E-15	298.58	127.92	112.11
7	.6164E-26	.6719E-19	.3798E-19	356.45	152.52	133.92
หน่วยเก็บข้อมูล (ไบต์)	90,125,524	89,854,348	89,862,412			

ตารางที่ 5.13 การเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมายและเวลาการคำนวณสะสมในแต่ละรอบการคำนวณ รวมถึงจำนวนหน่วยเก็บข้อมูลที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ ระหว่างวิธีแยกแบบแอลยูกับวิธี MINRES สำหรับกรณี III

รอบการคำนวณซ้ำ	ค่าของสมการเป้าหมาย			เวลาการคำนวณสะสม (วินาที)		
	LU	MINRES	Jacobi MINRES	LU	MINRES	Jacobi MINRES
1	.6962E-04	.6962E-04	.6962E-04	15.70	15.61	15.78
2	.1021E-04	.1021E-04	.1021E-04	53.17	24.75	22.23
3	.1190E-05	.1190E-05	.1190E-05	114.66	50.66	45.12
4	.3057E-07	.3056E-07	.3057E-07	176.09	76.77	68.12
5	.5623E-10	.5622E-10	.5624E-10	237.64	102.45	91.23
6	.2160E-15	.2166E-15	.2167E-15	298.58	128.11	114.05
7	.6164E-26	.4535E-18	.1807E-18	356.45	153.03	136.36
หน่วยเก็บข้อมูล (ไบต์)	90,125,524	89,858,380	89,866,444			

ตารางที่ 5.14 การเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมายและเวลาการคำนวณสะสมในแต่ละรอบการคำนวณ รวมถึงจำนวนหน่วยเก็บข้อมูลที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ ระหว่างวิธีแยกแบบแอลยูกับวิธี SQMR สำหรับกรณี III

รอบการคำนวณซ้ำ	ค่าของสมการเป้าหมาย				เวลาการคำนวณสะสม (วินาที)			
	LU	SQMR	Jacobi SQMR	ICSQMR ($\delta = 0.0050$)	LU	SQMR	Jacobi SQMR	ICSQMR ($\delta = 0.0050$)
1	.6962E-04	.6962E-04	.6962E-04	.6962E-04	15.70	15.74	15.72	15.66
2	.1021E-04	.1021E-04	.1021E-04	.1021E-04	53.17	25.05	23.00	28.91
3	.1190E-05	.1190E-05	.1190E-05	.1190E-05	114.66	51.09	46.88	59.36
4	.3057E-07	.3057E-07	.3057E-07	.3057E-07	176.09	77.27	70.80	89.20
5	.5623E-10	.5624E-10	.5623E-10	.5623E-10	237.64	103.47	94.56	119.53
6	.2160E-15	.2185E-15	.2167E-15	.2173E-15	298.58	129.44	118.53	149.41
7	.6164E-26	.1870E-18	.1667E-18	.1424E-17	356.45	154.61	141.56	178.02
หน่วยเก็บข้อมูล (ไบต์)	90,125,524	89,854,348	89,858,380	89,944,956				

จากตารางที่ 5.11-5.14 พบว่าต้องใช้จำนวนรอบการคำนวณของวิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติกโปรแกรมมิง 7 รอบจึงเกิดการลู่เข้าหาคำตอบของค่าสติฟเนสพารามิเตอร์ ซึ่งพบว่าใช้จำนวนรอบการคำนวณมากกว่าในกรณี I แต่น้อยกว่าในกรณีที่ II และในขณะเดียวกันก็ใช้เวลาในการประมาณค่าพารามิเตอร์มากกว่าในกรณี I แต่น้อยกว่าในกรณีที่ II เมื่อพิจารณาจากตารางที่ 5.11-5.14 วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟใช้เวลาในการประมาณค่าพารามิเตอร์

น้อยกว่าการใช้วิธีแยกแบบแอลยู และเมื่อพิจารณาวิธี SQMR พบว่าการปรับสภาวะเริ่มต้นแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ใช้เวลารวมในการคำนวณมากกว่าการปรับสภาวะแบบจาโคบี สำหรับวิธีที่ใช้เวลาในการคำนวณน้อยที่สุดในกรณี III คือวิธี CG ร่วมกับการปรับสภาวะจาโคบีซึ่งใช้เวลาในการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้งหมดเท่ากับ 130.28 วินาที

จากตารางที่ 5.11-5.14 เมื่อพิจารณาค่าของสมการเป้าหมายพบว่าวิธีแยกแบบแอลยูให้ค่าของสมการเป้าหมายน้อยที่สุดในรอบการคำนวณที่ 8 ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.6164×10^{-26} นอกจากนั้นวิธี SYMMLQ โดยใช้วิธีปรับสภาวะจาโคบีให้ค่าของสมการเป้าหมายรองลงมาซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.3798×10^{-19} และวิธี SQMR โดยใช้วิธีปรับสภาวะแบบแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์ให้ค่าของสมการเป้าหมายมากที่สุดซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.1424×10^{-17} และเมื่อพิจารณาหน่วยเก็บข้อมูลทั้งหมดที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ พบว่าหน่วยเก็บข้อมูลจากการใช้วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟลดลงจากวิธีแยกแบบแอลยูเพียงเล็กน้อยเท่านั้น และหน่วยเก็บข้อมูลมีขนาดเพิ่มขึ้นจากกรณี I และกรณีที่ II เล็กน้อย

5.3.4 กรณี IV แบบจำลองโครงสร้างวัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 10% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด

กรณีนี้กำหนดให้สามารถวัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 50 ระดับขั้นความเสรี สำหรับข้อมูลค่าความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหวใน 10 โหมดแรก ผลการทดลองที่เปรียบเทียบถึงประสิทธิภาพทางด้านเวลาในการคำนวณก่อนและหลังการนำวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟเข้ามาประยุกต์ใช้สามารถแสดงได้ในตารางที่ 5.15-5.18

ตารางที่ 5.15 การเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมายและเวลาการคำนวณสะสมในแต่ละรอบการคำนวณ รวมถึงจำนวนหน่วยเก็บข้อมูลที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ ระหว่างวิธีแยกแบบแอลยูกับวิธี CG สำหรับกรณี IV

รอบการคำนวณซ้ำ	ค่าของสมการเป้าหมาย			เวลาการคำนวณสะสม (วินาที)		
	LU	CG	Jacobi CG	LU	CG	Jacobi CG
1	.5512E-03	.5512E-03	.5512E-03	3.39	3.39	3.42
2	.4065E-03	.4065E-03	.4065E-03	44.66	12.77	9.41
3	.2445E-03	.2445E-03	.2445E-03	89.55	25.97	18.91
4	.2239E-04	.2239E-04	.2239E-04	143.80	41.27	29.52
5	.1545E-04	.1545E-04	.1545E-04	189.53	55.02	39.02
6	.9050E-05	.9051E-05	.9050E-05	234.36	68.28	48.52
7	.4040E-05	.4040E-05	.4040E-05	278.39	81.53	58.05
8	.2752E-05	.2753E-05	.2752E-05	324.05	94.92	67.88
9	.1195E-05	.1196E-05	.1195E-05	377.39	109.53	78.42
10	.8493E-06	.8493E-06	.8493E-06	422.19	122.50	87.97
11	.5317E-06	.5318E-06	.5318E-06	467.00	135.31	97.52
12	.3285E-06	.3285E-06	.3285E-06	512.77	148.38	107.09
13	.1435E-06	.1434E-06	.1434E-06	556.78	161.33	116.67
14	.8495E-08	.8469E-08	.8490E-08	611.09	175.50	127.11
15	.1278E-10	.1275E-10	.1278E-10	663.62	189.39	137.50
16	.1467E-15	.1465E-15	.1470E-15	713.61	203.31	147.73
17	.1506E-21	.4834E-20	.7859E-20	760.31	216.30	157.44
หน่วยเก็บข้อมูล (ไบต์)	90,145,644	89,851,340	89,855,372			

ตารางที่ 5.16 การเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมายและเวลาการคำนวณสะสมในแต่ละรอบการคำนวณ รวมถึงจำนวนหน่วยเก็บข้อมูลที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ ระหว่างวิธีแยกแบบแอลยูกับวิธี SYMMLQ สำหรับกรณี IV

รอบการคำนวณซ้ำ	ค่าของสมการเป้าหมาย			เวลาการคำนวณสะสม (วินาที)		
	LU	SYMMLQ	Jacobi SYMMLQ	LU	SYMMLQ	Jacobi SYMMLQ
1	.5512E-03	.5512E-03	.5512E-03	3.39	3.39	3.40
2	.4065E-03	.4065E-03	.4065E-03	44.66	13.51	9.89
3	.2445E-03	.2445E-03	.2445E-03	89.55	27.39	19.85
4	.2239E-04	.2239E-04	.2239E-04	143.80	44.06	31.09
5	.1545E-04	.1544E-04	.1545E-04	189.53	58.34	41.09
6	.9050E-05	.9050E-05	.9050E-05	234.36	72.20	51.15
7	.4040E-05	.4040E-05	.4040E-05	278.39	85.73	61.17
8	.2752E-05	.2752E-05	.2752E-05	324.05	99.45	71.35
9	.1195E-05	.1195E-05	.1195E-05	377.39	114.65	82.54
10	.8493E-06	.8493E-06	.8493E-06	422.19	128.26	92.73
11	.5317E-06	.5318E-06	.5318E-06	467.00	141.70	102.81
12	.3285E-06	.3285E-06	.3285E-06	512.77	155.34	113.12
13	.1435E-06	.1434E-06	.1434E-06	556.78	168.56	123.23
14	.8495E-08	.8484E-08	.8478E-08	611.09	183.76	134.29
15	.1278E-10	.1277E-10	.1276E-10	663.62	198.73	145.35
16	.1467E-15	.1466E-15	.1466E-15	713.61	213.51	156.28
17	.1506E-21	.3227E-20	.1081E-20	760.31	227.51	166.65
หน่วยเก็บข้อมูล (ไบต์)	90,145,644	89,855,372	89,863,436			

ตารางที่ 5.17 การเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมายและเวลาการคำนวณสะสมในแต่ละรอบการคำนวณ รวมถึงจำนวนหน่วยเก็บข้อมูลที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ ระหว่างวิธีแยกแบบแอลยูกับวิธี MINRES สำหรับกรณี IV

รอบการคำนวณซ้ำ	ค่าของสมการเป้าหมาย			เวลาการคำนวณสะสม (วินาที)		
	LU	MINRES	Jacobi MINRES	LU	MINRES	Jacobi MINRES
1	.5512E-03	.5512E-03	.5512E-03	3.39	3.37	3.37
2	.4065E-03	.4065E-03	.4065E-03	44.66	13.39	10.20
3	.2445E-03	.2445E-03	.2445E-03	89.55	27.29	20.34
4	.2239E-04	.2239E-04	.2239E-04	143.80	43.57	31.82
5	.1545E-04	.1545E-04	.1545E-04	189.53	57.70	42.28
6	.9050E-05	.9051E-05	.9050E-05	234.36	71.40	52.65
7	.4040E-05	.4040E-05	.4040E-05	278.39	85.04	62.98
8	.2752E-05	.2752E-05	.2752E-05	324.05	99.01	73.43
9	.1195E-05	.1196E-05	.1196E-05	377.39	114.34	84.98
10	.8493E-06	.8494E-06	.8493E-06	422.19	128.01	95.35
11	.5317E-06	.5318E-06	.5318E-06	467.00	141.50	105.75
12	.3285E-06	.3285E-06	.3285E-06	512.77	155.18	116.20
13	.1435E-06	.1434E-06	.1433E-06	556.78	168.70	126.48
14	.8495E-08	.8478E-08	.8428E-08	611.09	183.79	137.93
15	.1278E-10	.1276E-10	.1268E-10	663.62	198.68	149.18
16	.1467E-15	.1466E-15	.1402E-15	713.61	213.37	161.46
17	.1506E-21	.9137E-20	.1081E-19	760.31	227.03	172.00
หน่วยเก็บข้อมูล (ไบต์)	90,145,644	89,859,404	89,867,468			

ตารางที่ 5.18 การเปรียบเทียบค่าของสมการเป้าหมายและเวลาการคำนวณสะสมในแต่ละรอบการคำนวณ รวมถึงจำนวนหน่วยเก็บข้อมูลที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ ระหว่างวิธีแยกแบบแอลยูกับวิธี SQMR สำหรับกรณี IV

รอบการคำนวณซ้ำ	ค่าของสมการเป้าหมาย				เวลาการคำนวณสะสม (วินาที)			
	LU	SQMR	Jacobi SQMR	ICSQMR ($\delta = 0.0025$)	LU	SQMR	Jacobi SQMR	ICSQMR ($\delta = 0.0025$)
1	.5512E-03	.5512E-03	.5512E-03	.5512E-03	3.39	3.39	3.40	3.43
2	.4065E-03	.4065E-03	.4065E-03	.4065E-03	44.66	13.70	11.34	23.96
3	.2445E-03	.2445E-03	.2445E-03	.2445E-03	89.55	28.07	22.60	47.57
4	.2239E-04	.2239E-04	.2239E-04	.2239E-04	143.80	44.70	35.37	76.28
5	.1545E-04	.1545E-04	.1545E-04	.1545E-04	189.53	59.21	47.03	100.57
6	.9050E-05	.9050E-05	.9050E-05	.9050E-05	234.36	73.62	58.54	124.34
7	.4040E-05	.4040E-05	.4040E-05	.4040E-05	278.39	88.04	70.04	147.31
8	.2752E-05	.2752E-05	.2752E-05	.2752E-05	324.05	102.39	82.00	171.01
9	.1195E-05	.1195E-05	.1195E-05	.1195E-05	377.39	117.81	95.09	196.62
10	.8493E-06	.8494E-06	.8494E-06	.8493E-06	422.19	131.75	106.60	219.87
11	.5317E-06	.5317E-06	.5317E-06	.5318E-06	467.00	145.51	118.17	243.50
12	.3285E-06	.3286E-06	.3285E-06	.3285E-06	512.77	159.21	129.89	267.48
13	.1435E-06	.1436E-06	.1435E-06	.1435E-06	556.78	172.95	141.45	290.64
14	.8495E-08	.8548E-08	.8522E-08	.8496E-08	611.09	187.90	156.45	316.65
15	.1278E-10	.1284E-10	.1281E-10	.1278E-10	663.62	203.03	169.23	342.15
16	.1467E-15	.1476E-15	.1473E-15	.1548E-15	713.61	217.71	181.62	366.79
17	.1506E-21	.4356E-20	.7284E-20	.4330E-17	760.31	231.79	193.34	389.40
หน่วยเก็บข้อมูล (ไบต์)	90,145,644	89,855,372	89,859,404	89,979,500				

จากตารางที่ 5.15-5.18 พบว่าต้องใช้จำนวนรอบการคำนวณของวิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติกโปรแกรมมิง 17 รอบจึงเกิดการลู่เข้าหาคำตอบของค่าสติฟเนสพารามิเตอร์ ซึ่งพบว่าในกรณี IV ใช้จำนวนรอบการคำนวณมากที่สุดซึ่งส่งผลให้เวลาในการประมาณค่าพารามิเตอร์มากที่สุด เมื่อพิจารณาจากตารางที่ 5.15-5.18 วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟยังคงใช้เวลาในการประมาณค่าพารามิเตอร์น้อยกว่าการใช้วิธีแยกแบบแอลยู และเมื่อพิจารณาวิธี SQMR ร่วมกับการปรับสภาวะเริ่มต้นแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ใช้เวลารวมในการคำนวณมากกว่าการปรับสภาวะแบบจาโคบี สำหรับวิธีที่ใช้เวลาในการคำนวณน้อยที่สุดในกรณี IV คือวิธี CG ร่วมกับการปรับสภาวะจาโคบีซึ่งใช้เวลาในการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้งหมดเท่ากับ 157.44 วินาที

จากตารางที่ 5.15-5.18 เมื่อพิจารณาค่าของสมการเป้าหมายพบว่าวิธีแยกแบบแอลยูให้ค่าของสมการเป้าหมายน้อยที่สุดในรอบการคำนวณที่ 17 ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.1506×10^{-21} นอกจากนั้นวิธี SYMMLQ โดยใช้วิธีปรับสภาวะจาโคบีให้ค่าของสมการเป้าหมายรองลงมาซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.1081×10^{-20} และวิธี SQMR โดยใช้วิธี

ปรับสภาวะแบบแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์ให้ค่าของสมการเป้าหมายมากที่สุดซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.4330×10^{-17} และเมื่อพิจารณาหน่วยเก็บข้อมูลทั้งหมดที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ พบว่าหน่วยเก็บข้อมูลจากการใช้วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟลดลงจากวิธีแยกแบบแอลยูเพียงเล็กน้อยเช่นเดียวกับในกรณี I กรณี II และ กรณี III นอกจากนี้หน่วยเก็บข้อมูลยังมีขนาดมากที่สุดจากทุกกรณีที่ผ่านมา

5.4 บทสรุป

จากกรณีศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้ข้อมูลค่าความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหวในช่วง 10 โหมดแรก กรณี I กรณี II กรณี III และ กรณี IV พบว่าการใช้วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟช่วยลดเวลาในการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติกโปรแกรมมิงเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีแยกแบบแอลยูในทุกกรณีศึกษา ดังนั้นจึงสามารถกล่าวได้ว่าการนำวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟเข้ามาประยุกต์ใช้ในขั้นตอนการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างจะเป็นการเพิ่มประสิทธิภาพทางด้านเวลาในการคำนวณ โดยที่วิธี CG ร่วมกับการปรับสภาวะแบบจาโคบีใช้เวลาในการประมาณค่าพารามิเตอร์น้อยที่สุดในทุกกรณีศึกษา

เมื่อพิจารณาจำนวนหน่วยเก็บข้อมูลที่ใช้จากผลการศึกษาในทุกกรณี พบว่าการนำวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟเข้ามาใช้ในขั้นตอนการประมาณค่าพารามิเตอร์ส่งผลให้จำนวนหน่วยเก็บข้อมูลลดลงเพียงเล็กน้อยเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีแยกแบบแอลยู ถึงแม้ว่าวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟจะมีประสิทธิภาพทางด้านหน่วยเก็บข้อมูลของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ในระบบสมการเชิงเส้นที่ดีกว่าวิธีแยกแบบแอลยูจากการศึกษาในบทที่ 4 แต่จำนวนหน่วยเก็บข้อมูลของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ในขั้นตอนของการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น มีค่าเพียงเล็กน้อยเมื่อเทียบกับหน่วยเก็บข้อมูลทั้งหมดที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ ส่งผลให้การประยุกต์ใช้วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟในขั้นตอนของการประมาณค่าพารามิเตอร์ไม่สามารถเพิ่มประสิทธิภาพทางด้านหน่วยเก็บข้อมูลได้เท่าที่ควร โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อนำมาใช้กับโครงสร้างที่มีขนาดใหญ่และมีจำนวนกลุ่มของพารามิเตอร์ที่ต้องการประมาณค่าเพิ่มมากขึ้น

เมื่อพิจารณาค่าของสมการเป้าหมายในรอบการคำนวณสุดท้ายของการประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับทุกกรณีศึกษา พบว่าวิธีแยกแบบแอลยูให้ค่าของสมการเป้าหมายน้อยที่สุด ในทางตรงกันข้ามวิธี SQMR ร่วมกับการปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ให้ค่าของสมการเป้าหมายมากที่สุด และวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟที่ให้ค่าของสมการเป้าหมายน้อยที่สุดคือวิธี SYMMLQ ร่วมกับการปรับสภาวะแบบจาโคบี ค่าของสมการเป้าหมายในรอบการคำนวณสุดท้ายของการประมาณค่าพารามิเตอร์แสดงถึงความละเอียดถูกต้องของคำตอบในขั้นตอนของการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น เนื่องจากวิธีแยกแบบแอลยูซึ่งเป็นวิธีการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีตรงให้ความละเอียดถูกต้องของรูปแบบการสั่นไหวจากการคำนวณมากกว่าวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟซึ่งเป็นวิธีการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีคำนวณซ้ำ ส่งผลให้ค่าของสมการเป้าหมายที่อยู่ในรูปกำลังสองของนอร์มของผลต่างระหว่างรูปแบบการสั่นไหวจากการวัดข้อมูลและรูปแบบการสั่นไหวเทียบเท่าจากการคำนวณ โดยวิธีแยกแบบแอลยูมีค่าน้อยกว่าวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ ในกรณีที่ต้องการให้มีความละเอียดถูกต้องของ

รูปแบบการสั่นไหวจากการคำนวณเพิ่มมากขึ้น สำหรับวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟสามารถทำได้โดยการปรับลดเกณฑ์ในการลู่เข้าของคำตอบจากตารางที่ 5.2 แต่สำหรับกรณีศึกษานี้เกณฑ์ในการลู่เข้าของคำตอบในตารางที่ 5.2 มีความเหมาะสมเพียงพอสำหรับการเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยแต่ละวิธี

บทที่ 6

สรุปผลการวิจัย

การประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างสามารถทำได้โดยใช้วิธีการกำหนดสมการเป้าหมายให้อยู่ในรูปของกำลังสองน้อยที่สุดของฟังก์ชันค่าผิดพลาดระหว่างข้อมูลผลตอบสนองของโครงสร้างที่ได้จากการวัดและข้อมูลผลตอบสนองของโครงสร้างที่ได้จากการคำนวณด้วยแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของโครงสร้าง ข้อมูลผลตอบสนองของโครงสร้างสามารถวัดได้ในรูปของผลตอบสนองเชิงโหมด ซึ่งได้แก่ความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหวของโครงสร้าง การประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างจากผลตอบสนองเชิงโหมดสามารถทำได้โดยการใช้วิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติกโปรแกรมมิง ซึ่งเป็นการหาค่าพารามิเตอร์คำตอบที่ทำให้สมการเป้าหมายมีค่าน้อยที่สุด

เมื่อพิจารณาขั้นตอนวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างโดยวิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติกโปรแกรมมิง พบว่าประสิทธิภาพทางด้านเวลาของการประมาณค่าพารามิเตอร์ถูกจำกัดอยู่ในขั้นตอนของการแก้ปัญหาค่าน้อยที่สุดในหนึ่งมิติ ซึ่งเกี่ยวข้องกับการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในแต่ละรอบของการคำนวณซ้ำ กล่าวคือเวลาที่ใช้ในการคำนวณขั้นตอนของการแก้ปัญหาน้อยที่สุดในหนึ่งมิติส่วนใหญ่เป็นเวลาที่ใช้ในขั้นตอนของการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นเพื่อคำนวณรูปแบบการสั่นไหวเทียบเท่าจากแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของโครงสร้าง ดังนั้นแนวทางหนึ่งในการปรับปรุงประสิทธิภาพทางด้านเวลาในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างก็คือการพิจารณาใช้วิธีทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมเพื่อลดระยะเวลาในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในขั้นตอนของการแก้ปัญหาค่าน้อยที่สุดในหนึ่งมิติ จากการศึกษาพบว่าวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟซึ่งเป็นวิธีการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีคำนวณซ้ำ มีความเหมาะสมในการนำมาประยุกต์ใช้ในขั้นตอนการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างเพื่อลดเวลาในการคำนวณ วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟที่ได้ศึกษาในงานวิจัยนี้ได้แก่ วิธีเกรเดียนต์สังยุค (CG) วิธีแอลคิวสมมาตร (SYMMLQ) วิธีเวกเตอร์คงค้างน้อยที่สุด (MINRES) และวิธีเวกเตอร์คงค้างเสมือนน้อยที่สุดสมมาตร (SQMR) โดยวิธีดังกล่าวเป็นวิธีการคำนวณซ้ำที่เหมาะสมสำหรับระบบสมการเชิงเส้นที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์มีคุณสมบัติสมมาตร นอกจากนี้การปรับสภาวะเบื้องต้นให้แก่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้นส่งผลในการเพิ่มอัตราการลู่เข้าของคำตอบของวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ โดยวิธีปรับสภาวะที่เลือกใช้ได้แก่ วิธีการปรับสภาวะจาโคบีและ วิธีการปรับสภาวะแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์

สำหรับกรณีที่สามารถวัดข้อมูลรูปแบบการสั่นไหวในแต่ละโหมดได้ครบทุกระดับขั้นความเสรีของโครงสร้าง เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้นในขั้นตอนของการหาค่าน้อยที่สุดในหนึ่งมิติจะมีคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอน ในทางตรงกันข้าม กรณีที่ข้อมูลรูปแบบการสั่นไหวในแต่ละโหมดที่ทำการวัดข้อมูลไม่สามารถวัดได้ครบทุกระดับขั้นความเสรี เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้นจะขาดคุณสมบัติความ

เป็นบวกแน่นอน ซึ่งในกรณีดังกล่าวจะส่งผลต่อวิธีการปรับสภาวะเบื้องต้นที่เลือกใช้ในวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ กล่าวคือสำหรับวิธี CG SYMMLQ และ MINRES ไม่สามารถใช้วิธีการปรับสภาวะเบื้องต้นแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ได้ สามารถใช้ได้เพียงการปรับสภาวะเบื้องต้นแบบจาโคบีเท่านั้น แต่สำหรับวิธี SQMR สามารถเลือกใช้วิธีการปรับสภาวะเบื้องต้นทั้งแบบจาโคบี และวิธีการปรับสภาวะเบื้องต้นแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ได้

จากผลการทดลองในบทที่ 4 จำนวนระดับขั้นความเสรีของรูปแบบการสั่นไหวที่ทำการวัดข้อมูลส่งผลต่อประสิทธิภาพทางด้านเวลาและประสิทธิภาพทางด้านหน่วยเก็บข้อมูลของวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ เมื่อระดับขั้นความเสรีของรูปแบบการสั่นไหวที่สามารถวัดได้ในแต่ละโหมดมีจำนวนลดลง พบว่าวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟใช้เวลาในการคำนวณมากขึ้น โดยกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้เพียง 50% และ 10% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด พบว่าวิธี CG SYMMLQ และ MINRES ใช้เวลาในการคำนวณรวมทุกโหมดมากกว่าวิธีแยกแบบแอลยู ในขณะที่วิธี SQMR ร่วมกับการปรับสภาวะเริ่มต้นแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ที่มีสัมประสิทธิ์เติมเต็มที่เหมาะสมใช้เวลาในการคำนวณรวมทุกโหมดน้อยกว่าวิธีแยกแบบแอลยู อย่างไรก็ตามสำหรับในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 50% และ 10% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด พบว่าการพิจารณาเวลาที่ใช้ในการคำนวณสำหรับ 130 โหมดแรก (กรณี 50%) และ 70 โหมดแรก (กรณี 10%) ทำให้วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีแยกแบบแอลยู เมื่อพิจารณาในส่วนของจำนวนหน่วยเก็บข้อมูลที่ใช้ ถึงแม้ว่าวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟใช้จำนวนหน่วยเก็บข้อมูลน้อยกว่าวิธีแยกแบบแอลยูในทุกกรณี วิธี SQMR ร่วมกับการปรับสภาวะเริ่มต้นแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์จะต้องใช้จำนวนหน่วยเก็บข้อมูลมากขึ้นในการทำให้เวลาในการคำนวณรวมทุกโหมดมีค่าน้อยกว่าวิธีแยกแบบแอลยู นอกจากนี้ยังพบว่าในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ 50% และ 10% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมด วิธี SQMR ร่วมกับการปรับสภาวะเริ่มต้นแบบแยกส่วนไม่สมบูรณ์ที่มีสัมประสิทธิ์เติมเต็มเท่ากับ 0.0005 ใช้จำนวนหน่วยเก็บข้อมูลใกล้เคียงกับวิธีแยกแบบแอลยู

ในการทดสอบโครงสร้างจริงนั้นข้อมูลผลตอบสนองเชิงโหมดของโครงสร้างที่ทำการทดสอบสามารถวัดได้เพียงโหมดแรกๆ เท่านั้น เนื่องจากค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างมีค่าน้อยในโหมดแรกและจะมีค่าเพิ่มขึ้นในโหมดถัดไป ส่งผลให้การวัดข้อมูลค่าความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหวในช่วงโหมดท้ายๆ เป็นไปได้ยาก ดังนั้นการศึกษาประสิทธิภาพทางด้านเวลาในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างโดยการประยุกต์ใช้วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ จึงพิจารณากรณีที่สามารถวัดข้อมูลค่าความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหวของโครงสร้างได้เพียง 10 โหมดแรกเท่านั้น นอกจากนี้การใช้จำนวนโหมดที่วัดข้อมูลค่าความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหวครบทุกโหมดในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้าง ถึงแม้ว่าจะส่งผลให้จำนวนรอบการคำนวณซ้ำโดยวิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติกโปรแกรมมิงลดลง แต่ไม่ได้ทำให้เวลาทั้งหมดที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ลดลงด้วย ซึ่งสามารถพิจารณาได้จากกรณีศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างในบทที่ 2 ในขณะที่กรณีศึกษาในบทที่ 5 ซึ่งได้กำหนดให้วัดข้อมูลรูปแบบการสั่นได้ครบทุกระดับขั้นความเสรีเช่นเดียวกัน แต่กำหนดให้วัดค่าความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหวได้เพียง 10 โหมดแรก พบว่าใช้เวลาในการประมาณค่าพารามิเตอร์น้อยกว่าการใช้ข้อมูลผลตอบสนองครบทุกโหมด โดยที่มีความถูกต้องของค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการประมาณในระดับเดียวกัน

จากผลการทดลองในบทที่ 5 แสดงถึงประสิทธิภาพด้านเวลาในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้าง ก่อนและหลังการนำวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟเข้ามาใช้ในขั้นตอนการประมาณค่าพารามิเตอร์ โดยสำหรับกรณีที่ใช้ข้อมูลค่าความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหวใน 10 โหมดแรก โดยใช้ข้อมูลรูปแบบการสั่นไหวครบทุกระดับขั้นความเสรี และกรณีที่ใช้ข้อมูลรูปแบบการสั่นไหว 90% 50% และ 10% ของระดับขั้นความเสรีทั้งหมดตามลำดับนั้น การใช้วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟซึ่งได้แก่ วิธี CG SYMMLQ MINRES และ SQMR สามารถปรับปรุงประสิทธิภาพทางด้านเวลาในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นในขั้นตอนของการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้าง ส่งผลให้เพิ่มประสิทธิภาพด้านเวลาในการประมาณค่าพารามิเตอร์ โดยที่การใช้วิธี CG ร่วมกับเมตริกซ์ปรับสภาวะจาโคบีใช้เวลาในการคำนวณน้อยที่สุดสำหรับทุกกรณีศึกษา ทั้งนี้การศึกษานี้ยังไม่ได้พิจารณาถึงความไหวตัวของค่าพารามิเตอร์คำตอบจากความคลาดเคลื่อนในการวัดข้อมูลความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหวในแต่ละโหมด รวมถึงปัญหาความไม่เป็นเอกภาพของค่าพารามิเตอร์คำตอบ ในกรณีที่วัดข้อมูลรูปแบบการสั่นไหวได้ไม่ครบทุกระดับขั้นความเสรีในแต่ละโหมด

งานวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาเบื้องต้นถึงความเหมาะสม ในการนำวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟเข้ามาประยุกต์ใช้ในขั้นตอนของการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้าง โดยกำหนดให้ข้อมูลค่าความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหวในแต่ละโหมดของการสั่นแบบอิสระไม่มีความคลาดเคลื่อน ทั้งนี้เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาความไหวตัวของค่าสติฟเนสพารามิเตอร์ต่อระดับความคลาดเคลื่อนของข้อมูล (Pothisiri และ Vatcharathanyakorn 2002) และปัญหาความไม่เป็นเอกภาพของค่าสติฟเนสพารามิเตอร์คำตอบที่ได้จากการประมาณโดยวิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติกโปรแกรมมิงในกรณีที่ไม่สามารถวัดข้อมูลรูปแบบการสั่นไหวได้ครบทุกระดับขั้นความเสรี อย่างไรก็ตามควรมีการศึกษาเพิ่มเติมถึงความเหมาะสมของการนำวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟเข้ามาประยุกต์ใช้ในขั้นตอนของการประมาณค่าพารามิเตอร์ ในกรณีดังกล่าวเพื่อศึกษาถึงผลกระทบต่อคำตอบที่ได้โดยวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟ เนื่องจากปัญหาความไหวตัวของค่าสติฟเนสพารามิเตอร์ต่อระดับความคลาดเคลื่อนของข้อมูล และปัญหาความไม่มีเอกภาพของคำตอบต่อไป

นอกจากนี้จากการศึกษาพบว่าการใช้ข้อมูลค่าความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหวครบทุกโหมดในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างไม่ได้เป็นการปรับปรุงอัตราการลู่เข้าของค่าพารามิเตอร์คำตอบโดยวิธีรีเคอร์ซีฟควอดราติก โปรแกรมมิงเสมอไป ในกรณีที่วัดรูปแบบการสั่นไหวได้ไม่ครบทุกระดับขั้นความเสรี พบว่าการใช้ข้อมูลค่าความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหวครบทุกโหมดในการประมาณค่าพารามิเตอร์กลับส่งผลให้อัตราการลู่เข้าของค่าพารามิเตอร์คำตอบน้อยกว่าในกรณีที่ใช้ข้อมูลค่าความถี่ธรรมชาติและรูปแบบการสั่นไหวใน 10 โหมดแรก ซึ่งจากพฤติกรรมดังกล่าวสมควรที่จะเป็นประเด็นศึกษาสำหรับในงานวิจัยต่อไป

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาถึงความเหมาะสมในการนำวิธีปริภูมิย่อยไครโลฟเข้ามาประยุกต์ใช้ในขั้นตอนของการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างจากแบบจำลองโครงข้อหมุน 3 มิติที่มีค่าพารามิเตอร์คือสติฟเนสตามแนวแกนของโครงข้อหมุนเท่านั้น อย่างไรก็ตามเพื่อความสมบูรณ์ของงานวิจัย ควรจะมีการศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างประเภทอื่นๆ เช่น โครงข้อแข็ง เป็นต้น เพื่อประเมินประสิทธิภาพของการประยุกต์ใช้วิธีปริภูมิย่อยไครโลฟในการประมาณค่าพารามิเตอร์ สำหรับโครงสร้างประเภทดังกล่าวต่อไป

รายการอ้างอิง

Banan , M.F., and Hjelmstad , K.D., “Identification of structural systems from measure response” , Civ. Engrg. Studies, SRS579,UILU-ENG-93-2002, University of Illisnois at Urbana-Champaign ,1993.

C. C. Paige and M. A. Saunders, “Solution of sparse indefinite systems of linear equations”, SIAM J. Numer. Anal. 12, 617 (1975): pp.617-629.

C. G. J. Jacobi, “Uber eine neue Aufi¨osungsart der bei der Methode der kleinsten Quadrate vorkommenden linearen Gleichungen”, Astron. Nachrichten 22, 297 (1845).

C. LANCZOS, “An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators”, J. Res. Nat. Bur. Stand., 45 (1950) : pp. 255-282.

C. Lanczos, “Solution of Systems of Linear Equations by Minimized Iterations,” J. Research Nat’l Bureau of Standards, Vol. 49, 1952 : pp. 33–53.

D. S. Kershaw, “The incomplete Cholesky conjugate gradient method for the iterative solution of systems of linear equations”, J. Comput. Phys (1978) : pp. 26-43

Freund, R. W. and Nachtigal, N. M., “A New Krylov-Subspace Method for Symmetric Indefinite Linear Systems”, Proceedings of the 14th IMACS World Congress, 1994

G. H. Golub and D. P. O’Leary, “Some history of the conjugate gradient and Lanczos methods”:, SIAM Rev. 31, 50 (1989) : pp. 1948–1976

Gene H. Golub and Cherles F. Vanloan , “Matrix computation : Jacobi precondition conjugate gradient method” ,1993 : pp. 362-377.

J. K. Reid, “On the method of conjugate gradients for the solution of large sparse systems of linear equations”, in Large Sparse Sets of Linear Equations, edited by J. K. Reid, pp. 231-254 (Academic Press, New York, 1971).

Jonathan Richard Shewchuk , “An Introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain” , School of computer science Carnegie Mellon University , March 1994.

M. A. Ajiz and A. Jennings, “A robust incomplete Choleski-conjugate gradient algorithm”, Int. J. Numer. Methods Eng. 20, 949 (1984) : pp.949-966.

M. Hestenes and E. Stiefel, “Methods of conjugate gradients for solving linear systems”, J. Res. Nat. Bur. Stand., 49 (1952) : pp. 409-436.

Michele Benzi , “Some Techniques for Preconditioning Symmetric Indefinite Linear System” ,Dept. of Mathmatics and Computer science Emory University ,CSE Seminar , Springfield Ave., Urbana , IL , September 5, (2003).

Pothisiri and Hjelmstad , “Structural damage detection and assessment from spatially sparse and noise-polluted modal response” , University of Illinois at Urbana-Champaign ,2001.

Pothisiri and Vatcharathanyakorn, “Optimal regularization for parameter estimation from modal response” , Department of Civil Engineering Chulalongkorn University ,2002.

R. Freund and N. M. Nachtigal, “A quasi-minimal residual method for non-Hermitian linear systems” , Numer. Math. 60, 315 (1991).

W. Jinming and B. Baodong , “A new method for solving linear equations with large sparse symmetric and indefinite coefficient matrix” IEEE Transactions on magnetics , Vol. 40 , No.2 , March 2004 , : pp.1069-1071.

สุวิทย์ วัชรธัญญากร. วิธีเรกูลาร์ไรเซชันสำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างจากผลตอบสนองเชิงโหมดที่ได้จากการวัด. วิศวกรรมศาสตร์มหาบัณฑิต จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย , 2545.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
รูปแบบการจัดเก็บข้อมูลของเมตริกซ์

ก.1 รูปแบบการจัดเก็บข้อมูลของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์

พิจารณาเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ที่มีขนาดเท่ากับ 4×4 วิธีการจัดเก็บข้อมูลของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ในรูปแบบของแถวลำดับหนึ่งมิติ (one-dimension array) แสดงได้จากรูปที่ ก.1.1

$$\begin{bmatrix} 8.3 & -3.2 & 0 & -2.7 \\ -3.2 & 13.7 & -5.6 & 0 \\ 0 & -5.6 & 10.5 & -2.2 \\ -2.7 & 0 & -2.2 & 9.2 \end{bmatrix}$$

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 8.3 & -3.2 & & -2.7 \\ & 13.7 & -5.6 & \\ & & 10.5 & -2.2 \\ & & & 9.2 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & & 3 \\ & 4 & 5 & \\ & & 6 & 7 \\ & & & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

(d)

รูปที่ ก.1.1 แสดงรูปแบบการจัดเก็บข้อมูลของเมตริกซ์

รูปที่ ก.1.1 (a) จากเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ที่เก็บข้อมูลในรูปของแถวลำดับใน 2 มิติ (two-dimension array) ต้องเก็บข้อมูลสมาชิกทุกตำแหน่งในรูปที่ ก.1.1 (b) แต่ถ้าจัดเก็บเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ในรูปแบบของแถวลำดับในหนึ่งมิติ ซึ่งแสดงในรูปที่ ก.1.1 (c) เนื่องจากคุณสมบัติสมมาตรของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ทำให้สามารถเก็บข้อมูลของสมาชิกในตำแหน่งสามเหลี่ยมบน (upper triangular) โดยเก็บข้อมูลเฉพาะสมาชิกที่มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ สำหรับในรูปที่ ก.1.1 (d) แสดงตำแหน่งของสมาชิกสำหรับการจัดเก็บข้อมูลแบบแถวลำดับในหนึ่งมิติ การจัดเก็บข้อมูลเป็นลักษณะตามแถว (row storage) โดยเริ่มเก็บข้อมูลจากแถวที่หนึ่งจากซ้ายไปขวา

เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ที่เก็บข้อมูลในรูปแบบของแถวลำดับ 2 มิติ จากรูปที่ ก.1.1 (a) สามารถพิจารณาการจัดเก็บข้อมูลในรูปแบบของแถวลำดับหนึ่งมิติได้จากรูปที่ ก.1.1 (d) ร่วมกับการใช้แถวลำดับดรรชนี (index array) ในการกำหนดตำแหน่งของข้อมูล ซึ่งแสดงได้ดังนี้

กำหนดให้ A คือแถวลำดับหนึ่งมิติที่เก็บข้อมูลของสมาชิกเฉพาะในตำแหน่งที่มีค่าไม่เท่ากับศูนย์

$$A = \begin{pmatrix} 8.3 & -3.2 & -2.7 & 13.7 & -5.6 & 10.5 & -2.2 & 9.2 \end{pmatrix}$$

กำหนดให้ AC คือแถวลำดับดรรชนีในหนึ่งมิติที่ใช้จัดเก็บข้อมูลสดมภ์ (column) ของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

กำหนดให้ ADDRES คือแถวลำดับดรรชนีในหนึ่งมิติที่ใช้จัดเก็บตำแหน่งของสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลักของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ โดยดรรชนีในตำแหน่งสุดท้ายจะเท่ากับดรรชนีในตำแหน่งรองสุดท้ายบวกด้วยหนึ่ง

$$ADDRES = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

แถวลำดับในหนึ่งมิติ A ที่เก็บข้อมูลสมาชิกในตำแหน่งที่มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ร่วมกับแถวลำดับดรรชนี AC และ ADDRES สามารถอ้างถึงสมาชิกในเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ที่เก็บข้อมูลในรูปแบบของแถวลำดับใน 2 มิติได้อย่างครบถ้วน โดยที่ A และ AC มีจำนวนสมาชิกเท่ากับจำนวนข้อมูลของสมาชิกในตำแหน่งสามเหลี่ยมบนที่มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ในขณะที่ ADDRES มีจำนวนสมาชิกเท่ากับมิติของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์บวกด้วยหนึ่ง

ก.2 รูปแบบการจัดเก็บข้อมูลของเมตริกซ์ที่ได้จากการแยกส่วนเมตริกซ์สัมประสิทธิ์

พิจารณาเมตริกซ์สามเหลี่ยมบนที่มีขนาดเท่ากับ 4×4 ซึ่งได้จากการแยกส่วนโชเลสกีของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ในหัวข้อที่ ก.1

$$\begin{bmatrix} 4.3 & -2.8 & 1.7 & 0 \\ 0 & 8.2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 5.2 & 8.6 \\ 0 & 0 & 0 & 1.3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

(a) (b)

$$\begin{bmatrix} 4.3 & -2.8 & 1.7 & \\ & 8.2 & & -6.0 \\ & & 5.2 & 8.6 \\ & & & 1.3 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \\ & 4 & & 5 \\ & & 6 & 7 \\ & & & 8 \end{bmatrix}$$

(c) (d)

รูปที่ ก.2.1 แสดงรูปแบบการจัดเก็บข้อมูลของเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน

รูปที่ ก.2.1 (a) เมตริกซ์สามเหลี่ยมบนเก็บข้อมูลในรูปของแถวลำดับใน 2 มิติ (two-dimension array) ซึ่งจะเก็บข้อมูลสมาชิกทุกตำแหน่งในรูปที่ ก.1.1 (b) การจัดเก็บเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ในรูปแบบของแถวลำดับในหนึ่งมิติแสดงในรูปที่ ก.1.1 (c) ซึ่งจะเก็บข้อมูลเฉพาะสมาชิกที่มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ สำหรับในรูปที่ ก.1.1 (d) แสดงตำแหน่งของสมาชิกสำหรับการจัดเก็บข้อมูลแบบแถวลำดับในหนึ่งมิติ การจัดเก็บข้อมูลเป็นลักษณะตามแถว (row storage) โดยเริ่มเก็บข้อมูลจากแถวที่หนึ่งจากซ้ายไปขวา

เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ที่เก็บข้อมูลในรูปแบบของแถวลำดับ 2 มิติ จากรูปที่ ก.2.1 (a) สามารถพิจารณาการจัดเก็บข้อมูลในรูปแบบของแถวลำดับหนึ่งมิติได้จากรูปที่ ก.2.1 (d) ร่วมกับการใช้แถวลำดับดรรชนี (index array) ในการกำหนดตำแหน่งของข้อมูล ซึ่งแสดงได้ดังนี้

กำหนดให้ LT คือแถวลำดับหนึ่งมิติที่เก็บข้อมูลของเมตริกซ์สามเหลี่ยมบนเฉพาะในตำแหน่งที่มีค่าไม่เท่ากับศูนย์

$$LT = (4.3 \quad -2.8 \quad 1.7 \quad 8.2 \quad -6.0 \quad 5.2 \quad 8.6 \quad 1.3)$$

กำหนดให้ LTC คือแถวลำดับดรรชนีในหนึ่งมิติที่ใช้จัดเก็บข้อมูลสดมภ์ (column) ของเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน

$$LTC = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 4 \quad 3 \quad 4 \quad 4)$$

กำหนดให้ LTADD คือแถวลำดับดรรชนีในหนึ่งมิติที่ใช้จัดเก็บตำแหน่งของสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลักของเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน โดยดรรชนีในตำแหน่งสุดท้ายจะเท่ากับดรรชนีในตำแหน่งรองสุดท้ายบวกด้วยหนึ่ง

$$LTADD = (1 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 9)$$

นอกจากนี้ยังกำหนดให้แถวลำดับดรรชนี LTLINK ซึ่งทำหน้าที่เก็บข้อมูลตำแหน่งของสมาชิกที่อยู่ด้านบนในแนวสดมภ์

$$LTLINK = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 3 \quad 5 \quad 7)$$

แถวลำดับดรรชนี LTLINK ทำหน้าที่เชื่อมโยงข้อมูลที่อยู่ด้านบนของตำแหน่งที่พิจารณา ซึ่งสามารถคำนวณได้ในขั้นตอนของการแยกส่วนเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ จากรูปที่ ก.2.1 (d) สมาชิกในตำแหน่งที่ 1-3 ของ LTLINK มีค่าเท่ากับศูนย์ เนื่องจากสมาชิกในตำแหน่งที่ 1-3 อยู่ในแถวบนสุดซึ่งไม่มีตำแหน่งของข้อมูลที่อยู่เหนือสมาชิกดังกล่าว สำหรับสมาชิกในตำแหน่งที่ 4 ของ LTLINK มีค่าเท่ากับ 2 เนื่องจากมีข้อมูลในตำแหน่งที่ 2 อยู่เหนือสมาชิกในตำแหน่งที่ 4 ในทำนองเดียวกันสมาชิกในตำแหน่งที่ 5 ไม่มีตำแหน่งของข้อมูลที่อยู่เหนือขึ้นไป และสมาชิกในตำแหน่งที่ 6 7 และ 8 มีตำแหน่งข้อมูลที่ 3 5 และ 7 ที่อยู่เหนือขึ้นไปตามลำดับ

แถวลำดับในหนึ่งมิติ LT ที่เก็บข้อมูลสมาชิกในตำแหน่งที่มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ร่วมกับแถวลำดับดรรชนี LTC และ LTADD สามารถอ้างถึงสมาชิกในเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ที่เก็บข้อมูลในรูปแบบของแถวลำดับใน 2 มิติได้อย่างครบถ้วน และ LTLINK เป็นแถวลำดับดรรชนีที่ต้องใช้ในการระบุตำแหน่งสำหรับการแยกส่วนของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์

LT LTC และ LTLINK มีจำนวนสมาชิกเท่ากับจำนวนข้อมูลของสมาชิกในตำแหน่งสามเหลี่ยมบนที่มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ในขณะที่ LTADD มีจำนวนสมาชิกเท่ากับมิติของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์บวกด้วยหนึ่ง

ภาคผนวก ข
การแยกส่วนเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบไม่สมบูรณ์

ข.1 ขั้นตอนวิธีการแยกส่วนเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบไม่สมบูรณ์

พิจารณาเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ ที่มีขนาด $n \times n$ และมีคุณสมบัติสมมาตร

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

พิจารณาเมตริกซ์ $\hat{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}$ ซึ่งเป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน (upper triangular matrix) ที่ได้จากการแยกส่วนไม่สมบูรณ์

$$\hat{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \hat{e}_{11} & \cdots & \hat{e}_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \hat{e}_{nn} \end{pmatrix}$$

การแยกส่วนแบบไม่สมบูรณ์ของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ โดยระดับความไม่สมบูรณ์ของการแยกส่วนพิจารณาจากสัมประสิทธิ์เติมเต็ม δ เมื่อ $0 \le \delta \le 1$ ขั้นตอนวิธีการแยกส่วนเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบไม่สมบูรณ์แสดงได้ในรูปที่ ข.1.1

$$
\begin{aligned}
& \textit{for } i = 1,2,\ldots n \\
& \quad \hat{e}_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \hat{e}_{kk}\hat{e}_{ki}^2 \\
& \quad \textit{for } j = i+1,\ldots,n \\
& \quad\quad \hat{e}_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \hat{e}_{kk}\hat{e}_{ki}\hat{e}_{kj} \\
& \quad\quad \textit{if } \left|\hat{e}_{ij}\right| < \delta^2 e_{ii} a_{jj} \;\; \textit{and} \;\; a_{ij} \neq 0 \\
& \quad\quad\quad \hat{e}_{ij} = 0 \\
& \quad\quad \textit{else} \\
& \quad\quad\quad \hat{e}_{ij} = \frac{\hat{e}_{ij}}{\hat{e}_{ii}} \\
& \quad\quad \textit{endif} \\
& \quad \textit{endfor} \\
& \textit{endfor}
\end{aligned}
$$

รูปที่ ข.1.1 ขั้นตอนวิธีการแยกส่วนเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบไม่สมบูรณ์

จากขั้นตอนวิธีการแยกส่วนเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบไม่สมบูรณ์จากรูปที่ ข.1.1 เงื่อนไขในการคัดออกของสมาชิกในเมตริกซ์ $\mathbf{E}^{\mathrm{T}}$ จะถูกพิจารณาพร้อมกับขั้นตอนในการคำนวณสมาชิกแต่ละตำแหน่งของ $\mathbf{E}^{\mathrm{T}}$ การคัดออกจะทำเฉพาะในตำแหน่งที่ไม่ตรงกับตำแหน่งของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เท่านั้น จากการตรวจสอบเงื่อนไขถ้าพบว่า $\left|\hat{e}_{ij}\right| < \delta^2 \hat{e}_{ii} a_{jj}$ สมาชิกในตำแหน่งที่พิจารณาจะถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับศูนย์ ซึ่งก็คือการคัดออกจากเมตริกซ์ $\mathbf{E}^{\mathrm{T}}$ ดังนั้นในกรณีที่ $\delta = 0$ พบว่า $\left|\hat{e}_{ij}\right| \geq 0$ เสมอ จึงไม่มีการคัดออกของสมาชิกในแต่ละตำแหน่งจากเมตริกซ์ $\mathbf{E}^{\mathrm{T}}$ ซึ่งก็คือการแยกส่วนแบบสมบูรณ์นั่นเอง ในทางตรงกันข้ามกรณีที่ $\delta = 1$ พบว่าสำหรับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ ที่มีคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอน ส่งผลให้ $\left|\hat{e}_{ij}\right| > e_{ii} a_{jj}$ เสมอ (Ajiz และ Jennings 1984) จึงทำให้เกิดการคัดออกของสมาชิกในทุกตำแหน่งที่ไม่ตรงกับตำแหน่งของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ ซึ่งการแยกส่วนแบบไม่สมบูรณ์ในกรณีที่ $\delta = 1$ เรียกว่า การแยกส่วนแบบไม่เติมเต็มสมบูรณ์

ตัวอย่างลักษณะการเก็บข้อมูลในรูปแบบแถวลำดับในหนึ่งมิติของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ แสดงได้ดังนี้

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & & a_2 & & & & & \\ & a_3 & & & & a_4 & & \\ & & a_5 & & a_6 & a_7 & & \\ & & & a_8 & a_9 & a_{10} & & a_{11} \\ & & & & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \\ & & & & & a_{15} & & \\ & & & & & & a_{16} & \\ & & & & & & & a_{17} \end{bmatrix}$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน $\hat{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}$ ที่ได้จากการแยกส่วนไม่สมบูรณ์มีลักษณะการเก็บข้อมูลดังนี้

$$\hat{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \hat{e}_1 & * & \hat{e}_2 & & & & & \\ & \hat{e}_3 & * & * & * & \hat{e}_4 & & \\ & & \hat{e}_5 & * & \hat{e}_6 & \hat{e}_7 & & \\ & & & \hat{e}_8 & \hat{e}_9 & \hat{e}_{10} & * & \hat{e}_{11} \\ & & & & \hat{e}_{12} & \hat{e}_{13} & \hat{e}_{14} & \hat{e}_{15} \\ & & & & & \hat{e}_{16} & \hat{e}_{17} & \hat{e}_{18} \\ & & & & & & \hat{e}_{19} & \hat{e}_{20} \\ & & & & & & & \hat{e}_{21} \end{bmatrix}$$

เครื่องหมาย * ในเมตริกซ์ $\hat{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}$ คือตำแหน่งที่ไม่ตรงกับตำแหน่งในเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ ซึ่งจากการตรวจสอบเงื่อนไขการคัดออกพบว่า $\left|\hat{e}_{ij}\right| < \delta^2 \hat{e}_{ii} a_{jj}$ ทำให้สมาชิกในตำแหน่งดังกล่าวได้ถูกคัดออกไป ส่วนที่

วงกลมในเมตริกซ์ $\hat{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}$ คือสมาชิกที่เพิ่มขึ้นมาจากการคำนวณแยกส่วนไม่สมบูรณ์ ซึ่งไม่ได้ถูกคัดออกในขั้นตอนการคำนวณแยกส่วนไม่สมบูรณ์

ข.2 ขั้นตอนวิธีการแยกส่วนเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบโชเลสกีไม่สมบูรณ์

พิจารณาเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ ที่มีขนาด $n \times n$ และมีคุณสมบัติสมมาตร และมีคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอน

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

พิจารณาเมตริกซ์ $\tilde{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}$ ซึ่งเป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน (upper triangular matrix) ที่ได้จากการแยกส่วนแบบโชเลสกีไม่สมบูรณ์

$$\tilde{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \tilde{e}_{11} & \cdots & \tilde{e}_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \tilde{e}_{nn} \end{pmatrix}$$

การแยกส่วนแบบโชเลสกีไม่สมบูรณ์ของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ โดยระดับความไม่สมบูรณ์ของการแยกส่วนพิจารณาจากสัมประสิทธิ์เติมเต็ม δ เมื่อ $0 \le \delta \le 1$ ขั้นตอนวิธีการแยกส่วนเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบโชเลสกีไม่สมบูรณ์แสดงได้ในรูปที่ ข.2.1

$$
\begin{array}{l}
\textit{for } i = 1,2,\ldots n \\
\qquad \tilde{e}_{ii} = a_{ii} \\
\textit{endfor} \\
\textit{for } i = 1,2,\ldots n \\
\qquad \tilde{e}_{ii} = \tilde{e}_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{e}_{ki}^{2} \\
\qquad \textit{for } j = i+1,\ldots,n \\
\qquad\qquad \tilde{e}_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{e}_{ki}\tilde{e}_{kj} \\
\qquad\qquad \textit{if } \left|\tilde{e}_{ij}\right| < \delta^{2}\tilde{e}_{ii}\tilde{e}_{jj} \textit{ and } a_{ij} \neq 0 \\
\qquad\qquad\qquad d_{ii} = \sqrt{\tilde{e}_{ii}/\tilde{e}_{jj}} \times \left|\tilde{e}_{ij}\right| \text{ , } d_{jj} = \sqrt{\tilde{e}_{jj}/\tilde{e}_{ii}} \times \left|\tilde{e}_{ij}\right| \\
\qquad\qquad\qquad \tilde{e}_{ii} = \tilde{e}_{ii} + d_{ii} \text{ , } \tilde{e}_{jj} = \tilde{e}_{jj} + d_{jj} \\
\qquad\qquad\qquad \tilde{e}_{ij} = 0 \\
\qquad\qquad \textit{endif} \\
\qquad \textit{endfor} \\
\qquad \tilde{e}_{ii} = \sqrt{\tilde{e}_{ii}} \\
\qquad \textit{for } j = i+1,\ldots,n \\
\qquad\qquad \tilde{e}_{ij} = \tilde{e}_{ij}/\tilde{e}_{ii} \\
\qquad \textit{endfor} \\
\textit{endfor}
\end{array}
$$

รูปที่ ข.2.1 ขั้นตอนวิธีการแยกส่วนเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบโชเลสกีไม่สมบูรณ์

จากขั้นตอนวิธีการแยกส่วนเมตริกซ์สัมประสิทธิ์แบบไม่สมบูรณ์จากรูปที่ ข.2.1 เริ่มจากการกำหนดสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมของเมตริกซ์ $\tilde{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}$ ให้เท่ากับสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ จากนั้นคำนวณสมาชิกในแต่ละแถวของ $\tilde{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}$ พร้อมกับพิจารณาเงื่อนไขการคัดออก การคัดออกจะทำเฉพาะในตำแหน่งที่ไม่ตรงกับตำแหน่งของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เท่านั้น จากการตรวจสอบเงื่อนไขถ้าพบว่า $\left|\tilde{e}_{ij}\right| < \delta^{2}\tilde{e}_{ii}\tilde{e}_{jj}$ สมาชิกในตำแหน่งที่พิจารณาจะถูกคัดออกจากเมตริกซ์ $\tilde{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}$ และต้องทำการปรับปรุงสมาชิกในแนวทแยงของเมตริกซ์ $\tilde{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}$ เพื่อรักษาคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอนในระหว่างการคำนวณเมตริกซ์ $\tilde{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}$ การปรับปรุงสมาชิกในแนวทแยงของเมตริกซ์ สามารถทำได้โดยการเพิ่มค่าของสมาชิกในแนวทแยงด้วยอัตราส่วนที่กำหนด ในกรณีที่ $\delta = 0$ พบว่า $\left|\tilde{e}_{ij}\right| \geq 0$ เสมอ จึงไม่มีการคัดออกของสมาชิกในแต่ละตำแหน่งจากเมตริกซ์ $\mathbf{E}^{\mathrm{T}}$ ซึ่งก็คือการแยกส่วนโชเลสกีแบบสมบูรณ์นั่นเอง ในทางตรงกันข้ามกรณีที่ $\delta = 1$ พบว่าสำหรับเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ ที่มีคุณสมบัติเป็นบวกแน่นอน ส่งผลให้ $\left|\tilde{e}_{ij}\right| > \tilde{e}_{ii}\tilde{e}_{jj}$ เสมอ (Ajiz และ Jennings 1984) จึงทำให้เกิดการคัดออกของสมาชิกในทุกตำแหน่งที่ไม่ตรงกับตำแหน่งของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ ซึ่งการแยกส่วนแบบโชเลสกีไม่สมบูรณ์ในกรณีที่ $\delta = 1$ เรียกว่า การแยกส่วนแบบโชเลสกีไม่เติมเต็มสมบูรณ์

ตัวอย่างลักษณะการเก็บข้อมูลในรูปแบบแถวลำดับในหนึ่งมิติของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ แสดงได้ดังนี้

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & & a_2 & & & & & \\ & a_3 & & & & a_4 & & \\ & & a_5 & & a_6 & a_7 & & \\ & & & a_8 & a_9 & a_{10} & & a_{11} \\ & & & & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \\ & & & & & a_{15} & & \\ & & & & & & a_{16} & \\ & & & & & & & a_{17} \end{bmatrix}$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน $\tilde{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}$ ที่ได้จากการแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์มีลักษณะการเก็บข้อมูลดังนี้

$$\tilde{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \tilde{e}_1 & * & \tilde{e}_2 & & & & & \\ & \tilde{e}_3 & * & * & * & \tilde{e}_4 & & \\ & & \tilde{e}_5 & * & \tilde{e}_6 & \tilde{e}_7 & & \\ & & & \tilde{e}_8 & \tilde{e}_9 & \tilde{e}_{10} & * & \tilde{e}_{11} \\ & & & & \tilde{e}_{12} & \tilde{e}_{13} & \tilde{e}_{14} & \tilde{e}_{15} \\ & & & & & \tilde{e}_{16} & \tilde{e}_{17} & \tilde{e}_{18} \\ & & & & & & \tilde{e}_{19} & \tilde{e}_{20} \\ & & & & & & & \tilde{e}_{21} \end{bmatrix}$$

เครื่องหมาย $*$ ในเมตริกซ์ $\tilde{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}$ คือตำแหน่งที่ไม่ตรงกับตำแหน่งในเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ ซึ่งจากการตรวจสอบเงื่อนไขการคัดออกพบว่า $\left|\tilde{e}_{ij}\right| < \delta^2 \tilde{e}_{ii} \tilde{e}_{jj}$ ทำให้สมาชิกในตำแหน่งดังกล่าวได้ถูกคัดออกไป ดังนั้นเพื่อให้เมตริกซ์ $\tilde{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}$ ยังคงมีคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอนในขั้นตอนการแยกส่วนโชเลสกีไม่สมบูรณ์ ค่าของสมาชิกในตำแหน่งที่ถูกคัดออกจะถูกใช้เป็นค่าปรับปรุงสมาชิกในแนวทแยงของเมตริกซ์ $\tilde{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}$ ลักษณะการปรับปรุงแสดงได้จากวงกลมเส้นประ ซึ่งแสดงถึงการปรับปรุงค่าของสมาชิกในแนวทแยงของเมตริกซ์ $\tilde{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}$ จากตำแหน่งของสมาชิกที่ถูกคัดออกในแถวที่ 2 สมาชิกในแนวทแยงจะได้รับการปรับปรุงค่าทุกครั้งเมื่อสมาชิกในตำแหน่ง $*$ อยู่ในเงื่อนไขของการคัดออก สำหรับวงกลมทึบที่แสดงในเมตริกซ์ $\hat{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}$ คือสมาชิกที่เพิ่มขึ้นมาจากการคำนวณแยกส่วนไม่สมบูรณ์ ซึ่งไม่ได้ถูกคัดออกในขั้นตอนการคำนวณแยกส่วนไม่สมบูรณ์

ภาคผนวก ค

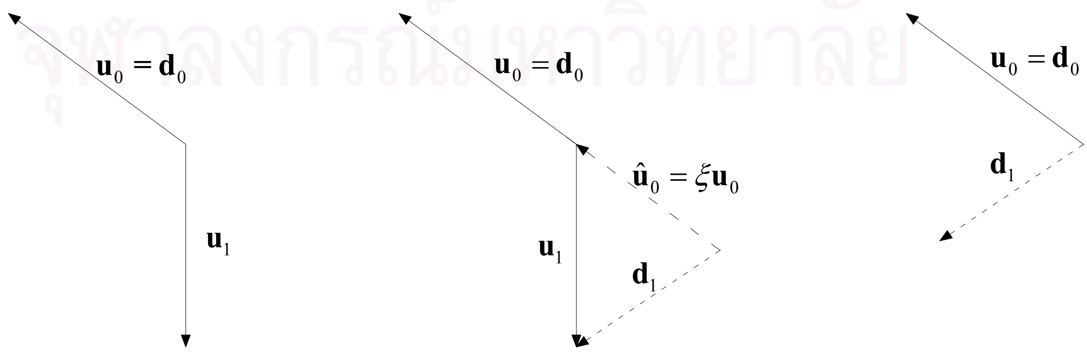
การสร้างเวกเตอร์ทิศทางที่มีคุณสมบัติเชิงสังยุคด้วยวิธีแกรมชมิตสังยุค

เวกเตอร์ทิศทางที่ถูกสร้างขึ้นมาโดยวิธีเกรเดียนต์สังยุค จะต้องมีคุณสมบัติเชิงสังยุคซึ่งกันและกัน วิธีที่ใช้ในการสร้างเวกเตอร์ทิศทางที่มีคุณสมบัติเชิงสังยุคกับเวกเตอร์ทิศทางที่ถูกสร้างขึ้นมาก่อนหน้าคือวิธีของ แกรมชมิตคอนจูเกชัน (Gram-Schmidt conjugation) ซึ่งกล่าวว่า ในการสร้างเวกเตอร์ทิศทางที่มีคุณสมบัติเชิง สังยุคกับเวกเตอร์ทิศทางก่อนหน้า สามารถทำได้จากการใช้เวกเตอร์ใดๆที่มีความเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน (linearly independent vector) ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{u}_i + \sum_{k=0}^{i-1} \xi_{ik} \mathbf{p}_k \quad ; \quad i > k \qquad \text{(ค.1)}$$

โดยที่
$\mathbf{p}_i$ = เวกเตอร์ทิศทางที่ต้องการสร้างให้มีคุณสมบัติเชิงสังยุคกับเวกเตอร์ทิศทางทุกตัวก่อนหน้า
$\mathbf{u}_i$ = เวกเตอร์ใดๆที่มีความเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน
$\mathbf{d}_k$ = เวกเตอร์ทิศทางที่ถูกสร้างขึ้นในครั้งก่อนหน้า
ξ_{ik} = สัมประสิทธิ์ปรับขนาด ที่ทำหน้าที่ปรับขนาดให้เวกเตอร์ทิศทางที่ต้องการสร้างมีคุณสมบัติเชิงสังยุคกับเวกเตอร์ทิศทางก่อนหน้าทุกตัว

รูปที่ ค.1 แสดงวิธีการสร้างเวกเตอร์ทิศทางที่มีคุณสมบัติเชิงสังยุค ด้วยวิธีแกรมชะมิตคอนจูเกชัน ซึ่งเริ่มจากเวกเตอร์ $\mathbf{u}_0$ ที่มีความเป็นอิสระเชิงเส้นกับเวกเตอร์ $\mathbf{u}_1$ สามารถสร้างเวกเตอร์ทิศทาง $\mathbf{p}_1$ ที่มีคุณสมบัติเชิงสังยุคกับเวกเตอร์ $\mathbf{u}_0$ ได้จากผลรวมแบบเวกเตอร์ระหว่างเวกเตอร์ $\mathbf{u}_1$ กับเวกเตอร์ $\hat{\mathbf{u}}_0 = \xi \mathbf{u}_0$ โดยที่เวกเตอร์ $\hat{\mathbf{u}}_0$ เป็นเวกเตอร์ที่อยู่ในทิศเดียวกับเวกเตอร์ $\mathbf{u}_0$ แต่ถูกปรับขนาดด้วยค่าคงที่ ξ ซึ่งทำให้ผลรวมระหว่างเวกเตอร์ $\mathbf{u}_1$ กับเวกเตอร์ $\hat{\mathbf{u}}_0$ ได้เป็นเวกเตอร์ $\mathbf{p}_1$ ซึ่งมีคุณสมบัติเชิงสังยุคกับเวกเตอร์ $\mathbf{u}_0$



รูปที่ ค.1 การสร้างเวกเตอร์ทิศทางที่มีคุณสมบัติเชิงสังยุคด้วยวิธี แกรมชมิตสังยุค

เมื่อนำ $\mathbf{Ap}_j$ มาคูณข้างหลังสมการที่ (ค.1)

$$\mathbf{p}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{Ap}_j = \mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{Ap}_j + \sum_{k=0}^{i-1}\xi_{ik}\mathbf{p}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{Ap}_j$$

จากคุณสมบัติเชิงสังยุคของเวกเตอร์ทิศทางพบว่า

$$0 = \mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{Ap}_j + \xi_{ij}\mathbf{p}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{Ap}_j$$

$$\xi_{ij} = \frac{-\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{Ap}_j}{\mathbf{p}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{Ap}_j} \quad ; \quad i > j \tag{ค.2}$$

สมการที่ (ค.2) ใช้สำหรับการหาค่าสัมประสิทธิ์ ξ_{ij} ที่จำเป็นต้องใช้ในการหาเวกเตอร์ที่มีคุณสมบัติเชิงสังยุคตามสมการที่ (ค.1) ซึ่งเราพบว่าในการสร้างเวกเตอร์ทิศทางที่มีคุณสมบัติเชิงสังยุคกับเวกเตอร์ทิศทางทุกตัวก่อนหน้า จำเป็นจะต้องมีการเก็บข้อมูลของเวกเตอร์ตัวก่อนหน้าทุกตัวไว้ด้วย

จากการใช้เวกเตอร์คงค้าง $\mathbf{r}$ แทนเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ ทำให้สัมประสิทธิ์ ξ_{ij} จากสมการที่ (ค.2) ถูกเปลี่ยนไปเป็นสมการที่ (ค.3)

$$\xi_{ij} = \frac{-\mathbf{r}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{Ap}_j}{\mathbf{p}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{Ap}_j} \quad ; \quad i > j \tag{ค.3}$$

จากความสัมพันธ์ของเวกเตอร์คงค้างในรอบการคำนวณถัดไป กับค่าปรับขนาดและเวกเตอร์ทิศทาง

$$\mathbf{r}_{j+1} = \mathbf{r}_j - \alpha_j\mathbf{Ap}_j \tag{ค.4}$$

โดยที่ค่าปรับขนาด คำนวณได้จาก

$$\alpha_i = \frac{\mathbf{r}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_i}{\mathbf{p}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{Ap}_i} \tag{ค.5}$$

นำ $\mathbf{r}_i^{\mathrm{T}}$ คูณข้างหน้าทั้งสมการที่ (ค.4)

$$\mathbf{r}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_{j+1} = \mathbf{r}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_j - \alpha_j\mathbf{r}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ap}_j$$

$$\mathbf{r}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ap}_j = \frac{1}{\alpha_j}\left[\mathbf{r}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_{j+1}\right]$$

$$\mathbf{r}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{p}_{j} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha_i}\mathbf{r}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_i & ; \quad i = j \\ \dfrac{-1}{\alpha_{i-1}}\mathbf{r}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_i & ; \quad i = j+1 \\ 0 & ; \quad i < j \wedge i > j+1 \end{cases} \qquad (\text{ค}.6)$$

จากความสัมพันธ์ตามสมการที่ (ค.6) เมื่อนำ $\mathbf{r}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{p}_j$ แทนค่าลงในสมการที่ (ค.3)

$$\xi_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha_j}\dfrac{\mathbf{r}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_i}{\mathbf{p}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{p}_j} & ; \quad i = j+1 \\ 0 & ; \quad i > j+1 \end{cases} \qquad (\text{ค}.7)$$

แทนค่า α_j จากสมการที่ (ค.5) ลงในสมการที่ (ค.7) และกำหนดให้ $j = i-1$

$$\xi_i = \frac{\mathbf{r}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_i}{\mathbf{p}_{i-1}^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_{i-1}} \qquad (\text{ค}.8)$$

เมื่อใช้เวกเตอร์คงค้าง $\mathbf{r}$ แทนเวกเตอร์ทิศทาง $\mathbf{p}$ ในสมการที่ (ค.8)

$$\xi_i = \frac{\mathbf{r}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_i}{\mathbf{r}_{i-1}^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_{i-1}} \qquad (\text{ค}.9)$$

เนื่องจากวิธีเกรเดียนต์สังยุคใช้เวกเตอร์คงค้างในการสร้างเวกเตอร์ทิศทางที่มีคุณสมบัติเชิงสังยุคซึ่งกันและกัน ดังนั้นสมการที่ (ค.1) ซึ่งเป็นสมการของวิธีแกรมชะมิตสังยุค สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{r}_i + \xi_i\mathbf{p}_{i-1} \qquad (\text{ค}.10)$$

จากสมการที่ (ค.10) พบว่าจากการใช้เวกเตอร์คงค้าง $\mathbf{r}$ แทนเวกเตอร์ $\mathbf{u}$ ใดๆในการสร้างเวกเตอร์ทิศทางที่มีคุณสมบัติเชิงสังยุค ส่งผลให้ใช้ข้อมูลของเวกเตอร์ทิศทางครั้งก่อนหน้าเพียง 1 ครั้ง ในการสร้างเวกเตอร์ทิศทางที่มีคุณสมบัติเชิงสังยุคซึ่งกันและกัน

ภาคผนวก ง
คุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอนของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์

กำหนดให้เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ ของระบบสมการเชิงเส้นที่มีคุณสมบัติสมมาตร และมีขนาดเท่ากับ $n \times n$

$$\mathbf{A} \quad = \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของระบบสมการเชิงเส้นจะมีคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอนก็ต่อเมื่อ มีเวกเตอร์ $\mathbf{x}$ โดยที่ $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ที่ทำให้ $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$

พิจารณาดีเทอร์มิแนนต์ไมเนอร์มุขสำคัญ (principal minor of determinant) ของเมตริกซ์ $\mathbf{A}$ โดยที่

$$|\mathbf{A}_1| \quad = \quad |a_{11}|$$

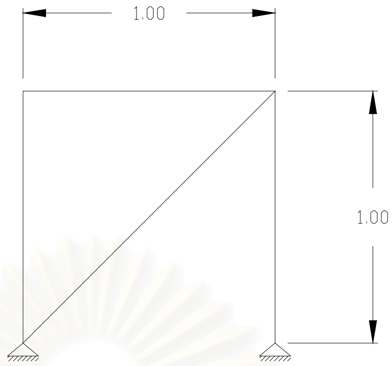
$$|\mathbf{A}_2| \quad = \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{A}_n| \quad = \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

เมื่อ $|\mathbf{A}_1|$, $|\mathbf{A}_2|$, ... , $|\mathbf{A}_n|$ คือดีเทอร์มิแนนต์ไมเนอร์มุขสำคัญของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$

ในกรณีที่เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $\mathbf{A}$ ซึ่งมีคุณสมบัติสมมาตรจะมีคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอนก็ต่อเมื่อดีเทอร์มิแนนต์ไมเนอร์มุขสำคัญของ $\mathbf{A}$ ทั้งหมดมีค่ามากกว่าศูนย์

พิจารณาแบบจำลองโครงข้อหมุน 2 มิติ ที่มีค่าสติฟเนสพารามิเตอร์ (EA) ในทุกชิ้นส่วนเท่ากับ 40,000,000 กิโลกรัม ดังแสดงในรูปที่ ง.1



รูปที่ ง.1 แบบจำลองโครงข้อหมุน 2 มิติ

เมื่อกำหนดให้ $\mathbf{K}$ คือสติฟเนสเมตริกซ์ของแบบจำลองในรูปที่ ง.1

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 400,000 & 0 & -400,000 & 0 \\ 0 & 400,000 & 0 & 0 \\ -400,000 & 0 & 541,400 & 141,400 \\ 0 & 0 & 141,400 & 541,400 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{K}_1| = |400,000| = 400,000$$

$$|\mathbf{K}_2| = \begin{vmatrix} 400,000 & 0 \\ 0 & 400,000 \end{vmatrix} = 1.6\times10^{11}$$

$$|\mathbf{K}_3| = \begin{vmatrix} 400,000 & 0 & -400,000 \\ 0 & 400,000 & 0 \\ -400,000 & 0 & 541,400 \end{vmatrix} = 2.2624\times10^{16}$$

$$|\mathbf{K}_4| = \begin{vmatrix} 400,000 & 0 & -400,000 & 0 \\ 0 & 400,000 & 0 & 0 \\ -400,000 & 0 & 541,400 & 141,400 \\ 0 & 0 & 141,400 & 541,400 \end{vmatrix} = 9.0496\times10^{21}$$

สติฟเนสเมตริกซ์ $\mathbf{K}$ มีดีเทอร์มิแนนต์ไมเนอร์มุขสำคัญที่มีค่าเป็นบวกทั้งหมด ดังนั้นสติฟเนสเมตริกซ์ $\mathbf{K}$ มีคุณสมบัติที่เป็นบวกแน่นอน

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายณัฐพล จารุศิริสมบัติ เกิดเมื่อวันที่ 11 มิถุนายน พ.ศ. 2522 มีภูมิลำเนาอยู่ที่ กรุงเทพมหานคร จบชั้นประถมศึกษาจากโรงเรียนวัดจันทร์ประดิษฐาราม ชั้นมัธยมที่โรงเรียนทวีธาภิเษก สำเร็จการศึกษาวิศวกรรมศาสตร์บัณฑิตจากภาควิชาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ในปีการศึกษา 2544 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตร์มหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมโยธา สาขาวิศวกรรมโครงสร้าง คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยเมื่อปีการศึกษา 2545