บทที่ 2

ทฤษฎีที่สำคัญและผลงานที่เกี่ยวข้อง

ในกรณีที่มีสมมติฐานเกี่ยวกับสัมประสิทธิ์การถดถอยโดยสมมติฐานนั้นอาจจะอยู่ในรูปที่สัมประสิทธิ์การถดถอยบางส่วนมีค่าเท่ากับค่าคงที่หรือมีความสัมพันธ์ร่วมกันเชิงเส้นตรง ซึ่งสามารถเขียนสมมติฐานเหล่านี้ได้ในรูป $H\beta = h$ เมื่อ H เป็นแมทริกซ์ของค่าคงที่ขนาด $m\times k$ β เป็น $k\times 1$ เวคเตอร์ของสัมประสิทธิ์การถดถอย และ h เป็น $m\times 1$ เวคเตอร์ของค่าคงที่เช่นกัน โดย H และ h จะถูกกำหนดค่าตามความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์การถดถอยที่ต้องการทดสอบสมมติฐาน วิธีการโดยทั่วไปในการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การถดถอยนั้นจะต้องรวบรวมข้อมูลมาจำนวนหนึ่งเพื่อนำไปใช้ในการทดสอบสมมติฐานที่สนใจซึ่งผลจากการทดสอบสมมติฐานนั้นจะทำให้สามารถตัดสินใจได้ว่าจะเลือกใช้ตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุดแบบไม่มีข้อจำกัด (b) หรือตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุดแบบมีข้อจำกัด ($\hat{\beta}$) เป็นตัวประมาณที่แท้จริงของสัมประสิทธิ์การถดถอย β ในสมการการถดถอย $Y = X\beta+\varepsilon$

ตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐานในที่นี้คือ U

โดย $$U = \frac{SSE(\hat{\beta}) - SSE(b)}{K\ SSE\ (b)}$$

เมื่อ $SSE(\hat{\beta})$, $SSE(b)$ เป็นผลบวกของกำลังสองของความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจากการใช้ $\hat{\beta}$ หรือ b เป็นค่าประมาณของ β ตามลำดับ และ K เป็นค่าคงที่

ดังนั้นถ้าให้ β^* เป็นตัวประมาณของ β สามารถกำหนดค่าของ β^* ได้ดังนี้คือ

$$\beta^* = \begin{cases} b & \text{ในกรณีที่ปฏิเสธสมมติฐาน } H\beta = h \text{ หรือ } U \geq \lambda \\ \hat{\beta} & \text{ในกรณีที่ยอมรับสมมติฐาน } H\beta = h \text{ หรือ } U < \lambda \end{cases}$$

เมื่อ λ เป็นค่าวิกฤตของการทดสอบสมมติฐานซึ่งเป็นค่าคงที่ที่ได้จากตารางการแจกแจงแบบ F

กำหนดให้ Y^* เป็นค่าประมาณของตัวแปรตาม Y ในสมการการถดถอย $Y=X\beta+\varepsilon$

ดังนั้นจะได้ว่า $Y^* = X\beta^*$

โดยสามารถกำหนดค่าของ Y^* ได้ในทำนองเดียวกัน กล่าวคือ

$$Y^* = \begin{cases} Xb & \text{ในกรณีที่ปฏิเสธสมมติฐาน } H\beta=h \\ X\hat{\beta} & \text{ในกรณีที่ยอมรับสมมติฐาน } H\beta=h \end{cases}$$

เนื่องจาก β^* มีคุณสมบัติเป็นตัวประมาณที่มีความเอนเอียงของ β ดังนั้น Y^* จึงมีคุณสมบัติเป็นตัวประมาณที่มีความเอนเอียงของ Y เช่นเดียวกัน ในบทนี้จะกล่าวถึงฟังก์ชันของความเอนเอียงและค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของ Y^* ที่เกิดขึ้น รวมทั้งผลงานวิจัยที่ได้มีผู้ศึกษาค้นคว้าแล้วสำหรับเรื่องที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้

2.1 การวิเคราะห์ตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นตรง

ถ้าให้ X เป็นตัวแปรอิสระที่มีอิทธิพลต่อตัวแปรตาม Y โดยความสัมพันธ์ร่วมกันของ X และ Y นั้นเป็นแบบเส้นตรง จะสามารถเขียนตัวแบบทั่วไปของการถดถอยเชิงเส้นตรงได้เป็น

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

เมื่อ Y เป็น $n\times1$ เวคเตอร์ของค่าตัวแปรตาม

X เป็นแมทริกซ์ของค่าตัวแปรอิสระที่มีขนาดเป็น $n\times k$ โดยกำหนดให้ n มีค่ามากกว่า k

β เป็น $k\times1$ เวคเตอร์ของพารามิเตอร์สัมประสิทธิ์การถดถอย

และ ε เป็น $n\times1$ เวคเตอร์ของความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นโดย ε ถูกกำหนดให้มีการกระจายเป็นแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ยเป็นเวคเตอร์ศูนย์และแมทริกซ์ของค่าแปรปรวนร่วมเป็น $\sigma^2 I$ นั่นคือ $\varepsilon_i \sim NID(0,\sigma^2)$ ทุก ๆ ค่าของ i เมื่อ $i=1,2,..,n$

เนื่องจาก $n > k$ ดังนั้นตัวแบบการถดถอยข้างต้นจึงเป็นตัวแบบที่เรียกว่าเป็น Model of full rank 7

จากตัวแบบการถดถอยข้างต้นคำนวณตัวประมาณของสัมประสิทธิ์การถดถอยโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดจะได้ค่าดังนี้คือ

$$b = S^{-1} X'Y \quad \text{เมื่อ} \quad S = X'X$$

โดยตัวประมาณ b ที่ได้จะมีการแจกแจงเป็นแบบปกติซึ่งมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ β และมีแมทริกซ์ของค่าแปรปรวนร่วมเป็น $S^{-1}\sigma^2$

นั่นคือ $b \sim N(\beta, S^{-1}\sigma^2)$ (2.1.1)

ในกรณีที่มีสมมติฐานเกี่ยวกับค่าหรือความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์การถดถอยซึ่งอาจเขียนได้ในรูป $H\beta=h$ เมื่อ H เป็นแมทริกซ์ของค่าคงที่ที่มีขนาดเป็น $m\times k$ และค่า rank เป็น m h เป็น $m\times 1$ เวคเตอร์ของค่าคงที่เช่นกัน กรณีนี้จะมีตัวประมาณอีกชุดหนึ่งของ β เกิดขึ้นกล่าวคือเป็นตัวประมาณที่ได้จากการใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดประมาณค่าตามตัวแบบการถดถอยที่มีข้อจำกัดจากการใช้วิธีตัวคูณขยายลากรานจ์ (method of Lagrange multipliers) เพื่อคำนวณหาตัวประมาณของ $\beta(\hat{\beta})$ สำหรับกรณีดังกล่าวจะได้ผลดังนี้

โดยการ minimized Z with respect to β และ μ

เมื่อ เมื่อ $Z = (Y-X\beta)'(Y-X\beta) - 2\mu'(H\beta-h)$

และ μ เป็น $m\times 1$ เวคเตอร์ของตัวคูณขยายลากรานจ์

จะได้ค่า $\hat{\beta} = b - S^{-1}H'[HS^{-1}H']^{-1}[Hb-h]$ 1/ (2.1.2)

โดย $\hat{\beta}$ จะเป็นตัวประมาณที่มีการแจกแจงเป็นแบบปกติเช่นเดียวกับ b ซึ่งสามารถคำนวณหาค่าเฉลี่ยและค่าแปรปรวนของ $\hat{\beta}$ ได้ดังนี้

1/ Goldberger, A.S., <u>Econometric Theory</u> (New York: John Wiley and Sons, Inc., 1964) หน้า 256.

เนื่องจาก H, S และเวคเตอร์ h มีค่าเป็นค่าคงที่

ดังนั้นจะได้ $E(\hat{\beta}) = E\{ b-S^{-1}H'[HS^{-1}H']^{-1}[Hb-h]\}$

$$= \beta-S^{-1}H'[HS^{-1}H']^{-1}[H\beta-h] \qquad (2.1.3)$$

และ $Var(\hat{\beta})$

$$= E[\hat{\beta}-E(\hat{\beta})][\hat{\beta}-E(\hat{\beta})]'$$

$$= E\{[(b-\beta)-S^{-1}H'[HS^{-1}H']^{-1}(Hb-H\beta)][(b-\beta)-S^{-1}H'[HS^{-1}H']^{-1}(Hb-H\beta)]'\}$$

$$= E[(b-\beta)(b-\beta)'] - E[(b-\beta)(b-\beta)'H'[HS^{-1}H']^{-1}HS^{-1}]$$
$$-E[S^{-1}H'[HS^{-1}H']^{-1}H(b-\beta)(b-\beta)']$$
$$+E[S^{-1}H'[HS^{-1}H']^{-1}H(b-\beta)(b-\beta)'H'[HS^{-1}H']^{-1}HS^{-1}]$$

จาก (2.1.1) $Var(b) = S^{-1}\sigma^2$ แทนค่าจะได้

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2\{S^{-1}-S^{-1}H'[HS^{-1}H']^{-1}HS^{-1}-S^{-1}H'[HS^{-1}H']^{-1}HS^{-1}+S^{-1}H'[HS^{-1}H']^{-1}HS^{-1}\}$$

$$= \sigma^2\{S^{-1}-S^{-1}H'[HS^{-1}H']^{-1}HS^{-1}\}$$

นั่นคือ $\hat{\beta}\sim N(\beta-S^{-1}H'[HS^{-1}H']^{-1}(H\beta-h),\ Var(\hat{\beta}))$ (2.1.4)

โดย $Var(\hat{\beta})$ จะมีค่าดังแสดงข้างต้น

เมื่อเปรียบเทียบค่าแปรปรวนของตัวประมาณของ β ทั้ง 2 จะเห็นว่า $Var(\hat{\beta}) \leq Var(b)$ เนื่องจากแมทริกซ์ $S^{-1}H'[HS^{-1}H']^{-1}HS^{-1}$ มีคุณสมบัติเป็น non-negative definite นั่นเอง

ดังนั้นในกรณีที่สมมติฐาน $H\beta=h$ เป็นจริง ตัวประมาณ $\hat{\beta}$ ควรจะถูกเลือกเป็นตัวประมาณของ β มากกว่า b ทั้งนี้เนื่องจากในกรณีนี้ $\hat{\beta}$ และ b ต่างก็เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ β ทั้งคู่ แต่ค่าแปรปรวนของ $\hat{\beta}$ จะมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับค่าแปรปรวนของb

2.2 การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับ β ก่อนการประมาณค่า

การประมาณค่าสัมประสิทธิการถดถอยในกรณีที่มีสมมติฐานเกี่ยวกับ β เกิดขึ้นนั้นจะต้องทำการทดสอบสมมติฐานเสียก่อนจึงจะสามารถนำผลที่ได้จากการทดสอบมาประมาณ β ได้อย่างเหมาะสม

กำหนดให้ $H_0 : H\beta = h$ เป็นสมมติฐานที่ต้องการทดสอบ

UMP test ของการทดสอบสมมติฐานนี้จะขึ้นอยู่กับตัวสถิติ U

โดย U มีค่า $= \dfrac{SSE(\hat{\beta}) - SSE(b)}{m} \div \dfrac{SSE(b)}{n-k}$ 2/ (2.2.1)

จากการแทนค่า $\hat{\beta}$ ตาม (2.1.2) ลงใน (2.2.1) จะได้

$$\begin{aligned} SSE(\hat{\beta}) &= [Y-X\hat{\beta}]' \, [Y-X\hat{\beta}] \\ &= [Y-X(b-S^{-1}H'(HS^{-1}H')^{-1}(Hb-h))]' \, [Y-X(b-S^{-1}H' \\ &\quad (HS^{-1}H')^{-1}(Hb-h))] \\ &= [Y'Y-b'X'Y+(Hb-h)'(HS^{-1}H')^{-1}(Hb-h)] \end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้

$$U = \frac{Q}{m\hat{\sigma}^2} \qquad (2.2.2)$$

เมื่อ $Q = (Hb-h)' \, [HS^{-1}H']^{-1}(Hb-h)$ (2.2.3)

และ $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{SSE(b)}{n-k}$ ซึ่งเป็นค่าประมาณของ σ^2

พิจารณาการแจกแจงของ U

จาก (2.1.1) $b \sim N(\beta, S^{-1}\sigma^2)$

ดังนั้น $(Hb-h) \sim N(H\beta-h, HS^{-1}H'\sigma^2)$ (2.2.4)

2/ Rao, C.R., Linear Statistical Inference and Its Applications (New York: John Wiley and Sons, Inc., 1965) หน้า 191

เนื่องจาก H เป็นแมทริกซ์ที่มีขนาด m×k และมี rank เท่ากับ m

และ S เป็นแมทริกซ์ที่มีขนาด k×k และมี rank เท่ากับ k

ดังนั้น $HS^{-1}H'$ จะเป็นแมทริกซ์ที่มีขนาด m×m และมี rank เป็น m

จากคุณสมบัติข้างต้นและจาก (2.2.4) จะได้ว่า (graybill 1961, หน้า 84)

$$\frac{Q}{\sigma^2} = \frac{(Hb-h)' \left[HS^{-1}H'\right]^{-1} (Hb-h)}{\sigma^2} \qquad (2.2.5)$$

มีการแจกแจงเป็นแบบ non-central χ^2 ด้วยพารามิเตอร์เป็น m และ Θ เมื่อ Θ เป็น non-centrality parameter ที่มีค่าดังนี้

$$\Theta = \frac{(H\beta-h)' \left[HS^{-1}H'\right]^{-1} (H\beta-h)}{2\sigma^2} \qquad (2.2.6)$$

นั่นคือ $\frac{Q}{\sigma^2} \sim \chi'^2(m;\ \Theta)$ (2.2.7)

ภายใต้สมมติฐานเป็นจริง $\frac{Q}{\sigma^2}$ จะลดรูปการแจกแจงเป็นแบบ central χ^2 ที่มีองศาแห่งความเป็นอิสระ m นั่นคือ $\chi^2(m)$

เนื่องจาก $V = \frac{(n-k)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k)$ (2.2.8)

ในการพิจารณาการแจกแจงของ U นั้นจำเป็นจะต้องพิสูจน์ว่า V และ Q เป็นอิสระต่อกัน โดยก่อนจะทำการพิสูจน์ความเป็นอิสระต่อกันดังกล่าวจะแสดงว่า V และ Q สามารถเขียนในรูป Quadratic form ได้ดังนี้

จาก (2.2.8) แทนค่า $\hat{\sigma}^2 = \frac{[Y-Xb]'[Y-Xb]}{(n-k)}$ จะได้

$$V = \frac{1}{\sigma^2}[Y-Xb]'[Y-Xb]$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} Y'\left[I-XS^{-1}X'\right] Y$$

แทนค่า $Y = X\beta+\varepsilon$ จะได้

$$V = \frac{1}{\sigma^2} \varepsilon' \left[I-XS^{-1}X'\right] \varepsilon \qquad (2.2.10)$$

จาก $b = S^{-1}X'Y$

แทนค่า Y จะได้ $b= S^{-1}X'(X\beta+\varepsilon) = \beta+S^{-1}X'\varepsilon$

จาก (2.2.3) $Q = (Hb-h)'\left[HS^{-1}H'\right]^{-1} (Hb-h)$ แทนค่า b จะได้ค่า Q ดังนี้

$$Q = (\beta'H'+\varepsilon' XS^{-1}H'-h') \left[HS^{-1}H'\right]^{-1}(H\beta+HS^{-1}X\varepsilon -h)$$

$$= \varepsilon'\{XS^{-1}H'\left[HS^{-1}H'\right]^{-1} HS^{-1}X\}\varepsilon$$

$$+ (H\beta-h)' \left[HS^{-1}H'\right]^{-1} (H\beta-h)$$

พิจารณาภายใต้สมมติฐาน $H\beta=h$ เป็นจริง จะเห็นว่าค่า Q จะอยู่ในรูป Central quadratic form ดังนี้คือ

$$Q = \varepsilon'\{ XS^{-1}H'\left[HS^{-1}H'\right]^{-1} HS^{-1}X'\}\varepsilon \qquad (2.2.11)$$

ในการพิจารณาคุณสมบัติความเป็นอิสระต่อกันของ Quadratic form (Johnson and Kotz 1970, หน้า 176) แสดงให้เห็นว่าสามารถนำแต่เฉพาะ Central forms มาพิจารณาได้ โดยเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่จะทำให้ V และ Q เป็นอิสระต่อกันนี้ก็คือผลคูณของ $\left[I-XS^{-1}X'\right]$ ใน (2.2.10) และ $XS^{-1}H'\left[HS^{-1}H'\right]^{-1} HS^{-1}X'$ ต้องเป็น 0

จะเห็นว่า $\left[I-XS^{-1}X'\right]\left[XS^{-1}H'\left[HS^{-1}H'\right]^{-1} HS^{-1}X'\right]$

$$= XS^{-1}H'\left[HS^{-1}H'\right]^{-1} HS^{-1}X'-XS^{-1}X'XS^{-1}H'\left[HS^{-1}H'\right]^{-1} HS^{-1}X'$$

$$= XS^{-1}H'\left[HS^{-1}H'\right]^{-1} HS^{-1}X'-XS^{-1}H'\left[HS^{-1}H'\right]^{-1}HS^{-1}X'$$

$$= 0$$

นั่นคือ V และ Q จะเป็นอิสระต่อกัน

จาก (2.2.5) และ (2.2.8) ได้ว่า $\frac{Q}{\sigma^2} \sim \chi'^2(m;\Theta)$ และ $V=\frac{(n-k)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k)$ โดยที่ V และ Q เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$u = \frac{Q/\sigma^2}{(n-k)\hat{\sigma}^2/\sigma^2} \div \frac{m}{(n-k)} = \frac{Q}{m\hat{\sigma}^2} \qquad (2.2.13)$$

จะมีการแจกแจงเป็นแบบnon-central F ที่มีพารามิเตอร์เป็น m, n-k และ non-centrality parameter Θ โดยภายใต้สมมติฐาน $H\beta=h$ เป็นจริง ตัวสถิติ u จะมีการแจกแจงเป็นแบบ Central F โดยมีองศาแห่งความเป็นอิสระ m และ n-k

2.3 ตัวประมาณค่าของ Y

จากตัวแบบการถดถอย $Y=X\beta+\varepsilon$ ในกรณีที่มีการทดสอบสมมติฐาน $H_0:H\beta=h$ ตัวประมาณค่าของ Y คือ

$$Y^* = X\beta^* = \begin{cases} Xb & \text{ในกรณีที่ } u \geq \lambda \\ X\hat{\beta} & \text{ในกรณีที่ } u < \lambda \end{cases}$$

เมื่อ λ เป็นค่าวิกฤตของการทดสอบสมมติฐานที่ได้จากตารางการแจกแจงแบบ F โดยมีองศาแห่งความเป็นอิสระ m และ n-k ที่ระดับนัยสำคัญ α ที่ต้องการ

หรือสามารถเขียนได้เป็น

$$Y^* = X\beta^* = X\hat{\beta}\, I_{[0,\lambda)}(u) + Xb\, I_{[\lambda,\infty)}(u)$$

เมื่อ $I_{(a,b)}(u)$ เป็น characteristic Function ซึ่งมีค่าเป็น

$$\begin{cases} 1 & \text{ถ้า } u \in (a,b) \\ 0 & \text{ถ้า } u \in (a,b)^c \end{cases}$$

หรืออาจจะกล่าวได้ว่าจากการทดสอบสมมติฐาน $H_0:H\beta=h$ ตัวประมาณ $X\hat{\beta}$ จะถูกเลือกให้เป็นค่าประมาณของ Y ในกรณีที่ยอมรับสมมติฐาน และจะเลือก Xb เป็น

ค่าประมาณในกรณีที่ปฏิเสธสมมติฐานนั้นที่ระดับนัยสำคัญ α ที่กำหนดขึ้นใด ๆ

2.4 ฟังก์ชั่นความเอนเอียงของ Y^*

กำหนดให้ $P(A_1)$ เป็นค่าความน่าจะเป็นในการปฏิเสธ $H_0: H\beta = h$

เมื่อ $A_1 = \{(b,v) \frac{(Hb-h)'\left[HS^{-1}H'\right]^{-1}(Hb-h)}{m\sigma^2} \geq \lambda\}$

และ A_0 เป็น Complement ของเซท A_1

จะสามารถกำหนดฟังก์ชั่นความเอนเอียงของ Y^* ได้ดังนี้

ความเอนเอียงของ $Y^* = E(Y^*) - X\beta$

พิจารณาค่าของ $E(Y^*)$ โดย

$$E(Y^*) = E(X\beta^*/A_0)P(A_0) + E(X\beta^*/A_1)P(A_1)$$

$$= E(X\hat{\beta}/A_0)P(A_0) + E(Xb/A_1)P(A_1) \qquad (2.4.1)$$

เนื่องจาก b เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ β ดังนั้น

$$E(Xb) = E(Xb/A_0)P(A_0) + E(Xb/A_1)P(A_1) = X\beta$$

และจาก (2.1.2) ค่า $\hat{\beta} = b - S^{-1}H'\left[HS^{-1}H'\right]^{-1}\left[Hb-h\right]$

แทนค่าใน (2.4.1) จะได้ว่า

$$E(Y^*) = X\beta - E(XS^{-1}H'\left[HS^{-1}H'\right]^{-1}(Hb-h)/A_0)P(A_0)$$

นั่นคือความเอนเอียงของ $Y^* = -E(XS^{-1}H'\left[HS^{-1}H'\right]^{-1}(Hb-h)/A_0)P(A_0)$ (2.4.2)

พิจารณาค่าความน่าจะเป็นของ A_1 จะเห็นว่าจาก (2.2.13) สามารถเขียนได้เป็น

$$P(A_1) = \int_{u \geq \lambda} f_u(u; m, n-k, \theta)\, du = g(\theta, \lambda) \qquad (2.4.3)$$

เมื่อ $f_u(u;m,n-k,\theta)$ เป็น density function ของ non-central F ที่มีพารามิเตอร์เป็น $m, n-k$ และ θ

อาจพิจารณา $P(A_1)$ ในเทอมของตัวแปร b, V โดยจะสามารถหาการแจกแจงร่วมของ b และ V ได้ดังนี้

เนื่องจาก b และ V เป็นตัวแปรที่มีการแจกแจงเป็นอิสระต่อกัน (Graybill 1961, หน้า 113)

ดังนั้นจาก (2.1.1) และ (2.2.8) จะได้ joint density ของ b และ V ดังนี้

$$\begin{aligned} f(b,V) &= f_1(b)\ f_2(V) \\ &= K\ f_2(V)\ \exp\left[-\frac{(b-\beta)'\ S(b-\beta)}{2\sigma^2}\right] \end{aligned}$$

เมื่อ K เป็นค่าคงที่มีค่าเท่ากับ $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma\ |S|^{1/2}}$

ดังนั้นสามารถเขียนความน่าจะเป็นของเซท A_1 ได้เป็น

$$P(A_1) = \int_{A_1}\int K\ f_2(V)\ \exp\left[-\frac{(b-\beta)'S(b-\beta)}{2\sigma^2}\right] db\ dV \qquad (2.4.4)$$

จาก (2.4.2) จะสามารถหาความเอนเอียงของ Y^* ได้ จะต้องคำนวณหา $E(b/A_0)$ $P(A_0)$ เสียก่อนดังนี้

โดยพิจารณา $\dfrac{\partial}{\partial\beta}\left[(b-\beta)'S(b-\beta)\right] = -(S+S')(b-\beta) = -2S(b-\beta) \qquad (2.4.5)$

จาก (2.4.4) และ (2.4.5) จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial\beta} P(A_1) = \int_{A_1}\int Kf_2(V)\frac{S(b-\beta)}{\sigma^2}\ \exp\left(-\frac{(b-\beta)'S(b-\beta)}{2\sigma^2}\right) dbdV$$

$$= E\left(\frac{S(b-\beta)}{\sigma^2}/A_1\right)P(A_1) \qquad (2.4.6)$$

โดยการดิฟเฟอเรนชิเอท (2.4.3) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial\beta} P(A_1) = \frac{\partial}{\partial\beta}\ g(\theta,\lambda) = g'(\theta,\lambda)\ \frac{\partial\theta}{\partial\beta} \qquad (2.4.7)$$

จาก (2.2.6) ,$\Theta = \dfrac{(H\beta-h)' \left[HS^{-1}H'\right]^{-1} (H\beta-h)}{2\sigma^2}$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\beta} = \frac{H'\left[HS^{-1}H'\right]^{-1} (H\beta-h)}{\sigma^2}$$

แทนค่าใน (2.4.7) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial\beta} P(A_1) = \frac{H'\left[HS^{-1}H'\right]^{-1} (H\beta-h)}{\sigma^2} \quad g'(\Theta,\lambda) \qquad (2.4.8)$$

จาก (2.4.6) และ (2.4.8) จะได้

$$E\left(\frac{S(b-\beta)}{\sigma^2}/A_1\right)P(A_1) = \frac{H'\left[HS^{-1}H'\right]^{-1}(H\beta-h)}{\sigma^2} \; g'(\Theta,\lambda) \qquad (2.4.9)$$

เนื่องจาก S เป็นแมทริกซ์ที่มีคุณสมบัติเป็น full-rank จาก (2.4.9) S^{-1} คูณตลอด จะได้

$$E(b-\beta/A_1)P(A_1) = S^{-1}H'\left[HS^{-1}H'\right]^{-1} (H\beta-h)\; g'(\Theta,\lambda)$$

พิจารณา β ซึ่งเป็นเวคเตอร์ของค่าคงที่ ดังนั้น $E(\beta/A_1)P(A_1)=\beta g(\Theta,\lambda)$ แทนค่าจะได้

$$E(b/A_1)P(A_1) = S^{-1}H'\left[HS^{-1}H'\right]^{-1} (H\beta-h)g'(\Theta,\lambda)+\beta g(\Theta,\lambda)$$

ดังนั้น เนื่องจาก b เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ β จะได้ว่า

$$\begin{aligned} E(b/A_0)P(A_0) &= \beta-E(b/A_1)P(A_1) \\ &= \beta(1-g(\Theta,\lambda))-S^{-1}H'\left[HS^{-1}H'\right]^{-1} \\ &\qquad (H\beta-h)\; g'(\Theta,\lambda) \qquad (2.4.10) \end{aligned}$$

แทนค่า (2.4.10) ใน (2.4.2) จะได้

$$
\begin{aligned}
\text{ความเอนเอียงของ } Y^* &= -\left[XS^{-1}H'\left[HS^{-1}H'\right]^{-1} HE(b/A_0)P(A_0)\right. \\
&\quad \left. -XS^{-1}H'\left[HS^{-1}H'\right]^{-1} Ch\; P(A_0)\right] \\
&= -XS^{-1}H'\left[HS^{-1}H'\right]^{-1}H\beta(1-g(\Theta,\lambda)) \\
&\quad +XS^{-1}H'\left[HS^{-1}H'\right]^{-1} HS^{-1}H'\left[HS^{-1}H'\right]^{-1}(H\beta-h) \\
&\quad g'(\Theta,\lambda)+XS^{-1}H'\left[HS^{-1}H'\right]^{-1}h(1-g(\Theta,\lambda)) \\
&= XS^{-1}H'\left[HS^{-1}H'\right]^{-1}(H\beta-h) \\
&\quad \{g'(\Theta,\lambda)+g(\Theta,\lambda)-1\} \qquad (2.4.11)
\end{aligned}
$$

ในการคำนวณหาค่า $g'(\Theta,\lambda)$ แทนที่จะพิจารณา $g(\Theta,\lambda)$ ในรูปอัตราส่วน u ดังแสดงใน (2.4.3) จะพิจารณาในรูปอัตราส่วนของผลบวกของกำลังสอง 2 จำนวนที่เป็นอิสระต่อกัน (t) โดย $t = \frac{Q}{(n-k)\hat{\sigma}^2} = \frac{mu}{n-k}$ (Kempthorne 1967, หน้า 221) ได้แสดง density function ของ t ไว้ดังนี้

$$f_t(t;m,n-k,\Theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Theta^i e^{-\Theta} t^{i+\frac{m}{2}-1}}{i!B(\frac{m}{2}+i,\frac{n-k}{2})(1+t)^{i+\frac{m+n-k}{2}}}$$

เมื่อ B(p,q) เป็นฟังก์ชั่นเบต้าที่มีพารามิเตอร์ p และ q

ดังนั้น

$$g(\Theta,\lambda) = \int_{u\geq\lambda} f_u(u;m,n-k,\Theta)\,du = \int_{t\geq\frac{m\lambda}{n-k}} f_t(t;m,n-k,\Theta)\,dt \qquad (2.4.12)$$

โดยการดิฟเฟอเรนซิเอท $g(\Theta,\lambda)$ จาก density function ของ t ดังกล่าว จะได้ผลดังนี้

$$g'(\Theta,\lambda) = -g(\Theta,\lambda)+r(\Theta,\lambda) \qquad (2.4.13)$$

เมื่อ $r(\Theta,\lambda) = \int_{t \geq \frac{m\lambda}{n-k}} f_t(t;m+2,n-k,\Theta)dt$ (2.4.14)

$$= P\{\frac{m+2}{n-k} F'(m+2,n-k;\Theta) \geq \frac{m\lambda}{n-k}\}$$

เมื่อเปรียบเทียบกับ $g(\Theta,\lambda) = P\{\frac{m}{n-k} F'(m,n-k;\Theta) \geq \frac{m\lambda}{n-k}\}$

แทนค่า (2.4.13) ใน (2.4.11) จะได้

ความเอนเอียงของ $Y^* = XS^{-1}H'[HS^{-1}H']^{-1}(H\beta-h)(r(\Theta,\lambda)-1)$ (2.4.15)

โดยความเอนเอียงของ Y^* จะมีค่าเป็น 0 ในกรณีที่สมมติฐาน $H\beta=h$ เป็นจริง

2.5 ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของ Y*

เนื่องจากค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของ $Y^* = E(Y^*-X\beta)(Y^*-X\beta)'$ ในที่นี้แทนที่จะพิจารณาค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของ Y^* โดยตรง จะพิจารณาโดยใช้ trace ของค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองแทนซึ่งอาจเรียกได้ว่าเป็นค่ากำลังสองของความเสี่ยง (quadratic risk function) ของ Y^* กล่าวคือ ถ้าให้

$$\begin{aligned} M(\Theta,\lambda) &= E(X\beta^*-X\beta)'(X\beta^*-X\beta) \\ &= E[(Xb-X\beta)'(Xb-X\beta)/A_1]P(A_1) \\ &\quad +E[(X\hat{\beta}-X\beta)'(X\hat{\beta}-X\beta)/A_0]P(A_0) \\ &= E[(b-\beta)'S(b-\beta)/A_1]\,P(A_1)+E[(\hat{\beta}-\beta)'S(\hat{\beta}-\beta)/A_0]P(A_0) \end{aligned}$$

แทนค่า $\hat{\beta}$ จาก (2.1.2) จะได้

$$\begin{aligned} M(\Theta,\lambda) &= E[(b-\beta)'S(b-\beta)/A_1]P(A_1) \\ &\quad +E[(b-\beta-S^{-1}H'[HS^{-1}H']^{-1}[Hb-h])'S(b-\beta-S^{-1}H' \\ &\quad [HS^{-1}H']^{-1}[Hb-h])/A_0]P(A_0) \end{aligned} \qquad (2.5.1)$$

โดยการกระจายเทอมที่ 2 ของ (2.5.1) จะได้ 4 เทอมต่อไปนี้เป็นค่าที่อยู่ภายใน expected value คือ

(i) $(b-\beta)'S(b-\beta)$

(ii) $-[Hb-h]'[HS^{-1}H']^{-1}HS^{-1}S(b-\beta)$

(iii) $-(b-\beta)'SS^{-1}H'[HS^{-1}H']^{-1}[Hb-h]$

(iv) $[Hb-h]'[HS^{-1}H']^{-1}HS^{-1}SS^{-1}H'[HS^{-1}H']^{-1}[Hb-h]$

จาก (iv) $[Hb-h]'[HS^{-1}H']^{-1}HS^{-1}SS^{-1}H'[HS^{-1}H']^{-1}[Hb-h]$

$$= [Hb-h]'[HS^{-1}H']^{-1}[Hb-h]$$

ซึ่งมีค่าเท่ากับ Q ดังแสดงใน (2.2.3)

พิจารณา $H(b-\beta) = (Hb-h)-(H\beta-h)$ ดังนั้น (ii) สามารถเขียนได้เป็น

$$-[Hb-h]'[HS^{-1}H']^{-1}[(Hb-h)-(H\beta-h)]$$

$$= -Q+[Hb-h]'[HS^{-1}H']^{-1}[H\beta-h]$$

เนื่องจาก S มีคุณสมบัติเป็น Symmetric และ $Q=(Hb-h)'[HS^{-1}H']^{-1}(Hb-h)$ เป็น Symmetric เช่นเดียวกัน ดังนั้นจะได้ว่า $S=S'$ และ $Q=Q'$

จะเห็นว่า (iii) เป็น transpose ของ (ii)

แทนค่าใน (2.5.1) จะได้

$$\begin{aligned} M(\theta,\lambda) = {} & E[(b-\beta)'S(b-\beta)/A_1]P(A_1)+E[(b-\beta)'S(b-\beta)/A_0]P(A_0) \\ & +E[-Q+(Hb-h)'[HS^{-1}H']^{-1}(H\beta-h)/A_0]P(A_0) \\ & +E[-Q'+(H\beta-h)'[HS^{-1}H']^{-1}(Hb-h)/A_0]P(A_0) \\ & +E[Q/A_0]P(A_0) \end{aligned} \qquad (2.5.2)$$

จาก (2.1.1) จะได้ว่า $b \sim N(\beta, S^{-1}\sigma^2)$ และเนื่องจาก S เป็นแมทริกซ์ที่มีขนาด k×k และ rank เป็น k จะได้ว่า

$$E[(b-\beta)'S(b-\beta)] = k\sigma^2$$

แทนค่าใน (2.5.2) จะได้

$$M(\Theta,\lambda) = k\hat{\sigma}^2 + E\left[(Hb-h)'\left[HS^{-1}H'\right]^{-1}(H\beta-h)/A_0\right]P(A_0)$$
$$+E\left[(H\beta-h)'\left[HS^{-1}H'\right]^{-1}(Hb-h)/A_0\right]P(A_0)$$
$$-E(Q/A_0)P(A_0) \qquad (2.5.3)$$

ในการคำนวณหา $E(Q/A_0)P(A_0)$ จะคำนวณหา $E(Q/A_1)P(A_1)$ ก่อนดังนี้

จาก (2.4.12) จะได้ว่า

$$E(Q/A_1)P(A_1) = \int_{u \geq \lambda} Q\, f_u(u;\Theta)\,du$$

เมื่อ $u = \frac{Q}{m\hat{\sigma}^2}$ และจาก (2.2.12) ได้แสดงแล้วว่า Q และ $\hat{\sigma}^2$ เป็นอิสระต่อกัน เมื่อกำหนดให้ $q = \frac{Q}{\sigma^2}$ จะได้ว่า

$$E(q/A_1)P(A_1) = \int_0^{\infty} \int_{q \geq \frac{m\lambda\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}} q\, f_1(q;m,\Theta)\, f_2(\hat{\sigma}^2)\,dq\, d\hat{\sigma}^2 \qquad (2.5.4)$$

เมื่อ $f_1(.,.)$, $f_2(.)$ เป็น Marginal density ของ q และ $\hat{\sigma}^2$ ตามลำดับ และจาก (2.2.5) จะได้ว่า $f_1(q;m,\Theta)$ เป็น density function ของ Non-central chi-square ที่มีองศาแห่งความเป็นอิสระ m และ non-centrality parameter Θ โดย

$$f_1(q;m,\Theta) = e^{-\Theta}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Theta^i}{i!}\,\frac{e^{-q/2}\,q^{i+\frac{m}{2}-1}}{2^{i+\frac{m}{2}}\,\Gamma(i+\frac{m}{2})}$$

เมื่อ $\Gamma(\ )$ เป็นฟังก์ชันแกมม่า

ดังนั้น
$$qf_1(q;m,\Theta) = e^{-\Theta}\sum_{i=0}^{\infty}\Theta^i\,\frac{e^{-q/2}\,q^{i+\frac{m+2}{2}-1}}{i!\,2^{i+\frac{m+2}{2}}\,\Gamma(i+\frac{m+2}{2})}\cdot 2\left[i+\frac{m}{2}\right]$$

$$= 2\Theta\, e^{-\Theta}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i\,\Theta^{i-1}\,e^{-q/2}\,q^{i+\frac{m+2}{2}-1}}{i!\,2^{i+\frac{m+2}{2}}\,\Gamma(i+\frac{m+2}{2})}$$

$$+\, me^{-\Theta}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Theta^i\,e^{-q/2}\,q^{i+\frac{m+2}{2}-1}}{i!\,2^{i+\frac{m+2}{2}}\,\Gamma(i+\frac{m+2}{2})} \qquad (2.5.5)$$

$$= 2\Theta \; f_1(q;m+4,\Theta)+m\; f_1(q;m+2,\Theta)$$

แทนค่าใน (2.5.4) จะได้

$$E(q/A_1)P(A_1) = {}_0\int^{\infty} \int_{q \geq \frac{m\lambda\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}} \left[2\Theta\; f_1(q;m+4,\Theta)+m\; f_1(q;m+2,\Theta)\right]$$

$$f_2(\hat{\sigma}^2)\,dq\,d\hat{\sigma}^2$$

จาก (2.4.12) จะได้ตัวสถิติ $t = \dfrac{Q}{(n-k)\hat{\sigma}^2} = \dfrac{q}{(n-k)\hat{\sigma}^2/\sigma^2}$

เมื่อพิจารณาในรูปการแจกแจงของ t จะได้ $E(q/A_1)P(A_1)$ มีค่าดังนี้

$$E(q/A_1)P(A_1) = 2\Theta \int_{t \geq \frac{m\lambda}{n-k}} f_t(t;m+4,n-k,\Theta)\;dt$$

$$+m \int_{t \geq \frac{m\lambda}{n-k}} f_t(t;m+2,n-k,\Theta)\;dt$$

และจาก (2.4.14) กำหนด $r(\Theta,\lambda) = \int_{t \geq \frac{m\lambda}{n-k}} f_t(t;m+2,n-k,\Theta)\,dt$

$$= P\left\{\frac{m+2}{n-k}\,F'(m+2,n-k;\Theta) \geq \frac{m}{n-k}\lambda\right\}$$

ในทำนองเดียวกัน กำหนดให้

$$S(\Theta,\lambda) = \int_{t \geq \frac{m\lambda}{n-k}} f_t(t;m+2,n-k,\Theta)\,dt = P\left\{\frac{m+4}{n-k}\,F'(m+4,n-k;\Theta) \geq \frac{m}{n-k}\lambda\right\} \quad (2.5.6)$$

และจาก $q = \dfrac{Q}{\sigma^2}$ แทนค่าจะได้

$$E(Q/A_1)P(A_1) = \sigma^2\,\{2\Theta\; S(\Theta,\lambda)+mr(\Theta,\lambda)\}$$

เนื่องจาก $\frac{Q}{\sigma^2} \sim \chi^{2}(m;\theta)$ และจาก (2.5.5) จะได้ว่า $E(\frac{Q}{\sigma^2})=m+2\theta$ ดังนั้น

$$E(Q/A_0)P(A_0) = \sigma^2\{m+2\theta-mr(\theta,\lambda)-2\theta\ S(\theta,\lambda)\} \qquad (2.5.7)$$

พิจารณาเทอมที่ 3 ใน (2.5.3) คือ $E[(H\beta-h)'[HS^{-1}H']^{-1}$ $(Hb-h)/A_0]P(A_0)$

จาก (2.4.10) และ (2.4.14) ได้แสดงแล้วว่า

$$E(b/A_0)P(A_0) = \beta(1-g(\theta,\lambda))-S^{-1}H'[HS^{-1}H']^{-1}(H\beta-h)[r(\theta,\lambda)-g(\theta,\lambda)]$$

ดังนั้น $E(Hb/A_0)P(A_0) = H\beta(1-g(\theta,\lambda))-(H\beta-h)[r(\theta,\lambda)-g(\theta,\lambda)]$

$$= H\beta(1-r(\theta,\lambda))+h[r(\theta,\lambda)-g(\theta,\lambda)]$$

และ $E(h/A_0)P(A_0) = h(1-g(\theta,\lambda))$

ดังนั้น

$$E((H\beta-h)'[HS^{-1}H']^{-1}(Hb-h)/A_0)P(A_0)$$

$$= (H\beta-h)'[HS^{-1}H']^{-1}\ (H\beta-h)(1-r(\theta,\lambda))$$

$= 2\sigma^2\theta(1-r(\theta,\lambda))$ จากนิยามของ θ ดังแสดงใน (2.2.6) (2.5.8)

เนื่องจาก $(Hb-h)'[HS^{-1}H']^{-1}\ (H\beta-h)$ เป็นค่า Transpose ของ $(H\beta-h)'[HS^{-1}H']^{-1}\ (Hb-h)$ ซึ่งมี expected value เป็นค่า scalar

ดังนั้น $E[(Hb-h)'[HS^{-1}H']^{-1}\ (H\beta-h)/A_0)P(A_0)$ ย่อมมีค่าเท่ากับ $2\sigma^2\theta$ $(1-r(\theta,\lambda))$ ด้วย

แทนค่า (2.5.7) และ (2.5.8) ลงใน (2.5.3) จะได้

$$M(\theta,\lambda) = \sigma^2\ \{k+4\theta(1-r(\theta,\lambda))-[m+2\theta-mr(\theta,\lambda)-2\theta\ S(\theta,\lambda)]\}$$

$$= \sigma^2\ \{k-m+mr(\theta,\lambda)+2\theta[1-2r(\theta,\lambda)+S(\theta,\lambda)]\} \qquad (2.5.9)$$

เมื่อ $r(\theta,\lambda)$ และ $S(\theta,\lambda)$ มีค่าดังแสดงใน (2.4.14) และ (2.5.6) ตามลำดับ

2.6 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเรื่องนี้ที่มีอยู่คือวิทยานิพนธ์ของ R.J.Brook ซึ่งได้แสดงถึงวิธีการคำนวณหานิพจน์ทางคณิตศาสตร์ของฟังก์ชั่นความเอนเอียงและ quadratic risk function ของตัวประมาณสัมประสิทธิ์การถดถอย β และตัวประมาณค่า Y ในกรณีที่มีการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าสัมประสิทธิ์การถดถอย และได้คำนวณหา Optimal critical value $\lambda=\lambda^*$ ของการทดสอบสมมติฐาน $H\beta=h$ โดยการใช้ minimax regret function ของตัวประมาณค่าของตัวแปร Y เป็นเกณฑ์ กล่าวคือได้คำนวณหา λ^* ที่ทำให้

$$\underset{\Theta<\frac{m}{2}}{REG(\Theta_L,\lambda^*)} = \underset{\Theta\geq\frac{m}{2}}{REG(\Theta_u,\lambda^*)}$$

เมื่อ $REG(\Theta,\lambda)$ เป็น minimax regret function

และ Θ_L,Θ_u เป็นค่า non-centrality parameter ที่ทำให้ค่า Regret function ทางด้านซ้ายและขวาตามลำดับมีค่าสูงสุด

ค่าของ optimal critical λ^* ถูกคำนวณหาที่ระดับต่าง ๆ กันขององศาแห่งความเป็นอิสระทั้งเศษและส่วนของการทดสอบแบบ F และพบว่าค่าของ λ^* ค่อนข้างจะคงที่อยู่ภายในช่วง (1.8,2.2) ดังจะเห็นได้จากตารางที่ 1 ในภาคผนวก ก

นอกจากนี้ยังมีผลงานวิจัยของ T.Toyoda และ T.D. Wallace ซึ่งได้แสดงถึงการคำนวณหา optimal critical value สำหรับการทดสอบสมมติฐานก่อนการประมาณสัมประสิทธิ์การถดถอยโดยใช้ค่า minimum average relative risk ของตัวประมาณค่าของตัวแปร Y เป็นเกณฑ์แล้วเปรียบเทียบผลที่ได้กับวิธีการของ R.J.Brook ดังแสดงผลการคำนวณในตารางที่ 2 และ 3 ของภาคผนวก ก