



บทที่ 3

### การส่งผ่านคลื่นใน เส้นใยใยบริดสมดูลย์

เนื่องจากสนามในท่อนำคลื่นแบบคอร์รูเกตเป็นสนามใยบริดที่เกิดจากผิวขอบเขตแบบแอนไอโซทรอปิก ในบทนี้จะอธิบายปรากฏการณ์ในรูปของอิมพีแดนซ์ที่ผิวขอบเขต กล่าวถึงเส้นใยใยบริดสมดูลย์และผลกระทบของเส้นใยนี้ต่อสนามในท่อนำคลื่น และในตอนท้ายจะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีของท่อนำคลื่น ความลึกของสล๊อตและความยาวคลื่นในสภาวะใยบริดสมดูลย์

#### 3.1 สมการในท่อนำคลื่น (FIELD EQUATIONS)

นิพจน์ทั่วไปสำหรับสนามในท่อนำคลื่นทรงกระบอกที่ผิวภายในเป็นผิวแอนไอโซทรอปิกหาได้จากสมการ (2.23) ถึง (2.28) ซึ่งจะต้องค้ประกอบสนามของคลื่นใยบริดดังนี้

$$E_z = E_z(k_{cm} r) \cos(n \theta) , H_z = H_z(k_{cm} r) \sin(n \theta)$$

$$E_r = E_r(k_{cm} r) \cos(n \theta) , H_r = H_r(k_{cm} r) \sin(n \theta) \quad (3.1 ก)$$

$$E_\theta = E_\theta(k_{cm} r) \sin(n \theta) , H_\theta = H_\theta(k_{cm} r) \cos(n \theta)$$

ในขณะที่  $E_z(k_{cm} r) = J_n(k_{cm} r)$

$$E_r(k_{cm} r) = \left( \frac{-j\beta_m}{\omega^2 \epsilon_o \mu_o - \beta_m^2} \right) \left\{ k_{cm} J'_n(k_{cm} r) - \frac{k_o n}{\beta_m r} \alpha J_n(k_{cm} r) \right\}$$

$$E_\theta(k_{cm} r) = \left( \frac{-j\beta_m}{\omega^2 \epsilon_o \mu_o - \beta_m^2} \right) \left\{ \frac{-1}{r} n J_n(k_{cm} r) + \frac{k_{cm}}{\beta_m} k_o \alpha J'_n(k_{cm} r) \right\} \quad (3.1 ข)$$

$$H_z(k_{cm} r) = \frac{-\alpha}{z_o} J_n(k_{cm} r)$$

$$H_r(k_{cm} r) = \frac{1}{z_0} \left( \frac{-j\beta_m}{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - \beta_m^2} \right) \left\{ -\alpha k_{cm} J'_n(k_{cm} r) + \frac{k_0 n}{\beta_m r} J_n(k_{cm} r) \right\}$$

$$H_\theta(k_{cm} r) = \frac{1}{z_0} \left( \frac{-j\beta_m}{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - \beta_m^2} \right) \left\{ \frac{-n\alpha}{r} J_n(k_{cm} r) + \frac{k_0 k_{cm}}{\beta_m} J'_n(k_{cm} r) \right\}$$

โดยละ  $\exp(-j\beta_m z)$  ไว้

$$\text{เมื่อ } \beta_m = \beta_0 + 2m\pi/D, \quad k_{cm}^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - \beta_m^2,$$

$$\alpha = -z_0 H_z(k_{cm} r) / E_z(k_{cm} r)$$

โดยเรียก  $\alpha$  นี้ว่า MODE CONTENT FACTOR

หาก  $\alpha = 0$  สมการ (3.1 ข) จะลดรูปเป็นองค์ประกอบสนามของโหมด TM และ

หาก  $\alpha = \infty$  สมการ (3.1 ข) จะลดรูปเป็นองค์ประกอบสนามของโหมด TE ซึ่งในกรณี

หลังพิจารณาจากเทอมที่ไม่มี  $\alpha$  ให้มีค่าน้อยมากตัดทิ้งได้ ในกรณีที่เราสนใจ คือ  $\alpha = \pm 1$

จะให้องค์ประกอบสนามของโหมด TM และ TE เป็นสัดส่วนเท่ากัน ดังนั้นตัวเลขที่กำหนด

ให้  $\alpha$  จึงเป็นดัชนีที่บ่งถึงสัดส่วนของโหมด TM และโหมด TE ในท่อนำคลื่นที่ผิวขอบเขต

ทำหน้าที่เป็นตัวกลางแอนไอโซทรอปิก

### 3.2 โหมดไฮบริดสมดุลย์ (BALANCED HYBRID MODE)

โดยที่ลักษณะของผิวขอบเขตของท่อนำคลื่นส่งผลต่อโหมดการส่งผ่านคลื่น การกระจายสนามที่ช่องเปิดและแพทเทิร์นการแผ่คลื่นโดยตรง ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงผิวขอบเขตที่มีลักษณะเป็นคอร์รัเกต และอธิบายพฤติกรรมของคลื่นอันเนื่องมาจากผิวขอบเขตนี้

ท่อนำคลื่นแบบคอร์รัเกตตามรูปที่ 2.1 จะเห็นได้ว่าผิวขอบเขตมีลักษณะเป็นร่องตามแนวเส้นรอบวง ทำให้คลื่นที่เคลื่อนที่ไปในทิศตามแนวเส้นรอบวงและตามแนวแกนมีคุณสมบัติต่างกัน กล่าวคือ ผิวขอบเขตเป็นผิวแอนไอโซทรอปิก (ANISOTROPIC BOUNDARY SURFACE) การอธิบายปรากฏการณ์ดังกล่าวมักจะกำหนดจากอัตราส่วนของสนามไฟฟ้าต่อสนามแม่เหล็กที่ผิวขอบเขต ซึ่งมีมิติเป็นอิมพีแดนซ์<sup>10</sup> ในกรณีของผิวแอนไอโซทรอปิก อิมพีแดนซ์ที่ผิวเป็นฟังก์ชันของตำแหน่งบนผิว ดังนั้นจึงสามารถอธิบายพฤติกรรมของคลื่นอันเนื่องมาจากผิวคอร์รัเกตของท่อนำคลื่นนี้ได้ด้วยคาร์แอก-แดนซ์ที่ผิวดังนี้

$$X_{s\theta} = \frac{-jE_{\theta}(k_{cm} a)}{H_z(k_{cm} a)Z_o} \quad (3.2 \text{ ก})$$

$$X_{sz} = \frac{jE_z(k_{cm} a)}{H_{\theta}(k_{cm} a)Z_o} \quad (3.2 \text{ ข})$$

เมื่อ  $X_{s\theta}$  เป็นรีแอกแตนซ์ที่ผิวตามแนวเส้นรอบวงของท่อนำคลื่น

$X_{sz}$  เป็นรีแอกแตนซ์ที่ผิวตามแนวแกนของท่อนำคลื่น

$E_z(k_{cm} a)$  ,  $H_z(k_{cm} a)$  เป็นองค์ประกอบสนามในแนวแกน

$E_{\theta}(k_{cm} a)$  ,  $H_{\theta}(k_{cm} a)$  เป็นองค์ประกอบสนามในแนวเส้นรอบวง

$Z_o$  เป็นอิมพีแดนซ์ของคลื่น มีค่า  $120\pi$  โอห์ม

จากสมการ (2.15) และ (2.16) แสดงให้เห็นว่าสนามไฮบริดเกิดขึ้นจากการรวมกันของโหมด TM และโหมด TE โดยสัดส่วนการรวมของสนามขึ้นอยู่กับลักษณะของเงื่อนไขขอบเขต ซึ่งเงื่อนไขขอบเขตนี้จะมากำหนดค่าของค่าคงตัวในคำตอบของสมการทั้งสอง (หมายถึงค่าคงตัว  $A_m$  และ  $B_m$  ในสมการ (2.23) ถึง (2.28)) และความสัมพันธ์ของค่าคงตัวทั้งสองนี้แสดงได้ในรูปของ MODE CONTENT FACTOR  $\alpha$  จากสมการ (3.1 ข) จะพบว่าถ้าให้  $\alpha = \pm 1$  จะได้องค์ประกอบสนามของโหมด TM และ TE เป็นสัดส่วนเท่ากัน และทำให้สมการ (3.2 ก) และ (3.2 ข) สัมพันธ์กันดังนี้

$$X_{s\theta} X_{sz} = -1 \quad (3.3)$$

สมการ (3.3) นี้เป็นเงื่อนไขจำเป็นในกรณีที่ท่อนำคลื่นต้องพ่วงคลื่นในลักษณะที่โหมด TM และ TE สมดุลย์กัน จึงเรียกความสัมพันธ์ตามสมการ (3.3) นี้ว่า เงื่อนไขไฮบริดสมดุลย์ (BALANCED HYBRID CONDITION) <sup>3</sup>.

เมื่อพิจารณาโครงสร้างของท่อนำคลื่นแบบคอร์รูเกตตามรูปที่ 2.1 จะเห็นว่าที่บริเวณ  $r = a$  ,  $s \leq z \leq D$  เป็นผิวโลหะจะบังคับองค์ประกอบสนามไฟฟ้าที่อยู่ในแนวสัมผัสให้มีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งจากเงื่อนไขไฮบริดสมดุลย์จะได้ว่าขนาดขององค์ประกอบสนามแม่เหล็กที่สมมูลกันในบริเวณ  $r = a$  ,  $0 \leq z \leq s$  มีค่าเป็นศูนย์ด้วย ดังนั้นเนื่องจาก  $E_{\theta}(k_{cm} a) = 0$  ที่บริเวณ  $r = a$  ,  $s \leq z \leq D$  เพราะฉะนั้นจากสมการ (3.2 ก) จะได้  $X_{s\theta} = 0$  จากสมการ (3.1 ข) จะได้ว่า

$$\alpha = \frac{\beta_m n J_n(k_{cm} a)}{k_o k_{cm} a J'_n(k_{cm} a)} \quad (3.4)$$

และจากสมการ (3.2 ข) จะได้ว่า

$$X_{sz} = \frac{k_{cm} J_n(k_{cm} a) J'_n(k_{cm} a)}{k_o a \left[ \frac{\beta_m n}{k_o k_{cm} a} J_n(k_{cm} a) \right]^2 - \left[ J'_n(k_{cm} a) \right]^2} \quad (3.5)$$

ตามเงื่อนไขไฮบริดสมมูลย์จะได้ว่า  $H_\theta(k_{cm} a) = 0$  ในบริเวณ  $r = a$ ,  $0 \leq z \leq s$

ดังนั้นในสมการ (3.3)  $X_{sz} = \infty$

จากสมการ (3.5) เมื่อ  $n = 1$  และ  $m = 0$  จัดสมการใหม่จะได้

$$\frac{-\beta_o^2}{k_o k_{co}} \frac{J_1(k_{co} a)}{J'_1(k_{co} a)} + k_o \frac{J'_1(k_{co} a)}{J_1(k_{co} a)} = 0 \quad (3.6)$$

สมการ (3.6) นี้สอดคล้องกับค่าศูนย์ของนิพจน์ทางซ้ายมือของสมการลักษณะสมบัติ ส่วนเงื่อนไขที่  $E_z = 0$  ที่ผิวขอบเขต  $r = a$ ,  $s \leq z \leq D$  และ  $r = b$ ,  $0 \leq z \leq s$  จากสมการ (3.2 ข) จะได้ว่า  $x_{sz} = 0$  ซึ่งหมายความว่า เงื่อนไขที่  $E_z = 0$  นี้จะสอดคล้องกับค่าโพลของนิพจน์ทางซ้ายมือของสมการลักษณะสมบัติ ซึ่งแสดงสภาวะเหมือนการส่งผ่านคลื่นในท่อนำคลื่นผิวเรียบ

### 3.3 ความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีของท่อนำคลื่น, ความลึกของสล๊อตและความยาวคลื่น

#### 3.3.1 วิธีการคำนวณ

จากสมการคุณลักษณะเมื่อใช้เงื่อนไขไฮบริดสมมูลย์จะได้ว่า

$$\frac{J'_n(k_o a) Y_n(k_o b) - J_n(k_o b) Y'_n(k_o a)}{J_n(k_o a) Y_n(k_o b) - J_n(k_o b) Y_n(k_o a)} = 0 \quad (3.7)$$

จากสมการ (3.7) ให้  $\frac{b}{a} = m$  หาก  $m < 0$  จะได้ว่าอาร์กิวเมนต์ (ARGUMENT)  $k_o a$  สำหรับค่าศูนย์ของ ครอส-โปรดักต์ของฟังก์ชันเบสเซล (CROSS-PRODUCT BESSEL FUNCTION)



ที่เป็นพิเศษและที่เป็นส่วนเป็นค่าจริงและไม่เป็นค่าเชิงซ้อน และหาก  $m < 1$  สามารถหาค่า  
ศูนย์ของครอส-โปรดักต์ของฟังก์ชันเบสเซลได้ โดยใช้การกระจายแบบอิมปีโตติก<sup>8</sup> ดังนี้

ในการหาค่าศูนย์ของสมการ (3.7) จะได้  $J'_n(k_0 a) Y_n(k_0 b) - J_n(k_0 b) Y'_n(k_0 a) = 0$   
การกระจายอิมปีโตติกของค่าศูนย์ครั้งที่  $\omega$  คือ

$$v - \frac{p}{v} + \frac{q - p^2}{v^3} + \frac{u - 4pq + 2p^3}{v^5} + \dots \tag{3.8}$$

เมื่อแทน  $4n^2$  ด้วย  $\mu$

โดยที่  $v = \omega\pi / (m-1)$

$$p = \frac{g-1}{8m}, \quad q = \frac{(g-1)(g-25)(m^3-1)}{6(4m)^3(m-1)}$$
$$u = \frac{(g-1)(g^2-114g+1073)(m^5-1)}{5(4m)^5(m-1)}$$

และ  $u = 4n^2$

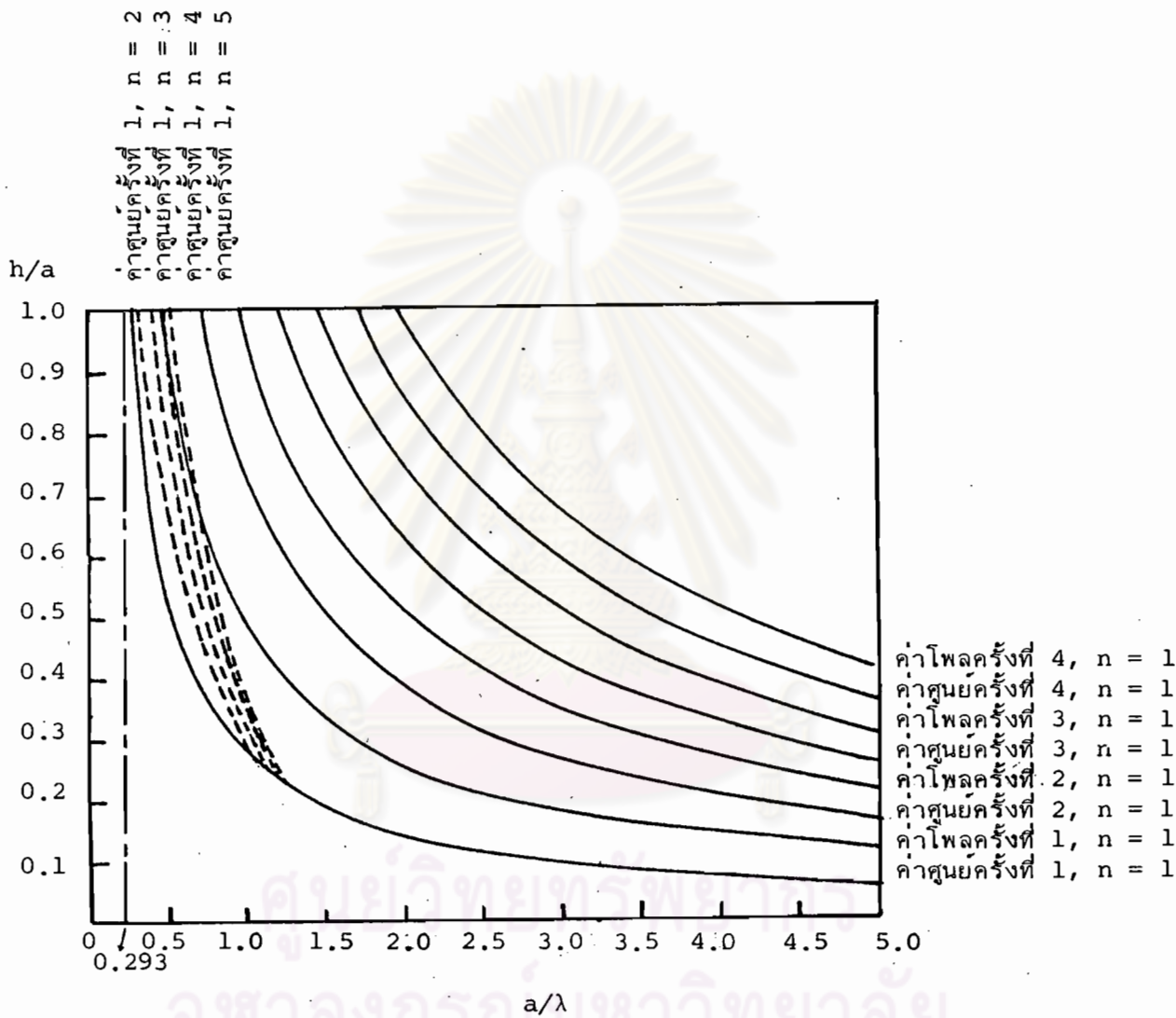
ในการหาค่าโพลของสมการ (3.7) จะได้  $J_n(k_0 a) Y_n(k_0 b) - J_n(k_0 b) Y_n(k_0 a) = 0$   
การกระจายอิมปีโตติกของค่าโพลครั้งที่  $\omega$  เหมือนสมการ (3.8)

โดย  $v = (\omega - \frac{1}{2})\pi / (m-1)$

$$p = \frac{(g+3)m - (g-1)}{8m(m-1)}$$
$$q = \frac{(g^2 + 46g - 63)m - (g-1)(g-25)}{6(4m)^3(m-1)}$$

$$5(4m)^5(m-1)g = (g^3 + 185g^2 - 2053g + 1899)m - (g-1)(g^2-114g+1073)$$

และในกรณีโหมด  $EH_{11}$  ค่า  $n = 1$



รูปที่ 3.1 แสดงโลกัสมของค่าศูนย์ และค่าโพลลำดับต่าง ๆ ของสมการ

ลักษณะสมบัติในเงื่อนไขโหมดไฮบริดสมมูล

- สำหรับโหมด  $EH_{11}$
- สำหรับโหมดที่มีอันดับสูงกว่าหนึ่ง (ในที่นี้แสดงเฉพาะ  $n = 2, 3, 4,$  และ  $5$ )
- - - สำหรับเส้นตัดความถี่ (CUTOFF LINE) ของโหมด  $HE_{11}$  และ  $EH_{11}$



### 3.3.2 ผลการคำนวณ

ผลการคำนวณแสดงดังรูปที่ 3.1 แสดงโลกซ์ของค่าศูนย์และโลกซ์ของค่าโพลของสมการ ลักษณะสมบัติในเงื่อนไขไฮบริดสมดุลย์ (สมการ (3.7)) สำหรับโหมด  $EH_{11}$  ซึ่งขึ้นอยู่กับมิติทางกายภาพ (PHYSICAL DIMENSION) คือรัศมีและความลึกของสล๊อต และขึ้นอยู่กับความถี่ทำงาน (OPERATING FREQUENCY) โดยที่โลกซ์ของค่าศูนย์ต่างๆ แสดงสภาวะการส่งผ่านคลื่นในเงื่อนไขไฮบริดสมดุลย์ ส่วนโลกซ์ของค่าโพลต่างๆ แสดงสภาวะเหมือนการส่งผ่านคลื่นในท่อนำคลื่นผิวเรียบ ดังนั้นเมื่อพิจารณาจากเงื่อนไขไฮบริดสมดุลย์ และรูปร่างของผิวขอบเขตที่เป็นคอร์รูเกตตามแนวเส้นรอบวง พบว่าโลกซ์ของค่าศูนย์ซึ่งสอดคล้องกับ  $x_{sz} = \infty$  เงื่อนไขนี้เป็นเงื่อนไขสมดุลย์ซึ่งบังคับรีแอกแตนซ์ที่ปากสล๊อตให้มีค่านันต์ จึงดูเหมือนว่าสล๊อตทำหน้าที่เป็นสายส่ง (TRANSMISSION LINE) ที่เป็นวงจรเปิด (OPEN CIRCUIT) และมีคลื่นยืนของสนามไฟฟ้า  $E_z$  (ELECTRIC STANDING WAVE) ที่ปากสล๊อตมีค่าสูงสุด เมื่อพิจารณาจากโลกซ์ของค่าศูนย์ที่หนึ่ง โดยกำหนดรัศมีและความถี่ทำงานค่าหนึ่งจะพบว่าค่าความลึกของสล๊อตที่สอดคล้องกับเงื่อนไขไฮบริดสมดุลย์มีขนาดประมาณ  $\frac{\lambda}{4}$  และที่รัศมีค่าใหญ่ จะพบว่ามีขนาดเท่ากับ  $\frac{\lambda}{4}$  เมื่อ  $\lambda$  คือ ความยาวคลื่นของความถี่ทำงาน (OPERATING FREQUENCY) ทั้งนี้เนื่องจากโลกซ์ต่างๆ เหล่านี้หาจากการกระจายอิมปีดิติค ซึ่งมีความแม่นยำ (ACCURACY) สูงเมื่อ  $a$  มีค่ามากๆ สำหรับค่าศูนย์ที่สอง, สาม, สี่ และอื่นๆ ก็พิจารณาในทำนองเดียวกันโดยจะสอดคล้องกับค่าความลึกของสล๊อตที่  $\frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \frac{7\lambda}{4}, \dots$  ในทำนองเดียวกันสำหรับโลกซ์ของค่าโพลที่สอดคล้องกับ  $x_{sz} = 0$  เป็นเงื่อนไขสมดุลย์ที่บังคับให้ค่ารีแอกแตนซ์ที่ปากสล๊อตจะสอดคล้องกับมีค่าเป็นศูนย์ จึงดูเหมือนว่าสล๊อตเป็นสายส่งที่ลัดวงจรที่ปลายขั้ว (SHORT CIRCUIT) และคลื่นยืนของสนามไฟฟ้าที่ปากสล๊อตมีค่าเป็นศูนย์ และมีความลึกของสล๊อต  $\frac{\lambda}{2}, \lambda, 2\lambda, \dots$  นอกจากนี้เมื่อพิจารณาร่วมกับคุณสมบัติการเปลี่ยนแปลงของการส่งผ่านคลื่น เมื่อความถี่เปลี่ยนแปลงและคุณสมบัติการกระจัดกระจายของโหมดของการส่งผ่านคลื่นในรูปที่ 2.2 และ 2.3 ตามลำดับ จะพบว่าบริเวณที่อยู่ระหว่างโลกซ์ของค่าศูนย์และโลกซ์ของค่าโพลของแต่ละลำดับเป็นบริเวณที่มีคลื่นเร็ว (FAST WAVE) ในกรณีของโหมด  $EH_{11}$  ค่า  $k_{co} a = 2.405$  จะสอดคล้องกับโลกซ์ของค่าศูนย์ครั้งที่หนึ่ง และค่า  $k_{co} a = 1.841$  จะสอดคล้องกับโลกซ์ของค่าโพลครั้งที่หนึ่ง สำหรับที่โลกซ์ของค่าศูนย์และค่าโพลอื่นก็อธิบายได้ในทำนองเดียวกัน บริเวณที่นอกเหนือจากที่กล่าวนี้เป็นบริเวณที่มีโอกาสเป็นคลื่นช้ามาก และรูปที่ 3.1 ได้แสดงการรบกวนของโหมดที่มีอันดับสูงกว่า (เมื่อ  $n = 2, 3, 4, 5$ ) ในบริเวณคลื่นเร็วระหว่างโลกซ์ของค่าศูนย์และค่าโพลครั้งที่หนึ่งไว้ด้วย และได้แสดงโลกซ์ของจุดตัดความถี่สำหรับโหมดต่ำสุด  $HE_{11}$  ไว้ด้วย