

โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดชิ้นส่วนอัตโนมัติ
โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด



นายพงศกร ตั้งถาวรการ

สถาบันวิทยบริการ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา ภาควิชาวิศวกรรมโยธา


คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2550

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

AN AUTOMATIC ADAPTIVE REMESHING FINITE ELEMENT PROGRAM
USING SIMPLE TRIANGULAR ELEMENT WITH VERTEX ROTATIONS

Mr. Pongsakorn Thangthavornkarn



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering Program in Civil Engineering

Department of Civil Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2007

Copyright of Chulalongkorn University

พงศกร ตั้งถาวรการ : โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดชิ้นส่วนอัตโนมัติ โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด. (AN AUTOMATIC ADAPTIVE REMESHING FINITE ELEMENT PROGRAM USING SIMPLE TRIANGULAR ELEMENT WITH VERTEX ROTATIONS) อ. ที่ปรึกษา : ศ.ดร.ทักษิณ เทพชาติศรี, 92 หน้า.

การวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยที่ให้ความคลาดเคลื่อนกระจายออกไปเท่าๆ กันตลอดทั้งโดเมนของปัญหา จะทำให้ได้ผลเฉลยที่ดีที่สุดเมื่อเทียบกับโครงข่ายที่มีระดับชั้นความละเอียดเท่ากัน การที่จะให้ผลเฉลยเข้าใกล้ค่าที่ถูกต้องเร็วขึ้นนี้ จำเป็นต้องปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายให้มีความต่อเนื่องและมีขนาดชิ้นส่วนที่เหมาะสม ได้มีผู้วิจัยเรื่องนี้โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น ทว่าผลที่ได้ยังไม่น่าพอใจมากนักเนื่องจากคุณภาพของโครงข่ายที่ได้ยังไม่ค่อยต่อเนื่อง ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงได้ทำการปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายให้มีความต่อเนื่องมากยิ่งขึ้น พร้อมทั้งทำการเปลี่ยนชนิดของชิ้นส่วนที่ใช้ จากชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้นเป็นชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด เนื่องจากว่าเป็นชิ้นส่วนที่มีระดับชั้นความเสร้น้อยกว่าชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น แต่ให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกัน ซึ่งจากตัวอย่างที่ได้ทำการศึกษาพบว่า จำนวนระดับชั้นความเสร้สามารถลดลงได้ประมาณ 1 - 3 เท่า ในขณะที่ใช้เวลาในการคำนวณน้อยลงได้ประมาณ 1 - 2 เท่า โดยที่มีความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากัน อย่างไรก็ตามหากเปรียบเทียบกับงานวิจัยเดิมที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่พบว่า จำนวนระดับชั้นความเสร้สามารถลดลงได้ประมาณ 1 - 30 เท่า ในขณะที่ใช้เวลาในการคำนวณน้อยลงได้ประมาณ 1 เท่าถึงมากกว่า 256 เท่า โดยที่มีความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากัน ดังนั้นในงานวิจัยนี้ได้แสดงให้เห็นว่า วิธีการที่น่าเสนอสามารถคำนวณหาผลเฉลยได้อย่างมีประสิทธิภาพ และใช้เวลาในการคำนวณที่น้อยลงพร้อมทั้งได้โครงข่ายที่ต่อเนื่องกันมากขึ้น

สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา.....วิศวกรรมโยธา..... ลายมือชื่อนิสิต..... พ.ศ.๒๕๕๐.....
สาขาวิชา.....วิศวกรรมโยธา..... ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.....
ปีการศึกษา.....2550.....

4870389521 : MAJOR CIVIL ENGINEERING

KEY WORD: FEM / MESH GENERATION / ADAPTIVE / VERTEX ROTATIONS / ALLMAN

PONGSAKORN THANGTHAVORNKARN : AN AUTOMATIC ADAPTIVE REMESHING
FINITE ELEMENT PROGRAM USING SIMPLE TRIANGULAR ELEMENT WITH VERTEX
ROTATIONS. THESIS ADVISOR : PROF. THAKSIN THEPCHATRI, Ph.D. , 92 pp.

Given the same number of degrees of freedom (DOF) for a problem, the best solution from the finite element analysis will be obtained when errors are uniformly distributed over the whole domain. An automatic adaptive remeshing technique is being developed to help minimizing data preparation time. To date, the mesh improvement procedure, angle-based smoothing technique, was incorporated into a finite element analysis program with linear strain triangular element (LST). However the result has some deficiency due to the mesh unsmoothness. In this research, a mesh improvement procedure resulting in better mesh size and shape has been proposed. Also the simple triangular element with vertex rotations is used instead of the LST element. It has been found, from the selected examples having the same constraints that the proposed procedure can reduce the total DOF by approximately 1 – 3 times. The calculation time can be reduced by approximately 1 – 2 times. However, when compare to the previous research that used the constant strain triangle (CST), the proposed procedure can reduce the total DOF by approximately 1 – 30 times, while the calculation time can be reduced by up to 256 times. Thus, it has been shown that the proposed method can effectively solve a plane stress problem with a minimum effort of data input and computation time.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Department..... Civil Engineering Student's signature... *Pongsakorn Thangthavornkarn* ..
Field of study..... Civil Engineering Advisor's signature... *Thaksin Thepchatrri* ..
Academic year..... 2007

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.ทักษิณ เทพชาติรี อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ได้สละเวลาอันมีค่าในการให้คำแนะนำอันเป็นประโยชน์ รวมทั้งตรวจสอบและแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ ที่เกิดขึ้นตลอดระยะเวลาในการทำวิจัย รวมทั้งขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ธีรพงศ์ เสน จันทรธิมไชย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิวัฒน์ชัย สมิตถากร และอาจารย์ ดร.อัศววัชร เล่นวารี ที่ได้กรุณาให้ความสนใจในการเป็นคณะกรรมการตรวจสอบวิทยานิพนธ์ นอกจากนี้วิทยานิพนธ์คงจะไม่สำเร็จลงได้หากปราศจากความอนุเคราะห์จาก คุณเทอดเกียรติ จันทวัชรกร และคุณชัยณรงค์ เสียงไพรพันธ์ ที่คอยแนะนำและให้คำปรึกษาอันเป็นประโยชน์

ท้ายที่สุด ประโยชน์อันพึงได้รับจากวิทยานิพนธ์นี้ ขอมอบแต่ บิดา มารดา ครูบาอาจารย์ และผู้มีพระคุณทุกท่าน



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญภาพ.....	ฉ
สารบัญตาราง.....	ฐ
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความนำ.....	1
1.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	2
1.3 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย.....	6
1.4 ขอบเขตการศึกษา.....	6
บทที่ 2 แนวทางและทฤษฎีที่ใช้ในการวิจัย.....	8
2.1 ความนำ.....	8
2.2 การประมาณค่าคลาดเคลื่อน.....	8
2.3 การประมาณค่าหน่วยแรงที่แม่นยำขึ้น.....	10
2.4 การประมาณขนาดของชิ้นส่วน.....	13
2.5 ทฤษฎีของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด.....	14
2.6 สถิติเฟสของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด.....	16
บทที่ 3 การพัฒนาโปรแกรม.....	20
3.1 ภาษาคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในโปรแกรม.....	20
3.2 การเลือกใช้โครงสร้างข้อมูล.....	20
3.3 ชนิดของข้อมูล.....	21
3.4 โครงสร้างและลำดับการทำงานของโปรแกรม.....	24
3.5 การแสดงผล.....	24

บทที่ 4 ตัวอย่างการวิเคราะห์ผล.....	29
4.1 ตัวอย่างที่ 1 ปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง.....	29
4.2 ตัวอย่างที่ 2 ปัญหาแผ่นวงกลมบางรับแรงกระทำเป็นจุด.....	32
4.3 ตัวอย่างที่ 3 ปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายคานอิสระ.....	34
4.4 ตัวอย่างที่ 4 ปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิดรับแรงกระทำเป็นจุด.....	35
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	82
5.1 สรุปผลการวิจัย.....	82
5.2 ข้อเสนอแนะอื่นๆ.....	83
รายการอ้างอิง.....	84
ภาคผนวก.....	86
ภาคผนวก ก การใช้งานโปรแกรม.....	87
ภาคผนวก ข รายละเอียดของรหัสคำนวณ.....	89
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์.....	90

สารบัญภาพ

หน้า

รูปที่ 2.1.1	แผนภูมิสายงานของกระบวนการปรับขนาดชิ้นส่วนอัตโนมัติ.....	17
รูปที่ 2.3.1	ลักษณะของชิ้นส่วนบริเวณขอบปัญหา.....	18
รูปที่ 2.3.2	ลักษณะของหย่อมที่ใช้ในการประมาณค่าหน่วยแรงที่จุดต่อที่ขอบ.....	18
รูปที่ 2.3.3	ลักษณะของจุดที่หาหย่อมภายในยาก.....	18
รูปที่ 2.5.1	ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด.....	19
รูปที่ 2.5.2	แสดงการกระจัดที่มุมของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด.....	19
รูปที่ 2.6.1	ตำแหน่งจุดเกาส์.....	19
รูปที่ 3.2.1	โครงสร้างข้อมูลชนิดแถวลำดับ.....	25
รูปที่ 3.2.2	โครงสร้างข้อมูลชนิดลิงค์ลิสต์.....	25
รูปที่ 3.2.3	การจัดเก็บข้อมูลในโครงสร้างข้อมูล ADT.....	26
รูปที่ 3.3.1	การจัดเก็บข้อมูลของเมตริกซ์.....	27
รูปที่ 3.4.1	โครงสร้างการทำงานของโปรแกรมหลัก.....	28
รูปที่ 4.1.1	ปัญหาแผ่นบางรับแรงดึงและแบบจำลองการวิเคราะห์.....	38
รูปที่ 4.1.2	โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป.....	39
รูปที่ 4.1.3	การกระจายความคลาดเคลื่อนและหน่วยแรงในทิศทาง x ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป.....	40
รูปที่ 4.1.4	การกระจายหน่วยแรงในทิศทาง y และหน่วยแรงเฉือน ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป.....	41
รูปที่ 4.1.5	ค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป.....	42
รูปที่ 4.1.6	ค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป.....	43
รูปที่ 4.1.7	ค่าหน่วยแรงเฉือน ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป.....	44

รูปที่ 4.1.8 การเปรียบเทียบ โค้งข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง ในโค้งข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ.....	45
รูปที่ 4.1.9 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง ในโค้งข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ.....	46
รูปที่ 4.1.10 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง ในโค้งข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ.....	47
รูปที่ 4.1.11 ค่าหน่วยแรงเฉือน ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง ในโค้งข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ.....	48
รูปที่ 4.2.1 ปัญหาแผ่นวงกลมบางรับแรงกระทำเป็นจุดและแบบจำลองการวิเคราะห์.....	50
รูปที่ 4.2.2 โค้งข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาแผ่นวงกลมบาง โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยึด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป.....	51
รูปที่ 4.2.3 การกระจายความคลาดเคลื่อนและหน่วยแรงในทิศทาง x ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยึด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป.....	52
รูปที่ 4.2.4 การกระจายหน่วยแรงในทิศทาง y และหน่วยแรงเฉือน ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยึด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป.....	53
รูปที่ 4.2.5 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยึด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป.....	54
รูปที่ 4.2.6 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยึด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป.....	55
รูปที่ 4.2.7 ค่าหน่วยแรงเฉือน ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยึด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป.....	56
รูปที่ 4.2.8 การเปรียบเทียบ โค้งข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาแผ่นวงกลมบาง ในโค้งข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ.....	57
รูปที่ 4.2.9 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง ในโค้งข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ.....	58

รูปที่ 4.2.10 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ.....	59
รูปที่ 4.2.11 ค่าหน่วยแรงเฉือน ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ.....	60
รูปที่ 4.2.12 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนว AC ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ.....	61
รูปที่ 4.2.13 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนว AC ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ.....	62
รูปที่ 4.2.14 ค่าหน่วยแรงเฉือน ตามแนว AC ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ.....	63
รูปที่ 4.3.1 ปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระและแบบจำลองการวิเคราะห์.....	65
รูปที่ 4.3.2 ผลการวิเคราะห์ของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ ในโครงข่ายที่ 1 โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยึด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป.....	66
รูปที่ 4.3.3 ค่าหน่วยแรงบริเวณขอบล่างของคาน ในโครงข่ายที่ 1 โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยึด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป.....	67
รูปที่ 4.3.4 การเปรียบเทียบ โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ.....	68
รูปที่ 4.3.5 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนวขอบล่างของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ.....	69
รูปที่ 4.3.6 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนวขอบล่างของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ.....	70
รูปที่ 4.3.7 ค่าหน่วยแรงเฉือน ตามแนวขอบล่างของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ.....	71
รูปที่ 4.4.1 ปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิดรับแรงกระทำเป็นจุดและแบบจำลองการวิเคราะห์.....	73
รูปที่ 4.4.2 โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิด โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยึด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป.....	74
รูปที่ 4.4.3 ผลการวิเคราะห์ของปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิด ในโครงข่ายที่ 4 โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยึด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป.....	75

รูปที่ 4.4.4	ค่าหน่วยแรง ตามแนวขอบบนของคานช่วงเดียวมีช่องเปิด ในโครงข่ายที่ 4 โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยึด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างขึ้นส่วนรอบถัดไป.....	76
รูปที่ 4.4.5	การเปรียบเทียบ โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิด ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ.....	77
รูปที่ 4.4.6	ค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนวขอบบนของปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิด ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ.....	78
รูปที่ 4.4.7	ค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนวขอบบนของปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิด ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ.....	79
รูปที่ 4.4.8	ค่าหน่วยแรงเฉือน ตามแนวขอบบนของปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิด ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ.....	80
รูปที่ ผ.ก.1	ตัวอย่างเพิ่มนำเข้าข้อมูล.....	88

สารบัญตาราง

หน้า

ตารางที่ 4.1.1 เปรียบเทียบผลจากงานวิจัยต่างๆ ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง.....	49
ตารางที่ 4.2.1 เปรียบเทียบผลจากงานวิจัยต่างๆ ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง.....	64
ตารางที่ 4.3.1 เปรียบเทียบผลจากงานวิจัยต่างๆ ของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ.....	72
ตารางที่ 4.4.1 เปรียบเทียบผลจากงานวิจัยต่างๆ ของปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิด.....	81



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความนำ

การวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นการวิเคราะห์โดยสมมติว่าปัญหาที่ต่อเนื่องกัน มีลักษณะเป็นชิ้นส่วนย่อย ๆ ไม่ต่อเนื่องกัน (discretization) และใช้สมการคณิตศาสตร์จำลองพฤติกรรมของ ชิ้นส่วนเหล่านั้น รวมทั้งการวิเคราะห์พฤติกรรมของชิ้นส่วนทั้งหมดร่วมกัน เราสามารถหาค่าประมาณของผล เฉลยของปัญหาต่อเนื่องได้ โดยความแม่นยำของผลเฉลยนั้นขึ้นอยู่กับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ลักษณะของ ชิ้นส่วนที่นำมาจำลองปัญหา และขนาดของชิ้นส่วนย่อยๆ ที่ประกอบกัน ยิ่งแบบจำลองคณิตศาสตร์มีความ สอดคล้องกับพฤติกรรมของชิ้นส่วนมากเท่าไร ความแม่นยำในการเป็นตัวแทนของชิ้นส่วนก็จะดีมากขึ้นเท่านั้น ในขณะที่การเพิ่มจำนวนชิ้นส่วนซึ่งเป็นการลดขนาดของช่วงการประมาณ ก็จะลดความคลาดเคลื่อนที่เกิดจาก การประมาณปัญหาต่อเนื่องด้วยชิ้นส่วน

ในการเพิ่มความแม่นยำของผลเฉลย ทำได้โดยการเพิ่มภาวะเชิงซ้อนของสมการคณิตศาสตร์ เพื่อให้ สอดคล้องกับพฤติกรรมมากขึ้น หรือโดยการเพิ่มจำนวนของชิ้นส่วน จากทั้ง 2 วิธีนี้ การเพิ่มภาวะเชิงซ้อนของ สมการคณิตศาสตร์นั้นทำได้ยาก ทั้งในด้านการวิเคราะห์หาสมการคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม และการนำมาเขียน รหัสคำนวณ ดังนั้นจึงควรใช้สมการคณิตศาสตร์ที่สลับซับซ้อนเฉพาะในปัญหาที่ต้องการความแม่นยำของคำตอบ มาก ๆ เท่านั้น ในโครงการทั่ว ๆ ไปนิยมใช้สมการคณิตศาสตร์ที่ไม่ซับซ้อนมากนัก แต่ใช้ชิ้นส่วนจำนวนมากแทน

ในปัญหาหนึ่ง ๆ จะมีค่าของผลเฉลยแตกต่างกันไปตามโดเมน (domain) ของปัญหา ในบริเวณใดที่มี อัตราการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยต่อพื้นที่มาก ก็จะมีผลคลาดเคลื่อนของผลเฉลยอยู่มากเช่นกัน ดังนั้นใน การที่จะวิเคราะห์ปัญหาให้เกิดประสิทธิภาพที่สุด จำเป็นต้องกระจายความคลาดเคลื่อนเหล่านี้ ให้มีค่าใกล้เคียง กันตลอดทั้งโดเมนของปัญหาซึ่งทำได้โดยการใช้ชิ้นส่วนขนาดเหมาะสมกับพื้นที่ของปัญหา กล่าวคือใช้ชิ้นส่วน ขนาดเล็กในพื้นที่ที่มีความคลาดเคลื่อนมากและใช้ชิ้นส่วนขนาดใหญ่ในบริเวณที่มีการคลาดเคลื่อนน้อย การที่ จะสร้างให้ได้ดังที่กล่าวมานี้ จำเป็นต้องมีการเตรียมข้อมูลและทำการคำนวณหลายรอบ ซึ่งต้องใช้แรงงานและ เวลา

กระบวนการสร้างและปรับขนาดชิ้นส่วนอัตโนมัติ จึงเข้ามามีบทบาทในงานวิเคราะห์ปัญหาทางไฟไนต์ เอลิเมนต์ที่รูปร่างของปัญหาที่มีความซับซ้อนและมีขนาดใหญ่ ซึ่งจะทำให้การประมาณค่าคลาดเคลื่อนของผลเฉลย และทำการเพิ่มชิ้นส่วนในบริเวณที่มีความคลาดเคลื่อนมากให้โดยอัตโนมัติ ทำให้ลดปริมาณการเตรียมข้อมูล ลงได้มาก อย่างไรก็ตามกระบวนการสร้างชิ้นส่วนอัตโนมัติเหล่านั้นอาจทำให้ผลเฉลยของปัญหาที่ต้องการ วิเคราะห์เกิดความคลาดเคลื่อนจากที่ควรจะเป็นเมื่อพิจารณาจากระดับขั้นความเสรี (degree of freedom) ที่ เท่ากัน ซึ่งจะมีผลต่อการคำนวณในรอบถัดไปหลังจากผ่านเข้าสู่กระบวนการปรับขนาดชิ้นส่วน ทำให้ผลเฉลยที่

ได้เข้าสู่ค่าแม่นยำตรงได้ช้ามาก สาเหตุสำคัญของปัญหานี้คือ ชั้นส่วนที่ได้จากกระบวนการสร้างชั้นส่วนอัตโนมัติมีรูปร่างบิดเบี้ยว หรือไม่มีความต่อเนื่องระหว่างชั้นส่วนที่ติดกัน ทำให้ระบบสมการของปัญหาอยู่ในภาวะไม่ปกติ (ill-conditioned)

ลักษณะบิดเบี้ยวของชั้นส่วนที่เกิดขึ้นในระหว่างการสร้างชั้นส่วนของกระบวนการปรับขนาดชั้นส่วนโดยอัตโนมัติ นั้น อาจมีสาเหตุมาจากปัจจัยดังต่อไปนี้

- 1) ลักษณะของรูปร่างหรือสัณฐานของโดเมน เช่น บริเวณที่มีมุมแหลม พื้นที่ที่มีขนาดเล็ก รูปร่างขนาดเล็ก และบริเวณที่มีส่วนโค้งมาก
- 2) ขนาดของชั้นส่วน เพราะโดยปกติแล้วโครงข่ายโดเมนของปัญหาที่มีลักษณะหยาบมาก ๆ แต่ละชั้นส่วนจะมีขนาดใหญ่ มีผลให้ลักษณะรูปร่างของชั้นส่วนเกิดการบิดเบี้ยวได้
- 3) ความผิดพลาดที่เกิดจากการออกแบบขั้นตอนวิธี (algorithm) ในกระบวนการสร้างและปรับขนาดชั้นส่วน

จากสาเหตุดังกล่าวข้างต้นพบว่า สัณฐานของโดเมน เป็นสาเหตุที่ไม่อาจหลีกเลี่ยงได้เพราะขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์ เช่นเดียวกับสาเหตุที่สอง แต่ขนาดของชั้นส่วนที่หยาบนั้นสามารถปรับแก้ได้เมื่อเข้าสู่กระบวนการปรับขนาดชั้นส่วน ดังนั้นความผิดพลาดที่เกิดจากการออกแบบขั้นตอนวิธีจึงเป็นสาเหตุเดียวที่สามารถป้องกันไม่ให้เกิดการบิดเบี้ยวของรูปร่างได้

อย่างไรก็ตาม การคิดหากระบวนการสร้างชั้นส่วนอัตโนมัติเพื่อให้ได้โครงข่ายชั้นส่วนที่ประกอบกันทั้งระบบแล้วมีขนาดและรูปร่างที่ดีที่สุด โดยไม่ต้องเพิ่มกระบวนการบางอย่างภายหลังการสร้างชั้นส่วนเพื่อปรับปรุงคุณภาพโดยรวมของชั้นส่วนทั้งโดเมนนั้นก็ยังคงเป็นสิ่งที่ยากอยู่ดี กระบวนการปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายชั้นส่วนจึงเข้ามามีบทบาทอย่างมากหลังจากเสร็จสิ้นกระบวนการสร้างชั้นส่วน เพราะการจัดวางตำแหน่งของจุดต่อที่เหมาะสมจะทำให้ได้ชั้นส่วนที่มีรูปร่างดี มีความต่อเนื่องทั่วทั้งโครงข่าย การประมาณค่าความคลาดเคลื่อนจากการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีความถูกต้องมากขึ้น และมีการกระจายความคลาดเคลื่อนออกไปเท่า ๆ กันตลอดทั้งโดเมนของปัญหา ทำให้ได้ผลเฉลยที่ดีที่สุดเมื่อเทียบกับโครงข่ายที่มีระดับชั้นความละเอียดเท่ากัน

1.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การปรับขนาดชั้นส่วนในการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น มีขั้นตอนที่สำคัญคือการหาความคลาดเคลื่อนของผลเฉลย เพื่อลดขนาดของชั้นส่วนในบริเวณที่มีความคลาดเคลื่อนมาก วิธีดั้งเดิมซึ่งสิ้นเปลือง จะทำโดยการเปรียบเทียบผลเฉลยจากการวิเคราะห์ซ้ำเมื่อมีการลดขนาดชั้นส่วนตลอดทั้งโดเมนของปัญหา แล้วจึงปรับขนาดของชั้นส่วนตามค่าความคลาดเคลื่อนที่คำนวณได้จากการเปรียบเทียบผลเฉลยดังกล่าว

ในช่วงปี 1975 - 1986 Babuska [1,2] และคณะ ได้คิดค้นและพัฒนาการประมาณค่าคลาดเคลื่อน โดยวิธีเศษตกค้างของแรง ซึ่งเป็นการประมาณค่าคลาดเคลื่อนจากการอินทิเกรตค่ากำลังสองของเศษตกค้างของหน่วยแรงในสมการอนุพันธ์ และกำลังสองของผลต่างของหน่วยแรงระหว่างชิ้นส่วน วิธีของ Babuska นี้ ต้องใช้คณิตศาสตร์ที่ยุ้งยากในการพิสูจน์และคำนวณหาค่าคลาดเคลื่อน จึงไม่สะดวกในการใช้งาน

ต่อมาในปี 1987 Zienkiewicz [3,4] ซึ่งเป็นหนึ่งในคณะผู้ร่วมงานของ Babuska ได้พัฒนาวิธีการประมาณค่าหน่วยแรงที่ดีขึ้นจากหน่วยแรงที่ได้จากไฟไนต์เอลิเมนต์ และประมาณค่าคลาดเคลื่อนจากการเปรียบเทียบหน่วยแรงทั้งสอง หลักการของวิธีการนี้คือ ค่าหน่วยแรงที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะมีค่าไม่ต่อเนื่องกันระหว่างชิ้นส่วน ดังนั้นถ้ามีการปรับให้หน่วยแรงมีความต่อเนื่องกันก็จะได้คำตอบที่ดีขึ้น การปรับค่าใช้ระเบียบวิธีกำลังสองน้อยสุด (least square) วิธีการนี้ใช้หลักการง่าย ๆ และมีการคำนวณที่ไม่ยุ่งยากนัก เหมาะสำหรับเขียนรหัสคำนวณ อย่างไรก็ตามค่าประมาณของหน่วยแรงที่ได้จากวิธีนี้มีความถูกต้องน้อย และมีการลู่เข้าสู่คำตอบช้าโดยเฉพาะในแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่มีระดับชั้นพหุนามสูง

ปี 1990 Zienkiewicz และ คณะ [5,6,7,8] ยังคงร่วมกันพัฒนาการประมาณค่าหน่วยแรงให้มีความถูกต้องมากขึ้นและมีอัตราการลู่เข้าสู่คำตอบเร็วขึ้น โดยใช้หลักการของจุดลู่เข้ายิ่งยวด (superconvergent point) หรือจุดเกาส์ (Gauss point) ในแต่ละชิ้นส่วน ซึ่งมีค่าหน่วยแรงที่มีความแม่นยำกว่าที่จุดอื่น ๆ และมีอัตราการลู่เข้าสู่คำตอบสูงกว่าระดับชั้นของพหุนามในสมการคณิตศาสตร์ 1 ระดับ (O(h^{p+1})) โดยวิธีนี้การค่าประมาณหน่วยแรง ณ จุดใด ๆ ก็ได้จากการประมาณจากหน่วยแรง ณ จุดเกาส์รอบ ๆ จุดที่ต้องการประมาณนั้นโดยระเบียบวิธีกำลังสองน้อยสุด วิธีนี้มีหลักการที่สามารถเข้าใจง่ายและมีความแม่นยำมากพอสมควร ประกอบกับใช้การคำนวณไม่มากนักจึงเป็นที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายจนกระทั่งถึงปัจจุบัน

นอกจากการประมาณค่าความคลาดเคลื่อน ยังมีขั้นตอนที่สำคัญอีกขั้นตอนหนึ่งในกระบวนการปรับขนาดของชิ้นส่วนคือการสร้างชิ้นส่วนโดยอัตโนมัติ (automatic mesh generation) กระบวนการนี้สามารถแบ่งออกเป็นประเภทใหญ่ ๆ ได้ 2 ประเภทคือ ประเภทแรกมุ่งที่จะลดการเตรียมข้อมูลโดยมนุษย์แต่เพียงอย่างเดียว ไม่ได้ต้องการเพื่อใช้ในกระบวนการปรับขนาดชิ้นส่วนแต่อย่างใด การสร้างชิ้นส่วนจึงนิยมใช้วิธีแปลงรูปโดเมนของปัญหาให้มาอยู่ในรูปเรขาคณิตอย่างง่าย [9] จากนั้นสร้างชิ้นส่วนในรูปอย่างง่ายนี้ แล้วจึงแปลงกลับไปอยู่ในสภาพเริ่มต้น วิธีนี้มีข้อดีคือ สามารถสร้างชิ้นส่วนที่มีรูปร่างสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมก็ได้ และได้ชิ้นส่วนที่มีรูปร่างค่อนข้างดีมีขนาดต่อเนื่องกัน แต่มีข้อเสียคือใช้ได้กับโดเมนที่มีรูปร่างไม่ซับซ้อนมากนัก และไม่สามารถสร้างชิ้นส่วนให้มีขนาดแตกต่างกันไปในแต่ละบริเวณตามที่กำหนดให้ จึงไม่เหมาะสมอย่างยิ่งที่จะนำมาใช้ในกระบวนการปรับขนาดชิ้นส่วน

สำหรับประเภทที่ 2 เป็นการสร้างชิ้นส่วนโดยการเพิ่มชิ้นส่วนลงในโดเมนโดยตรง จึงสามารถกระจายขนาดของชิ้นส่วนให้แตกต่างกันออกไปในแต่ละพื้นที่ได้ วิธีการนี้เรียกว่าการสร้างฟรอนท์ที่คืบหน้า (advancing front technique) [6,10,11,12] เป็นการสร้างชิ้นส่วนโดยการเชื่อมขอบเขตของปัญหาทั้งหมดด้วยเส้น ๆ หนึ่งเรียกว่าฟรอนท์ (front) จากนั้นสร้างชิ้นส่วนจากขอบเขตเข้ามาพร้อมทั้งปรับขนาดของฟรอนท์ใหม่ โดยการ

กันขึ้นส่วนที่เพิ่งสร้างให้ออกไปนอกพرونท์ ทำดังนี้ซ้ำไปจนกระทั่งหมดก็จะได้ขึ้นส่วนเต็มทั้งพื้นที่ การกำหนดขนาดของขึ้นส่วนในวิธีนี้ทำได้ในขณะที่กำลังสร้างขึ้นส่วนนั้น ๆ โดยการตรวจสอบจากขนาดที่ได้กำหนดไว้ก่อนในบริเวณนั้น วิธีนี้มีข้อดีคือ เนื่องจากขึ้นส่วนเริ่มจากขอบเขตและมีการสร้างออกไปทีละขึ้นส่วนจึงมั่นใจได้ว่าขึ้นส่วนจะไม่ออกนอกขอบเขตหรือซ้อนทับกัน นอกจากนี้ยังสามารถพัฒนาต่อไปเพื่อสร้างขึ้นส่วนชนิดสี่เหลี่ยมได้ โดยการกำหนดจำนวนขึ้นส่วนที่ขอบเขตและรูปร่างทางเรขาคณิตของขึ้นส่วนอย่างเคร่งครัด

การตัดทอนเป็นรูปสามเหลี่ยมเดอลอน (delaunay triangulation) [13,14,15 ,16] เป็นวิธีเก่าแก่ที่มีจุดประสงค์เพื่อเชื่อมจุดต่อต่าง ๆ เข้าด้วยกันเป็นรูปสามเหลี่ยมจำนวนมากที่ไม่ซ้อนทับกันเท่านั้น จึงไม่สามารถรับประกันได้ว่าขึ้นส่วนที่สร้างขึ้นจะไม่ออกนอกขอบเขตของปัญหา ในระยะหลังมีผู้พัฒนาวิธีการต่าง ๆ ขึ้นมากมายจนกระทั่งสามารถกำหนดได้ทำให้สร้างขึ้นส่วนขึ้นเฉพาะภายในขอบเขตเท่านั้น การกำหนดขนาดของขึ้นส่วนขึ้นอยู่กับจุดที่สร้างขึ้นโดยกำหนดระยะห่างของจุดตามความต้องการในแต่ละพื้นที่นั้น วิธีนี้มีข้อดีคือ ตำแหน่ง ขนาด และรูปร่างของขึ้นส่วนขึ้นอยู่กับวิธีการสร้างจุดที่แยกออกมาต่างหาก ในระยะหลังสามารถพัฒนาให้สร้างขึ้นส่วนสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างดีมากที่สุดตลอดทั้งโดเมน มีการกระจายขนาดของขึ้นส่วนตามที่ต้องการและใช้เวลาในการสร้างน้อย ข้อเสียของวิธีนี้คือไม่สามารถสร้างขึ้นส่วนสี่เหลี่ยมได้โดยตรง ต้องใช้การแปลงรูปจากขึ้นส่วนสามเหลี่ยมอีกทีหนึ่ง [17]

โครงข่ายขึ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด [18] Allman ได้พัฒนาโดยการเปลี่ยนขึ้นส่วนสามเหลี่ยมที่มีขอบโค้ง ให้เป็นขึ้นส่วนสามเหลี่ยมขอบตรงที่มีการหมุน (ω) เพิ่มขึ้นที่จุดยอด โดยที่จุดยอดของขึ้นส่วนสามเหลี่ยมแต่ละจุดยอดจะมีระดับขั้นความเสรี (Degree of Freedom) เท่ากับ 3 ซึ่งประกอบด้วย การกระจัดในแนวแกน x การกระจัดในแนวแกน y และการหมุนในแนวแกน z สำหรับการกระจัดรวม (Displacement Field) ของขึ้นส่วนนั้นหามาได้จากสมมติสมการการกระจัดในแนวตั้งฉากกับเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอดนั้นเป็นสมการกำลังสอง และสมการการกระจัดในแนวเส้นสัมผัสกับเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอดนั้นเป็นสมการเส้นตรง แล้วใช้เงื่อนไขขอบเขตของแต่ละด้านของขึ้นส่วนแก้หาค่าคงตัวต่างๆ ซึ่งจะทำให้ได้สมการการกระจัดในแนวตั้งฉากและแนวเส้นสัมผัสกับเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอด จากนั้นทำการรวมให้เป็นสมการการกระจัดรวมของขึ้นส่วน

จากขั้นตอนต่าง ๆ ทั้งวิธีหาความคลาดเคลื่อนจากผลเฉลย และการสร้างขึ้นส่วนอัตโนมัติเพื่อใช้ในกระบวนการปรับขนาดขึ้นส่วน เทอดเกียรติ [19] ได้พัฒนาโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดขึ้นส่วนอัตโนมัติ โดยเลือกโครงข่ายสามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่ (Constant Strain Triangle : CST) และใช้วิธีการประมาณค่าคลาดเคลื่อน จากการเปรียบเทียบผลที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับค่าผลเฉลยที่ได้จากวิธีการพื้นตัวเป็นหย่อม (patch recovery) [5,6,7,8] ใช้วิธีการตัดทอนเป็นรูปสามเหลี่ยมเดอลอนโดยวิธีพرونท์คืบหน้าตามแนวทางของ Karamete , Tokdemir , Ger [20] ใช้วิธีการสร้างจุดตามแนวทางของ Weatherill . Hassan [21] และปรับขนาดขึ้นส่วนโดยการเพิ่มจุดลงในบริเวณพื้นที่ที่มีความคลาดเคลื่อนมาก ซึ่งสามารถวิเคราะห์ผลได้ดีในระดับหนึ่ง แต่ต้องใช้จำนวนรอบในการปรับขนาดขึ้นส่วนมาก ทั้งนี้เพราะว่าหากความคลาดเคลื่อนที่คำนวณได้จากรอบปัจจุบันมีค่ามากกว่าค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมให้เกินกว่า 2 เท่า จะ

กำหนดเป้าหมายของความคลาดเคลื่อนในรอบถัดไปมีขนาดเท่ากับค่าเฉลี่ยของค่าคลาดเคลื่อนในปัจจุบันและค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับ เพื่อให้หลีกเลี่ยงการเพิ่มจุดต่อในบริเวณที่ไม่จำเป็น ทำให้อัตราการลู่เข้าของผลเฉลยค่อนข้างช้า โดย เทอดเกียรติ ได้ยกตัวอย่างการวิเคราะห์ด้วยการปรับขนาดชิ้นส่วนเข้าสู่ค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับโดยตรง ผลการวิเคราะห์ที่ได้มีการลู่เข้าของผลเฉลยที่เร็วขึ้น แต่ในโครงข่ายสุดท้ายจะมีการกระจายของชิ้นส่วนที่ไม่ค่อยต่อเนื่องมากนัก ทำให้การคำนวณค่าหน่วยแรงและการประมาณค่าความคลาดเคลื่อนที่จุดต่อในบริเวณที่เกิดความไม่ต่อเนื่องยังคงมีความคลาดเคลื่อนสูงกว่าบริเวณข้างเคียง

รัฐพล [22] ได้ทำการปรับปรุงโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดชิ้นส่วนอัตโนมัติ ของ เทอดเกียรติ เพื่อลดจำนวนรอบของการปรับขนาดชิ้นส่วนลง โดยโครงข่ายที่ใช้ยังคงเป็นโครงข่ายสามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่ (CST) ใช้จำนวนจุดต่อและชิ้นส่วนที่เหมาะสมภายใต้ความคลาดเคลื่อนที่กำหนด มุ่งพัฒนาโดยการปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนภายในโครงข่ายให้มีรูปร่างดีและมีขนาดต่อเนื่องกัน ซึ่งใช้วิธีการผ่อนปรนโครงข่าย (mesh relaxation) ร่วมกับ การปรับเรียบมุม (angle-based smoothing algorithm) ซึ่งทำให้โครงข่ายที่ได้มีรูปร่างดีขึ้นและมีขนาดต่อเนื่องกันมากขึ้น ซึ่งจะทำการประมาณค่าความคลาดเคลื่อนจากจุดเกาส์มีความถูกต้องมากขึ้น แต่เวลาที่ใช้ในการคำนวณยังคงใกล้เคียงกับวิธีของเทอดเกียรติ

สุรชาญ [23] ได้ทำการปรับปรุงโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดชิ้นส่วนอัตโนมัติ ของ เทอดเกียรติ เพื่อลดเวลาของการปรับขนาดชิ้นส่วนลงโดยใช้การเปลี่ยนวิธีการสร้างชิ้นส่วน โดยโครงข่ายที่ใช้ยังคงเป็นโครงข่ายสามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่ (CST) สำหรับวิธีการสร้างสามเหลี่ยมของเทอดเกียรตินั้นใช้วิธีการสร้างชิ้นส่วนจากวิธีการตัดทอนเป็นรูปสามเหลี่ยมเดอลอนโดยวิธีฟรอนท์ที่คืบหน้าเพียงอย่างเดียว โดยในการสร้างชิ้นส่วนแต่ละรอบจะต้องลบชิ้นส่วนที่มีอยู่เดิมในรอบก่อนหน้าออกทั้งหมด ทำให้ต้องใช้เวลามากในการสร้างชิ้นส่วนแต่ละรอบ สุรชาญจึงนำวิธีการสร้างชิ้นส่วนจากที่ใช้วิธีการตัดทอนเป็นรูปสามเหลี่ยมเดอลอนโดยวิธีฟรอนท์ที่คืบหน้าให้ทำงานร่วมกับการสร้างชิ้นส่วนโดยวิธีแลกเปลี่ยน (swap techniques) ซึ่งในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไปจะทำโดยการเพิ่มจุดต่อเข้าไปในโครงข่ายที่มีอยู่ แล้วทำการเชื่อมต่อด้านขึ้นใหม่ระหว่างจุดที่เพิ่มเข้าไปกับจุดของสามเหลี่ยมเดอนนั้น จากนั้นจึงใช้คุณสมบัติของมุมในสามเหลี่ยมและคุณสมบัติของสามเหลี่ยมเดอลอน ทำการตรวจสอบสามเหลี่ยมที่สร้างขึ้นใหม่รวมทั้งสามเหลี่ยมเดิมที่อยู่ติดกัน ซึ่งหากมีรูปร่างที่ไม่สอดคล้องกับคุณสมบัติที่ตั้งไว้ก็จะทำการแลกเปลี่ยนด้าน เพื่อให้ได้สามเหลี่ยมที่มีคุณสมบัติตรงกับที่ตั้งไว้ ซึ่งทำให้เวลาในการสร้างปรับขนาดชิ้นส่วนในแต่ละรอบมีสัดส่วนลดลงเล็กน้อยเมื่อจำนวนชิ้นส่วนมากขึ้น แต่จำนวนรอบของการปรับขนาดชิ้นส่วนยังคงใกล้เคียงกับวิธีของเทอดเกียรติ ซึ่งยังมากกว่าของรัฐพล

ชัยณรงค์ [24] ได้ทำการปรับปรุงโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดชิ้นส่วนอัตโนมัติโดยใช้วิธีการปรับเรียบเชิงมุม ของ รัฐพล เพื่อลดเวลาของการปรับขนาดชิ้นส่วนลง โดยใช้การเปลี่ยนพฤติกรรมของชิ้นส่วนที่ประกอบกันเป็นโครงข่ายให้มีพฤติกรรมที่ยืดหยุ่นมากขึ้น โดยเปลี่ยนชนิดของชิ้นส่วนจากสามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่ (CST) เป็นชนิดความเครียดเชิงเส้น (Linear Strain Triangle : LST) ใช้การประมาณค่าคลาดเคลื่อนจากการเปรียบเทียบผลที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ กับค่าประมาณของผลเฉลยที่ได้จากวิธีการพื้นผิวเป็นหย่อม สร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมด้วยวิธีการตัดทอนเป็นรูปสามเหลี่ยมเดอลอนโดยวิธีฟรอนท์

คืบหน้า ใช้การปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายโดยวิธีการปรับเรียบเชิงมุม และปรับขนาดขึ้นส่วนโดยการเพิ่มจุดลง ในบริเวณพื้นที่ที่มีความคลาดเคลื่อนสูง โดยคำนวณความหนาแน่นของแต่ละจุดจากความคลาดเคลื่อน โดยประมาณ ทำให้ผลที่ได้จากการวิเคราะห์ใช้เวลาในการคำนวณน้อยลง แต่โครงข่ายที่ได้ยังมีรูปร่างไม่ดีนัก เนื่องจากค่าคลาดเคลื่อนบางบริเวณที่สูงกว่าบริเวณอื่น แต่สัดส่วนของพื้นที่ที่เกิดค่าคลาดเคลื่อนไม่เหมาะสม ทำให้สร้างจุดต่อในบริเวณนี้ได้ไม่ดี เมื่อถึงขั้นตอนการสร้างขึ้นส่วนสามเหลี่ยมจึงทำให้ได้ขึ้นส่วนสามเหลี่ยมที่ไม่ค่อยต่อเนื่องมากนัก

ในงานวิจัยนี้จึงมุ่งพัฒนาโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดขึ้นส่วนอัตโนมัติ ของ ชัยณรงค์ ให้มีประสิทธิภาพและให้มีการกระจายของค่าความคลาดเคลื่อนอย่างสม่ำเสมอมากยิ่งขึ้น พร้อมทั้งใช้เวลาในการคำนวณที่น้อยลง โดยจะทำการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการคำนวณการสร้างขึ้นส่วนรอบถัดไป เพื่อให้โครงข่ายมีความต่อเนื่องมากยิ่งขึ้น เป็นผลทำให้โครงข่ายมีประสิทธิภาพเพิ่มขึ้นและโปรแกรมใช้จำนวนรอบในการคำนวณที่น้อยลง มีผลช่วยลดระยะเวลาในส่วนของการคำนวณ พร้อมทั้งทำการปรับปรุงชนิดของขึ้นส่วนที่นำมาใช้ในการจำลองปัญหา จากขึ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น (LST) เป็นขึ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด [18] ซึ่งจะทำให้จำนวนขึ้นส่วนสามเหลี่ยมแต่ละขึ้นส่วนมีจำนวนจุดต่อลดลง จาก 6 จุดต่อเป็น 3จุดต่อ ทำให้ขึ้นส่วนมีระดับขั้นความเสรี (Degree of Freedom) ลดลงจาก 12 เหลือ 9 ทำให้ในปัญหาที่มีจำนวนขึ้นส่วนเท่ากัน โปรแกรมจะใช้เวลาในการคำนวณลดลง อันเป็นเป้าหมายที่สำคัญของโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดขึ้นส่วนอัตโนมัติ

1.3 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

- 1.ศึกษาวิธีการพัฒนาคุณภาพของโครงข่ายขึ้นส่วนให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น
- 2.ศึกษาวิธีการประยุกต์ใช้ขึ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด
- 3.พัฒนาโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดขึ้นส่วนอัตโนมัติ โดยใช้ขึ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด

1.4 ขอบเขตการศึกษา

ศึกษาโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดขึ้นส่วนอัตโนมัติ [24] โดยเปลี่ยนชนิดของขึ้นส่วนที่นำมาใช้ในการจำลองปัญหาซึ่งเดิมเป็นโครงข่ายขึ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น (Linear Strain Triangle : LST) ที่สร้างจากวิธีการตัดทอนเป็นรูปสามเหลี่ยมเดอลอนร่วมกับวิธีพرونที่คืบหน้า โดยเปลี่ยนขึ้นส่วนเป็นขึ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด [18] ซึ่งในแต่ละขึ้นส่วนจะมีระดับขั้นความเสรี (Degree of Freedom) ลดลงจาก 12 เหลือ 9 พร้อมทั้งทำการพัฒนาคุณภาพของโครงข่าย โดยทำการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างขึ้นส่วนรอบถัดไป เพื่อให้โครงข่ายมีความต่อเนื่องมากยิ่งขึ้น

ในขั้นตอนการพัฒนาโปรแกรม จะรับข้อมูลจุดต่อและชิ้นส่วนทั้งหมดที่ได้จากกระบวนการสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมและปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนภายในโครงข่ายแล้วสู่กระบวนการวิเคราะห์ ซึ่งในกระบวนการคำนวณ จะต้องทำการเปลี่ยนค่าฟังก์ชันฐานของชิ้นส่วน ทั้งในขั้นตอนการประมาณค่าคลาดเคลื่อน และในขั้นตอนการวิเคราะห์ โดยในขั้นตอนการประมาณค่าคลาดเคลื่อนจะเปลี่ยนจากการประมาณค่าคลาดเคลื่อนที่แต่ละชิ้นส่วน เป็นการประมาณค่าคลาดเคลื่อนที่แต่ละจุดต่อ ทั้งนี้เนื่องจากเมื่อได้ทำการเปลี่ยนชนิดของชิ้นส่วนเป็นชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด ทำให้จำนวนของชิ้นส่วนภายในโครงข่ายมีจำนวนมากกว่าจำนวนจุดต่อในโครงข่ายมาก ดังนั้นเมื่อใช้การประมาณค่าคลาดเคลื่อนในแต่ละจุดต่อแทนจะช่วยลดเวลาในการคำนวณลงได้

ในขั้นตอนการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป ทำโดยเมื่อตรวจสอบความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์มีค่าเกินกว่าที่ยอมให้ ก็ทำการปรับขนาดของชิ้นส่วนใหม่โดยนำข้อมูลเฉพาะที่ขอบของรอบก่อนหน้ามาสร้างเป็นขอบของปัญหาในรอบถัดไปเก็บไว้ในคลังคลังของข้อมูลขอบ ก็จะได้ข้อมูลขอบของปัญหาในรอบใหม่สำหรับวิเคราะห์ต่อไป



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 2

แนวทางและทฤษฎีที่ใช้ในการวิจัย

2.1 ความนำ

กระบวนการปรับขนาดขึ้นส่วนอัตโนมัติเริ่มจากข้อมูลจุดต่อบริเวณขอบของปัญหา ซึ่งสามารถแบ่งเป็น 6 ขั้นตอนหลักหลังจากได้ข้อมูลที่ขอบ คือ

1. ขั้นตอนการสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยม
2. ขั้นตอนการปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนภายในโครงข่าย
3. ขั้นตอนการวิเคราะห์หาผลเฉลยโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
4. ขั้นตอนการตรวจสอบค่าคลาดเคลื่อน
5. ขั้นตอนการคำนวณขนาดชิ้นส่วนใหม่ และ
6. ขั้นตอนการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่นำไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป

เนื่องจากผลเฉลยและค่าคลาดเคลื่อนที่ใช้ในการปรับขนาดขึ้นส่วนนั้น จะเป็นผลโดยตรงจากคุณภาพของโครงข่าย โดยคุณภาพของโครงข่ายขึ้นอยู่กับพฤติกรรมของชิ้นส่วนที่ใช้ว่าใกล้เคียงกับที่เกิดขึ้นจริงของปัญหาหรือไม่ ความต่อเนื่องกันของโครงข่าย และ รูปร่างชิ้นส่วน ซึ่งถ้าโครงข่ายมีคุณภาพดีแล้ว ย่อมให้ผลเฉลยและค่าคลาดเคลื่อนที่ค่อนข้างแม่นยำ ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงมุ่งเน้นไปยังการปรับปรุงคุณภาพของโครงข่าย โดยการทำให้โครงข่ายมีความต่อเนื่องมากยิ่งขึ้น ด้วยการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่นำไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนของปัญหาในการคำนวณรอบถัดไป เพื่อให้โครงข่ายมีความต่อเนื่องมากยิ่งขึ้น และเพื่อให้เวลาที่ใช้ในการคำนวณลดลง จึงเปลี่ยนชิ้นส่วนที่นำมาใช้ในการจำลองปัญหาให้มีความรวดเร็วในการคำนวณยิ่งขึ้น โดยการเปลี่ยนชิ้นส่วนที่ใช้จากสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น เป็นชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด [18] โดยมีโครงสร้างการทำงานดังแสดงในรูปที่ 2.1.1 จากนั้นเราจะได้กล่าวถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องโดยละเอียด

2.2 การประมาณค่าคลาดเคลื่อน

โดยปกติการคำนวณความคลาดเคลื่อนของวิธีการใด ๆ ก็ตามจะทำได้โดยการเทียบคำตอบที่ได้จากวิธีการนั้นๆ กับผลเฉลยแม่นยำ เช่น

$$\{e_\sigma\} = \{\sigma\} - \{\sigma_h\} \quad (2.2.1)$$

โดยที่ $\{e_\sigma\}$: เวกเตอร์ความคลาดเคลื่อนของหน่วยแรง

$\{\sigma\}$: เวกเตอร์หน่วยแรงแม่นยำ

$\{\sigma_h\}$: เวกเตอร์หน่วยแรงที่ได้จากการวิเคราะห์

จากสมการ (2.2.1) จะเห็นว่าเราวัดความคลาดเคลื่อนเป็นสเกลาร์ในขณะที่คำตอบที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีลักษณะเป็นเวกเตอร์ ซึ่งมีความไม่สะดวกในการนำมาใช้งาน ดังนั้นจึงต้องมีการนำรูปแบบอื่นที่มีลักษณะเป็นสเกลาร์มาใช้แทนเวกเตอร์ของความคลาดเคลื่อน เช่น ในรูปของแอลทูนอร์ม (L_2 norm) ของความคลาดเคลื่อนดังในสมการ (2.2.2)

$$\|e\|_2 = \left(\int_{\Omega} \{e_{\sigma}\}^T \{e_{\sigma}\} d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.2)$$

โดยที่ $\|e\|_2$: แอลทูนอร์มของความคลาดเคลื่อน
 Ω : โดเมนที่พิจารณา เช่น เฉพาะที่ (local) หรือ โดยรวม (global)

นำแอลทูนอร์มความคลาดเคลื่อนที่ได้จากสมการ (2.2.2) มาทำการเปรียบเทียบกับแอลทูนอร์มของหน่วยแรง ในสมการ (2.2.3) จะได้ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (relative error) ดังในสมการ (2.2.4)

$$\|U\|_2 = \left(\int_{\Omega} \{\sigma\}^T \{\sigma\} d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.3)$$

$$\eta = \frac{\|e\|_2}{\|U\|_2} \quad (2.2.4)$$

โดยที่ $\|U\|_2$: แอลทูนอร์มของหน่วยแรง
 η : ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์

แต่ในกระบวนการปรับขนาดขึ้นส่วนนั้นเราไม่ทราบผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหา จึงไม่สามารถหาความคลาดเคลื่อนตามสมการ (2.2.1) ได้ ต้องประมาณจากการเปรียบเทียบกับผลเฉลยอื่นที่มีความแม่นยำกว่าดังแสดงในสมการ (2.2.5) สำหรับการคำนวณหาผลเฉลยที่แม่นยำขึ้นนี้จะกล่าวถึงโดยละเอียดในหัวข้อถัดไป

$$\{e_{\sigma}^*\} = \{\sigma^*\} - \{\sigma_h\} \quad (2.2.5)$$

โดยที่ $\{e_{\sigma}^*\}$: เวกเตอร์ประมาณความคลาดเคลื่อนของหน่วยแรง
 $\{\sigma^*\}$: เวกเตอร์หน่วยแรงที่มีความแม่นยำขึ้น
 $\{\sigma_h\}$: เวกเตอร์หน่วยแรงจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

แทนค่าหน่วยแรงและความคลาดเคลื่อนในสมการ (2.2.4) ด้วยค่าประมาณจากสมการ (2.2.5) จะได้ค่าประมาณความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์และแอลทูนอร์มของค่าต่างๆดังนี้

$$\|e^*\|_2 = \left(\int_{\Omega} \{e_{\sigma}^*\}^T \{e_{\sigma}^*\} d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.6a)$$

$$\|U^*\|_2 = \left(\int_{\Omega} \{\sigma^*\}^T \{\sigma^*\} d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.6b)$$

$$\eta \approx \eta^* = \frac{\|e^*\|_2}{\|U^*\|_2} \quad (2.2.6c)$$

เมื่อได้ค่าประมาณของความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์โดยรวม แล้วนำไปเปรียบเทียบกับความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมให้ ถ้ามีความคลาดเคลื่อนมากกว่าก็คำนวณหาขนาดของชิ้นส่วนที่สอดคล้องกับความคลาดเคลื่อนเฉพาะทีละส่วนต่อไป

2.3 การประมาณค่าหน่วยแรงที่แม่นยำขึ้น

หัวข้อนี้จะได้กล่าวถึงรายละเอียดในการประมาณค่าหน่วยแรงให้มีความแม่นยำขึ้น โดยวิธีการฟื้นตัวเป็นหย่อม (Patch Recovery) [5,6,7,8] เพื่อใช้เปรียบเทียบหาความคลาดเคลื่อน ซึ่งโดยธรรมชาติของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ หน่วยแรงที่ได้จะมีความคลาดเคลื่อนแตกต่างกันไปในแต่ละส่วนของชิ้นส่วน โดยในตำแหน่งจุดเกาส์จะมีค่าหน่วยแรงแม่นยำกว่าในตำแหน่งอื่นๆ [25] ดังนั้นเราจึงสามารถประมาณค่าหน่วยแรงที่จุดต่อได้แม่นยำขึ้น โดยประมาณจากหน่วยแรงที่ตำแหน่งเกาส์รอบจุดต่อนั้น สำหรับวิธีที่ใช้ในการประมาณค่านั้นทำได้หลายวิธี แต่ที่ค่อนข้างยืดหยุ่นและได้ค่าที่แม่นยำคือ วิธีกำลังสองน้อยสุดดังมีรายละเอียดต่อไปนี้

สมมติให้หน่วยแรงที่มีความแม่นยำขึ้น (σ^*) เป็นหน่วยแรงที่ได้จากการประมาณค่าจากตำแหน่งเกาส์ซึ่งอยู่ในรูปของพหุนาม ในกรณี 1 มิติจะมีลักษณะเป็นเส้น โดยที่ลักษณะของเส้นจะขึ้นอยู่กับกำลังและค่าคงตัวของพหุนาม สำหรับกรณี 2 มิติหน่วยแรงโดยประมาณมีลักษณะเป็นพื้นผิวมีค่าดังในสมการ (2.3.1a) หรือในรูปเมตริกซ์ดังสมการ (2.3.1b)

$$\sigma^* = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + \dots \quad (2.3.1a)$$

$$\sigma^* = [p] \{a\} \quad (2.3.1b)$$

โดยที่ $[p]$: ฟังก์ชันฐาน (base function) อยู่ในรูปตัวแปรของพหุนาม $[1 \ x \ y \ xy \ x^2 \dots]$

$\{a\}$: ค่าคงตัวของพหุนามซึ่งเป็นตัวไม่รู้ค่าที่ต้องคำนวณหา $\{a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \dots\}$

σ^* : หน่วยแรงที่มีความแม่นยำขึ้น

หลักของวิธีกำลังสองน้อยสุดคือต้องหาค่าคงตัว $\{a\}$ ให้หน่วยแรงที่มีความแม่นยำขึ้นนั้นมีความแตกต่างจากจุดที่ประมาณมาน้อยที่สุด ในกรณี 2 มิติเศษตักค้างของกำลังสองของความแตกต่างระหว่างหน่วยแรงที่มีความแม่นยำขึ้นและหน่วยแรงที่ตำแหน่งเกาส์ สามารถแสดงได้ดังในสมการ (2.3.2)

$$R(a) = \sum_{i=1}^n (\sigma_g(x_i, y_i) - \sigma^*(x_i, y_i))^2 \quad (2.3.2a)$$

$$R(a) = \sum_{i=1}^n (\sigma_g(x_i, y_i) - [p(x_i, y_i)]\{a\})^2 \quad (2.3.2b)$$

โดยที่ $R(a)$: เศษตักค้างของกำลังสองของความแตกต่างระหว่างหน่วยแรง

σ_g : หน่วยแรงที่ตำแหน่งเกาส์

n : จำนวนตำแหน่งเกาส์ทั้งหมดในหย่อม

ในการหาค่าคงตัวเพื่อให้ได้เศษตักค้างน้อยที่สุด ทำได้โดยกำหนดค่าอนุพันธ์ของเศษตักค้างให้เท่ากับศูนย์ โดยหาอนุพันธ์เทียบกับค่าคงตัวแต่ละตัว จะได้สมการซึ่งมีจำนวนเท่ากับจำนวนของค่าคงตัวดังนี้

$$\sum_{i=1}^n [p(x_i, y_i)]^T [p(x_i, y_i)]\{a\} = \sum_{i=1}^n \sigma_g(x_i, y_i) [p(x_i, y_i)]^T \quad (2.3.3)$$

ในงานวิจัยนี้ชิ้นส่วนที่ใช้เป็นชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด โดยเลือกใช้

$[p] = [1 \ x \ y \ xy \ x^2 \ y^2]$ สามารถแจงสมการ (2.3.3) ให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum x_i^2 & \sum y_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i & \sum x_i^2 y_i & \sum x_i^3 & \sum x_i y_i^2 \\ \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum y_i^2 & \sum x_i y_i^2 & \sum x_i^2 y_i & \sum y_i^3 \\ \sum x_i y_i & \sum x_i^2 y_i & \sum x_i y_i^2 & \sum x_i^2 y_i^2 & \sum x_i^3 y_i & \sum x_i y_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^2 y_i & \sum x_i^3 y_i & \sum x_i^4 & \sum x_i^2 y_i^2 \\ \sum y_i^2 & \sum x_i y_i^2 & \sum y_i^3 & \sum x_i y_i^3 & \sum x_i^2 y_i^2 & \sum y_i^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum \sigma_{gi} \\ \sum x_i \sigma_{gi} \\ \sum y_i \sigma_{gi} \\ \sum x_i y_i \sigma_{gi} \\ \sum x_i^2 \sigma_{gi} \\ \sum y_i^2 \sigma_{gi} \end{Bmatrix} \quad (2.3.4a)$$

$$[A]\{a\} = \{b\} \quad (2.3.4b)$$

$$\{a\} = [A]^{-1}\{b\} \quad (2.3.5)$$

$$\sigma^*(x_i, y_i) = [p(x_i, y_i)]\{a\} \quad (2.3.6)$$

หลังจากคำนวณหาค่าคงตัวจากสมการ (2.3.5) แล้ว สามารถคำนวณหน่วยแรงที่มีความแม่นยำขึ้นที่จุดต่อได้โดยการแทนพิกัดที่จุดต่อลงในสมการ (2.3.6) และเนื่องจากในปัญหาบนระนาบมีหน่วยแรง 3 ค่า

ดังนั้นในแต่ละจุดต่อจึงแก้สมการด้วยการแก้สมการโดยตรง (Direct Solver) การแก้สมการในครั้งที่ 2 และ 3 ก็เพียงแค่แทนค่ากลับเท่านั้นไม่ต้องแก้สมการใหม่

ข้อควรระวังสำหรับวิธีนี้ก็คือ จำนวนจุดภายในแต่ละหอย่อมของจุดต่อจะต้องไม่น้อยกว่าจำนวนตัวแปรในสมการ (2.3.4) ในที่นี้ต้องมีไม่น้อยกว่า 6 จุด มิฉะนั้นเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ ($[A]$) ในสมการ (2.3.4) จะมีลักษณะเป็นเอกฐาน (Singular) ลักษณะเช่นนี้จะเกิดขึ้นในบริเวณขอบของปัญหา ดังจุดต่อหมายเลข 1,2,3,4,5 ในรูป 2.3.1 ซึ่งมีวิธีแก้ปัญหาได้ 2 วิธีคือ

- 1.) ลดจำนวนพจน์ของพหุนามลง เช่น ให้ $[p] = [1 \ x \ y \ xy]$ หรือ $[p] = [1 \ x \ y]$
- 2.) ประมาณค่าหน่วยแรงของจุดต่อนั้นจากหอย่อมของจุดต่ออื่นดังเช่นในรูป 2.3.2

เนื่องจากหน่วยแรงที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ในชิ้นส่วนที่อยู่บริเวณขอบมีความคลาดเคลื่อนสูงเมื่อเทียบกับชิ้นส่วนด้านใน งานวิจัยนี้จึงเลือกใช้วิธีที่ 2 ในการประมาณค่าหน่วยแรงที่มีความแม่นยำขึ้นที่จุดต่อบริเวณขอบ ยกเว้นในกรณีพิเศษที่มีลักษณะดังแสดงในรูป 2.3.3 ซึ่งการหาหอย่อมที่จะใช้ประมาณค่าทำได้ลำบาก จึงใช้วิธีที่ 1 แทนโดยให้จำนวนของพหุนามเท่ากับ $[p] = [1 \ x \ y]$

หลังจากที่ได้ค่าหน่วยแรงที่มีความแม่นยำขึ้นที่จุดต่อแล้วจึงคำนวณแอลลทูนอร์มเฉพาะที่ที่จุดต่อ หลังจากนั้นคำนวณแอลลทูนอร์มโดยรวม จากการรวมจากทุกจุดต่อดังในสมการ (2.3.7) และ (2.3.8)

$$\|U^*\|_{2l} = \frac{5}{12} \cdot \left((\sigma^{*T} \sigma^*) \left(\frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^n \text{area}_i \right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.3.7a)$$

$$\|e^*\|_{2l} = \frac{5}{12} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^n \left((\sigma^* - \sigma_{hi})^T (\sigma^* - \sigma_{hi}) \cdot \text{area}_i \right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.3.7b)$$

$$\|U^*\|_{2g} = \left(\sum_{i=1}^{Nn} \|U^*\|_{2li}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.3.8a)$$

$$\|e^*\|_{2g} = \left(\sum_{i=1}^{Nn} \|e^*\|_{2li}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.3.8b)$$

$$\eta_g \approx \eta_g^* = \frac{\|e^*\|_{2g}}{\sqrt{\|U^*\|_{2g}^2 + \|e^*\|_{2g}^2}} \quad (2.3.8c)$$

โดยที่ $\{\sigma^*\}$: เวกเตอร์หน่วยแรงที่ตำแหน่งจุดต่อที่มีความแม่นยำขึ้น

$\|U^*\|_{2l}$: แอลลทูนอร์มของความเค้นเฉพาะที่ที่จุดต่อ

$\|e^*\|_{2l}$: แอลลทูนอร์มของความคลาดเคลื่อนเฉพาะที่ที่จุดต่อ

- $\|U^*\|_{2g}$: แลทูนอร์มของความเค้นรวม
 $\|e^*\|_{2g}$: แลทูนอร์มของความคลาดเคลื่อนรวม
area : พื้นที่ของแต่ละชิ้นส่วนในหย่อม
n : จำนวนชิ้นส่วนในหย่อม
Nn : จำนวนจุดต่อทั้งหมดในระบบ
 η_g^* : ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์โดยรวม

2.4 การประมาณขนาดของชิ้นส่วน

เนื่องจากความคลาดเคลื่อนแปรตามขนาดของชิ้นส่วนยกกำลังด้วยกำลังของพหุนามในฟังก์ชันฐานตั้งในสมการ (2.4.1) ดังนั้น ถ้าเรารู้ขนาดของชิ้นส่วนและความคลาดเคลื่อนในปัจจุบัน เราสามารถคำนวณขนาดของชิ้นส่วนที่มีความคลาดเคลื่อนเท่ากับความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ได้ตั้งในสมการ (2.4.2)

$$\|e\| = Ch^p \quad (2.4.1)$$

- โดยที่ *C* : ค่าคงตัวที่ไม่รู้ค่า
h : ขนาดของชิ้นส่วน
p : กำลังของพหุนามในฟังก์ชันฐาน

$$h_{new} = h_{exist} \cdot \left(\frac{\|e\|_{na}}{\|e\|_{exist}} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.4.2a)$$

ในงานวิจัยนี้ใช้ $p = 2$

$$h_{new} = h_{exist} \cdot \left(\frac{\|e\|_{na}}{\|e\|_{exist}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.4.2b)$$

- โดยที่ h_{new} : ขนาดของชิ้นส่วนที่จะสร้างขึ้นใหม่
 h_{exist} : ขนาดของชิ้นส่วนในปัจจุบัน
 $\|e\|_{na}$: ความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ในแต่ละจุดต่อ
 $\|e\|_{exist}$: ความคลาดเคลื่อนในปัจจุบัน

สำหรับการหาความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ นั้น จะคำนวณจากพื้นฐานที่ว่าในการเปรียบเทียบระบบที่มีชิ้นส่วนจำนวนเท่ากันแล้ว ระบบที่มีการกระจายความคลาดเคลื่อนออกไปเท่า ๆ กันทุกจุดจะให้คำตอบที่ดีที่สุด ดังนั้น เราสามารถคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนเฉพาะที่ยอมให้ในแต่ละจุดต่อ โดยให้มีขนาดเท่า ๆ กัน ดังแสดงในสมการ (2.4.3)

$$\|e\|_{na} = \eta_a \frac{\|U^*\|_{2g}}{\sqrt{Nn}} \quad (2.4.3)$$

โดยที่ $\|e\|_{na}$: ความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ในแต่ละจุดต่อ
 Nn : จำนวนจุดต่อทั้งหมดในระบบ
 η_a : ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมให้ของระบบ

2.5 ทฤษฎีของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด

พิจารณาด้าน $p_i p_j$ ของสามเหลี่ยมดังแสดงในรูป 2.5.1 สมการการกระจัดในแนวตั้งฉากและแนวสัมผัส ของด้าน $p_i p_j$ พิจารณาในรูปสมการ (2.5.1) พิจารณาด้าน $p_1 p_2$ จะมีเงื่อนไขขอบเขตของด้านในรูปสมการ (2.5.2)

$$\begin{aligned} u_n &= a_1 + a_2 s + a_3 s^2 \\ u_t &= a_4 + a_5 s \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

$$\begin{aligned} u_n \Big|_{s=0} &= u_{n1}, u_n \Big|_{s=l_{12}} = u_{n2}, \\ u_t \Big|_{s=0} &= u_{t1}, u_t \Big|_{s=l_{12}} = u_{t2}, \\ \frac{\partial u_n}{\partial s} \Big|_{s=l_{12}} - \frac{\partial u_n}{\partial s} \Big|_{s=0} &= -\omega_2 + \omega_1 \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

ขณะที่

$$\begin{aligned} u_n &= u \cos \gamma + v \sin \gamma \\ u_t &= -u \sin \gamma + v \cos \gamma \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

โดยที่ $(i, j) : (1, 2), (2, 3), (3, 1)$

s : การกระจัดตามแนวแกนของด้าน $p_i p_j$

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 : ค่าคงตัวของพหุนามซึ่งเป็นตัวไม่รู้ค่าที่ต้องคำนวณหา

u_n : สมการการกระจัดในแนวตั้งฉากของด้าน $p_i p_j$

u_t : สมการการกระจัดในแนวสัมผัสของด้าน $p_i p_j$

l_{12} : ระยะระหว่างจุดต่อ 1 กับจุดต่อ 2

γ : มุมระหว่างแนวแกนตั้งฉากกับแนวแกน x ของระบบ

u : สมการการกระจัดรวมในแนวแกน x ของระบบ

v : สมการการกระจัดรวมในแนวแกน y ของระบบ

ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตจากสมการ (2.5.2) แทนในสมการ (2.5.1) จะทำให้ได้สมการการกระจัดในแนวตั้งฉากและแนวสัมผัสของด้าน $p_1 p_2$ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 u_n &= \left(1 - \frac{s}{l_{12}}\right) u_{n1} + \left(\frac{s}{l_{12}}\right) u_{n2} + \frac{1}{2} s \left(1 - \frac{s}{l_{12}}\right) (\omega_2 - \omega_1) \\
 u_t &= \left(1 - \frac{s}{l_{12}}\right) u_{t1} + \left(\frac{s}{l_{12}}\right) u_{t2}
 \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตของด้าน p_2p_3 และ p_3p_1 จะทำให้ได้สมการการกระจัดในแนวตั้งฉากและแนวสัมผัสทำนองเดียวกับด้าน p_1p_2 หลังจากนั้นทำการแทนค่าและจัดรูปให้อยู่ในรูปของสมการการกระจัดรวมของชิ้นส่วน จะได้ดังสมการ (2.5.5)

$$\begin{aligned}
 u &= u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 + \frac{1}{2} l_{12} \cos \gamma_{12} (\omega_2 - \omega_1) \xi_1 \xi_2 \\
 &+ \frac{1}{2} l_{23} \cos \gamma_{23} (\omega_3 - \omega_2) \xi_2 \xi_3 + \frac{1}{2} l_{31} \cos \gamma_{31} (\omega_1 - \omega_3) \xi_3 \xi_1 \\
 v &= v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2 + v_3 \xi_3 + \frac{1}{2} l_{12} \sin \gamma_{12} (\omega_2 - \omega_1) \xi_1 \xi_2 \\
 &+ \frac{1}{2} l_{23} \sin \gamma_{23} (\omega_3 - \omega_2) \xi_2 \xi_3 + \frac{1}{2} l_{31} \sin \gamma_{31} (\omega_1 - \omega_3) \xi_3 \xi_1
 \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

สำหรับชิ้นส่วนสามเหลี่ยม $p_1p_2p_3$ จะได้

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} (x_2y_3 - x_3y_2) & (y_2 - y_3) & (x_3 - x_2) \\ (x_3y_1 - x_1y_3) & (y_3 - y_1) & (x_1 - x_3) \\ (x_1y_2 - x_2y_1) & (y_1 - y_2) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \\
 \Delta &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad l_{ij} = \sqrt{x_{ji}^2 + y_{ji}^2} \\
 \cos \gamma_{ij} &= \frac{y_j - y_i}{l_{ij}}, \sin \gamma_{ij} = -\frac{x_j - x_i}{l_{ij}}
 \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

จากสมการ (2.5.5) สามารถหาความเครียดของชิ้นส่วนได้ดังนี้

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = [B] \{q\} \quad \{q\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \omega_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \omega_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \omega_3 \end{Bmatrix}$$

$$[B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & \frac{1}{2}y_1y_{23} - \frac{1}{2}y_{23}Y & y_{31} & 0 & \frac{1}{2}y_2y_{31} - \frac{1}{2}y_{31}Y & y_{12} & 0 & \frac{1}{2}y_3y_{12} - \frac{1}{2}y_{12}Y \\ 0 & x_{32} & \frac{1}{2}x_1x_{23} - \frac{1}{2}x_{23}X & 0 & x_{13} & \frac{1}{2}x_2x_{31} - \frac{1}{2}x_{31}X & 0 & x_{21} & \frac{1}{2}x_3x_{12} - \frac{1}{2}x_{12}X \\ x_{32} & y_{23} & \frac{1}{2}y_{23}X + \frac{1}{2}x_{23}Y + \frac{1}{2}(x_1y_{23} + y_1x_{23}) & x_{13} & y_{31} & \frac{1}{2}y_{31}X + \frac{1}{2}x_{31}Y + \frac{1}{2}(x_2y_{31} + y_2x_{31}) & x_{21} & y_{12} & \frac{1}{2}y_{12}X + \frac{1}{2}x_{12}Y + \frac{1}{2}(x_3y_{12} + y_3x_{12}) \end{bmatrix}$$

โดยที่ $\{\epsilon\}$: เวกเตอร์ของความเครียด

$[B]$: เมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัด

$\{q\}$: เวกเตอร์ของการกระจัด

2.6 สถิติฟเนสของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด

สถิติฟเนสของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอดในพิกัด (x, y) แสดงได้ดังสมการ (2.6.1)

$$[K] = t \int_A [B(x, y)]^T \cdot [D] \cdot [B(x, y)] dA \quad (2.6.1)$$

และในพิกัดธรรมชาติ (ξ, η) แสดงได้ดังสมการ (2.6.2)

$$[K] = t \int_A [B(\xi, \eta)]^T \cdot [D] \cdot [B(\xi, \eta)] \cdot |J(\xi, \eta)| dA \quad (2.6.2)$$

โดยที่ $[K]$: สถิติฟเนสเมตริกซ์ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของระบบรวม (global)

$[B]$: เมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการกระจัด

$[D]$: เมตริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด

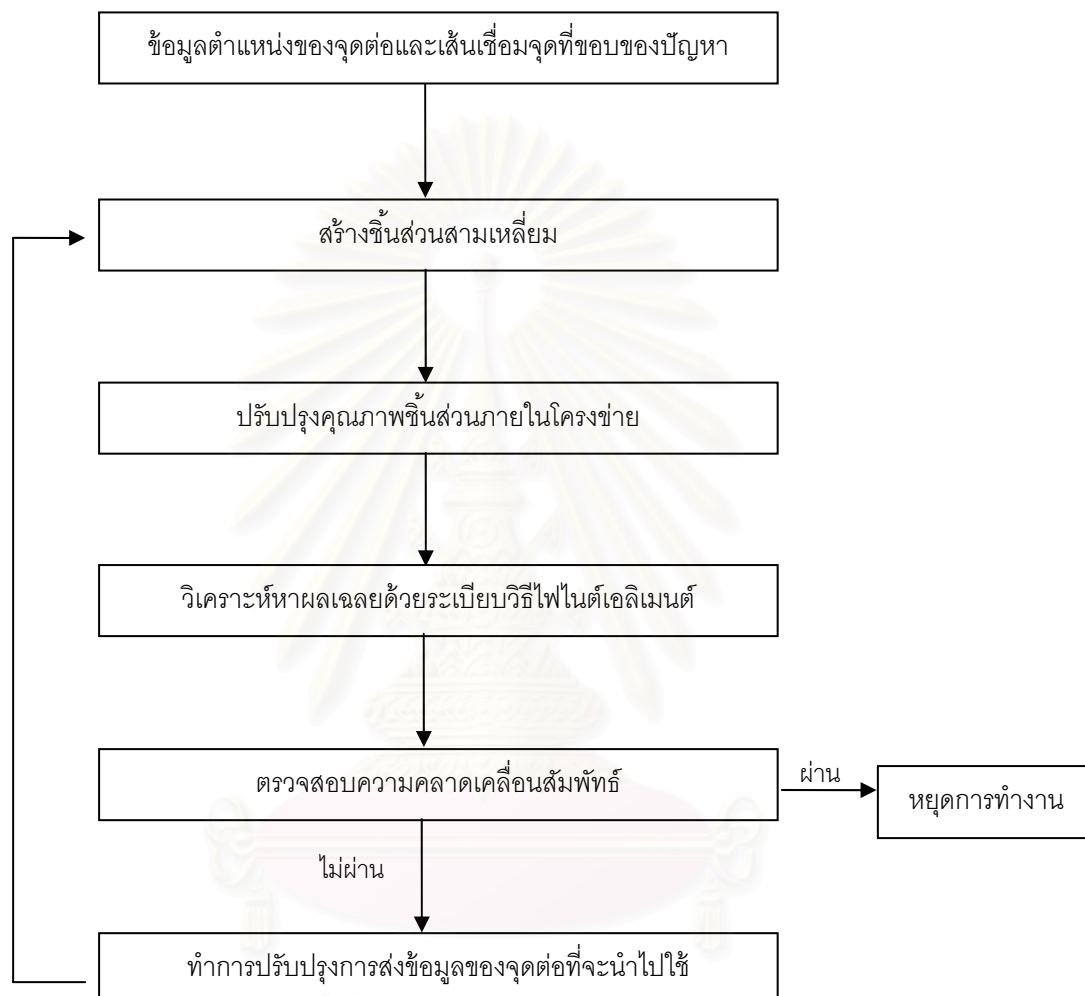
A : พื้นที่ที่ทำการอินทิเกรต

t : ความหนาของชิ้นส่วน

J : เมตริกซ์จาโคเบียน

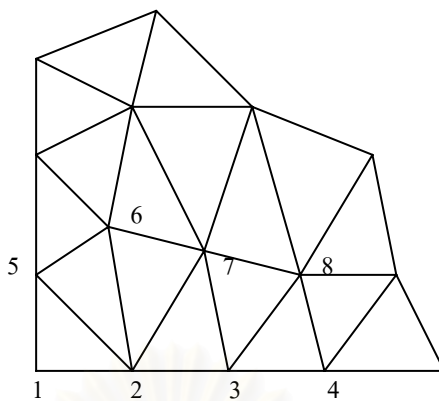
ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอดนั้น ความสัมพันธ์ทางรูปร่างระหว่างพิกัด (x, y) และพิกัดธรรมชาติจะเหมือนกับสามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่ (Constant Strain Triangle: CST) ซึ่งจะให้ผลให้เมตริกซ์จาโคเบียนมีแต่ค่าคงที่ในแต่ละชิ้นส่วน คือจะเป็นค่าของพิกัดที่จุดต่อที่มุมเท่านั้น

ในการคำนวณค่าสถิติฟเนสจำเป็นต้องใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลข ซึ่งในงานวิจัยนี้เลือกใช้วิธีการอินทิเกรตแบบเกาส์ 3 จุดเกาส์ โดยเลือกใช้เกาส์เซียนควอดราเจอร์ ชุด $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0)$ โดยมีน้ำหนักเท่ากับ $\frac{1}{6}$ ดังแสดงในรูป 2.6.1

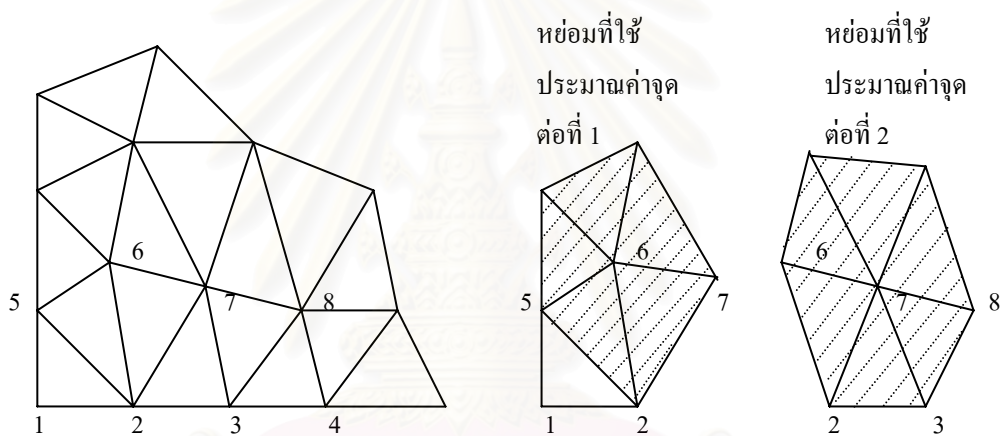


สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

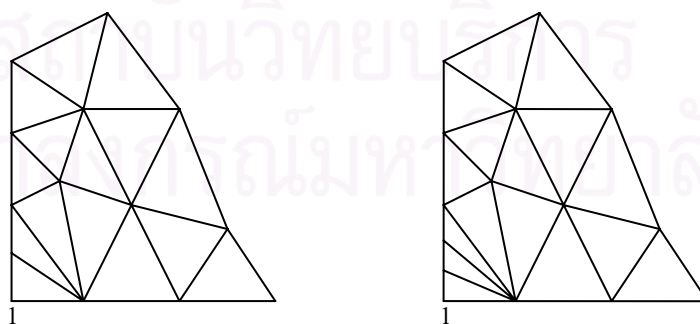
รูปที่ 2.1.1 แผนภูมิสายงานของกระบวนการปรับขนาดชิ้นส่วนอัตโนมัติ



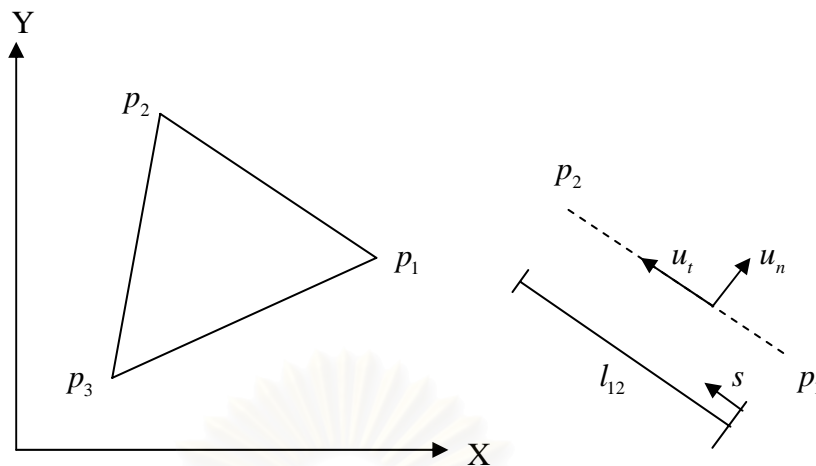
รูปที่ 2.3.1 ลักษณะของชิ้นส่วนบริเวณขอบปัญหา



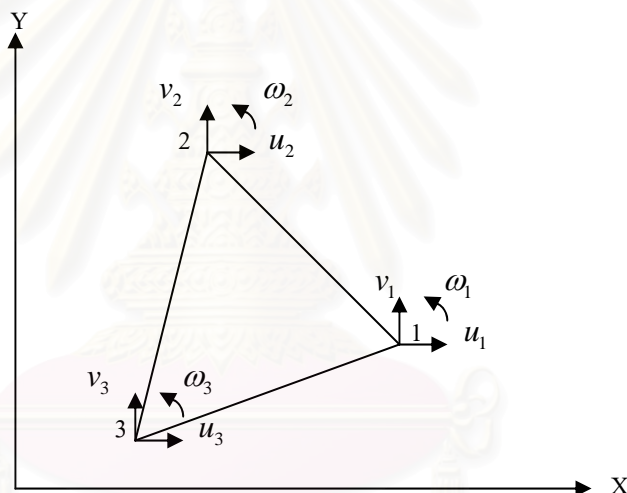
รูปที่ 2.3.2 ลักษณะของห่อหุ้มที่ใช้ในการประมาณค่าหน่วยแรงที่จุดต่อที่ขอบ



รูปที่ 2.3.3 ลักษณะของจุดที่หาห่อหุ้มภายในยาก

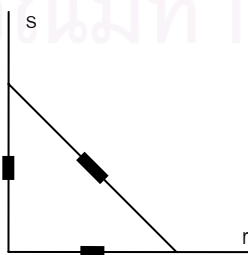


รูปที่ 2.5.1 ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด



รูปที่ 2.5.2 แสดงการกระจัดที่มุมของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 2.6.1 ตำแหน่งจุดเกาส์

การพัฒนาโปรแกรม

3.1 ภาษาคอมไพเลอร์ที่ใช้ในโปรแกรม

เนื่องจากการวิจัยนี้เป็นการพัฒนาโปรแกรมคอมไพเลอร์ ซึ่งเดิมเลือกใช้ภาษา C++ ในการเขียนรหัสคำนวณ เพื่อให้ได้โปรแกรมที่มีประสิทธิภาพและเพื่อให้การทำงานของฟังก์ชันที่ต้องการปรับปรุงสอดคล้องกับโครงสร้างข้อมูลที่มีอยู่เดิมและเกิดประสิทธิภาพสูงสุด ในงานวิจัยนี้จึงเลือกใช้ภาษา C++ ในการพัฒนาเช่นกัน โดยมีจุดเด่นของภาษาที่เหมาะสมกับกระบวนการปรับขนาดชิ้นส่วนและการปรับปรุงคุณภาพโครงข่าย สำหรับประสิทธิภาพของโปรแกรมภาษา C++ เป็นภาษาที่ประมวลผลได้รวดเร็วที่สุดภาษาหนึ่งในบรรดาภาษาสูงด้วยกัน ดังนั้นจึงมีความเหมาะสมกับการพัฒนาโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งมีการคำนวณและขั้นตอนต่างๆ จำนวนมาก

3.2 การเลือกใช้โครงสร้างข้อมูล

โครงสร้างข้อมูลที่ใช้ในงานวิจัยนี้แบ่งเป็นประเภทใหญ่ๆ ได้ 3 ประเภทดังมีรายละเอียดต่อไปนี้

1) โครงสร้างข้อมูลชนิดแถวลำดับ (array) เป็นโครงสร้างข้อมูลที่จองหน่วยความจำขนาดใหญ่ มีหน่วยความจำของแต่ละข้อมูลอยู่ติดกันจึงสามารถเข้าถึงข้อมูลแต่ละตัวได้อย่างรวดเร็ว แต่โดยปกติโครงสร้างข้อมูลชนิดนี้ต้องจองหน่วยความจำล่วงหน้าและเปลี่ยนแปลงขนาดไม่ได้ (static memory allocation) จึงไม่เหมาะกับกระบวนการปรับขนาดนักเพราะในขณะที่จองหน่วยความจำยังไม่ทราบขนาดของข้อมูล แต่เนื่องจากความเร็วในการอ้างอิงถึงข้อมูลมีความจำเป็น เช่น ในการดำเนินการต่างๆ เกี่ยวกับเมตริกซ์ จึงต้องจำลองโครงสร้างข้อมูลชนิดนี้โดยการจองหน่วยความจำขนาดใหญ่แบบพลวัตแทน ดังเช่นที่ใช้กับข้อมูลชนิดเวกเตอร์ การอ้างอิงถึงแต่ละข้อมูลก็อ้างอิงถึงตำแหน่งที่ห่างออกจากหน่วยความจำแรกไปเท่ากับหมายเลขข้อมูลคูณด้วยขนาดของข้อมูลนั้น ลักษณะของโครงสร้างข้อมูลชนิดนี้สามารถแสดงได้ดังในรูปที่ 3.2.1

2) โครงสร้างข้อมูลชนิดลิงคิลิสต์ (link list) เป็นโครงสร้างข้อมูลที่แต่ละข้อมูลอยู่กระจัดกระจายกันออกไปโดยมีการเชื่อมโยงข้อมูลถึงกันข้อมูลต่อข้อมูล ทำให้ไม่สามารถเข้าถึงข้อมูลตัวใดตัวหนึ่งได้ทันที ต้องสืบค้นจากข้อมูลตัวแรกไล่ไปเรื่อยๆ จนกระทั่งพบตัวที่ต้องการ แต่ข้อดีของโครงสร้างข้อมูลชนิดนี้คือมีความยืดหยุ่นสูงในการเพิ่มลดข้อมูล และถ้าใช้กับกระบวนการที่ต้องกระทำกับข้อมูลทุกตัวไล่กันไป ก็จะมีประสิทธิภาพไม่ยิ่งหย่อนไปกว่าโครงสร้างข้อมูลชนิดแถวลำดับแต่อย่างใด ชนิดของข้อมูลที่เหมาะสมกับโครงสร้างชนิดนี้คือข้อมูลที่มีการเพิ่มหรือลดจำนวนตลอดเวลา และการนำข้อมูลมาใช้ก็มีการเรียงลำดับตั้งแต่ต้นจนจบ ตัวอย่างของชนิดข้อมูลที่ใช้ได้แก่ ข้อมูลชนิดฟรอนท์ (front) ซึ่งจำนวนข้อมูลมีการเปลี่ยนแปลง

ตลอดเวลาและการใช้ข้อมูลก็เลือกใช้ตัวใดก่อนก็ได้ไม่จำเป็นต้องจำเพาะลงไป ลักษณะของโครงสร้างข้อมูลชนิดนี้แสดงได้ดังในรูปที่ 3.2.2

3) โครงสร้างข้อมูลชนิดต้นไม้เชิงตัวเลขสลับ ADT (alternate digital tree) การค้นหาข้อมูลจะเป็นการค้นหาที่อ้างอิงตำแหน่งทางเรขาคณิต โดยในแต่ละข้อมูลจะมีการเก็บตำแหน่งพื้นที่ครอบครองของตัวเองไว้ด้วยเพื่อใช้ในการอ้างอิงกับตำแหน่งที่ต้องการค้นหา ข้อมูลที่เป็นบิตวอร์ซึ่งอยู่ในพื้นที่นั้นก็จะมีพื้นที่ครอบครองที่แบ่งจากพื้นที่ครอบครองของข้อมูลต้น โดยมีหลักในการเก็บข้อมูลดังนี้ จากรูป 3.2.3 ประกอบ จุดแรกที่เก็บเข้าไว้ในโครงสร้างจะถือว่าครอบครองพื้นที่ทั้งหมด เมื่อมีการเพิ่มพื้นที่จุดต่อต่อมาพื้นที่ที่ครอบครองโดยจุดนั้นก็จะถูกแบ่งให้เล็กลงและให้เป็นพื้นที่ครอบครองของจุดที่เพิ่งเข้ามา โดยพื้นที่ของจุดต้นไม่มีการเปลี่ยนแปลง ดังเช่นจุดที่ 2 ในรูป 3.2.3 ก็จะมีพื้นที่ครอบครองเป็นฝั่งซ้ายของพื้นที่ทั้งหมดและตัวชี้ทางฝั่งซ้ายของจุด 1 ก็จะอ้างอิงไปยังข้อมูลของจุด 2 เมื่อเพิ่มจุด 3 ซึ่งอยู่ในพื้นที่ของจุด 2 พื้นที่ครอบครองของจุด 3 ก็จะเป็นครึ่งหนึ่งของพื้นที่ครอบครองของจุด 2 คือพื้นที่ 1 ใน 4 ทางฝั่งซ้ายบนของพื้นที่ทั้งหมดพร้อมทั้งเชื่อมโยงตำแหน่งข้อมูลของจุด 3 ไปเก็บยังฝั่งซ้ายของจุด 2 จุดที่ 4 ก็มีลักษณะเช่นเดียวกับจุด 3 สำหรับจุดที่ 5 เป็นจุดแรกที่มีตำแหน่งอยู่บนฝั่งขวาของพื้นที่ ซึ่งเป็นพื้นที่ที่แบ่งจากจุด 1 และยังไม่มีการครอบครอง จุด 5 ก็จะครอบครองพื้นที่ฝั่งขวาทั้งหมดและเชื่อมโยงตำแหน่งข้อมูลของจุด 5 ไปเก็บยังฝั่งขวาของจุด 1 เมื่อมีการจัดเก็บข้อมูลครบทั้งหมด ทุกๆ จุดก็จะมีพื้นที่ครอบครองของตนเอง และเมื่อต้องการค้นหาจุดที่อยู่ในพื้นที่ที่สนใจก็ตรวจสอบจากพื้นที่ครอบครองของจุดไล่ตามลำดับลงมา โดยตรวจสอบเฉพาะจุดที่มีพื้นที่ครอบครองซ้อนทับกับพื้นที่ที่สนใจเท่านั้น เช่น ถ้าพื้นที่ที่สนใจคือพื้นที่ฝั่งซ้ายของพื้นที่ทั้งหมด จำนวนจุดที่ไม่ต้องพิจารณาก็คือจุดที่อยู่ในฝั่งขวาของจุด 1 ในแผนภูมิต้นไม้ในรูป 3.2.3 ยิ่งพื้นที่สนใจมีขนาดเล็กเท่าใดจำนวนจุดที่ไม่ต้องพิจารณาก็ยิ่งมีมากขึ้น

สำหรับโครงสร้างข้อมูลชนิด ADT ที่ใช้ในงานวิจัยนี้จะแตกต่างจากที่กล่าวมาเล็กน้อยคือ ในแต่ละจุดจะเชื่อมโยงไปยังจุดบิตวอร์ 4 จุดในแต่ละภาคของพื้นที่ ทำให้ไม่ต้องคำนวณหาลำดับขั้นและทิศทางของการแบ่งพื้นที่ในแต่ละจุด

3.3 ชนิดของข้อมูล

ชนิดของข้อมูลที่ใช้ในโปรแกรมมีจำนวนมากมาย ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะที่สำคัญที่ช่วยให้เข้าใจความสัมพันธ์และการทำงานของโปรแกรมเท่านั้น ดังมีรายละเอียดดังนี้

eline: เป็นข้อมูลที่แทนเส้นเชื่อมระหว่างจุดต่อของชิ้นส่วนโดยมีข้อมูลต่าง ๆ ดังนี้

- 1) ตัวชี้ที่ชี้ไปยังตำแหน่งของจุดต่อที่ต้นและปลายของเส้นเชื่อม
- 2) ตัวชี้ที่ชี้ไปยังชิ้นส่วนทางด้านซ้ายและขวา เพื่อความสะดวกในการอ้างอิงไปยังชิ้นส่วนต่างๆผ่านทางเส้นเชื่อมจุด จะมีค่าเป็นศูนย์ (null) เมื่อไม่มีชิ้นส่วนทางด้านนั้น
- 3) ตัวชี้ที่ชี้ไปยังสมาชิกในฟรอนท์ที่อ้างอิงกลับมา เพื่อประโยชน์ในการปรับปรุงฟรอนท์เมื่อมีการสร้างชิ้นส่วน จะชี้ไปยังตำแหน่งศูนย์ (null) ถ้าเส้นเชื่อมไม่ได้อยู่ในฟรอนท์

- 4) ตัวชี้ชี้ไปยังสมาชิกในพอรอนท์ที่อ้างอิงกลับมา (ข้อมูลใหม่) เพื่อประโยชน์ในการปรับปรุงพอรอนท์ เมื่อมีการสลับการเชื่อมโยง จะมีค่าเป็นศูนย์ (null) เมื่อเส้นเชื่อมชิ้นส่วนนั้น ไม่จำเป็นต้องทำการสลับการเชื่อมโยงระหว่างจุดต่อ

enode: เป็นข้อมูลที่แทนจุดต่อของชิ้นส่วน มีข้อมูลที่เก็บคือ

- 1) ค่าพิกัด x, y ของจุดต่อ
- 2) ค่าระยะห่างของจุดต่อที่กำหนดไว้เพื่อใช้ตรวจสอบในการสร้างจุดต่อใหม่ และในบางครั้งใช้เก็บหมายเลขของจุดต่อเพื่อใช้อ้างอิงไปยังสมาชิกในเวคเตอร์
- 3) ลิงค์ลิสต์ของ eline ที่เชื่อมกับจุดต่อนี้ทั้งหมด มีประโยชน์เพื่อใช้ในการตรวจสอบการเชื่อมโยงไปยังจุดอื่นๆ และใช้ค้นหาชิ้นส่วนที่อยู่รอบจุดต่อในกรณีคำนวณหน่วยแรงที่จุดต่อด้วยวิธีการพื้นตัวเป็นหย่อม การที่เก็บเป็นลิงค์ลิสต์เพราะจำนวนเส้นที่เชื่อมต่อกับจุดต่อในแต่ละจุดมีจำนวนไม่เท่ากัน การเก็บเป็นลิงค์ลิสต์จะประหยัดเนื้อที่ที่สุด การเก็บข้อมูลจะเก็บเป็นตัวชี้ชี้ไปยังตำแหน่งของเส้นเชื่อม และมีการเรียงลำดับในลักษณะทวนเข็มนาฬิกา

element: เป็นข้อมูลแทนชิ้นส่วนโดยมีข้อมูลที่สำคัญ คือ

- 1) flag สำหรับใช้ตรวจสอบการเพิ่มจุดต่อที่กึ่งกลางชิ้นส่วน โดยตรวจสอบว่าที่ชิ้นส่วนโดยรอบมีการเพิ่มจุดหรือยัง และมีตำแหน่งใกล้เคียงไปหรือไม่ นอกจากนี้บางครั้งยังใช้เก็บหมายเลขของชิ้นส่วนเพื่อใช้ในการอ้างอิง
- 2) ตัวชี้ชี้ไปยัง eline ที่เป็นด้านทั้ง 3 ของชิ้นส่วน

vector: เป็นข้อมูลที่จำลองโครงสร้างของข้อมูลชนิดแถวลำดับ คือมีการเข้าถึงข้อมูลโดยการอ้างอิงหมายเลขของข้อมูลโดยตรง เพื่อให้มีความสะดวกและรวดเร็วในการแก้สมการหลายตัวแปรที่จำเป็นต้องมีการคูณเชิงสเกลาร์และการคูณระหว่างเมตริกซ์และเวคเตอร์

symmat: เป็นข้อมูลที่แทนเมตริกซ์ชนิดสมมาตร การเก็บข้อมูลจะเก็บข้อมูลชนิด dia_ele ซึ่งเป็นข้อมูลที่แทนค่าสมาชิกในแนวทแยงของเมตริกซ์ โดยจะเก็บข้อมูลเป็นเวคเตอร์ทำให้เข้าถึงสมาชิกในแนวทแยงของเมตริกซ์ได้อย่างรวดเร็ว

dia_ele: เป็นข้อมูลที่อยู่ใน symmat จะเก็บค่าสมาชิกในแนวทแยงของเมตริกซ์พร้อมทั้งหมายเลขประจำแถวและเก็บลิงค์ลิสต์ที่เชื่อมโยงไปยังสมาชิกในแนวนอนและแนวตั้งของเมตริกซ์ที่สัมพันธ์กับ dia_ele คือ hor_ele และ ver_ele

hor_ele: เป็นข้อมูลที่เก็บค่าสมาชิกของเมตริกซ์และเก็บหมายเลขสมมติของสมาชิกพร้อมทั้งเชื่อมโยงไปยังสมาชิกตัวอื่นๆ ที่อยู่แถวเดียวกัน

ver_ele: เป็นข้อมูลที่เก็บตัวชี้ที่ไปยังข้อมูลสมาชิก hor_ele และเก็บหมายเลขแถวของสมาชิกรั้ว ๆ พร้อมทั้งเชื่อมโยงไปยังสมาชิกอื่นที่อยู่ในสตมภ์เดียวกัน สาเหตุที่ต้องเก็บข้อมูลชนิดนี้ก็เพื่อความสะดวกรวดเร็วในการอ้างอิงถึงสมาชิกในการคูณกับเวกเตอร์

ความสัมพันธ์ของข้อมูลชนิด symmat , dia_ele และ ver_ele สามารถแสดงได้ดังในรูป 3.3.1 การเก็บข้อมูลของเมตริกซ์ในลักษณะนี้จะประหยัดหน่วยความจำได้มาก เนื่องจากเป็นกระบวนการที่ต้องกระทำเรียงไปตามลำดับในแต่ละสมาชิกอยู่แล้ว การคูณกับเวกเตอร์ก็เช่นกัน สามารถอ้างอิงไปยังสมาชิกในเวกเตอร์ได้โดยตรงโดยใช้หมายเลขประจำ แถวและสตมภ์ที่เก็บอยู่ในแต่ละสมาชิก

Boundary: เป็นข้อมูลแรกที่จะเก็บข้อมูลที่ได้จากการนำเข้าจากแฟ้มข้อมูล โดยเป็นข้อมูลของขอบเขตของปัญหา ซึ่งมีข้อมูลย่อยต่อไปนี้

- 1) ค่าพิกัด x, y ของตำแหน่งและปลายของเส้นขอบ
- 2) รัศมีของเส้นขอบในกรณีที่เป็นเส้นโค้ง จะมีค่าศูนย์ถ้าเป็นเส้นตรง มีค่าเป็นบวกเมื่อจุดศูนย์กลางของเส้นโค้งอยู่ทางด้านซ้ายของเส้นขอบ มีค่าเป็นลบเมื่อจุดศูนย์กลางของเส้นขอบอยู่ทางด้านขวาของเส้นขอบ เพราะฉะนั้นถ้าเส้นขอบของปัญหามีขนาดใหญ่กว่าครึ่งวงกลม จำเป็นต้องมีการแบ่งเป็น 2 เส้น
- 3) จำนวนของเส้นย่อยที่จะแบ่งจากเส้นขอบ ทั้งนี้เพื่อความกระชับในการเตรียมข้อมูลและสะดวกในการปรับขนาดของชิ้นส่วน
- 4) ตัวชี้ที่ไปยังข้อมูลชนิด bound_load ซึ่งจะเก็บข้อมูลของแรงที่กระทำต่อขอบเขตของปัญหาโดยจะแยกเป็นแรงที่กระทำเป็นจุดและแรงที่กระจายตลอดแนวขอบ
- 5) ตัวชี้ที่ไปยังข้อมูลชนิด bound_support ซึ่งจะเก็บข้อมูลของที่รองรับที่ขอบเขตของปัญหา มีทั้งที่รองรับที่เป็นจุดและรองรับตลอดแนวของเส้นขอบ

b_line: เป็นข้อมูลที่ผสมผสานระหว่าง boundary และ eline คือ มีชนิดข้อมูลทั้งหมดของ eline และมีชนิดข้อมูลใน boundary ด้วย ยกเว้นจำนวนที่จะแบ่งเป็นเส้นย่อยและค่าพิกัด x, y ซึ่งจะเป็นตัวชี้ไปยัง enode แทน ทั้งนี้ข้อมูลชนิดนี้มีไว้เพื่อใช้เป็นพารามิเตอร์เริ่มต้นในกระบวนการเชื่อมต่อจุดให้เป็นสามเหลี่ยมหลังการเพิ่มจุดและใช้สร้างขอบของปัญหาใหม่เมื่อมีการลดขนาดของชิ้นส่วนลง

swpline: เป็นข้อมูลที่แทนเส้นเชื่อมระหว่างจุดต่อของชิ้นส่วน ที่ต้องการจะสลักการเชื่อมโยงระหว่างจุดต่อปลายและจุดต่อข้างเคียง โดยมีข้อมูลต่างๆ ดังนี้

- 1) Eval เป็นดัชนีที่ใช้สำหรับลำดับความสำคัญของเส้นขอบที่เชื่อมระหว่างจุดต่อของชิ้นส่วน โดยเส้นขอบที่มีค่า Eval สูงสุด จะถูกจัดเก็บให้อยู่ในลำดับต้นของพารามิเตอร์และเส้นขอบที่มีค่ารองลงมาก็จะถูกจัดเก็บเรียงต่อกันเป็นลำดับ โดยจะเลือกพิจารณาเฉพาะเส้นขอบที่มีค่า Eval มากกว่า 2 เท่านั้น
- 2) ตัวชี้ที่ไปยังข้อมูลประเภท eline ที่ต้องสลักการเชื่อมโยงระหว่างจุดต่อปลายและจุดต่อข้างเคียง

นอกจากข้อมูลที่ได้กล่าวมาแล้วยังมีข้อมูลชนิดอื่นอีกมาก แต่จะไม่กล่าวถึงในที่นี้เพราะสามารถศึกษาจากรหัสคำนวณเองได้ และไม่มีส่วนช่วยในการเข้าใจความสัมพันธ์และลำดับการทำงานของโปรแกรม

3.4 โครงสร้างและลำดับการทำงานของโปรแกรม

โครงสร้างการทำงานของโปรแกรมย่อยต่างๆสามารถศึกษาได้จากงานวิจัยเดิม [19], [24] ในส่วนของโปรแกรมหลัก มีรายละเอียดของลำดับการทำงานดังนี้

โปรแกรมหลัก (รูปที่ 3.4.1) เริ่มจากการนำเข้าข้อมูลขอบเขตของปัญหา แรงกระทำและที่รองรับต่างๆ เข้ามาเก็บในลิงคิสต์ของข้อมูลเส้นขอบ จากนั้นแบ่งขอบเขตของปัญหาเป็นเส้นย่อยๆ เก็บพิกัดของจุดไว้ใน ADT และเก็บเส้นเชื่อมโยงจุดพร้อมทั้งแรงกระทำและที่รองรับไว้ในลิงคิสต์ของ b_line จากข้อมูลใน ADT และ b_line นำมาสร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมจะได้สามเหลี่ยมที่มีขนาดสอดคล้องกับระยะห่างของจุดที่ขอบ เก็บข้อมูลของชิ้นส่วนที่ได้ในลิงคิสต์ของ element ต่อมาทำการปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายโดยใช้ข้อมูลของจุดต่อใน ADT ข้อมูลลิงคิสต์ b_line และข้อมูลลิงคิสต์ eline และเมื่อปรับปรุงคุณภาพชิ้นส่วนเสร็จแล้ว จึงส่งค่าจุดต่อและชิ้นส่วนที่ได้รับการปรับปรุงคุณภาพแล้วสู่ขั้นตอนคำนวณหาการกระจัดของแต่ละจุดต่อ โดยการสร้างสถิติของแต่ละชิ้นส่วนจากการอินทิเกรตเชิงตัวเลข และแก้สมการด้วยวิธีเกรเดียนต์สังยุคแบบมีเงื่อนไขวงแหวน เก็บการกระจัดที่ได้ในเวกเตอร์ u เมื่อได้การกระจัดมาแล้วคำนวณหน่วยแรงที่ตำแหน่งเกาส์ และประมาณค่าหน่วยแรงต่างๆที่จุดต่อทุกจุดต่อ จากนั้นจึงคำนวณค่าคลาดเคลื่อนที่จุดต่อในโครงข่าย ซึ่งใช้วิธีการอินทิเกรตเชิงตัวเลข และคำนวณขนาดของจุดต่อที่สอดคล้องกับค่าคลาดเคลื่อนในแต่ละจุดต่อของชิ้นส่วนสามเหลี่ยม แล้วจึงคำนวณค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์โดยรวมของปัญหา เพื่อตรวจสอบว่าความคลาดเคลื่อนรวมทั้งหมดมีค่าเกินกว่าที่ยอมให้หรือไม่ ถ้าไม่เกินก็หยุดการทำงาน แต่ถ้าเกินก็ปรับขนาดของชิ้นส่วนใหม่โดยเริ่มจากสร้าง ADT ตัวใหม่แทนของเดิม หลังจากนั้นสร้างลิงคิสต์ของ boundary ใหม่แทนของเดิม โดยใช้ข้อมูลจากลิงคิสต์ของ b_line จากนั้นทำการปรับปรุงจุดต่อบริเวณขอบ โดยใช้ข้อมูลขนาดของจุดต่อจากข้อมูลใน ADT ตัวเก่าและลิงคิสต์ของเส้นขอบ จากข้อมูลของจุดต่อที่ขอบใน ADT ตัวใหม่และ b_line จะสามารถนำไปใช้สร้างชิ้นส่วนสามเหลี่ยมสำหรับวิเคราะห์ต่อไป กระทำซ้ำในลักษณะเดิมจนกระทั่งค่าคลาดเคลื่อนมีค่าต่ำกว่าที่ยอมให้

3.5 การแสดงผล

การแสดงผลของโปรแกรมอยู่ในรูปแฟ้มข้อมูล (file) จำนวน 4 แฟ้มข้อมูล คือ

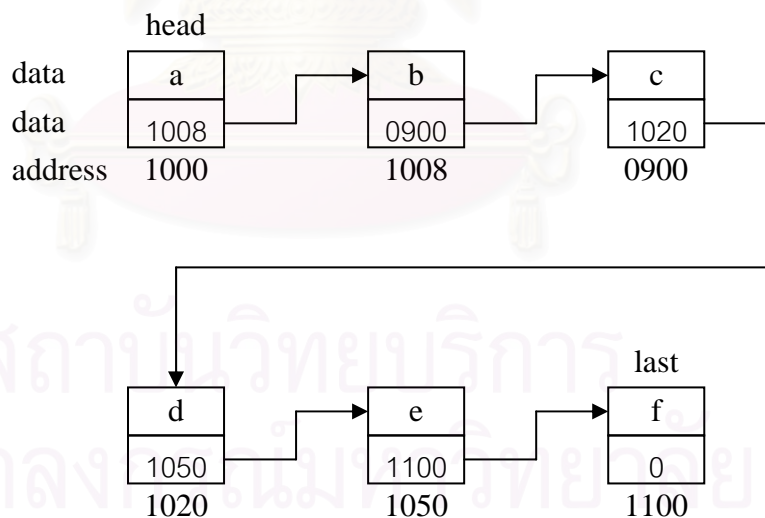
- 1) แฟ้มข้อมูลแสดงตำแหน่งของจุดต่อและแสดงความสัมพันธ์ระหว่างชิ้นส่วนและจุดต่อ
- 2) แฟ้มข้อมูลหมายเลขจุดต่อ การกระจัด หน่วยแรง และความคลาดเคลื่อนในจุดต่อนั้นๆ
- 3) แฟ้มข้อมูลประเภทกราฟฟิกที่เป็นแฟ้มตัวอักษร (text file)
- 4) แฟ้มข้อมูลแลกเปลี่ยนประเภทกราฟฟิกที่เป็นแฟ้มตัวเลขฐานสอง (binary file)

data	a	b	c	d	e		char
address	1000	1001	1002	1003	1004		

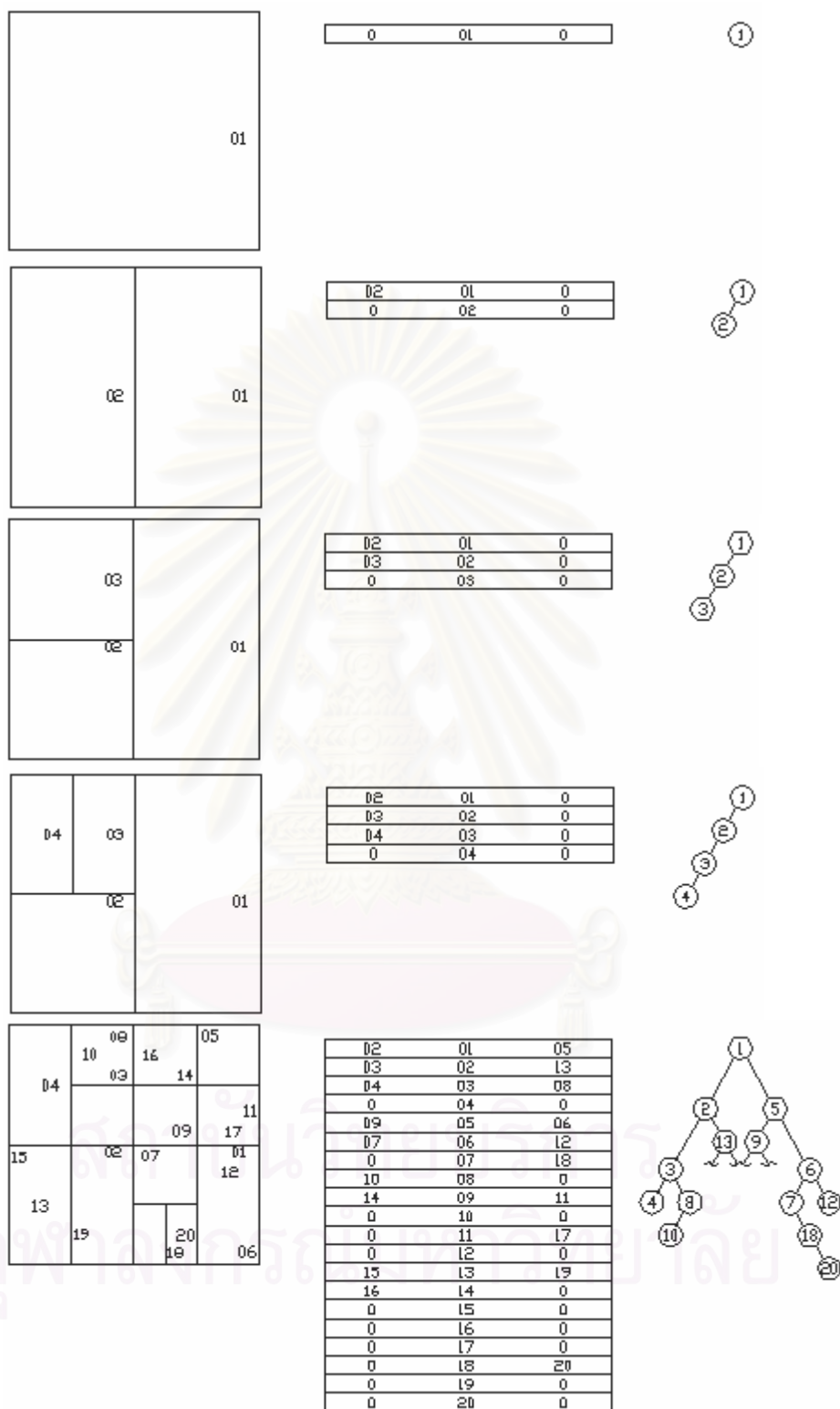
data	1	2	3	4	5		int
address	1000	1002	1004	1006	1008		

data	a	b	c	d	e		long int
address	1000	1004	1008	1012	1016		

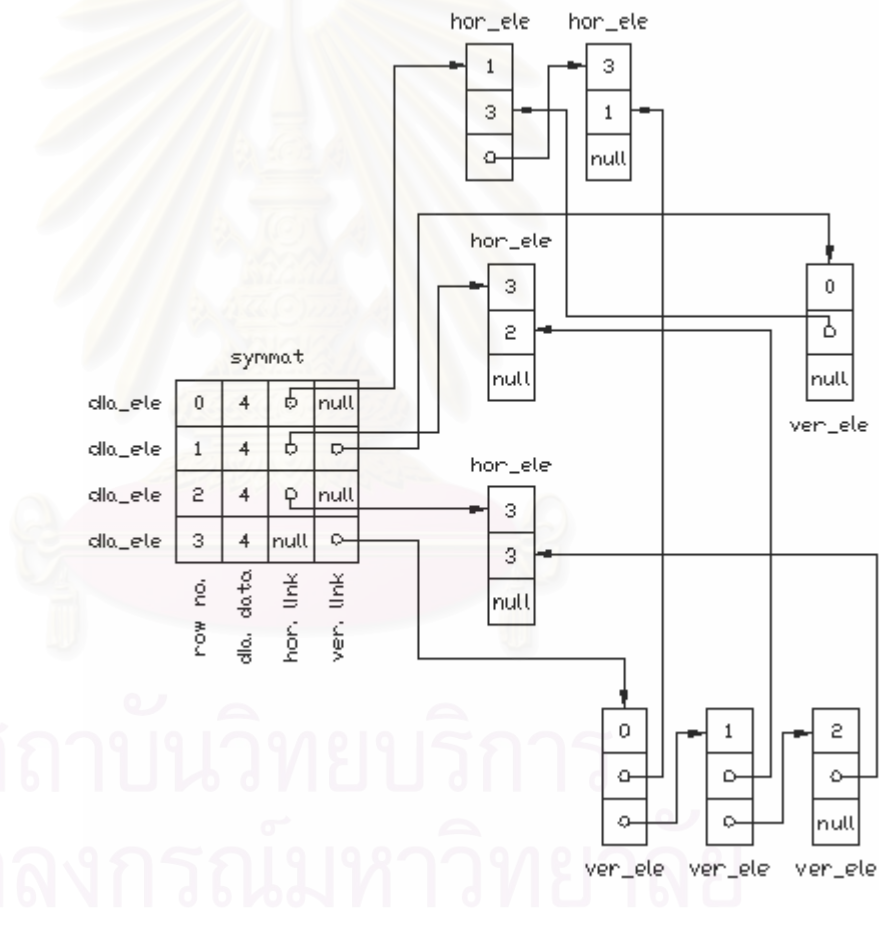
รูปที่ 3.2.1 โครงสร้างข้อมูลชนิดแถวลำดับ



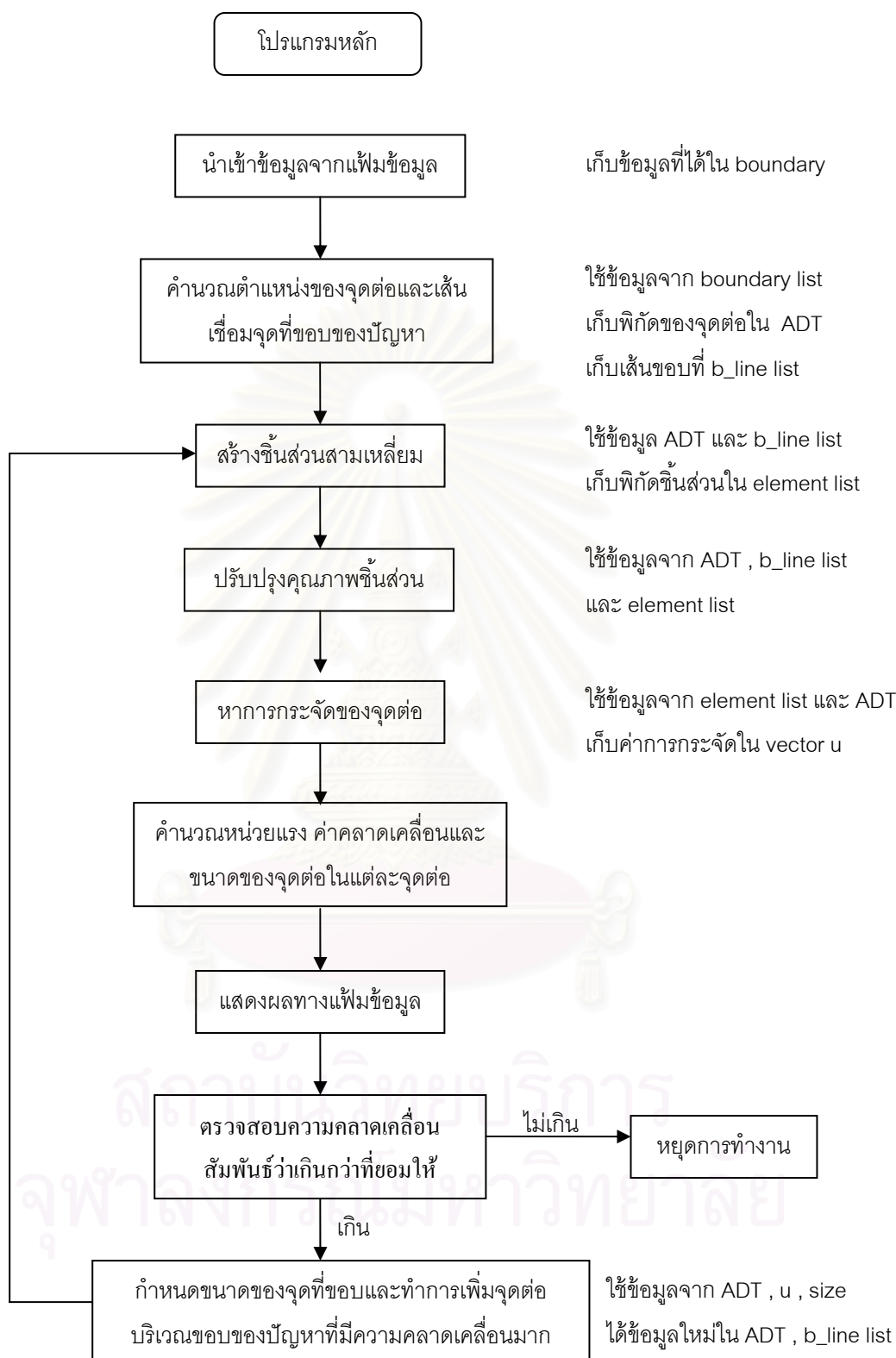
รูปที่ 3.2.2 โครงสร้างข้อมูลชนิดลิงค์ลิสต์



รูปที่ 3.2.3 การจัดเก็บข้อมูลในโครงสร้างข้อมูล ADT

$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 4 & 3 & & 1 \\ & 4 & & 2 \\ & & 4 & 3 \\ \text{SYM.} & & & 4 \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$


รูปที่ 3.3.1 การจัดเก็บข้อมูลของเมตริกซ์



รูปที่ 3.4.1 โครงสร้างการทำงานของโปรแกรมหลัก

บทที่ 4

ตัวอย่างการวิเคราะห์ผล

เพื่อเป็นการตรวจสอบประสิทธิภาพ และความน่าเชื่อถือได้ในการทำนายของผลเฉลยภายในโครงข่าย
ชั้นส่วน ที่เป็นผลเฉลยซึ่งได้จากการเปลี่ยนชนิดของชั้นส่วนจากโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดชั้นส่วน
อัตราเดิมที่ใช้ชั้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น เป็นชั้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่
จุดยอด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชั้นส่วนของปัญหาในการคำนวณรอบถัดไป ใน
งานวิจัยนี้เลือกตัวอย่างที่ใช้ในการวิเคราะห์ 4 ตัวอย่างด้วยกัน โดยเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากโปรแกรมไฟไนต์
เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดชั้นส่วนอัตราเดิม ที่ใช้ชั้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น [24] ชั้นส่วน
สามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่ ที่มีการปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายโดยวิธีการปรับเรียบเชิงมุม [22] และชั้นส่วน
สามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่ ที่มีการปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายโดยวิธีการปรับเรียบของลาปลาซ [19]

ซึ่งปัญหาที่ใช้ในการวิเคราะห์คือ

- 1) แผ่นบางขนาดอนันต์มีรูเจาะที่กึ่งกลางแผ่นและรับแรงดึงแผ่กระจายสม่ำเสมอที่ปลายทั้ง 2 ด้าน
- 2) แผ่นวงกลมบางรับแรงกระทำเป็นจุด 2 แรง กระทำในทิศทางตรงข้ามผ่านศูนย์กลางของวงกลม
- 3) คานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายคานอิสระ
- 4) คานช่วงเดียวมีช่องเปิดรับแรงกระทำเป็นจุด

สำหรับตัวอย่างที่ 1 – 3 เป็นปัญหาที่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรงได้ ซึ่งมักใช้ในการตรวจสอบความ
ถูกต้องและประสิทธิภาพในการสร้างชั้นส่วนสามเหลี่ยมของโปรแกรมที่วิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
สำหรับตัวอย่างที่ 4 เป็นการทดสอบปัญหาในการใช้งานจริงไม่สามารถตรวจสอบผลการวิเคราะห์กับผลเฉลย
แม่นยำตรงได้

4.1 ตัวอย่างที่ 1 ปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง

ตัวอย่างที่ 1 เป็นการวิเคราะห์ปัญหาแผ่นบางขนาดอนันต์มีรูเจาะที่กึ่งกลางแผ่น และรับแรงดึงแผ่
กระจายที่ปลายทั้ง 2 ด้าน เนื่องจากเป็นปัญหาที่มีขนาดอนันต์จึงลดรูปให้มีขนาดนับได้ดังแสดงในรูป 4.1.1 (ก)
คือมีขนาดกว้าง 40 ซม. ยาว 40 ซม.หนา 0.1 ซม. มีรูเจาะที่กึ่งกลางขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 4 ซม. รับแรงแผ่
กระจายตามแนวยาวที่ปลายทั้ง 2 ด้านขนาด 1,000 กก./ตร.ซม. วัสดุมีโมดูลัสยืดหยุ่น 2×10^6 กก./ตร.ซม.
อัตราส่วนบัวของเท่ากับ 0.3 สามารถสร้างแบบจำลองสำหรับวิเคราะห์ผลโดยอาศัยหลักสมมาตรได้ดังแสดงใน
รูปที่ 4.1.1 (ข)

กำหนดค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมรับให้เท่ากับ 0.02 จะได้ผลการวิเคราะห์ทั้งหมด 4 รอบ โดยมี
โครงข่ายชั้นส่วนและการกระจายของค่าคลาดเคลื่อนในแต่ละรอบดังแสดงในรูปที่ 4.1.2 - 4.1.3 โดยเมื่อความ

คลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ในรอบปัจจุบันมีค่ามากกว่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมให้ โปรแกรมจะทำการปรับขนาดขึ้นส่วนอัตโนมัติ สำหรับการปรับปรุงการส่งข้อมูลให้นำไปใช้ในการสร้างขึ้นส่วนรอบถัดไป จะส่งเฉพาะข้อมูลและค่าความคลาดเคลื่อนที่จุดต่อบริเวณขอบ เพื่อคำนวณปรับลดขนาดขึ้นส่วน ซึ่งจะเห็นได้ว่าโครงข่ายขึ้นส่วนที่สร้างขึ้นในแต่ละรอบมีความต่อเนื่องเพิ่มมากขึ้น และเนื่องจากโปรแกรมที่ใช้ในงานวิจัยนี้ใช้เฉพาะข้อมูลจุดต่อที่ขอบเท่านั้นในการคำนวณรอบถัดไป เป็นผลทำให้โปรแกรมจะทำการสร้างขึ้นส่วนอย่างหนาแน่นในบริเวณขอบที่มีค่าความคลาดเคลื่อนที่สูง ดังเห็นได้จากบริเวณขอบที่รับแรงด้านที่ไม่มีที่รองรับ และบริเวณรูเจาะ

สำหรับการกระจายค่าหน่วยแรงต่างๆ สามารถแสดงได้ในรูปที่ 4.1.3 – 4.1.4 ซึ่งจะมีความต่อเนื่องของเส้นขอบคอนทิวรัลในทุกโครงข่ายขึ้นส่วน เพราะเป็นผลมาจากหน่วยแรงที่จุดต่อที่ได้มีการประมาณจากขึ้นส่วนโดยรอบเรียบร้อยแล้ว เมื่อนำไปเปรียบเทียบกับหน่วยแรงที่คำนวณได้จากผลเฉลยแม่นยำตรงตามแนว AB ในรูปที่ 4.1.1 ได้ผลการเปรียบเทียบในแต่ละโครงข่ายดังแสดงในรูปที่ 4.1.5 – 4.1.7 ซึ่งมีจะมีลักษณะเข้าสู่ค่าขอบแม่นยำมากขึ้นเมื่อโครงข่ายของขึ้นส่วนมีความละเอียดมากขึ้น และในโครงข่ายสุดท้ายผลเฉลยที่ได้มีความใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงมาก โดยจะสังเกตเห็นว่าหน่วยแรงในทิศทาง x หลังจากผ่านค่าสูงสุดจะมีค่าลดลงมากกว่าค่าที่ได้จากการคำนวณผลเฉลยแม่นยำตรง และจะเข้าสู่ศูนย์ในบริเวณใกล้จุด B ทั้งนี้เนื่องจากการจำลองแผ่นบางขนาดอนันต์ด้วยแผ่นบางที่มีขนาดนับได้ซึ่งจะมีหน่วยแรงในทิศทาง x เท่ากับศูนย์ที่ขอบของปัญหาในขณะที่แผ่นบางขนาดอนันต์ไม่มีขอบ เมื่อค่าหน่วยแรงลดลงถึงค่าหนึ่งก็จะคงที่ไปตลอด ลักษณะเช่นนี้เกิดขึ้นกับหน่วยแรงในทิศทาง y เช่นกัน โดยที่จุด B หน่วยแรงที่ได้จะมีค่าน้อยกว่าค่าผลเฉลยแม่นยำเล็กน้อยแต่จะส่งผลในบริเวณแคบๆ ไม่มากเหมือนกับหน่วยแรงในทิศทาง x สำหรับหน่วยแรงเฉือนจะไม่สามารถสังเกตเห็นเพราะผลเฉลยมีค่าเท่ากันทั้งในแผ่นบางขนาดอนันต์และแผ่นบางขนาดนับได้

ในการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ที่ได้จากกระบวนการปรับขนาดขึ้นส่วนอัตโนมัติในงานวิจัยนี้ กับผลการวิเคราะห์ที่ได้จากกระบวนการปรับขนาดขึ้นส่วนอัตโนมัติเดิมที่ใช้ขึ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น [24] พบว่าได้ผลการวิเคราะห์ทั้งหมด 2 รอบ เปรียบเทียบกับกระบวนการปรับขนาดขึ้นส่วนอัตโนมัติเดิมที่ใช้ขึ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่ ซึ่งใช้การปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายโดยวิธีการปรับเรียบเชิงมุม [22] พบว่าได้ผลการวิเคราะห์ทั้งหมด 5 รอบ และเปรียบเทียบกับกระบวนการปรับขนาดขึ้นส่วนอัตโนมัติเดิมที่ใช้ขึ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่ ซึ่งใช้การปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายโดยวิธีการปรับเรียบของลาปลาซ [19] โดยตั้งเป้าหมายของการปรับขนาดไปที่ค่าเฉลี่ยระหว่างค่าคลาดเคลื่อนปัจจุบันและค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ เพื่อหลีกเลี่ยงการเพิ่มจุดต่อในบริเวณที่ไม่จำเป็น พบว่าได้ผลการวิเคราะห์ทั้งหมด 3 รอบ โดยได้แสดงโครงข่ายขึ้นส่วนและผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงในโครงข่ายสุดท้าย เปรียบเทียบกับงานวิจัยนี้ ดังแสดงไว้ในรูปที่ 4.1.8 – 4.1.11

ในด้านขนาดและความต่อเนื่องของขึ้นส่วนภายในโครงข่าย พบว่าในงานวิจัยนี้ถึงแม้ว่าขนาดขึ้นส่วนที่ได้จะมีขนาดเล็กกว่า แต่ก็ให้ความต่อเนื่องของโครงข่ายขึ้นส่วนที่ดีกว่าในงานวิจัยเดิมที่ใช้ขึ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น

ในด้านเวลาในการวิเคราะห์ จะเห็นว่าผลการวิเคราะห์จากงานวิจัยนี้ ในโครงข่ายสุดท้ายมีจำนวน จุดต่อเพียง 302 จุดต่อเท่านั้น และใช้เวลาในการคำนวณทั้งหมด 2 วินาที จึงทำให้ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์น้อยกว่าค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมให้ ซึ่งในงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ มีจำนวนจุดต่อ 665 จุดต่อ ในงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม มีจำนวนจุดต่อ 533 จุดต่อ และในงานวิจัยเดิมที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น มีจำนวนจุดต่อ 567 จุดต่อ และใช้เวลาในการคำนวณทั้งหมด 2.2 และ 1 วินาทีตามลำดับ ซึ่งจะเห็นว่าในงานวิจัยนี้ทำให้จำนวนจุดต่อลดลงมากกว่า 2 เท่า เมื่อเทียบกับงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ ลดลงเกือบ 2 เท่า เมื่อเทียบกับงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม และงานวิจัยเดิมที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น

สำหรับการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์กับผลเฉลยแม่นยำตรงบริเวณขอบ AB ซึ่งจะเห็นว่าผลที่ได้ในงานวิจัยนี้ให้ค่าที่ถูกต้องและต่อเนื่องมากกว่าผลจากงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ และให้ผลคล้ายกับผลจากงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุมและที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น ที่เป็นเช่นนี้เพราะในงานวิจัยนี้ได้คำนวณค่าหน่วยแรงที่ขอบของปัญหา จากการประมาณค่าของหน่วยแรงที่ได้จากชิ้นส่วนรอบจุดต่อ ซึ่งคล้ายกับงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุมและที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น ซึ่งทำให้ได้ผลการคำนวณที่ต่อเนื่องเหมือนกัน

จากขั้นตอนการพัฒนาโปรแกรมที่ได้มีการเปลี่ยนชนิดของชิ้นส่วนมาเป็นชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่าย พร้อมการหมุนที่จุดยอด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนของปัญหาในการคำนวณรอบถัดไป เพื่อเป็นการตรวจสอบประสิทธิภาพของการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วน จึงได้ทำการทดสอบ โดยการเปรียบเทียบกับผลการวิเคราะห์ที่ได้มีการเปลี่ยนเฉพาะชนิดของชิ้นส่วนมาเป็นชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอดเพียงอย่างเดียว โดยได้แสดงโครงข่ายชิ้นส่วน และผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงในโครงข่ายสุดท้าย ดังแสดงไว้ในรูปที่ 4.1.8 – 4.1.11

ในด้านขนาดและความต่อเนื่องของชิ้นส่วนในโครงข่าย จะเห็นว่าวิธีที่ใช้เฉพาะชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอดเพียงอย่างเดียว นั้น มีขนาดของชิ้นส่วนที่ใหญ่ขึ้นและใกล้เคียงกับงานวิจัยเดิมที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น แต่ในด้านความต่อเนื่องของโครงข่ายโดยรวมนั้นพบว่ามีความต่อเนื่องน้อยกว่าในงานวิจัยที่ใช้ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูล ในด้านผลของเวลาในการวิเคราะห์ จะเห็นว่า มีจุดต่อลดลงเหลือเพียง 214 จุดต่อ และใช้เวลาในการคำนวณไม่ถึง 1 วินาที แต่ใช้จำนวนรอบรวมทั้งหมด 6 รอบ ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์จึงน้อยกว่าค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมให้ สำหรับผลการวิเคราะห์กับผลเฉลยแม่นยำตรงบริเวณขอบ AB จะเห็นว่าให้ผลคล้ายกับผลจากงานวิจัยที่ใช้ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูล

จากตัวอย่างนี้ จะเห็นว่าผลที่ได้จากการใช้เฉพาะชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอดเพียงอย่างเดียวมีจำนวนจุดต่อน้อยกว่าในงานวิจัยที่ใช้ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูล แต่ก็ส่งผลต่อความต่อเนื่องของโครงข่ายและจำนวนรอบของการคำนวณ

4.2 ตัวอย่างที่ 2 ปัญหาแผ่นวงกลมบางรับแรงกระทำเป็นจุด

ตัวอย่างนี้เป็นปัญหาแผ่นวงกลมบางขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 2 ซม. รับแรงกระทำเป็นจุด 2 แรง ในแนวแกน y กระทำในทิศทางตรงกันข้าม ขนาดของแรงเท่ากับ 100 กก. วัสดุมีค่าโมดูลัสยืดหยุ่นเท่ากับ 2×10^6 กก./ตร.ซม. และอัตราส่วนบัวของเท่ากับ 0.3 ดังแสดงในรูปที่ 4.2.1 (ก) และสามารถสร้างแบบจำลองสำหรับวิเคราะห์ผลโดยอาศัยหลักสมมาตรได้ดังแสดงใน รูปที่ 4.2.1 (ข) โดยจำลองแรงกระทำให้แก่กระจายเป็นรูปสามเหลี่ยมเพื่อลดปัญหาเนื่องจากบริเวณที่แรงกระทำเป็นจุดมีความคลาดเคลื่อนมากกว่าในบริเวณอื่นมาก ทำให้การลดขนาดชิ้นส่วนในบริเวณอื่นไม่มีผลต่อความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์โดยรวม โดยในปัญหานี้ได้จำลองแรงที่กระทำแก่กระจายออกไป 4 องศาจากแนวแรงเดิมในที่มีระยะ 0.0698 ซม. จากแนวแกน y ซึ่งอาจจะกำหนดให้มากขึ้นหรือน้อยลงกว่านี้ได้ขึ้นอยู่กับผู้ทำการวิเคราะห์

กำหนดค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมให้เท่ากับ 0.05 จะได้ผลการวิเคราะห์ทั้งหมด 3 รอบ โดยมีโครงข่ายชิ้นส่วนและการกระจายของค่าคลาดเคลื่อนในแต่ละรอบดังแสดงในรูปที่ 4.2.2 – 4.2.3 จะเห็นว่าโครงข่ายชิ้นส่วนในโครงข่ายสุดท้ายมีความต่อเนื่องกันเป็นอย่างดี โดยจะพบว่ามีการเพิ่มจุดต่อหนาแน่นเฉพาะบริเวณที่ได้รับแรงกระทำ ซึ่งก็เป็นผลมาจากค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นสูงเฉพาะบริเวณที่แรงกระทำเท่านั้น

สำหรับการกระจายค่าหน่วยแรงต่างๆ สามารถแสดงได้ในรูปที่ 4.2.3 – 4.2.4 ซึ่งจะมีการต่อเนื่องของเส้นขอบคอนทัวร์ในทุกโครงข่าย และเมื่อนำไปเปรียบเทียบกับหน่วยแรงที่คำนวณได้จากผลเฉลยแม่นยำตรงตามแนว AB ในรูปที่ 4.2.1 ได้ผลการเปรียบเทียบในแต่ละโครงข่ายดังแสดงในรูปที่ 4.2.5 – 4.2.7 ซึ่งจะมีความใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรง

ในการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ กับผลจากงานวิจัยเดิมที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น พบว่าได้ผลการวิเคราะห์ทั้งหมด 8 รอบ งานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม พบว่าได้ผลการวิเคราะห์ทั้งหมด 4 รอบ และงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ พบว่าได้ผลการวิเคราะห์ทั้งหมด 7 รอบ โดยได้แสดงโครงข่ายชิ้นส่วน และผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงในโครงข่ายสุดท้าย ดังแสดงไว้ในรูปที่ 4.2.8 – 4.2.11

ในด้านขนาดและความต่อเนื่องของชิ้นส่วนในโครงข่าย พบว่าในงานวิจัยนี้มีขนาดชิ้นส่วนเล็กกว่าแต่ยังคงให้ความต่อเนื่องของชิ้นส่วนที่ไม่ด้อยไปกว่าในงานวิจัยเดิมที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น

ในด้านเวลาในการวิเคราะห์ จะเห็นว่าผลการวิเคราะห์จากงานวิจัยนี้ ในโครงข่ายสุดท้ายมีจำนวนจุดต่อเพียง 105 จุดต่อเท่านั้น และใช้เวลาในการคำนวณทั้งหมดไม่ถึง 1 วินาที ซึ่งในงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ มีจำนวนจุดต่อในโครงข่ายสุดท้ายถึง 2630 จุดต่อและใช้เวลาในการคำนวณทั้งหมด 11 วินาที ในงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม มีจำนวนจุดต่อในโครงข่ายสุดท้าย 2366 จุดต่อและใช้เวลาในการคำนวณทั้งหมด 11 วินาที และในงานวิจัยเดิมที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น มีจำนวนจุด

ต่อในโครงข่ายสุดท้าย 151 จุดต่อและใช้เวลาในการคำนวณทั้งหมดไม่ถึง 1 วินาที ซึ่งจะเห็นว่าในงานวิจัยนี้ ทำให้จำนวนจุดต่อลดลง และลดลงถึงกว่า 25 เท่าเมื่อเทียบกับงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ

สำหรับการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์กับผลเฉลยแม่นยำตรงบริเวณขอบ AB ซึ่งจะเห็นว่าผลที่ได้ในงานวิจัยนี้ยังคงให้ค่าที่ถูกต้องและต่อเนื่องมากกว่าผลงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ และให้ผลคล้ายกับผลงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุมและที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น ถึงแม้จะมีจุดต่อจำนวนน้อยมากที่อยู่บนขอบ AB

เมื่อได้ทดลองใช้เฉพาะชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอดเพียงอย่างเดียว พบว่า ได้ผลการวิเคราะห์ทั้งหมด 6 รอบโดยได้แสดงโครงข่ายชิ้นส่วน และผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำในโครงข่ายสุดท้าย ดังแสดงไว้ในรูปที่ 4.2.8 – 4.2.11

ในด้านขนาดและความต่อเนื่องของชิ้นส่วนในโครงข่าย จะเห็นว่าชิ้นส่วนที่ได้มีขนาดไม่สวยงามเท่าที่ควรและโครงข่ายไม่ค่อยมีความต่อเนื่อง ในด้านเวลาในการวิเคราะห์ จะเห็นว่ามีจุดต่อลดลงเหลือเพียง 98 จุดต่อ และใช้เวลาในการคำนวณไม่ถึง 1 วินาที แต่ใช้จำนวนรอบรวมทั้ง 6 รอบ สำหรับผลการวิเคราะห์กับผลเฉลยแม่นยำตรงบริเวณขอบ AB จะเห็นว่าผลเฉลยที่ได้ยังคงให้ค่าที่ถูกต้องและต่อเนื่องเช่นเดิม

เมื่อพิจารณาถึงผลกระทบเนื่องจากการจำลองแรงที่กระทำแก่กระจายออกไป 4 องศาจากแนวแรงเดิม ซึ่งจะเห็นว่าไม่ส่งผลกระทบต่อหน่วยแรงบริเวณขอบ AB ของปัญหาเนื่องจากขอบ AB ห่างไกลจากตำแหน่งที่แรงกระทำมาก จึงทำให้ผลกระทบจากการจำลองแรงกระทำเป็นจุดเป็นแรงแก่กระจายนี้ไม่ส่งผลกระทบต่อบริเวณที่ได้รับผลกระทบควรจะอยู่ใกล้กับตำแหน่งที่แรงกระทำ ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ที่ขอบ AC กับผลเฉลยแม่นยำตรง และเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ที่ได้จากงานวิจัยเดิมกับผลเฉลยแม่นยำตรงที่ขอบ AC ด้วย ดังแสดงไว้ในรูปที่ 4.2.12 – 4.2.14 ซึ่งจะพบว่าผลจากการเปรียบเทียบทุกงานวิจัยให้ค่าของหน่วยแรงในลักษณะคล้ายกัน คือมีความคลาดเคลื่อนมากบริเวณที่แรงกระทำ แต่มีลักษณะของหน่วยแรงเป็นไปในทางเดียวกัน และผลการวิเคราะห์หน่วยแรงเฉือนที่ได้จากงานวิจัยนี้ให้ค่าคลาดเคลื่อนที่มากกว่าในงานวิจัยเดิม ซึ่งค่าคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นเนื่องจากการจำลองแรงกระทำเป็นจุดเป็นแรงแก่กระจายนั่นเอง ซึ่งเมื่อทดลองลดค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ให้ลดลงก็ยังไม่สามารถแก้ไขปัญหานี้ได้ เนื่องจากสภาพของปัญหาที่เปลี่ยนแปลงไปแล้วนั่นเอง วิธีแก้ปัญหาคือต้องลดมุมที่ให้แรงแก่กระจายกระทำให้เล็กลงเพื่อให้ลักษณะของปัญหาใกล้เคียงกับปัญหาเดิมมากที่สุด แต่ก็ส่งผลให้เกิดค่าคลาดเคลื่อนมากขึ้นอย่างมากที่บริเวณแรงกระทำ

จากตัวอย่างนี้ จะเห็นว่าผลที่ได้จากการใช้เฉพาะชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอดเพียงอย่างเดียวมีจำนวนจุดต่อน้อยกว่าในงานวิจัยที่ใช้ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูล แต่ก็ส่งผลกระทบต่อต่อเนื่องของโครงข่ายและจำนวนรอบของการคำนวณ เช่นเดียวกับในตัวอย่างที่ 1 และจะเห็นว่าการจำลองแบบจำลองของปัญหามีความสำคัญมากดังที่ได้เห็นในการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ตามแนว AC กับผลเฉลยแม่นยำตรง

4.3 ตัวอย่างที่ 3 ปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายคานอิสระ

ในตัวอย่างนี้เป็นการวิเคราะห์ปัญหาหับแรงดัด โดยสามารถตรวจสอบผลการวิเคราะห์ที่ได้ทั้งในด้านหน่วยแรงและระยะการเคลื่อนที่กับผลเฉลยแม่นยำตรง เพื่อยืนยันความถูกต้องของผลการวิเคราะห์ก่อนจะนำไปใช้วิเคราะห์ปัญหาที่มีลักษณะคล้ายกัน (รับแรงดัด) ในตัวอย่างที่ 4 ซึ่งเป็นปัญหาการใช้งานจริง ไม่มีผลเฉลยแม่นยำตรง โดยลักษณะของปัญหาที่ใช้วิเคราะห์ในตัวอย่างที่ 3 นี้เป็นคานยื่นที่มีความยาว 200 ซม. ลึก 30 ซม. และกว้าง 20 ซม. กำหนดค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของวัสดุเท่ากับ 2.634×10^5 กก./ซม. และมีอัตราส่วนบัวของเท่ากับ 0.22 รับแรงกระทำที่ปลายคานด้านอิสระ 1,000 กก. ดังแสดงในรูปที่ 4.3.1 (ก) โดยจำลองแรงกระทำให้กระจายทั่วทั้งหน้าตัดคาน ดังแสดงในรูปที่ 4.3.1 (ข)

กำหนดค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมให้เท่ากับ 0.05 จะได้ผลการวิเคราะห์ 1 รอบ โดยมีโครงข่ายชิ้นส่วนดังแสดงในรูปที่ 4.3.2 (ก) ซึ่งเมื่อพิจารณาถึงค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่เกิดขึ้น จะพบว่ามีการกระจายไม่ดีนักเนื่องจากไม่มีการปรับขนาดชิ้นส่วนจึงไม่สามารถที่จะกระจายค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นได้ และจะพบว่าค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในพื้นที่ของปัญหาส่วนใหญ่จะน้อยมากคือไม่ถึง 1 เปอร์เซ็นต์ แต่จะเกิดค่าคลาดเคลื่อนที่สูงบริเวณจุดรองรับ และปลายคานที่รับแรงแต่ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นก็ไม่สูงมากและเป็นบริเวณน้อย จึงทำให้ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์โดยรวมที่เกิดขึ้นน้อยกว่าค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมให้ทำให้ไม่มีการปรับขนาดชิ้นส่วน

สำหรับการกระจายค่าหน่วยแรงต่างๆ สามารถแสดงได้ในรูปที่ 4.3.2 ซึ่งจะมีการต่อเนื่องของเส้นขอบคอนทัวริตี้ เมื่อนำไปเปรียบเทียบกับหน่วยแรงที่คำนวณได้จากผลเฉลยแม่นยำตรงตามแนวขอบล่างของคาน ได้ผลการเปรียบเทียบ ดังแสดงในรูปที่ 4.3.3 ซึ่งจะมีความใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงมาก

ในการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ กับผลจากงานวิจัยเดิมที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น พบว่าได้ผลการวิเคราะห์ทั้งหมด 1 รอบ งานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม พบว่าได้ผลการวิเคราะห์ทั้งหมด 5 รอบ และงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ พบว่าได้ผลการวิเคราะห์ทั้งหมด 8 รอบ โดยได้แสดงโครงข่ายชิ้นส่วน และผลวิเคราะห์เปรียบเทียบ ดังแสดงไว้ใน รูปที่ 4.3.4 – 4.3.7

ในด้านขนาดและความต่อเนื่องของชิ้นส่วนในโครงข่าย ไม่สามารถเปรียบเทียบที่ได้จากงานวิจัยนี้กับงานวิจัยเดิมได้อย่างชัดเจนเนื่องจากผลที่ได้จากงานวิจัยนี้ไม่มีการปรับขนาดโครงข่าย

ในด้านเวลาในการวิเคราะห์ จะเห็นว่าผลการวิเคราะห์จากงานวิจัยนี้ สามารถเข้าสู่ผลเฉลยได้อย่างรวดเร็ว เนื่องจากคุณสมบัติของชิ้นส่วนที่ใช้ในการวิเคราะห์เหมาะสมกับลักษณะการเปลี่ยนแปลงของหน่วยแรง ทำให้ค่าหน่วยแรงที่ได้ลู่เข้าอย่างรวดเร็ว ซึ่งในโครงข่ายมีจำนวนจุดต่อเพียง 220 จุดต่อเท่านั้น และใช้เวลาในการคำนวณทั้งหมดไม่ถึง 1 วินาที ซึ่งในงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซมีจำนวนจุดต่อถึง 9863 จุดต่อและใช้เวลาในการคำนวณทั้งหมด 256 วินาที ในงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุมมีจำนวนจุดต่อถึง

7023 จุดต่อและใช้เวลาในการคำนวณทั้งหมด 239 วินาที และในงานวิจัยเดิมที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิด ความเครียดเชิงเส้นมีจำนวนจุดต่อ 805 จุดต่อและใช้เวลาในการคำนวณทั้งหมด 2 วินาที ซึ่งจะเห็นว่าในงานวิจัยนี้ทำให้จำนวนจุดต่อลดลงถึงเกือบ 4 เท่า และลดลงถึงกว่า 45 เท่าเมื่อเทียบกับงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ ใช้เวลาในการคำนวณทั้งหมดลดลงกว่า 2 เท่าเมื่อเปรียบเทียบกับงานวิจัยเดิม และลดลงเกินกว่า 256 เท่าเมื่อเปรียบเทียบกับงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ

เมื่อได้ทดลองใช้เฉพาะชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอดเพียงอย่างเดียว พบว่า ได้ผลการวิเคราะห์ 1 รอบ ผลที่ได้จึงไม่สามารถเปรียบเทียบกับงานวิจัยที่ใช้ร่วมกับการปรับรูปการส่งข้อมูล เนื่องจากผลที่ได้จากงานวิจัยนี้ไม่มีการปรับขนาดโครงข่าย โดยได้แสดงโครงข่ายชิ้นส่วน ดังแสดงไว้ในรูปที่ 4.2.8 สำหรับผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงนั้น จะได้ผลเหมือนกับงานวิจัยที่ใช้ร่วมกับการปรับรูปการส่งข้อมูล

สำหรับการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์กับผลเฉลยแม่นยำตรงบริเวณขอบล่างของคาน ซึ่งจะเห็นว่าผลที่ได้ในงานวิจัยนี้ให้ค่าที่ถูกต้องและต่อเนื่องมากกว่า ผลงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ และให้ผลคล้ายกับผลงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุมและที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น

จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่า ผลของงานวิจัยนี้ให้ผลที่ดีกว่าผลจากงานวิจัยเดิมในด้านจำนวนจุดต่อและเวลาที่น้อยลง

4.4 ตัวอย่างที่ 4 ปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิดรับแรงกระทำเป็นจุด

ตัวอย่างนี้เป็นกรณีวิเคราะห์ปัญหาที่มีค่าหน่วยแรงเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วตลอดทั้งโดเมน และมีหลายบริเวณที่มีค่าคลาดเคลื่อนสูงทำให้ยากแก่การกระจายค่าคลาดเคลื่อนให้เท่ากันทั้งโดเมน โดยตัวอย่างนี้เป็นกรณีวิเคราะห์คานขนาด 300 ซม. ลึก 40 ซม. กว้าง 20 ซม. มีฐานรองรับแบบธรรมดาและรับแรงกระทำเป็นจุด ซึ่งในปัญหาที่นำไปทำการวิเคราะห์จะเปลี่ยนแรงที่กระทำเป็นจุดเป็นแรงแผ่กระจายรูปสามเหลี่ยมมีฐานกว้าง 10 ซม. เพื่อลดค่าคลาดเคลื่อนที่จะเกิดขึ้นสูงมากบริเวณที่แรงกระทำเป็นจุด และคานถูกออกแบบให้มีช่องเปิดภายในคาน 2 ช่อง ขนาดช่องละ 40 x 18 ซม. เจาะห่างจากขอบบนและขอบล่างข้างละ 11 ซม. ดังแสดงในรูปที่ 4.4.1 (ก) แต่เนื่องจากการจำลองแบบคานให้มีรูเจาะเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากจะให้ค่าคลาดเคลื่อนบริเวณที่เป็นจุดต่อมุมฉากสูงมาก เมื่อปรับขนาดจึงมีการปรับขนาดบริเวณนี้เท่านั้นทำให้การปรับขนาดที่บริเวณอื่นทำได้ไม่ดี การแก้ปัญหานี้จึงทำได้เช่นเดียวกับการจำลองแรงกระทำเป็นจุดให้เป็นแรงกระทำแบบแผ่รูปสามเหลี่ยม นั่นคือพยายามหลีกเลี่ยงการสร้างจุดต่อที่มีการเปลี่ยนแปลงค่าหน่วยแรงกับจุดข้างเคียงที่แตกต่างกันมาก โดยการจำลองช่องเปิดบริเวณมุมฉากให้เป็นส่วนของเส้นโค้งรัศมี 3 ซม. ดังแสดงในรูปที่ 4.4.1 (ข)

กำหนดค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมรับให้เท่ากับ 0.05 จะได้ผลการวิเคราะห์ 4 รอบ โดยมีโครงข่ายดังแสดงในรูปที่ 4.4.2 จะเห็นว่าโครงข่ายชิ้นส่วนมีความต่อเนื่องกัน และมีการปรับขนาดชิ้นส่วนให้มี

ขนาดเล็กเพื่อลดค่าคลาดเคลื่อนที่บริเวณแรงกระทำ บริเวณจุดรองรับธรรมดา และบริเวณมุมของช่องเจาะ ซึ่งเมื่อพิจารณาถึงค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่เกิดขึ้น จะพบว่ามีค่าคลาดเคลื่อนมากบริเวณจุดรองรับทั้ง 2 ด้าน และบริเวณช่องเจาะ แต่ค่าคลาดเคลื่อนก็ไม่สูงมากนักเนื่องจากการปรับลดขนาดชิ้นส่วนให้มีขนาดเล็กลงเพื่อลดความคลาดเคลื่อน

สำหรับการกระจายค่าคลาดเคลื่อนและค่าหน่วยแรงต่างๆ สามารถแสดงได้ในรูปที่ 4.4.3 ซึ่งจะมีการต่อเนื่องของเส้นขอบคอนทิวรีตี แต่จะมีค่าหน่วยแรงเปลี่ยนแปลงชันมากบริเวณจุดรองรับ บริเวณแรงกระทำเป็นจุดและที่บริเวณมุมของช่องเจาะรูปสี่เหลี่ยม เมื่อนำหน่วยแรงในทิศทาง y และหน่วยแรงเฉือนที่คำนวณได้ไปเปรียบเทียบกับหน่วยแรงที่เป็นผลเฉลยแม่นยำตรงตามแนวขอบบนของคานซึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ ได้ผลการเปรียบเทียบ ดังแสดงในรูปที่ 4.4.4 และได้แสดงค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ซึ่งไม่มีผลเฉลยแม่นยำตรง ดังแสดงในรูปที่ 4.4.4 เช่นกัน ซึ่งจะมีค่าคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นมากบริเวณที่แรงกระทำ และบริเวณที่อยู่เหนือแนวช่องเจาะ ซึ่งก็เป็นผลจากการเปลี่ยนแปลงหน่วยแรงอย่างรวดเร็ว

ในการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ที่ได้ กับผลจากงานวิจัยเดิมที่ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น พบว่าได้ผลการวิเคราะห์ทั้งหมด 9 รอบ และงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม พบว่าได้ผลการวิเคราะห์ทั้งหมด 5 รอบ โดยได้แสดงโครงข่ายชิ้นส่วน และผลการวิเคราะห์เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงในโครงข่ายสุดท้าย ดังแสดงไว้ใน รูปที่ 4.4.5 – 4.4.8

ในด้านขนาดและความต่อเนื่องของชิ้นส่วนในโครงข่าย ในงานวิจัยนี้จะให้โครงข่ายที่มีความต่อเนื่องเป็นอย่างดีแม้จะมีการปรับขนาดให้มีขนาดเล็กและหนาแน่นบริเวณที่มีค่าคลาดเคลื่อนสูงก็ตาม

ในด้านเวลาในการวิเคราะห์ จะเห็นว่าผลการวิเคราะห์จากงานวิจัยนี้ สามารถเข้าสู่ผลเฉลยได้อย่างค่อนข้างเร็ว เนื่องจากสามารถสร้างจุดต่อภายในได้อย่างอิสระในทุกๆ รอบของการสร้างชิ้นส่วนใหม่ ทำให้ใช้ระยะเวลาเพียง 29 วินาที โดยมีจำนวนจุดต่อทั้งหมด 2182 จุดต่อ ซึ่งในงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุมใช้ระยะเวลาทั้งหมดมากถึง 1818 วินาที โดยมีจำนวนจุดต่อทั้งหมด 32062 จุดต่อ และงานวิจัยเดิมที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น ใช้ระยะเวลาทั้งหมด 59 วินาที โดยมีจำนวนจุดต่อทั้งหมด 1842 จุดต่อ ซึ่งจะเห็นว่าในงานวิจัยนี้ทำให้ระยะเวลาลดลงถึงกว่า 2 เท่าเมื่อเปรียบเทียบกับงานวิจัยเดิมที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น และลดลงถึงเกือบ 63 เท่าเมื่อเปรียบเทียบกับงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม ขณะที่จำนวนจุดต่อนั้นมีจำนวนเพิ่มขึ้นเมื่อเทียบกับงานวิจัยเดิมที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น ทั้งนี้เนื่องมาจากการสร้างชิ้นส่วนในแต่ละรอบจะอ้างอิงขนาดจุดต่อมาจากจุดต่อที่บริเวณขอบของรอบก่อนหน้า ทำให้ในปัญหาที่มีขนาดใหญ่ค่าความคลาดเคลื่อนจะแตกต่างกันอย่างมากตามบริเวณต่างๆ ภายในโดเมน ทำให้จุดต่อภายในที่สร้างขึ้นมามีขนาดแตกต่างไปจากที่ควรจะเป็น ทำให้มีการสร้างจุดต่อในบางตำแหน่งเกินความจำเป็น ในขณะที่เมื่อเทียบจำนวนจุดต่อกับงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม พบว่ามีจำนวนจุดต่อลดลงถึงเกือบ 15 เท่า

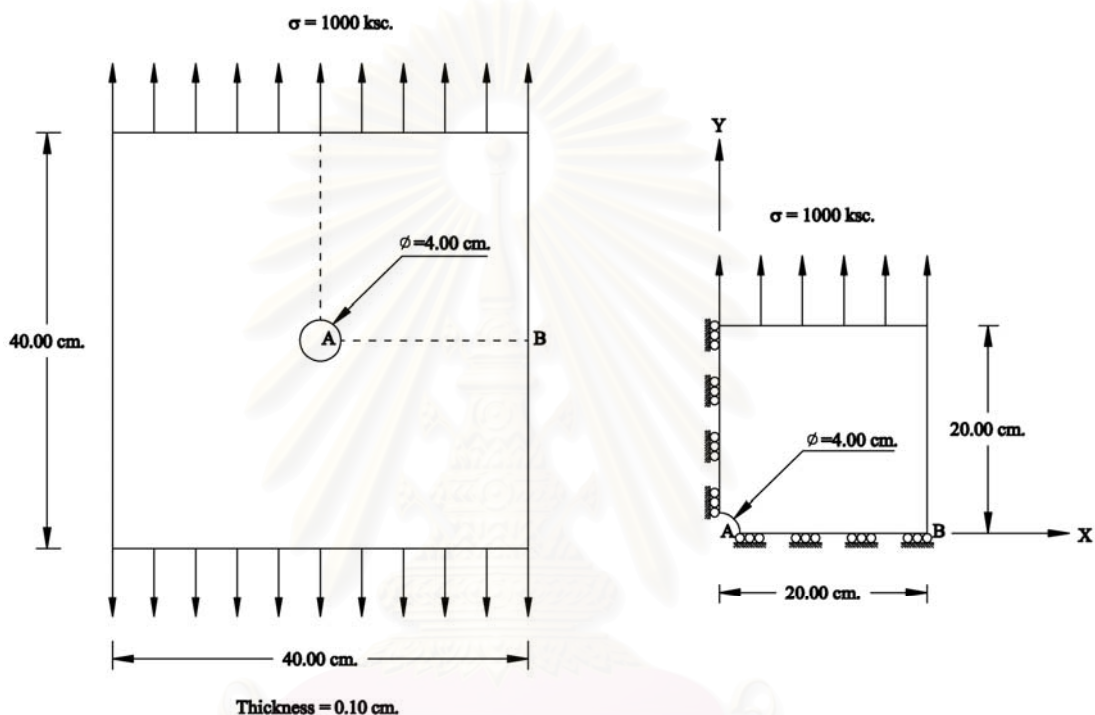
สำหรับการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์กับผลเฉลยแม่นยำตรงบริเวณขอบบนของคาน ซึ่งจะเห็นว่าผลที่ได้ในงานวิจัยเดิมให้ค่าหน่วยแรงมีลักษณะคล้ายกับผลที่ได้จากงานวิจัยนี้ คือจะมีค่าคลาดเคลื่อนมากที่บริเวณที่รับแรงกระทำ และบริเวณเหนือช่องเจาะรูปสี่เหลี่ยม

จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่า ผลของงานวิจัยนี้ให้ผลที่ดีกว่าผลจากงานวิจัยเดิม ในด้านของเวลาค่อนข้างมาก เพียงแต่มีการเพิ่มจุดเก็บความจำเป็นในบางพื้นที่ของปัญหาเท่านั้น

จากตัวอย่างการวิเคราะห์ จะพบว่าข้อกำหนดค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมให้ต้องมีความเหมาะสมกับการลักษณะการเปลี่ยนแปลงของหน่วยแรง คือเมื่อปัญหาที่มีการเปลี่ยนแปลงของหน่วยแรงตลอดทั้งพื้นที่ ก็ควรกำหนดค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมให้ค่อนข้างสูงเพื่อตรวจสอบการลู่เข้าของผลเฉลยก่อน แต่ถ้าหน่วยแรงมีค่าค่อนข้างคงที่เป็นบริเวณกว้างก็สามารถกำหนดค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมให้มีค่าน้อยได้ และในการปรับปรุงเพื่อให้ได้โครงข่ายที่มีการกระจายของค่าคลาดเคลื่อนที่เท่ากันตลอดทั้งโครงข่ายจะทำได้ยากมาก เนื่องจากปัญหามีค่าคลาดเคลื่อนน้อยเป็นบริเวณกว้างมาก ทำให้ส่งผลถึงค่าคลาดเคลื่อนโดยรวม ทำให้ผลการวิเคราะห์ที่ได้เกิดค่าคลาดเคลื่อนสูงในหลายบริเวณเสมอ โดยวิธีแก้ไขคืออาจทำการคำนวณค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์โดยรวม โดยแบ่งการคำนวณเป็นพื้นที่ย่อยๆ เพื่อให้เกิดการกระจายค่าคลาดเคลื่อนได้อย่างเท่ากันทั้งปัญหา

สำหรับการประมวลผลของโปรแกรมในงานวิจัยนี้ใช้ Intel(R) Core(TM)2 CPU T5500 @ 1.66GHz RAM 1022 MB ในการประมวลผล โดยใช้ไฟล์ไลบรารีมาตรฐานของภาษา C++ ในการหาระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณ ซึ่งสามารถคำนวณได้ต่ำสุดเป็นวินาทีเท่านั้น

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

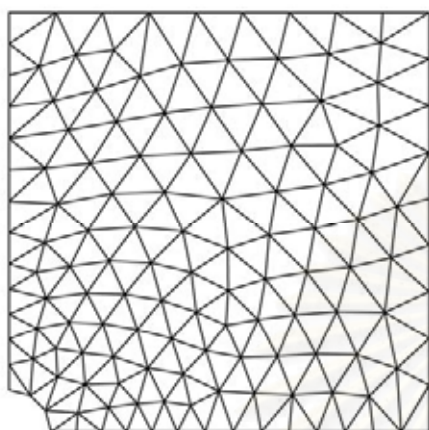


(ก) แผ่นบางมีรูเจาะรับแรงดึงหัวท้าย

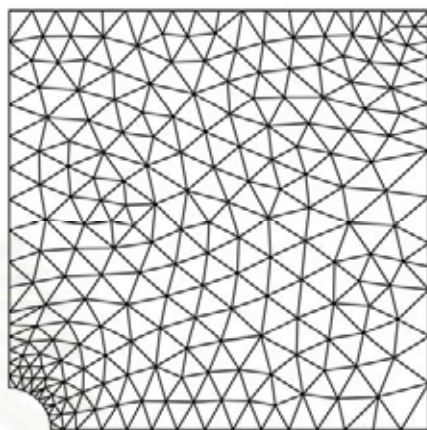
(ข) แบบจำลองการวิเคราะห์

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

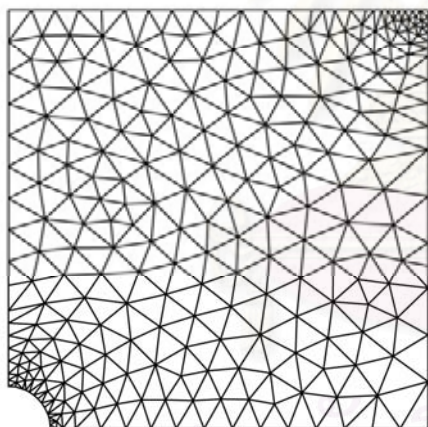
รูปที่ 4.1.1 ปัญหาแผ่นบางรับแรงดึงและแบบจำลองการวิเคราะห์



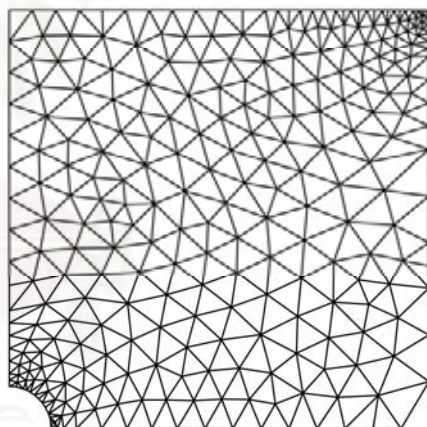
Mesh 1 Error = 0.0604 Nn = 140 Ne = 230



Mesh 2 Error = 0.0274 Nn = 249 Ne = 422

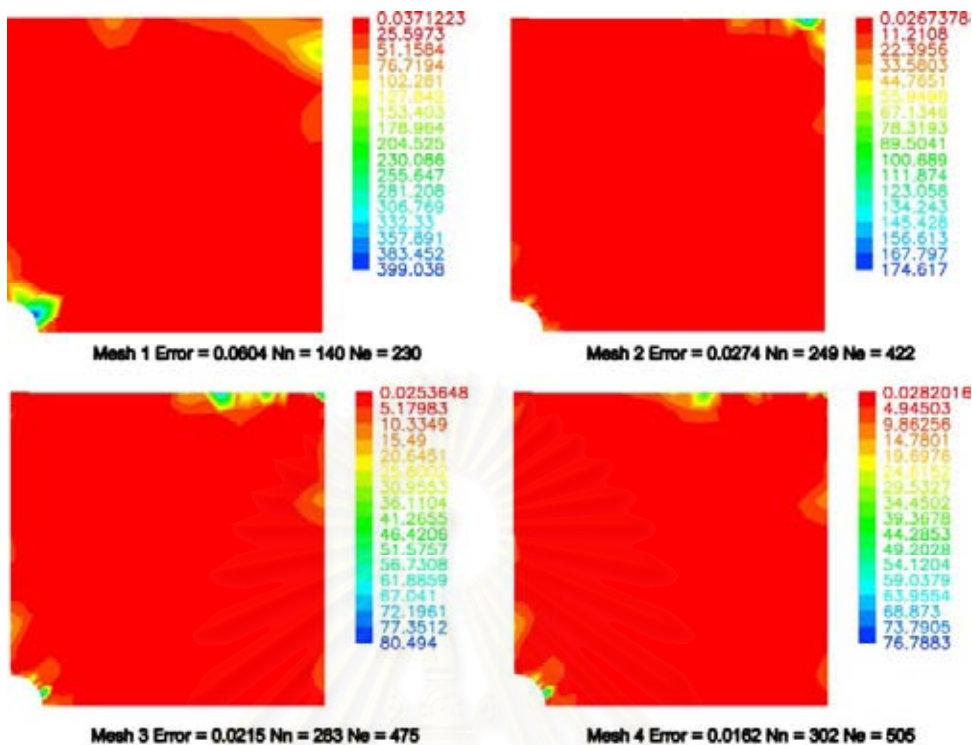


Mesh 3 Error = 0.0215 Nn = 283 Ne = 475

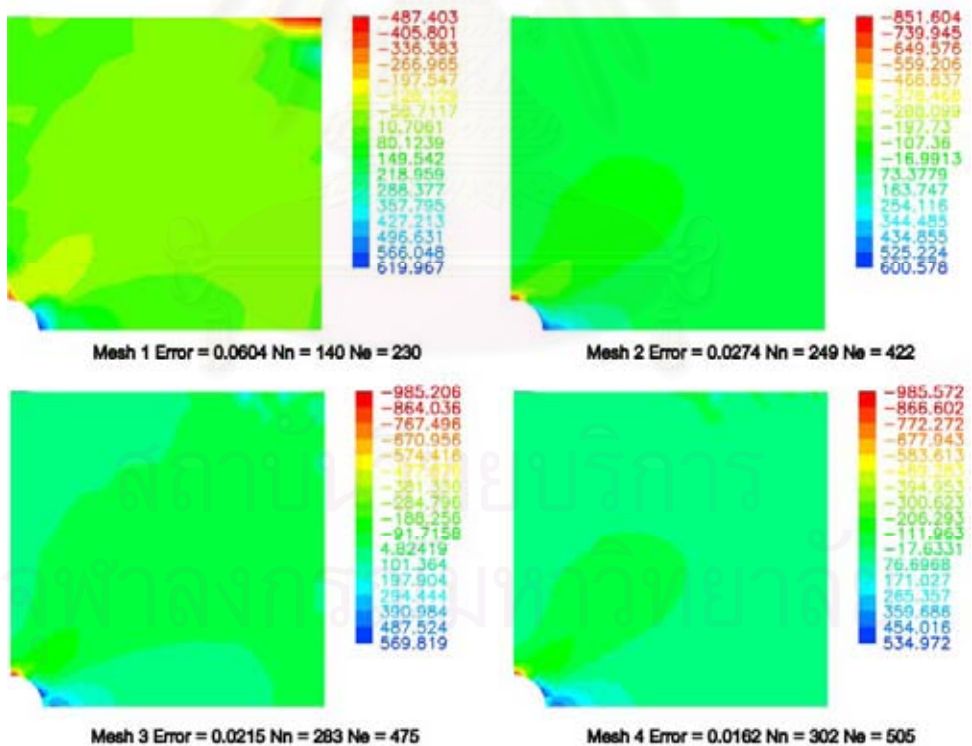


Mesh 4 Error = 0.0162 Nn = 302 Ne = 505

รูปที่ 4.1.2 โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง
โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด
ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป

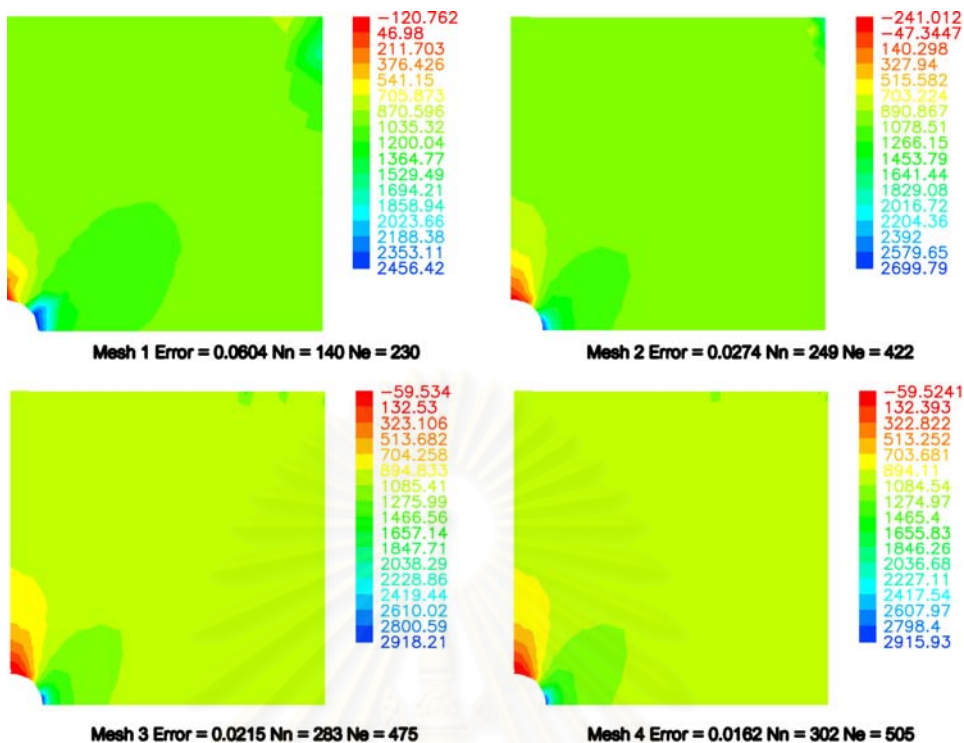


(ก) การกระจายความคลาดเคลื่อนของปัญหา

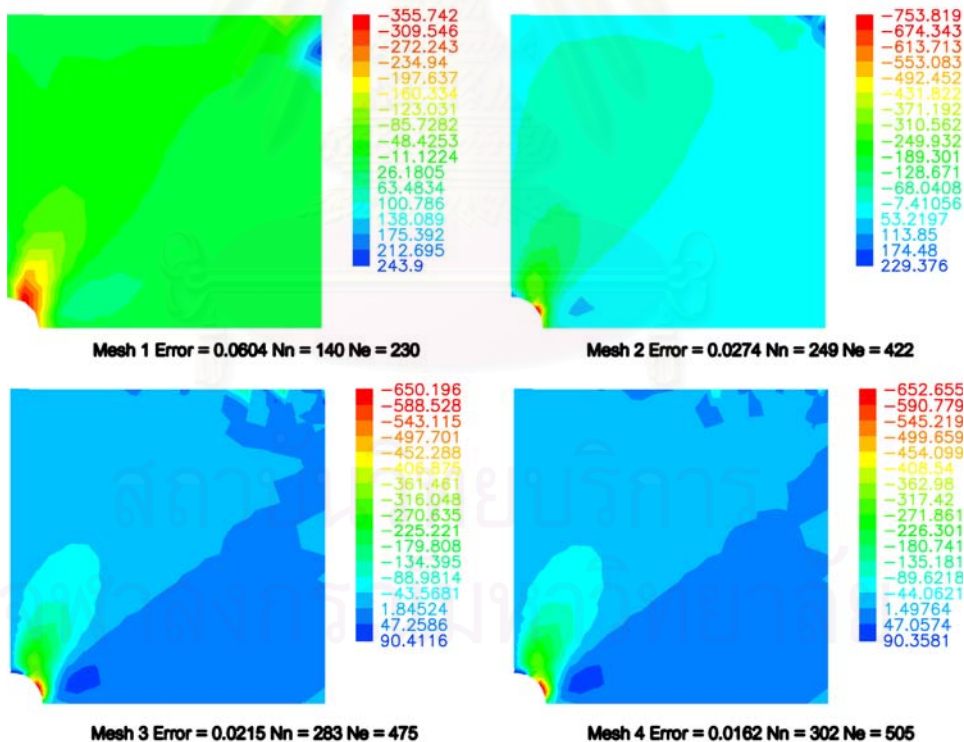


(ข) การกระจายหน่วยแรงในทิศทาง x ของปัญหา

รูปที่ 4.1.3 การกระจายความคลาดเคลื่อนและหน่วยแรงในทิศทาง x ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยึดอด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่นำไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป

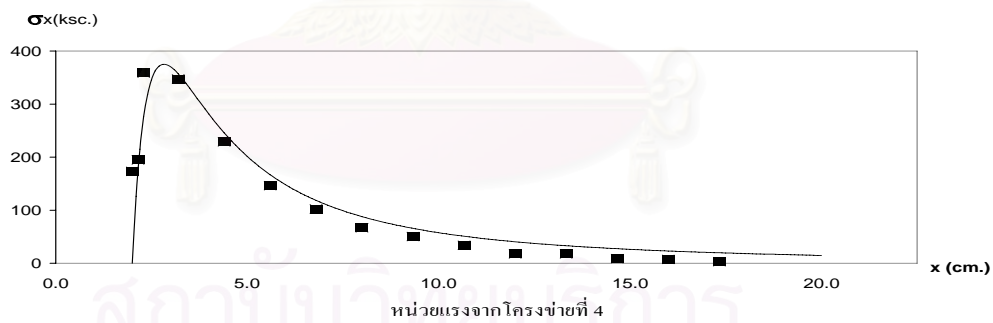
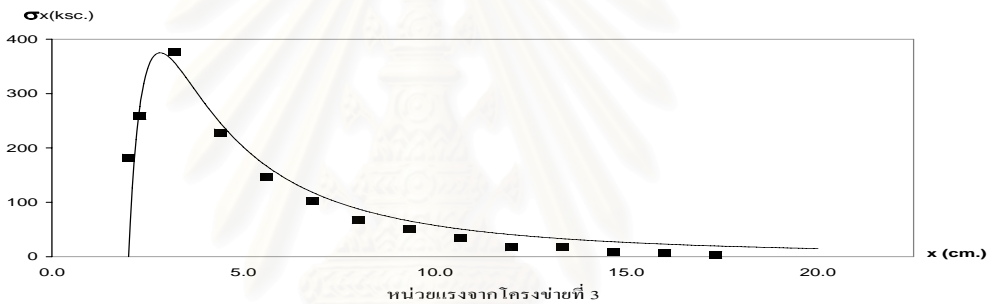
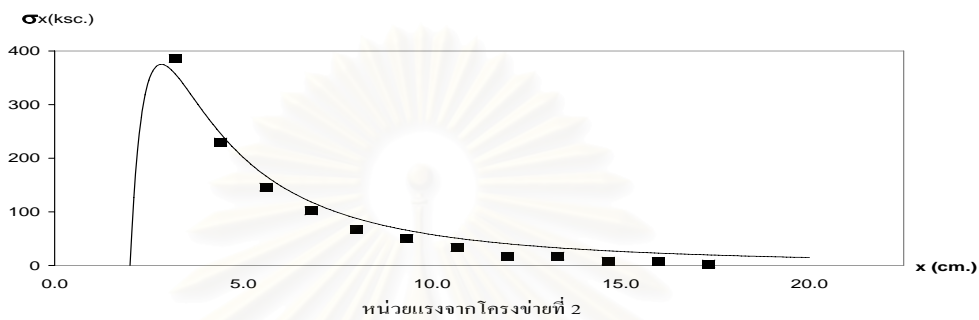
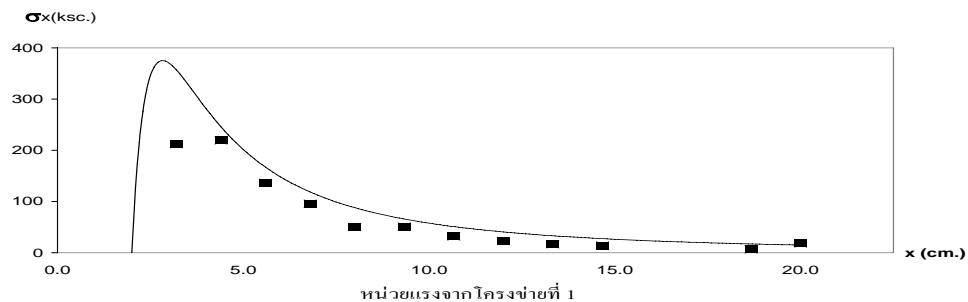


(ก) การกระจายหน่วยแรงในทิศทาง y ของปัญหา

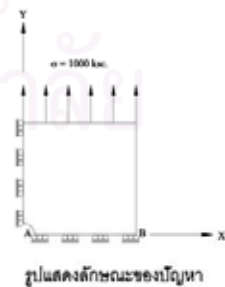


(ข) การกระจายหน่วยแรงเฉือน ของปัญหา

รูปที่ 4.1.4 การกระจายหน่วยแรงในทิศทาง y และหน่วยแรงเฉือน ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยึดอด รวมทั้งการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป



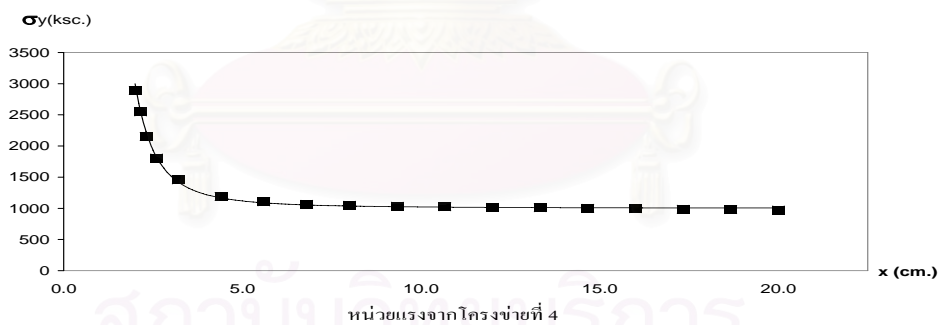
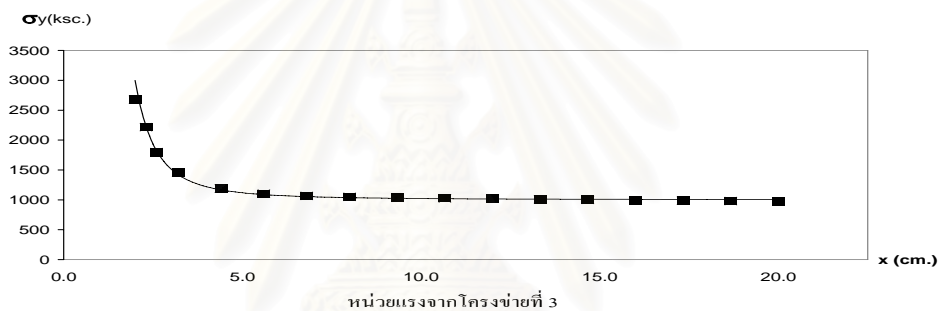
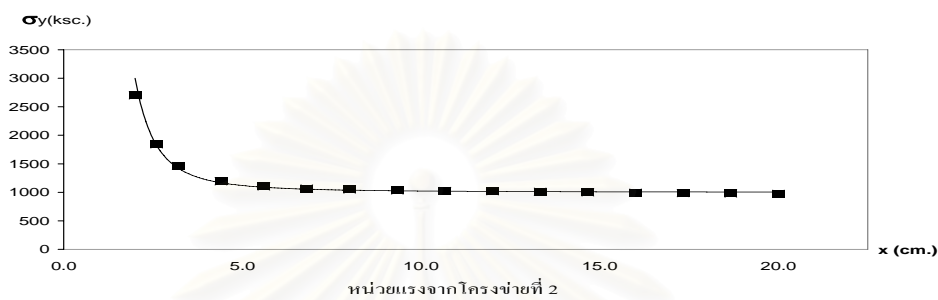
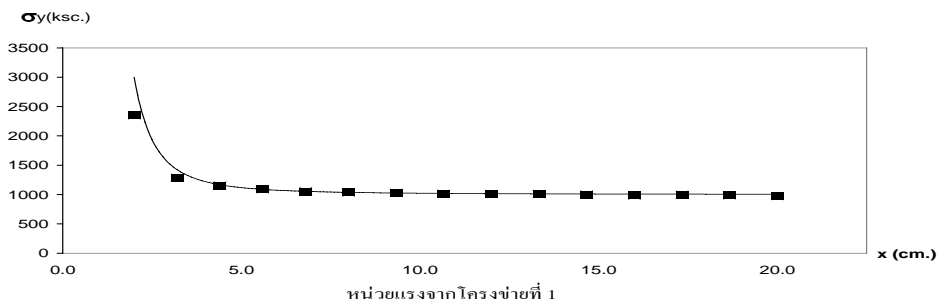
■ Finite Element solution
 — Exact solution



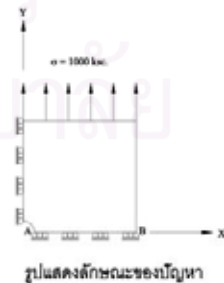
รูปที่ 4.1.5 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง

โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยึด

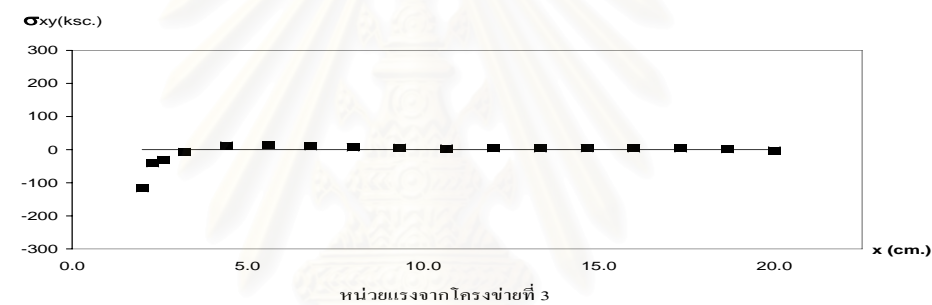
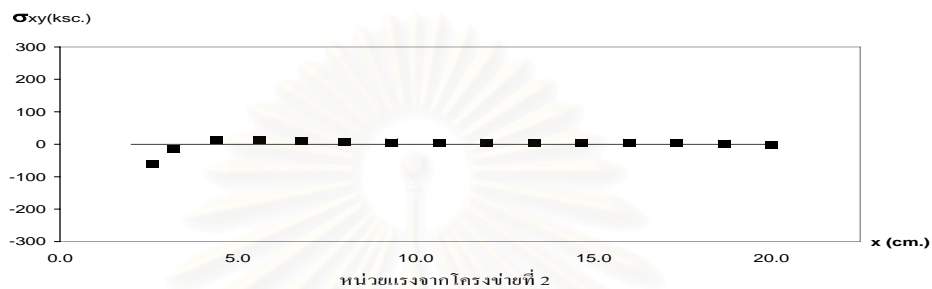
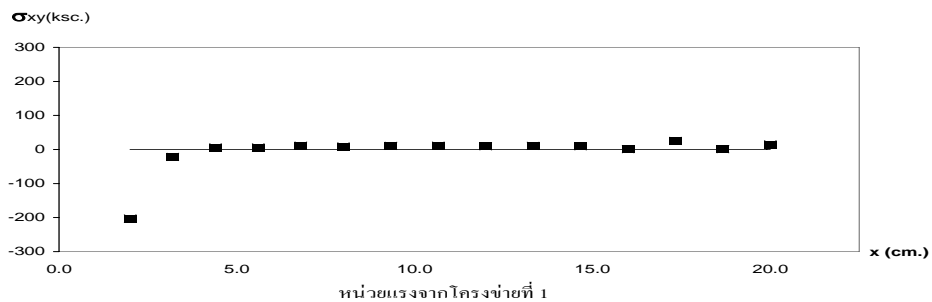
ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป



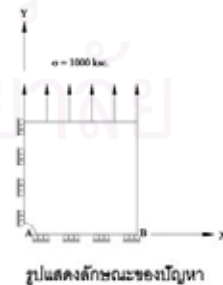
■ Finite Element solution
 — Exact solution



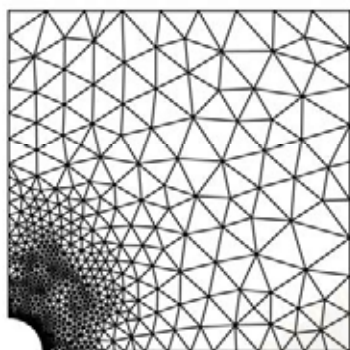
รูปที่ 4.1.6 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยึดอด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป



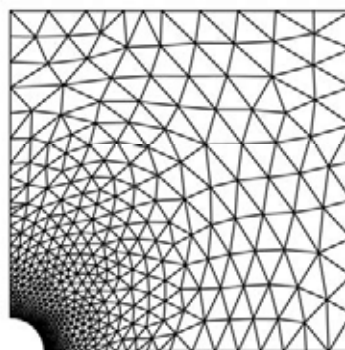
■ Finite Element solution
 — Exact solution



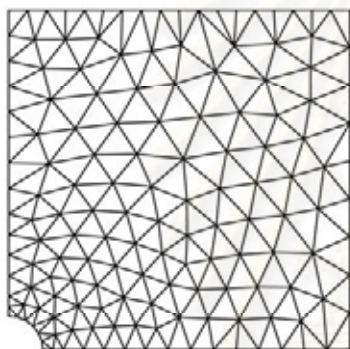
รูปที่ 4.1.7 ค่าหน่วยแรงเฉือน ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดิ่ง โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป



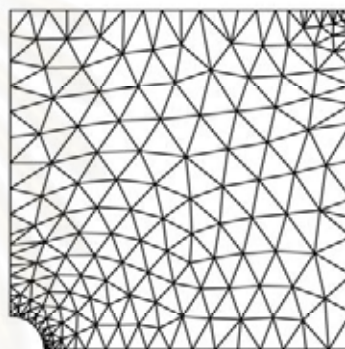
(ก) โครงข่ายชิ้นส่วนที่ 3 ของงานวิจัยเดิม
ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่
จึงใช้การปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายโดยวิธีการปรับเรียบของลาปลาส
Error = 0.0181 Nn = 665 Ne = 1222



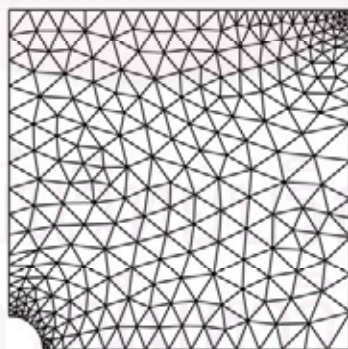
(ข) โครงข่ายชิ้นส่วนที่ 5 ของงานวิจัยเดิม
ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่
จึงใช้การปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายโดยวิธีการปรับเรียบเชิงมุม
Error = 0.0194 Nn = 533 Ne = 942



(ค) โครงข่ายชิ้นส่วนที่ 2 ของงานวิจัยเดิม
ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น
Error = 0.0115 Nn = 567 Ne = 252

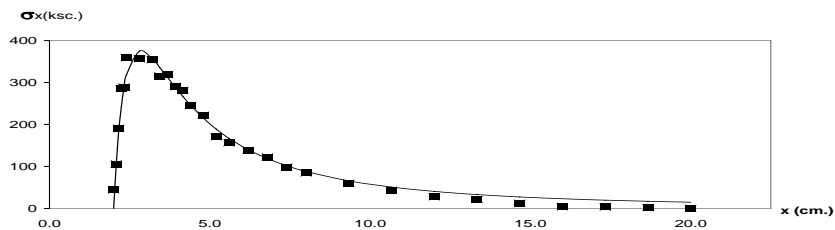


(ง) โครงข่ายชิ้นส่วนที่ 6 ของงานวิจัยนี้
ที่ใช้เฉพาะชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด
Error = 0.0174 Nn = 214 Ne = 329

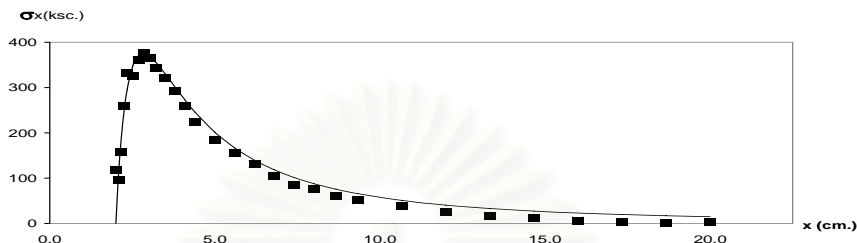


(จ) โครงข่ายชิ้นส่วนที่ 4 ของงานวิจัยนี้
ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด
ช่วยกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่ไม่ใช่ในการสร้างชิ้นส่วนรอบตัดไป
Error = 0.0162 Nn = 302 Ne = 505

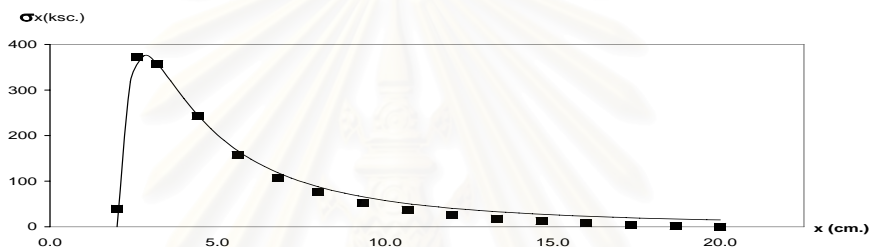
รูปที่ 4.1.8 การเปรียบเทียบ โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง
ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ



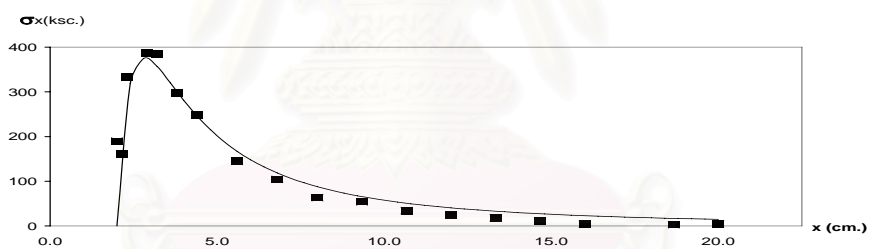
(ก) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ



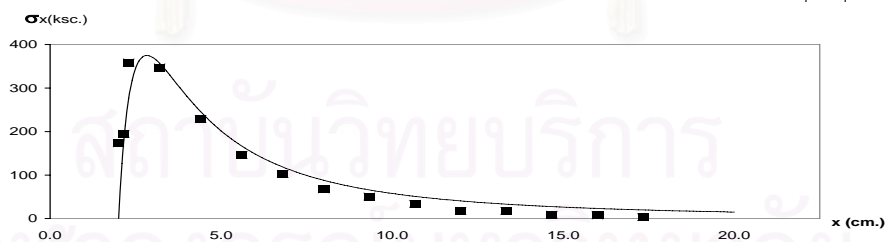
(ข) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม



(ค) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยเดิมที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น

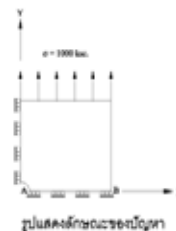


(ง) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยนี้ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด

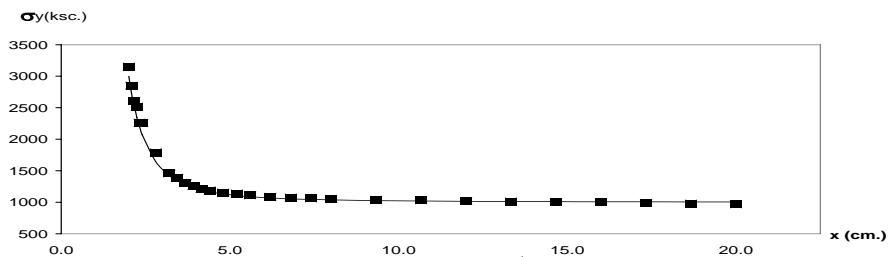


(จ) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยนี้ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่นำไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป

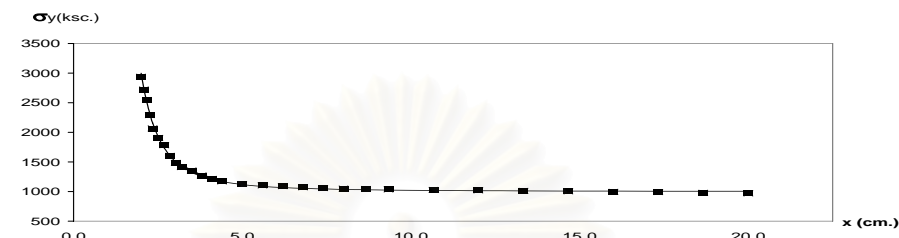
■ Finite Element solution
 — Exact solution



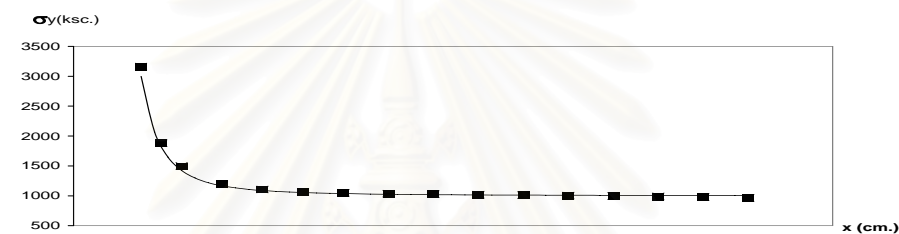
รูปที่ 4.1.9 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ



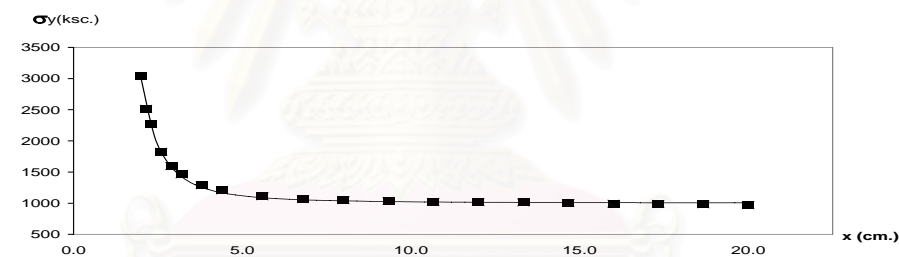
(ก) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ



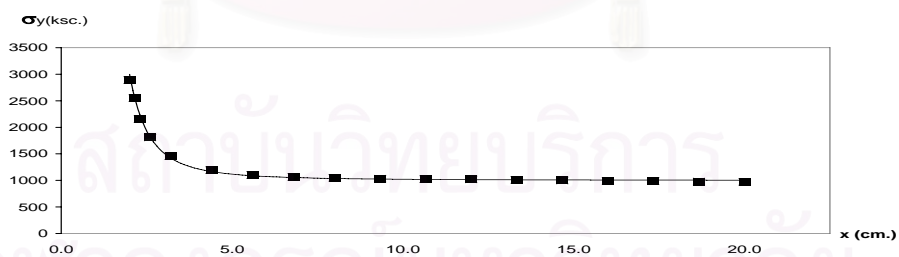
(ข) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม



(ค) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยเดิมที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น

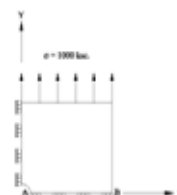


(ง) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยนี้ ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด



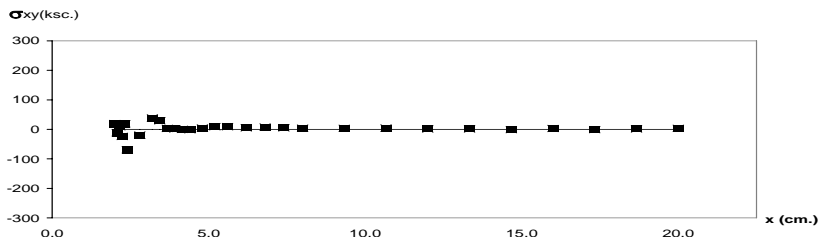
(จ) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยนี้ ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่นำไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป

■ Finite Element solution
 — Exact solution

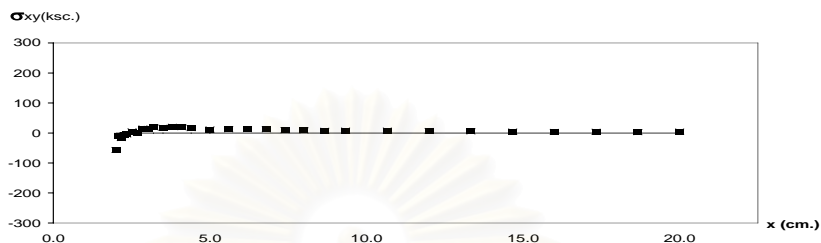


รูปแสดงลักษณะของปัญหา

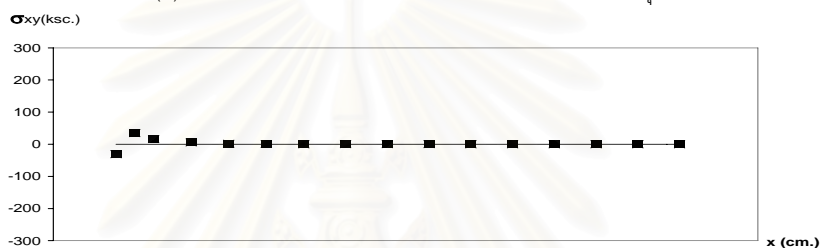
รูปที่ 4.1.10 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ



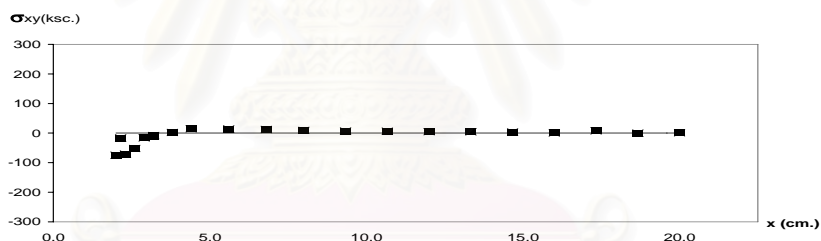
(ก) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ



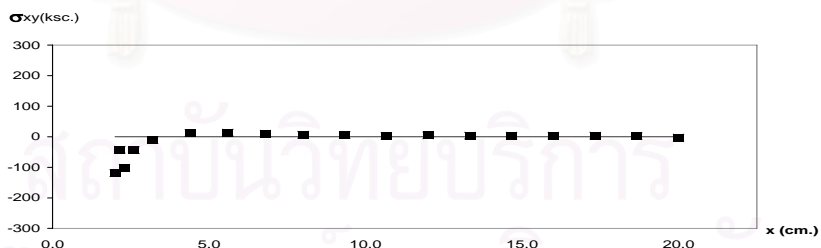
(ข) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม



(ค) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยเดิมที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น



(ง) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยนี้ ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด



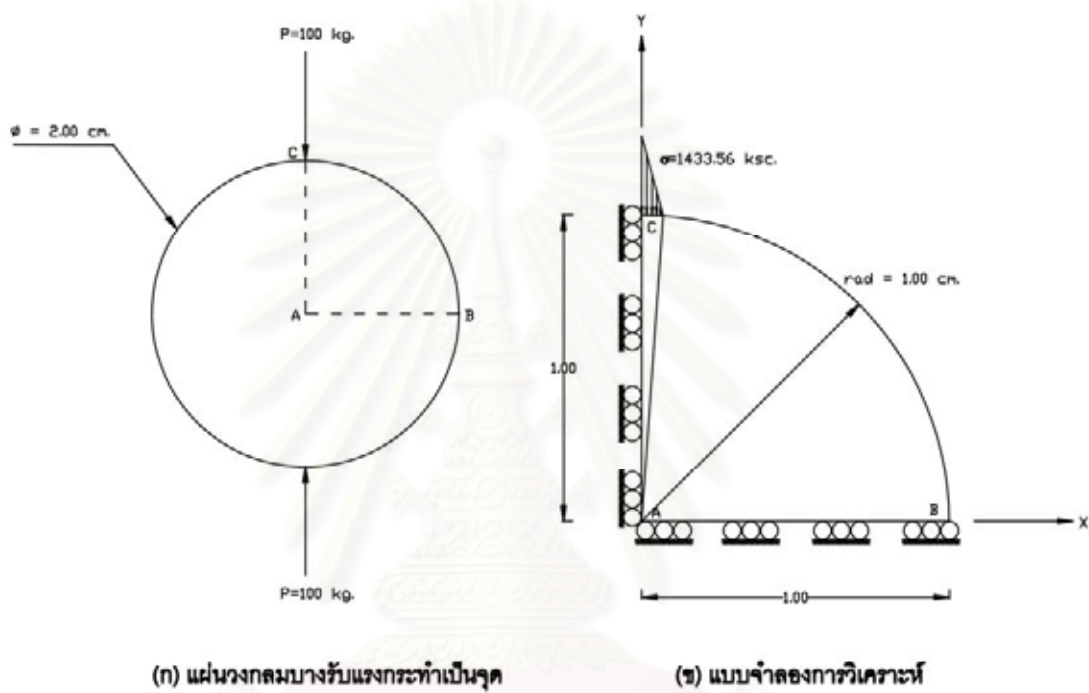
(จ) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยนี้ ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่นำไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป



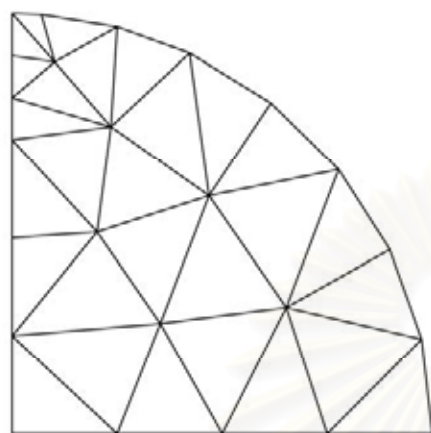
รูปที่ 4.1.11 ค่าหน่วยแรงเฉือน ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ

งานวิจัย	จำนวน โครงข่าย	จำนวน จุดต่อ	จำนวน ขึ้นส่วน	ความคลาด เคลื่อน สัมพัทธ์	เวลา (วินาที)	จำนวน เท่าของจุด ต่อเมื่อ เทียบกับ งานวิจัยนี้	จำนวน เท่าของ เวลาเมื่อ เทียบกับ งานวิจัยนี้
งานวิจัยเดิม ที่ใช้การปรับเรียบ ของลาปลาซ	3	665	1222	0.0181	2	2.20	1.00
งานวิจัยเดิม ที่ใช้การปรับเรียบ เชิงมุม	5	533	942	0.0194	2	1.76	1.00
งานวิจัยเดิมที่ ใช้ขึ้นส่วน สามเหลี่ยมชนิด ความเครียด เชิงเส้น	2	567	252	0.0115	1	1.88	0.50
งานวิจัยนี้ที่ใช้ เฉพาะขึ้นส่วน สามเหลี่ยม อย่างง่ายพร้อม การหมุนที่จุดยอด	6	214	329	0.0174	<1	0.71	-
งานวิจัยนี้ที่ใช้ ขึ้นส่วนสามเหลี่ยม อย่างง่ายพร้อมการ หมุนที่จุดยอด ร่วมกับการ ปรับปรุงการส่ง ข้อมูล	4	302	505	0.0162	2	1.00	1.00

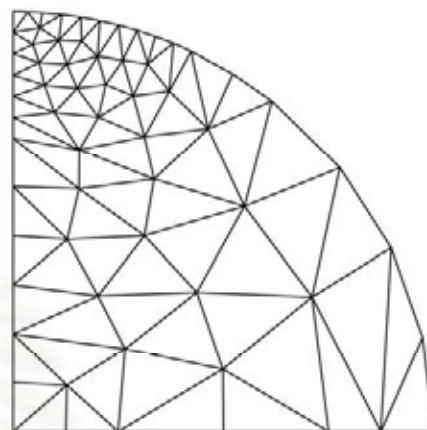
ตารางที่ 4.1.1 เปรียบเทียบผลจากงานวิจัยต่างๆ ของปัญหาแผ่นบางรับแรงดึง



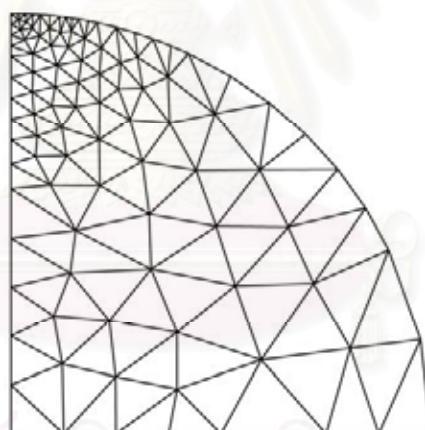
สถาบันวิทยบริการ
 รูปที่ 4.2.1 ปัญหาแผ่นวงกลมบางรับแรงกระทำเป็นจุดและแบบจำลองการวิเคราะห์
 จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



Mesh 1 Error = 0.2847 Nn = 24 Ne = 28



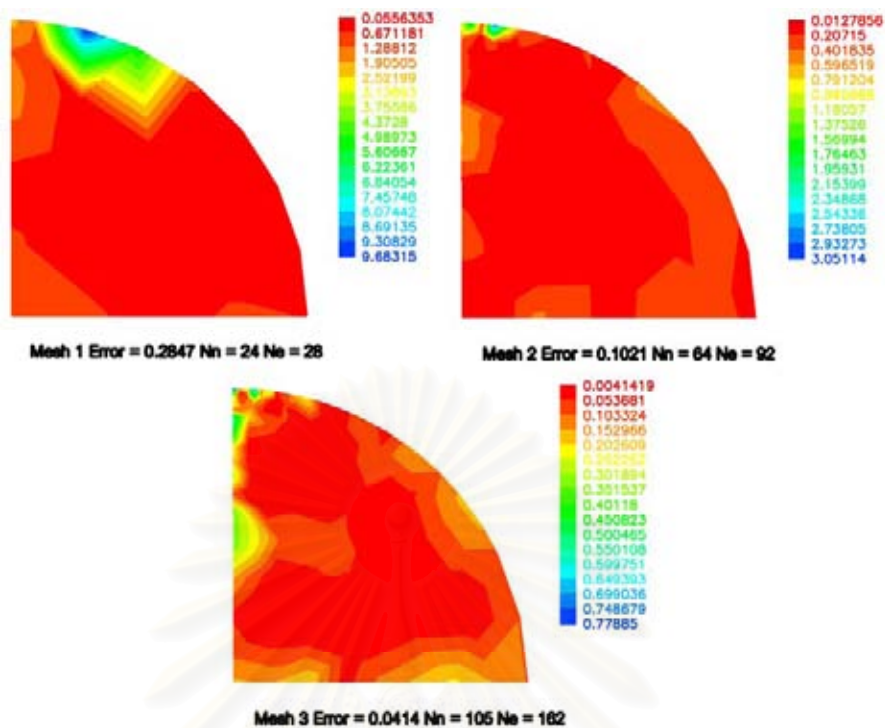
Mesh 2 Error = 0.1021 Nn = 64 Ne = 92



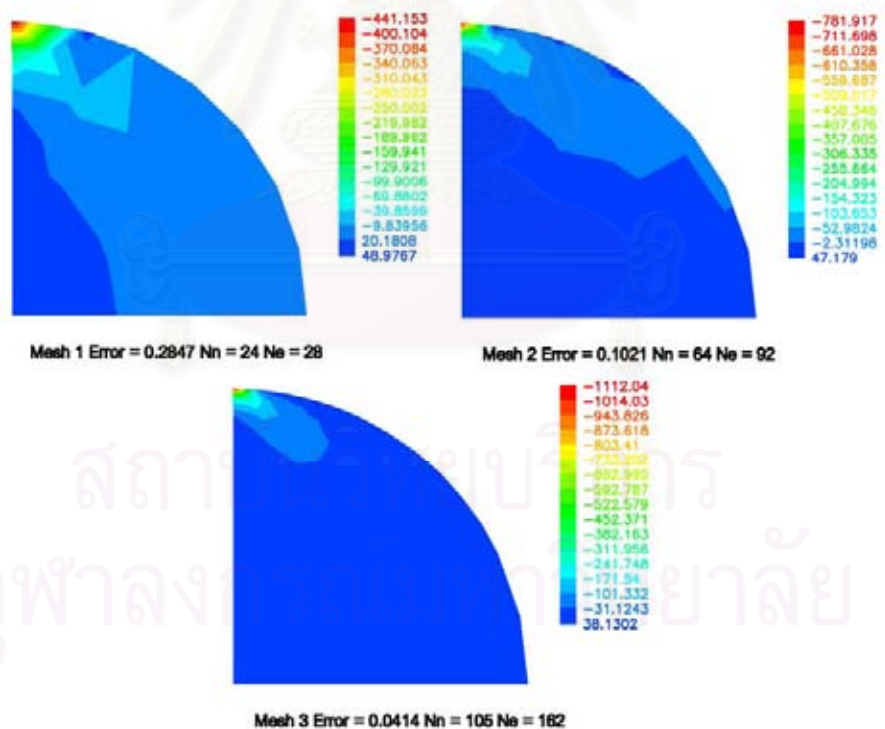
Mesh 3 Error = 0.0414 Nn = 105 Ne = 162

สถาบันวิจัยประชากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูปที่ 4.2.2 โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาแผ่นวงกลมบาง
โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด
ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป



(ก) การกระจายความคลาดเคลื่อนของปัญหา

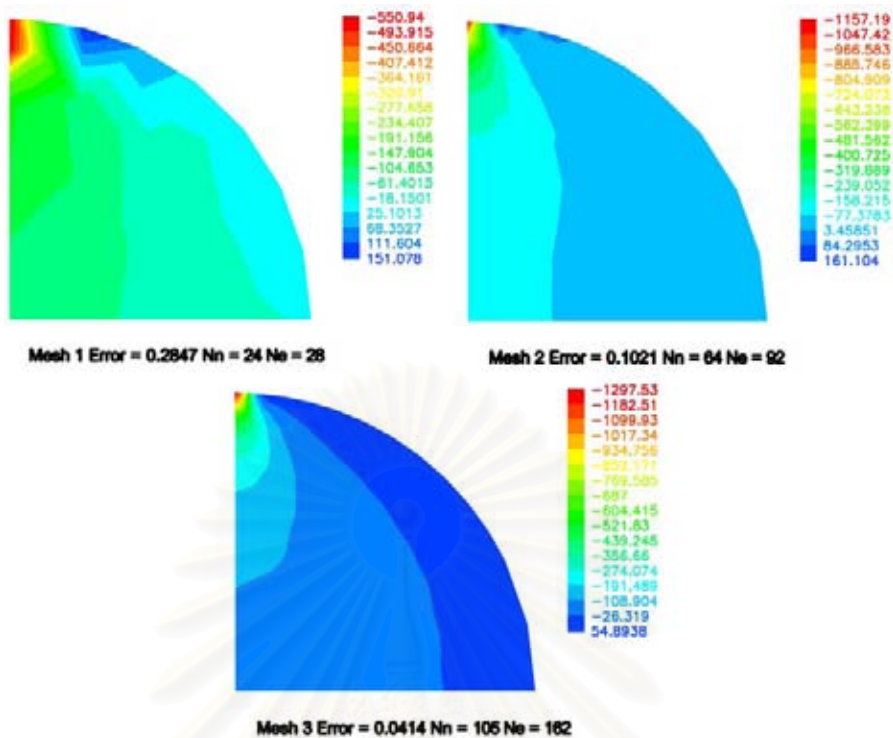


(ข) การกระจายหน่วยแรงในทิศทาง x ของปัญหา

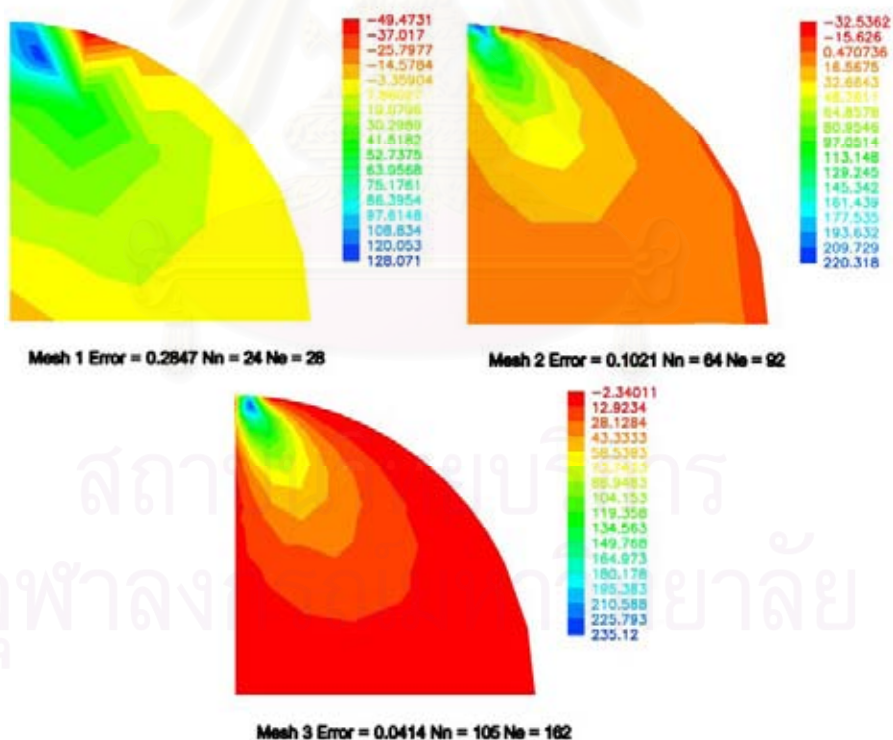
รูปที่ 4.2.3 การกระจายความคลาดเคลื่อนและหน่วยแรงในทิศทาง x ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง

โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด

ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่นำไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป



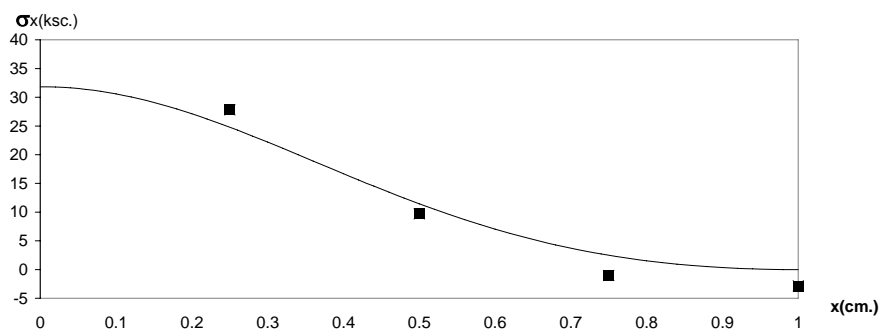
(ก) การกระจายหน่วยแรงในทิศทาง y ของปัญหา



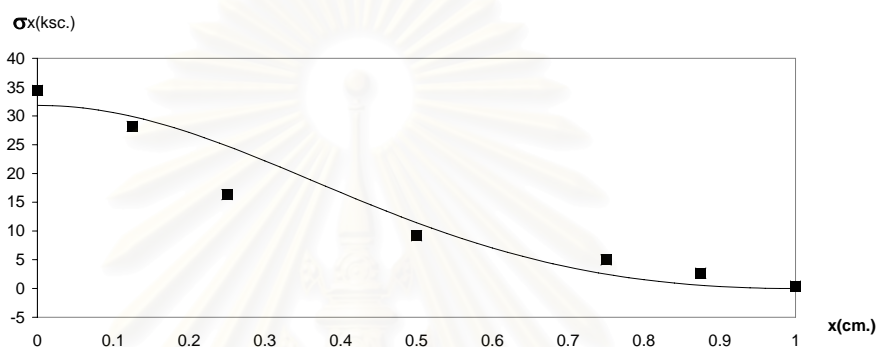
(ข) การกระจายหน่วยแรงเฉือน ของปัญหา

รูปที่ 4.2.4 การกระจายหน่วยแรงในทิศทาง y และหน่วยแรงเฉือน ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง

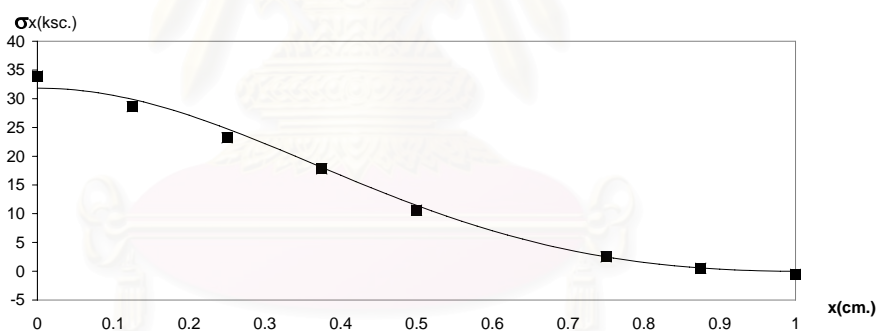
โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด
ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป



หน่วยแรงจากโครงข่ายที่ 1



หน่วยแรงจากโครงข่ายที่ 2



หน่วยแรงจากโครงข่ายที่ 3

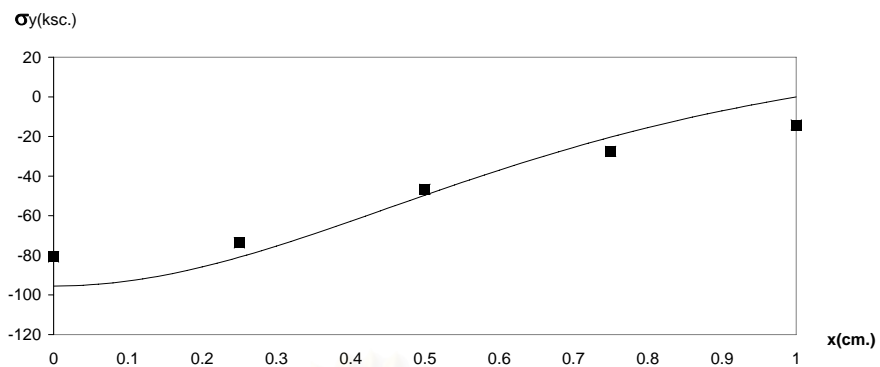
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

■ Finite Element solution

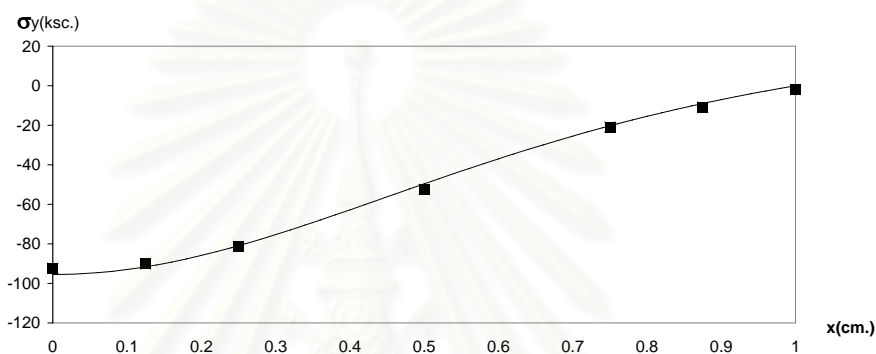
— Exact solution

รูปแสดงลักษณะของปัญหา

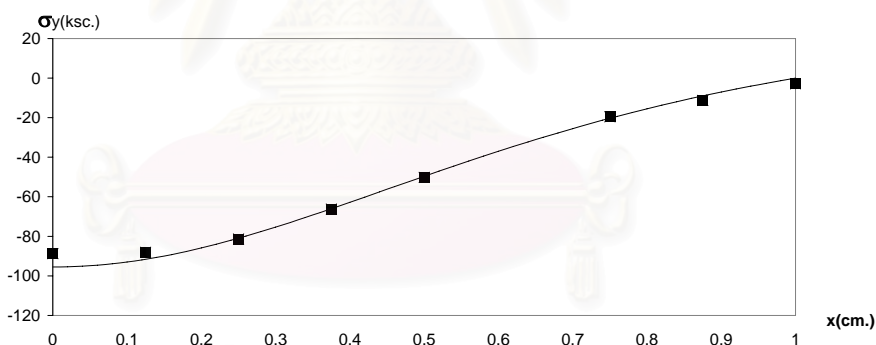
รูปที่ 4.2.5 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง
โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด
ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที้นำไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป



หน่วยแรงจากโครงข่ายที่ 1

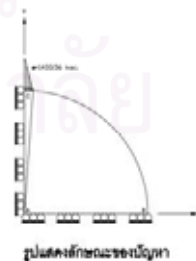


หน่วยแรงจากโครงข่ายที่ 2

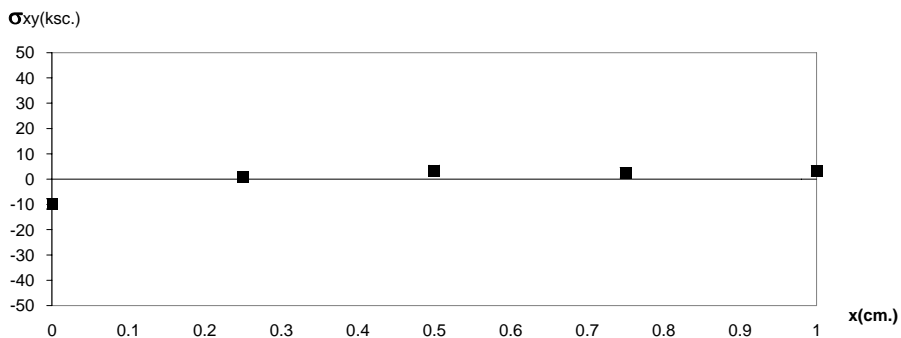


หน่วยแรงจากโครงข่ายที่ 3

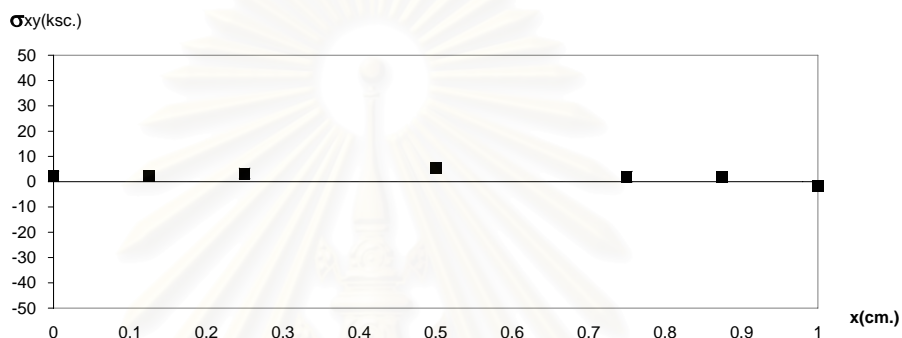
■ Finite Element solution
 — Exact solution



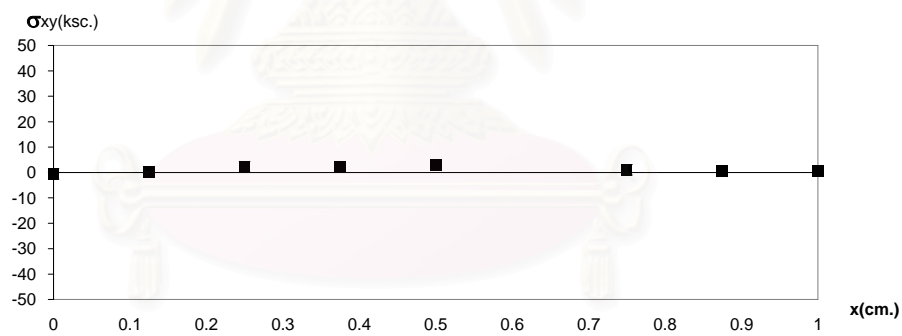
รูปที่ 4.2.6 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยึด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่นำไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป



หน่วยแรงจากโครงข่ายที่ 1

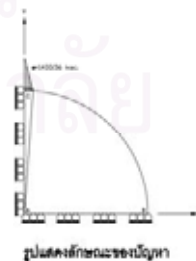


หน่วยแรงจากโครงข่ายที่ 2

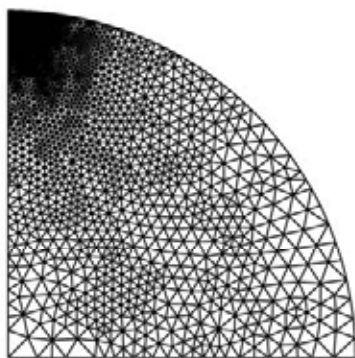


หน่วยแรงจากโครงข่ายที่ 3

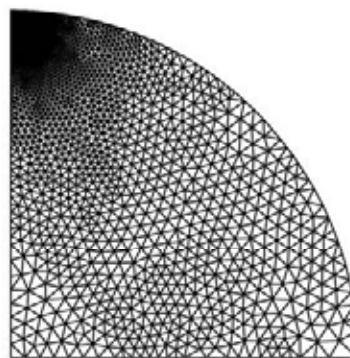
■ Finite Element solution
 — Exact solution



รูปที่ 4.2.7 ค่าหน่วยแรงเฉือน ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่นำไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป



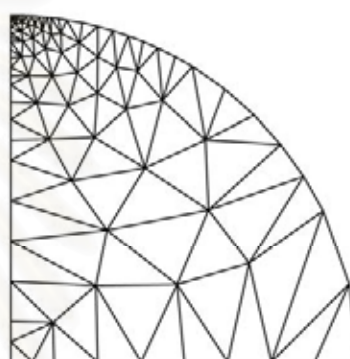
(ก) โครงข่ายชิ้นส่วนที่ 7 ของงานวิจัยเดิม
ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมที่มีความละเอียดคงที่
ใช้การปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายโดยวิธีการปรับเรียบของลาปลาซ
Error = 0.0436 Nn = 2630 Ne = 5031



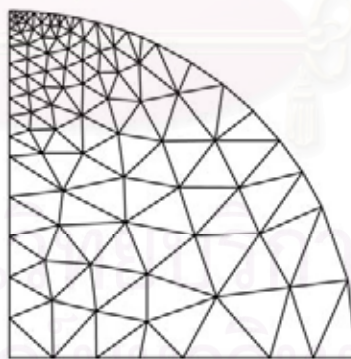
(ข) โครงข่ายชิ้นส่วนที่ 4 ของงานวิจัยเดิม
ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมที่มีความละเอียดคงที่
ใช้การปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายโดยวิธีการปรับเรียบเชิงมุม
Error = 0.0450 Nn = 2366 Ne = 4499



(ค) โครงข่ายชิ้นส่วนที่ 8 ของงานวิจัยเดิม
ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมที่มีความละเอียดคงที่
Error = 0.0495 Nn = 151 Ne = 60

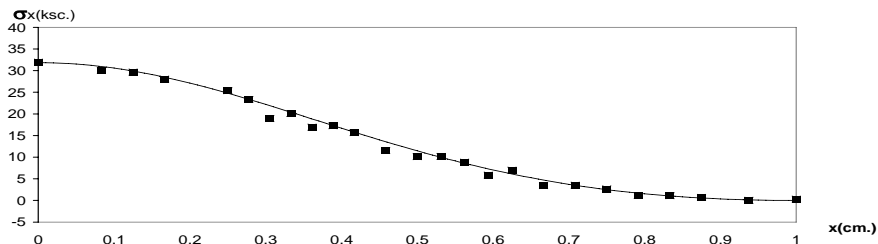


(ง) โครงข่ายชิ้นส่วนที่ 6 ของงานวิจัยนี้
ที่ใช้เฉพาะชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด
Error = 0.0473 Nn = 98 Ne = 135

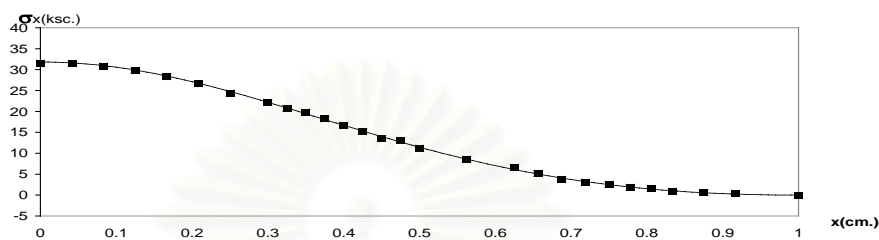


(จ) โครงข่ายชิ้นส่วนที่ 3 ของงานวิจัยนี้
ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด
ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่ไม่ใช่ในการสร้างชิ้นส่วนรอบตัวไป
Error = 0.0414 Nn = 105 Ne = 162

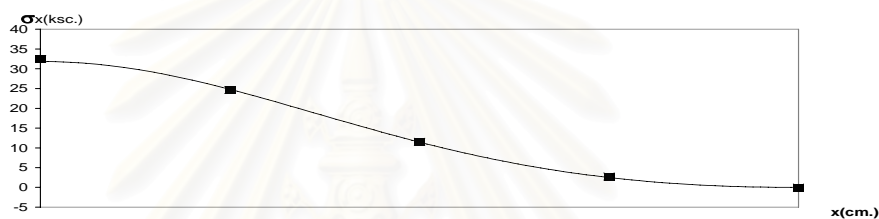
รูปที่ 4.2.8 การเปรียบเทียบ โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาแผ่นวงกลมบาง
ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ



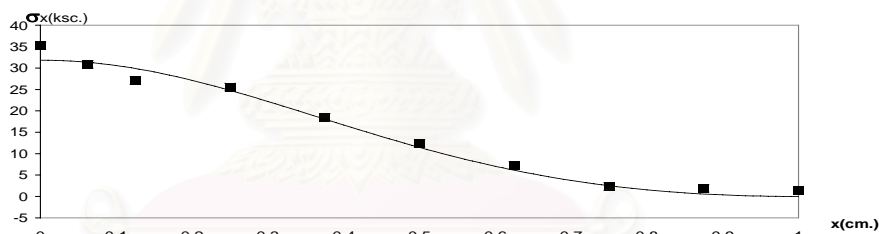
(ก) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ



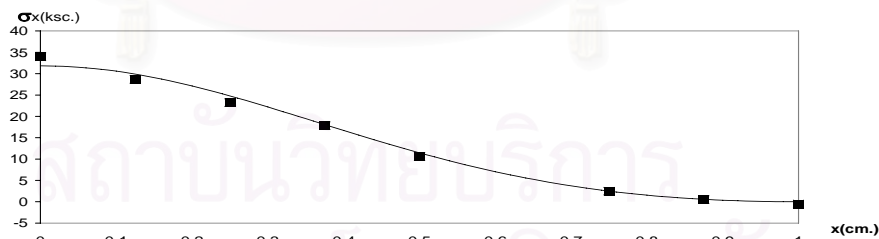
(ข) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม



(ค) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยเดิมที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น

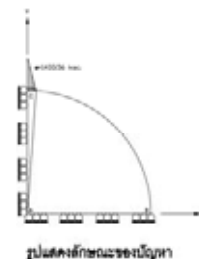


(ง) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยนี้ที่ใช้เฉพาะชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยึด

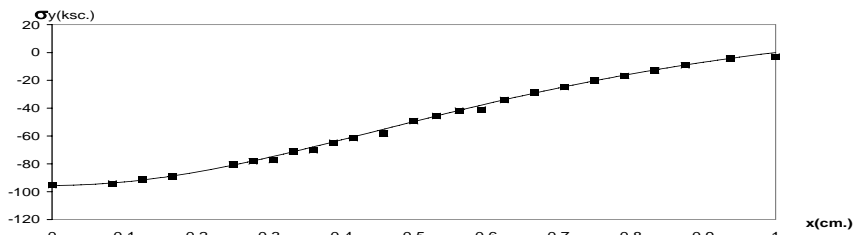


(จ) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยนี้ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยึด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่นำไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป

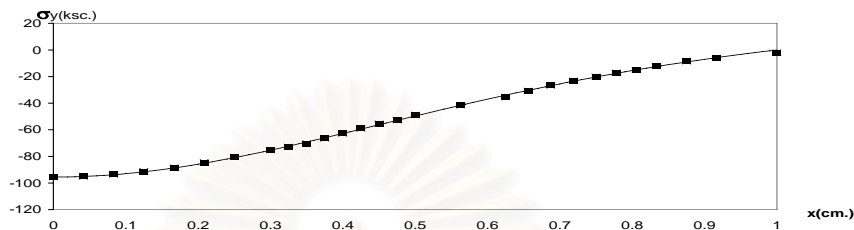
■ Finite Element solution
 — Exact solution



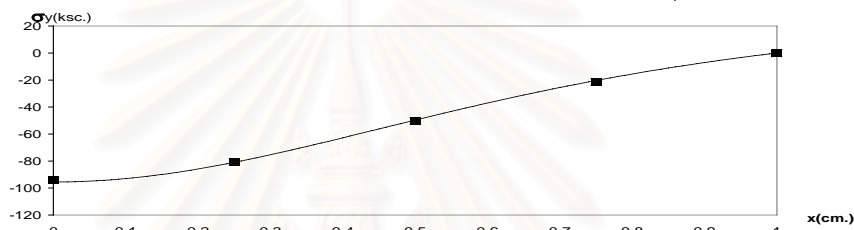
รูปที่ 4.2.9 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ



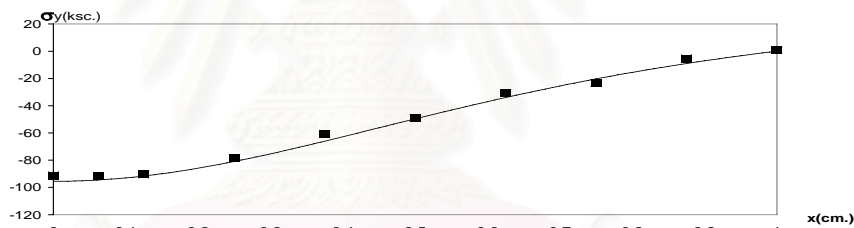
(ก) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ



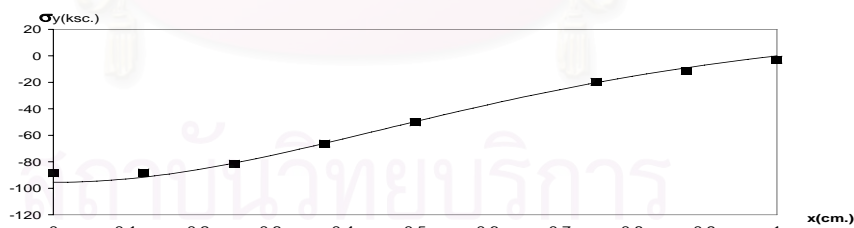
(ข) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม



(ค) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยเดิมที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น



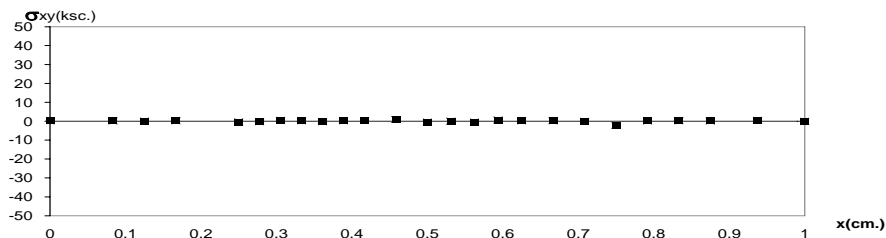
(ง) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยนี้ที่ใช้เฉพาะชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยึด



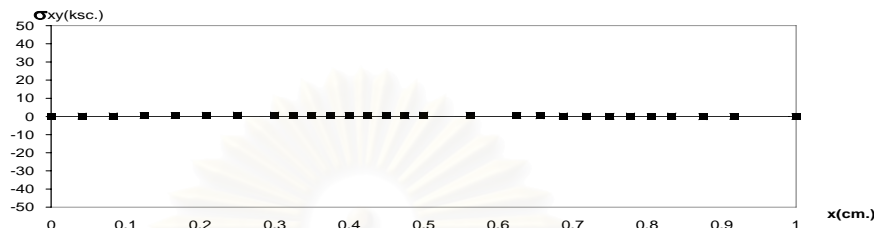
(จ) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยนี้ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยึด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่นำไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป



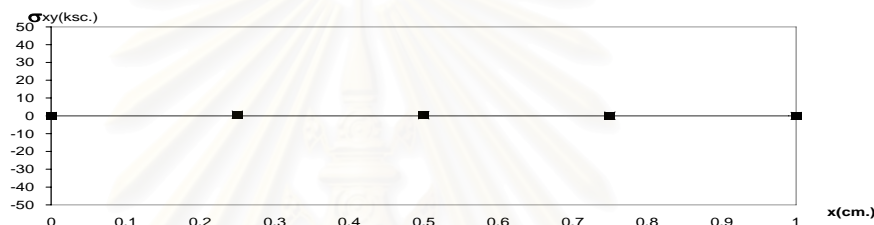
รูปที่ 4.2.10 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ



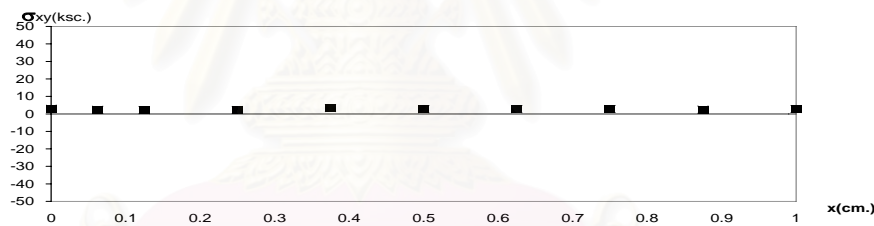
(ก) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ



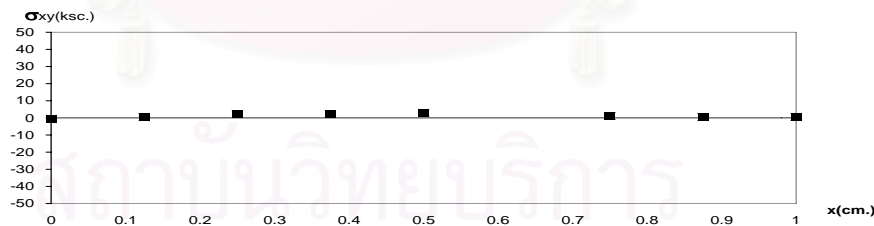
(ข) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม



(ค) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยเดิมที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น



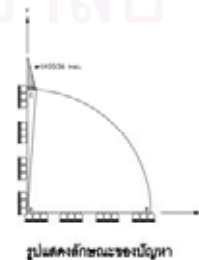
(ง) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยนี้ที่ใช้เฉพาะชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด



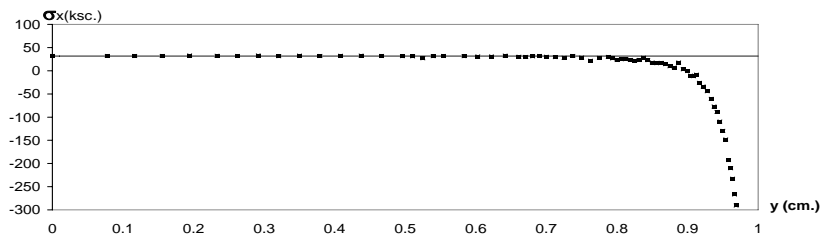
(จ) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยนี้ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด

ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่นำไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป

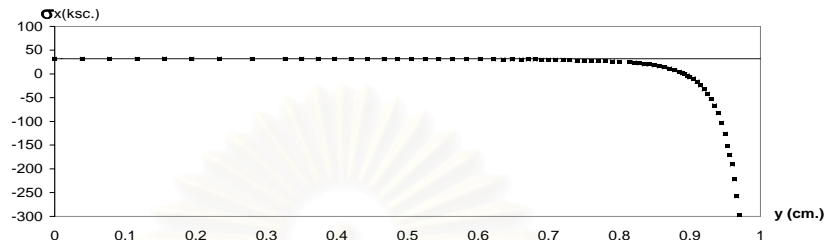
■ Finite Element solution
 — Exact solution



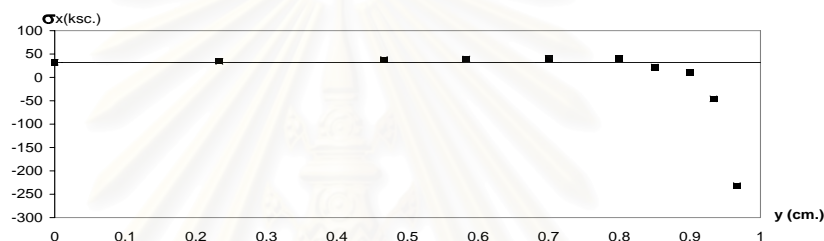
รูปที่ 4.2.11 ค่าหน่วยแรงเฉือน ตามแนว AB ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง
 ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ



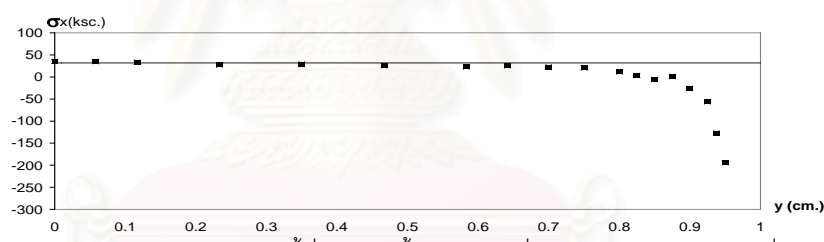
(ก) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ



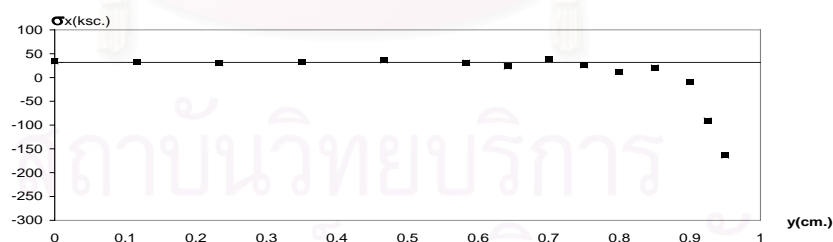
(ข) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม



(ค) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยเดิมที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น



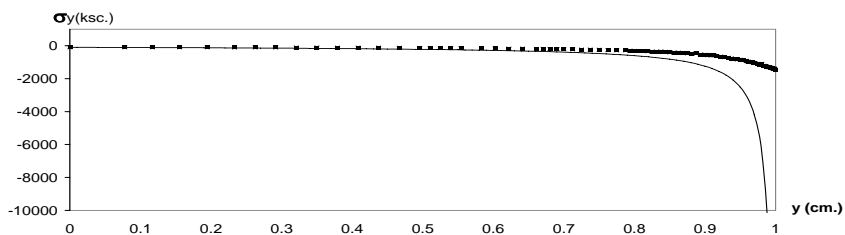
(ง) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยนี้ที่ใช้เฉพาะชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด



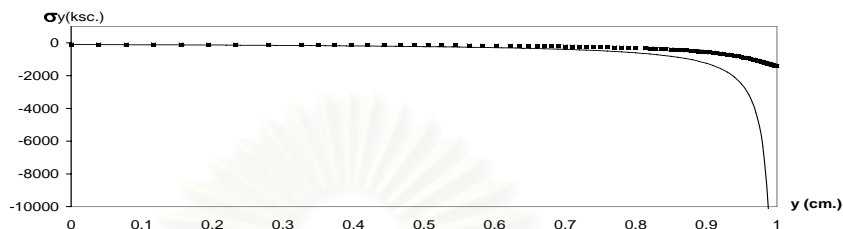
(จ) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยนี้ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลเพื่อนำไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป



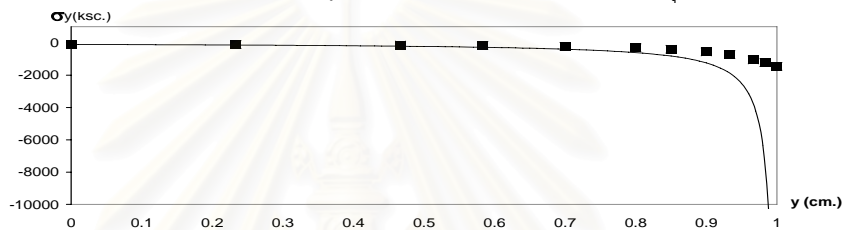
รูปที่ 4.2.12 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนว AC ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ



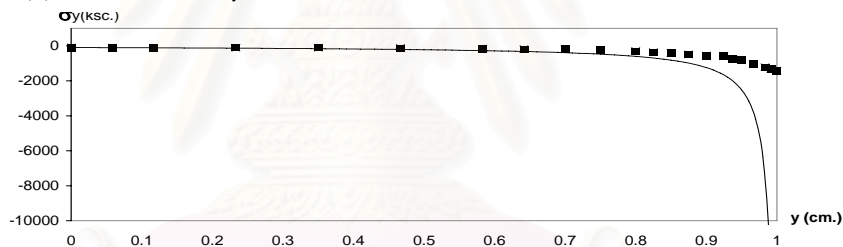
(ก) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ



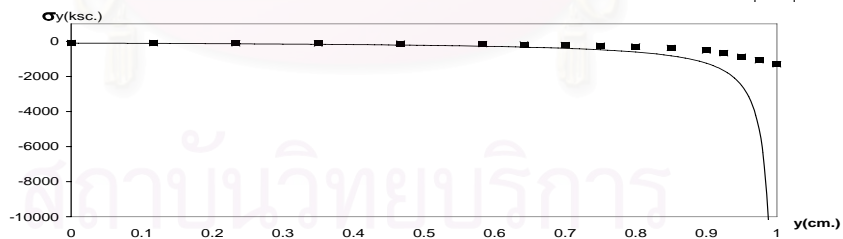
(ข) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม



(ค) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยเดิมที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น



(ง) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยนี้ที่ใช้เฉพาะชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด

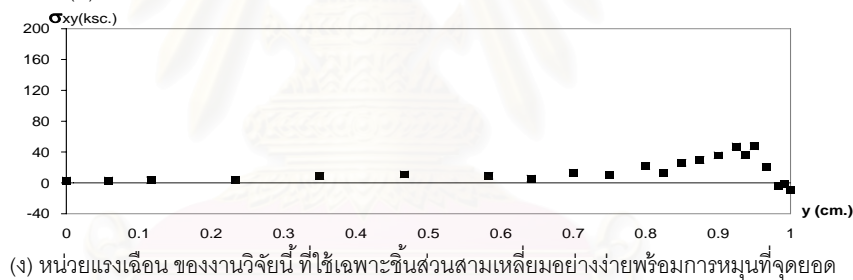
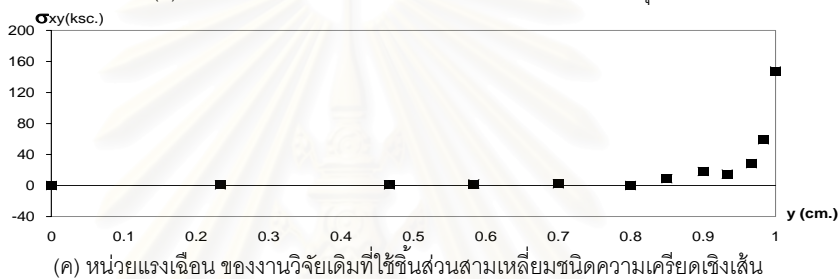
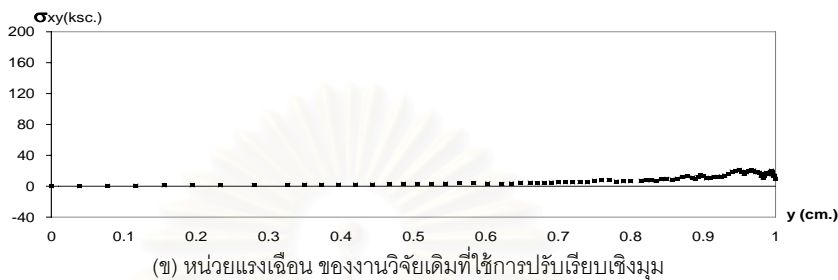
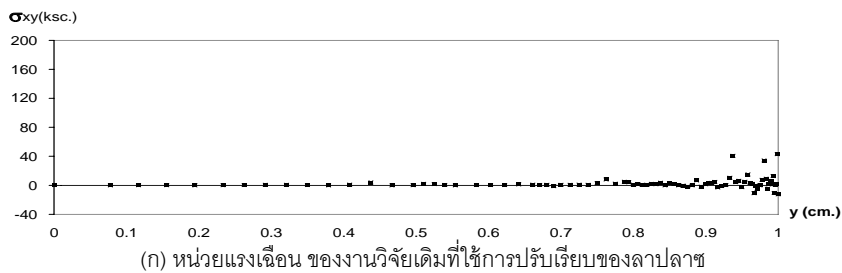


(จ) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยนี้ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่นำไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป



รูปแสดงลักษณะของปัญหา

รูปที่ 4.2.13 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนว AC ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ



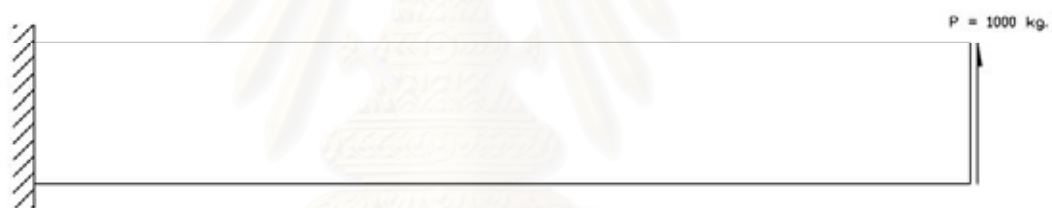
รูปที่ 4.2.14 ค่าหน่วยแรงเฉือน ตามแนว AC ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง
ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ

งานวิจัย	จำนวน โครงข่าย	จำนวน จุดต่อ	จำนวน ขึ้นส่วน	ความคลาด เคลื่อน สัมพัทธ์	เวลา (วินาที)	จำนวน เท่าของจุด ต่อเมื่อ เทียบกับ งานวิจัยนี้	จำนวน เท่าของ เวลาเมื่อ เทียบกับ งานวิจัยนี้
งานวิจัยเดิม ที่ใช้การปรับเรียบ ของลาปลาซ	7	2630	5031	0.0436	11	25.05	>11.00
งานวิจัยเดิม ที่ใช้การปรับเรียบ เชิงมุม	4	2366	4499	0.0450	11	22.53	>11.00
งานวิจัยเดิมที่ ใช้ขึ้นส่วน สามเหลี่ยมชนิด ความเครียด เชิงเส้น	8	151	60	0.0495	<1	1.44	-
งานวิจัยนี้ที่ใช้ เฉพาะขึ้นส่วน สามเหลี่ยมอย่าง ง่ายพร้อม การหมุนที่จุดยอด	6	98	135	0.0473	<1	0.93	-
งานวิจัยนี้ที่ใช้ ขึ้นส่วนสามเหลี่ยม อย่างง่ายพร้อมการ หมุนที่จุดยอด ร่วมกับการ ปรับปรุงการส่ง ข้อมูล	3	105	162	0.0414	<1	1.00	1.00

ตารางที่ 4.2.1 เปรียบเทียบผลจากงานวิจัยต่างๆ ของปัญหาแผ่นวงกลมบาง



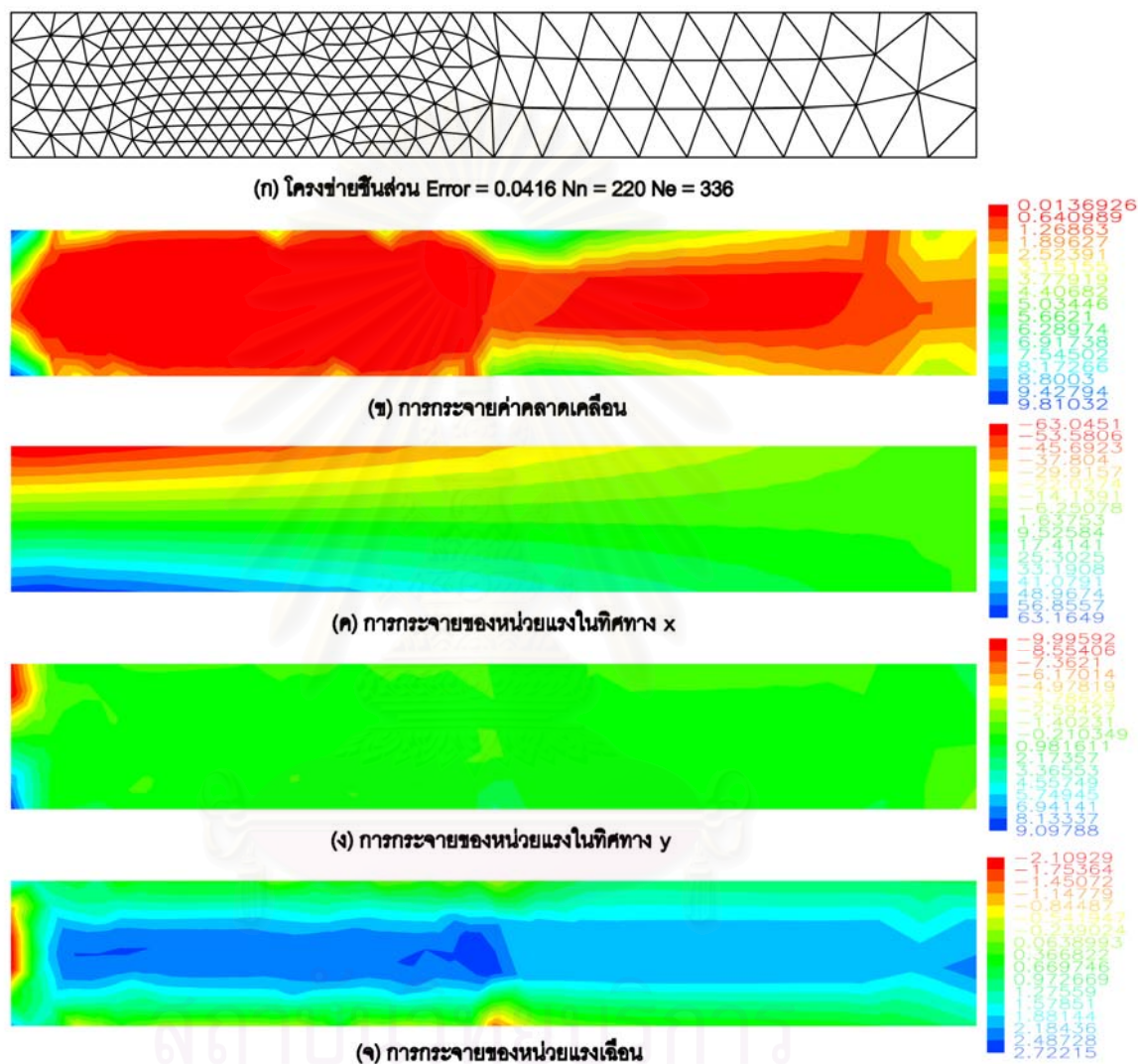
(ก) คานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ



(ข) แบบจำลองการวิเคราะห์

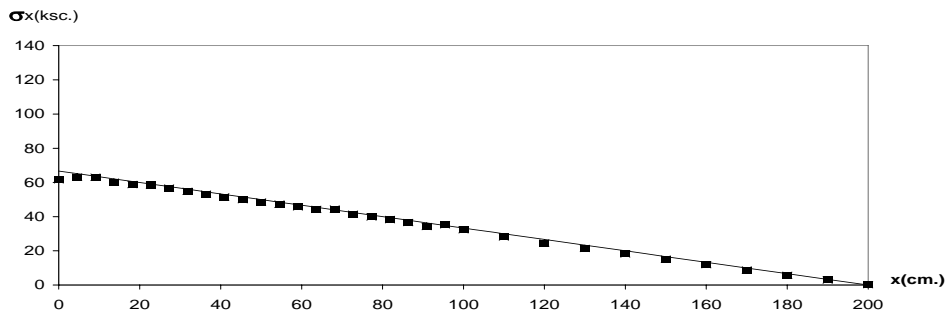
สถาบันวิทยบริการ

รูปที่ 4.3.1 ปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระและแบบจำลองการวิเคราะห์



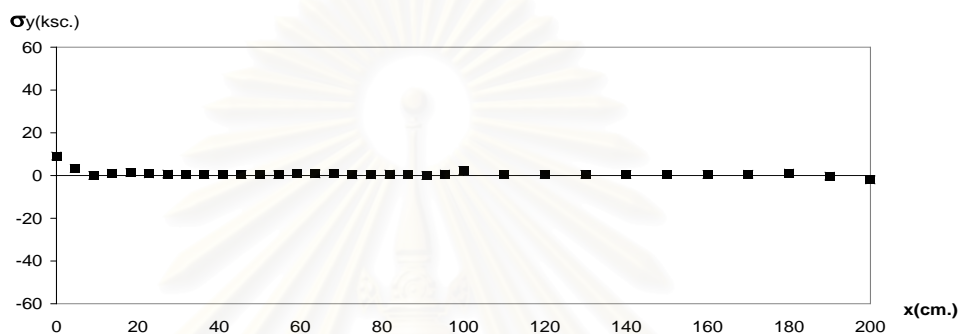
รูปที่ 4.3.2 ผลการวิเคราะห์ของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ ในโครงข่ายที่ 1

โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด
 ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป



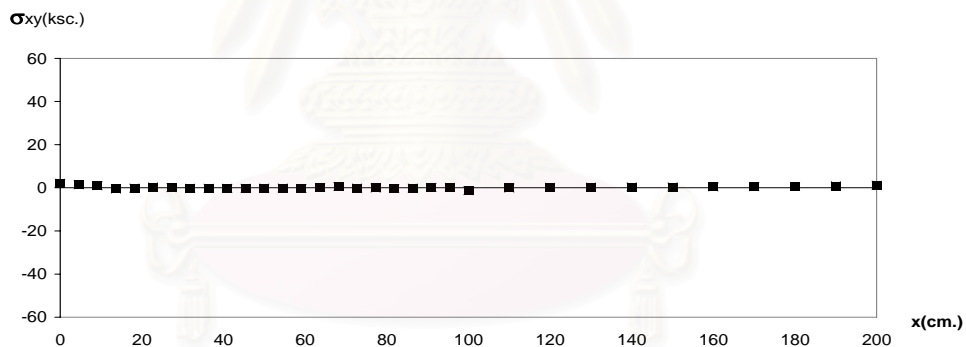
หน่วยแรงจากโครงข่ายที่ 1

(ก) หน่วยแรงในทิศทาง x



หน่วยแรงจากโครงข่ายที่ 1

(ข) หน่วยแรงในทิศทาง y



หน่วยแรงจากโครงข่ายที่ 1

(ค) หน่วยแรงเฉือน

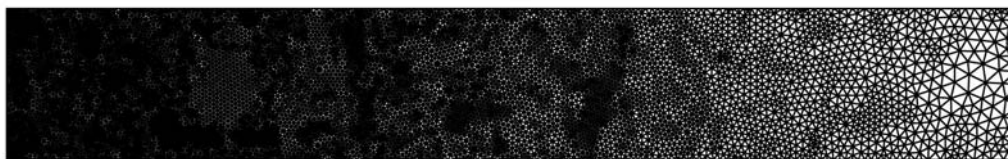
■ Finite Element solution
 — Exact solution



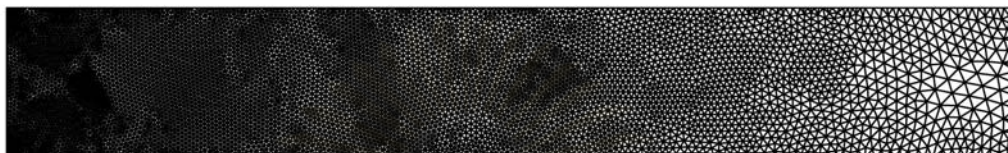
รูปแสดงลักษณะของปัญหา

รูปที่ 4.3.3 ค่าหน่วยแรงบริเวณขอบล่างของคาน ในโครงข่ายที่ 1

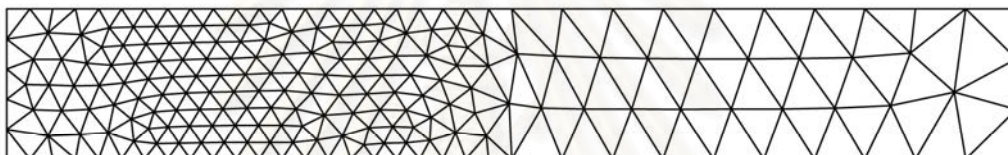
โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยึด
 ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่นำไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป



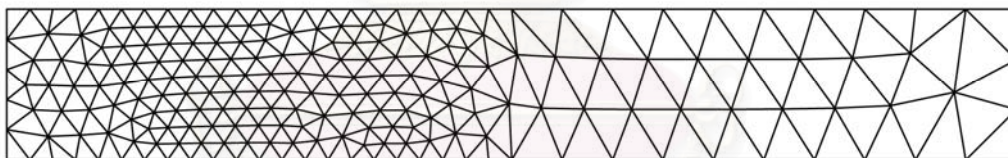
(ก) โครงข่ายชิ้นส่วนที่ 8 ของงานวิจัยเดิม
 ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่
 ซึ่งใช้การปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายโดยวิธีการปรับเรียบของลาปลาซ
 Error = 0.0443 Nn = 9863 Ne = 19096



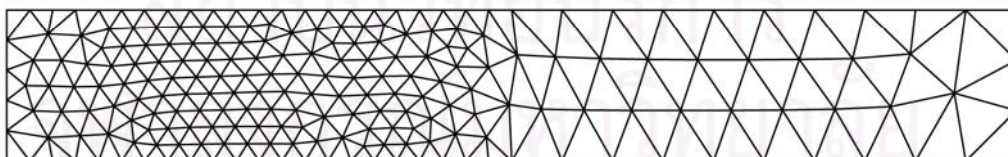
(ข) โครงข่ายชิ้นส่วนที่ 5 ของงานวิจัยเดิม
 ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่
 ซึ่งใช้การปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายโดยวิธีการปรับเรียบเชิงมุม
 Error = 0.0499 Nn = 7023 Ne = 13418



(ค) โครงข่ายชิ้นส่วนที่ 1 ของงานวิจัยเดิม
 ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น
 Error = 0.0127 Nn = 805 Ne = 366

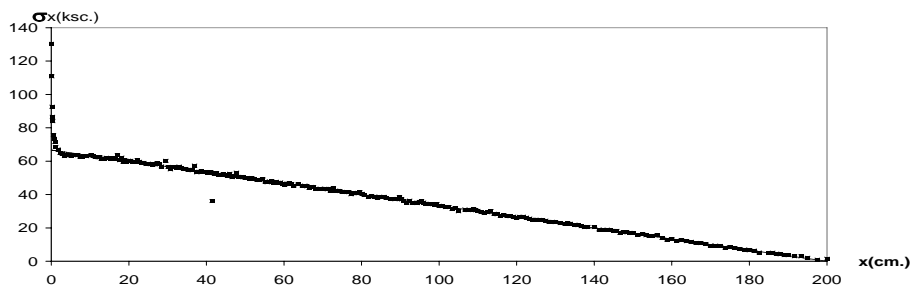


(ง) โครงข่ายชิ้นส่วนที่ 1 ของงานวิจัยนี้
 ที่ใช้เฉพาะชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด
 Error = 0.0416 Nn = 220 Ne = 366

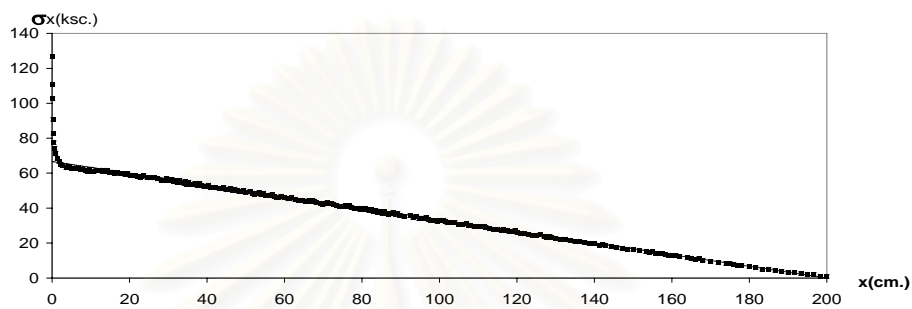


(จ) โครงข่ายชิ้นส่วนที่ 1 ของงานวิจัยนี้
 ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด
 ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่นำไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป
 Error = 0.0416 Nn = 220 Ne = 366

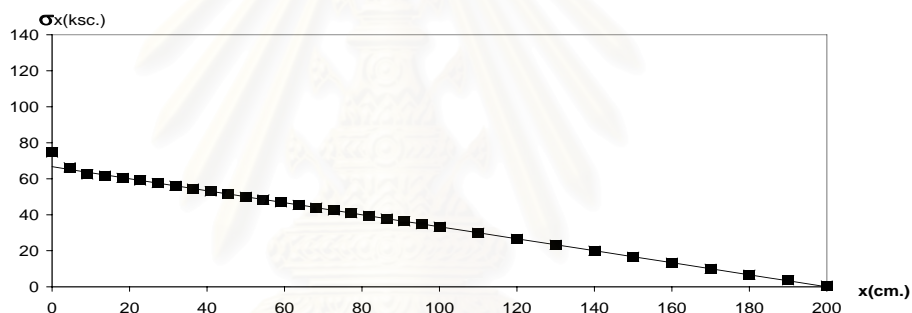
รูปที่ 4.3.4 การเปรียบเทียบ โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ
 ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ



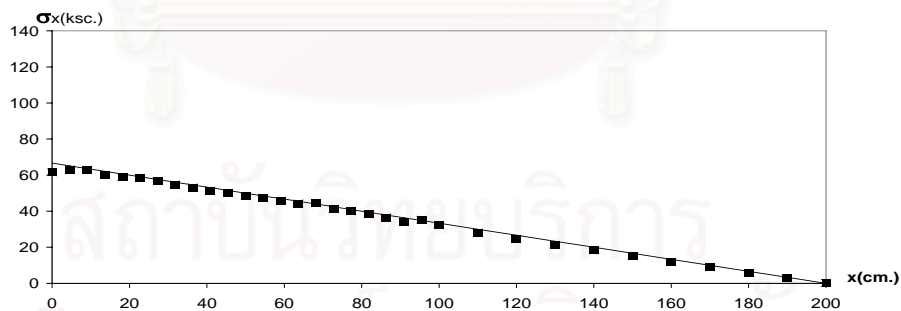
(ก) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ



(ข) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม



(ค) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยเดิมที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น



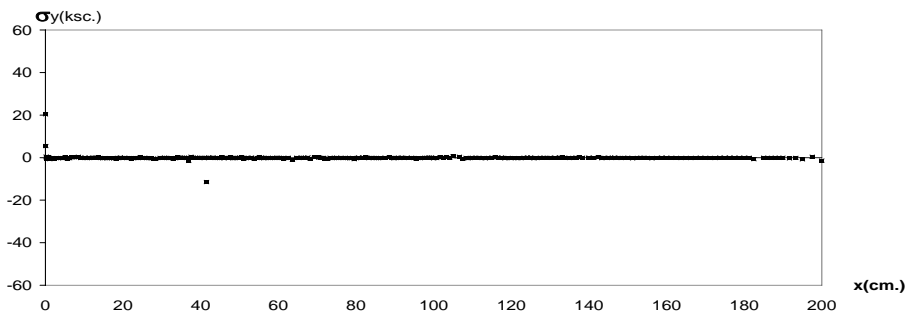
(ง) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยนี้ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที้นำไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป

■ Finite Element solution
 — Exact solution

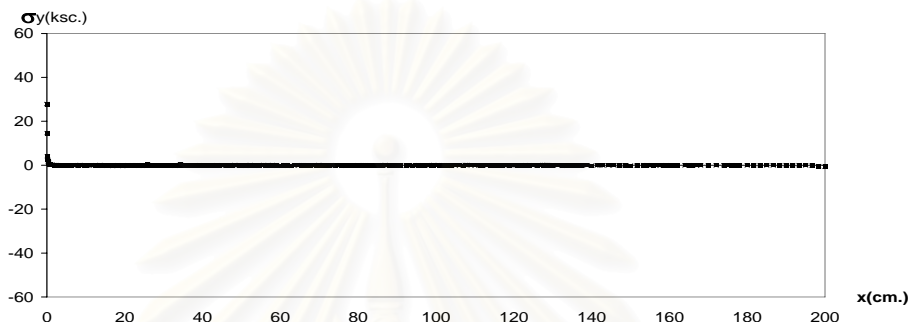


รูปแสดงลักษณะของปัญหา

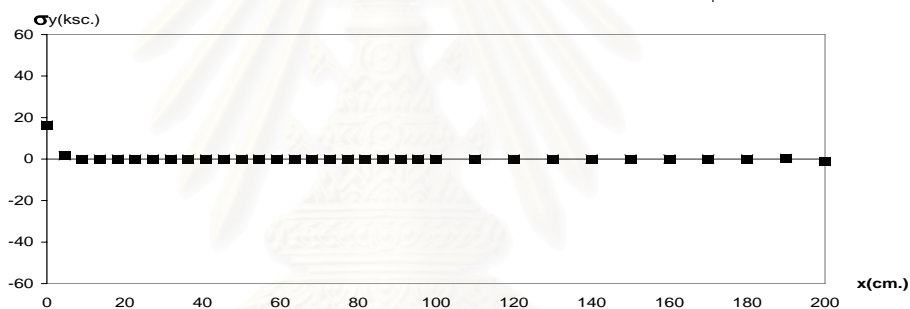
รูปที่ 4.3.5 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนวขอบล่างของปัญหาคานยื่นี่รับแรงกระทำที่ปลายอิสระ ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ



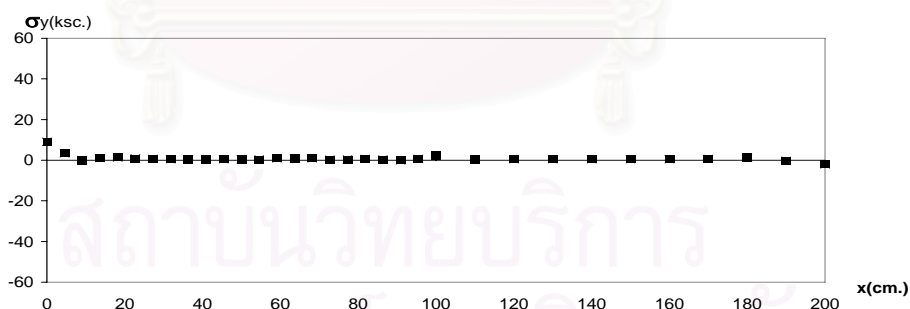
(ก) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ



(ข) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม



(ค) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยเดิมที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น



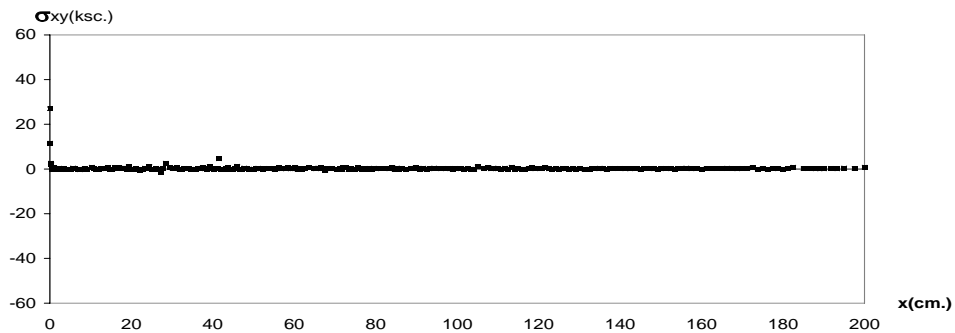
(ง) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยนี้ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่นำไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป

■ Finite Element solution
 — Exact solution

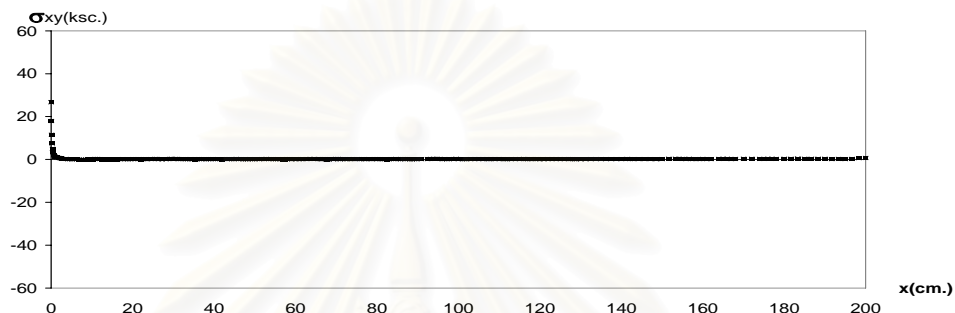


รูปแสดงลักษณะของปัญหา

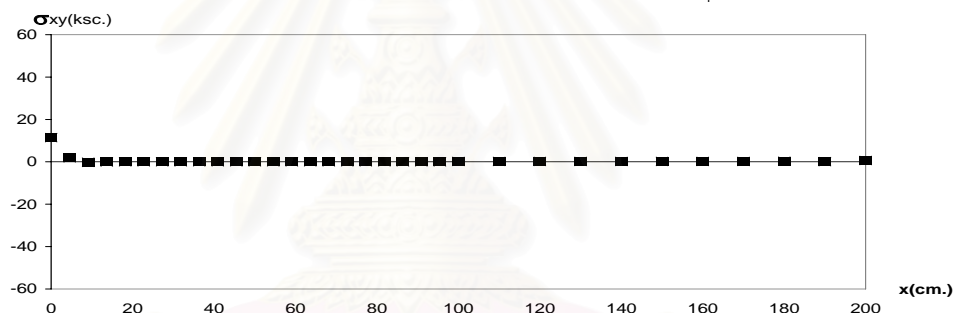
รูปที่ 4.3.6 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนวขอบล่างของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ



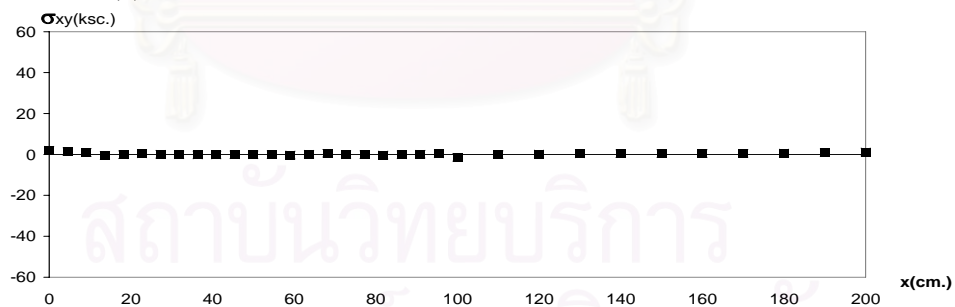
(ก) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบของลาปลาซ



(ข) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม



(ค) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยเดิมที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น



(ง) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยนี้ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่นำไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป

■ Finite Element solution
 — Exact solution

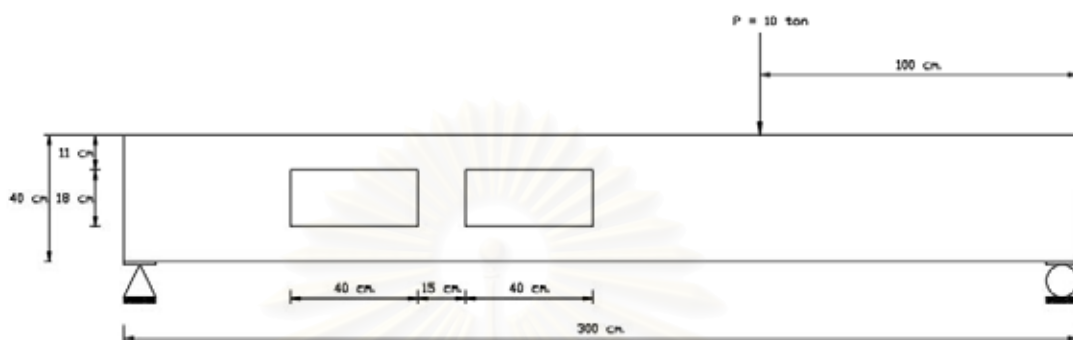


รูปแสดงลักษณะของปัญหา

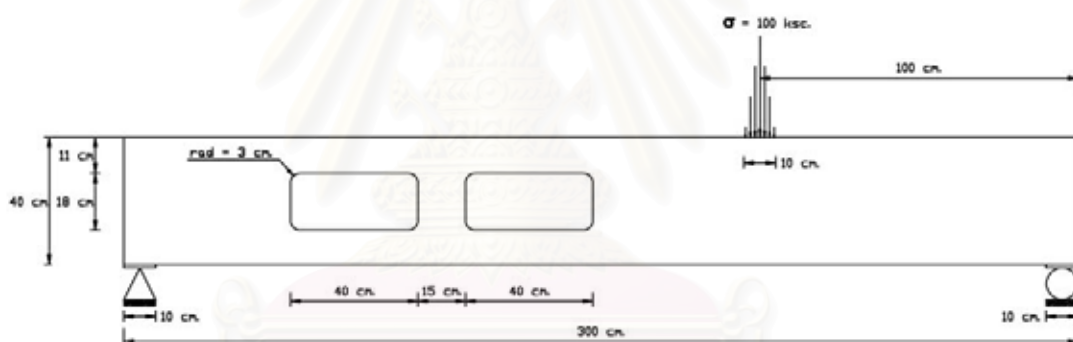
รูปที่ 4.3.7 ค่าหน่วยแรงเฉือน ตามแนวขอบล่างของปัญหาคานยื่นรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ

งานวิจัย	จำนวน โครงข่าย	จำนวน จุดต่อ	จำนวน ชิ้นส่วน	ความคลาด เคลื่อน สัมพัทธ์	เวลา (วินาที)	จำนวน เท่าของจุด ต่อเมื่อ เทียบกับ งานวิจัยนี้	จำนวน เท่าของ เวลาเมื่อ เทียบกับ งานวิจัยนี้
งานวิจัยเดิม ที่ใช้การปรับเรียบ ของลาปลาซ	8	9863	19096	0.0443	256	44.83	>256.00
งานวิจัยเดิม ที่ใช้การปรับเรียบ เชิงมุม	5	7023	13418	0.0499	239	31.92	>239.00
งานวิจัยเดิมที่ ใช้ชิ้นส่วน สามเหลี่ยมชนิด ความเครียด เชิงเส้น	1	805	366	0.0127	2	3.66	>2.00
งานวิจัยนี้ที่ใช้ ชิ้นส่วนสามเหลี่ยม อย่างง่ายพร้อมการ หมุนที่จุดยอด ร่วมกับการ ปรับปรุงการส่ง ข้อมูล	1	220	366	0.0416	<1	1.00	1.00

ตารางที่ 4.3.1 เปรียบเทียบผลจากงานวิจัยต่างๆ ของปัญหาคานยันรับแรงกระทำที่ปลายอิสระ



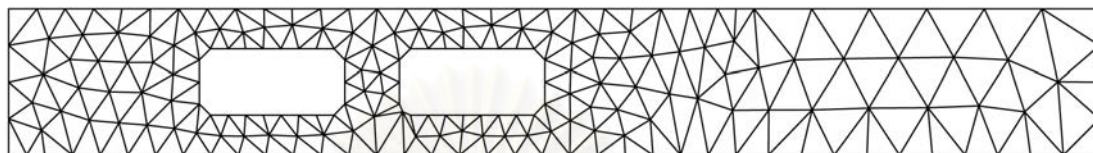
(ก) คานช่วงเดียวมีช่องเปิดรับแรงกระทำเป็นจุด



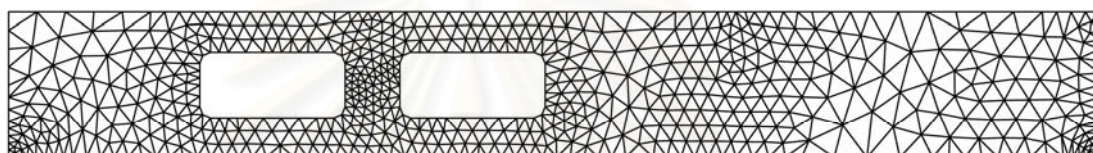
(ข) แบบจำลองการวิเคราะห์

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

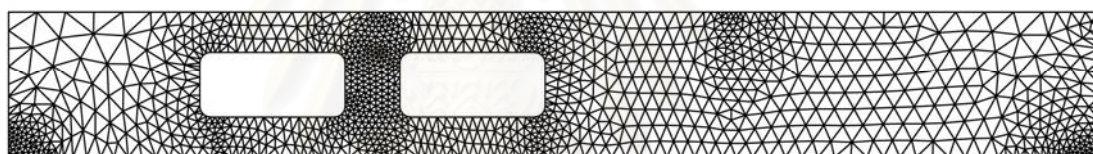
รูปที่ 4.4.1 ปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิดรับแรงกระทำเป็นจุดและแบบจำลองการวิเคราะห์



Mesh 1 Error = 0.3632 Nn = 216 Ne = 310



Mesh 2 Error = 0.1318 Nn = 692 Ne = 1133



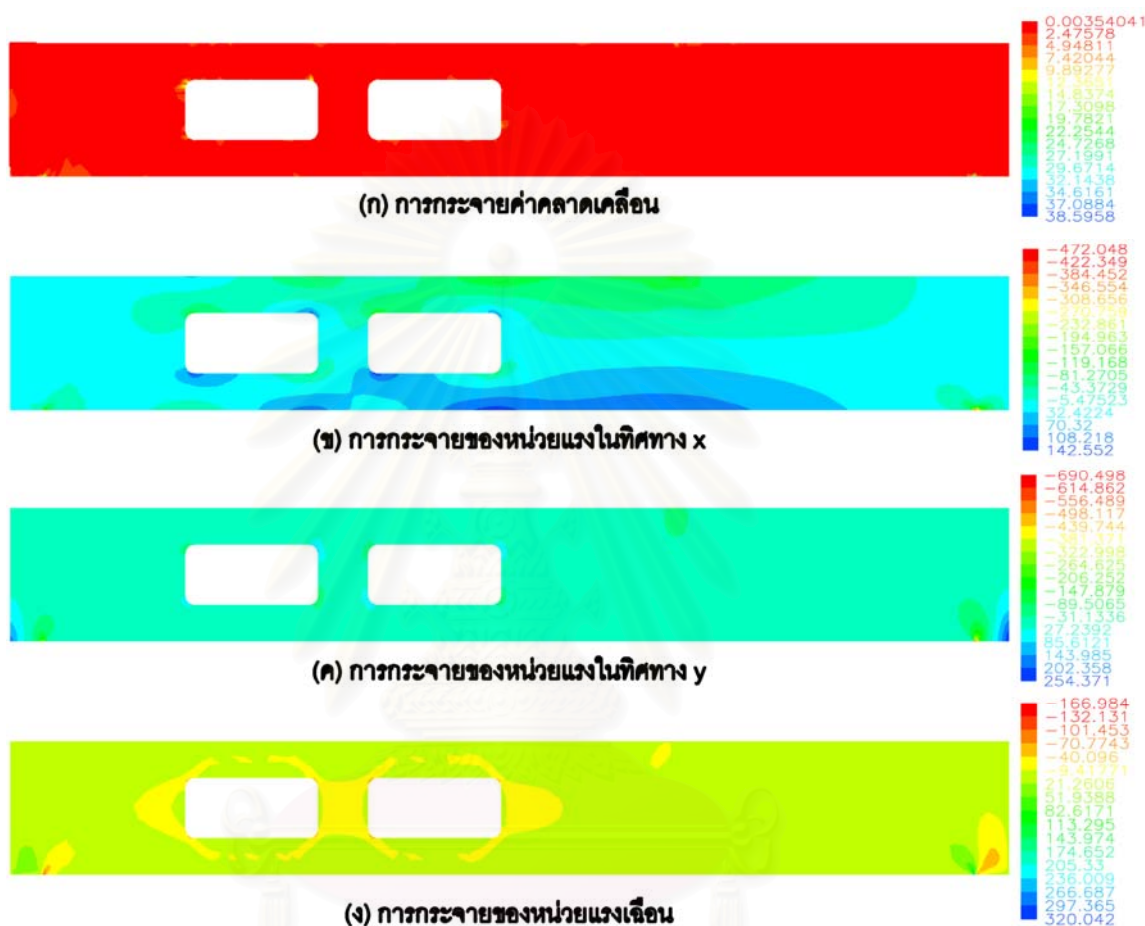
Mesh 3 Error = 0.1012 Nn = 1333 Ne = 2295



Mesh 4 Error = 0.0438 Nn = 2182 Ne = 3896

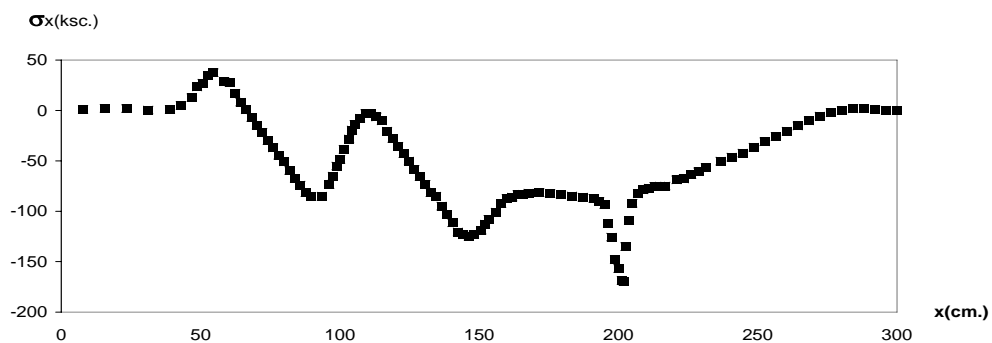
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูปที่ 4.4.2 โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิด
โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด
ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่นำไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป

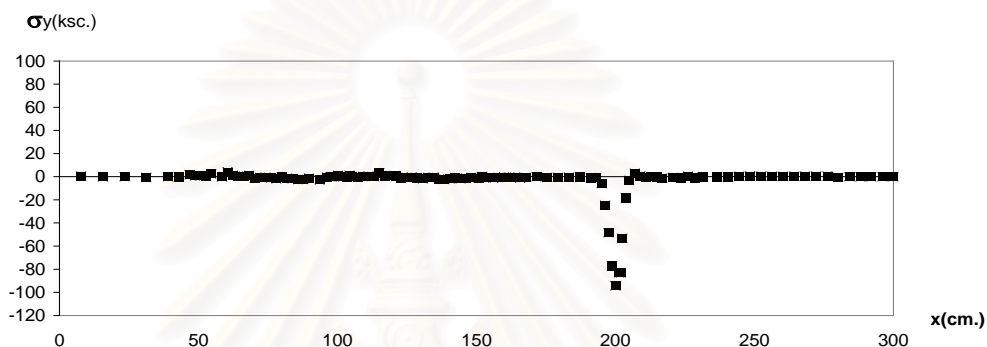


สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

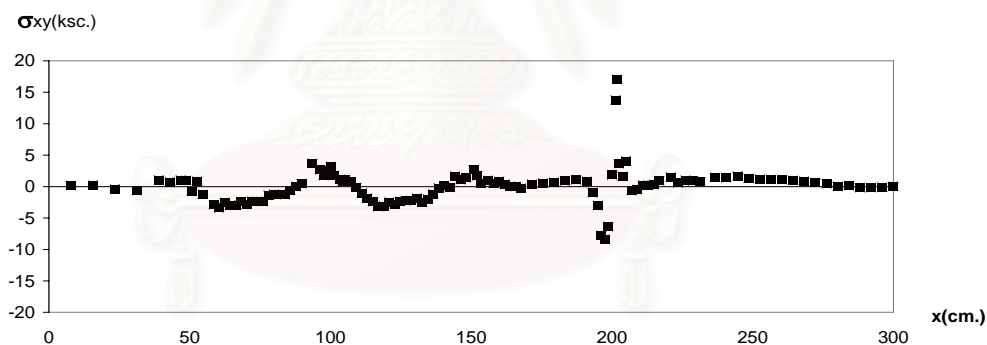
รูปที่ 4.4.3 ผลการวิเคราะห์ของปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิด ในโครงข่ายที่ 4
โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยึด
ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป



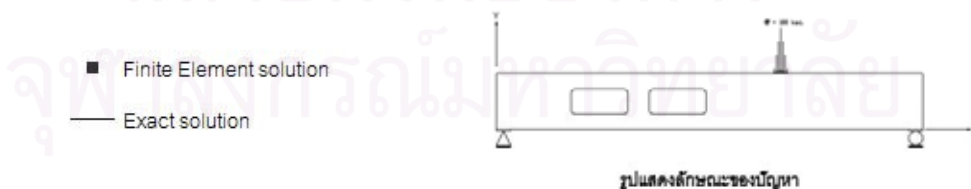
หน่วยแรงจากโครงข่ายที่ 4
(ก) หน่วยแรงในทิศทาง x



หน่วยแรงจากโครงข่ายที่ 4
(ข) หน่วยแรงในทิศทาง y



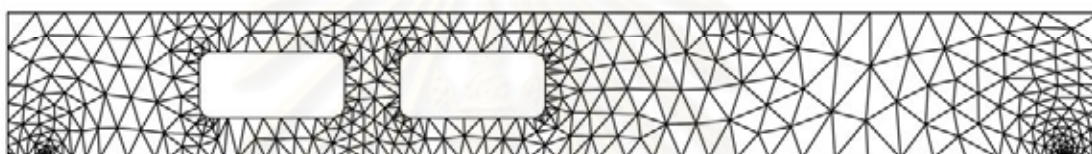
หน่วยแรงจากโครงข่ายที่ 4
(ค) หน่วยแรงเฉือน



รูปที่ 4.4.4 ค่าหน่วยแรง ตามแนวขอบบนของคานช่วงเดียวมีช่องเปิด ในโครงข่ายที่ 4 โดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยึด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่นำไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป



(ก) โครงข่ายชิ้นส่วนที่ 5 ของงานวิจัยเดิม
ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดคงที่
ซึ่งใช้การปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายโดยวิธีการปรับเรียบเชิงมุม
Error = 0.0476 Nn = 32062 Ne = 61606



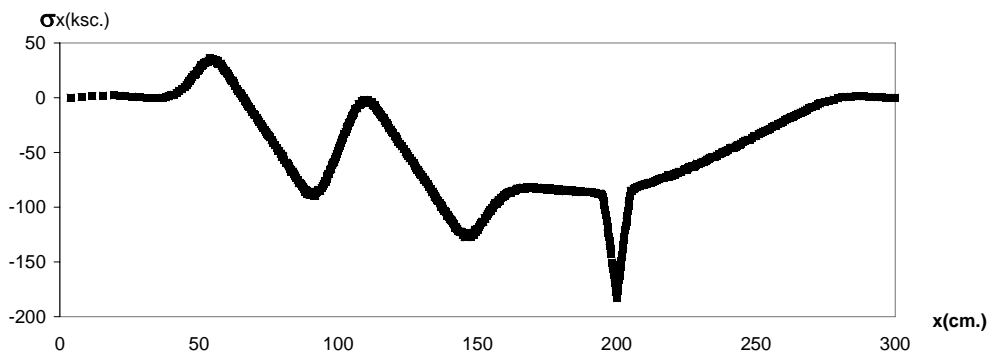
(ข) โครงข่ายชิ้นส่วนที่ 9 ของงานวิจัยเดิม
ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น
Error = 0.0489 Nn = 1842 Ne = 796



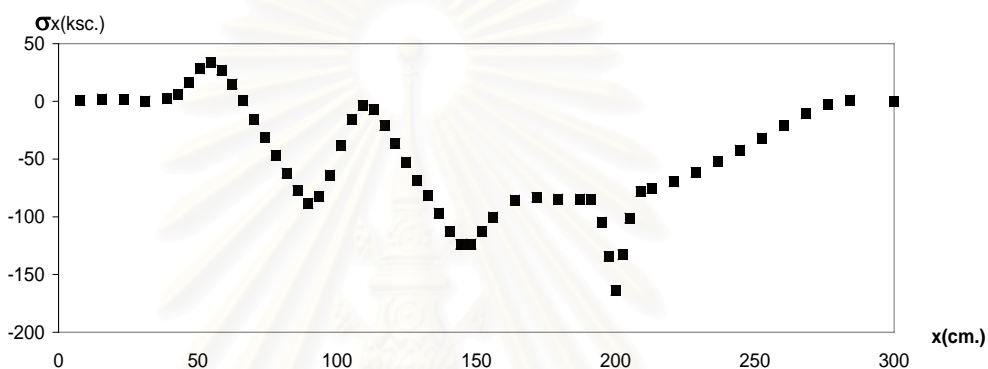
(ค) โครงข่ายชิ้นส่วนที่ 4 ของงานวิจัยนี้
ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด
ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่ไม่ใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป
Error = 0.0438 Nn = 2182 Ne = 3896

สถาบันนวัตกรรมการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

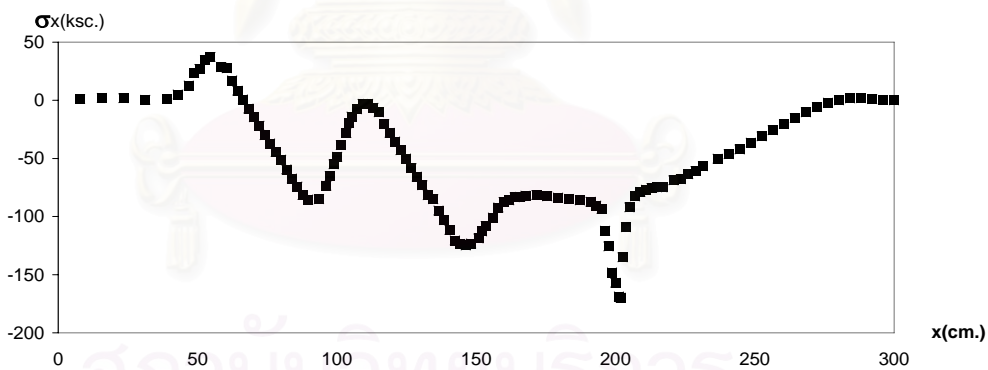
รูปที่ 4.4.5 การเปรียบเทียบ โครงข่ายชิ้นส่วนสามเหลี่ยมของปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิด
ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ



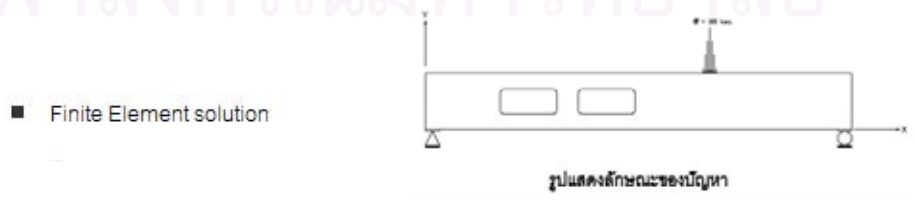
(ก) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม



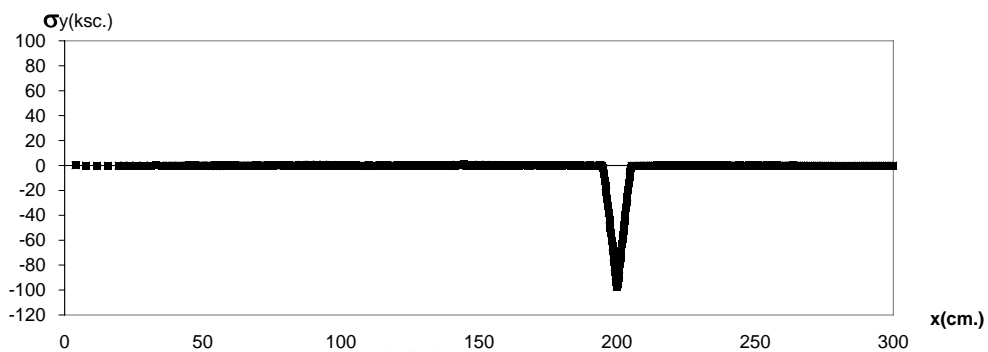
(ข) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยเดิมที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น



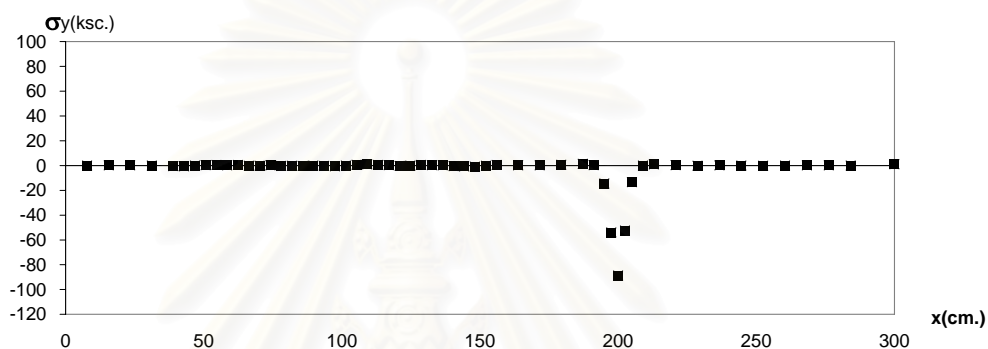
(ค) หน่วยแรงในทิศทาง x ของงานวิจัยนี้ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่นำไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป



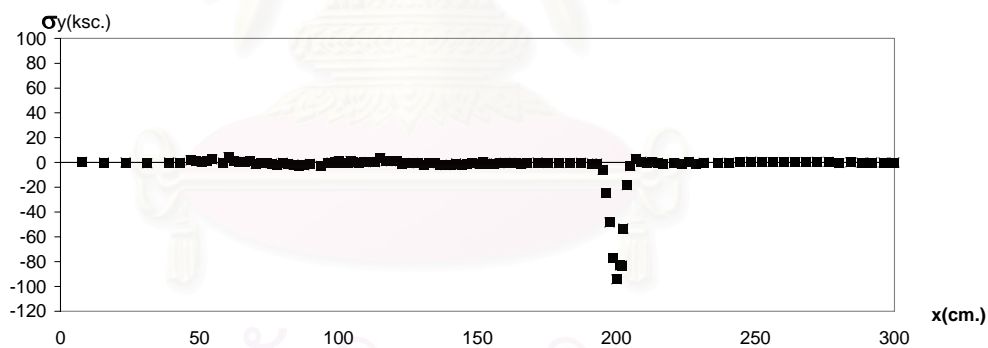
รูปที่ 4.4.6 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง x ตามแนวขอบบนของปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิด ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ



(ก) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม

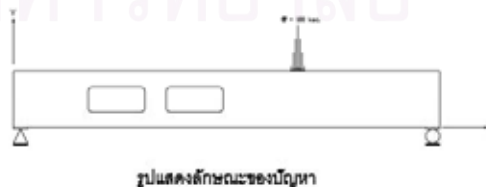


(ข) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยเดิมที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น

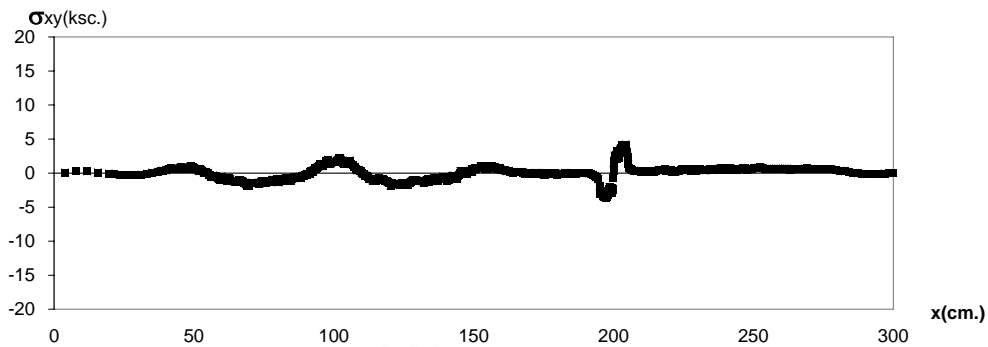


(ค) หน่วยแรงในทิศทาง y ของงานวิจัยนี้ ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่นำไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป

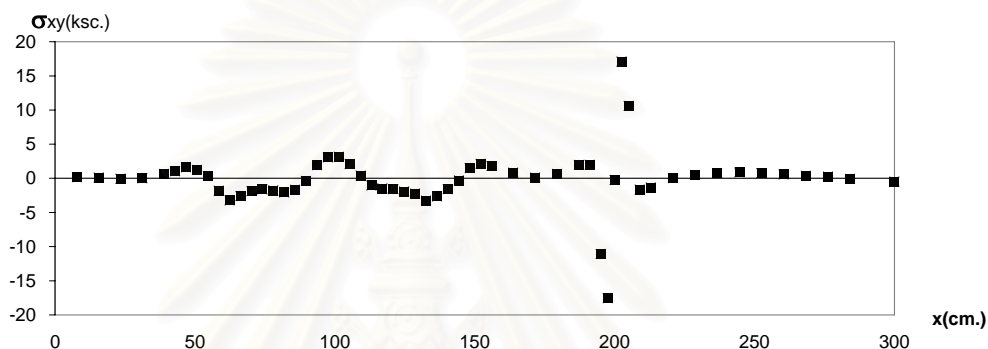
■ Finite Element solution
 — Exact solution



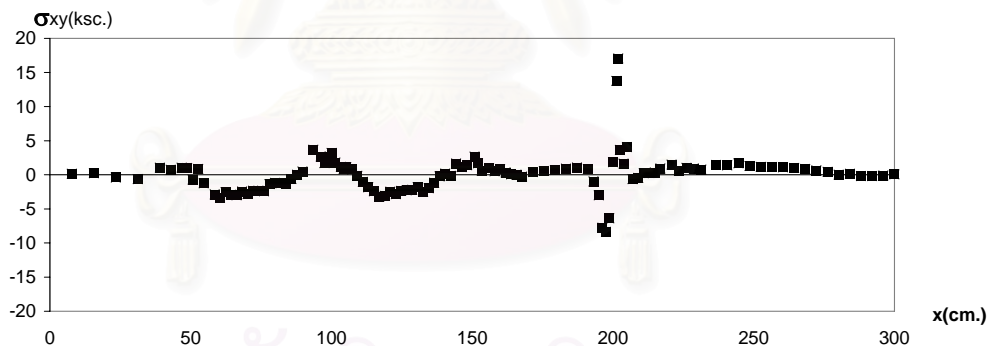
รูปที่ 4.4.7 ค่าหน่วยแรงในทิศทาง y ตามแนวขอบบนของปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิด ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ



(ก) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยเดิมที่ใช้การปรับเรียบเชิงมุม



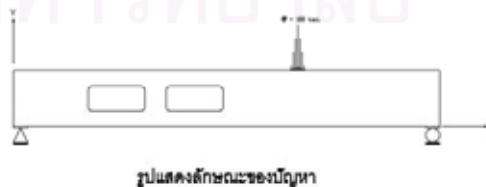
(ข) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยเดิมที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น



(ค) หน่วยแรงเฉือน ของงานวิจัยนี้ ที่ใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่นำไปใช้ในการสร้างชิ้นส่วนรอบถัดไป

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

■ Finite Element solution
— Exact solution



รูปที่ 4.4.8 ค่าหน่วยแรงเฉือน ตามแนวขอบบนของปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิด ในโครงข่ายสุดท้ายของงานวิจัยต่างๆ

งานวิจัย	จำนวน โครงข่าย	จำนวน จุดต่อ	จำนวน ชิ้นส่วน	ความคลาด เคลื่อน สัมพัทธ์	เวลา (วินาที)	จำนวน เท่าของจุด ต่อเมื่อ เทียบกับ งานวิจัยนี้	จำนวน เท่าของ เวลาเมื่อ เทียบกับ งานวิจัยนี้
งานวิจัยเดิม ที่ใช้การปรับเรียบ เชิงมุม	5	32062	61606	0.0476	1818	14.69	62.69
งานวิจัยเดิมที่ ใช้ชิ้นส่วน สามเหลี่ยมชนิด ความเครียด เชิงเส้น	9	1842	796	0.0489	59	0.84	2.03
งานวิจัยนี้ที่ใช้ ชิ้นส่วนสามเหลี่ยม อย่างง่ายพร้อมการ หมุนที่จุดยอด ร่วมกับการ ปรับปรุงการส่ง ข้อมูล	4	2182	3896	0.0438	29	1.00	1.00

ตารางที่ 4.4.1 เปรียบเทียบผลจากงานวิจัยต่างๆ ของปัญหาคานช่วงเดียวมีช่องเปิด

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

การพัฒนาโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดขึ้นส่วนอัตโนมัติในงานวิจัยนี้ ยังคงยึดหลักการทำงานตามกระบวนการปรับขนาดขึ้นส่วนเดิม นั่นคือ ใช้การประมาณค่าคลาดเคลื่อนจากการเปรียบเทียบผลที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับค่าประมาณของผลเฉลยที่ได้จากวิธีการพื้นตัวเป็นหย่อม สร้างขึ้นส่วนสามเหลี่ยมด้วยวิธีการตัดทอนเป็นรูปสามเหลี่ยมเดอลอนโดยวิธีพรอนที่คืบหน้า ซึ่งใช้การปรับปรุงคุณภาพโครงข่ายโดยวิธีการปรับเรียบเชิงมุม และปรับขนาดขึ้นส่วนโดยการเพิ่มจุดลงในบริเวณพื้นที่ที่มีความคลาดเคลื่อนมาก โดยคำนวณความหนาแน่นของจุดจากความคลาดเคลื่อนโดยประมาณจากจุดต่อทั้ง 3 ของขึ้นส่วน

ในส่วนของพัฒนาโปรแกรมที่ได้มีการเปลี่ยนแปลงนั้น จะเป็นการเปลี่ยนชนิดของขึ้นส่วนจากสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น เป็นขึ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด ร่วมกับการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่น่าไปใช้ในการสร้างขึ้นส่วนของปัญหาในการคำนวณรอบถัดไป โดยทำการส่งข้อมูลขอบเขต ข้อมูลของจุดต่อและค่าความคลาดเคลื่อนโดยประมาณของจุดต่อเฉพาะที่ขอบของปัญหาเท่านั้น ซึ่งสามารถสรุปผลที่ได้จากการพัฒนาโปรแกรม ดังนี้

ลักษณะของโครงข่ายที่ได้ หลังจากมีการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่ใช้ในการสร้างขึ้นส่วนในรอบถัดไปเพื่อปรับขนาดโครงข่ายใหม่ ทำให้โครงข่ายที่ได้มีความต่อเนื่องกันทั่วทั้งโดเมนของปัญหาเป็นอย่างดี เป็นผลช่วยลดจำนวนรอบในการคำนวณลง ซึ่งจะมีผลทำให้ระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณลดลงไปด้วย ทั้งนี้เนื่องมาจากโปรแกรมมีพื้นที่ในการเพิ่มจุดต่อได้ทั่วโดเมนของปัญหา สำหรับการเพิ่มจุดต่อภายในโดเมนของปัญหานั้น จะใช้ค่าความคลาดเคลื่อนโดยประมาณของจุดต่อเฉพาะที่ขอบของปัญหาที่คำนวณได้ของรอบก่อนหน้า ในการคำนวณหาตำแหน่งของจุดต่อที่เพิ่มให้อยู่ในตำแหน่งที่เหมาะสม ซึ่งจะแตกต่างจากงานวิจัยก่อนหน้านี้ ที่พบว่า มีปัญหาในการสร้างจุดต่อในบริเวณที่มีค่าความคลาดเคลื่อนแตกต่างกันมาก ทำให้ไม่สามารถสร้างขึ้นส่วนในบริเวณดังกล่าวได้ จึงต้องให้จำนวนรอบในการสร้างขึ้นส่วนเพิ่มขึ้นเพื่อให้ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของปัญหาที่คำนวณได้น้อยกว่าค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมรับได้ ถึงแม้ว่าวิธีการปรับปรุงนี้จะทำให้โครงข่ายมีความต่อเนื่องเพิ่มขึ้นและช่วยลดระยะเวลาในการคำนวณลง แต่ก็มีผลทำให้จำนวนของจุดต่อเพิ่มมากขึ้นอย่างรวดเร็ว ซึ่งสังเกตได้อย่างชัดเจนเมื่อโดเมนของปัญหามีขนาดใหญ่ ดังเช่นตัวอย่างที่ 4 ของงานวิจัยนี้ สำหรับการประมาณค่าคลาดเคลื่อนนั้นได้ผลค่อนข้างดีทั้งพื้นที่ภายในและบริเวณขอบของปัญหา เนื่องจากขึ้นส่วนมีรูปร่างที่ปรับปรุงแล้วดีขึ้นและมีขนาดต่อเนื่องกันทั่วทั้งโดเมนของปัญหา

ผลจากการเปลี่ยนขึ้นส่วนจากสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น เป็นสามเหลี่ยมอย่างง่ายพร้อมการหมุนที่จุดยอด ทำให้ระยะเวลาที่ใช้ในการคำนวณน้อยลง เนื่องจากมีจำนวนจุดต่อและระดับชั้นความเสี้น้อย

กว่า แต่ก็ทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนสูงมากในบางบริเวณ ซึ่งเป็นปัญหาของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมอย่างง่าย พร้อมการหมุนที่จุดยอดนี้

ผลของพฤติกรรมของชิ้นส่วนที่ใช้ในการวิเคราะห์ จะเห็นว่าลักษณะการกระจายของหน่วยแรงของปัญหาในการวิเคราะห์นั้นจะส่งผลต่อเวลาที่ใช้ในการวิเคราะห์อย่างมาก คือ เมื่อปัญหาที่ใช้ในการวิเคราะห์ มีลักษณะการกระจายของหน่วยแรงใกล้เคียงกับพฤติกรรมของชิ้นส่วนที่ใช้ จะทำให้ผลที่ได้จากการวิเคราะห์ ถูกต้องและแม่นยำอย่างรวดเร็ว ซึ่งสังเกตได้จากตัวอย่างที่ 3 ของงานวิจัยนี้ จะเห็นได้ว่าลักษณะการกระจายของหน่วยแรงในคานายื่น จะมีลักษณะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับระยะที่ห่างออกจากตำแหน่งที่แรงกระทำ ดังนั้นจึงทำให้ผลที่ได้จากการวิเคราะห์ของงานวิจัยนี้ถูกต้องอย่างรวดเร็วมาก โดยไม่ต้องใช้การปรับขนาดโครงข่ายเลย ซึ่งจะแตกต่างจากตัวอย่างที่ 1 ซึ่งลักษณะการกระจายของหน่วยแรงนั้นค่อนข้างคงที่เป็นบริเวณกว้าง จึงทำให้เวลาโดยรวมช้ากว่าตัวอย่างที่ 3 ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า เวลาที่ใช้ในการวิเคราะห์นั้นจะขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหาว่ามีความสอดคล้องกับพฤติกรรมของชิ้นส่วนมากน้อยเพียงใด

โปรแกรมที่ปรับปรุงแล้วนี้สามารถวิเคราะห์ผลได้แม่นยำและรวดเร็ว พร้อมทั้งได้โครงข่ายที่ต่อเนื่องกันมากขึ้น ซึ่งในการนำไปใช้จริงผู้ใช้จำเป็นต้องมีความรู้ในการกำหนดค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมให้และการกำหนดโครงข่ายเริ่มต้นให้เหมาะสม รวมทั้งการสร้างแบบจำลองที่ใช้ในการวิเคราะห์ให้เหมาะสมกับปัญหาซึ่งจะแตกต่างกันออกไป เพื่อให้เกิดประสิทธิภาพในการทำงานของโปรแกรม

5.2 ข้อเสนอแนะอื่นๆ

ในการศึกษาเพื่อการนำไปใช้งานจริง โดยวิธีการปรับปรุงการส่งข้อมูลที่ใช้ในการสร้างชิ้นส่วนในรอบถัดไปนั้นถ้าโดเมนของปัญหามีขนาดใหญ่ โปรแกรมจะทำการสร้างจุดต่อเพิ่มมากขึ้นอย่างรวดเร็ว ทั้งนี้เนื่องมาจากเมื่อปัญหามีขนาดใหญ่ค่าความคลาดเคลื่อนโดยประมาณของจุดต่อที่ขอบของปัญหา จะแตกต่างอย่างมากกับค่าความคลาดเคลื่อนภายในของปัญหา ทำให้การสร้างจุดต่อภายในซึ่งอ้างอิงมาจากจุดต่อที่ขอบมีค่าความคลาดเคลื่อนไม่ตรงกับหยาบความคลาดเคลื่อนที่บริเวณนั้น จึงทำให้เกิดการสร้างจุดต่อโดยเกินความจำเป็น วิธีแก้ไขคือในการส่งค่าเพื่อการคำนวณรอบถัดไปควรมีการเก็บค่าความคลาดเคลื่อนภายในของปัญหาไว้ด้วย เมื่อทำการสร้างจุดต่อใหม่ก็ให้ใช้ความคลาดเคลื่อนบริเวณโดยรอบของจุดต่อนั้น แทนที่จะใช้การเฉลี่ยจากจุดต่อของชิ้นส่วน นอกจากนี้ควรมีการปรับปรุงในส่วนของการปรับขนาดชิ้นส่วนให้สามารถมีการเพิ่มหรือลดจุดต่อได้อย่างอิสระ และการเพิ่มจุดต่อควรพิจารณาตำแหน่งที่เพิ่มให้เหมาะสมกับค่าคลาดเคลื่อนโดยรอบที่เกิดขึ้น โดยเพิ่มจุดต่อให้ใกล้กับจุดต่อที่เกิดค่าคลาดเคลื่อนสูงกว่าของชิ้นส่วน ซึ่งจะช่วยให้จุดต่อในโครงข่ายสุดท้ายที่มีประสิทธิภาพและเหมาะสมที่สุด ซึ่งจะช่วยลดระยะเวลาในส่วนของการคำนวณจุดต่อที่เกินความจำเป็นลงได้

รายการอ้างอิง

- [1] Kelly D. W., De J. P. Gago S. R., Zienkiewicz O. C., Babuska I. A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part I – Error Analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering 19(1983): 1593-1619.
- [2] Kelly D. W., De J. P. Gago S. R., Zienkiewicz O. C., Babuska I. A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part II – Adaptive Mesh Refinement. International Journal for Numerical Methods in Engineering 19(1983): 1621-1656.
- [3] Zienkiewicz O. C., Zhu J. Z. A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis International Journal for Numerical Methods in Engineering 24(1987): 337-357.
- [4] Ainsworth M., Zhu J. Z., Craig A. W., Zienkiewicz O. C. Analysis of the Zienkiewicz –Zhu A Posteriori Error Estimator in the Finite Element Method. International Journal for Numerical Methods in Engineering 28(1989): 2161-2174.
- [5] Zhu J. Z., Zienkiewicz O. C. Superconvergence Recovery Technique and a Posteriori Error Estimators. International Journal for Numerical Methods in Engineering 30(1990): 1321-1339.
- [6] Zienkiewicz O. C., Zhu J. Z. Adaptive and Mesh Generation. International Journal for Numerical Methods in Engineering 32(1991): 783-810.
- [7] Zienkiewicz O. C., Zhu J. Z. Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimates: Part I - The Recovery Technique. International Journal for Numerical Methods in Engineering 33(1992): 1331-1364.
- [8] Zienkiewicz O. C., Zhu J. Z. Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimates: Part II - Error Estimates and Adaptivity. International Journal for Numerical Methods in Engineering 33(1992): 1365-1382.
- [9] Herrmann L. R. Laplacian – Isoparametric Grid Generation Scheme. J. Eng. Mech. Div. 1976(October): 749-759.
- [10] Lo S. H. A New Mesh Generation Scheme for Arbitrary Planar Domains. International Journal for Numerical Methods in Engineering 21(1985): 1403-1426.
- [11] Peraire J., Peiro J., Farmaggia L., Morgan K., Zienkiewicz O. C. Finite Element Euler Computations in Three Dimensions. International Journal for Numerical Methods in Engineering 26(1988): 2135-2159.
- [12] Zhu J. Z., Zienkiewicz O. C., Hinton E. and Wu J. A New Approach to the Development of Automatic Quadrilateral Mesh Generation. International Journal for Numerical Methods in Engineering 32(1991):849-866.

- [13] Cavendish J. C. Automatic Triangulation of Arbitrary Planar Domain for the Finite Element Method. International Journal for Numerical Methods in Engineering 8(1974):679-696.
- [14] Lo S. H. Delaunay Triangulation of Non-Convex Planar Domains. International Journal for Numerical Methods in Engineering 28(1989): 2659-2707.
- [15] Borouchaki H., George P. L. Aspects of 2-D Delaunay Mesh Generation. International Journal for Numerical Methods in Engineering 40(1997): 1957-1975.
- [16] Alexander F. Almost Regular Delaunay – Triangulations. International Journal for Numerical Methods in Engineering 40(1997): 4595-4610.
- [17] Johnson B. P., Sullivan J. M. Kwasnik J. R. and A. Automatic Conversion of Triangular Finite Element Meshes to Quadrilateral Elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering 31(1991): 67-84.
- [18] Allman D. J. A Compatible Triangular Element Including Vertex Rotations for Plane Elasticity Analysis. Computers and Structures 19(1984): 1-8.
- [19] เทอดเกียรติ จันทวีชรากร. โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดขึ้นส่วนอัตโนมัติ. วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมโยธา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 1999.
- [20] Karamete B. K., Tokdemir T., Ger M. Unstructured Grid Generation and a Simple Triangulation Algorithm for Arbitraries Using Object Oriented Programming. International Journal for Numerical Methods in Engineering 40(1997): 251-268.
- [21] Weatherill N. P., Hassan O. Efficient Three – Dimensional Delaunay Triangulation with Automatic Point Creation and Imposed Boundary Constraint. International Journal for Numerical Methods in Engineering 37(1994): 2005-2039.
- [22] รัฐพล สุวรรณพฤกษ์. โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดขึ้นส่วนอัตโนมัติโดยใช้วิธีการปรับเรียบเชิงมุม. วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมโยธา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2001.
- [23] สุรชาญ แซ่ลี. โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดขึ้นส่วนอัตโนมัติด้วยวิธีแลกเปลี่ยนร่วมกับวิธีฟรอนต์เดินหน้า. วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมโยธา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2002.
- [24] ชัยณรงค์ เสียงไพรัตน์. โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดขึ้นส่วนอัตโนมัติโดยใช้ชิ้นส่วนสามเหลี่ยมชนิดความเครียดเชิงเส้น. วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมโยธา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2004.
- [25] Mackinnon R. J., Carey G. F. Superconvergent Derivatives: A Taylor Series Analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering 28(1989): 489-509.



ภาคผนวก

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ก

การใช้งานโปรแกรม

เนื่องจากโปรแกรมการทำงานโดยอาศัยการนำเข้าข้อมูลจากแฟ้มข้อมูลเป็นหลัก ดังนั้นแฟ้มข้อมูลจึงเป็นส่วนที่สำคัญที่สุดสำหรับผู้ใช้งาน ซึ่งมีรายละเอียดของแฟ้มดังนี้ โดยยกตัวอย่างแฟ้มจากการวิเคราะห์ปัญหาในตัวอย่างที่ 1 ของบทที่ 4 ดังแสดงในรูป ผ.ก.1 โดยเพิ่มหมายเลขบรรทัดเพื่อความสะดวกในการอ้างอิง

ในส่วนแรกของแฟ้มบรรทัดที่ 1-6 จะเป็นการกำหนดลักษณะของปัญหา ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมรับได้ และคุณสมบัติทางวัสดุ ลำดับต่อมาในบรรทัดที่ 8 จะเป็นพิกัดที่มุมล่างซ้ายและมุมขวาบนของพื้นที่ที่จะกำหนดให้ ADT เพื่อใช้แบ่งให้กับแต่ละจุดต่อไป ข้อสังเกตคือที่มุมบนขวาต้องอยู่เลยตำแหน่งบนขวาสุดของปัญหาออกไป ขณะที่มุมล่างซ้ายสามารถกำหนดให้ซ้อนทับกันได้

ส่วนต่อมาในบรรทัดที่ 10 เป็นจำนวนขอบเขตของปัญหา และในบรรทัดที่ 12-18 เป็นข้อมูลของแต่ละขอบเขต โดยมีข้อมูลเรียงตามลำดับดังนี้ 1.หมายเลขประจำขอบเขตโดยต้องเริ่มจาก 0 ไล่ตามกันไป 2.ค่าพิกัดในแนวแกน x ของจุดเริ่มต้น 3.ค่าพิกัดในแนวแกน y ของจุดเริ่มต้น 4.ค่าพิกัดในแนวแกน x ของจุดปลาย 5.ค่าพิกัดในแนวแกน y ของปลาย 6.รัศมีของเส้นขอบเขต มีค่าเป็นบวกเมื่อจุดศูนย์กลางอยู่ทางซ้ายของเส้น มีค่าเป็นลบเมื่อจุดศูนย์กลางอยู่ทางขวาของเส้น และมีค่าเป็น 0 ถ้าเป็นเส้นตรง 7.จำนวนขอบเขตย่อยที่จะแบ่ง

ต่อมาเป็นข้อมูลที่รองรับโดยในบรรทัดที่ 20 เป็นจำนวนของที่รองรับ และมีรายละเอียดของที่รองรับในบรรทัดที่ 22-25 โดยมีข้อมูลเรียงตามลำดับดังนี้ 1.เป็นหมายเลขเส้นขอบเขตที่จะอ้างอิงถึง 2.ชนิดของที่รองรับมีค่า p หรือ P ถ้ามีการเฉพาะที่จุดเริ่มต้นของขอบเขต และมีค่าเป็น l หรือ L ถ้ามีการรองรับตลอดทั้งเส้นขอบเขต 3.การรองรับในทิศทาง x 4.การรองรับในทิศทาง y 5.การรองรับการหมุน โดยจะมีค่าเป็น 1 ถ้าไม่อนุญาตให้มีการเคลื่อนที่ และมีค่าเป็น 0 ถ้าอนุญาตให้มีการเคลื่อนที่ ในทิศทางนั้นๆ

ต่อมาเป็นข้อมูลของแรงกระทำโดยในบรรทัดที่ 27 เป็นจำนวนแรงกระทำ และบรรทัดที่ 29 เป็นรายละเอียดของแรงกระทำ โดยมีข้อมูลเรียงตามลำดับดังนี้ 1.เป็นหมายเลขเส้นขอบเขตที่จะอ้างอิงถึง 2.ชนิดของแรงกระทำมีค่า p หรือ P ถ้าแรงกระทำเป็นจุดกระทำเฉพาะที่จุดเริ่มต้นของขอบเขต และมีค่าเป็น l หรือ L ถ้ามีแรงกระทำเป็นแรงแผ่กระจายตลอดทั้งเส้นขอบเขต 3. 4. และ 5. เป็นขนาดของแรงกระทำในทิศทาง x y และการหมุนที่จุดเริ่มต้นของขอบเขต 6. 7. และ 8. เป็นขนาดของแรงกระทำในทิศทาง x y และการหมุนที่จุดปลายของขอบเขต ถ้าชนิดข้อมูลเป็น p หรือ P ข้อมูลที่ 6. 7. และ 8. ต้องไม่มี

ในส่วนสุดท้ายของแฟ้มบรรทัดที่ 31 เป็นข้อมูลสำหรับการแสดงผลทางกราฟิกโดยกำหนดขนาดของตัวหนังสือและมาตราส่วนในการแสดงผลการเปลี่ยนตำแหน่ง

ในการใช้งานโปรแกรมจะให้ป้อนชื่อแฟ้มข้อมูลสำหรับนำเข้า และหลังจากวิเคราะห์แล้วในแต่ละรอบของโครงข่ายโปรแกรมจะส่งออกแฟ้มข้อมูลโดย แบ่งเป็น 2 ประเภทคือ

- 1) แฟ้มข้อมูลตัวหนังสือ แฟ้มประเภทนี้มี 2 แฟ้มคือ
 - 1.1) แฟ้มข้อมูลแสดงตำแหน่งของจุดต่อและแสดงความสัมพันธ์ระหว่างชิ้นส่วนและจุดต่อ
 - 1.2) แฟ้มข้อมูลหมายเลขจุดต่อ การกระจัด หน่วยแรง และความคลาดเคลื่อนในจุดต่อนั้นๆ
- 2) แฟ้มข้อมูลแลกเปลี่ยนประเภทกราฟฟิก ซึ่งจะมี 2 ประเภทคือ ประเภทที่เป็นแฟ้มตัวอักษรและแฟ้มตัวเลขฐานสอง ในการตรวจสอบการแสดงผลก็สามารถเปิดหรือปิดเลย์อูทในโปรแกรม CAD เพื่อพิจารณาเฉพาะส่วนที่สนใจได้

```

1  Plane type<plane stress=0 , plane strain=1>
2  0
3  Expected Error
4  0.02
5  Material properties <E nu thickness >
6  2e6 0.3 0.1
7  Limit of search <lowerleft (x,y) upperright (x,y)>
8  0 0 20.01 20.01
9  Number of boundary
10 7
11 BoundaryNo. (x1,y1) (x2,y2) radius segment
12 0 0 20 0 8 0 8
13 1 0 8 0 2 0 5
14 2 0 2 2 0 -2 3
15 3 2 0 8 0 0 5
16 4 8 0 20 0 0 9
17 5 20 0 20 20 0 9
18 6 20 20 0 20 0 9
19  Number of support
20 4
21 BoundaryNo. (Point/Line<P/L>) ( x,y,r <fix/free:1/0>)
22 0 L 1 0 1
23 1 L 1 0 1
24 3 L 0 1 1
25 4 L 0 1 1
26  Number of load
27 1
28 BoundaryNo. (Point/Line<P/L>) (x1,y1,r1) (x2,y2,r2) <if point neglect x2,y2,r2>
<Moment only at r1>
29 6 L 0 100 0 0 100 0
30  Text size & Displacement scale
31 0.2 50

```

รูปที่ ผ.ก.1 ตัวอย่างแฟ้มนำเข้าข้อมูล

ภาคผนวก ข

รายละเอียดของรหัสคํานวณ

ในการเขียนรหัสคํานวณด้วยภาษา C++ จะแบ่งประเภทแฟ้มข้อมูลเป็น 2 ชนิด คือ แฟ้มส่วนหัวคือมีชื่อแฟ้มลงท้ายด้วย .h และแฟ้มโปรแกรมคือมีชื่อลงท้ายด้วย .cpp ในงานวิจัยนี้ได้รวมแฟ้มโปรแกรมเข้าในแฟ้มส่วนหัวเพื่อลดการพิมพ์ในการคอมไพล์โปรแกรม ดังนั้นถ้าต้องการความเร็วในการคอมไพล์สามารถแยกส่วนดำเนินการ (implementation) ในแฟ้มส่วนหัวออกเป็นแฟ้มโปรแกรมในชื่อเดียวกันแล้วใช้คำสั่ง #include "filename" ในการอ้างอิงถึงแฟ้มส่วนหัว สำหรับรายละเอียดของรหัสคํานวณทั้งหมดได้รวบรวมไว้ในแผ่นดิสเกตประกอบวิทยานิพนธ์



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายพงศกร ตั้งถาวรการ เกิดเมื่อวันที่ 23 ตุลาคม พ.ศ. 2525 ที่จังหวัดราชบุรี เข้ารับการศึกษาระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษาตอนต้นที่โรงเรียนหัวหินวิทยาลัย อำเภอหัวหิน จังหวัดประจวบคีรีขันธ์ และเข้ารับการศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา เขตปทุมวัน กรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต จากมหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต จังหวัดปทุมธานี ในปีการศึกษา 2547 และเข้าศึกษาต่อในระดับปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโยธา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2548



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย