

บทที่ 2

ทฤษฎีพื้นฐานในการวิเคราะห์วัสดุโดยใช้คลื่นเสียง

2.1 สมบัติความยืดหยุ่นของของแข็ง (elastic properties in solid)

ความยืดหยุ่นเป็นสมบัติหนึ่งของวัสดุ เมื่อมีแรงภายนอกมากระทำจะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างยืดหยุ่นมีขอบเขต ความเครียดที่เกิดเนื่องจากความเค้นจะหายไปเมื่อนำความเค้นออก ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดเป็นแบบเชิงเส้นในวัสดุบางชนิดและไม่เป็นเชิงเส้นในบางชนิด ขึ้นกับ โครงสร้างและพันธะอะตอมของวัสดุ วัสดุที่มีความยืดหยุ่นความเครียดจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความเค้นและเป็นไปตามกฎของฮุค (Hooke's law) ซึ่งกฎของฮุคใช้ได้กับช่วงความเครียดน้อยๆ เมื่อความเครียดมากขึ้นอยู่ในช่วงไม่แปรแบบเชิงเส้นกฎของฮุคไม่เป็นจริง ความสัมพันธ์ของกฎของฮุคคือ

$$T = CS \quad (2.1)$$

เมื่อ T คือ ค่าความเค้น

S คือ ค่าความเครียด

C คือ ค่าคงที่ความแข็ง (stiffness constant)

2.1.1 ความเค้น คือ แรงต่อพื้นที่ที่กระทำบนวัสดุ ซึ่งจะมีทั้งที่มีทิศตั้งฉากกับพื้นที่ผิว และมีทิศขนานไปกับพื้นที่ผิวของวัสดุ พิจารณารูปที่ 2.1 แรง $d\vec{F}$ กระทำบนพื้นที่เล็ก ๆ $dA_x = dydz$ ของวัสดุ สามารถที่จะแตกแรงออกเป็นแรงย่อย dF_x , dF_y , และ dF_z ในทิศ x , y และ z ตามลำดับดังนี้

$$d\vec{F} = dF_x \hat{x} + dF_y \hat{y} + dF_z \hat{z}$$

ดังนั้นเราจะหาความเค้นในทิศ x ที่สัมพันธ์กับส่วนประกอบของแรงที่กระทำบนวัสดุได้
เป็น

$$\vec{T}_x = T_{xx}\hat{x} + T_{yx}\hat{y} + T_{zx}\hat{z}$$

เมื่อ $T_{xx} = \frac{dF_x}{dA_x}$, $T_{yx} = \frac{dF_y}{dA_x}$, $T_{zx} = \frac{dF_z}{dA_x}$

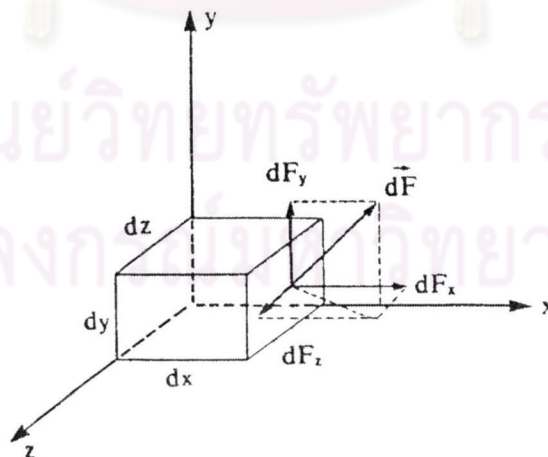
ตัวห้อยตัวแรก แทนทิศทางของความเค้น ส่วนตัวห้อยตัวที่สองแทนทิศทางที่ตั้งฉากกับพื้นที่ผิวที่ความเค้นกระทำ เช่น T_{yx} เป็นความเค้นในทิศ y กระทำบนพื้นที่ $dydz$ ที่ตั้งฉากกับแกน x ในทำนองเดียวกันเราสามารถหาความเค้นที่กระทำกับอีก 2 ด้านที่เหลือคือ $dA_y = dx dz$ และ $dA_z = dx dy$ ได้เป็น T_y , T_{yy} , T_{zy} และ T_z , T_{yz} , T_{zz} ตามลำดับ และสามารถเขียนความเค้นในทิศ y และทิศ z คือ \vec{T}_y และ \vec{T}_z ตามลำดับ ได้เป็น

$$\vec{T}_y = T_{xy}\hat{x} + T_{yy}\hat{y} + T_{zy}\hat{z}$$

เมื่อ $T_{xy} = \frac{dF_x}{dA_y}$, $T_{yy} = \frac{dF_y}{dA_y}$, $T_{zy} = \frac{dF_z}{dA_y}$

$$\vec{T}_z = T_{xz}\hat{x} + T_{yz}\hat{y} + T_{zz}\hat{z}$$

เมื่อ $T_{xz} = \frac{dF_x}{dA_z}$, $T_{yz} = \frac{dF_y}{dA_z}$, $T_{zz} = \frac{dF_z}{dA_z}$



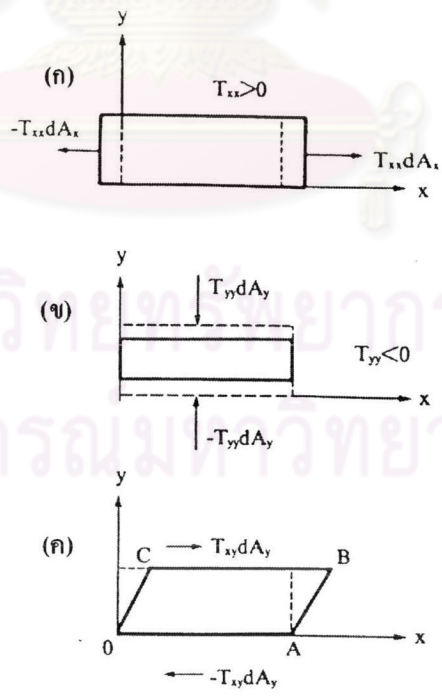
รูปที่ 2.1 แรง $d\vec{F}$ กระทำบนพื้นที่ผิวด้านที่ตั้งฉากกับแกน x ของวัสดุเล็ก ๆ
รูปทรงลูกบาศก์ [1]

ดังนั้นเราจะเห็นว่าส่วนประกอบของความเค้นจะมีอยู่ทั้งหมด 9 ตัว และสามารถเขียนในรูปเทนเซอร์อันดับ 2 ได้เป็น

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{yx} & T_{zx} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{zy} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

เมื่อ $i = x y z$ แทนทิศทางของความเค้น
 $j = x y z$ แทนทิศที่ตั้งฉากกับพื้นที่ผิวที่ความเค้นกระทำ

เมื่อ $i = j$ ถ้า $T_{ij} > 0$ จะได้ว่า T_{ij} เป็นความเค้นดึง (extensional stress) คือ ความเค้นที่ดึงวัสดุให้มีขนาดยาวขึ้นดังแสดงในรูป 2.2 (ก) หรือ ถ้า $T_{ij} < 0$ จะได้ว่า T_{ij} เป็นความเค้นกด (compressional stress) คือ ความเค้นที่กดวัสดุให้มีขนาดหดสั้นลง ดังแสดงในรูป 2.2 (ข) ซึ่งจะมีอยู่ทั้งหมด 3 ตัวคือ T_{xx} T_{yy} และ T_{zz} เมื่อ $i \neq j$ จะได้ T_{ij} เป็นความเค้นเฉือน (shear stress) คือ ความเค้นที่ทำให้รูปร่างของวัสดุบิดเบี้ยวไปจากรูปร่างเดิม จะมีอยู่ทั้งหมด 6 ตัว คือ T_{xy} T_{xz} T_{yx} T_{yz} T_{zx} T_{zy} ตัวอย่างของความเค้นเฉือน T_{xy} แสดงไว้ในรูป 2.2 (ค)



รูปที่ 2.2 ความเค้นแบบต่าง ๆ (ก) ความเค้นดึง (ข) ความเค้นกด (ค) ความเค้นเฉือน [1]

ในที่นี้ความเค้นที่เราพิจารณามีสมบัติสมมาตร (symmetry) จะได้ว่า $T_{ij} = T_{ji}$ ดังนั้นเทนเซอร์ความเค้นในสมการที่ (2.2) จะเหลือสมาชิกเพียง 6 ตัวที่เป็นอิสระต่อกัน เพื่อความสะดวกเราจะกำหนดสัญลักษณ์ของเทนเซอร์ความเค้นใหม่ โดยลดตัวห้อยจาก 2 ตัวเหลือเพียงตัวเดียว ดังตารางที่ 2.1 จะได้เทนเซอร์ความเค้นใหม่ $[T_I]$ เป็นดังนี้

$$\begin{bmatrix} T_{xx} & T_{yx} & T_{zx} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{zy} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & T_6 & T_5 \\ T_6 & T_2 & T_4 \\ T_5 & T_4 & T_3 \end{bmatrix}$$

หรือจะลดรูปจากเทนเซอร์อันดับ 2 ให้เหลือเป็นเวกเตอร์หลัก (column vector) ได้ดังนี้

$$[T_I] = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix}$$

ตารางที่ 2.1 การลดตัวห้อยจาก 2 ตัวเหลือ 1 ตัว สำหรับเทนเซอร์ความเค้นที่มีสมบัติสมมาตร

ij หรือ kl	I หรือ J
xx	1
yy	2
zz	3
$yz = zy$	4
$xz = zx$	5
$xy = yx$	6

2.1.2 ความเครียด (strain) คือ การที่วัสดุเกิดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรหรือรูปร่างหรือเปลี่ยนแปลงทั้งรูปร่างและปริมาตรเมื่อถูกความเค้นมากระทำ แบ่งได้เป็น

1 ความเครียดคดทั้งปริมาตร (bulk compressional strain) คือ ความเครียดที่เกิดจากความเค้น กระทำกับวัสดุทั้ง 3 ด้านแล้ววัสดุเปลี่ยนแปลงปริมาตรไป

2 ความเครียดตามยาว (longitudinal strain) คือ ความเครียดที่เกิดจากความเค้นดึงหรือกด แล้วทำให้วัสดุเปลี่ยนแปลงความยาวไป

3 ความเครียดเฉือน (shear strain) คือ ความเครียดที่เกิดจากความเค้นเฉือนแล้วทำให้ผิวหน้าทั้งสองด้านของวัสดุที่ขนานกันถูกบิดให้เลื่อนออกจากกัน

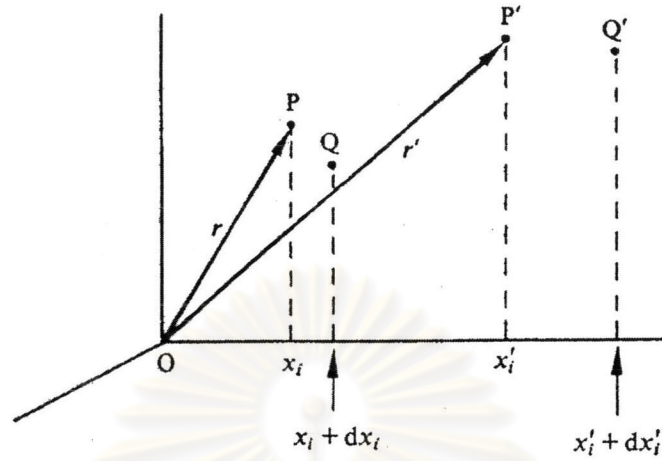
ต่อไปเราจะหาความเครียดที่เกิดในวัสดุโดยใช้รูปที่ 2.3 พิจารณาการเลื่อนของจุด P หลังจากได้รับความเค้นไปที่จุด P' ซึ่งเป็นการเปลี่ยนตำแหน่งจาก $\vec{r}_p = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ ไปที่ $\vec{r}_{p'} = x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}$ ซึ่ง $x' = x + u_x$, $y' = y + u_y$, $z' = z + u_z$ และ u_x , u_y , u_z คือ ระยะกระจัดในทิศ x , y , z ตามลำดับ จากนั้นพิจารณาจุด Q ที่อยู่ติดกับจุด P ที่ตำแหน่ง $\vec{r}_q = (x + dx)\hat{x} + (y + dy)\hat{y} + (z + dz)\hat{z}$ ว่าเปลี่ยนไปอย่างไรหลังจากได้รับความเค้นแล้ว จากรูป Q จะเปลี่ยนไปอยู่ที่จุด Q' ที่ตำแหน่ง $\vec{r}_{q'} = (x' + dx')\hat{x} + (y' + dy')\hat{y} + (z' + dz')\hat{z}$ ซึ่ง $dx' = dx + du_x$, $dy' = dy + du_y$, $dz' = dz + du_z$ จะได้ว่า du_x , du_y , du_z ก็คือ ระยะที่วัสดุเปลี่ยนขนาดไปตามแกน x , y และ z ตามลำดับ ซึ่งถ้า dx , dy และ dz เล็กมากๆ เราจะได้

$$\begin{aligned} du_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz \\ du_y &= \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{\partial u_y}{\partial z} dz \\ du_z &= \frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (2.3)$$

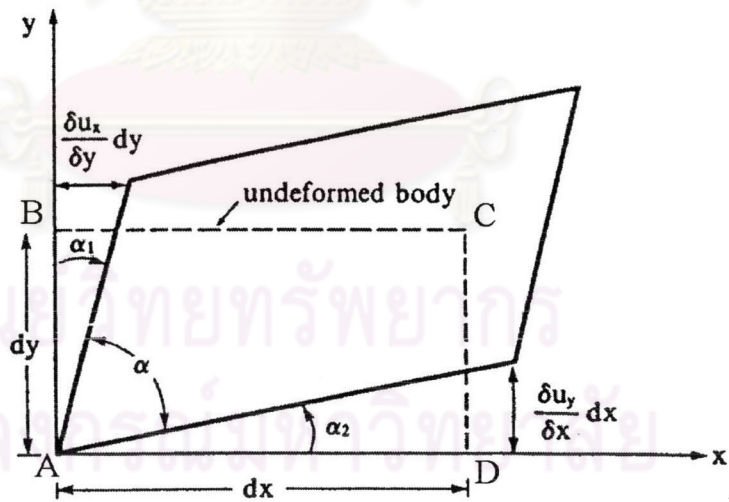
จากสมการที่ (2.3) จะได้ปริมาณ 9 ตัวที่เกี่ยวข้องกับเทนเซอร์ความเครียด คือ $\frac{\partial u_x}{\partial x}$, $\frac{\partial u_y}{\partial y}$,

$\frac{\partial u_z}{\partial z}$, $\frac{\partial u_x}{\partial y}$, $\frac{\partial u_x}{\partial z}$, $\frac{\partial u_y}{\partial x}$, $\frac{\partial u_y}{\partial z}$, $\frac{\partial u_z}{\partial x}$, $\frac{\partial u_z}{\partial y}$ ซึ่ง 3 ตัวแรกเป็นความเครียดตามยาวที่ขนานกับแกน x , y และ z ตามลำดับ เขียนสัญลักษณ์ได้เป็น

$$S_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad S_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad S_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$



รูปที่ 2.3 การเลื่อนตำแหน่งของจุดในเนื้อวัสดุ หลังจากได้รับความเค้น [2]



รูปที่ 2.4 ความเครียดเฉือน $S_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$ ที่เกิดขึ้น โดยเส้นประแสดงรูปร่างเดิมก่อนได้รับความเค้นเฉือน [1]

ส่วน 6 ตัวที่เหลือเป็นความเครียดเฉือน สามารถอธิบายความหมายโดยพิจารณาจากรูปที่ 2.4 ที่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD เปลี่ยนไปเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน หลังจากได้รับความเค้นโดยมุมระหว่างด้าน \overline{AB} กับด้าน \overline{AD} เปลี่ยนจาก $\frac{\pi}{2}$ ไปเป็น α ดังนั้นค่าของมุมที่เปลี่ยนไปจะเท่ากับ

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (2.4)$$

เมื่อ ค่า α_1 และ α_2 เป็นมุมที่เล็กมาก ๆ เราสามารถประมาณค่า α_1 และ α_2 ได้เป็น

$$\alpha_1 \approx \tan \alpha_1 = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

และ

$$\alpha_2 \approx \tan \alpha_2 = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

แทนค่า α_1 และ α_2 ลงในสมการที่ (2.4) จะได้

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = S_{xy} \quad (2.5)$$

ซึ่ง S_{xy} ก็คือ ค่าความเครียดเฉือนที่เกิดบนระนาบ xy

ในทำนองเดียวกันกับ S_{xy} เราสามารถหาความเครียดเฉือนตัวอื่น ๆ ได้เป็น

$$S_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad (2.6)$$

$$S_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (2.7)$$

$$S_{yx} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (2.8)$$

$$S_{zy} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \quad (2.9)$$

$$S_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \quad (2.10)$$

จะเห็นได้ว่า $S_{xy} = S_{yx}$ $S_{xz} = S_{zx}$ และ $S_{yz} = S_{zy}$ สรุปได้ว่าเทนเซอร์ความเครียดมีสมบัติสมมาตรกล่าวคือ

$$S_{ij} = S_{ji}$$

ดังนั้นสมาชิกของเทนเซอร์ความเครียดทั้งหมด 9 ตัวจะลดลงเหลือ 6 ตัวที่อิสระกัน จึงเขียนเทนเซอร์ความเครียดได้ดังนี้

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{yx} & S_{zx} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{zy} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{bmatrix}$$

หรือจะใช้ตัวห้อยเพียงตัวเดียวโดยลดจาก ตัวห้อย ij เหลือเพียงตัวห้อย I ตัวเดียว และเขียนให้อยู่ในรูปเวกเตอร์คอลัมน์ได้เป็น

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{yz} \\ S_{xz} \\ S_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = [S_I] \quad (2.11)$$

เมื่อรวมสมการที่ (2.6) ถึง (2.11) เข้าด้วยกันเราจะได้

$$[S_I] = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

จากสมการที่ (1) เขียนให้อยู่ในรูปเทนเซอร์ได้เป็น

$$T_I = C_{IJ} S_J \quad (2.13)$$

เมื่อ $I, J = 1, 2, 3, 4, 5$ และ 6

และ C_{IJ} คือ ค่าคงที่ความแข็งเป็นเมตริกซ์ 6×6 มีสมาชิกทั้งหมด 36 ตัว แต่ C_{IJ} มีลักษณะสมมาตรกล่าวคือ $C_{IJ} = C_{JI}$ ทำให้เหลือสมาชิกที่อิสระต่อกัน 21 ตัว ดังนี้

$$C_{IJ} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix}$$

จากสมบัติความเป็นไอโซโทรปิก (isotropic) ของวัสดุ คือ ปริมาณทางฟิสิกส์จะไม่ขึ้นอยู่กับทิศทาง ทำให้ค่าคงที่ความแข็งในแต่ละทิศทาง x y และ z จะเท่ากัน ดังนั้นเราสามารถเขียนค่าคงที่ความแข็ง C_{IJ} โดยใช้ตัวแปรเพียง 2 ตัวได้แก่ λ และ μ ซึ่งเรียกว่า ค่าคงที่ของลามเ (Lame' constant) ได้เป็น

$$C_{IJ} = C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.14)$$

เมื่อ δ_{ij} คือ Kronecker delta มีสมบัติ คือ

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

จากตารางที่ 1 และสมการที่ (2.14) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} C_{11} = C_{22} = C_{33} &= \lambda + 2\mu, & C_{12} = C_{23} = C_{13} &= \lambda \\ C_{44} = C_{55} = C_{66} &= \mu = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{aligned}$$

ส่วนค่า C_{IJ} ตัวอื่นๆจะเป็นศูนย์หมด ดังนั้นสำหรับของแข็งที่เป็นไอโซโทรปิก ค่าคงที่ความแข็งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของค่าคงที่ของลามเได้เป็น

$$C_{IJ} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

เมื่อแทนค่า C_{IJ} แต่ละตัวลงในสมการที่ (2.13) เราจะได้

$$\begin{aligned} T_1 &= \lambda\Delta + 2\mu S_1, & T_2 &= \lambda\Delta + 2\mu S_2, & T_3 &= \lambda\Delta + 2\mu S_3 \\ T_4 &= \mu S_4, & T_5 &= \mu S_5, & T_6 &= \mu S_6 \end{aligned} \quad (2.15)$$

เมื่อ $\Delta = S_1 + S_2 + S_3$ เรียกว่า dilatation ใช้แทนปริมาตรที่เปลี่ยนไปต่อปริมาตรเดิมของวัสดุ

จะเห็นได้ว่าค่าคงที่ของลามเ 2 ตัว คือ λ และ μ สามารถใช้นิยามสมบัติความยืดหยุ่นของวัสดุได้อย่างสมบูรณ์ แต่ในทางปฏิบัติค่าสมบัติความยืดหยุ่นที่นิยมใช้ในการทดสอบสมบัติทางฟิสิกส์ของวัสดุ จะมีอยู่ 4 ค่า คือ

- 1 ค่ามอดูลัสของยัง (Young's Modulus) ใช้สัญลักษณ์เป็น E
- 2 อัตราส่วนของปัวส์ซอง (Poisson's ratio) ใช้สัญลักษณ์เป็น ν
- 3 ค่ามอดูลัสก้อน (bulk modulus) ใช้สัญลักษณ์เป็น K
- 4 ค่ามอดูลัสเฉือน (shear modulus) ใช้สัญลักษณ์เป็น G

เพราะทั้ง 4 ค่าสามารถแทนความหมายทางฟิสิกส์ได้ดีกว่า

2.1.3 ค่าคงที่ยืดหยุ่น (elastic constant)

1 ค่ามอดูลัสของยัง คือ อัตราส่วนของ ความเค้นตามยาวต่อความเครียดตามยาว เมื่อวัสดุถูกความเค้นกระทำที่ปลายทั้งสองด้านอย่างสม่ำเสมอ และพื้นที่ด้านข้างมีอิสระไม่ถูกยึดไว้ และไม่มีมีความเค้นกระทำในทิศ y และ z เลย จากสมการที่ (2.15) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} T_1 &= \lambda\Delta + 2\mu S_1 = (\lambda + 2\mu)S_1 + \lambda(S_2 + S_3) \\ 0 &= \lambda\Delta + 2\mu S_2 = (\lambda + 2\mu)S_2 + \lambda(S_1 + S_3) \\ 0 &= \lambda\Delta + 2\mu S_3 = (\lambda + 2\mu)S_3 + \lambda(S_1 + S_2) \end{aligned}$$

แก้สมการหาค่า S_1 , S_2 และ S_3 ได้เป็น

$$S_1 = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} T_1 \quad \text{และ} \quad S_2 = S_3 = -\frac{\lambda}{3\mu(3\lambda + 2\mu)} T_1 \quad (2.16)$$

และจากนิยามค่ามอดูลัสของยังจะได้

$$E = \frac{T_1}{S_1} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (2.17)$$

2 อัตราส่วนของปัวส์ซอง คือ อัตราส่วนระหว่างระยะด้านกว้าง ต่อระยะด้านยาวที่เปลี่ยนแปลง เมื่อได้รับความเค้น

จากสมการที่ (2.16) จะได้อัตราส่วนของปัวส์ซองเป็นดังนี้

$$\nu = -\frac{S_2}{S_1} = -\frac{S_3}{S_1} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (2.18)$$

3 ค่ามอดูลัสก้อน คือ อัตราส่วนระหว่าง ความดันที่ให้กับปริมาตรของวัตถุที่เปลี่ยนแปลง เมื่อวัตถุนั้นได้รับความเค้นที่กดลงอย่างสม่ำเสมอ

เมื่อให้ความเค้น $T_1 = T_2 = T_3$ กดลงทุกด้าน (วัสดุได้รับความดัน) ทำให้ปริมาตรของวัสดุลดลง จากสมการที่ (2.15) ถ้าให้ $T_1 = T_2 = T_3 = -T$ และ $T_4 = T_5 = T_6 = 0$ จะได้

$$S_1 = S_2 = S_3 = -\frac{T}{3\lambda + 2\mu}$$

เมื่อ $\Delta = S_1 + S_2 + S_3$ คือ ปริมาตรที่เปลี่ยนไปของวัตถุ จะได้

$$K = -\frac{T}{\Delta} = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (2.19)$$

4 ค่ามอดูลัสเฉือน คือ อัตราส่วนระหว่างความเค้นเฉือนต่อความเครียดเฉือน จากสมการที่ (2.15) จะได้

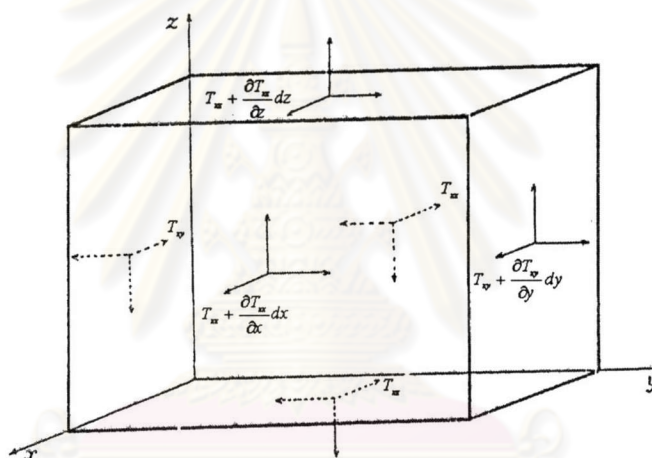
$$G = \frac{T_4}{S_4} = \frac{T_5}{S_5} = \frac{T_6}{S_6} = \mu \quad (2.20)$$

2.2 คลื่นเสียงในของแข็ง (sound wave in solids)

2.2.1 คลื่นเสียงในเนื้อของแข็ง (bulk wave in solids)

- สมการการเคลื่อนที่ของคลื่นเสียงในของแข็ง

ในการหาสมการเคลื่อนที่สำหรับตัวกลางยืดหยุ่น เราจะพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของความเค้นที่ผ่านจากด้านหนึ่งไปอีกด้านหนึ่งของวัสดุรูปทรงสี่เหลี่ยมเล็ก ๆ ที่มีด้านขนานกันดังรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 ความเค้นกระทำบนรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเล็ก ๆ [2]

ความเค้นจะเปลี่ยนค่าไป เมื่อคลื่นเคลื่อนที่ผ่านไปอีกด้านหนึ่งของรูปทรงสี่เหลี่ยม ในการหาค่าแรงที่กระทำบนจุดศูนย์กลางของผิวแต่ละด้าน เราจะนำค่าความเค้นคูณด้วยพื้นที่ผิวของด้านนั้น ๆ สังเกตได้จากรูป จะมีแรงอยู่ 6 ค่าที่กระทำบนด้านแต่ละด้านที่ขนานกัน ถ้าเราพิจารณาผลของแรงที่กระทำในทิศ x จะได้

$$F_x = \left(T_{xx} + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} dx \right) dydz - T_{xx} dydz + \left(T_{xy} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz - T_{xy} dx dz + \left(T_{xz} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy - T_{xz} dx dy = \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน เราจะได้ว่า

$$\left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \right) dx dy dz = (\rho dx dy dz) \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

เมื่อ ρ คือ ความหนาแน่นของวัสดุ

u_x คือ ระยะกระจัดในทิศ x

ดังนั้นจะได้

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (2.21)$$

ในทำนองเดียวกัน เราจะหาสมการการเคลื่อนที่ในทิศ y และ z ได้เป็น

$$\frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (2.23)$$

เมื่อ u_y และ u_z คือ ระยะกระจัดในทิศทาง y และ z ตามลำดับ

จากนั้นเราจะเขียนสมการการเคลื่อนที่ให้อยู่ในรูปของค่าคงที่ λ และ μ โดยใช้สมการที่ (2.15) แทนค่าในสมการที่ (2.21) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x} (\lambda \Delta + 2\mu S_1) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu S_6) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu S_5) = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (2.24)$$

และจากสมการที่ (2.12)

$$S_1 = \frac{\partial u_x}{\partial x}, S_5 = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, S_6 = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

แทนค่าลงในสมการที่ (2.24) จะได้สมการการเคลื่อนที่ในทิศ x คือ

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (2.25)$$

$$\text{เมื่อ } \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

ในทำนองเดียวกันเราจะได้สมการการเคลื่อนที่ในทิศ y และ z คือ

$$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 u_y \quad (2.26)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 u_z \quad (2.27)$$

จากสมการการเคลื่อนที่ที่ได้ เราจะมาพิจารณาลักษณะการเคลื่อนที่ของอนุภาคตัวกลางเมื่อคลื่นเคลื่อนที่ผ่าน โดยสมมติคลื่นระนาบ (plane wave) เคลื่อนที่ในตัวกลางในทิศ x อัตราเร็วในการเคลื่อนที่เป็น v ดังนั้น ระยะกระจัดของอนุภาคตัวกลางในทิศ x y และ z คือ u_x u_y และ u_z ตามลำดับ จะเป็นฟังก์ชันของตัวแปร $\psi = x - vt$ ที่ขึ้นกับ x และ t เพียงอย่างเดียวคือ

$$u_x = u_x(\psi)$$

$$u_y = u_y(\psi)$$

$$u_z = u_z(\psi)$$

ดังนั้นเราจะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} &= \frac{\partial u_x}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -v \frac{\partial u_x}{\partial \psi} \Rightarrow \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial \psi^2} \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial \psi} \Rightarrow \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_x}{\partial \psi^2} \end{aligned} \quad (2.28)$$

ในทำนองเดียวกันจะได้

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial \psi^2}, \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial \psi^2} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial \psi^2}, \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial \psi^2} \quad (2.30)$$

นำสมการที่ (2.28) แทนลงในสมการที่ (2.25) เราจะได้

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial \psi^2} = \rho v^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial \psi^2} \quad (2.31)$$

ในทำนองเดียวกัน นำสมการที่ (2.29) และ (2.30) แทนลงในสมการ (2.26) และ (2.27) ตามลำดับ เราจะได้

$$\rho v^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial \psi^2} = \mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \quad (2.32)$$

$$\rho v^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial \psi^2} = \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \quad (2.33)$$

จากสมการ (2.31) (2.32) และ (2.33) จะมีทางที่ทั้งสามสมการจะเป็นไปได้อยู่ 2 กรณีคือ

$$1 \text{ เมื่อ } v^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial \psi^2} = 0, \frac{\partial^2 u_z}{\partial \psi^2} = 0$$

$$2 \text{ เมื่อ } v^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial \psi^2} = 0$$

1 คลื่นตามยาว (longitudinal wave)

$$\text{เมื่อ } v^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial \psi^2} = 0, \frac{\partial^2 u_z}{\partial \psi^2} = 0$$

อนุภาคของตัวกลางเคลื่อนที่ในทิศ x ซึ่งขนานไปกับทิศการเคลื่อนที่ของคลื่น เราจึงเรียกคลื่นชนิดนี้ว่า คลื่นตามยาว ดังแสดงในรูปที่ 2.6 (ก) ซึ่งคลื่นนี้เคลื่อนที่ผ่านตัวตัวกลางด้วยอัตราเร็ว

$$v = V_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (2.34)$$

หรือเขียนในรูปมอดูลัสโดยใช้สมการที่ (2.19) และ (2.20) จะได้เป็น

$$V_L = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}} \quad (2.35)$$

เมื่อตัวกลางเป็นของเหลว ค่า $G = 0$ เราจะได้

$$V_L = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (2.36)$$

2 คลื่นตามขวาง (transverse wave)

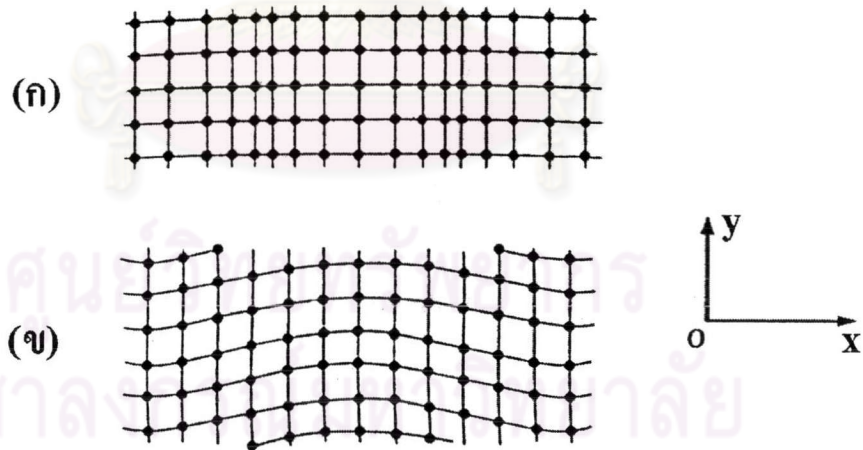
$$\text{เมื่อ } v^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial \psi^2} = 0$$

อนุภาคของตัวกลางเคลื่อนที่ในทิศ y และ z ซึ่งตั้งฉากกับทิศการเคลื่อนที่ของคลื่น ซึ่งเคลื่อนที่ในทิศ x เราจึงเรียกคลื่นชนิดนี้ว่า คลื่นตามขวาง ดังแสดงในรูปที่ 2.6 (ข) และคลื่นนี้เคลื่อนที่ผ่านตัวกลางด้วยอัตราเร็ว

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.37)$$

หรือเขียนในรูปของมอดูลัส โดยใช้สมการที่ (2.20) ได้เป็น

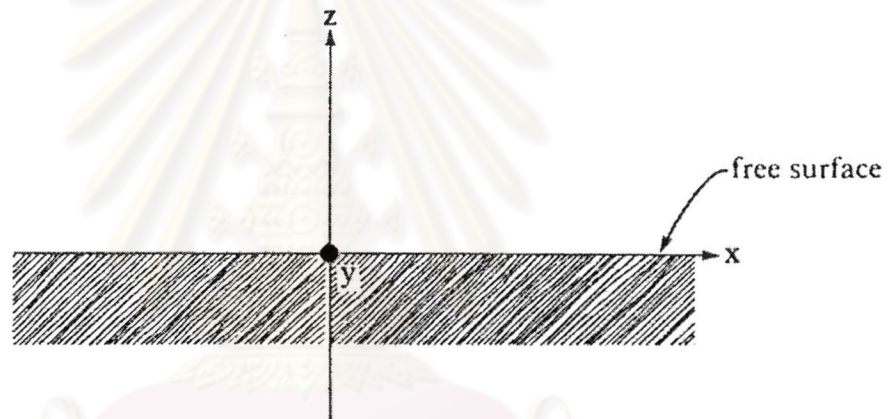
$$v = V_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (2.38)$$



รูปที่ 2.6 เปรียบเทียบการเคลื่อนที่ของคลื่น (ก) คลื่นตามยาว (ข) คลื่นตามขวาง [1]

2.2.2 คลื่นที่เคลื่อนที่บนผิวของของแข็ง (surface acoustic wave)

ในปี 1885 ลอร์ด เรย์เลก์ (Lord Rayleigh) ได้ทำนายว่า คลื่นเสียงสามารถเคลื่อนที่บนระนาบรอยต่อระหว่างของแข็งและสุญญากาศได้ [3] ดังแสดงในรูปที่ 2.7 ซึ่งแอมพลิจูดของคลื่นจะลดลงอย่างรวดเร็วในทิศ $-z$ ต่อมาได้มีการค้นพบคลื่นชนิดนี้ตามที่ ลอร์ด เรย์เลก์ ทำนายไว้ จึงเรียก คลื่นเสียงที่เกิดบนผิวของแข็งว่าคลื่นเรย์ลีย์ (Rayleigh wave) ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้งานได้หลายด้าน เช่น การหารอยแตกในเนื้อของแข็ง ส่วนในงานวิจัยนี้จะใช้คลื่นเรย์ลีย์ เพื่อหาค่ามอดูลัสและค่าความหนาแน่นของของแข็ง



รูปที่ 2.7 ผิวรอยต่อของของแข็งและสุญญากาศ ที่สามารถเกิดคลื่นเรย์ลีย์ได้

คลื่นเรย์ลีย์ประกอบด้วยเคลื่อนที่แบบคลื่นในเนื้อของแข็งทั้งสองแบบคือ คลื่นตามยาวและคลื่นตามขวาง ผสมกันที่ผิวรอยต่อระหว่างสองตัวกลาง ดังนั้นเราสามารถเขียนเวกเตอร์การกระจัดของอนุภาคตัวกลางได้เป็น

$$\vec{u} = \vec{u}_L + \vec{u}_T$$

หรือเขียนในรูปของศักย์เวกเตอร์ (vector potential, $\vec{\psi}$) และศักย์สเกลาร์ (scalar potential, ϕ) ได้เป็น

$$\vec{u} = \nabla\phi + \nabla \times \vec{\psi} \quad (2.39)$$

ให้คลื่นเรย์ลีเคลื่อนที่ในทิศ +x และแอมพลิจูดลดลงในทิศ +z ดังนั้นค่า ϕ และ $\bar{\psi}$ จะไม่ขึ้นกับตัวแปร y เลย กล่าวคือ

$$\phi = \phi(x, z) \exp(i\omega t) \quad (2.40)$$

$$\bar{\psi} = \hat{y} \bar{\psi}(x, z) \exp(i\omega t) \quad (2.41)$$

เราจะเรียก ϕ และ ψ ว่าเป็นศักย์ของคลื่นตามยาว และศักย์ของคลื่นตามขวาง ตามลำดับ และศักย์ทั้ง 2 ตัวจะสอดคล้องกับสมการคลื่นดังนี้

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + k_L^2 \phi = 0 \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_T^2 \psi = 0 \quad (2.43)$$

เมื่อ $k_L = \frac{\omega}{v_L}$ และ $k_T = \frac{\omega}{v_T}$ เป็นเลขคลื่น (wave number) ของคลื่นตามยาวและคลื่นตามขวางในของแข็ง ตามลำดับ

$$\omega = 2\pi f \text{ เป็นความถี่เชิงมุม}$$

พิจารณาสมการที่ (2.39) โดยแทนค่าสมการที่ (2.40) และ (2.41) เราจะได้ส่วนย่อยของเวกเตอร์การกระจัดเป็น

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{และ} \quad u_z = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (2.44)$$

โดยใช้สมการที่ (2.12) (2.15) (2.16) และ สมการที่ (2.44) เราจะได้

$$T_{xx} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) \quad (2.45)$$

$$T_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) \quad (2.46)$$

$$T_{xz} = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \quad (2.47)$$

ต่อไปเราจะหาคำตอบของสมการ (2.42) และ (2.43) ซึ่งสอดคล้องกับลักษณะของคลื่นฮาร์มอนิก (harmonic wave) ที่เคลื่อนที่ในทิศ +x โดยให้

$$\phi = F(z) \exp[i(kx - \omega t)] \quad (2.48)$$

$$\psi = G(z) \exp[i(kx - \omega t)] \quad (2.49)$$

เมื่อ $F(z)$ และ $G(z)$ เป็นปริมาณที่บ่งชี้ว่าแอมพลิจูดของคลื่นจะเปลี่ยนตามค่า z จากนั้นนำค่า ϕ และ ψ ในสมการที่ (2.48) และ (2.49) แทนค่าในสมการ (2.42) และ (2.43) เพื่อหาค่า $F(z)$ และ $G(z)$ จะได้

$$\frac{d^2 F(z)}{dz^2} - (k^2 - k_L^2) F(z) = 0 \quad (2.50)$$

$$\frac{d^2 G(z)}{dz^2} - (k^2 - k_T^2) G(z) = 0 \quad (2.51)$$

คำตอบของสมการ(2.50), (2.51) $F(z)$ และ $G(z)$ จะอยู่ในรูปแบบ $\exp(\pm\sqrt{k^2 - k_L^2}z)$ และ $\exp(\pm\sqrt{k^2 - k_T^2}z)$ ตามลำดับ คำตอบที่เป็นเครื่องหมายบวก จะหมายถึง แอมพลิจูดของคลื่นจะเพิ่มขึ้นตามความลึกของตัวกลาง ส่วนคำตอบที่เป็นลบจะหมายถึง แอมพลิจูดของคลื่นจะลดลงตามความลึกของตัวกลาง ตรงกับลักษณะการเคลื่อนที่ของคลื่นเรย์ลีดส์รูปที่ 2.8 ดังนั้นเราจึงเลือกคำตอบที่เป็นเครื่องหมายลบ จะได้ว่า

$$\phi = Ae^{-qz} e^{i(kx - \omega t)} \quad (2.52)$$

$$\psi = Be^{-sz} e^{i(kx - \omega t)} \quad (2.53)$$

เมื่อ $q^2 = k^2 - k_L^2$ $s^2 = k^2 - k_T^2$ A และ B เป็นค่าคงที่ใดๆ

พิจารณารอยต่อ (ระนาบ $z = 0$) เราจะได้เงื่อนไขค่าขอบ (boundary condition)

$$T_{zz} = 0 \quad (2.54)$$

$$T_{xz} = 0 \quad (2.55)$$

จากสมการที่ (2.47), (2.52), (2.53) และ (2.55) หาค่าความสัมพันธ์ของ A และ B ได้เป็น

$$B = \frac{-2ikqA}{k^2 + s^2} \quad \text{ดังนั้นเราจะได้ว่า}$$

$$\phi = +Ae^{i(kx-\omega t)-qz} \quad (2.56)$$

$$\psi = -iA \frac{2kq}{k^2 + s^2} e^{i(kx-\omega t)-sz} \quad (2.57)$$

ต่อไปจากสมการที่ (2.46) (2.54) (2.56) และ (2.57) สุดท้ายเราจะได้สมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) ของ k เป็นดังนี้

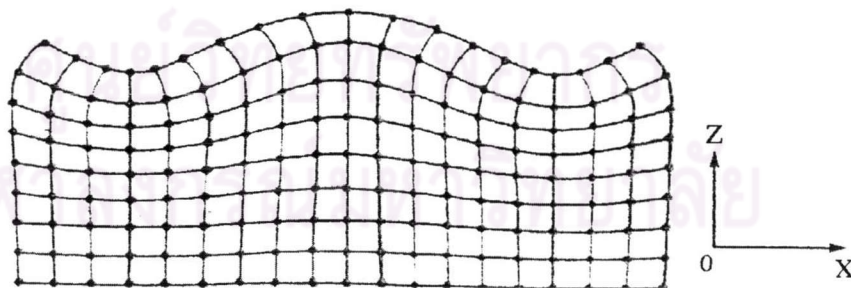
$$4k^2qs - (k^2 + s^2)^2 = 0 \quad (2.58)$$

เมื่อแทนค่า $q^2 = k^2 - k_L^2$ และ $s^2 = k^2 - k_T^2$ ลงในสมการที่ (2.58) เราจะได้

$$\left(\frac{V_R}{V_T}\right)^6 - 8\left(\frac{V_R}{V_T}\right)^4 + 8\left[3 - 2\left(\frac{V_T}{V_L}\right)^2\right]\left(\frac{V_R}{V_T}\right)^2 - 16\left[1 - \left(\frac{V_T}{V_L}\right)^2\right] = 0$$

เมื่อ $V_R = \frac{\omega}{k}$ คือค่า อัตราเร็วของคลื่นเรย์ลี

สมการนี้เป็นสมการที่ใช้หาอัตราเร็วของคลื่นเรย์ลี โดยการคำนวณเชิงตัวเลข (numerical method) ซึ่งจะมีคำตอบของสมการอยู่ 6 คำตอบ แต่มีคำตอบอยู่คำตอบเดียวที่เป็นค่าจริงและเป็นบวก ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูกต้อง



รูปที่ 2.8 ลักษณะการเคลื่อนที่ของอนุภาคตัวกลางเมื่อคลื่นเรย์ลีเคลื่อนที่ไปในทิศ +x

2.2.3 คลื่นเรย์ลีเคลื่อนที่ตรงรอยต่อระหว่างของแข็งและของเหลว

ในหัวข้อที่ 2.2.2 เป็นการเคลื่อนที่ของคลื่นเรย์ลี ที่รอยต่อระหว่างของแข็งและสุญญากาศ ซึ่งตัวกลางที่เป็นสุญญากาศคลื่นกลไม่สามารถเคลื่อนที่ผ่านได้ จึงไม่มีผลของการสั่นของอนุภาคของตัวกลางที่สุญญากาศ แต่ถ้าเป็นของเหลวคลื่นกลสามารถเคลื่อนที่ผ่านไปได้ เราจึงต้องนำผลของการสั่นของอนุภาคของตัวกลางที่ของเหลวมาคิดด้วย ซึ่งผลอันนี้จะทำให้คลื่นเรย์ลี มีการสูญเสียพลังงานไปกับของเหลว ดังนั้นค่า k ต้องเป็นจำนวนเชิงซ้อน เราจะนิยาม k เป็น $k = \frac{\omega}{V_R} + i\alpha$ ซึ่ง α คือสัมประสิทธิ์การสูญเสียพลังงานของคลื่นเรย์ลี และจะเรียกคลื่นเรย์ลีที่มีการสูญเสียพลังงานไปกับของเหลวนี้ว่าคลื่นเรย์ลีรั่วซึม (leaky Rayleigh wave)

ต่อไปเราจะพิจารณาการสั่นของอนุภาคของตัวกลางในของเหลวโดยให้ ϕ_l เป็นศักย์สเกลาร์ของการกระจัดของอนุภาคในของเหลว ซึ่งการกระจัดจะเหมือนกับการกระจัดของคลื่นตามยาวในของแข็ง ดังนั้นเราสามารถเขียน ϕ_l ให้สอดคล้องกับสมการที่ (2.42) ได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 \phi_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_l}{\partial z^2} + k_l^2 \phi_l = 0 \quad (2.59)$$

เมื่อ $k_l = \frac{\omega}{c_l}$ คือ เลขคลื่นของคลื่นในของเหลว

คำตอบของสมการที่ (2.59) จะเป็นการเคลื่อนที่ของคลื่นระนาบในทิศทาง x เช่นเดียวกับการเคลื่อนที่ของคลื่นตามยาวในของแข็ง ดังนั้นเราให้

$$\phi_l = H(z)e^{i(kx - \omega t)} \quad (2.60)$$

แล้วแทนค่าลงในสมการ (2.59) จะได้ $H(z) = Ce^{-\sqrt{(k^2 - k_l^2)z}}$ เนื่องจากค่า k น้อยกว่า k_l เราจะเขียน $H(z)$ ใหม่ได้เป็น $H(z) = Ce^{-i\sqrt{k_l^2 - k^2}z}$ แล้วแทนกลับลงในสมการที่ (2.60) จะได้

$$\phi_l = Ce^{i(kx - q_w z - \omega t)}$$

เมื่อ $q_w^2 = k_l^2 - k^2$ เทียบกับค่าศักย์สเกลาร์และศักย์เวกเตอร์ของการกระจัดของอนุภาคของของแข็งจากสมการที่ (2.52) และ (2.53) คือ

$$\begin{aligned} \phi &= Ae^{-qz} e^{i(kx - \omega t)} \\ \psi &= Be^{-sz} e^{i(kx - \omega t)} \end{aligned}$$

ซึ่งเราจะหาความสัมพันธ์ของ A และ B โดยใช้เงื่อนไขค่าขอบที่ $z = 0$ ถ้า $T_{xz} = 0$ จะได้

$$\begin{aligned}\phi &= +Ae^{i(kx-\omega t)-qz} \\ \psi &= -iA \frac{2kq}{k^2 + s^2} e^{i(kx-\omega t)-sz}\end{aligned}$$

ต่อไปเราจะหาการกระจัดในแนว x และ z ของอนุภาคในของเหลวและของแข็งโดยใช้สมการ (2.44) จะได้

$$\begin{aligned}u_{xl} &= \frac{\partial \phi_l}{\partial x} = Cike^{i(kx-q_w z-\omega t)} \\ u_{zl} &= \frac{\partial \phi_l}{\partial z} = -iCq_w e^{i(kx-q_w z-\omega t)} \\ u_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} = Aki \left[e^{-qz} - \frac{2sq}{k^2 + s^2} e^{-sz} \right] e^{i(kx-\omega t)} \\ u_z &= \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = -Aq \left[e^{-qz} - \frac{2k^2}{k^2 + s^2} e^{-sz} \right] e^{i(kx-\omega t)}\end{aligned}$$

หาความสัมพันธ์ของ C และ A โดยใช้เงื่อนไขค่าขอบเขตที่ $z = 0$ ถ้า $k_{zl} = k_z$ จะได้

$$C = \frac{iAqk_T^2}{(k^2 + s^2)q_w}$$

ดังนั้นเราจะได้

$$\begin{aligned}u_{xl} &= -Ak \frac{qk_T^2}{(k^2 + s^2)q_w} \left(e^{i(kx-q_w z-\omega t)} \right) \\ u_{zl} &= +A \frac{qk_T^2}{(k^2 + s^2)} e^{i(kx-q_w z-\omega t)}\end{aligned}$$

สุดท้ายเราจะใช้เงื่อนไขค่าขอบที่ $z = 0$ ความดันในของเหลว $\left(P = \lambda \left(\frac{\partial u_{xl}}{\partial x} + \frac{\partial u_{zl}}{\partial z} \right) \right)$ เท่ากับความเค้น T_{zz} ในของแข็งจะได้ สมการลักษณะเฉพาะของ k เป็น

$$4k^2qs - (k^2 + s^2)^2 = i \frac{\rho_l}{\rho} \cdot \frac{qk_T^4}{q_w} \quad (2.61)$$

สมการนี้จะต่างจากสมการที่ (2.58) ตรงที่ข้างขวาของสมการจะมีผลของของเหลวเพิ่มเข้าไปด้วย ซึ่งประโยชน์ของสมการนี้จะใช้หาค่าความหนาแน่น (ρ) และอัตราเร็วของคลื่นตามขวาง (V_T) ในของแข็ง เมื่อทราบค่าความหนาแน่นของของเหลว อัตราเร็วของคลื่นเรย์ลี (V_R) อัตราเร็วของคลื่นตามยาว (V_L) และสัมประสิทธิ์การสูญเสียพลังงาน (α) ซึ่งคำตอบของสมการนี้หาได้จากการคำนวณเชิงตัวเลข จะได้คำตอบของสมการอยู่ 6 คำตอบแต่มีคำตอบอยู่คำตอบเดียวที่เป็นค่าจริงและเป็นบวก ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูกต้อง

2.2.4 อิมพีแดนซ์อคูสติก (acoustic impedance)

อิมพีแดนซ์อคูสติกเป็นปริมาณที่บ่งบอกถึงความสามารถในการส่งผ่านพลังงานเสียงของตัวกลาง นิยามโดยค่าความหนาแน่นของตัวกลางคูณด้วยอัตราเร็วเสียงในตัวกลางนั้น

$$Z = \rho V \quad (2.62)$$

เมื่อ ρ คือ ความหนาแน่นของตัวกลางมีหน่วยเป็น kg/m^3

V คือ อัตราเร็วเสียงในตัวกลางมีหน่วยเป็น m/s

ดังนั้น ค่าอิมพีแดนซ์อคูสติก จะมีหน่วยเป็น $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}$ แต่นิยมใช้กันเป็น Mrayl โดยที่

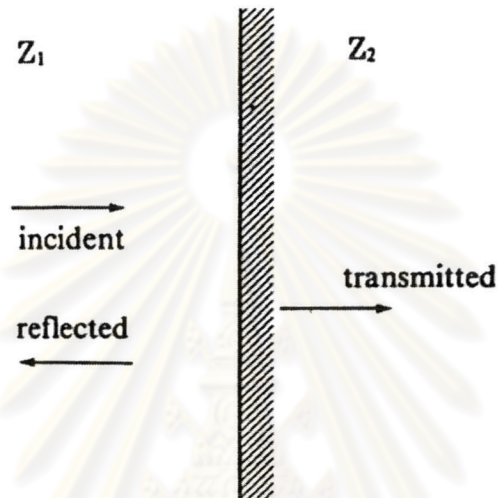
$$1 \text{ Mrayl} = 1 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}$$

ความสำคัญของค่าอิมพีแดนซ์อคูสติก คือ

1. ใช้หาค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนและส่งผ่านของคลื่นเสียงที่รอยต่อระหว่าง 2 ตัวกลาง
2. ใช้ในการออกแบบสร้างแทรนสคิวเซอร์ ให้มีความสามารถสูงในการส่งผ่านพลังงานเสียงไปยังตัวกลาง โดยเลือกวัสดุที่มีค่าอิมพีแดนซ์อคูสติกใกล้เคียงกับตัวกลาง

2.2.5 การสะท้อนและการหักเหของเสียงที่รอยต่อระหว่างของเหลวและของแข็ง (reflection and refraction at liquid-solid interface)

2.2.5.1 คลื่นเสียงตกกระทบตั้งฉาก



รูปที่ 2.9 คลื่นเสียงตกกระทบตั้งฉากบนรอยต่อระหว่างของเหลวและของแข็ง

จากรูปที่ 2.9 เมื่อคลื่นระนาบเคลื่อนที่จากตัวกลางที่เป็นของเหลว ไปตกกระทบตัวกลางที่เป็นของแข็ง คลื่นบางส่วนจะสะท้อนกลับมาที่ของเหลว และบางส่วนจะส่งผ่านเข้าไปในเนื้อของของแข็ง สามารถเขียนสัจของคลื่นทั้งสามได้ดังนี้

$$\phi_i = A_i e^{i(k_1 z - \omega t)}$$

$$\phi_r = A_r e^{i(k_1 z - \omega t)}$$

$$\phi_t = A_t e^{i(k_L z - \omega t)}$$

โดยใช้เงื่อนไขค่าขอบ ที่ $z = 0$ อัตราเร็วของคลื่นจะเป็นไปตามสมการความต่อเนื่อง (continuity equation)

$$u_i + u_r = u_t \quad (2.63)$$

โดยใช้สมการที่ (2.44) แทนในสมการที่ (2.63) จะได้

$$-k_l A_i + k_l A_r = -k_l A_t \quad (2.64)$$

และจากเงื่อนไขค่าขอบ ที่ $z = 0$ ความดันของคลื่นจะเป็นไปตามสมการความต่อเนื่อง

$$P_i + P_r = T_{zz} \quad (2.65)$$

โดยใช้สมการที่ (2.19) และ (2.46) จะได้

$$\lambda_l A_i k_l^2 - \lambda_l A_r k_l^2 = (\lambda_s + 2\mu_s)(-A_t k_L^2) \quad (2.66)$$

จากสมการที่ (2.34) (2.36) (2.64) และ (2.66) จะได้สัมประสิทธิ์การสะท้อน (reflection coefficient)

$$R = \frac{A_r}{A_i} = \frac{V_L \rho_s - V_l \rho_l}{V_L \rho_s + V_l \rho_l} \quad (2.67)$$

และสัมประสิทธิ์การส่งผ่าน (transmission coefficient)

$$T = \frac{A_t \rho_s}{A_i \rho_l} = \frac{2V_L \rho_s}{V_L \rho_s + V_l \rho_l} \quad (2.68)$$

จากสมการที่ (2.62) สามารถเขียนสัมประสิทธิ์การสะท้อนและสัมประสิทธิ์การส่งผ่าน ให้อยู่ในรูปของอิมพีแดนซ์อคูสติกของทั้งสองตัวกลางได้เป็น

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad (2.69)$$

$$T = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \quad (2.70)$$

เมื่อ Z_1 และ Z_2 คือ อิมพีแดนซ์อคูสติกของของแข็งและของของเหลวตามลำดับ

2.2.5.2 คลื่นเสียงตกกระทบทำมุม

จากรูปที่ 2.10 เมื่อคลื่นระนาบที่เป็นคลื่นตามยาว เคลื่อนที่จากของเหลวมาตกกระทบทำมุม θ_i กับเส้นตั้งฉากกับระนาบรอยต่อบนผิวของแข็ง จะมีคลื่นบางส่วนที่เป็นคลื่นตามยาวสะท้อนกลับไปที่ยของเหลว และบางส่วนส่งผ่านเข้าไปในเนื้อของแข็งแล้วเกิดการหักเห

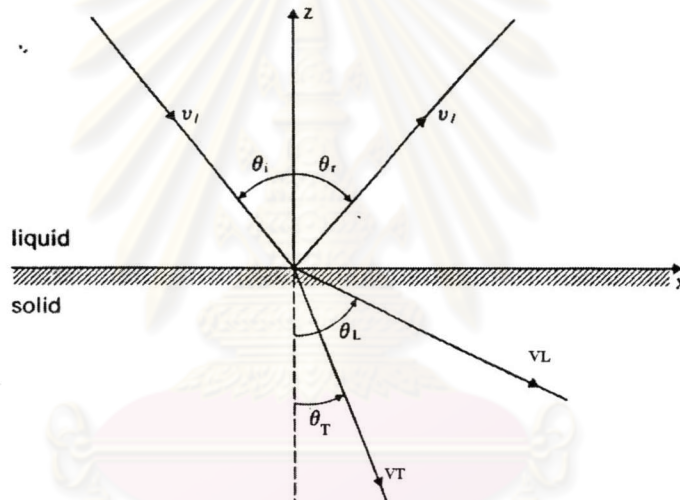
ของคลื่น ซึ่งจะมีคลื่นอยู่ 2 ชนิดคือคลื่นตามยาวและคลื่นตามขวาง เกิดการหักเหในเนื้อของแข็งที่มุมต่างกันสามารถเขียนสัจของคลื่นทั้งหมดได้ดังนี้

$$\varphi_i = A e^{i(k_i \sin \theta_i x - k_i \cos \theta_i z - \omega t)} \quad (2.71)$$

$$\varphi_r = A R e^{i(k_i \sin \theta_r x - k_i \cos \theta_r z - \omega t)} \quad (2.72)$$

$$\phi = A T_L e^{i(k_L \sin \theta_L x - k_L \cos \theta_L z - \omega t)} \quad (2.73)$$

$$\psi = A T_T e^{i(k_s \sin \theta_T x - k_T \cos \theta_T z - \omega t)} \quad (2.74)$$



รูปที่ 2.10 คลื่นเสียงตกกระทบทำมุม θ_i บนรอยต่อระหว่างของแข็งและของเหลว

โดยใช้เงื่อนไขค่าขอบที่ $z = 0$ อัตราเร็วของคลื่นในแนวตั้งฉากกับระนาบรอยต่อ จะเป็นไปตามสมการความต่อเนื่อง

$$u_{iz} + u_{rz} = u_z \quad (2.75)$$

และใช้สมการที่ (2.44) แทนในสมการ (2.75) จะได้

$$\frac{\sin \theta_i}{V_i} = \frac{\sin \theta_r}{V_i} = \frac{\sin \theta_L}{V_L} = \frac{\sin \theta_T}{V_T} \quad (2.76)$$

เราสามารถหาค่ามุมหักเหของคลื่นตามยาว θ_L ได้ดังนี้

$$\theta_L = \sin^{-1}\left(\frac{V_i}{V_L} \sin \theta_i\right)$$

ซึ่งค่า θ_L จะเป็นค่าจริงก็ต่อเมื่อ $V_L \sin \theta_i \leq 1$ และค่า θ_i ที่ทำให้ $V_L \sin \theta_i = 1$ เราเรียกว่ามุมนี้ว่ามุมวิกฤติ (critical angle, θ_c)

ที่นี่เราจะมาพิจารณาเมื่อ $\theta_i = \theta_{CL}$ จะทำให้ $\theta_L = 90^\circ$ ผลก็คือคลื่นตามยาวจะเคลื่อนที่ขนานไปบนผิวยรอยต่อ และถ้า $\theta_i > \theta_{CL}$ จะเกิดการสะท้อนกลับหมด (total internal reflection) ของคลื่นตามยาว

ต่อไปเราจะดูลักษณะของคลื่นเมื่อ $\theta_i > \theta_{CL}$ โดยจากสมการที่ (2.73) พิจารณาพจน์ที่สองของตัวชี้กำลัง

$$\begin{aligned} \cos \theta_L z &= \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta_L} \\ &= \pm \sqrt{1 - \left(\frac{V_L}{V_i}\right)^2 \sin^2 \theta_i} \end{aligned}$$

เมื่อ $\theta_i > \theta_{CL}$ ทำให้ $\left(\frac{V_L}{V_i}\right)^2 \sin^2 \theta_i > 1$ ดังนั้น $\cos \theta_L z = \pm i \sqrt{\left(\frac{V_L}{V_i}\right)^2 \sin^2 \theta_i - 1}$ จะเห็น

ว่า $\cos \theta_L$ จะเป็นจำนวนเชิงซ้อน เราจะเลือกค่าที่เป็นลบและให้ $b = \sqrt{\left(\frac{V_L}{V_i}\right)^2 \sin^2 \theta_i - 1}$ แล้วแทนกลับในสมการ(2.73) จะได้

$$\phi = AT_L e^{-bk_L z} e^{i(k_i \sin \theta_i x - \omega t)}$$

ลักษณะการเคลื่อนที่ของคลื่นแบบนี้เราเรียกว่าคลื่นอีวานเนสเซนซ์ (evanescent wave) ซึ่งจะเคลื่อนที่ไปบนรอยต่อในทิศ +x และแอมพลิจูดของคลื่นจะลดลงในทิศ -z

และในทำนองเดียวกันถ้ามุม $\theta_i > \theta_{CT}$ (มุมวิกฤติของคลื่นตามขวาง) จากสมการที่ (2.74) จะได้

$$\psi = AT_T e^{-ck_T z} e^{i(k_i \sin \theta_i x - \omega t)}$$

เมื่อ $c = \sqrt{\left(\frac{V_T}{V_i}\right)^2 \sin^2 \theta_i - 1}$ และคลื่นนี้ก็คือคลื่นอีวานเนสเซนซ์ของคลื่นตามขวาง

พิจารณาคลื่นอีวานเนสเซนซ์ของคลื่นตามยาวและคลื่นตามขวาง จะเห็นว่าลักษณะการเคลื่อนที่ของคลื่นจะเหมือนกับ คลื่นในสมการที่ (2.52) และ (2.53) ซึ่งเป็นองค์ประกอบของคลื่นเรย์ลีที่เป็นคลื่นตามยาวและคลื่นตามขวางตามลำดับ ดังนั้นเราสามารถสรุปได้ว่าถ้ามุม $\theta_i > \theta_{CT}$ แล้วคลื่นอีวานเนสเซนซ์ของคลื่นตามยาวและคลื่นตามขวางที่เกิดขึ้นบนรอยต่อ จะทำให้เกิดเรย์ลีขึ้นบนรอยต่อได้ และนี่ก็เป็นวิธีกำเนิดคลื่นเรย์ลี โดยใช้คลื่นตามยาวเคลื่อนที่ตกกระทบทำมุมที่รอยต่อระหว่าง ของแข็งและของเหลว

เมื่อพิจารณารูปที่ 2.10 ถ้ามุม θ_i เพิ่มขึ้นเรื่อยๆจะมีเหตุการณ์ต่างๆเกิดขึ้นดังนี้

1. เมื่อ $\theta_i = \theta_{CL}$ (มุมวิกฤติของคลื่นตามยาว) เป็นผลทำให้ $\theta_L = 90^\circ$ นั่นคือคลื่นตามยาวจะเคลื่อนที่บนผิวรอยต่อ ระหว่าง 2 ตัวกลาง และเหลือคลื่นตามขวางเท่านั้นที่เคลื่อนที่อยู่ในเนื้อของแข็ง

2. เมื่อ $\theta_{CL} < \theta_i < \theta_{CT}$ จะเกิดการสะท้อนกลับหมดของคลื่นตามยาว เป็นผลทำให้เกิดคลื่นอีวานเนสเซนซ์ของคลื่นตามยาวที่รอยต่อ ขณะที่คลื่นตามขวางยังเคลื่อนที่อยู่ในเนื้อของแข็ง

3. เมื่อ $\theta_i = \theta_{CT}$ (มุมวิกฤติของคลื่นตามขวาง) เป็นผลทำให้ $\theta_T = 90^\circ$ นั่นคือคลื่นตามขวางจะเคลื่อนที่บนผิวรอยต่อระหว่าง 2 ตัวกลางและไม่มีคลื่นชนิดใดเหลืออยู่ในเนื้อของแข็งเลย

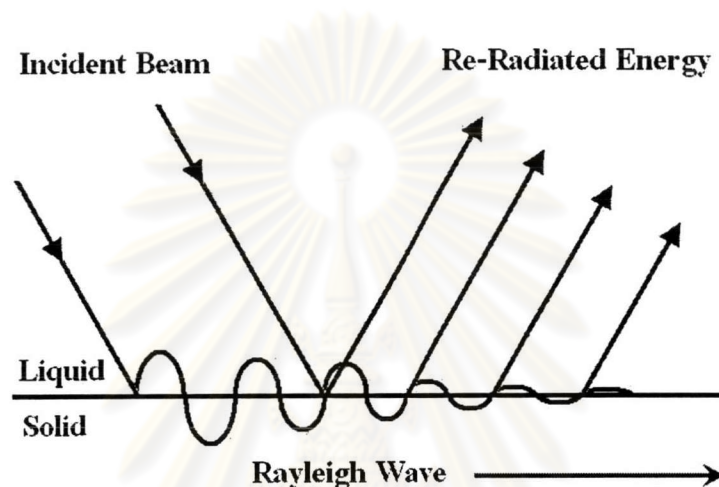
4. เมื่อ $\theta_{CT} < \theta_i < \theta_R$ จะเกิดการสะท้อนกลับหมดของคลื่นตามขวาง เป็นผลทำให้เกิดคลื่นอีวานเนสเซนซ์ของคลื่นตามขวางที่ผิวรอยต่อ จะเห็นว่าในขณะนี้จะมีคลื่นอีวานเนสเซนซ์ของคลื่นตามยาวและคลื่นตามขวางเกิดขึ้นที่ผิวรอยต่อ ซึ่งจะ ไปกระตุ้นให้เกิดคลื่นเรย์ลีขึ้นที่ผิวรอยต่อได้

5. เมื่อ $\theta_i = \theta_R$ คลื่นเรย์ลีที่เกิดขึ้นจะมีแอมพลิจูดสูงที่สุดที่มุมตกกระทบนี้ โดยที่

$$\theta_R = \sin^{-1} \left(\frac{V_L}{V_R} \right) \quad (2.77)$$

เมื่อคลื่นเรย์ลีเคลื่อนที่ผ่านระหว่างรอยต่อของแข็งและของเหลว อนุภาคของตัวกลางจะมีการสั่น ทั้งในทิศขนานกับผิวรอยต่อ และตั้งฉากกับผิวรอยต่อ ในส่วนที่อนุภาคตัวกลางที่สั่นตั้งฉากกับผิวรอยต่อ จะทำให้เกิดคลื่นตามยาวเคลื่อนที่กลับเข้าไปในของเหลว โดยทำมุมเท่ากับมุมตกกระทบ จึงทำให้เกิดการสูญเสียพลังงานของคลื่นเรย์ลีไปเป็นคลื่นตามยาวในของเหลว ผลก็คือคลื่นเรย์ลีจะเคลื่อนที่ระยะทางสั้น ๆ แล้วก็หายไป ดังแสดงในรูปที่ 2.11

ดังนั้นเราจึงสามารถที่จะหาอัตราเร็วของคลื่นเรย์ลี ที่เกิดขึ้นบนผิวของของแข็งได้ โดยอาศัยการวัดเวลาระหว่างคลื่นที่ส่งไปกับที่คลื่นสะท้อนกลับมาที่ของเหลว โดยใช้หัววัดที่สามารถรับรู้สัญญาณเสียงที่มาตกกระทบตัวมันได้ ซึ่งจะกล่าวถึงรายละเอียดของหัววัด และวิธีการวัดในบทที่ 3



รูปที่ 2.11 คลื่นตกกระทบทำให้เกิดคลื่นเรย์ลี จากนั้นเกิดการสูญเสียพลังงานไปเป็นคลื่นตามยาวเคลื่อนที่กลับไปของเหลว

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย