

## บทที่ 4

### การวิเคราะห์สมรรถนะ $H_2$ คงทน

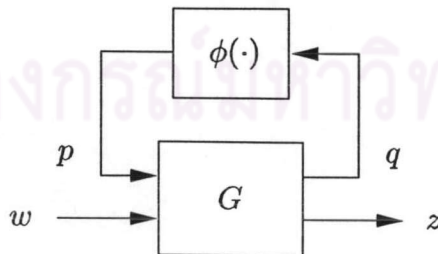
#### 4.1 บทนำ

เนื้อหาในบทนี้นำเสนอการวิเคราะห์สมรรถนะ  $H_2$  คงทนสำหรับระบบลู่วิ่งที่มีขอบเขตเซกเตอร์ จุดประสงค์ของการวิเคราะห์สมรรถนะ  $H_2$  คงทนสำหรับระบบลู่วิ่งคือ การประกันระดับของสมรรถนะ  $H_2$  ของระบบวงปิดในขณะที่มีความไม่แน่นอนเชิงพารามิเตอร์ค่าจริง จากการวิเคราะห์เสถียรภาพของโพลและขอบเขตของพลังงานขาออกในระบบลู่วิ่งที่มีความไม่แน่นอนในเมทริกซ์พลวัตและเมทริกซ์สมรรถนะขาออก ทำให้เราได้เงื่อนไขสมรรถนะ  $H_2$  คงทน และสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้ [8, หน้า 121–122] และสามารถหาคำตอบได้อย่างมีประสิทธิภาพโดยใช้วิธีจุดภายใน [8, หน้า 14–18] โดยอสมการเงื่อนไขที่ได้แตกต่างจาก [9] เนื่องจากมีการวิเคราะห์ความไม่แน่นอนในเมทริกซ์สมรรถนะขาออกเพิ่มเติมขึ้นมา

เนื้อหาในบทนี้ประกอบไปด้วย §4.2 นำเสนอการกำหนดปัญหาสมรรถนะ  $H_2$  คงทน §4.3 นำเสนอการแปลงวงรอบ ซึ่งเปลี่ยนขอบเขตของเซกเตอร์ที่จำกัดให้อยู่ในช่วงที่พิจารณาได้ และ §4.4 นำเสนอฟังก์ชันเลียปูนอฟที่ใช้ในการวิเคราะห์สมรรถนะ  $H_2$  คงทน จากนั้น §4.5 นำเสนอเงื่อนไขเพียงพอในการคำนวณค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ  $H_2$  กรณีเลวสุดของระบบลู่วิ่ง §4.6 เป็นการวิเคราะห์ผลที่ได้ และ §4.7 เป็นบทสรุป

#### 4.2 กำหนดปัญหา

พิจารณาพิจารณาระบบ LTI (ระบบที่สภาวะระบุ) ที่แทนความไม่แน่นอนด้วยการป้อนกลับด้วยฟังก์ชันไม่เชิงเส้นอธิบายได้ด้วยระบบสมการ (4.1) และแสดงดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1: แผนภาพบล็อกสำหรับปัญหาวิเคราะห์สมรรถนะ  $H_2$  คงทน

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= Ax + B_p p + B_w w \\
 q &= C_q x \\
 z &= C_z x + D_{zp} p \\
 p &= \phi(q) \triangleq \begin{bmatrix} \phi_1(q_1) \\ \vdots \\ \phi_{n_p}(q_{n_p}) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

เมื่อ  $x : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^n$  คือตัวแปรสถานะ,  $w : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^{n_w}$  คือสัญญาณรบกวนขาเข้า,  $z : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^{n_z}$  คือสัญญาณสมรรถนะขาออก,  $q : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^{n_p}$  และ  $p : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^{n_p}$  คือสัญญาณเข้าและสัญญาณออกของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น และเมทริกซ์  $D_{zp}$  เป็นเมทริกซ์ของความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นในเมทริกซ์สมรรถนะขาออก สำหรับฟังก์ชันไม่เชิงเส้น  $\phi_i$  กำหนดให้สอดคล้องกับเงื่อนไขเชกเตอร์  $[0, l_i]$  นั่นคือ  $\phi \in \Phi$  โดยที่

$$\Phi := \left\{ \begin{array}{l} \phi : \mathbf{R}^{n_p} \rightarrow \mathbf{R}^{n_p}, \phi(q) = [\phi_1(q_1), \dots, \phi_{n_p}(q_{n_p})]^T, \\ 0 \leq \phi_i(q_i)/q_i \leq l_i, \phi_i(0) = 0, \end{array} \right\}$$

เมื่อ  $l = (l_1, \dots, l_{n_p})$  เป็นเวกเตอร์ที่สมาชิกแต่ละตัวเป็นขอบเขตเชกเตอร์ของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น ปัญหาการวิเคราะห์สมรรถนะ  $\mathcal{H}_2$  คงทนสำหรับระบบที่มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับคือ สำหรับระบบลูเร (4.1) กำหนดให้  $\phi \in \Phi$  เมื่อ  $l$  เท่ากับค่าที่กำหนด ให้คำนวณหาค่าขอบเขตบนที่น้อยที่สุดของสมรรถนะ  $\mathcal{H}_2$  กรณีเลวสุดของระบบลูเร นั่นคือหาค่าต่ำสุดของ  $\gamma_2^2 \in \mathbf{R}_+$  เมื่อ  $J_2^2 \leq \gamma_2^2$  สำหรับระบบลูเรในรูปทั่วไปที่มีเงื่อนไขเชกเตอร์แตกต่างจากปัญหาที่กำหนดข้างต้น สามารถใช้การแปลงวงรอบในการแปลงขอบเขตเชกเตอร์ให้อยู่ในรูปเดียวกับปัญหาที่กำหนดได้

### 4.3 การแปลงวงรอบ

สำหรับระบบลูเรทั่วไปที่ฟังก์ชันไม่เชิงเส้นอยู่ในเชกเตอร์  $[\alpha_i, \beta_i]$  สามารถแปลงให้อยู่ในเชกเตอร์  $[0, l_i]$  ได้เสมอโดยใช้การแปลงวงรอบ (loop transformation) [8, หน้า 129] พิจารณาระบบลูเรในรูปทั่วไปดังนี้

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= Ax + B_p p + B_w w \\
 q &= C_q x \\
 z &= C_z x + D_{zp} p \\
 p &= \phi(q)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

โดยมีเงื่อนไขเชกเตอร์

$$\alpha_i \leq \frac{\phi_i(\sigma)}{\sigma} \leq \beta_i \tag{4.3}$$

นั่นคือฟังก์ชันไม่เชิงเส้นจะถูกจำกัดด้วยเซกเตอร์  $[\alpha_i, \beta_i]$  นั้นเองเราสามารถเปลี่ยนขอบเขตเซกเตอร์ของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นจาก  $[\alpha_i, \beta_i]$  ไปเป็น  $[0, l_i]$  โดยกำหนดให้

$$\bar{\phi}_i(\sigma) = \frac{l_i}{\beta_i - \alpha_i} (\phi_i(\sigma) - \alpha_i \sigma) \quad (4.4)$$

หรือเขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์ ดังนี้

$$\bar{p} = \Gamma^{-1} L(p - \Lambda q) \quad (4.5)$$

เมื่อ  $\Gamma = \text{diag}(\beta_1 - \alpha_1, \dots, \beta_{n_p} - \alpha_{n_p})$ ,  $\Lambda = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n_p})$  และ  $L = \text{diag}(l_1, \dots, l_{n_p})$  จัดรูประบบลูเร (4.2) จะได้

$$\dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}_p p + \bar{B}_w w$$

$$q = \bar{C}_q x$$

$$z = \bar{C}_z x + \bar{D}_{z_p} p$$

$$\bar{p} = \bar{\phi}(q)$$

โดยมีเงื่อนไขเซกเตอร์

$$0 \leq \frac{\bar{\phi}_i(\sigma)}{\sigma} \leq l_i \quad (4.6)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A + B_p \Lambda C_q & \bar{C}_z &= C_z + D_{z_p} \Lambda C_q \\ \bar{B}_p &= B_p L^{-1} \Gamma & \bar{D}_{z_p} &= D_{z_p} L^{-1} \Gamma \\ \bar{B}_w &= B_w & \bar{C}_q &= C_q \\ \bar{B}_u &= B_u \end{aligned}$$

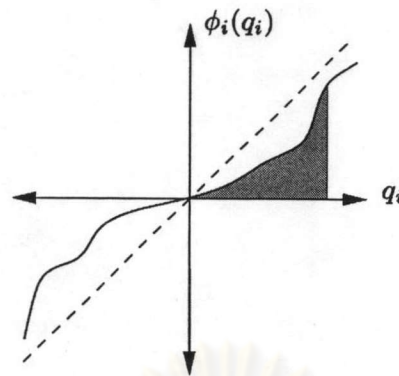
จากการพิจารณาการแปลงวงรอบพบว่าเราสามารถแปลงขอบเขตเซกเตอร์จาก  $[\alpha_i, \beta_i]$  ไปเป็นขอบเขตเซกเตอร์  $[0, l_i]$  ได้เสมอ

#### 4.4 ฟังก์ชันเลียปูโนฟ

เป็นที่ทราบกันว่า ฟังก์ชันเลียปูโนฟสำหรับสำหรับระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา ที่มีการป้อนกลับของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น (ระบบลูเร) เป็นฟังก์ชันพลังงานในรูปของกำลังสองของตัวแปรสถานะบวกกับอินทิกรัลของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น ดังนี้

$$V(x) \triangleq x^T P x + 2 \sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i \int_0^{q_i} l_i \sigma d\sigma \quad (4.7)$$

พจน์อินทิกรัลของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นอาจพิจารณาได้ว่า เป็นพลังงานเสมือนของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น เมื่อพิจารณาพจน์อินทิกรัลพบว่า พจน์  $\int_0^{q_i} l_i \sigma d\sigma$  แทนพลังงานของสัญญาณเข้าของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น ซึ่งจะพบว่าฟังก์ชันเลียปูโนฟในรูปแบบ (4.7) ใช้ประโยชน์จากคุณสมบัติของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นและทำให้ความอนุรักษ์น้อยกว่าการใช้เลียปูโนฟฟังก์ชันในรูปกำลังสอง  $V(x) = x^T P x$



รูปที่ 4.2: พื้นที่ในส่วนแรงงาที่สมมูลกับอินทิกรัล

#### 4.5 เงื่อนไขสมรรถนะ $H_2$ คงทน

จากที่ได้กล่าวถึงสมรรถนะกรณีเลวสุดของระบบไม่เชิงเส้นใน §2.4 เรากำหนดสมรรถนะ  $H_2$  กรณีเลวสุดของระบบไม่เชิงเส้น (4.2) แทนด้วยสัญลักษณ์  $J_2^2$  เป็นดังนี้

$$J_2^2 := \sup \sum_{i=1}^{n_w} \int_0^{\infty} z_i(t)^T z_i(t) dt \quad (4.8)$$

โดยที่  $\{z_1(t), \dots, z_{n_w}(t)\}$  เป็นสัญญาณสมรรถนะขาออกของระบบไม่เชิงเส้น (4.2) จากการป้อนสัญญาณรบกวนขาเข้าเป็น  $\{\delta w_1, \dots, \delta w_{n_w}\}$  (อิมพัลส์ในทิศทางของเวกเตอร์  $w_1, \dots, w_{n_w}$ ) เมื่อค่าเริ่มต้น (initial condition) เป็นศูนย์ ( $x_0 = 0$ ) และสัญญาณสมรรถนะขาออกในกรณีดังกล่าวมีค่าเท่ากับ  $\{z_1(t), \dots, z_{n_w}(t)\}$  ของระบบไม่เชิงเส้น (4.2) ที่สัญญาณรบกวนขาเข้าเป็นศูนย์ และมีค่าเริ่มต้น  $x_i(0) = B_w e_i$ ,  $i = 1, \dots, n_w$  โดยที่  $\{e_1, \dots, e_{n_w}\}$  เป็นฐานหลักชุดหนึ่งของ  $\mathbb{R}^{n_w}$  เนื่องจากค่า  $J_2^2$  คำนวณได้ยาก ดังนั้นเราจึงคำนวณค่าของเขตบนของ  $J_2^2$  แทนดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 4.1 (สมรรถนะ  $H_2$  กรณีเลวสุดของระบบลูเร)** ถ้ามีฟังก์ชันเลียปูนอฟในรูปแบบสมการ (4.7) โดยที่  $P = P^T > 0$  และ  $\lambda \geq 0$  สอดคล้องกับอสมการเมทริกซ์

$$\left[ \begin{array}{c|c} A^T P + P A + C_z^T C_z & (\cdot)_{2,1}^T \\ \hline B_p^T P + D_{zp}^T C_z + \Lambda C_q A + T L C_q & \Lambda C_q B_p + B_p^T C_q^T \Lambda + D_{zp}^T D_{zp} - 2T \end{array} \right] \leq 0 \quad (4.9)$$

จะได้ว่าขอบเขตบน (upper bound) ของสมรรถนะ  $H_2$  กรณีเลวสุดของระบบลูเร (4.1) มีค่าจำกัดและสามารถคำนวณได้ปัญหาการหาค่าสุด

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \text{Tr } B_w^T [P + C_q^T \Lambda C_q] B_w \\ \text{subject to} & (4.9), P > 0, \Lambda \geq 0, T \geq 0 \end{array} \quad (4.10)$$

**พิสูจน์:** พิจารณาระบบลูเร (4.1) ที่มีตัวแปรสถานะเริ่มต้น  $x(0)$  และคำนวณค่าขอบเขตบนของพลังงานขาออกในสมการ (4.8) โดยใช้ฟังก์ชันเลียปูนอฟ (4.7)

จะกล่าวได้ว่า ถ้า

$$\dot{V}(x) + z^T z \leq 0 \quad (4.11)$$

เป็นจริงสำหรับตัวแปรสถานะ  $x$  ทุกค่าที่สอดคล้องกับสมการพลวัตของระบบ (4.1), จะได้ว่า

$$\mathcal{J}_2^2 \leq V(x(0)) \quad (4.12)$$

ในการพิสูจน์ จะเริ่มต้นด้วยการหาค่าทางด้านซ้ายของสมการ (4.11) ก่อน โดยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลียปูนอฟ (4.7) เทียบกับเวลา และรวมกับพจน์  $z^T z$ , จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 0 \geq & x^T (A^T P + PA)x + x^T (PB_p + A^T C_q^T \Lambda)p + p^T (B_p^T P + \Lambda C_q A)x + p^T (\Lambda C_q B_p + B_p^T C_q^T \Lambda)p \\ & + x^T (C_z^T C_z)x + x^T (C_z^T D_{zp})p + p^T (D_{zp}^T C_z)x + p^T (D_{zp}^T D_{zp})p \end{aligned} \quad (4.13)$$

สมการ (4.11) สอดคล้องกับสมการ (4.13) สำหรับตัวแปรสถานะ  $x$  ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเชกเตอร์

$$p_i(p_i - l_i C_{i,q} x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_p \quad (4.14)$$

จาก  $\mathcal{S}$ -Procedure [8, หน้า 23–24] ได้สมการ (4.13) ที่รวมเงื่อนไขเชกเตอร์เป็น

$$\begin{aligned} 0 \geq & x^T (A^T P + PA)x + x^T (PB_p + A^T C_q^T \Lambda)p + p^T (B_p^T P + \Lambda C_q A)x + p^T (\Lambda C_q B_p + B_p^T C_q^T \Lambda)p \\ & + x^T (C_z^T C_z)x + x^T (C_z^T D_{zp})p + p^T (D_{zp}^T C_z)x + p^T (D_{zp}^T D_{zp})p - 2p^T p + 2p^T T L C_q x \end{aligned} \quad (4.15)$$

ขั้นต่อไปหาขอบเขตบนของ  $V(x(0))$  ในสมการ (4.12) โดยการแทนค่าของขอบเขตบนของพจน์อินทิกรัลจะได้

$$V(x(0)) \leq x_0^T P x_0 + 2 \sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i \int_0^{q_i} l_i \sigma \, d\sigma \quad (4.16)$$

$$\leq x(0)^T [P + C_q^T L \Lambda C_q] x(0) \quad (4.17)$$

และจากนิยามของสมรรถนะ  $\mathcal{H}_2$  กรณีเลวสุดจะได้

$$V(x(0)) \leq \text{Tr } B_w^T [P + C_q^T L \Lambda C_q] B_w \quad (4.18)$$

สรุปได้ว่า (4.9) สมมูลกับ (4.11), และ (4.12) จะเขียนได้เป็น

$$\mathcal{J}_2^2 \leq \text{Tr } B_w^T [P + C_q^T L \Lambda C_q] B_w \quad (4.19)$$

ดังนั้นเราสามารถคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ  $\mathcal{H}_2$  กรณีเลวสุดของระบบลูเรได้จากการหาค่าต่ำสุดของ  $\mathcal{J}_2^2$  ที่สอดคล้องกับสมการ (4.19) และสมการ (4.13) ดังที่กล่าวไว้ในปัญหา (4.10)  $\square$

#### 4.6 วิเคราะห์ผล

การคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ  $\mathcal{H}_2$  กรณีเลวสุดด้วยวิธีไปปอฟ เราอาจสรุปได้ว่าค่าขอบเขตบนของสมรรถนะ  $\mathcal{H}_2$  กรณีเลวสุดเป็นฟังก์ชันของ  $(P, \Lambda, T)$  นั่นคือถ้ามี  $(P, \Lambda, T)$  ที่สอดคล้องกับสมการ

เมทริกซ์เชิงเส้น (4.13) ก็จะสามารถประกันสมรรถนะ  $H_2$  ของระบบได้ แต่ในกรณีที่ไม่สามารถหา  $(P, \Lambda, T)$  ที่สอดคล้องได้เราไม่สามารถประกันค่าสมรรถนะ  $H_2$  กรณีเลวสุดของระบบได้ และสังเกตได้จากอสมการเงื่อนไขที่ได้ใน (4.13) พบว่ามีพจน์ของ  $D_{zp}$  รวมอยู่ด้วย นั้นหมายถึงความไม่แน่นอนในเมทริกซ์สมรรถนะขาออกมีผลต่อเงื่อนไขสมรรถนะ  $H_2$  ของระบบจริง

เงื่อนไขที่นำเสนอนี้ยังสามารถใช้ได้กับระบบลูเรที่มีฟังก์ชันไม่เชิงเส้นมากกว่าหนึ่งฟังก์ชันได้ แต่การเพิ่มจำนวนฟังก์ชันไม่เชิงเส้นในการวิเคราะห์ จะทำให้ขนาดของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นใหญ่ขึ้น ส่งผลถึงจำนวนตัวแปรที่มากขึ้นและใช้เวลาคำนวณเพิ่มมากขึ้นด้วย

#### 4.7 สรุป

บทนี้ได้นำเสนอเงื่อนไขสำหรับคำนวณขอบเขตบนของสมรรถนะ  $H_2$  กรณีเลวสุดของระบบเชิงเส้นที่มีความไม่แน่นอนในเมทริกซ์พลวัตและเมทริกซ์สมรรถนะขาออกซึ่งเกิดจากความผิดพลาดจากการวัดและตัวขับเคลื่อนที่มีการจำกัดเชกเตอร์ เงื่อนไขดังกล่าวมีพื้นฐานอยู่บนฟังก์ชันเลียบุนอฟ (4.7) ที่นำเสนอ ซึ่งสามารถประกันค่าสมรรถนะ  $H_2$  สำหรับระบบลูเรที่ระบุขอบเขตเชกเตอร์ โดยเงื่อนไขที่ได้มีพจน์  $D_{zp}$  ที่เกิดจากความไม่แน่นอนในเมทริกซ์สมรรถนะขาออก และอยู่ในรูปของปัญหาค่าเหมาะที่สุดเชิงคอนเวกซ์บนกรอบงานของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ซึ่งสามารถหาคำตอบได้อย่างมีประสิทธิภาพ วิธีที่นำเสนอนี้ยังสามารถใช้กับระบบลูเรที่มีฟังก์ชันไม่เชิงเส้นมากกว่าหนึ่งฟังก์ชันได้ และยังสามารถขยายผลไปสู่การออกแบบตัวควบคุม  $H_2$  คงทนได้