บทที่ 3

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรอง

3.1 ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองผ่านต่ำ

วงจรกรองในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ใช้วงจรกรองผ่านต่ำสำหรับแก้ปัญหาการการซ้อนทับของสัญญาณ (aliasing) ที่เกิดจากสุ่มตัวอย่างสัญญาณ (Sampling) ด้วยตัวแปลงสัญญาณแอนะ-ล็อกเป็นดิจิทัลซึ่งสามารถอธิบายได้ดังนี้

กำหนดให้สัญญาณขาเข้าตัวแปลงสัญญาณแอนะล็อกเป็นดิจิทัล (ADC) แบบต่อเนื่องทางเวลา คือ $x_c(t)$ จะได้สัญญาณที่ ADC สุ่มได้คือ

$$x_s(t) = x_c(t).s(t) \tag{3-1}$$

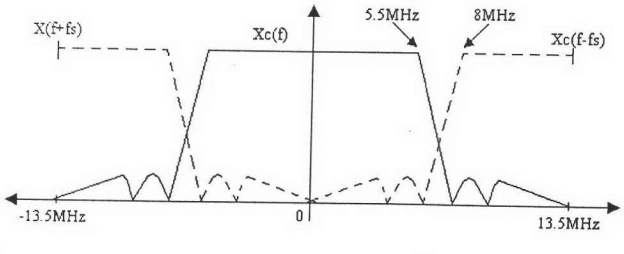
s(t) คือ ฟังก์ชันขบวนพัลส์ (Pulse train function) ที่เกิดจากการสุ่มสัญญาณ T คือ คาบการสุ่มสัญญาณ

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \tag{3-2}$$

เมื่อมองสัญญาณ $x_s(t)$ ในทางความถี่จะได้ ($f_s = 1/T$)

$$X_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j2\pi f - jk2\pi f_s) \tag{3-3}$$

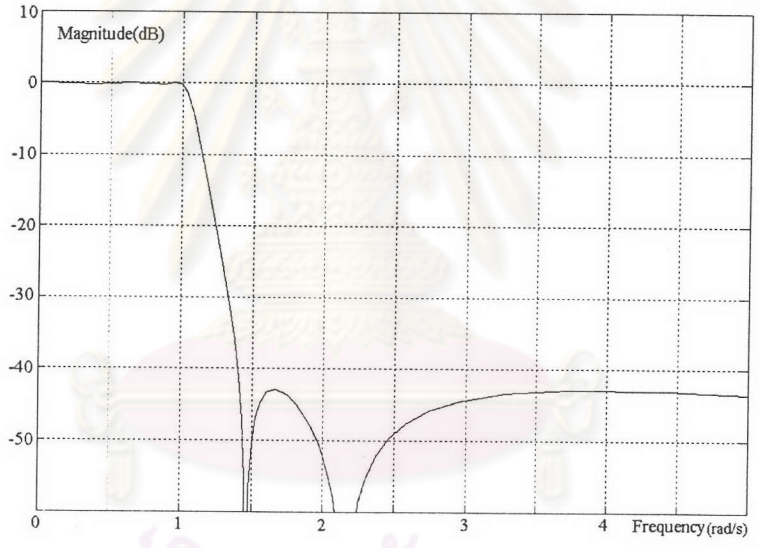
จากสมการที่ (3-3) ที่ได้นี้ถ้าสัญญาณที่เราต้องการมีแถบข้อมูลกว้าง 5.5MHz และสุ่มที่ความถี่ (f_s) 13.5MHz จะสามารถเขียนกราฟแสดงการซ้อนทับของสัญญาณเนื่องจากการสุ่มได้ดังรูปที่ 3.1 และจากรูปนี้สามารถสรุปได้ว่าความถี่แถบหยุดของสัญญาณที่เราต้องการ ($X_c(f)$) จะต้องไม่เกิน 8MHz เพื่อมิให้สัญญาณ $X_c(f-f_s)$ (ยกเว้นส่วนที่ความถี่สูงกว่าแถบหยุด) เข้ามาซ้อนทับกับสัญญาณ $X_c(f)$ ที่เราต้องการ



รูปที่ 3.1 แสดงการซ้อนทับของสัญญาณเนื่องจากการสุ่มสัญญาณ

วงจรกรองผ่านต่ำเพื่อแก้ปัญหาการซ้อนทับของสัญญาณ (Anti-aliasing Filter) ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ใช้วงจรกรองชนิดเอลลิปติกอันดับ 5 เนื่องจากใช้อันดับของวงจรกรองต่ำกว่าวงจรกรองชนิดบัตเตอร์เวิร์ท (อันดับที่ 19) และวงจรกรองชนิด Chebyshev (อันดับที่ 9) วงจรกรองชนิดเอลลิปติกที่ใช้มีความกว้างแถบข้อมูล 5.5MHz ความถี่แถบหยุดของสัญญาณที่ 7.75MHz โดยเลือกการกระเพื่อมในแถบผ่าน 0.2dB ซึ่งน้อยกว่าข้อกำหนดอยู่มากเพื่อเผื่อผลความไม่เป็นอุดมคติของทรานส์คอนดักเตอร์ที่จะทำให้การกระเพื่อมในแถบผ่านเพิ่มมากขึ้น และด้วยข้อกำหนดดังกล่าวของวงจรกรองจะได้การลดทอนในแถบหยุด 43dB ฟังก์ชันถ่ายโอนต้นแบบ (วงจรกรองผ่านต่ำที่มีความถี่หักมุมที่ 1 rad/s) ของวงจรกรองสามารถหาได้ด้วยโปรแกรม MATLAB ดังนี้

$$H(s)=\left(\frac{0.09925s^4+0.6788s^2+1}{2.178s^5+3.287s^4+5.435s^3+4.539s^2+2.91s+1}\right) \tag{3-4}$$



รูปที่ 3.2 กราฟฟังก์ชันถ่ายโอนต้นแบบชนิดเอลลิปติกอันดับที่ 5

ถึงแม้ว่าวงจรกรองผ่านต่ำชนิดเอลลิปติก จะมีผลตอบสนองทางความถี่ที่คมแต่ให้ผลตอบทางเวลาที่ไม่ดีนัก ดังนั้นจึงต้องใช้ Equalizer ปรับการประวิงกลุ่ม (Group delay) ของวงจรกรองให้คงที่ตามมาตรฐาน CCIR 601 เพื่อปรับคุณภาพของผลตอบทางเวลาให้ดีขึ้นต่อไป

3.2 ฟังก์ชันถ่ายโอนของ Equalizer

Equalizer คือวงจรหน่วงสัญญาณที่มีอัตราหน่วงขึ้นกับความถี่ขาเข้า แต่ยอมให้สัญญาณทุกความถี่ผ่านได้ (Allpass Filter) ซึ่งโครงงานนี้นำมาต่อแบบ cascade กับวงจรกรองผ่านต่ำชนิดเอลลิปติกดังรูปที่ 2.11 เพื่อทำให้การประวิงกลุ่มรวมของวงจรกรองเป็น *ค่าคงที่* ตั้งแต่ความถี่

0Hz ถึง 5MHz [1] โดยยอมให้มีการกระเพื่อมเล็กน้อยดังตารางที่ 2-1 ฟังก์ชันถ่ายโอนของ Equalizer อันดับที่ 1 และอันดับที่ 2 เป็นดังสมการที่ (3-5) และ (3-6) ตามลำดับดังนี้

$$Eq1(s) = \frac{s-a}{s+a};\ \ a > 0 \tag{3-5}$$

$$\theta(\omega) = -2\arctan(\frac{a}{\omega}) \tag{3-5.1}$$

$$Group\ \ delay = -\frac{d(\theta)}{d(\omega)} = \frac{2a}{a^2+\omega^2} \tag{3-5.2}$$

$$Eq2(s) = \frac{s^2-bs+c}{s^2+bs+c};\ \ b,c > 0 \tag{3-6}$$

$$\theta(\omega) = -2\arctan(\frac{b\omega}{c-\omega^2}) \tag{3-6.1}$$

$$Group\ \ delay = -\frac{d(\theta)}{d(\omega)} = \frac{2b(\omega^2+c)}{(c-\omega^2)^2+(b\omega)^2} \tag{3-6.2}$$

การหาค่าพารามิเตอร์ของ Equalizer ต้นแบบ (Equalizer ที่ใช้กับวงจรกรองผ่านต่ำแบบเอลลิปติกที่มีความถี่หักมุมที่ 1 rad/s) อาจทำโดยการหาค่า a, b, c, ... ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ใน Equalizer ต้นแบบที่ทำให้การกระเพื่อมของการประวิงกลุ่มของวงจรกรองรอบๆค่าคงที่ค่าหนึ่ง (k) ในช่วง $0<\omega<0.91$ (0.91 = 5MHz/5.5MHz) มีค่าน้อยที่สุดซึ่งสามารถบรรยายได้ดังฟังก์ชันที่ (3-7) โดยสามารถใช้คำสั่ง fminimax ในโปรแกรม MATLAB ซึ่งใช้หาค่าพารามิเตอร์ที่ทำให้กราฟ 2 เส้นเข้าใกล้กันมากที่สุด (Curved-fitting optimization) ช่วยคำนวณหาได้

$$\underset{0<\omega<0.91}{Max}\left|Td_{5th\ \ elliptic\ \ prototype}(\omega) + Td_{Equalizer\ \ prototype}(\omega,a,b,c,...) - k\right| \tag{3-7}$$

$Td_{5th\ elliptic\ prototype}(\omega)$ คือการประวิงกลุ่มของฟังก์ชันถ่ายโอนต้นแบบของวงจรกรองผ่านต่ำที่หามาได้ดังสมการที่ (3-4) $Td_{Equalizer\ prototype}(\omega, a, b, c...)$คือ การประวิงกลุ่มของฟังก์ชันถ่ายโอนต้นแบบของ Equalizer ซึ่งติดค่าพารามิเตอร์ a, b, c, ... k คือค่าคงที่ใดๆที่กำหนดขึ้นโดยค่า k ที่เหมาะสมจะทำให้ฟังก์ชัน (3-7) มีค่าน้อยที่สุด

การหาการประวิงกลุ่มของวงจรกรองผ่านต่ำเริ่มจากจัดรูปของฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองผ่านต่ำชนิดเอลลิปติกอันดับที่ 5 ซึ่งมีฟังก์ชันถ่ายโอนดังสมการที่ (3-4) ใหม่ดังนี้

$$H(s) = \frac{0.046(s^2+4.692)(s^2+2.1475)}{(s+0.584)(s^2+0.193s+1.098)(s^2+0.732s+0.7156)} \tag{3-8}$$

เนื่องจากศูนย์ของ H(s) อยู่บนแกนจินตภาพทั้งหมดจึงไม่มีผลต่อเฟสและการประวิงกลุ่ม ส่วนขั้ว (poles) ของ H(s) ซึ่งมีทั้งขั้วบนแกนจำนวนจริง (real pole) และขั้วแบบจำนวนเชิงซ้อน (complex pole) สามารถแยกส่วนหาการประวิงกลุ่มได้ดังสมการที่ (3-9) และ (3-10) ตามลำดับ

$$G_1(s) = \frac{1}{s+a} \tag{3-9}$$

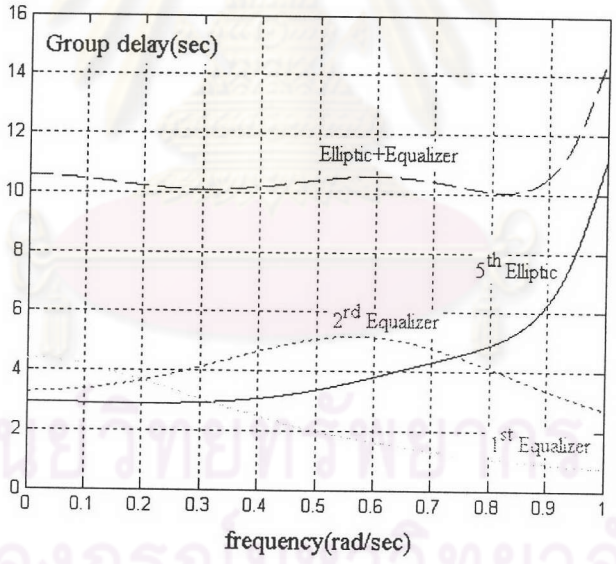
$$\theta(\omega) = -\arctan(\frac{a}{\omega}) \tag{3-9.1}$$

$$Group\ \ delay = -\frac{d(\theta)}{d(\omega)} = \frac{a}{a^2+\omega^2} \tag{3-9.2}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s^2+bs+c} \tag{3-10}$$

$$\theta(\omega) = -\arctan(\frac{b\omega}{c-\omega^2}) \tag{3-10.1}$$

$$Group\ \ delay = -\frac{d(\theta)}{d(\omega)} = \frac{b(\omega^2+c)}{(c-\omega^2)^2+(b\omega)^2} \tag{3-10.2}$$



รูปที่ 3.3 การประวิงกลุ่มของวงจรกรองผ่านต่ำชนิดเอลลิปติกและ Equalizer ต้นแบบ

การหาค่าพารามิเตอร์ของ Equalizer ต้นแบบด้วยวิธีดังกล่าวจะได้ Equalizer อันดับที่ 3 ดังสมการที่ (3-11) ซึ่งมีการกระเพื่อมของการประวิงกลุ่ม ±0.3 วินาทีในช่วง $0<\omega<0.91$ ดังรูปที่ 3.3 เมื่อทำการย้ายความถี่หักมุมของวงจรกรองผ่านต่ำและ Equalizer ที่ได้จาก 1 rad/s ไป 2π5.5Mrad/sจะได้การประวิงกลุ่ม ±0.3/(2π5.5M) = ±8.7ns ซึ่งอยู่ในข้อกำหนดดังตารางที่ 2.1

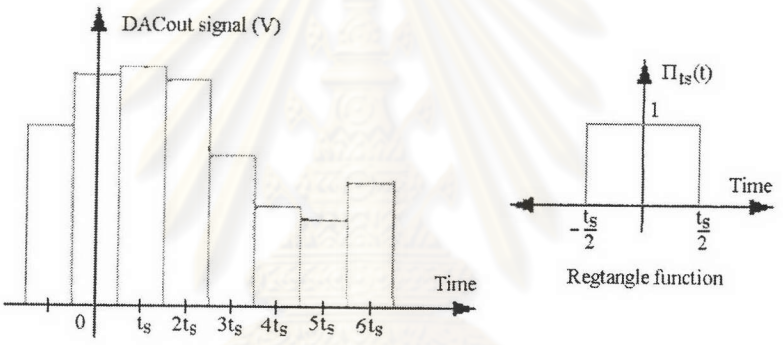
$$Equalizer(s) = \left(\frac{s-0.457}{s+0.457}\right)\left(\frac{s^2-0.8675s+0.53}{s^2+0.8675s+0.53}\right) \quad (3\text{-}11)$$

3.3 ฟังก์ชันถ่ายโอนของส่วนแก้ไข Sin(x)/x (Sin(x)/x correction)

วงจรแก้ไข Sin(x)/x มีหน้าที่ขยายสัญญาณความถี่สูงที่หายไปเนื่องจากการแปลงกลับสัญญาณดิจิทัลเป็นสัญญาณแอนะล็อก โดยการหายไปของสัญญาณความถี่สูงดังกล่าวสามารถอธิบายได้ดังนี้

การสร้างสัญญาณกลับ (Reconstruction) จากตัวแปลงสัญญาณดิจิทัลเป็นแอนะล็อกจะได้สัญญาณที่มีลักษณะสัญญาณเป็นเหลี่ยมดังรูปที่ 3.4 ซ้ายและสามารถเขียนในรูปสัญญาณทางเวลาดังสมการที่ (3-12)

$$V_{DACout}(t) = \Pi_{ts}(t) \otimes [X_c(t).S(t)] \quad (3\text{-}12)$$



รูปที่ 3.4 ตัวอย่างสัญญาณที่ออกจากตัวแปลงสัญญาณดิจิทัลเป็นแอนะล็อก

$\Pi_{ts}(t)$ คือฟังก์ชันสี่เหลี่ยมผืนผ้าดังรูปที่ 3.4 ด้านขวา $X_c(t)$ คือสัญญาณที่เราต้องการสร้างกลับแบบต่อเนื่องทางเวลา S(t) คือ ฟังก์ชันขบวนพัลส์ดังสมการที่ (3-2) และ $\otimes$ คือเครื่องหมายคอนโวลูชัน (convolution) โดยสัญญาณเหล่านี้ทำการแปลงฟูริเยร์ (Fourier transform) ได้ดังนี้

$$\Pi_{ts}(t) \xrightarrow{fourier\ transform} \frac{\sin(\pi f t_s)}{\pi f} \quad (3\text{-}13)$$

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nt_s) \xrightarrow{fourier\ transform} f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s) \quad (3\text{-}14)$$

t_s คือช่วงเวลาสุ่มสัญญาณ , $f_s = 1/t_s$

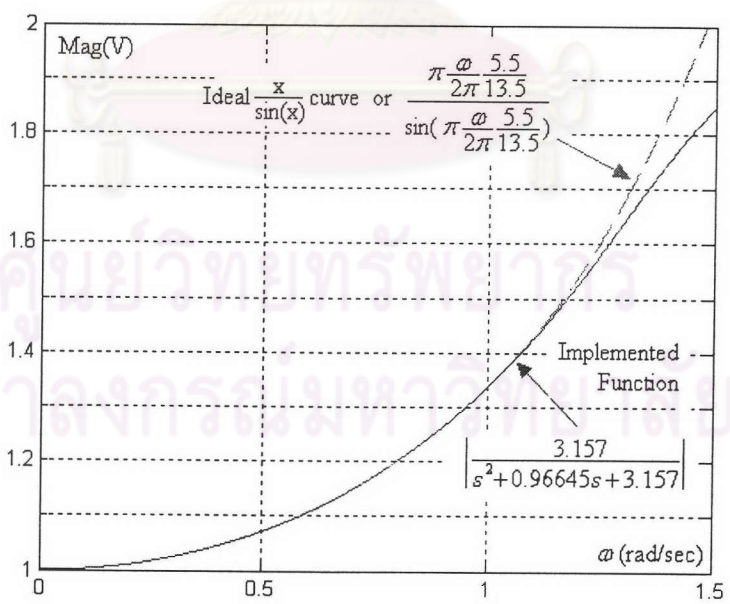
สัญญาณที่ออกจากตัวแปลงสัญญาณดิจิทัลเป็นแอนะล็อกดังสมการที่ (3-12) สามารถมองในโดเมนความถี่โดยทำการแปลงฟูริเยร์ได้ดังสมการที่ (3-15)

$$V_{DACout}(f) = \frac{\sin(\pi f t_s)}{\pi f t_s}[X_c(f) \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s)]$$
$$= \frac{\sin(\pi f t_s)}{\pi f t_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j2\pi f - jk2\pi f_s) \quad (3\text{-}15)$$

พจน์ $\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j2\pi f - jk2\pi f_s)$ เหมือนกับการซ้อนทับของสัญญาณที่เกิดจากการสุ่มโดย สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 3.1 ดังนั้นการสร้างสัญญาณกลับ (Reconstruct) ก็ต้องการการกรองสัญญาณเช่นเดียวกับการสุ่ม (Sampling) สัญญาณ นอกจากนั้นสัญญาณความถี่สูงที่ออกจากตัวแปลงสัญญาณดิจิทัลเป็นแอนะล็อกจะถูกลดทอนลงไปด้วยพจน์ $\frac{\sin(\pi f t_s)}{\pi f t_s}$ ดังนั้นจึงต้องมีวงจรแก้ไข Sin(x)/x ช่วยขยายความถี่สูงกลับคืนมา

การขยายความถี่สูงกลับคืนมาสำหรับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ทำโดยนำสัญญาณขาออกจากวงจรกรองผ่านต่ำชนิดเอลลิปติกอันดับ 5 มาต่อเข้ากับส่วนแก้ไข Sin (x)/x ดังรูปที่ 2.14 ซึ่งเป็นวงจรกรองผ่านต่ำอันดับ 2 ที่มีฟังก์ชันถ่ายโอนต้นแบบ (ฟังก์ชันถ่ายโอนที่ใช้กับวงจรกรองผ่านต่ำแบบเอลลิปติกที่มีความถี่หักมุมที่ 1 rad/s) ดังสมการที่ (3-16)

$$H(s) = \frac{3.157}{s^2 + 0.96645s + 3.157} \quad (3\text{-}16)$$



รูปที่ 3.5 กราฟฟังก์ชันถ่ายโอนของส่วนแก้ไข Sin (x)/x

การหาค่าสัมประสิทธ์ของฟังก์ชันถ่ายโอนต้นแบบของส่วนแก้ไข Sin (x)/x ทำโดยเลือกค่า a, b ที่ทำให้ฟังก์ชัน (3-17) มีค่าน้อยที่สุด หรือก็คือการเลือกค่าพารามิเตอร์ a, b ที่ทำให้ผลต่าง

ระหว่างขนาดของฟังก์ชันถ่ายโอนต้นแบบที่ติดพารามิเตอร์ a, b กับส่วนกลับของพจน์ Sin(x)/x ให้มีค่าน้อยที่สุดในช่วง $0<\omega<1$ โดยสามารถใช้คำสั่ง fminimax ในโปรแกรม MATLAB ช่วยคำนวณหาค่าพารามิเตอร์เหล่านี้ได้

$$\underset{0<\omega<1}{Max}\left|\left|\frac{b}{s^2+as+b}\right|-\frac{\pi\omega\frac{5.5MHz}{13.5MHz}}{\sin(\pi\omega\frac{5.5MHz}{13.5MHz})}\right| \qquad (3\text{-}17)$$

3.4 สรุป

ฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองผ่านต่ำสำหรับแก้การซ้อนทับสัญญาณเนื่องจากการสุ่มเป็นวงจรกรองชนิดเอลลิปติกอันดับที่ 5 และใช้ Equalizer อันดับ 3 ปรับการประวิงกลุ่ม (Group delay) ของวงจรกรองผ่านต่ำให้คงที่ ส่วนวงจรแก้ไข sin(x)/x ซึ่งมีหน้าที่ขยายสัญญาณความถี่สูงที่หายไปเนื่องจากการแปลงกลับสัญญาณดิจิทัลเป็นสัญญาณแอนะล็อก สร้างจากวงจรกรองผ่านต่ำอันดับที่ 2

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย