บทที่ 3

ทฤษฎีหรือสมมติฐานและวิธีทางไฟไนท์เอเลเมนท์

3.1 ทฤษฎีหรือสมมติฐาน

ในการวิเคราะห์การกระจายของอุณหภูมิในคอนกรีตรูปกล่องนี้ใช้สมมติฐานดังนี้

1. วัสดุเป็น Homogeneous material.
2. คุณสมบัติเกี่ยวกับความร้อนของวัสดุคงที่ไม่ว่าเวลาใด ๆ และอุณหภูมิใด ๆ
3. สัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนผิวคงที่ตลอดเวลาในการวิเคราะห์
4. อุณหภูมิที่หน้าตัดใด ๆ จะเท่ากันตลอดความยาวของโครงสร้าง
5. ในการวิเคราะห์ใช้ทฤษฎีการถ่ายเทความร้อนในวัสดุ 2 ทิศทาง (Two-dimensional heat flow)
6. ในผิวระนาบวัสดุ ในแต่ละระนาบอุณหภูมิจะเท่ากันตลอดระนาบนั้น
7. อุณหภูมิที่กระจายในส่วน ๆ จะเป็นเส้นตรง (Linear)

3.2 วิธีทางไฟไนท์เอเลเมนท์

ในการหาการกระจายอุณหภูมิในวัสดุนั้นจะใช้สมการควบคุม (Governing Equation) ตามทฤษฎีการไหลของความร้อน 2 ทิศทาง ซึ่งมีสมการแบบคลาสสิคัล (Classical Equation)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \qquad (3.1)$$

$$= K\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

เมื่อ T = อุณหภูมิของมวล $^{\circ}F$

t = เวลา hr.

x,y = ทิศทางของแนวแกนในระนาบดิ่งของหน้าตัด

k = ค่าความนำความร้อนของวัสดุ btu/hr/ft/$^{\circ}F$

c = ความร้อนจำเพาะ btu/lb/$^{\circ}F$

ρ = ความหนาแน่น lb/ft^3

K = $\frac{k}{c\rho}$ = diffusivity ft^2/hr.

ในการใช้วิธีไฟไนท์เอเลเมนท์นั้นจะมีสมการในการแก้ปัญหาใหม่ มีหลักเกณฑ์ในการหาคำตอบ ดังนี้

1. แบ่งหน้าตัดโครงสร้างที่จะวิเคราะห์ด้วยเส้นสมมติเป็นช่วง ๆ ทั้งแนวนอนและแนวดิ่ง

2. ส่วนย่อย (element) ที่ถูกแบ่งด้วยเส้นสมมติจะต่อเนื่องกันด้วยจุด (Nodal point) ที่เป็นตัวเลขจำเพาะ

3. ในการหาอุณหภูมินั้นจะแทนการเคลื่อนที่ (displacement) ของจุดเป็นอุณหภูมิแทน

4. อุณหภูมิที่จุดเดียวกันของแต่ละส่วนย่อยจะเท่ากัน

อาศัยหลักเกณฑ์ที่กล่าวมานี้ในการหาการกระจายอุณหภูมิภายในตัวโครงสร้างนี้ ได้มีการพัฒนามาเรื่อย ๆ ซึ่ง Wilson[28] ได้แสดงไว้ว่า การใช้ทฤษฎีทางฟิสิกส์ของขบวนการการถ่ายเทความร้อน (heat transfer) ในวัสดุสามารถใช้ได้กับสมการการสมดุลย์ที่ใช้ในวิธีการไฟไนท์เอเลเมนท์แบบอื่น ๆ ซึ่ง Brisbane[27] ได้ใช้สูตรทางคณิตศาสตร์กำหนดฟังก์ชั่นที่ไม่มีแหล่งกำเนิดความร้อนภายใน ได้ว่าพลังงานทั้งหมดที่มีอยู่ภายในวัสดุ = พลังงานที่ได้จากภายนอก - พลังงานที่ถ่ายเทออก

$$\P(U, \dot{U}) = \int_V \{\tfrac{1}{2}\nabla U \cdot \underline{\underline{k}}\nabla U + \rho c U\dot{U}\}dV - \int_S \underline{n}\cdot\underline{q}U dS. \qquad (3.2)$$

เมื่อ V = ปริมาตรของส่วน (domain)

S = ผิวขอบของส่วน (domain's boundary)

$\underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{k}(x^i)$ = การนำความร้อนสำหรับวัสดุ anisotropic

$c = c(y^i)$ = ความร้อนจำเพาะ

$\rho = \rho(x^i)$ = ความหนาแน่น

$\underset{\sim}{g} = \underset{\sim}{g}(x^i)$ = สนามความร้อน (heat fluy) ที่ผ่านหน้าตัด

$\underset{\sim}{n} = \underset{\sim}{n}(x^i)$ = หน่วยตั้งฉาก (Unit mormal vector)

$U = U(x^i, t) ==$ อุณหภูมิ

$\dot{U} = \dot{U}(x^i, t)$ = Time derivation ของอุณหภูมิ

$\underset{\sim}{\nabla} U$ = gradient ของ $U = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) U$

x^i = Co-ordinate

$\P$ = พลังงานศักย์ทั้งหมด (Total Potential energy)

ในอุณหภูมิ นี้จะถูกสมมติให้มีการเปลี่ยนแปลงไปตามส่วนย่อย (element) และสามารถใช้แทนได้ที่จุดต่าง ๆ เป็นอุณหภูมิที่จุด U ดังนั้น ฟังก์ชั่นใหม่ที่ใช้กับส่วนย่อยก็จะเป็น $(U, \dot{U})$ ได้สมการใหม่ดังนี้

$$\P(u, \dot{u}) = \int_V \{\tfrac{1}{2}\underset{\sim}{u}^T \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{k}}\,\underline{\underline{D}}\,\underset{\sim}{u} + \rho c \underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{N} \dot{\underset{\sim}{u}}\}\, dV - \int_S \underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{n}^T \underset{\sim}{g}\, dS \qquad (3.3)$$

เมื่อใช้ $U = \underset{\sim}{N}\underset{\sim}{u}$

$\dot{U} = \underset{\sim}{N}\dot{\underset{\sim}{u}}$

$\underset{\sim}{\nabla} U = \underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{N}\underset{\sim}{u} = \underline{\underline{D}}\,\underset{\sim}{u}$

จากสมการ 3.3 จะสามารถหาสมการสมดุลย์และสมการขอบเขตจากทฤษฎีพลังงานที่น้อยที่สุด (Principle of minimum potential energy) ได้

$$\frac{\partial \P}{\partial u}(\underset{\sim}{u}, \dot{\underset{\sim}{u}}) = 0 \qquad (3.4)$$

จาก 3.4 ได้ $\int_V \{\underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{k}}\,\underline{\underline{D}}\,u + \rho c \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{N}\dot{\underset{\sim}{u}}\}\, dV - \int_S \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{n}^T \underset{\sim}{g}\, dS = 0 \qquad (3.5)$

ค่า q ในสมการ 3.5 ก็เป็นความเข้มสนามความร้อนซึ่งได้จากการรวมค่าความร้อนจากการพาความร้อน Q_c ตลอด S_1 และการแผ่รังสี Q_v ตลอด S_2 ซึ่งได้จากในบทที่ 2 นั้น

$$\underset{\sim}{Q}_c = h_c(U-U_a) \qquad (3.6)$$

และในสภาพอากาศแจ่มใส

$$\underset{\sim}{Q}_r = \underset{\sim}{Q}_s - \underset{\sim}{Q}_{LC} \qquad (3.7)$$

$$Q_{LC} = e\sigma(U+460)^4 - 0.496\text{x}10^{14}(U_a+460)^6 e \qquad (3.8)$$

จากสมการ 3.5, 3.6, 3.7, 3.8 จะได้ว่า

$$0 = \int_v \{\underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{k}}\underline{\underline{D}}\underset{\sim}{u} + \rho c \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{N}\dot{\underset{\sim}{u}}\}\, dV + \int_{s1} h_c \underset{\sim}{N}^T (\underset{\sim}{N}\underset{\sim}{u} - U_a)\, dS - \int_{s2} \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{n}^T \underset{\sim}{Q}_r\, dS \qquad (3.9)$$

จากสมการ 3.9 สามารถจัดใหม่ได้ในรูป

$$\underline{\underline{C}}\dot{\underset{\sim}{u}} + (\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{H}})\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{q}^* \underset{\sim}{h}^* \qquad (3.10)$$

โดยที่

$$\underline{\underline{C}} = \rho c \int_v \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{N}\, dV \qquad (3.11)$$

$$\underline{\underline{B}} = \int_v \underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{k}}\underline{\underline{D}}\, dV \qquad (3.12)$$

$$\underline{\underline{H}} = h_c \int_{s1} \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{N}\, dS \qquad (3.13)$$

$$\underset{\sim}{q}^* = \int_{s2} \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{n}^T Q_r\, dS \qquad (3.14)$$

$$\underset{\sim}{h}^* = h_c U_a \int_{s1} \underset{\sim}{N}^T dS \qquad (3.15)$$

ในสมการ 3.13, 3.14, 3.15 นี้ ใช้เมื่อได้ข้อมูลของสภาวะแวดล้อมโดยรอบแล้ว แต่เนื่องจากในการทำวิจัยครั้งนี้จะตัดข้อมูลทางสภาวะแวดล้อมออกโดยทำการวัดอุณหภูมิที่ผิวของโครงสร้างเลย เพื่อลดความยุ่งยากลง อีกทั้งเครื่องมือที่ใช้จะได้ลดน้อยลงไปด้วย ดังนี้

$$\underset{=}{H} = \underset{\sim}{g}^{*} = \underset{\sim}{h}^{*} = 0 \qquad (3.16)$$

จากสมการ 3.10 และ 3.16 จึงสามารถเขียนได้ว่า

$$\underset{=}{C}\dot{\underset{\sim}{u}} + \underset{=}{B}\underset{\sim}{u} = 0 \qquad (3.17)$$

จากสมการ 3.17 ค่า $\underset{=}{C}$ และ $\underset{=}{B}$ สามารถหาได้โดยดูจากรูปที่ 8.10 ซึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมที่แทนส่วนย่อย element รูปสามเหลี่ยมมีจุด (Nodal point) ที่จุดทั้งสามของสามเหลี่ยม จากสมมติฐานที่ว่า การกระจายของอุณหภูมิภายในส่วนย่อยจะเป็นเส้นตรง (Linear)

$$U(x,y) = \underset{\sim}{\phi}(x,y)\,\underset{\sim}{\alpha} \qquad (3.18)$$

$$\dot{U}(x,y) = \underset{\sim}{\phi}(x,y)\,\underset{\sim}{\beta} \qquad (3.19)$$

โดยที่ $\underset{\sim}{\phi}(x,y) = |1\ x\ y| \qquad (3.20)$

และ $\underset{\sim}{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$, $\underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \qquad (3.21)$

จากสมการ 3.11 นั้นเป็นการหาค่าที่จุดทั้ง 3 ของสามเหลี่ยม จากการแก้สมการจะได้ว่า

$$\underset{\sim}{\alpha} = \underset{=}{A}\underset{\sim}{u}\ , \quad \underset{\sim}{\beta} = \underset{=}{A}u \qquad (3.22)$$

$$\underset{=}{A} = \frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ b_j-b_k & b_k & -b_j \\ a_k-a_j & -a_k & a_j \end{bmatrix} \qquad (3.23)$$

$$\lambda = a_j b_k - a_k b_j \qquad (3.23)$$

$$\underset{\sim}{U} = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix} \quad , \quad \dot{\underset{\sim}{u}} = \begin{bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{u}_j \\ \dot{u}_k \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

ดังนั้น
$$U(x,y) = \underset{\sim}{\phi}(x,y)\ \underset{\approx}{A}\underset{\sim}{u} = \underset{\approx}{N}\underset{\sim}{u} \tag{3.26}$$

$$\dot{U}(x,y) = \phi(x,y)\ \underset{\approx}{A}\dot{\underset{\sim}{u}} = \underset{\approx}{N}\dot{\underset{\sim}{u}} \tag{3.27}$$

$$\underset{\sim}{\nabla}U(x,y) = \underset{\sim}{\nabla}\phi(x,y)\ \underset{\approx}{A}\underset{\sim}{u} = \underset{\approx}{D}\underset{\sim}{u} \tag{3.28}$$

โดยที่
$$\underset{\approx}{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial_x} \\ \frac{\partial}{\partial_y} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x & y \end{vmatrix} \quad \underset{\approx}{A}$$

หรือ
$$\underset{\approx}{D} = \frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix} b_j - b_k & b_k & -b_j \\ a_k - a_j & -a_k & a_j \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

และ
$$\underset{\approx}{B} = \frac{kt}{2\lambda}\begin{bmatrix} e^2 + d^2 & b_k e - a_k d & b_j e + a_j d \\ b_k e - a_k d & b_k^2 + a_k^2 & b_j a_k - a_j + a_k \\ b_j e + a_j d & b_j a_k - a_j b_j & b_j^2 + a_j^2 \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

โดยมี
$$d = a_k - a_j \tag{3.31}$$

$$e = b_j - b_k \tag{3.32}$$

และค่า $\underset{\approx}{B}$ จากสมการ 3.30 นี้เป็นส่วนย่อยบนรูปสามเหลี่ยมที่เป็น Isotropic และมีความหนา, t คงที่

ค่า $\underset{\approx}{B}$ จะเรียกว่า Conductivity matrix

ค่า c จะเป็น heat capacity matrix ซึ่งจะหาได้จากรูปสามเหลี่ยมที่แกนส่วนย่อยนั้นและจัดการใช้วิธีลัด (lumped method) เพื่อให้ได้ค่าที่จุดเท่านั้น ดังนั้น ได้ค่าจากแนวทะแยงของ matrix

$$c_{11} = \frac{\rho ct}{2}(A_1 + A_3)$$

$$c_{12} = \frac{\rho ct}{2}(A_1 + A_2) \qquad (3.31)$$

$$c_{13} = \frac{\rho ct}{2}(A_2 + A_3)$$

ค่าที่ได้ในสมการ 3.18 จนถึง 3.31 เป็นการหาค่าที่จะใช้ในสมการ 3.11, 3.12 เพื่อแทนในสมการ 3.17 โดยค่าที่ได้มีเป็นค่าที่ใช้ในส่วนย่อยที่เป็นรูปสามเหลี่ยม ซึ่งค่าส่วนย่อยเป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ดังรูปที่ 9 ส่วนอุณหภูมิที่จุด 5 ตามรูปที่ 9 จะถูกกำจัดทิ้งไปโดยวิธีคอนเดนเซชั่น (Condensation)

จากการที่สมมติให้การกระจายอุณหภูมิแต่ละจุดเป็นเส้นตรง (Linear) ดังนั้น ในช่วงเวลาที่เพิ่มขึ้นไปนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงในอุณหภูมิก็จะคงที่ ได้ว่า

$$u_t = \frac{u_t - u_{t-\Delta t}}{\Delta t} \qquad (3.32)$$

โดยที่ Δt = ช่วงเวลาที่เพิ่มขึ้น (Time increment)

เมื่อแทนลงในสมการที่ 3.17 จะได้

$$B^* u_t = F^* \qquad (3.33)$$

เมื่อ $$B^* = \underset{\sim}{B} + \frac{1}{\Delta t}\underset{\sim}{C} \qquad (3.34)$$

$$F^* = \frac{1}{\Delta t}\underset{\sim}{C}\, u_{t-\Delta t}$$

สมการ 3.33 เป็นสมการที่จะใช้หาการกระจายของอุณหภูมิภายในหน้าตัด โดยที่ข้อมูลที่ใช้จะเป็นค่าอุณหภูมิที่จุดผิวของโครงสร้าง ซึ่งในการวิเคราะห์ตามนี้จะมีขั้นตอนดังนี้

1. คำนวณค่า $\underset{\sim}{C}$ และ $\underset{\sim}{B}$

2. หาค่าอุณหภูมิที่เท่ากัน (Uniform Temperature) ของทุกจุดของส่วนย่อย

3. จัดรูป $\underset{\sim}{B}^{*}$

4. จัดรูป $\underset{\sim}{B}^{*}$ ให้เป็น matrix รูปสามเหลี่ยม และสำหรับแต่ละช่วงเวลาที่เพิ่มขึ้น, Δt

5. วัดค่าอุณหภูมิที่ผิวทั้งภายในและผิวภายนอก

6. คำนวณหา $\underset{\sim}{F}^{*}$

7. แก้สมการของ $\underset{\sim}{B}^{*} u_t = F^{*}$

8. เริ่มต้นข้อ 5 ใหม่ ในช่วงเวลาถัดไป

จากอุณหภูมิต่าง ๆ ที่ได้จากวิธีการที่ได้กล่าวข้างต้นนั้นจะเป็นอุณหภูมิที่จุด (Nodal point)

เมื่อได้อุณหภูมิที่จุดต่าง ๆ บนหน้าตัดแล้วจึงสามารถหาอุณหภูมิเฉลี่ย (Mean Temperature) ซึ่งค่านี้จะมีความสำคัญต่อการยืดหรือหดตัวของโครงสร้าง ค่าอุณหภูมิเฉลี่ยนี้จะหาได้จาก

$$TAV = \frac{\Sigma T(N) A(N)}{A}$$

เมื่อ TAV = อุณหภูมิเฉลี่ยตลอดหน้าตัดของโครงสร้าง

T(N) = อุณหภูมิเฉลี่ยของส่วนย่อย

A(N) = พื้นที่หน้าตัดของส่วนย่อย

A = พื้นที่ทั้งหมดของหน้าตัดโครงสร้าง