บทที่ 4

เทคนิค CFD (Computational Fluid Dynamic)

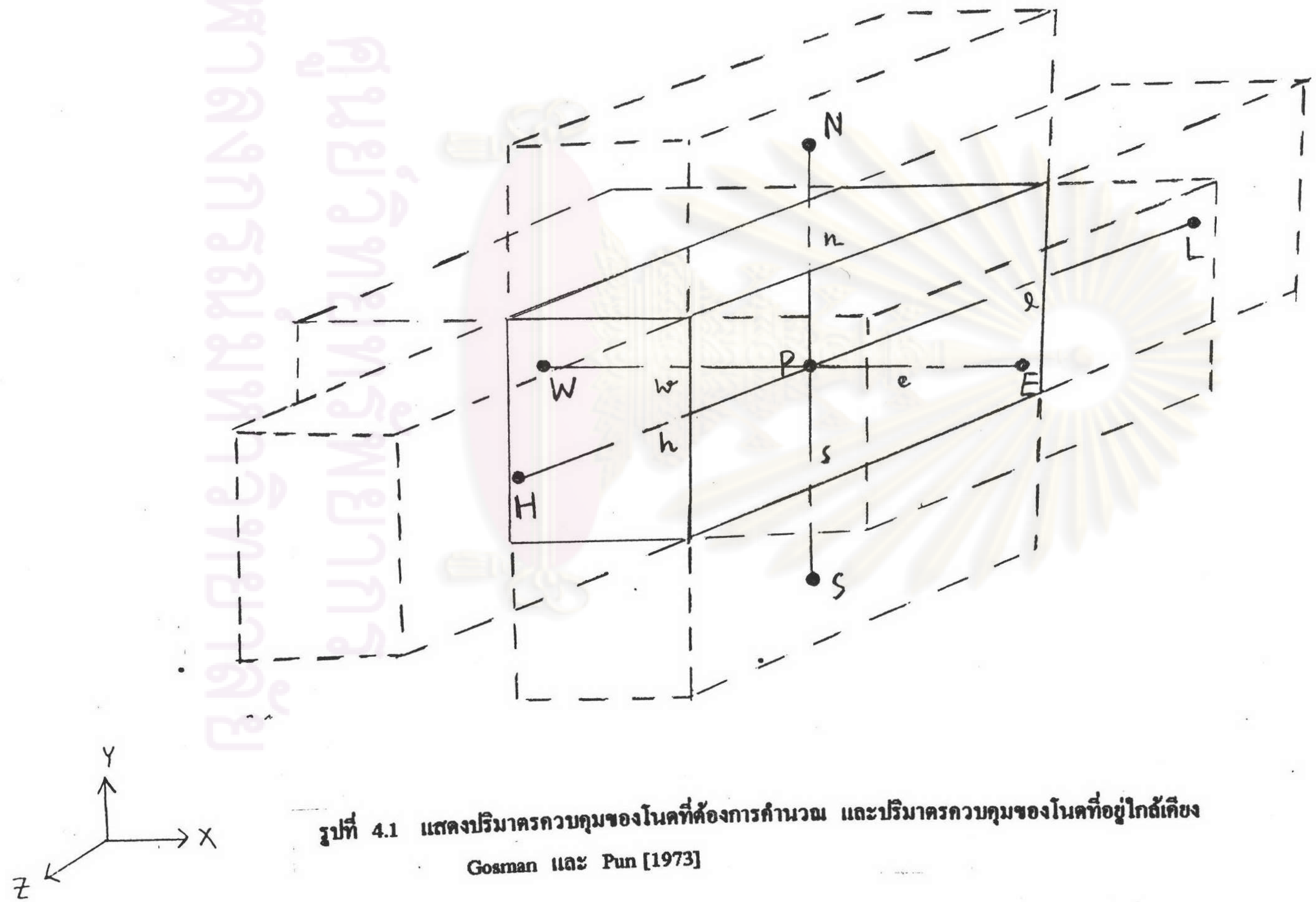
4.1 บทนำ

เทคนิค CFD เป็นเทคนิคที่ถูกนำมาประยุกต์ใช้อธิบายถึงการไหลของของไหลในขอบเขตที่ศึกษา โดยใช้วิธีการคำนวณเชิงตัวเลข เพื่อแก้ชุดสมการอนุรักษ์โมเมนตัม สมการความต่อเนื่อง และสมการแสดงคุณสมบัติเชิงปริมาณ ภายในปริมาตรควบคุมที่ถูกกำหนดโดยสภาวะขอบเขตของระบบที่ต้องการจะศึกษา เพื่อให้ได้รายละเอียดเกี่ยวกับ การกระจายตัวของความดัน (pressure distribution) การกระจายตัวของความเร็ว (velocity distribution) และการกระจายตัวของอุณหภูมิ (temperature distribution) เป็นต้น ในระบบที่เราต้องการจะศึกษานั้น

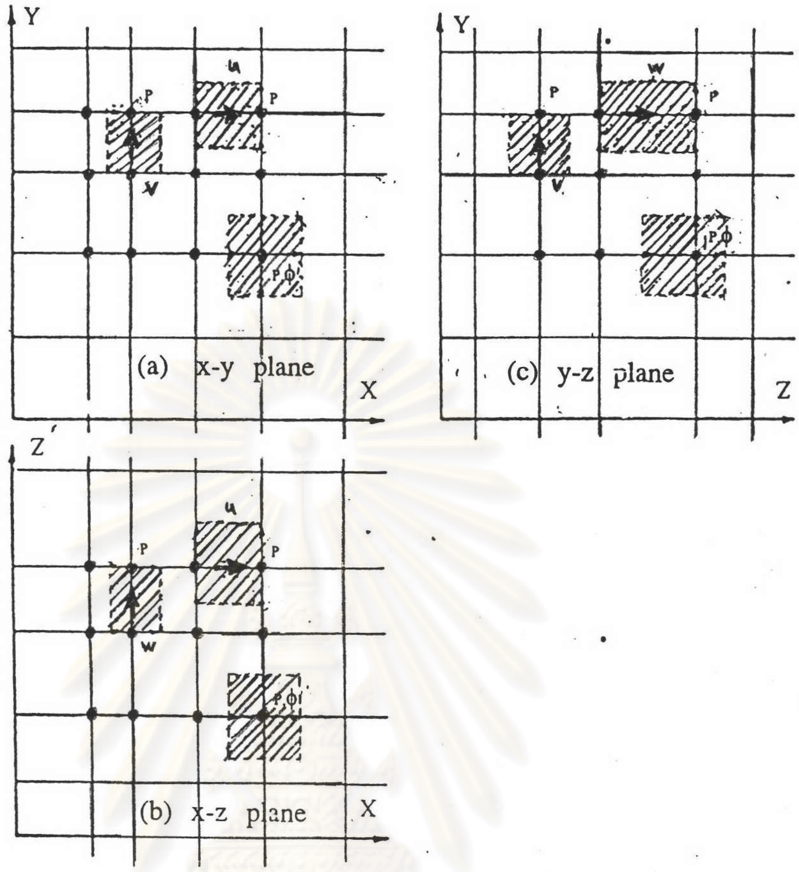
สำหรับเทคนิค CFD ที่ใช้ในงานวิจัยนี้จะแก้สมการโดยใช้หลักการของไฟไนต์โวลุ่ม (finite volume) โดยมีรายละเอียดในการแก้สมการและวิธีหาคำตอบ ดังจะได้อธิบายต่อไป

4.2 กริด โนด และปริมาตรควบคุม (grid, node and control volume)

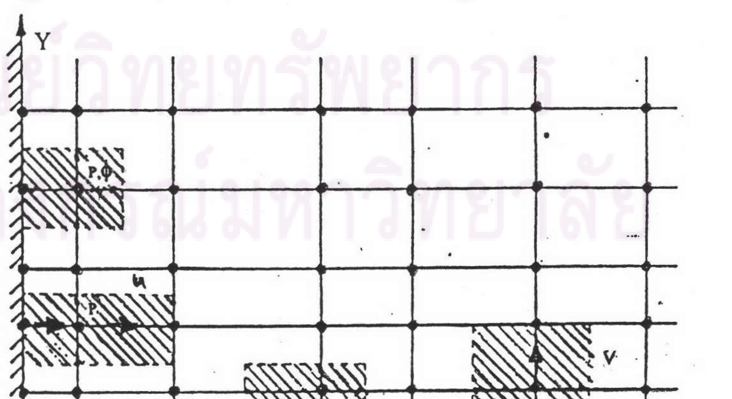
ขั้นแรกของการสร้างสมการไฟไนต์โวลุ่ม คือ การกำหนดทั้งจำนวนของเส้นกริดและระยะห่างระหว่างเส้นกริด ที่ใช้แทนระบบที่เราต้องการทราบการไหลของของไหลที่เกิดขึ้นในนั้น ดังรูปที่ (4.1) แสดงปริมาตรควบคุมของโนดที่ต้องการคำนวณ และปริมาตรควบคุมของโนดที่อยู่ใกล้เคียง ซึ่งโนดเป็นตำแหน่งที่ตัดกันระหว่างเส้นกริด โดยโนดที่ต้องการทำการคำนวณมีสัญลักษณ์เป็นตัวอักษร P และโนดที่อยู่ใกล้เคียง มีสัญลักษณ์เป็นตัวอักษร N, S, W, E, L และ H เมื่อเทียบทิศทางตามตำแหน่งที่มันอยู่กับตำแหน่งของโนดที่ต้องการทำการคำนวณ ส่วนรูปที่ (4.2) แสดงขอบเขตของปริมาตรควบคุมอยู่ บริเวณกึ่งกลางของระยะห่างระหว่างโนดสองโนด ในระนาบ x-y ระนาบ x-z และระนาบ y-z และแสดง ตำแหน่งที่เก็บค่าตัวแปรแสดงคุณสมบัติเชิงปริมาณไว้ที่ตำแหน่งโนดแต่ละโนด ส่วนองค์ประกอบของความเร็วในแต่ละทิศทาง เก็บค่าไว้ที่เส้นกริดที่เชื่อมระหว่างโนดสองโนด จากรูป (4.2) สังเกตเห็นว่าเส้นกริดที่เก็บค่าองค์ประกอบของความเร็วอยู่ระหว่างตำแหน่งโนดที่เก็บค่าความดัน และรูปที่ (4.3) แสดงขอบเขตของปริมาตรควบคุมที่อยู่ติดกับสภาวะขอบเขต



รูปที่ 4.1 แสดงปริมาตรควบคุมของโนดที่ต้องการคำนวณ และปริมาตรควบคุมของโนดที่อยู่ใกล้เคียง Gosman และ Pun [1973]



รูปที่ 4.2 แสดงขอบเขตของปริมาตรควบคุมของโนดและตำแหน่งที่เก็บค่าตัวแปร และแสดงขอบเขตของปริมาตรควบคุมของโนดและตำแหน่งที่เก็บค่าองค์ประกอบความเร็วในแต่ละทิศทาง Gosman และ Pun [1973]



รูปที่ 4.3 แสดงขอบเขตของปริมาตรควบคุมที่ติดกับสภาวะขอบเขต Gosman และ Pun [1973]

4.3 สมการไฟไนต์โวลุ่ม

หัวข้อนี้จะกล่าวถึงการแปลงสมการอนุรักษ์ซึ่งเป็นสมการพาร์เชียลดิฟเฟอเรนเชียลให้เป็นสมการไฟไนต์โวลุ่ม โดยทำการอินทิเกรทบนปริมาตรควบคุมที่กำหนดขึ้น

4.3.1 สมการไฟไนต์โวลุ่มของสมการความต่อเนื่อง

$$\int_l^h \int_s^n \int_w^e \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz = 0 \quad . \tag{4.1}$$

ซึ่งขอบเขตของการอินทิเกรท คือ ตำแหน่งที่ผิวหน้าของปริมาตรควบคุม w, e, s, n, l และ h ดังรูปที่ (4.4a) ซึ่งผลของการอินทิเกรท [Gosman และ Pun [1973]] เป็นดังสมการ (4.2)

$$A_x\left(\rho_e u_e - \rho_w u_w\right) + A_y\left(\rho_n v_n - \rho_s v_s\right) + A_z\left(\rho_h w_h - \rho_l w_l\right) = 0 \tag{4.2}$$

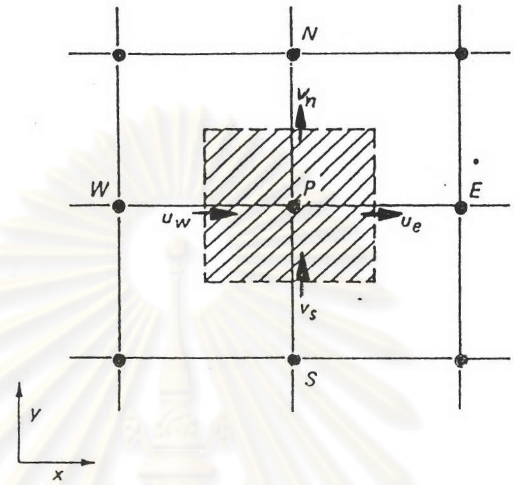
โดย $A_x = \Delta y \Delta z$; $A_y = \Delta x \Delta z$; $A_z = \Delta x \Delta y$ คือ พื้นที่ในแต่ละผิวหน้าของปริมาตรควบคุม ดังรูปที่ (4.4b) .

ในที่นี้ Δx , Δy และ Δz แทน ความกว้าง ความสูง และ ความยาวของขนาดของปริมาตรควบคุม ดังรูปที่ (4.4b)

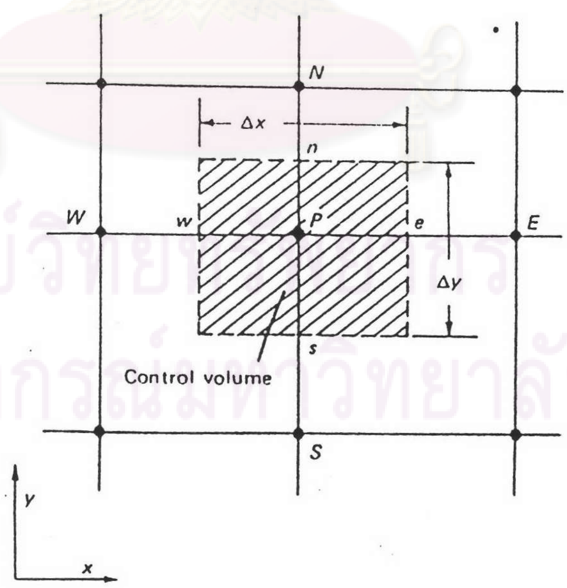
4.3.2 สมการไฟไนต์โวลุ่มของสมการแสดงคุณสมบัติเชิงปริมาณ

$$\underbrace{\int_l^h \int_s^n \left(\rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dy\, dz}_{\text{I}} + \underbrace{\int_l^h \int_w^e \left(\rho v \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx\, dz}_{\text{II}}$$

$$+ \underbrace{\int_s^n \int_w^e \left(\rho w \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dx\, dy}_{\text{III}} + \underbrace{\int_l^h \int_s^n \int_w^e S_\phi \, dx\, dy\, dz}_{\text{IV}} = 0 \quad . \tag{4.3}$$



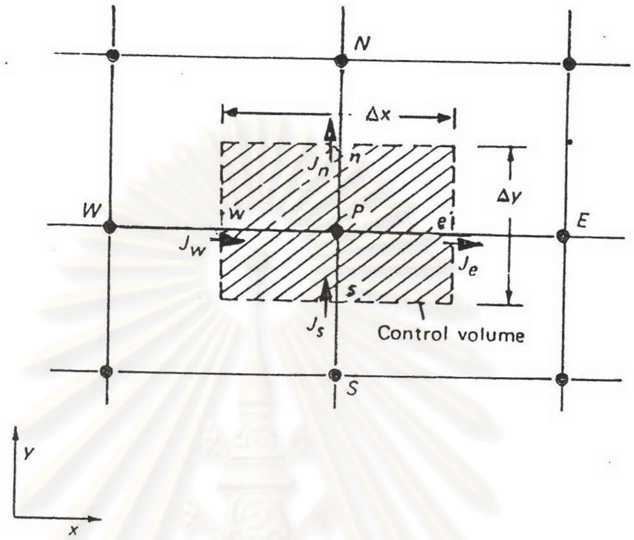
(a)



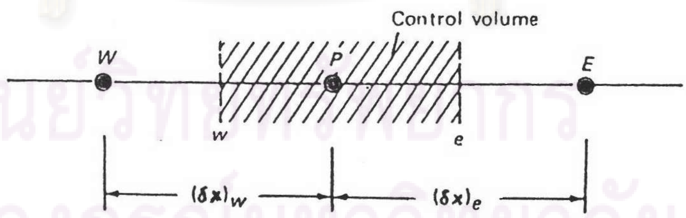
(b)

รูปที่ 4.4 แสดงขอบเขตของปริมาตรควบคุมของสมการไฟไนต์โวลุ่มของสมการความต่อเนื่อง

Patankar [1980]



(a)



(b)

รูปที่ 4.5 แสดงขอบเขตของปริมาตรควบคุมของสมการไฟไนต์โวลุ่มของสมการแสดงคุณสมบัติเชิงปริมาณ
Patankar [1980]

พิจารณาเทอม I, II, III พบว่าผลของการอินทิเกรทที่ได้อยู่ในลักษณะเดียวกัน ดังรูปที่ (4.5a) ที่ซึ่งผลของการอินทิเกรทเทอม I [Gosman และ Pun [1973]] ดังสมการ (4.4)

$$I = J_e - J_w \tag{4.4}$$

โดย
$$J_e = \rho_e u_e \phi_e A_x - \frac{\Gamma_e \phi_e A_x}{\delta x_e} \tag{4.5}$$

$$J_w = \rho_w u_w \phi_w A_x - \frac{\Gamma_w \phi_w A_x}{\delta x_w} \tag{4.6}$$

$$I \approx \rho_e u_e A_x \left[f_e \phi_P + (1 - f_e) \phi_E \right] - \rho_w u_w A_x \left[f_w \phi_W + (1 - f_w) \phi_P \right] \tag{4.7}$$

ซึ่งค่า f เป็นแฟกเตอร์ถ่วงน้ำหนัก (weighting factor) และเทอมในวงเล็บปีกกา [ ] แทนการประมาณคุณสมบัติเชิงปริมาณให้อยู่ที่ตำแหน่งผิวหน้าแต่ละผิวหน้าของปริมาตรควบคุม

สำหรับการหาค่าแฟกเตอร์ถ่วงน้ำหนัก ที่ใช้ในการประมาณคุณสมบัติเชิงปริมาณที่ตำแหน่งที่จุด e ของปริมาตรควบคุม [Runchal [1972]] มีสามแบบ คือ

1. แบบเซ็นทรัลดิฟเฟอเรนท์ (central difference scheme) เป็นการประมาณค่าที่ตำแหน่งที่จุด e ของปริมาตรควบคุม จากค่าที่ตำแหน่งโนดใกล้เคียงทั้งสองข้าง ดังสมการ (4.8)

$$f_e = \frac{1 + 2\,Pe_e^{-1}}{2} \quad \text{เมื่อ} \quad |Pe_e| < 2 \tag{4.8}$$

ซึ่ง Pe_e คือ ตัวเลขเพคเลต (Peclet number) โดยมีนิยามดังสมการ (4.9)

$$Pe_e = \frac{g_e\,\delta x_e}{\Gamma_e} \tag{4.9}$$

โดย g_e คือ ฟลั๊กซ์ของมวล

และ $\Gamma_{\phi e}$ คือ ค่าสัมประสิทธิ์การแพร่ที่ตำแหน่งที่ผิวหน้าที่จุด e ของปริมาตรควบคุม

δx_e คือ ระยะห่างระหว่างโนด E และ P ดังรูปที่ (4.5b)

2. แบบอัพวินดิฟเฟอเรนท์ (upwind difference) เป็นการประมาณค่าที่ตำแหน่งผิวหน้าที่จุด e ของปริมาตรควบคุม จากค่าที่ตำแหน่งโนดข้างหลัง หรือจากค่าที่ตำแหน่งโนดข้างหน้า จากสมการ (4.10) และ (4.11) ตามลำดับ

$$f_e = 0 \qquad \text{เมื่อ} \quad Pe_e > 2 \tag{4.10}$$

$$f_e = 1 \qquad \text{เมื่อ} \quad Pe_e < -2 \tag{4.11}$$

3. แบบไฮบริด (hybrid scheme) ประมาณค่าที่ตำแหน่งผิวหน้าที่จุด e ของปริมาตรควบคุม โดยเป็นการผสมผสานของสองแบบแรก ตามสมการ (4.12) ถึง (4.14) ตามลำดับ

$$f_e = \frac{1 + 2 Pe_e^{-1}}{2} \qquad \text{เมื่อ} \quad \left| Pe_e \right| < 2 \tag{4.12}$$

$$f_e = 0 \qquad \text{เมื่อ} \quad Pe_e > 2 \tag{4.13}$$

$$f_e = 1 \qquad \text{เมื่อ} \quad Pe_e < -2 \tag{4.14}$$

และรายละเอียดจะคล้ายกันสำหรับ f ในทิศทางอื่น

สำหรับเทอม IV สามารถแปลงเขียนให้อยู่ในรูปสมการกึ่งเชิงเส้น (quasi-linear form) ดังสมการ (4.15)

$$IV = S_U^{\phi} + S_p^{\phi} \phi_P \tag{4.15}$$

ซึ่งเทอม S_U^{ϕ} และ S_p^{ϕ} เป็นสัมประสิทธิ์ของสมการกึ่งเชิงเส้น ซึ่งสามารถนำเทอม IV ไปรวมกับเทอมอื่นได้

ดังนั้นสมการ (4.3) สามารถจัดอยู่ในรูปใหม่ได้เป็นสมการ (4.16)

$$C_P^{\phi}\phi_P = \left(C_E^{\phi}\phi_E + C_W^{\phi}\phi_W\right) + \left(C_N^{\phi}\phi_N + C_S^{\phi}\phi_S\right) + \left(C_H^{\phi}\phi_H + C_L^{\phi}\phi_L\right) + S_U^{\phi} \tag{4.16}$$

ซึ่งสัมประสิทธิ์ของสมการไฟไนต์โวลุ่มของสมการแสดงคุณสมบัติเชิงปริมาณ C^{ϕ} นิยามได้ดังสมการ (4.17) ถึง (4.20)

$$C_E{}^{\phi} = A_x g_e\left(f_e - 1\right) \quad ; \quad C_W{}^{\phi} = A_x g_w\left(f_w - 1\right) \qquad (4.17a), (4.17b)$$

$$C_N{}^{\phi} = A_y g_n\left(f_n - 1\right) \quad ; \quad C_S{}^{\phi} = A_y g_s\left(f_s - 1\right) \qquad (4.18a), (4.18b)$$

$$C_H{}^{\phi} = A_z g_h\left(f_h - 1\right) \quad ; \quad C_L{}^{\phi} = A_z g_l\left(f_l - 1\right) \qquad (4.19a), (4.19b)$$

และ $$C_P{}^{\phi} = C_E{}^{\phi} + C_W{}^{\phi} + C_N{}^{\phi} + C_S{}^{\phi} + C_H{}^{\phi} + C_L{}^{\phi} - S_P{}^{\phi} \qquad (4.20)$$

4.3.3 สมการไฟไนต์โวลุ่มของสมการโมเมนตัม

รูปสมการไฟไนต์โวลุ่มของสมการโมเมนตัมแตกต่างจาก รูปสมการไฟไนต์โวลุ่มของสมการแสดงคุณสมบัติเชิงปริมาณ [Patankar และ Spalding [1972]] ดังนี้คือ

1. ตำแหน่งที่เก็บค่าองค์ประกอบของความเร็วในแต่ละทิศทาง เก็บค่าไว้ที่เส้นกริดที่เชื่อมระหว่างโนดสองโนด ดังรูปที่ (4.6a)

2. ตำแหน่งที่เก็บค่าองค์ประกอบของความเร็วในแต่ละทิศทาง อยู่ระหว่างตำแหน่งโนดที่เก็บค่าความดัน

ดังนั้นรูปสมการไฟไนต์โวลุ่มเปลี่ยนไปดังสมการ (4.21)

สมการไฟไนต์โวลุ่มของสมการโมเมนตัมขององค์ประกอบความเร็ว u ในทิศทางแกน x

$$C_P{}^u u_P = \left(C_E{}^u u_E + C_W{}^u u_W\right) + \left(C_N{}^u u_N + C_S{}^u u_S\right) + \left(C_H{}^u u_H + C_L{}^u u_L\right) + S_U{}^u + A_x(p_E - p_P) \qquad (4.21)$$

ซึ่งมีเทอม $A_x(p_E - p_P)$ เพิ่มขึ้นมา คือ ผลต่างของความดันบนปริมาตรควบคุม ดังรูปที่ (4.6b) และ A_x เป็นพื้นที่ที่ผิวหน้าของปริมาตรควบคุมที่มีแรงดันมากระทำ

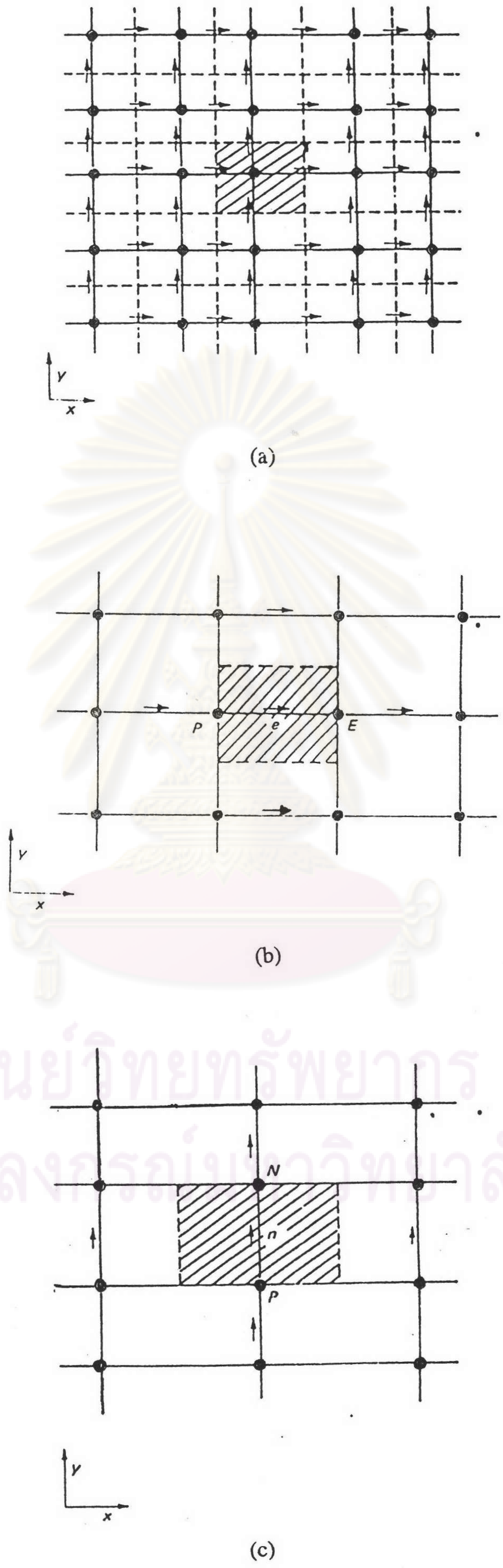
และค่าสัมประสิทธิ์ของสมการไฟไนต์โวลุ่มของสมการโมเมนตัมขององค์ประกอบความเร็ว u ในทิศทางแกน x C^u นิยามได้ดังสมการ (4.22) ถึง (4.25)

$$C_E{}^u = A_x g_e\left(f_e - 1\right) \quad ; \quad C_W{}^u = A_x g_w\left(f_w - 1\right) \qquad (4.22a), (4.22b)$$

$$C_N{}^u = A_y g_n\left(f_n - 1\right) \quad ; \quad C_S{}^u = A_y g_s\left(f_s - 1\right) \qquad (4.23a), (4.23b)$$

$$C_H{}^u = A_z g_h\left(f_h - 1\right) \quad ; \quad C_L{}^u = A_z g_l\left(f_l - 1\right) \qquad (4.24a), (4.24b)$$

และ $$C_P{}^u = C_E{}^u + C_W{}^u + C_N{}^u + C_S{}^u + C_H{}^u + C_L{}^u - S_P{}^u \qquad (4.25)$$



(a)

(b)

(c)

รูปที่ 4.6 แสดงขอบเขตของปริมาตรควบคุมของสมการไฟไนต์โวลุ่มของสมการโมเมนตัม

Patankar [1980]

สมการไฟไนต์โวลุ่มของสมการโมเมนตัมขององค์ประกอบความเร็ว v ในทิศทางแกน y

$$C_P{}^v v_P = \left(C_E{}^v v_E + C_W{}^v v_W\right) + \left(C_N{}^v v_N + C_S{}^v v_S\right) + \left(C_H{}^v v_H + C_L{}^v v_L\right) + S_U{}^v + A_y(p_N - p_P) \qquad (4.26)$$

ซึ่งมีเทอม $A_y(p_N - p_P)$ เพิ่มขึ้นมา คือ ผลต่างของความดันบนปริมาตรควบคุม ดังรูปที่ (4.6c) และ A_y เป็นพื้นที่ที่ผิวหน้าของปริมาตรควบคุมซึ่งแรงดันมากระทำ

และสมการไฟไนต์โวลุ่มของสมการโมเมนตัมขององค์ประกอบความเร็ว w ในทิศทางแกน z

$$C_P{}^w w_P = \left(C_E{}^w w_E + C_W{}^w w_W\right) + \left(C_N{}^w w_N + C_S{}^w w_S\right) + \left(C_H{}^w w_H + C_L{}^w w_L\right) + S_U{}^w + A_z(p_H - p_P) \qquad (4.27)$$

ซึ่งมีเทอม $A_z(p_H - p_P)$ เพิ่มขึ้นมา คือ ผลต่างของความดันบนปริมาตรควบคุม และ A_z เป็นพื้นที่ที่ผิวหน้าของปริมาตรควบคุมซึ่งแรงดันมากระทำ

4.3.4 สมการใช้ปรับปรุงค่าความดัน (pressure correction equation)

ในการแก้สมการอนุรักษ์โมเมนตัม เพื่อที่จะหาคำตอบขององค์ประกอบของความเร็วในแต่ละทิศทางและหาค่าของความดันภายในขอบเขตที่ศึกษานั้น สามารถทำได้โดยสมมติค่าของความดันแล้วแทนลงในสมการอนุรักษ์โมเมนตัม เมื่อแก้สมการก็จะได้ค่าขององค์ประกอบความเร็ว หลังจากนั้นนำค่าองค์ประกอบเหล่านั้นไปแทนค่าในสมการความต่อเนื่อง ถ้าหาค่าขององค์ประกอบของความเร็วที่ได้จากการสมมติค่าความดันนั้นถูกต้อง เมื่อนำไปแทนค่าสมการความต่อเนื่องก็จะทำให้สมการเป็นจริง ค่าความดันที่สมมตินี้ก็จะเป็นคำตอบของสมการ แต่ถ้าสมการไม่เป็นจริง จะต้องมีการสมมติค่าความดันใหม่ แล้วจึงทำซ้ำดังอธิบายข้างต้นจนกระทั่งได้ค่าขององค์ประกอบความเร็วที่ทำให้ สมการความต่อเนื่องเป็นจริง ดังนั้น เพื่อปรับปรุงค่าความดันให้ถูกต้องจึงต้องมีสมการเพิ่มเติมขึ้นมา แล้วจึงใช้ความดันที่ได้รับการปรับปรุง แล้วแทนลงไปในสมการอนุรักษ์โมเมนตัม เพื่อหาคำตอบของสมการต่อไป

Patankar และ Spalding [1972] ได้สร้างลำดับขั้นตอนการแก้ปัญหา (Algorithm) ขึ้นมา ชื่อว่า SIMPLE (Semi-Implicit Pressure Linked Algorithm) โดยเริ่มจากการเดาค่าแรกของค่าความดัน p^* ในสมการโมเมนตัม เพื่อหาค่าความเร็ว u^*, v^* และ w^* แล้วปรับปรุงค่าความดัน โดยใช้ค่าที่ใช้ปรับปรุงค่าความดัน p' และปรับปรุงค่าความเร็ว โดยใช้ค่าที่ใช้ปรับปรุงค่าความเร็ว u', v' และ w' ดังสมการ (4.28) ถึง (4.31)

$$p = p^* + p' \tag{4.28}$$
$$u = u^* + u' \tag{4.29}$$
$$v = v^* + v' \tag{4.30}$$
$$w = w^* + w' \tag{4.31}$$

และสมมติให้ค่าที่ใช้ปรับปรุงค่าความเร็ว u' , v' และ w' มีความเชื่อมโยงกับค่าที่ใช้ปรับปรุงค่าความดัน p' ดังสมการ (4.32) ถึง (4.34)

$$u'_e = d_e{}^u(p'_P - p'_E) \tag{4.32}$$
$$v'_n = d_n{}^v(p'_P - p'_N) \tag{4.33}$$
$$w'_h = d_h{}^w(p'_P - p'_H) \tag{4.34}$$

โดยที่
$$d_e{}^u = \frac{A_x}{C_e{}^u} \tag{4.35}$$
$$d_n{}^v = \frac{A_y}{C_n{}^v} \tag{4.36}$$
$$d_h{}^w = \frac{A_z}{C_h{}^w} \tag{4.37}$$

แทนค่าที่ใช้ปรับปรุงค่าความเร็ว u', v' และ w' ลงในสมการ (4.29) ถึง (4.31) ได้สมการรูปแบบใหม่เป็นดังสมการ (4.38) ถึง (4.40)

$$u_e = u_e{}^* + d_e{}^u(p_P{}' - p_E{}') \tag{4.38}$$
$$v_n = v_n{}^* + d_n{}^v(p_P{}' - p_N{}') \tag{4.39}$$
$$w_h = w_h{}^* + d_e{}^w(p_P{}' - p_H{}') \tag{4.40}$$

และแทนค่าความเร็วที่ได้รับการปรับปรุงแล้ว u , v และ w ลงในสมการ (4.2) ได้สมการใช้ปรับปรุงค่าความดัน ดังสมการ (4.41)

$$C_P{}^p p_P{}' = \left(C_E{}^p p_E{}' + C_W{}^p p_W{}'\right) + \left(C_N{}^p p_N{}' + C_S{}^p p_S{}'\right) + \left(C_H{}^p p_H{}' + C_L{}^p p_L{}'\right) + S_U{}^p \tag{4.41}$$

ซึ่งสัมประสิทธิ์ของสมการใช้ปรับปรุงค่าความดัน C^p นิยามได้ดังสมการ (4.42) ถึง (4.46)

$$C_E{}^p = \rho_e A_x d_e{}^u \quad ; \quad C_W{}^p = \rho_w A_x d_w{}^u \qquad (4.42a), (4.42b)$$

$$C_N{}^p = \rho_n A_y d_n{}^v \quad ; \quad C_S{}^p = \rho_s A_y d_s{}^v \qquad (4.43a), (4.43b)$$

$$C_H{}^p = \rho_h A_z d_h{}^w \quad ; \quad C_L{}^p = \rho_l A_z d_l{}^w \qquad (4.44a), (4.44b)$$

$$C_P{}^p = C_E{}^p + C_W{}^p + C_N{}^p + C_S{}^p + C_H{}^p + C_L{}^p \quad . \qquad (4.45)$$

และ $$S_U{}^p = \rho_w u_w{}^* A_x - \rho_e u_e{}^* A_x + \rho_n v_n{}^* A_y - \rho_s v_s{}^* A_y + \rho_h w_h{}^* A_z - \rho_l w_l{}^* A_z \qquad (4.46)$$

โดยเมื่อเทอม S_U^P ในสมการ (4.46) เข้าใกล้ศูนย์ จะทำให้ค่า p_P' มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ทำให้เมื่อแทนค่าความเร็วลงในสมการความต่อเนื่องแล้วทำให้สมการเป็นจริง

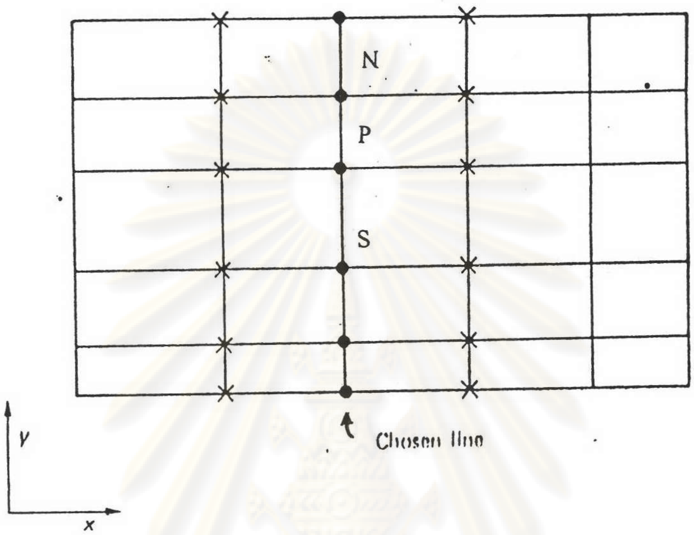
4.4 <u>วิธีการแก้สมการไฟไนต์โวลุ่ม</u>

สมการ (4.16), (4.21), (4.26), (4.27) และ (4.41) เป็นตัวแทนสมการไฟไนต์โวลุ่มของตัวแปร k, ε, T, u, v, w และ p' ในปริมาตรควบคุมหนึ่งโนด ซึ่งอยู่ในรูปสมการพีชคณิต (algebraic equation) เหมือนกัน จึงสามารถแก้สมการหาคำตอบด้วยวิธีการเดียวกันได้

สมมติให้พิจารณา สมการไฟไนต์โวลุ่มของสมการแสดงคุณสมบัติเชิงปริมาณ ที่มีปริมาตรควบคุมอยู่บนเส้นกริดเส้นหนึ่ง (ในทิศทาง y) ในปริมาตรควบคุมหนึ่งระนาบ ดังรูปที่ (4.7) สามารถเขียนสมการไฟไนต์โวลุ่มอยู่ในรูปใหม่ [Patankar [1980]] ดังสมการ (4.47)

$$C_P{}^\phi \phi_P = C_N{}^\phi \phi_N + C_S{}^\phi \phi_S + (S_U{}^\phi)' \qquad (4.47)$$

ซึ่งเทอมอื่นๆที่อยู่ใกล้เคียงกับเส้นกริดนี้ แฝงรวมกันอยู่ในเทอม $(S_U{}^\phi)'$ โดยสามารถแก้โดยใช้วิธีการกำจัดแบบเกาส์ (Guassian elimination procedure) หรืออีกชื่อหนึ่งว่า วิธี TDMA (Tridiagonal Matrix Algorithm) เพื่อหาค่าคุณสมบัติเชิงปริมาณตามเส้นกริดนั้น



รูปที่ 4.7 แสดงการแก้สมการไฟไนต์โวลุ่มเป็นเส้นๆ Patankar [1980]

TDMA

สมการ (4.47) สามารถเขียนในรูปใหม่โดยใช้วิธี TDMA หาคำตอบได้ [Patankar [1980]] ดังสมการ (4.48)

$$A_i\phi_i = B_i\phi_{i+1} + C_i\phi_{i-1} + D_i \tag{4.48}$$

ซึ่ง i หมายถึงตำแหน่งของต่างๆในเส้นกริด A_i , B_i , C_i และ D_i เป็นค่าสัมประสิทธิ์ ซึ่งมีความหมายเดียวกับสมการ (4.47) โดยให้ i อยู่ในช่วงตั้งแต่ 2 ถึง n-1

โดยที่ตำแหน่ง i = 2 , $C_2 = 0$ สามารถแทนค่า ϕ_2 อยู่ในรูป ϕ_3 ส่วนที่ตำแหน่ง i = 3 สามารถแทนค่า ϕ_3 อยู่ในรูป ϕ_4 และใช้วิธีแทนค่าไปข้างหน้า (forward substitution) ต่อไปเรื่อยๆ จนถึงที่ตำแหน่ง i = n -1 , $B_{n-1} = 0$ สามารถแทนค่า ϕ_{n-2} อยู่ในรูป ϕ_{n-1} และสามารถจัดสมการ (4.48) อยู่ในรูปใหม่เป็นสมการ (4.49)

$$\phi_i = A_i'\phi_{i+1} + B_i \tag{4.49}$$

$$A_i' = \frac{A_i}{D_i - B_iA_{i-1}'} \tag{4.50}$$

$$B_i' = \frac{C_i + B_{i+1}'B_i}{D_i - B_iA_{i-1}'} \tag{4.51}$$

ดังนั้นสามารถหาค่า ϕ ทั้งเส้นกริดได้ โดยใช้วิธีแทนค่าย้อนกลับ (back substitution) โดยการเดาค่า ϕ_{n-1} ค่าแรกลงไป ที่ i = n-1 ทำให้ทราบค่า ϕ_{n-2} ที่ i = n-2 และทราบค่า ϕ_{n-3} ที่ i = n-3 อย่างนี้ต่อไปเรื่อยๆจนถึง i = 2 (ส่วนค่า ϕ_1 และ ϕ_n แฝงอยู่ในเทอม D_i)

4.5 ลำดับขั้นตอนในการหาคำตอบของชุดสมการที่อธิบายปรากฏการณ์การไหลของของไหล

[Patankar [1980]]

1. หาค่า Γ_ϕ และ S_ϕ ของตัวแปรแสดงคุณสมบัติเชิงปริมาณ จากคุณสมบัติทางกายภาพของของไหล และจากแบบจำลองอธิบายระบบที่มีการไหลแบบปั่นป่วน

2. พิจารณาระนาบเพียงระนาบเดียว แล้วคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ในสมการไฟไนต์โวลุ่มของสมการแสดงคุณสมบัติเชิงปริมาณในระนาบนั้น จากสมการ (4.17) ถึง (4.20) และใช้วิธี TDMA หาค่าคุณสมบัติเชิงปริมาณในเส้นกริดทีละเส้น จากสมการ (4.48) จนครบทุกเส้นในระนาบนั้น

3. พิจารณาระนาบถัดไป แล้วทำเหมือนข้อ 2 จนครบทุกระนาบในสามมิติ

4. สำหรับสมการไฟไนต์โวลุ่มของสมการโมเมนตัม ดำเนินการตั้งแต่ข้อที่ 1 ถึง 3 เช่นกัน โดยเดาค่าความดัน p^* ค่าแรก เพื่อหาค่าความเร็ว u^*, v^* และ w^* จากสมการ (4.21) , (4.26) และ (4.27) และหาค่าที่ใช้ปรับปรุงค่าความดัน p' จากสมการ (4.41)

5. ปรับปรุงค่าความดัน โดยใช้ค่าที่ใช้ปรับปรุงค่าความดัน p' แทนลงในสมการ (4.28) และปรับปรุงค่าความเร็ว โดยใช้ค่าที่ใช้ปรับปรุงค่าความเร็ว u', v' และ w' แทนลงในสมการ (4.29) ถึง (4.31)

6. เมื่อดำเนินการตั้งแต่ขั้นที่ 1 ถึง 5 ถือว่าเป็นการคำนวณครบ 1 รอบ และคำตอบที่ได้จะนำมาเป็นค่าที่ใช้เริ่มต้นในการทำซ้ำใหม่ในรอบต่อไป และทำซ้ำไปเรื่อยๆ จนกระทั่งสิ้นสุดการทำซ้ำ เมื่อเป็นไปตามเงื่อนไขของการเข้าสู่คำตอบ

4.6 เงื่อนไขของการเข้าสู่คำตอบ

เงื่อนไขของการเข้าสู่คำตอบ คือ ค่าของตัวแปร $u, v, w, p', k, \varepsilon$ และ T มีการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก เมื่อเทียบกับค่าของตัวมันเองที่รอบการคำนวณก่อนหน้าหนึ่งรอบ โดยมีเปอร์เซนต์น้อยกว่า 0.1%