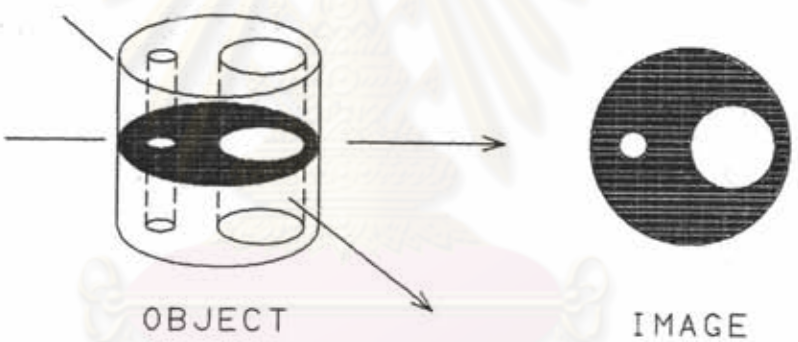
บทที่ 2

# การสร้างภาพตัดขวาง

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## 2.1 หลักการสร้างภาพตัดขวาง

การสร้างภาพของเครื่องซีที ซึ่งมีลักษณะเป็นภาพตัดขวางสองมิติเกิดจากการจำแนกสัมประสิทธิ์การลดทอนความเข้มรังสีของเนื้อวัสดุ จากการส่งผ่านรังสีผ่านระนาบใดระนาบหนึ่งในลักษณะตัดขวางที่ได้จากการวัดรังสีรอบทิศของวัสดุ เมื่อนำข้อมูลมาวิเคราะห์หาตำแหน่งของค่าสัมประสิทธิ์ของการลดทอนความเข้มรังสี ด้วยวิธีการคำนวณทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมจะได้ภาพตัดขวางของวัสดุนั้น




รูปที่ 2.1 แสดงระนาบตัดขวางของชิ้นงาน

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ทฤษฎีการสร้างภาพตัดขวางอาศัยความสัมพันธ์ของข้อมูลสัมประสิทธิ์การลดทอนความเข้มรังสีส่งผ่านตามแนวและมุมบนระนาบของวัสดุ แล้วนำไปสร้างภาพตัดขวางในลักษณะแบ็กโพรเจกชันดังในรูปที่ 2.1 สามารถบ่งบอกรายละเอียดตำแหน่งของช่องภายในวัสดุได้ ในขณะที่ภาพถ่ายรังสีแบบฉายผ่านไม่สามารถให้รายละเอียดนี้ได้

## 2.2 สัมประสิทธิ์การลดทอนความเข้มรังสีของวัตถุ

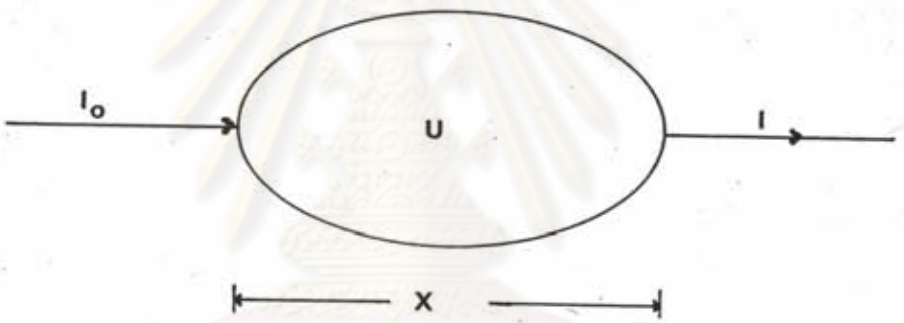
จากรูป 2.2 ถ้าฉายรังสีพลังงานเดี่ยวที่มีความเข้ม Io ผ่านเข้าไปในวัตถุที่เป็นสารเนื้อเดียวกันตลอด มีความหนา x รังสีที่ทะลุออกมาจากวัตถุมีความเข้มลดลงเป็น I ความสัมพันธ์

$$I = Io \exp(-\mu x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

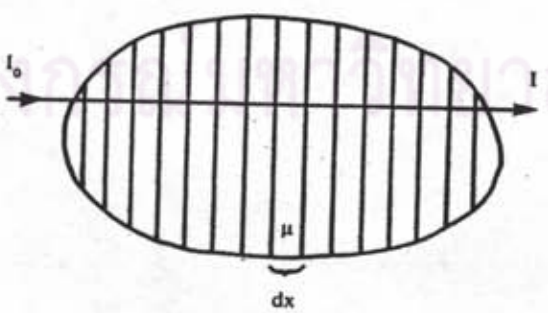
เมื่อ $\mu$ คือ สัมประสิทธิ์การลดทอนความเข้มรังสี

หากวัตถุมีเนื้อสารหลายชนิดประกอบกันเป็นก้อน ค่าสัมประสิทธิ์การลดทอนความเข้มรังสีจะพิจารณาโดยการแบ่งวัตถุออกเป็นแถบเล็กๆ ที่มีความหนา dx เท่ากันจำนวนมาก ดังรูปที่ 2.3 ความหนา dx นั้นเล็กมากจนเสมือนหนึ่งในแถบเล็ก ๆ นั้นมีสารเพียงเนื้อเดียว ความสัมพันธ์ระหว่าง Io,I,$\mu$ และความหนาของตัวกลาง x จะเป็นไปตามสมการ (2)

$$I = Io \exp[\int -\mu dx] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$




รูปที่ 2.2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง Io,I และความหนา X ของวัตถุที่เป็นสารเนื้อเดียวตลอด



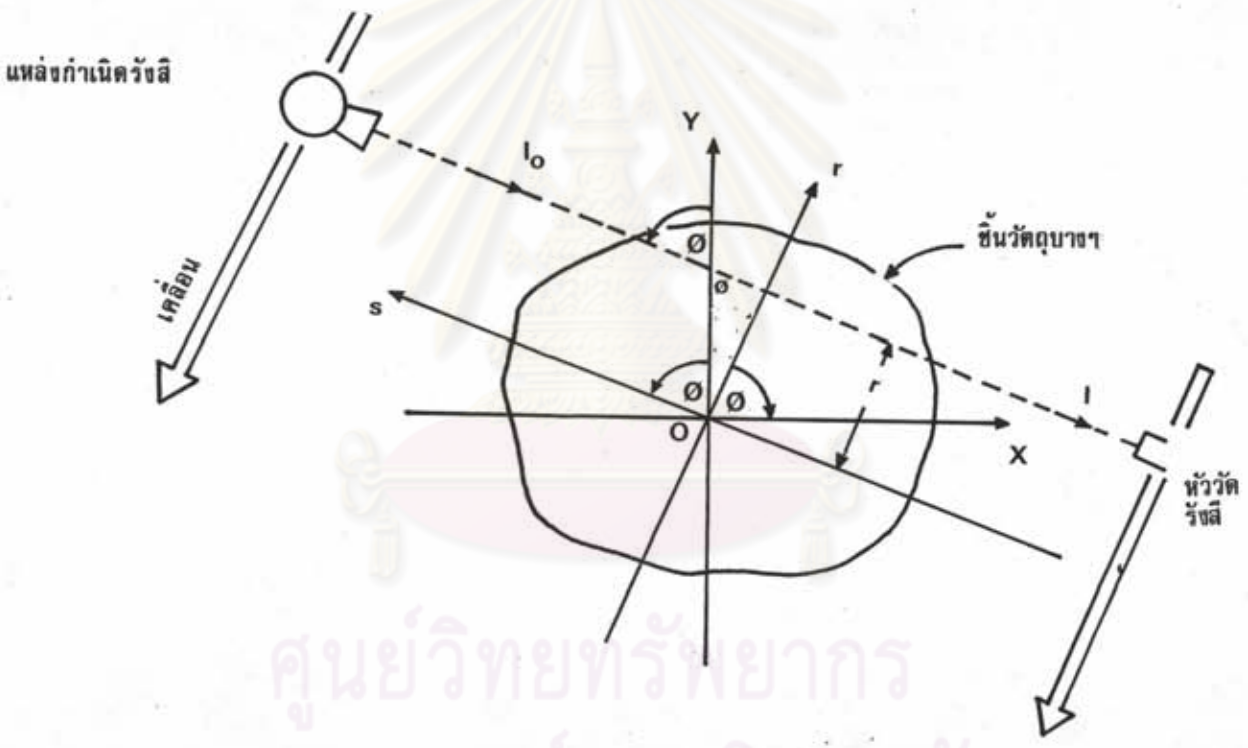

รูปที่ 2.3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง Io,I,$\mu$ และความหนาของตัวกลางที่มีเนื้อสารหลายชนิด

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2.3 นิยามของเรย์ซัม (Ray-Sum)

จากรูปที่ 2.4 ถ้ากำหนดให้วัตถุชิ้นบาง ๆ วางอยู่บนระนาบ x,y ทุก ๆ จุดบนระนาบนี้ อธิบายด้วยโคออดิเนต (x,y) และลำรังสีขนาดเล็กพุ่งออกจากแหล่งกำเนิดรังสีทำมุม $\phi$ กับแกน y เพื่อความสะดวกจะอธิบายด้วยโคออดิเนต (r,s) ของระนาบการเคลื่อนที่ของต้นกำเนิดรังสีและหัววัดรังสี ลำรังสีแต่ละลำอธิบายได้ด้วยโคออดิเนต $(r,\phi)$ ความสัมพันธ์ระหว่าง Io และ I สามารถเขียนแทนได้ด้วยสมการ (3)

$$I = Io \exp\left[-\int_{r,\phi} \mu(x,y)ds\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$



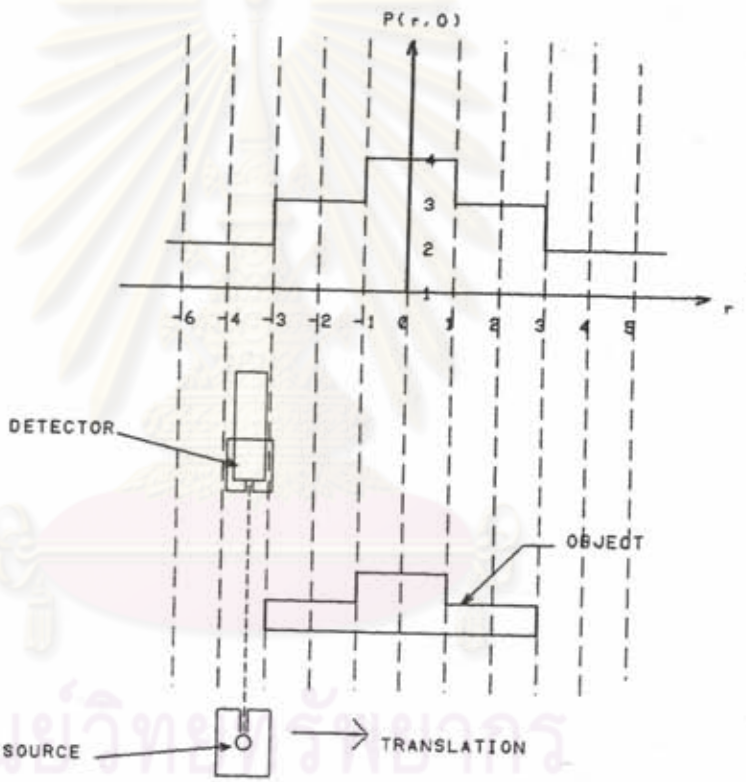

รูปที่ 2.4 แสดงเรขาคณิตของรังสีที่เดินทางผ่านวัตถุชิ้นบาง ๆ การกำหนดตำแหน่งทุก ๆ จุดบนระนาบที่ลำรังสีผ่าน อธิบายด้วยมุม $\phi$ วัดเทียบกับแกน y

จากสมการ (3) เทอมที่อยู่ในวงเล็บ หมายถึงการอินทิเกรตตามเส้นทางที่ถูกกำหนดด้วยโคออร์ดิเนต (r,s) สำหรับมุม $\phi$ มุมใดมุมหนึ่งเท่านั้น สมการ (3) สามารถเขียนได้อีกรูปหนึ่งคือ

$$P(r,\phi) = -\ln(I/Io) = \int_{r,\phi} \mu(x,y)ds \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

$P(r,\phi)$ เป็นเทอมที่กำหนดขึ้นมาเรียกว่าเรย์ซัม (Ray-Sum) เป็นค่าที่สามารถวัดได้จากการทดลองที่มุม $\phi$ ใดๆ การเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงเพื่อรับข้อมูลวัดรังสี (Translation) เป็นการเปลี่ยนค่า r จะได้ชุดข้อมูลที่สมบูรณ์ของเรย์ซัมสำหรับมุม $\phi$ นั้น ชุดข้อมูลดังกล่าวนี้เรียกว่าโพรไฟล์ (Profile) ดังรูปที่ 2.5 ความสัมพันธ์ระหว่างโคออดิเนต (x,y) และ $(r,\phi)$ เป็นไปตามสมการดังนี้

$$r = x\cos\phi + y\sin\phi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

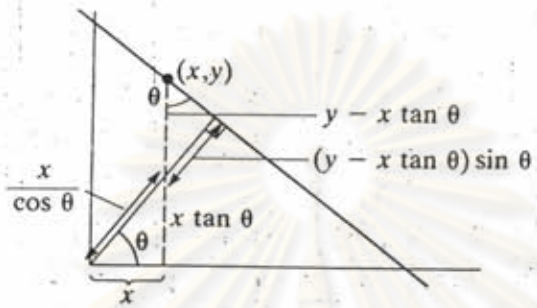



รูปที่ 2.5 การเคลื่อนที่ตัดในแนวเส้นตรงของลำรังสีผ่านระนาบของวัตถุที่มุม $\phi$ ใด ๆ หัววัดรังสีจะบันทึกข้อมูลไว้ 1 โพรไฟล์

ค่าของ $\mu(x,y)$ จะบ่งบอกถึงความหนาแน่นของตัวกลาง ถ้าค่า $\mu(x,y)$ มีค่าสูง แสดงว่าตัวกลางนั้นมีความหนาแน่นสูงลดทอนความเข้มของรังสีได้ดี $\mu(x,y)$ ที่มีค่าต่ำแสดงว่าตัวกลางนั้นมีความหนาแน่นต่ำลดทอนความเข้มของรังสีได้น้อย ดังนั้นในระนาบใด ๆ ของวัตถุที่สนใจ ถ้าคำนวณค่า $\mu(x,y)$ บนทุก ๆ จุดในระนาบนั้นได้ ก็สามารถนำค่า $\mu(x,y)$ มาเรียง

กันในตำแหน่งที่สอดคล้องกับตำแหน่งบนระนาบจริงของภาคตัดขวางวัตถุ และนำมาสร้างภาพได้ ดังนั้น ทฤษฎีการสร้างภาพ (Image reconstruction) จึงมุ่งหาคำตอบจากสมการ (4)

## 2.4 การหาระยะทางที่สั้นที่สุดจากจุดกำเนิด




$$r = \frac{x}{\cos\theta} + (y - x\tan\theta)\sin\theta$$
$$= \frac{x}{\cos\theta} + y\sin\theta - x\,\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$
$$= x\left(\frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}\right) + y\sin\theta = x\cos\theta + y\sin\theta$$

รูปที่ 2.6 แสดงการหาระยะทางสั้นที่สุดจากจุดกำเนิดไปยังโลกัส (Locus) ของจุด x,y

จากรูปที่ 2.6 บนระนาบโคออร์ดิเนต x,y จุด (x,y) ใดๆ จะมีเส้นตรงจำนวนมากที่มีความชันต่าง ๆ ผ่านจุดนั้นอยู่ เพื่อความสะดวกกำหนดให้ AB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่งที่ผ่านจุด (x,y) ระยะทางสั้นที่สุดไปถึงโลกัสของจุดใด ๆ บนเส้นตรง AB คือ เส้นตรงที่ลากไปตั้งฉากกับเส้นตรง AB และทำมุม $\phi$ กับแกน x

จากรูปเรขาคณิตดังกล่าวเส้นตรงที่สั้นที่สุด คือ r ซึ่งจะมีความสัมพันธ์ดังสมการ

$$r = x\cos\phi + y\sin\phi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

## 2.5 การสร้างภาพด้วยวิธี Back-projection

ถ้าให้ลำรังสีเคลื่อนที่ตัดในแนวเส้นตรงไปในวัตถุที่เราสนใจครั้งละหนึ่งโพรไฟล์ ซึ่งประกอบด้วยเรย์ซัม หรือ $P(r,\phi)$ จำนวนหนึ่ง ถ้าเปลี่ยนมุมรังสีไปจากแนวเดิมครั้งละ $\Delta$ องศา จนครบ 180 องศา จะได้โพรไฟล์ทั้งหมด $180/\Delta$ โพรไฟล์ การสร้างภาพตัดขวางเป็นการนำค่าโพรไฟล์ที่วัดได้ไปคำนวณสร้างภาพ

การคำนวณสร้างภาพตามวิธีการนี้ ไม่ได้คำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์การลดทอนความเข้มรังสีในระนาบที่สนใจ แต่เป็นการจำแนกค่าที่สอดคล้องกับสัมประสิทธิ์การลดทอนพลังงาน คือ $\mu 1(x,y)$ แทนโดยที่

$$\mu 1(x,y) = \sum_{i=1}^{m} P(r,\phi) \Delta\phi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

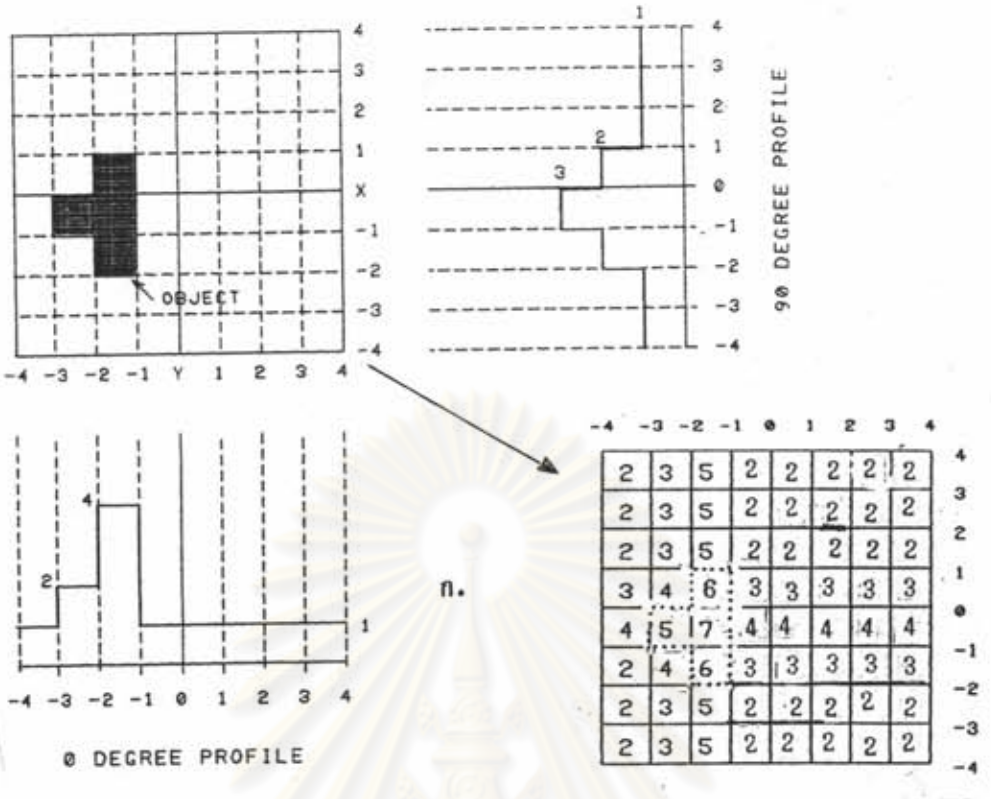
ในการสร้างภาพนั้นต้องนำค่า $\mu 1(x,y)$ มาเรียงตามตำแหน่ง x,y ที่สอดคล้องกันกับค่า r ที่มุม $\phi$ จากสมการที่ (6) สามารถจะหาความสัมพันธ์ระหว่าง x,y,r และ $\phi$ ได้ดังนี้

$$r_i = x \cos \phi_i + y \sin \phi_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

จากสมการที่ (7) และ (8) m คือจำนวนโพรไฟล์ทั้งหมด $\phi$ คือ มุมของโพรไฟล์นั้น $\Delta\phi$ คือ ระยะห่างเชิงมุมระหว่างโพรไฟล์มีค่าเท่ากับ $\pi/m$

การสร้างภาพตามสมการที่ (7) และ (8) เกิดจากการนำเอาค่า $P(r,\phi)$ ที่มี r และ $\phi$ เหมาะสม มารวมกันตรงตำแหน่งโคออดิเนต (x,y) ใด ๆ บนระนาบ xy มาสร้างภาพ ดังแสดงในรูปที่ 2.7 ซึ่งจะเลือกแสดงด้วยโพรไฟล์เพียงสองมุม คือ ที่มุม 0 องศา กับมุม 90 องศาเท่านั้น เมื่อนำโพรไฟล์ทั้งสองมาซ้อนกันอย่างเหมาะสมตามตำแหน่งที่สอดคล้องกับค่า P(r,0) และ P(r,90) ค่าที่ได้จากการจำแนกด้วยสมการจะทับกันและเสริมกันด้วยค่าที่สูงขึ้น ทำให้ได้ภาพตัดขวางของวัตถุนั้นปรากฏขึ้น ถ้าหากเพิ่มจำนวนโพรไฟล์แล้วภาพที่ได้จะชัดเจนมากขึ้นกว่าการใช้โพรไฟล์เพียงสองมุม

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย




รูปที่ 2.7 แสดงการเกิดภาพตามวิธีการ Back - Projection

ก. โพรไฟล์ของวัตถุที่บันทึกได้ในสองทิศทาง คือ 0 องศา และ 90 องศา

ข. โพรไฟล์ ในรูป ก. นำมาซ้อนกันอย่างเหมาะสมเพื่อนำไปสร้างภาพทำให้เห็นเป็นภาพของวัตถุขึ้น

## 2.6 Convolution Back Projection

การสร้างภาพด้วยวิธี Back-projection มีข้อเสียคือเกิด Star artifact และปัญหา Blurring ซึ่งแปรผกผันกับ s เมื่อ s คือระยะห่างจาก Source กับ Detector จึงต้องใช้สมการทางคณิตศาสตร์เข้ามาช่วย

สมการทางคณิตศาสตร์ที่นิยมใช้กันได้แก่ Convolution function หรือ Filter function มีวิธีการคำนวณดังนี้

$$Q(r) = K_m \pi r \sin(2\pi K_m r) - \sin^2(\pi K_m r) \quad \ldots\ldots (9)$$

$Q(r)$ คือ convolution function

ให้ $P^{*}(r,\phi) = P(r,\phi)\, Q(r)$ ..... (10)

โดย $K_m$ = ความถี่สูงสุด (maximum spatial frequency) ของภาพที่จะแสดงออกได้

แทนค่าสมการ (9) ลงใน (10) และใช้ Convolution theorem

$$P^{*}(r,\phi) = K_m P(r,\phi) - \int_{r} P(r,\phi) \sin^2 (\pi K_m (r-r')dr' \quad .... (11)$$

$$\mu(x,y) = \int P^{*}(r,\phi)d\phi = \sum_{i=1}^{m} P^{*}(r,\phi)\, \Delta\phi \quad ..... (12)$$

เมื่อนำค่า $\mu(x,y)$ จากสมการ (12) ไปสร้างภาพจะได้คุณภาพที่ดีขึ้น ซึ่งวิธีการสร้างภาพวิธีนี้จะเรียกว่า Convolution back projection

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย