ระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์แบบขนาน

นายธนาพงษ์ ตัน

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์ ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2551

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

HALF TERNARY NUMBER SYSTEM AND PARALLEL ARITHMETIC OPERATION

Mr. Thanapong Tan

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science Program in Computer Science

Department of Computer Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2008

Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์แบบขนาน
โดย	นายธนาพงษ์ ตัน
สาขาวิชา	วิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(รองศาสตราจารย์ ดร. บุญสม เลิศหิรัญวงศ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อาทิตย์ ทองทักษ์)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์)

.... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เศรษฐา ปานงาม)

.... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อานนท์ รุ่งสว่าง)

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ธนาพงษ์ ตัน : ระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์แบบขนาน. (HALF TERNARY NUMBER SYSTEM AND PARALLEL ARITHMETIC OPERATION) อ. ที่ปรึกษา: ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์, 61 หน้า.

ระบบจำนวนอตรรกยะของเบิร์กแมนได้นำเสนอมุมมองใหม่ในการใช้เศษส่วนทองคำเป็นฐานของระบบจำนวนซึ่งมีความพิเศษในการลดสายการทดทำให้การคำนวณนั้นมีความเร็วสูงขึ้น แต่ด้วยความยากในการแปลงผันและรูปแบบการคำนวณทำให้ไม่เป็นที่นิยม ต่อมาได้มีการพัฒนาขึ้นมาเป็นระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมอทริกคอลซึ่งมีลักษณะพิเศษของการสะท้อน แต่การคำนวณในระบบจำนวนนั้นยังเป็นแบบลำดับอยู่ โดยในงานวิจัยนี้ได้ทำการพัฒนาระบบจำนวนนี้ให้มีประสิทธิภาพขึ้นในหลายด้านได้แก่ การนิยามระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ ที่ลดขนาดของรูปแบบแทนจำนวนลง พร้อมทั้งสร้างอัลกอริทึมการหารูปแบบแทนจำนวนจากจำนวนเต็ม และที่สำคัญคือสร้างอัลกอริทึมการคำนวณการบวก การลบและการคูณแบบขนาน ซึ่งมีแนวคิดมาจากการประยุกต์ใช้สถาปัตยกรรมแบบทำควบคู่กัน ทำให้สามารถเพิ่มความเร็วในการคำนวณของการบวก การลบและการคูณ

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา: วิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต: ธนาพงษ์ ตัน
สาขาวิชา: วิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: Atthasit Surarerks
ปีการศึกษา: 2551

4870315021 : MAJOR COMPUTER SCIENCE
KEY WORD: NUMBER SYSTEM / GOLDEN RATIO / PARALLEL ARITHMETIC

THANAPONG TAN : HALF TERNARY NUMBER SYSTEM AND PARALLEL ARITHMETIC OPERATION. THESIS PRINCIPAL ADVISOR : ASST.PROF. ATHASIT SURARERKS, Ph.D., 61 pp.

Bergman has proposed an irrational number system where the golden ratio is used to be the base. This number system is able to decrease carry propagation chain which enables faster computational speed. But there still has difficulty in conversion algorithm and arithmetic operations. The system has been improved by introducing a symmetrical concept to the representation; this new system is called ternary mirror symmetrical number system. This number system has an important characteristic called "mirror property". In this thesis we are interested in several concepts in ternary mirror symmetrical such as defining a novel number system "half ternary number system", proposing a conversion algorithm, and parallel addition, subtraction and multiplication problems. A modified version of on-the-fly architecture is applied to the system in order to perform addition, subtraction and multiplication in parallel manner. Theoretical results show that the complexity of addition, subtraction and multiplication can be decreased.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Department: Computer Engineering
Field of study: Computer Science
Academic year: 2008

Student's signature: ....
Thesis principal advisor's signature: ....

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยความอนุเคราะห์ คำแนะนำและความช่วยเหลือจากผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งเป็นผู้ให้แนวทางและคำปรึกษา ตลอดจนเป็นผู้ตรวจทานแก้ไข จนทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ขอขอบพระคุณท่าน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ เป็นอย่างสูงที่ได้ให้ความช่วยเหลือและคำแนะนำแก่ผู้วิจัยมาโดยตลอด

ขอขอบพระคุณ คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อาทิตย์ ทองทักษ์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เศรษฐา ปานงาม และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อานนท์ รุ่งสว่าง ที่ได้กรุณาสละเวลาให้คำแนะนำในการแก้ไขวิทยานิพนธ์ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น วิทยานิพนธ์นี้ไม่อาจสำเร็จได้หากไม่ได้รับความกรุณาจากทุกท่าน

สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณ บิดา มารดา น้องสาว มิตรสหาย ที่เป็นกำลังใจ ช่วยเหลือ ให้ความสนับสนุนแก่ผู้วิจัยในทุก ๆ ด้าน จนผู้วิจัยสามารถทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้สำเร็จลุล่วงไปได้

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย .... ง

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ .... จ

กิตติกรรมประกาศ........ ฉ

สารบัญ…….. .... ช

สารบัญตาราง .... ฌ

สารบัญภาพ .... ญ

บทที่

1 บทนำ........ 1

1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา........ 1

1.2 วัตถุประสงค์........ 2

1.3 ขอบเขตการวิจัย........ 2

1.4 ขั้นตอนการวิจัย 3

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ 3

1.6 ผลงานที่ตีพิมพ์จากวิทยานิพนธ์ 3

2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง........ 5

2.1 ระบบจำนวน 5

2.2 ระบบจำนวนซ้ำซ้อน 6

2.3 จำนวนฟิโบนาชชีและจำนวนลูคัส 6

2.4 เศษส่วนทองคำ........ 8

2.5 การแปลงชุดตัวเลข........ 9

2.6 สถาปัตยกรรมแบบทำควบคู่กัน 10

2.7 ระบบจำนวนฐานเศษส่วนอตรรกยะของเบิร์กแมน........ 14

2.7.1 การบวกในระบบจำนวนเศษส่วนอตรรกยะของเบิร์กแมน 15

2.8 ระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล........ 17

2.8.1 การบวกและลบในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล 19

2.8.2 การคูณในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล 21

2.8.3 การหารในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล 21

บทที่ หน้า
3 ระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่และอัลกอริทึมการคำนวณบวก ลบและคูณแบบขนาน 24
3.1 ระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ 24
3.2 การแปลงจากจำนวนเต็มให้อยู่ในรูปแบบการแทนของระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ 25
3.3 การบวกและลบแบบขนานในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ 28
3.3.1 การสร้างรูปแบบเลขโดดที่ซ้ำซ้อยที่เป็นไปได้ 3 ตำแหน่ง....................................29
3.3.2 การผสานรูปแบบเลขโดดซ้ำซ้อนที่เป็นไปได้ 3 ตำแหน่ง......................................31
3.3.3 อัลกอริทึมการบวกและลบแบบขนานในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ 31
3.4 การคูณแบบขนานในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ 45
3.5 สรุป 50

4 วิเคราะห์อัลกอริทึมการคำนวณทางคณิตศาสตร์แบบขนานในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ ... 51
4.1 อัตราการเติบโตเชิงฟังชันเวลาของการคำนวณทางคณิตศาสตร์แบบขนาน 51
4.2 ความเป็นไปได้ในการพัฒนาการคำนวณทางคณิตศาสตร์คูณแบบขนาน 56
4.3 ความเป็นไปได้ในการพัฒนาการคำนวณทางคณิตศาสตร์หาร 56
4.4 สรุป 57

5 สรุปผลการวิจัย 58
5.1 สรุปผลการวิจัย..58
5.2 ข้อเสนอแนะ...59

รายการอ้างอิง 60
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์ 61

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

2.1 ตัวอย่างค่าของจำนวนฟิโบนาชชี 7
2.2 ตัวอย่างค่าของจำนวนลูคัส 8
2.3 ฟังก์ชั่นการแปลงจาก D ไป E บนเลขฐาน 2 11
2.4 ตัวอย่างการแปลงแบบทำควบคู่กัน 13
2.5 รูปแบบการบวกของระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล 19
3.1 ค่าหลักและค่าขอบเขตของหลักที่ n ใด ๆ ในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ 26

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญภาพ

รูปที่ หน้า

2.1 การบวกโดยใช้วิธีการแปลงชุดตัวเลข 10
2.2 รูปแบบแทนจำนวนก่อนการบวก 16
2.3 รูปแบบแทนจำนวนหลังจากสังวัตนาการที่ τ^4 และ τ^3 16
2.4 รูปแบบแทนจำนวนหลังจากคลายค่าที่ตำแหน่ง τ^1 16
2.5 รูปแบบแทนจำนวนหลังจากสังวัตนาการที่ตำแหน่ง τ^1และ τ^0 16
2.6 รูปแบบแทนจำนวนหลังจากสังวัตนาการที่ตำแหน่ง τ^{-1} และ τ^{-2} 17
2.7 รูปแบบแทนจำนวนหลังจากคลายค่าที่ตำแหน่ง τ^{-4} 17
2.8 รูปแบบแทนจำนวนหลังจากการสังวัตนาการที่ตำแหน่ง τ^{-4} และ τ^{-5} 17
2.9 การแปลงผันจากระบบจำนวนเศษส่วนอตรรกะของเบิร์กแมนไปสู่ระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล 18
2.10 แสดงตัวอย่างการแปลงผัน 18
2.11 ตัวอย่างรูปแบบแทนจำนวนของระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล 18
2.12 การบวกของระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล 19
2.13 การลบของระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล 20
2.14 รูปแบบที่เลวร้ายที่สุดของการบวกในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล ... 20
2.15 ขั้นตอนการคูณในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล 21
2.16 การหารในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล 22
2.17 การนำผลหารมารวมกันในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล 23
3.1 การแปลงจากเลขโดดมาสู่รูปแบบเลขโดดซ้ำซ้อนที่เป็นไปได้ 3 ตำแหน่ง 29
3.2 ลักษณะการผสานของเลขโดดที่ตำแหน่งขอบและรองขอบของรูปแบบแทนจำนวน ... 31
3.3 อัลกอริทึมการบวกและลบแบบขนานของระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ 34
3.4 ลักษณะการทดเข้าสู่ตำแหน่ง τ^0 ในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล 43
3.5 ลักษณะการทดในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ 43
3.6 ตัวอย่างการคำนวณทางคณิตศาสตร์แบบขนาน 44
3.7 ตัวอย่างการผสานในการคำนวณทางคณิตศาสตร์บวกและลบแบบขนาน 45
3.8 การเพิ่มเลขโดดในการคูณของระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ 46
3.9 การสร้างรูปแบบแทนจำนวนที่ทำการบวก 46
3.10 การกำจัดเลขโดดในรูปแบบแทนจำนวน 46
3.11 การประยุกต์ใช้อัลกอริทึมการบวกและลบแบบขนานในการคูณ 47

รูปที่ หน้า

3.12 การจัดรูปแบบแทนจำนวนเพื่อทำการรวมค่าให้ได้ผลการคูณ 48

3.13 การรวมค่าในแต่ละหลักระหว่าง (10) และ $(\bar{1}0\bar{1})$ 48

3.14 การคำนวณบวกแบบขนานระหว่าง (10) และ $(\bar{1}0\bar{1})$.. 49

3.15 การรวมค่าในแต่ละหลักระหว่าง $(\bar{1}1\bar{1})$ และ (1010).. 49

3.16 การคำนวณบวกแบบขนานระหว่าง $(\bar{1}1\bar{1})$ และ (1010) 50

4.1 อัลกอริทึมการคำนวณบวกและลบแบบขนานในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ซิมเมทริกคอล 54

4.2 การหารรอบที่ 1.. 56

4.3 การหารรอบที่ 2.. 57

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในระบบคอมพิวเตอร์นั้นได้มีการวิจัยและพัฒนาอย่างมากมายโดยมีเป้าหมายที่จะพัฒนาให้คอมพิวเตอร์มีความสามารถหรือคุณลักษณะในการคำนวณให้มีความเร็วมากขึ้น เนื่องจากระบบจำนวนที่นิยมใช้ในปัจจุบัน คือระบบจำนวนฐานสอง (binary number system) นั้น ความเร็วในการคำนวณขึ้นอยู่กับสายการทด (carry propagation chain) เป็นสำคัญซึ่งสายการทดนั้นบางครั้งไม่สามารถบอกได้ว่ามีความยาวมากน้อยเท่าใด ทำให้ไม่สามารถชี้ชัดได้ว่าการคำนวณนั้นจะใช้เวลาในการคำนวณมากน้อยเพียงใด จึงได้มีการวิจัยแนวทางต่าง ๆ เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพการคำนวณขึ้น งานวิจัยที่สร้างระบบจำนวนที่มีลักษณะที่แปลกไปจากระบบจำนวนแบบเก่า คือ รูปแบบแทนจำนวนแบบมิว (μ-representation) ซึ่งเปลี่ยนฐานจากรูปแบบแทนจำนวนแบบเบต้า (β-representation) หรือรูปแบบแทนจำนวนระบบฐานยกกำลัง มาเป็นรูปแบบแทนจำนวนฐานอนุกรม (series) แทน ทำให้สามารถที่จะลดการเกิดเลขโดดที่มีค่า (non-zero digit) ที่ติดกัน ทำให้สายการทดนั้นสั้นลงส่งผลให้การคำนวณมีความเร็วสูงขึ้น แต่ระบบจำนวนใหม่นี้ก็มีข้อเสียคือการแปลงผัน (conversion) รูปแบบแทนจำนวนจากรูปแบบแทนจำนวนแบบเบต้าที่เป็นรูปแบบสามัญในปัจจุบันมาสู่รูปแบบแทนจำนวนแบบมิวซึ่งมีความยุ่งยากและซับซ้อนสูง

ในปี ค.ศ.1957 จอร์จ เบิร์กแมน (George Bergman) ได้ทำการเสนอระบบจำนวนใหม่ที่ใช้ฐานในระบบจำนวนเป็นเศษส่วนอตรรกยะ (irrational number) [1] โดยจำนวนที่ถูกนำมาใช้เป็นฐานคือจำนวนเศษส่วนทองคำ (golden ratio) ซึ่งจำนวนเศษส่วนทองคำนี้เป็นค่า ๆ หนึ่งที่ได้จากคำนวณมาจากรากของสมการจำนวนฟิโบนาชชี่ (fibonacci numbers) ซึ่งเป็นจำนวนอนุกรมรูปแบบหนึ่ง ทำให้จำนวนเศษส่วนทองคำนั้นมีคุณสมบัติของอนุกรมและเลขยกกำลัง ซึ่งทำให้ระบบจำนวนนี้มีคุณสมบัติหลายประการ ได้แก่ มีคุณสมบัติของรูปแบบแทนจำนวนแบบเบต้าและมิว คุณสมบัติในการลดและขยายรูปแบบแทนจำนวน (number representation) สามารถสร้างรูปแบบแทนจำนวนได้หลายรูปแบบ (redundant representation) ยังผลให้สามารถสร้างระบบจำนวนที่ไม่มีเลขโดดที่มีค่าที่อยู่ติดกันได้ ซึ่งสายการทดจากการดำเนินการพื้นฐานทางเลขคณิตจากรูปแบบแทนจำนวนนั้นจะสามารถจำกัดขอบเขตได้ ทำให้การดำเนินการพื้นฐานทางเลขคณิตมีความเร็วมากขึ้น และสามารถแสดงจำนวนเศษส่วนอตรรกยะได้ในรูปแบบแทนจำนวนที่นับได้ (finite representation) แต่ข้อเสียของระบบจำนวนนี้คือรูปแบบแทนจำนวนมีขนาดใหญ่เมื่อเทียบ

กับรูปแบบแทนจำนวนในระบบจำนวนฐานสอง ทำให้ไม่อาจมั่นใจได้ว่าระบบจำนวนนี้แท้จริงแล้วมีความเร็วในการคำนวณเร็วกว่าหรือช้ากว่าระบบจำนวนฐานสอง

ในปี ค.ศ. 2001 อเล็กซี สแตกฮอฟ (Alexy Stakhov) ได้นำเสนอระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล [2-4] (ternary mirror symmetrical number system) ที่มีรากฐานมาจากระบบจำนวนเศษส่วนทองคำของเบิร์กแมน โดยทำการเพิ่มค่าชุดเลขโดด (digit set) ของระบบจำนวนเศษส่วนทองคำจาก $\{0,1\}$ มาเป็น $\{\bar{1},0,1\}$ และทำการแปลงผันรูปแบบแทนจำนวนที่ไม่มีเลขโดดที่มีค่าที่ติดกันของระบบจำนวนเศษส่วนทองคำภายใต้กฎการแปลงออกมาเป็นระบบจำนวนใหม่ที่มีความพิเศษคือสามารถแสดงจำนวนเต็มออกมาโดยมีคุณสมบัติของการสะท้อน (mirror property) รวมทั้งวิธีการในการดำเนินการพื้นฐานทางเลขคณิต (fundamental arithmetic) ได้แก่การบวก ลบ คูณและหาร แต่การคำนวณพื้นฐานทางเลขคณิตในระบบจำนวนนี้ยังมีรูปแบบการคำนวณแบบลำดับ (sequential computation) รวมทั้งการที่มีคุณสมบัติการสะท้อนของรูปแบบแทนจำนวนทำให้เป็นการสิ้นเปลืองทรัพยากรในการจัดเก็บโดยใช่เหตุ

ในงานวิจัยนี้ได้นำเสนอระบบการประมวลผลแบบขนาน (parallel computation) สำหรับการบวก การลบและการคูณ ทำให้ความซับซ้อนเชิงเวลา (time-complexity) มีขนาดลดลงจาก $O(n)$ เหลือ $\Theta(\log n)$ แต่หลังการคำนวณแล้วจำเป็นต้องมาตรวจสอบคุณสมบัติการสะท้อนของคำตอบอีกครั้งทำให้สิ้นเปลืองเวลาในการคำนวณ ผู้วิจัยจึงได้นิยามระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ ซึ่งใช้พื้นที่ในการเก็บรูปแบบแทนจำนวนน้อยกว่ารูปแบบแทนจำนวนในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอลและอัลกอริทึมในการแปลงผันจากระบบจำนวนฐานสิบมาเป็นระบบจำนวนใหม่ และทำการปรับปรุงอัลกอริทึมในการบวก ลบและคูณซึ่งมีคุณบัติการคำนวณแบบขนานเช่นเดิม

1.2 วัตถุประสงค์

งานวิจัยนี้จะเสนอระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ที่มีรูปแบบแทนจำนวนขนาดเล็กกว่ารูปแบบแทนจำนวนของเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอลพร้อมทั้งเสนออัลกอริทึมในการแปลงผันระบบจำนวนฐานสิบให้อยู่ในระบบจำนวนนี้ อีกทั้งยังนำเสนออัลกอริทึมในการดำเนินการทางคณิตศาสตร์แบบขนานของการบวก ลบและการคูณ

1.3. ขอบเขตการวิจัย

1. เสนอระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ พร้อมกับบทพิสูจน์ความสมบูรณ์

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2. เสนออัลกอริทึมในการแปลงผันรูปแบบแทนจำนวนจากฐานสิบเป็นรูปแบบแทนจำนวนในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่
3. เสนอตัวดำเนินการพื้นฐานทางเลขคณิตแบบขนานของระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ ได้แก่ การบวก การลบและการคูณรวมทั้งบทพิสูจน์ความถูกต้องและบทพิสูจน์ความสมบูรณ์

1.4. ขั้นตอนการวิจัย

1. ศึกษาคุณสมบัติของระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. นิยามรูปแบบของระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่พร้อมทั้งพิสูจน์ความสมบูรณ์ (proof of completeness)
3. ออกแบบอัลกอริทึมในการหารูปแบบแทนจำนวนของระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่จากจำนวนเต็มฐานสิบและพิสูจน์ผลทำงาน
4. ออกแบบอัลกอริทึมของการดำเนินการพื้นฐานทางเลขคณิตแบบขนาน: การบวก การลบและการคูณพร้อมทั้งพิสูจน์ความถูกต้องและบทพิสูจน์ความสมบูรณ์
5. พิสูจน์ผลการทำงานและปรับปรุงแก้ไข
6. สรุปผลและเรียบเรียงวิทยานิพนธ์

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้ระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ซึ่งใช้พื้นที่ในการจัดเก็บน้อยกว่าระบบจำนวน เทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล
2. ได้การดำเนินการพื้นฐานทางเลขคณิตแบบขนานของการบวก การลบและคูณของระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่

1.6 ผลงานที่ตีพิมพ์จากวิทยานิพนธ์

ส่วนหนึ่งของวิทยาพนธ์นี้ได้รับการตีพิมพ์เป็นบทความทางวิชาการในหัวเรื่องดังต่อไปนี้

1. “Half Ternary Number system and Parallel addition and subtraction” โดย ธนาพงษ์ ตัน และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการ 12th National Computer Science and

Engineering Conference (NCSEC2008) ณ Long Beach Garden Hotel and Spa พัทยา จ. ชลบุรี ประเทศไทย ระหว่างวันที่ 20-21 พฤศจิกายน พ.ศ. 2551

2. "Parallel addition and subtraction in Ternary Mirror-Symmetrical Number System" โดย ธนาพงษ์ ตัน และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการ IEEE - The 2008 International Conference on Computer Engineering & Systems (IEEE - ICCES'08) ณ Ain Shams University Conference Center ประเทศอียิปต์ ระหว่างวันที่ 25-27 พฤศจิกายน พ.ศ. 2551

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง โดยจะกล่าวถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องที่เป็นพื้นฐานของงานวิจัยนี้ ซึ่งประกอบด้วย ระบบจำนวน (number system) ระบบจำนวนซ้ำซ้อน (redundant number system) จำนวนเศษส่วนทองคำ (golden ratio) การแปลงชุดตัวเลข (digit set conversion) และการอ้างอิงงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง อันประกอบด้วย สถาปัตยกรรมแบบทำควบคู่กัน (On-the-fly architecture) [6] ระบบจำนวนฐานเศษส่วนอตรรกยะของเบิร์กแมน (Bergman's irrational number system) และระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล (Ternary Mirror-symmetrical number system) ซึ่งเป็นแนวคิดสำคัญในงานวิจัยนี้

2.1 ระบบจำนวน (Number System)

ระบบจำนวน (β,D) ประกอบด้วยเลขฐาน β โดยที่ β สามารถเป็นได้ทั้งจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $|\beta| > 1$ และ ชุดตัวเลขแบบจำกัด (finite digit-set) D ที่ตัวเลขสามารถเป็นได้ทั้งจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน

กำหนดให้ X เป็นจำนวนใด ๆ โดยที่ X สามารถมีรูปแบบแทนจำนวนแสดงได้ในเลขฐาน β ในรูปแบบ

$$X = (x_n x_{n-1} \cdots x_0 . x_{-1} x_{-2} \cdots)_\beta$$

ซึ่ง $x_i \in D$ โดยที่ $i \le n, \exists n \in z$

โดยค่าเชิงตัวเลขของ X ฐาน β สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\|X\| = \sum_{i=n}^{-\infty} x_i \beta^i$$

ซึ่งค่าเชิงตัวเลขทั้งหมดที่แสดงได้สามารถเขียนให้อยู่รูปของเซต $P[\beta, D]$ ได้ดังนี้

$$P_n^m[\beta, D] = \left\{ X = (x_n x_{n-1} \cdots x_{m+1} x_m)_\beta \,\middle|\, x_i \in D, m \le i \le n \right\}$$
$$P_n[\beta, D] = \left\{ X = (x_n x_{n-1} \cdots)_\beta \,\middle|\, x_i \in D, i \le n \right\}$$

โดย $P_n^m[\beta, D]$ และ $P_n[\beta, D]$ เท่ากับ เซตจำกัดและเซตไม่จำกัด ตามลำดับ ในระบบเลขฐานจำนวนเต็มโดยทั่วไปแล้วนิยมให้ $D = \{0, 1, \ldots, |\beta| - 1\}$ ซึ่ง D จะถูกเรียกว่าเป็น ชุดตัวเลขแบบบัญญัติ (canonical digit-set)

2.2 ระบบจำนวนซ้ำซ้อน (Redundant Number Systems)

ระบบจำนวนแบบซ้ำซ้อน คือ ระบบจำนวนที่ค่าเชิงตัวเลขของ X อาจมีรูปแบบในการแสดงค่าได้หลายรูปแบบ เช่น กำหนดให้ $\beta = \{b^j\},\ b,\ j \in Z$ และ b เป็นเลขฐาน โดยที่ b เป็นจำนวนเต็มที่ $b \geq 2$ และกำหนดให้ D เป็นชุดตัวเลขซึ่งอธิบายได้ด้วย $\{d \in Z \mid \alpha_1 \leq d \leq \alpha_2\}$ โดย $-\alpha_1 + \alpha_2 \geq b + 1$ ตัวอย่างเช่น ชุดตัวเลข $D = \left\{ \bar{2}, \bar{1}, 0, 1, \ldots 4 \right\}$ บนเลขฐาน $b = 5$ และค่าเชิงตัวเลข $X = 57$ จะมีรูปแบบ ได้หลายรูปแบบดังตัวอย่าง ดังนี้

$$
\begin{aligned}
(2 \quad 1 \quad 2)_5 &= 2\times 5^2 + 1\times 5^1 + 2\times 5^0 = 57 \\
(2 \quad 2 \quad \bar{3})_5 &= 2\times 5^2 + 2\times 5^1 + (-3)\times 5^0 = 57 \\
(3 \quad \bar{4} \quad 2)_5 &= 3\times 5^2 + (-4)\times 5^1 + 2\times 5^0 = 57
\end{aligned}
$$

ในกรณีที่ α_1 หรือ α_2 ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขดังกล่าว ระบบจำนวนจะไม่มีคุณสมบัติของความซ้ำซ้อน เนื่องจากไม่สามารถแสดงค่าของตัวเลข X ได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ โดยสามารถอธิบายคุณสมบัติของชุดตัวเลขได้ดังนี้

$$V_{(\beta,D)}(i) = \left\{ P \in P[\beta, D] \,\middle|\, \|P\| = i \right\}$$

โดยที่ $P[\beta, D] = \{P = (d_j d_{j-1} \cdots)_\beta \mid d_j \in D\}$, $\|P\| = \sum_{j=l}^{n} d_j \beta^j$ และ $j \in Z$

สมการดังกล่าวแสดงถึงเซตของรูปแบบที่สามารถแสดงค่าทั้งหมดของค่า สามารถกล่าวว่าระบบจำนวนเต็มบวกใด ๆ มีคุณสมบัติ

สมบูรณ์ (complete for radix β) ก็ต่อเมื่อ $\forall j \in Z : \left| V_{(\beta,D)}(j) \right| \geq 1$

กึ่งสมบูรณ์ (semi-complete for radix β) ก็ต่อเมื่อ $\forall j \in N : \left| V_{(\beta,D)}(j) \right| \geq 1$

ซ้ำซ้อน (redundant for radix β) ก็ต่อเมื่อ $\exists\, j \in Z : \left| V_{(\beta,D)}(j) \right| > 1$ ยกเว้น $j = 0$

ไม่ซ้ำซ้อน (non-redundant for radix β) ก็ต่อเมื่อ $\forall j \in Z : \left| V_{(\beta,D)}(j) \right| \leq 1$

2.3 จำนวนฟิโบนาชชีและจำนวนลูคัส (Fibonacci numbers and Lucas number)

จำนวนฟิโปนาชชี [7] จัดเป็นรูปแบบของสมการแบบเวียนเกิด (recursive equation) ชนิดหนึ่งได้ถูกเสนอโดย นักคณิตศาสตร์ชาวอิตาเลียนชื่อลีโอนาโด ปิซาโน่ (Leonardo Pisano) หรืออีกชื่อว่า ฟิโบนาชชี (Fibonacci) ซึ่งได้สร้างโจทย์ทางคณิตศาสตร์ โดยการสมมติมีกระต่ายคู่หนึ่ง (ตัวผู้และตัวเมีย) และกำหนดให้กระต่ายต้องมีอายุครบ 2 เดือนก่อน จึงจะสามารถสืบพันธุ์ได้และเวลาให้กำเนิดลูก กระต่ายตัวเมียจะให้กำเนิดลูกกระต่าย 1 คู่ เป็นตัวผู้ 1 และตัวเมีย 1 เสมอไป อีกทั้งกระต่ายทุกตัวจะไม่ล้มป่วย หรือล้มตาย คำถามมีว่าในเวลา1 ปี จะมีกระต่ายทั้งหมดกี่คู่

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ในการพิจารณาทำโจทย์นี้ เราก็จะเห็นว่าเมื่อสิ้นเดือนแรก จะมีกระต่ายที่อายุน้อย 1 คู่ เมื่อสิ้นเดือนที่ 2 กระต่ายคู่นี้ก็พร้อมจะสืบพันธุ์ ดังนั้น เมื่อสิ้นเดือนที่สองเราจะมีกระต่ายอายุมาก 1 คู่ และเมื่อสิ้นเดือนที่สาม เราก็จะมีกระต่ายคู่เดิม และกระต่ายคู่ใหม่ที่ถือกำเนิดจากมัน ทำให้มีรวมทั้งสิ้น 2 คู่ และเมื่อสิ้นเดือนที่สี่ เราจะมีกระต่าย 2 คู่เดิม และคู่ใหม่ รวมทั้งสิ้น 3 คู่ เมื่อสิ้นเดือนที่ห้าจะมี 5 คู่ เดือนที่ 6 จะมี 8 คู่ จำนวนจะเพิ่มเรื่อย ๆ จนสามารถเขียนเป็นอนุกรมได้ดังนี้คือ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 นั่นคือ เมื่อสิ้นหนึ่งปี จะมีกระต่ายรวม 144 คู่

จะเห็นได้ว่าจำนวนกระต่ายโดยรวมนั้นจะเกิดจากจำนวนกระต่ายที่เดือนที่แล้วรวมกันกับจำนวนกระต่ายของสองเดือนที่แล้วไปเรื่อย ๆ อย่างมีระบบ สามารถนำมาสร้างเป็นสมการ จะได้เป็นสมการ (2.1)

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2) \quad (2.1)$$

โดยที่ $F(0) = 0, F(1) = 1$ ซึ่งก็คือสมการเวียนเกิดของจำนวนฟีโบนาชชี

ตารางที่ 2.1 ตัวอย่างค่าของจำนวนฟีโบนาชชี

n	Fibonacci number ลำดับที่ n
0	0
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จำนวนลูคัส [7] เป็นอนุกรมที่มีลักษณะเวียนเกิดและรูปแบบของสมการเหมือนกันจำนวนฟีโบนาชชีแตกต่างกันเพียง $L(1)=1, L(2)=3$ ซึ่งมีรูปสมการเวียนเกิดเหมือนกับสมการเวียนเกิดของจำนวนฟีโบนาชชีดังสมการ (2.2)

$$L(n)=L(n-1)+L(n-2) \tag{2.2}$$

โดยที่ $L(1)=1, L(2)=3$

ตารางที่ 2.2 ตัวอย่างค่าของจำนวนลูคัส

n	Lucas number ลำดับที่ n
0	0
1	1
2	3
3	4
4	7
5	11
6	18
7	29
8	47
9	76
10	123

2.4 เศษส่วนทองคำ (Golden ratio)

ในทางคณิตศาสตร์ เรามักพบเลขคงที่เช่น π, e แต่ในโลกของคณิตศาสตร์ยังมีเลขคงที่อีกจำนวนหนึ่ง นั่นคือ เศษส่วนทองคำ [7,8,9] ซึ่งมีอักษรแทนด้วย $\varnothing$

เศษส่วนทองคำ เป็นค่าที่ได้จากการหารากของสมการ $X^2 - X - 1 = 0$ และเมื่อถอดรากของสมการจะได้ X มีค่าเท่ากับ $(1 \pm \sqrt{5})/2$ หรือมีค่า 1.618... และ -0.618... โดยมีทศนิยมเรียงกันไปไม่รู้จบ แต่โดยปกติเศษส่วนทองคำนั้นจะครอบคลุมเฉพาะ $(1+\sqrt{5})/2$ เท่านั้น ซึ่งเศษส่วนทองคำนี้มีคุณสมบัติที่น่าทึ่งหลายประการเช่น จากสมการ $X^2 - X - 1 = 0$ เราจะได้ $X^2 = X + 1$ และเมื่อทำการแทนค่า X ด้วย $\varnothing$ จะทำให้ได้สมการใหม่คือ $\varnothing^2 = \varnothing + 1$ หรือมีค่าเท่ากับ

$(1.618\ldots)^2 = 1.618\ldots + 1 = 2.618\ldots$ และจากสมการ $Ø^2 = Ø + 1$ หากเราหารสมการนี้ตลอดด้วย $Ø$ เราจะได้ $Ø = 1 + 1/Ø$ นั่นแสดงว่า $1/Ø = Ø - 1$ หรือ $1/1.618... = 1.618\ldots = 0.618\ldots$ เป็นต้น และถ้าเรานำ $Ø$ คูณสมการ $Ø^2 = Ø + 1$ ตลอด เราจะได้ $Ø^3 = Ø^2 + Ø$ แต่เมื่อ $Ø^2 = Ø + 1$ ดังนั้น $Ø^3 = Ø + Ø + 1 = 2Ø + 1 = 2(1.618\ldots) + 1 = 4.236\ldots$ นั่นแสดงว่า $(1.618\ldots)^3 = 4.236\ldots$ ในทำนองเดียวกันนี้ เราก็อาจแสดงให้เห็นได้ว่า ไม่ว่า $Ø$ จะยกกำลังเท่าใด เราก็สามารถเขียนคำตอบในเทอมของ $Ø$ ได้เสมอ

เศษส่วนทางคำนั้นยังมีความสัมพันธ์เกี่ยวข้องกับจำนวนฟีโบนาชชี โดยเมื่อนำเลขฟีโบนาชชีที่ลำดับต่อกันมาทำการหารอัตราส่วนกันดังสมการ $F(n)/F(n\text{-}1)$ เมื่อค่าของ n มากขึ้นเรื่อย ๆ ค่าที่ได้จะเริ่มลู่เข้าสู่ค่า 1.61803398874989...หรือก็คือค่าเศษส่วนทองคำนั่นเอง

2.5 การแปลงชุดตัวเลข (Digit set conversion)

การแปลงชุดตัวเลข [6,10] คือการแปลงจากชุดตัวเลขรูปแบบหนึ่งไปยังชุดตัวเลขอีกรูปแบบหนึ่ง ซึ่งได้ถูกศึกษาและวิจัยอย่างละเอียดในงานวิจัย [6] โดยกำหนดให้ D และ E เป็นชุดตัวเลขแบบจำกัดที่ต่างกันและกำหนดให้ β เป็นเลขฐานที่สามารถเป็นได้ทั้งจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน การแปลงชุดตัวเลขในระบบเลขฐาน β จาก D ไปเป็นชุดตัวเลข E สามารถเขียนเป็นสมการฟังก์ชันดังนี้

$$\lambda : D \rightarrow E \text{ โดยที่ } X \in D, \|\lambda(X)\| = \|X\|$$

ในทางทฤษฎีแล้ว การแปลงชุดตัวเลขถูกนำไปใช้ในการอธิบายการคำนวณพื้นฐานทางคณิตศาสตร์มากมาย เช่น การบวกสามารถเทียบได้กับการแปลงชุดตัวเลขบนเลขฐานเดียวกัน แต่มีชุดตัวเลขที่ต่างกันในลักษณะ $D = \{d \in Z | 2a \le d \le 2b\}$ และ $E = \{e \in Z | a \le e \le b\}$

ตัวอย่างที่ 2.1 *การบวกสองจำนวนบนระบบจำนวนฐานสอง* X = 1011101 *และ* Y = 0000101

วิธีทำ เริ่มแรกเราจะทำการบวกแบบขนานในแต่ละหลักโดยเพิ่มชุดเลขโดดเป็น {0, 1, 2} และพิจารณาเป็นการแปลงชุดตัวเลขบนเลขฐานสองจากตัวเลข {0, 1, 2} ไปยังชุดตัวเลข {0, 1} โดยเป็นการแปลงจาก 1011202ไปสู่ 1100010 ดังแสดงในรูปที่ 2.1

X	=	1	0	1	1	1	0	1
Y	=	0	0	0	0	1	0	1
X+Y	=	1	0	1	1	2	0	2
	=	1	1	0	0	0	1	0

รูปที่ 2.1 การบวกโดยใช้วิธีการแปลงชุดตัวเลข

□

2.6 สถาปัตยกรรมแบบทำควบคู่กัน (On-the-fly architecture)

การแปลงชุดตัวเลขนั้นได้ถูกพัฒนาขึ้นมาอย่างกว้างขวาง เนื่องจากรูปแบบการคำนวณนั้นสอดคล้องกับการคำนวณพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ เช่น การบวกและลบ ทำให้การแปลงชุดตัว-เลขที่มีประสิทธิภาพจะส่งผลถึงการคำนวณพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่มีประสิทธิภาพด้วย โดยนักวิจัยได้คิดวิธีการแปลงชุดตัวเลขออกมาอย่างหลายหลายวิธี โดยในงานวิจัยนี้จะใช้แนวคิดของการแปลงชุดตัวเลขที่ใช้สถาปัตยกรรมแบบทำควบคู่กัน [6] เป็นแนวคิดพื้นฐาน ดังนั้นจะขอกล่าวถึงหลักการของสถาปัตยกรรมนี้

สถาปัตยกรรมแบบทำควบคู่กัน เป็นกระบวนการผลิตเลขโดดแบบขนานซึ่งส่งผลให้ความซับซ้อนเชิงเวลาเป็นลอการิทึมิกฟังก์ชั่น ในงานวิจัยของคอร์เนอรับ สถาปัตยกรรมแบบทำควบคู่กันถูกเสนอขึ้นเพื่อแปลงชุดตัวเลขซ้ำซ้อนให้เป็นชุดตัวเลขไม่ซ้ำซ้อน การแปลงชุดตัวเลขแบบทำ-ควบคู่กันมีความจำเป็นที่จะต้องอาศัยคุณสมบัติของระบบจำนวนซ้ำซ้อนแบบมีเครื่องหมายบนเลขฐานเดียวกันเพื่อลดการเกิดสายการแพร่ของตัวทด ข้อดีของการคำนวณแบบทำควบคู่กันคือ เป็นการคำนวณแบบขนาน จึงทำให้การคำนวณมีความเร็วสูงเพราะทุกเลขโดดของจำนวนนำเข้า (input) สามารถคำนวณได้พร้อมกัน และจำนวนเลขโดดที่นำออก (output) สามารถมีจำนวนที่ยาวกว่าจำนวนเลขโดดที่นำเข้า ทำให้ไม่จำเป็นต้องทำการเพิ่มเลขโดดที่ไม่มีค่าไปก่อนนำเข้าระบบการคำนวณ ส่วนข้อเสียของการคำนวณแบบทำควบคู่กันคือ ในการแปลงจำเป็นต้องใช้ทรัพยากร เช่น เรจิสเตอร์ เป็นจำนวนมากขึ้นอยู่กับขนาดของจำนวนนำเข้า ทำให้สิ้นเปลืองทรัพยากรเป็นอันมาก ในการคำนวณจึงจำเป็นต้องจำกัดขนาดของจำนวนเลขโดดที่นำเข้า เพื่อที่จะสามารถจำกัดปริมาณของเรจิสเตอร์ได้ และก่อนที่จะสามารถทำการแปลงชุดตัวเลขนั้นจำเป็นที่ต้องทราบจำนวนเลขโดดที่นำเข้าทั้งหมดก่อน ดังนั้นจึงไม่สามารถนำมาใช้อย่างมีประสิทธิภาพกับการคำนวณแบบ เชื่อมตรง (on-line conversion)

ในการแปลงชุดตัวเลข $D \rightarrow E$ โดยที่ $X \in P[\beta, D]$ และ $Y \in P[\beta, E]$ โดย $||X|| = ||Y||$และ $D \neq E$ จะมีนัยสำคัญดังนี้

กำหนดให้ ชุดตัวเลข E เป็นชุดตัวเลขที่ไม่ซ้ำซ้อน กำหนดเซต C เป็นเซตของตัวทด c เราสามารถเขียนเลข d ใด ๆ ที่อยู่ในชุดตัวเลข D ซึ่งเป็นชุดตัวเลขซ้ำซ้อนให้อยู่ในรูปสมการของการแปลงจาก $P[\beta, D]$ ไป $P[\beta, E]$ ได้เท่ากับ $d = c\beta + e$ โดยที่ $e \in E$ และ $c \in C$ แต่ในปรกติก่อนการแปลงจะต้องทำการรวมตัวทดที่ได้มา (incoming carry) เข้ากับ d ก่อน แล้วจึงคิดรวมกับตัวทดที่ส่งออกไป (outgoing carry) ในภายหลัง เพราะฉะนั้นจะได้ ความสัมพันธ์การแปลงระหว่างชุดตัวเลข λ (conversion mapping) เป็นฟังก์ชันการแปลงดังนี้

$$\lambda : C \times D \rightarrow C \times E$$

เมื่อชุดตัวเลขตัวทด สำหรับบาง (c, d) ใน $C \times D$ มี c' อยู่ใน C และ e อยู่ใน E ที่ซึ่ง

$$\lambda : (c', d) \rightarrow (c, e)$$

ซึ่งเราสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$c' + d = c\beta + e$$

เมื่อ β เป็นฐาน จากฟังก์ชันด้านบนสามารถเรียกได้ว่า c' และ c เป็นตัวทดนำเข้าและตัวทดนำออกตามลำดับ ในแต่ละเลขโดดนำเข้า d กำหนดให้ $D = \{0, 1, 2\}$, $E = \{0, 1\}$ และ $\beta = 2$ ฟังก์ชันการแปลงสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 2.3

ตารางที่ 2.3 ฟังก์ชันการแปลงจาก D ไป E บนเลขฐานสอง

λ		D		
		0	1	2
C	0	00	01	10
	1	01	10	11

ผลลัพธ์ในแต่ละคู่ในตารางที่ 2.3 แทนค่า ce ซึ่ง (c, e) อยู่ใน $C \times E$ โดยการคำนวณในตารางเริ่มจากที่ค่า $c = 0$ จะเห็นว่า ce ที่เป็นไปได้คือ 00, 01 และ 10 เมื่อ $d = 0,1,2$ ดังนั้นตัวทดนำออกเป็นไปได้ทั้ง 0 และ 1 เราจึงต้องเพิ่มแถวที่ค่า $c = 1$ และผลลัพธ์ที่ได้คือ 01, 10 และ 11 ตามลำดับ ในขณะนี้จากค่า ce ทั้งหมดที่ได้จะเห็นว่าตัวทดที่เกิดขึ้นคือ 0 และ 1 เท่านั้น ดังนั้นตารางนี้จึงสมบูรณ์แล้ว

จากแนวคิดสมการฟังก์ชันการแปลงชุดตัวเลข สามารถเขียนเซตของฟังก์ชั่นตัวทด C ได้ $\{\sigma_d\}, \sigma_d : C \rightarrow C$ โดยที่ $d \in D$ เรียกว่าฟังก์ชันการส่งผ่านตัวทด (carry-transfer function) ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\forall c \in C : \sigma_d(c') = c \text{ โดยที่ } \lambda(c', d) = (c, e)$$

โดยที่ σ_d เป็นฟังก์ชันที่อธิบายเกี่ยวกับการจับคู่ (mapping) ค่าของตัวทดที่เข้ามา (c') ไปยังค่าของตัวทดที่ส่งออกไป (c) โดยผ่านเลขโดด d หนึ่ง ๆ เท่านั้น ซึ่งเราสามารถเขียนฟังก์ชันการจับคู่นี้ผ่าน d ทุกตัวที่อยู่ใน D ได้ดังนี้

$$\sigma_{d_i d_{i-1} \ldots d_j}(c) = (\sigma_{d_i}(\ldots \sigma_{d_j}(c) \ldots))$$

เรียกฟังก์ชันนี้ว่าฟังก์ชันประกอบ และจากฟังก์ชันนี้เองทำให้สามารถหาค่า c ใด ๆ ได้ โดยกำหนดให้ c_0 เริ่มต้นมีค่าเท่ากับ 0

$$c_i = \sigma_{d_i d_{i-1} \ldots d_j}(0)$$

เมื่อเราสามารถหาฟังก์ชันที่ทำการสร้างตัวทดได้แล้ว ก็สามารถหาฟังก์ชันในการหา e ในลำดับต่อไปได้ด้วย ฟังก์ชันจับคู่ตัวเลข (digit mapping function) $\{\varepsilon_d\}, \varepsilon_d : C \rightarrow E$ โดยที่ $d \in D$ ซึ่งเราสามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$e_i = \varepsilon_{d_i}(\sigma_{d_i d_{i-1} \ldots d_j}(0))$$

ตัวอย่างที่ 2.5 *กำหนดให้ $X = x_7x_6x_5 \ldots x_0$ เป็นสายบิตนำเข้าโดยที่ $x_i \in D$ เมื่อ i เป็นจำนวนเต็มบวก กำหนดให้ $X = 10210112$ ฟังก์ชันการแปลงจะทำการผลิตคู่ผลลัพธ์ได้แก่ ตัวทดนำออกและเลขโดดที่เป็นผลลัพธ์ที่ต้องการดังสมการต่อไปนี้*

$$c' + d = c\beta + e$$

สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$c_i + x_i = c_{i+1}\beta + y_i$$

โดยที่มีตัวทดนำเข้าเริ่มต้น (c_0) เป็นศูนย์ และ $y_i \in E$ ผลลัพธ์ที่ได้คือ $Y = 11011000$ เมื่อ $||X|| = ||Y||$ ทำการแปลง $D = \{0, 1, 2\}$ ไปเป็น $E = \{0, 1\}$ โดย $\beta = 2$และ $C = \{0, 1\}$ จะได้ c และ e ดังนี้

ค่า c จากสมการฟังก์ชันประกอบ

$$c_0 = 0$$
$$c_1 = \sigma_1(c_0) = \sigma_1(0) = 1$$
$$c_2 = \sigma_2\sigma_1(0) = \sigma_2(1) = 1$$
$$c_3 = \sigma_3\,\sigma_2\,\sigma_1(0) = \sigma_3(1) = 1$$
$$c_4 = \sigma_4\,\sigma_3\,\sigma_2\,\sigma_1(0) = \sigma_4(1) = 0$$
$$c_5 = \sigma_5\,\sigma_4\,\sigma_3\,\sigma_2\,\sigma_1(0) = \sigma_5(0) = 0$$
$$c_6 = \sigma_6\,\sigma_5\,\sigma_4\,\sigma_3\,\sigma_2\,\sigma_1(0) = \sigma_6(0) = 1$$
$$c_7 = \sigma_7\,\sigma_6\,\sigma_5\,\sigma_4\,\sigma_3\,\sigma_2\,\sigma_1(0) = \sigma_7(1) = 0$$
$$\therefore c = (0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0)$$

ค่า e จากสมการฟังก์ชันจับคู่ตัวเลข

$$e_0 = \varepsilon_0(c_0) = \varepsilon_0(0) = 0 = y_0$$
$$e_1 = \varepsilon_1(c_1) = \varepsilon_1(1) = 0 = y_1$$
$$e_2 = \varepsilon_2(c_2) = \varepsilon_2(1) = 0 = y_2$$
$$e_3 = \varepsilon_3(c_3) = \varepsilon_3(1) = 1 = y_3$$
$$e_4 = \varepsilon_4(c_4) = \varepsilon_4(0) = 1 = y_4$$
$$e_5 = \varepsilon_5(c_5) = \varepsilon_5(0) = 0 = y_5$$
$$e_6 = \varepsilon_6(c_6) = \varepsilon_6(1) = 1 = y_6$$
$$e_7 = \varepsilon_7(c_7) = \varepsilon_7(0) = 1 = y_7$$
$$\therefore\ Y = 11011000$$

เพราะฉะนั้น $X = 10210112, x_i \in D$ จะถูกแปลงเป็น $Y = 11011000, y_i \in E$

กระบวนการการแปลงเป็นแบบขนานโดยอาศัยสถาปัตยกรรมแบบทำควบคู่กันนี้สามารถแสดงให้เห็นในรูปของตารางดังตารางที่ 2.2 สำหรับการคำนวณในรอบแรก (r_1) นำสองกรณีที่เป็นไปได้ของตัวทดนำเข้า (คือ 0 กับ 1) มาคำนวณกับค่า x_i ทั้ง 8 เลขโดด ซึ่งจะได้ผลลัพธ์ 16 คู่ จับคู่ทั้ง 8 คอลัมน์มาคำนวณหาผลลัพธ์ในรอบที่สอง (r_2) โดยอาศัยแนวคิดของฟังก์ชันประกอบ จับคู่ผลลัพธ์ในรอบที่สอง (r_2) กับรอบที่หนึ่ง (r_1) เพื่อคำนวณหาผลลัพธ์ในรอบที่สาม (r_3) ดังแสดงในตารางที่ 2.4 ทำซ้ำกระบวนการเดิมจนจบ (r_4)

ตารางที่ 2.4 ตัวอย่างการแปลงแบบทำควบคู่กัน

		x_7	x_6	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	x_0		c
X		1	0	2	1	0	1	1	2		
r_1		01	00	10	01	00	01	01	10		0
		10	01	11	10	01	10	10	11		1
r_2		01		10		00		10			0
		01		11		01		10			1
r_3		01	01			01	10				0
		01	01			01	10				1
r_4		01	01	10	01						0
		01	01	10	01						1
Y		1	1	0	1	1	0	0	0		

จากตารางที่ 2.4 จะเห็นว่าผลลัพธ์ในแต่ละส่วนของการคำนวณคือ *ce* ผลลัพธ์ท้ายที่สุด (*Y*) ได้จากการพิจารณากรณีที่ตัวทดนำเข้า $c' = 0$ ของผลลัพธ์ทางด้านขวาสุดในแต่ละรอบ ซึ่งก็คือ $Y = 11011000$ □

จากที่กล่าวมาจะเห็นได้ว่าเวลาในการคำนวณโดยอาศัยสถาปัตกรรมแบบทำควบคู่กันส่งผลให้เวลาในการทำงานมีความซับซ้อนเชิงเวลา $O(\log\ n)$ เมื่อ n เป็นขนาดของรูปแบบแทนจำนวนที่นำมาคำนวณ

2.7 ระบบจำนวนฐานเศษส่วนอตรรกยะของเบิร์กแมน (Bergman's irrational number system)

ในปี ค.ศ.1957 จอร์จ เบิร์กแมน ได้เสนอระบบจำนวนใหม่ที่สร้างขึ้นมาจากฐานที่เป็นจำนวนอตรรกยะ [1] โดยจำนวนที่ใช้คือเศษส่วนทองคำ ซึ่งระบบจำนวนนี้มีความสามารถพิเศษมาจากคุณสมบัติของเศษส่วนทองคำ ซึ่งก็คือความสามารถในการกำจัดเลขโดดที่มีที่อยู่ติดกัน โดยใช้สมการแบบเวียนเกิดของเศษส่วนทองคำคือ $\phi^2 = \phi + 1$ นอกจากนี้เบิร์กแมนได้นิยามตัวแปรใหม่ให้เศษส่วนทองคำจาก ϕ เป็น τ และสร้างสมการขึ้นมาใหม่ดังสมการ (2.3)

$$\tau^n = \tau^{n-1} + \tau^{n-2} = \tau \times \tau^{n-1} \qquad (2.3)$$

โดยที่ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ จะเห็นได้ว่า งานวิจัยนี้ได้ทำการขยายให้เศษส่วนทองคำครอบคลุมถึงส่วนกำลังติดลบด้วยเพื่อใช้ในการแสดงค่าได้ครอบคลุมยิ่งขึ้น โดยมีตัวอย่างการขยายตัว (expansion) ดังนี้

$\tau^0 = 0\tau + 1$	$\tau^{-1} = 1\tau - 1$
$\tau^1 = 1\tau + 0$	$\tau^{-2} = -1\tau + 2$
$\tau^2 = 1\tau + 1$	$\tau^{-3} = 2\tau - 3$
$\tau^3 = 2\tau + 1$	$\tau^{-4} = -3\tau + 5$
$\tau^4 = 3\tau + 2$	$\tau^{-5} = 5\tau - 8$
$\tau^5 = 5\tau + 3$	

และได้นิยามรูปแบบแทนจำนวนดังสมการ (2.4)

$$\|X\| = \sum_{all\,i} d_i \tau^i \qquad (2.4)$$

โดยที่ d_i คือชุดของตัวเลข $\{0,1\}$ มีวิธีการสร้างรูปแบบแทนจำนวนดังต่อไปนี้

โดยวิธีการสร้างระบบจำนวนนี้ขั้นต้น ทำได้โดยนำสมการแบบเวียนเกิดของเศษส่วนที่ถูกขยายแล้วมาใช้คือ $\tau^1 = 1\tau + 0$ และ $\tau^{-2} = -1\tau + 2$ เมื่อนำทั้งสมการสองสมการมารวมกันจะพบว่า

$\tau^1 + \tau^{-2} = (1\tau + 0) + (-1\tau + 2) = 2$ เราสามารถนำมาแสดงในการแทนของเลขฐานเศษส่วนทองคำตามคำนิยามได้เป็น 10.01 ว่ามีค่าเท่ากับ 2 ในระบบจำนวนฐานสิบ ต่อมาการสร้างการแทนของจำนวนเต็มถัดไป โดยใช้การสร้างจากนิยามของสมการ $\tau^0 = 0\tau + 1$ ที่แสดงว่า $\tau^0 = 1$ เสมอแทนเข้าไปได้เป็น 11.01ในระบบเลขฐานเศษส่วนทองคำมีค่าเท่ากับ 3 ในระบบเลขฐานสิบ และทำเช่นนี้สำหรับจำนวนนับถัดไปเรื่อย ๆ โดยหลังจากการเพิ่มค่าลงไปในแต่ละครั้งจะมีตัวดำเนินการ (operator) อยู่สองรูปแบบคือ

ก. การสังวัตนาการ (convolution) คือการลดรูปของรูปแบบแทนจำนวนจากเลขโดดที่มีค่าติดกัน จากสมการ $\tau^n = \tau^{n-1} + \tau^{n-2}$ ซึ่งทำให้รูปแบบแทนจำนวน 011 สามารถเปลี่ยนเป็นรูปแบบแทนจำนวน 100 ได้ซึ่งมีค่าเท่ากันทุกประการ

ข. การคลายค่า (devolution) คือการขยายรูปของรูปแบบแทนจำนวนจากเลขโดดตัวเดียวเป็นเลขโดดที่มีค่าติดกันแทน จากสมการ $\tau^n = \tau^{n-1} + \tau^{n-2}$ ซึ่งทำให้รูปแบบแทนจำนวน 100 สามารถเปลี่ยนเป็นรูปแบบแทนจำนวน 011 ได้

จากตัวดำเนินการดังกล่าว ทำให้สามารถลดรูปจาก 11.01 ไปเป็น 100.01 ได้ซึ่งมีค่าเท่ากับ 3 เช่นกัน $100.01 = \tau^2 + \tau^{-2} = 1\tau + 1 - 1\tau + 2 = 3$ ซึ่งรูปแบบแทนจำนวนหลังการจัดนี้เรียกว่ารูปแบบแทนจำนวนที่น้อยที่สุด (minimal form) ทั้งนี้การจัดรูปแบบแทนจำนวนในระบบจำนวนนี้สามารถจัดในรูปแบบที่มีเลขโดดที่ไม่มีค่าติดกันได้ หรือสามารถเรียกว่าอยู่ในรูปแบบแทนจำนวนที่มากที่สุด (maximal form) โดยเราสามารถอาศัยหลักการนี้ในการสร้างระบบจำนวนของเลขจำนวนเต็มได้ทั้งหมดโดยมีกฎพื้นฐานสองข้อ ได้แก่

ก. เปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบแทนจำนวนที่น้อยที่สุดทุกครั้ง

ข. ถ้าที่ตำแหน่งที่ τ^0 มีเลขโดดที่มีค่า 1 อยู่ให้ทำการกำจัดโดยการทดไปด้านหลัง เริ่มจากการตรวจสอบในตำแหน่ง τ^{-2} ว่ามีเลขโดดที่มีค่าอยู่หรือไม่ (เนื่องจากตอนนี้อยู่ในรูปแบบแทนจำนวนที่น้อยที่สุดซึ่งจะไม่มีเลขโดดที่มีค่าที่ติดกันอยู่ทำให้ไม่จำเป็นต้องตรวจสอบในตำแหน่งที่ τ^{-1}) ถ้าไม่มีให้ทำการคลายค่าจากสมการ $\tau^n = \tau^{n-1} + \tau^{n-2}$ ได้เป็น 1.00 มาเป็น 0.11 ถ้าที่ตำแหน่ง τ^{-2} มีเลขโดดที่มีค่าอยู่ ก็ให้ทำการตรวจสอบที่ตำแหน่ง τ^{-4} ว่ามีเลขโดดที่มีค่าอยู่หรือไม่ เพื่อคลายค่าเลขโดดที่มีค่าที่ตำแหน่ง τ^{-2} ไปก่อนแล้วจึงทำการคลายค่าของเลขโดดที่มีค่าของตำแหน่ง τ^0 ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะสามารถกำจัดเลขโดดที่มีค่าที่ตำแหน่งที่ τ^0 แต่ถ้ารูปแบบแทนจำนวนนั้นเป็น 1.010101010101... ให้ทำรูปแบบแทนจำนวนเปลี่ยนเป็น 10.0000000...

2.7.1 การบวกในระบบจำนวนฐานเศษส่วนอตรรกยะของเบิร์กแมน

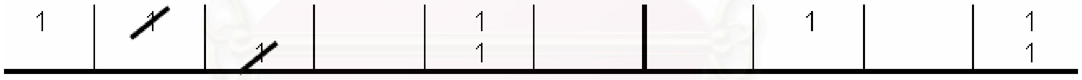
การบวกในระบบจำนวนฐานเศษส่วนอตรรกยะของเบิร์กแมนนั้น ใช้วิธีคล้ายกับการสร้างรูปแบบแทนจำนวนที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น โดยใช้อัลกอริทึมตามกฎการสังวัตนาการและการ

คลายค่าในการจัดตำแหน่งของเลขโดดที่มีค่า เพื่อให้เลขโดดที่มีค่าไม่ตรงกันและไม่ติดกันเพื่อให้อยู่ในรูปแบบแทนจำนวนที่น้อยที่สุด ดังตัวอย่างต่อไปนี้

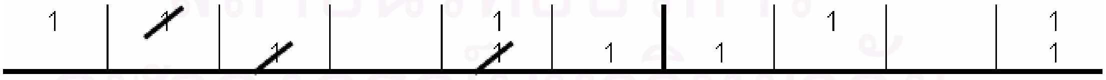
ตัวอย่างที่ 2.2 *ทำคำนวณทางคณิตศาสตร์การบวก* 9+6 = (10010.0101+1010.0001) *ในระบบจำนวนอตรรกยะของเบิร์กแมน*

วิธีทำ ในการคำนวณจะใช้รูปภาพเพื่อง่ายต่อการอธิบายการบวกดังนี้ (แสดงในรูปที่ 2.2 โดยเส้นหนาคือตำแหน่งของจุดทศนิยมในรูปแบบแทนจำนวน) จากรูปที่ 2.3 จะเห็นว่า τ^4 และ τ^3 ทั้งคู่มีค่าให้เราสามารถสังวัตนาการได้ จากนั้นจะเห็นว่าไม่มีจุดที่เราจะทำการสังวัตนาการอีก ทำให้เราต้องใช้คุณสมบัติอีกประการของระบบจำนวนนี้ก็คือการคลายค่าโดยเราจะทำการคลายค่าที่ตำแหน่ง τ^1 ได้ ดังรูปที่ 2.4 จะเห็นว่าเราสามารถทำการสังวัตนาการได้สองชุดด้วยกัน ดังรูปที่ 2.5 และ 2.6 จากนั้นจึงทำการคลายค่าอีกครั้งที่ตำแหน่ง τ^{-4} ดังรูปที่ 2.7 และจึงทำการสังวัตนาการอีกครั้ง ดังรูปที่ 2.8 จะเห็นว่า ไม่มีเลขโดดที่มีค่าที่ตรงกันและอยู่ติดกันอีก จึงได้คำตอบเป็นรูปแบบแทนจำนวนที่น้อยที่สุด

รูปที่ 2.2 รูปแบบแทนจำนวนก่อนการบวก



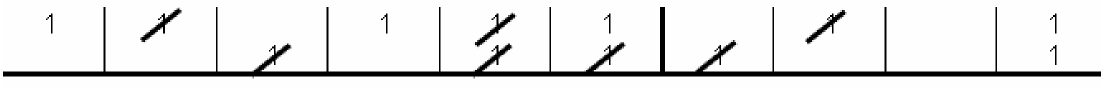
รูปที่ 2.3 รูปแบบแทนจำนวนหลังจากสังวัตนาการที่ τ^4 และ τ^3



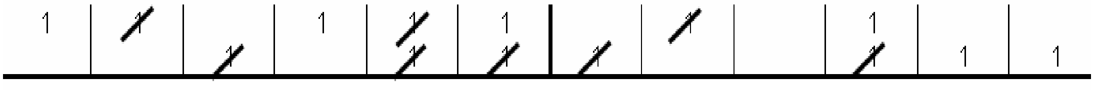
รูปที่ 2.4 รูปแบบแทนจำนวนหลังจากคลายค่าที่ตำแหน่ง τ^1

รูปที่ 2.5 รูปแบบแทนจำนวนหลังจากสังวัตนาการที่ตำแหน่ง τ^1 และ τ^0

สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 2.6 รูปแบบแทนจำนวนหลังจากสังวัตนาการที่ตำแหน่ง τ^{-1}และ τ^{-2}



รูปที่ 2.7 รูปแบบแทนจำนวนหลังจากคลายค่าที่ตำแหน่ง τ^{-4}

รูปที่ 2.8 รูปแบบแทนจำนวนหลังจากสังวัตนาการที่ตำแหน่ง τ^{-4} และ τ^{-5}

ผลลัพธ์ของการคำนวณเป็น (100101.001001) = 15

□

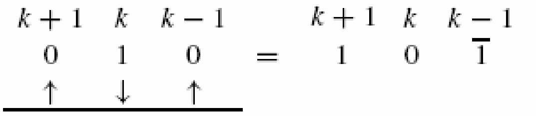
จากการดำเนินการพื้นฐานทางเลขคณิตของระบบจำนวนนี้แสดงให้เห็นว่าการสังวัตนาการและการคลายค่าเป็นส่วนสำคัญที่ทำให้สามารถทำการดำเนินการพื้นฐานทางเลขคณิตได้ ซึ่งทั้งการสังวัตนาการและการคลายค่าจะทำการคำนวณเมื่อไม่สามารถทำการคำนวณต่อไปได้แต่ยังคงมีเลขโดดที่มีค่าของรูปแบบแทนจำนวนที่มาทำการคำนวณทั้งสองตรงกันอยู่ ซึ่งทั้งสองกระบวนการนี้เป็นการทำงานที่ต้องขึ้นอยู่กับจำนวนที่นำมาทำการคำนวณเป็นสำคัญ

2.8 ระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล (Ternary Mirror-symmetrical number system)

ในปี ค.ศ. 2001 อเล็กซี สแตกฮอฟ ได้นำเสนอระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล [2-4] ซึ่งได้มาจากการพัฒนาจากระบบจำนวนฐานเศษส่วนอตรรกยะของเบิร์กแมน ซึ่งระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล ได้ใช้พื้นฐานของระบบจำนวนแบบซ้ำซ้อนมาประยุกต์ใช้โดยทำการเพิ่มชุดเลขโดดจากเดิม $\{0,1\}$ มาเป็น $\{\bar{1},0,1\}$ และทำการแปลงผันจากระบบจำนวนฐานเศษส่วนอตรรยกะของเบิร์กแมนที่อยู่ในรูปแบบแทนจำนวนที่น้อยที่สุดโดยใช้กฎในการแปลงผันตามสมการ (2.5)

$$\tau^{k} = \tau^{k+1} - \tau^{k-1} \tag{2.5}$$

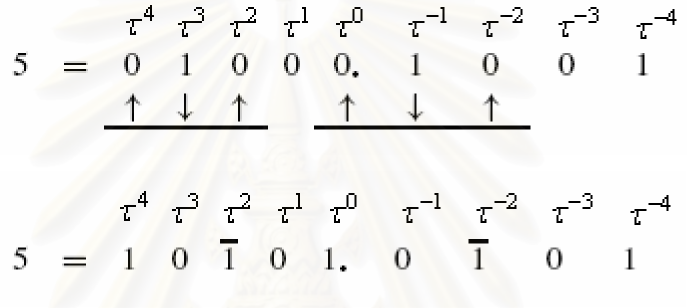
โดยกฎการแปลงผัน จะใช้เฉพาะเลขโดดที่ตำแหน่ง τ มีกำลังเป็นคี่เท่านั้น จะได้ผลดังรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9 การแปลงผันจากระบบจำนวนฐานเศษส่วนอตรรกยะของเบิร์กแมนไปสู่ระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล

ตัวอย่างที่ 2.6 *การแปลงผันรูปแบบแทนจำนวน* 5 = (1000.1001) *จากระบบจำนวนฐานเศษส่วนอตรรกยะของเบิร์กแมนไปสู่ระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล*

วิธีทำ แสดงดังรูปที่ 2.10



รูปที่ 2.10 ตัวอย่างการแปลงผัน

ผลลัพธ์ของการแปลงผันจะได้ว่า 5 = (1000.1001) = $(10\bar{1}01.0\bar{1}01)$

□

จากตัวอย่างที่ 2.6 จะเห็นว่ารูปแบบแทนจำนวนที่ได้จากการแปลงผันนั้นอยู่ในรูปที่มีคุณสมบัติการสะท้อนและผลจากการแปลงผันทุกครั้งจะทำให้เกิดผลอีกอย่างต่อการแทนคือ ที่ตำแหน่ง τ มีกำลังเป็นคี่นั้นมีค่าเป็น 0 เสมอ จึงได้ทำนิยามรูปแบบแทนจำนวนใหม่ดังสมการ (2.6)

$$\|X\| = \sum_{all\,i} d_i \tau^{2i} \tag{2.6}$$

โดยที่ d_i เป็นชุดจำนวนของ $\{\bar{1},0,1\}$ ทำให้จัดรูปใหม่ออกมาดังรูปที่ 2.11

$$\begin{array}{ccccccc} & & \tau^4 & \tau^2 & \tau^0 & \tau^{-2} & \tau^{-4} \\ 5 & = & 1 & \bar{1} & 1. & \bar{1} & 1 \end{array}$$

รูปที่ 2.11 ตัวอย่างรูปแบบแทนจำนวนของเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล

จากรูปที่ 2.11 สรุปได้ว่า 5 = $(10\bar{1}01.0\bar{1}01)$ = $(1\bar{1}1.\bar{1}1)$ ซึ่งจะเห็นได้ว่ารูปแบบการแทนสำหรับทุกจำนวนเต็มนั้นจะมีคุณสมบัติการสะท้อนเสมอ โดยระบบจำนวนฐานเศษส่วนอตรรยกะของเบิร์กแมนและระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอลนั้นได้ถูกใช้งานในส่วนของการแปลง

ค่าระหว่างค่าดิจิตตอลกับค่าอนาล็อค (digit to analog converter, DAC และ analog to digit converter, ADC) [11-12]

2.8.1. การบวกและการลบในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล

การดำเนินการพื้นฐานทางเลขคณิตของระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล จะมีความแตกต่างจากระบบจำนวนฐานสอง คือการทดของสายการทดจากสมการ (2.7)

$$2\tau^{2k} = \tau^{2(k+1)} - \tau^{2k} + \tau^{2(k-1)} \qquad (2.7)$$

จาก สมการ (2.7) สายการทดของระบบจำนวนนี้ทำการทดทั้งไปทางด้านหน้าและไปทางด้านหลัง ซึ่งสามารถสรุปได้เป็นตารางที่ 2.4

ตารางที่ 2.5 รูปแบบการบวกของระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล

b_k \ a_k	$0\bar{1}0$	000	010
$0\bar{1}0$	$\bar{1}1\bar{1}$	$0\bar{1}0$	000
000	$0\bar{1}0$	000	010
010	000	010	$1\bar{1}1$

โดยที่ a_k และ b_k คือค่าเลขโดดตำแหน่ง τ^k ใด ๆ ที่นำมารวมกัน สามารถนำไปใช้กับการบวกได้ดังรูปที่ 2.12

$$\begin{array}{rcccccccc}
5 & = & 0 & 1 & \bar{1} & 1. & \bar{1} & 1 & 0 \\
10 & = & 0 & 1 & 1 & 0. & 1 & 1 & 0 \\
 & & 0 & \bar{1} & 0 & 1. & 0 & \bar{1} & 0 \\
 & & 1 & \leftrightarrow & 1 & & 1 & \leftrightarrow & 1 \\
\hline
15 & = & 1 & \bar{1} & 1 & 1. & 1 & \bar{1} & 1
\end{array}$$

รูปที่ 2.12 การบวกของระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล

ในส่วนของการคำนวณลบทำได้โดยการแปลงผันเลขโดดที่มีค่า 1 เป็นเลขโดดที่มีค่าเป็น $\bar{1}$ และเปลี่ยนเลขโดดที่มีค่าเป็น $\bar{1}$ มาเป็นเลขโดดที่มีค่า 1 แทนและจึงทำการคำนวณบวกตามตารางที่ 2.4 ดังรูปที่ 2.13

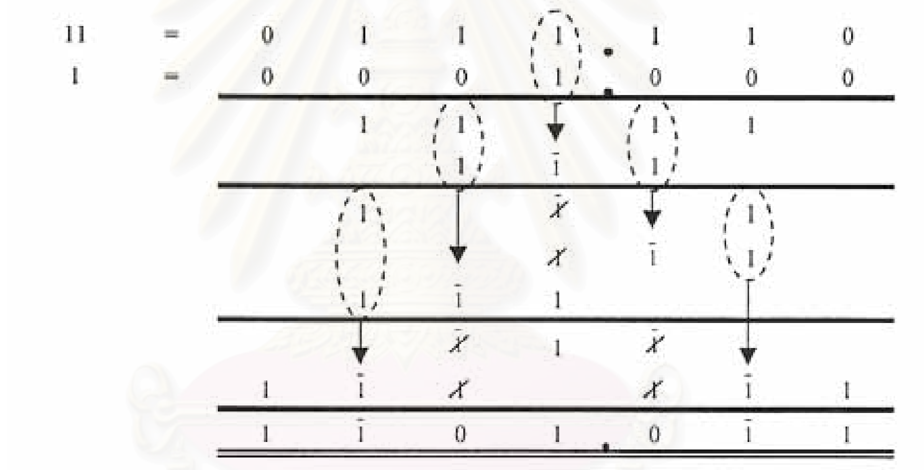
$$
\begin{array}{rcccccccc}
-24 & = & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 1. & 0 & \bar{1} & \bar{1} \\
15 & = & 1 & \bar{1} & 1 & 1. & 1 & \bar{1} & 1 \\
 & & 0 & 1 & 1 & \bar{1}. & 1 & 1 & 0 \\
 & & & \downarrow & 1 & \leftrightarrow & 1 & \downarrow & \\
 & & \bar{1} & \leftrightarrow & \bar{1} & & \bar{1} & \leftrightarrow & \bar{1} \\
\hline
-9 & = & \bar{1} & 1 & 1 & \bar{1}. & 1 & 1 & \bar{1}
\end{array}
$$

รูปที่ 2.13 การลบของระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล

ซึ่งในการคำนวณบวกและลบในระบบจำนวนนี้นั้นรูปแบบที่เลวร้ายที่สุด (worst case) ของการคำนวณนั้นจะเป็นการคำนวณในแบบลำดับ ดังแสดงในตัวอย่างที่ 2.7

ตัวอย่างที่ 2.7 ทำการคำนวณการบวกในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอลระหว่างรูปแบบแทนจำนวน 11 = (0111.110) และ 1 = (0001.000)

วิธีทำ สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.14



รูปที่ 2.14 รูปแบบที่เลวร้ายที่สุดของการบวกในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล

จากรูปที่ 2.14 เป็นการบวกของรูปแบบแทนจำนวนระหว่าง 11 = (0111.110) และ 1 = (0001.000) ซึ่งได้ผลลัพธ์ออกมาเป็น $12=\left(1\bar{1}01.0\bar{1}1\right)$ จะเห็นได้ว่าผลของการบวกนั้นสร้างตัวทดที่กระจายออกไปเรื่อย ๆ ซึ่งทำให้สรุปได้ว่า การคำนวณการบวกและลบในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอลแท้จริงแล้วนั้นยังคงอยู่ในแบบลำดับ

□

2.8.2. การคูณในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล

การคูณในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอลนั้นคล้ายกับการคูณของระบบเลขฐานสอง โดยที่ผลการคูณในแต่ละครั้งจะกระจายออกโดยยึดตำแหน่ง τ^0 เป็นจุดศูนย์กลาง เป็นการดังรูปที่ 2.15 เป็นการแสดงขั้นตอนการคูณระหว่าง $-6\times 2=\left(\bar{1}01.0\bar{1}\times 1\bar{1}.1\right)=\left(\bar{1}10\bar{1}.01\bar{1}\right)=-12$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \bar{1} & 0 & 1. & 0 & \bar{1} & \\
 & & 1 & \bar{1}. & 1 & & \\
\hline
 & & \bar{1} & 0. & 1 & 0 & \bar{1} \\
 & 1 & 0 & \bar{1}. & 0 & 1 & \\
\bar{1} & 0 & 1 & 0. & \bar{1} & & \\
\hline
\bar{1} & 1 & 0 & \bar{1}. & 0 & 1 & \bar{1}
\end{array}
$$

รูปที่ 2.15 ขั้นตอนการคูณ ในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล

2.8.3. การหารในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล

การหารในระบบจำนวนนี้ ทำได้โดยในการหารแต่ละครั้งจะยึดที่ตำแหน่ง τ^0 เป็นหลัก และนำผลหารที่ได้ทั้งหมดมารวมกันภายหลัง โดยจะแสดงให้เห็นในตัวอย่างของการหาร $24\div 2=\left(110\bar{1}.011\div 1\bar{1}.1\right)=\left(1\bar{1}01.0\bar{1}1\right)=12$ ดังรูปที่ 2.16 และ รูปที่ 2.17

$$
\begin{array}{rccccccc|l}
 & 1 & 1 & 0 & \bar{1}_{\bullet} & 0 & 1 & 1 & \quad 1 \quad \bar{1}_{\bullet} \quad 1 \\
\cline{9-9}
 & \bar{1} & 1 & \bar{1} & 0_{\bullet} & 0 & 0 & 0 & 1 \quad 0 \quad 0_{\bullet} \quad 0 \quad = Q_1 \\
\cline{1-8}
 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1}_{\bullet} & 0 & 1 & 1 & \\
 & 1 & \leftrightarrow & 1 & & & & & \\
\cline{1-8}
D_1 = & 1 & \bar{1} & 0 & \bar{1}_{\bullet} & 0 & 1 & 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccccccc|l}
 & 1 & \bar{1} & 0 & \bar{1}_{\bullet} & 0 & 1 & 1 & \quad 1 \quad \bar{1}_{\bullet} \quad 1 \\
\cline{9-9}
 & \bar{1} & 1 & \bar{1} & 0_{\bullet} & 0 & 0 & 0 & 1 \quad 0 \quad 0_{\bullet} \quad 0 \quad = Q_2 \\
\cline{1-8}
D_2 = & 0 & 0 & \bar{1} & \bar{1}_{\bullet} & 0 & 1 & 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccccc|l}
 & \bar{1} & \bar{1}_{\bullet} & 0 & 1 & 1 & \quad 1 \quad \bar{1}_{\bullet} \quad 1 \\
\cline{7-7}
 & 1 & \bar{1}_{\bullet} & 1 & & & \qquad 1_{\bullet} \quad 0 \quad = Q_3 \\
\cline{1-6}
 & 0 & 1_{\bullet} & 1 & 1 & 1 & \\
 & \bar{1} & \leftrightarrow & \bar{1} & & & \\
\cline{1-6}
D_3 = & \bar{1} & 1_{\bullet} & 0 & 1 & 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccccc|l}
 & \bar{1} & 1_{\bullet} & 0 & 1 & 1 & \quad 1 \quad \bar{1}_{\bullet} \quad 1 \\
\cline{7-7}
 & 1 & \bar{1}_{\bullet} & 1 & & & \qquad 1_{\bullet} \quad 0 \quad = Q_4 \\
\cline{1-6}
D_4 = & 0 & 0_{\bullet} & 1 & 1 & 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccc|l}
 & 0_{\bullet} & 1 & 1 & 1 & \quad 1 \quad \bar{1}_{\bullet} \quad 1 \\
\cline{6-6}
 & 0_{\bullet} & \bar{1} & 1 & \bar{1} & \qquad 0_{\bullet} \quad 0 \quad 1 \quad = Q_5 \\
\cline{1-5}
 & 0_{\bullet} & 0 & \bar{1} & 0 & \\
 & & 1 & \leftrightarrow & 1 & \\
\cline{1-5}
D_5 = & 0_{\bullet} & 1 & \bar{1} & 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc|l}
0_{\bullet} & 1 & \bar{1} & 1 & \quad 1 \quad \bar{1}_{\bullet} \quad 1 \\
\cline{5-5}
0_{\bullet} & \bar{1} & 1 & \bar{1} & \qquad 0_{\bullet} \quad 0 \quad 1 \quad = Q_6 \\
\cline{1-4}
0_{\bullet} & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

รูปที่ 2.16 การหารของระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล

	1	0	0.	0		
	1	0	0.	0		
			$\bar{1}$.	0		
			$\bar{1}$.	0		
			0.	0	1	
			0.	0	1	
	$\bar{1}$	0	1.	0	$\bar{1}$	
	$\downarrow$	$\bar{1}$	$\leftrightarrow$	$\bar{1}$	$\downarrow$	
1	$\leftrightarrow$	1		1	$\leftrightarrow$	1
1	$\bar{1}$	0	1.	0	$\bar{1}$	1

รูปที่ 2.17 การนำผลหารมารวมกันในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล

เนื่องจากระบบจำนวนนี้มีรากฐานมาจากระบบจำนวนเศษส่วนอตรรกยะของเบิร์กแมน ทำให้ระบบจำนวนนี้ไม่สามารถที่จะหารเลขเป็นเศษส่วนได้ ซึ่งถ้าทำการหารแล้วรูปแบบแทนจำนวนจะเสียคุณสมบัติการสะท้อนกลายเป็นระบบจำนวนที่มีการแทนไม่รู้จบ (infinite representation)

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 3

ระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่และอัลกอริทึมการคำนวณบวก ลบและคูณแบบขนาน

ในบทนี้จะกล่าวถึง การนิยามระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ซึ่งถูกพัฒนาขึ้นมาจากระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล รวมทั้งอัลกอริทึมการแปลงจากระบบจำนวนเต็มใด ๆ พร้อมทั้งบทพิสูจน์ และอัลกอริทึมการคำนวณบวก ลบและคูณแบบขนานพร้อมทั้งบทพิสูจน์การทำงาน

3.1 ระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ (Half ternary number system)

จากเดิมที่ระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอลที่มีคุณสมบัติของการสะท้อนได้ใช้เลขโดดในรูปแบบแทนจำนวนที่เหมือนกันแต่กลับด้านกัน ทำให้เกิดแนวคิดที่จะทำการลดจำนวนของเลขโดดที่ซ้ำซ้อนกันออกไป จึงใช้แนวคิดในการนิยามระบบจำนวนขึ้นมาใหม่โดยแสดงรูปแบบแทนจำนวนที่มีขนาดเล็กลง ซึ่งส่งผลให้ใช้ทรัพยากรในการจัดเก็บรูปแบบแทนจำนวนน้อยลง

นิยามที่ 3.1 *ระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่หมายถึงระบบจำนวนที่มีฐานมีค่าเป็น* $\tau^{2n}+\tau^{-2n}$ *โดยรูปแบบของการแทนค่าจำนวนเต็ม* X *สามารถเขียนได้ดังนี้*

$$\|X\| = \sum_{i=1} d_i\left(\tau^{2i}+\tau^{-2i}\right)+d_0\tau^0 \tag{3.1}$$

โดยที่ $\tau=\phi$, $d_i, d_0 \in \{1,0,1\}$

จากนิยามบท 3.1 ทำให้เราสามารถสร้างระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ได้ โดยมีรูปแบบแทนจำนวนที่มีค่าเชิงตัวเลข (numerical value) เท่ากับระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล เห็นได้ชัดว่าระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่มีความสมบูรณ์ จำนวนเต็มทุกจำนวนสามารถหารูปแบบแทนจำนวนในระบบนี้ได้ ดังตัวอย่างที่ 3.1

ตัวอย่างที่ 3.1 *จำนวนเต็ม 20 สามารถหารูปแบบแทนจำนวนในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ได้ และเมื่อแทนค่ากลับจะได้ค่าออกมาได้ดังนี้*

$$\begin{aligned}20 &= 1\times\left(\tau^6+\tau^{-6}\right)+0\times\left(\tau^4+\tau^{-4}\right)+1\times\left(\tau^2+\tau^{-2}\right)+(-1)\times\left(\tau^0\right)\\ &= 1\times\left[\left(\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\right)^6+\left(\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\right)^{-6}+1\times\left[\left(\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\right)^2+\left(\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\right)^{-2}\right]+(-1)\times\left(\frac{(1+\sqrt{5})}{2}\right)^0\right]\\ &= 1\times 18+1\times 3+(-1)\times 1\end{aligned}$$

□

3.2 การแปลงจากจำนวนเต็มให้อยู่ในรูปแบบการแทนของระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่

ในการแปลงผันจำนวนเต็มให้อยู่ในรูปแบบแทนจำนวนของระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ จะใช้อัลกอริทึมเชิงละโมบ (greedy algorithm) ในการหารูปแบบการแทน จะใช้วิธีการคำนวณค่าของหลักแต่ละหลักและค่าขอบเขตที่หลักนั้น ๆ สามารถแสดงค่าได้ โดยค่าของหลักแต่ละหลักและค่าของเขตนั้นสามารถคำนวณได้ดังนี้

จากนิยามที่ 3.1 ทำให้สามารถหาค่าของหลักแต่ละหลัก X_i ใด ๆ ได้จากสมการ

$$X_i = \left(\tau^{2i} + \tau^{-2i}\right) : i > 0 \text{ และ } X_0 = \tau^0 = 0$$

โดยที่ $\tau = \phi$, จำนวนเต็ม i คือหลักใด ๆ ในการแทนของระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่

ส่วนการหาค่าขอบเขตที่หลักนั้น ๆ สามารถแสดงค่าได้นั้น กล่าวคือเป็นผลรวมของ X_i ใด ๆ จนถึง X_0 ซึ่งสมการเขียนได้เป็นสมการดังนี้

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\tau^{2i} + \tau^{-2i}\right) + \tau^0 \qquad (3.2)$$

โดยที่ $\tau = \phi$, จำนวนเต็ม i คือหลักใด ๆ ในการแทนของระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่และจำนวนเต็ม n คือหลักใด ๆ ที่ต้องการหาค่าขอบเขต ดังแสดงในตัวอย่างที่ 3.2

ตัวอย่างที่ 3.2 *หาค่าขอบเขตในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ของหลักที่* 4

วิธีทำ จากสมการ (3.1) สามารถแทนค่าได้เป็น

$$\sum_{i=1}^{4}\left(\tau^{2i} + \tau^{-2i}\right) + \tau^0 = \left(\tau^8 + \tau^{-8}\right) + \left(\tau^6 + \tau^{-6}\right) + \left(\tau^4 + \tau^{-4}\right) + \left(\tau^2 + \tau^{-2}\right) + \tau^0$$
$$= 47 + 18 + 7 + 3 + 1 = 76$$

ซึ่งก็คือค่าขอบเขตในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ของหลักที่ 4 มีค่าเท่ากับ 76 นั่นเอง

□

จากตัวอย่างที่ 3.2 จะเห็นได้ว่า การคำนวณค่าขอบเขตนั้นจำเป็นที่จะต้องเก็บค่าของหลักแต่ละหลักไว้เสมอทำให้สิ้นเปลืองทรัพยากรอย่างมากมาย ดังนั้นจึงได้นำสมการ (3.2) มาจัดรูปใหม่ดังนี้

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\tau^{2i} + \tau^{-2i}\right) + \tau^0 = \sum_{i=1}^{n}\tau^{2i} + \sum_{i=1}^{n}\tau^{-2i} + \tau^0 \qquad (3.3)$$

จะเห็นได้ว่าการคำนวณค่าขอบเขตแต่ละครั้งนั้นจำเป็นต้องคำนวณค่าประจำหลักทุกหลักและนำมารวมกันซึ่งใช้เวลาในการคำนวณสูงและมีความยุ่งยาก ดังนั้นจากความรู้เรื่องอนุกรมเรขาคณิต เราสามารถสร้างสูตรอย่างง่ายได้ดังนี้

จาก $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ จะได้สองสมการที่เป็นจริงดังต่อไปนี้ในรูปของ a_1, n, r ดังนี้

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \ldots + a_1 r^{n-1}$$

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots + a_1 r^n$$

นำสมการ (3.3) และ (3.4) มาหักล้างกันจะได้

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1 r^n$$

$$(1-r)S_n = (1-r^n)a_1 = a_1(1-r^n) \quad (3.4)$$

ดังนั้นจะได้ว่า $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$ โดยที่ ค่าของ $r \neq 1$ นำมาแทนสมการ (3.3) จัดรูปใหม่ได้

$$= \frac{\tau^2(\tau^{2n}-1)}{\tau^2-1} + \frac{\tau^{-2}(1-\tau^{-2n})}{1-\tau^{-2}} + \tau^0$$

$$= 1.618(\tau^{2n}-1) + 0.618(1-\tau^{-2n}) + \tau^0$$

$$= 1.618 \times \tau^{2n} - 1.618\ldots + 0.618\ldots - 0.618 \times \tau^{-2n} + \tau^0$$

จาก $\tau^0 = 1$ จัดรูปใหม่ได้

$$= \tau \times \tau^{2n} - 1 - \tau^{-1} \times \tau^{-2n} + 1$$

$$= \tau \times \tau^{2n} - \tau^{-1} \times \tau^{-2n}$$

จาก τ^{-2n} ที่ n ใด ๆ มีค่าน้อยมากทำให้สามารถตัดทิ้งได้

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\tau^{2i} + \tau^{-2i}\right) + \tau^0 = \left\lfloor \tau\left(\tau^{2n}\right) \right\rfloor, \quad (3.5)$$

โดยที่ $n \neq 0$ จากสมการ (3.5) ทำให้เราสามารถหาค่าขอบเขตได้ โดยคำนวณจากค่าหลักแต่ละหลักเท่านั้น ซึ่งทำให้มีความรวดเร็วในการคำนวณยิ่งขึ้น ดังแสดงในตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 ค่าหลักและค่าขอบเขตของหลักที่ n ใด ๆ ในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่

n	$X_i = \tau^{2n} + \tau^{-2n}$	$\sum_{i=1}^{n}\left(\tau^{2i} + \tau^{-2i}\right) + \tau^0 = \left\lfloor \tau\left(\tau^{2n}\right) \right\rfloor$
0	1	-
1	3	4
2	7	11
3	18	29
4	47	76
5	123	199
6	322	521
7	843	1364
8	2207	3571
9	5778	9349
10	15127	24476

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลังจากได้กล่าวถึงการหาค่าหลักและค่าขอบเขตแล้ว จะขอกล่าวถึงอัลกอริทึมการแปลงผันจำนวนเต็มให้อยู่ในรูปแบบแทนจำนวนของระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ ดังอัลกอริทึมที่ 3.1

อัลกอริทึมที่ 3.1 อัลกอริทึมการแปลงจำนวนเต็มให้อยู่ในรูปแบบแทนจำนวนของระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่

Input: Integer X

Output: $Y = \left(y_j y_{j-1} y_{j-2} \ldots y_0\right)$

begin

all $y_i \leftarrow 0$ where $(j \geq i \geq 0)$

while $(X \neq 0)$ **do**

Find minimum integer n that $\lfloor \tau(\tau^{2n}) \rfloor \geq |X|$

If $X > 0$ **do**

$Y_n \leftarrow 1$

$X \leftarrow X - \left(\tau^{2n} + \tau^{-2n}\right)$

else

$Y_n \leftarrow \bar{1}$

$X \leftarrow X + \left(\tau^{2n} + \tau^{-2n}\right)$

enddo

enddo

end.

เพื่อให้เข้าใจในการทำงานของอัลกอริทึมที่ 3.1 มากขึ้น จึงขอยกตัวอย่างการทำงานดังแสดงในตัวอย่างที่ 3.3

ตัวอย่างที่ 3.3 *หารูปแบบแทนจำนวนของจำนวนเต็ม 25 ในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่*

ให้ $X = 25$, All $y_i = 0$

รอบที่ 1

หา n ที่น้อยที่สุดที่สอดคล้องกับอสมการ $\lfloor \tau(\tau^{2n}) \rfloor \geq |X|$

ได้ $n = 3$ และ $X > 0$ ดังนั้น $y_3 \leftarrow 1$

หักลบค่า X กับค่าประจำหลัก $Z_3 = \left(\tau^{2(3)} + \tau^{-2(3)}\right) = 18$

นำ $X - Z_3 = 7 = X'$ ซึ่ง $X' \neq 0$ จึงดำเนินการต่อ

รอบที่ 2

ได้ $n = 2$ และ $X' > 0$ ดังนั้น $y_2 \leftarrow 1$

หักลบค่า X กับค่าประจำหลัก $Z_2 = 7$

นำ X - $Z_1 = 0 = X''$ ซึ่ง $X'' = 0$ จึงหยุดการทำงาน

โดยอัลกอริทึมข้างต้นจะได้รูปแบบแทนจำนวนในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ของจำนวนเต็ม 25 เป็น (*1100*)

□

การพิสูจน์ผลทำงานของอัลกอริทึม

ในที่นี้จะทำการพิสูจน์อัลกอริทึมโดยการแสดงว่า รูปแบบแทนจำนวนที่ได้จากอัลกอริทึมนั้น (โดยที่ y_n ทุกตำแหน่งมีค่าเป็นสมาชิกใน $\{1,0,1\}$ เสมอ) มีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับค่าจำนวนเต็มเริ่มต้นเสมอ จากการพิจารณาอัลกอริทึมจะพบว่า หลักการทำงานนั้นใช้การวนซ้ำ (recursive) โดยหา n ที่สอดคล้องกับสมการ

$$Y_n = \left\lfloor \tau\left(\tau^{2n}\right) \right\rfloor \geq |X|$$

และนำค่า n ที่ได้มาคำนวณค่าตามสมการ

$$X_0 - Z_{n_1} = X_1$$

แล้วจึงนำมาวนซ้ำ หาค่า n ใหม่และคำนวณต่อไป จนได้สมการดังนี้

$$X_1 - Z_{n_2} = X_2$$

$$X_2 - Z_{n_3} = X_3$$

$$\vdots$$

$$X_i - Z_{n_{i+1}} = 0$$

ซึ่งเมื่อนำสมการทั้งหมดมารวมกันจะได้

$$X_0 = Z_{n_1} + Z_{n_2} + Z_{n_3} + \ldots\ldots + Z_{n_{i+1}} \tag{3.6}$$

ทำให้สามารถสรุปได้ว่าค่า Z_n ใด ๆ ที่ได้จากอัลกอริทึมเมื่อนำมารวมกันจะมีค่าเท่ากับ X_0 หรือกล่าวคือจำนวนเต็มตั้งต้นเสมอ

สิ้นสุดการพิสูจน์ ■

3.3 การบวกและลบแบบขนานในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่

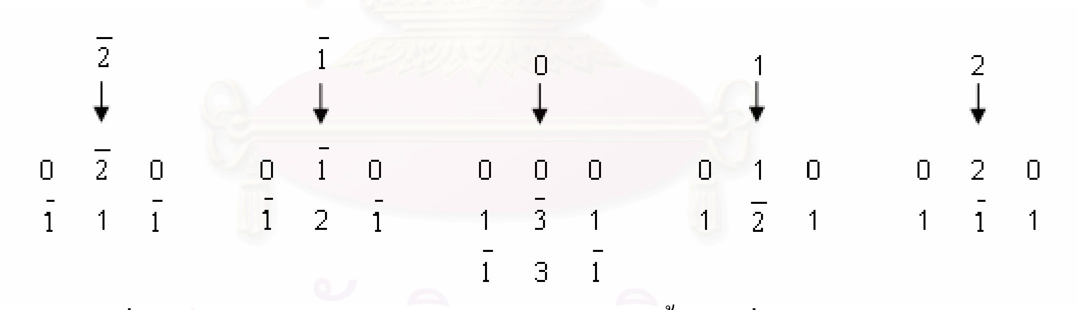
จากการศึกษาระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริคอล จะพบว่าการคำนวณของระบบจำนวนนี้มีวิธีการคำนวณที่แตกต่างจากระบบจำนวนอื่น ๆ กล่าวคือระบบจำนวนนี้การคำนวณจะเกิดตัวทดขึ้นในสองทิศทางไปทั้งข้างหน้าและข้างหลัง ทำให้การคำนวณที่แท้จริงของระบบจำนวนนี้ยังอยู่ในรูปแบบของการประมวลผลแบบลำดับ ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงได้เสนอ

อัลกอริทึมการคำนวณบวก ลบแบบขนาน (โดยการคูณจะกล่าวถึงในหัวข้อถัดไป) โดยในการสร้างอัลกอลิทึมในการคำนวณบวก ลบแบบขนานในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่นี้ ได้ใช้การประยุกต์จากแนวคิดของสถาปัตยกรรมแบบทำควบคู่กัน โดยแบ่งแยกออกมาเป็นสองส่วนคือ การสร้างรูปแบบที่เป็นไปได้ทั้งหมดของเลขโดดแต่ละตัวจากนั้นจึงมาทำการผสานแบบต่อเนื่องจนได้คำตอบที่ถูกต้อง

โดยการอธิบายอัลกอริทึมการคำนวณบวกและลบแบบขนานในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่นี้ จะแยกออกเป็นสองส่วนคือการสร้างรูปแบบของเลขโดดซ้ำซ้อนที่เป็นไปได้ 3 ตำแหน่ง จากเลขโดดที่ทำการแปลงและการผสานรูปแบบของเลขโดด 3 ตำแหน่งนั้นอย่างต่อเนื่องจนได้คำตอบที่ถูกต้อง

3.3.1 การสร้างรูปแบบเลขโดดซ้ำซ้อนที่เป็นไปได้ 3 ตำแหน่ง

จากการประยุกต์แนวคิดจากสถาปัตยกรรมการคำนวณแบบทำควบคู่กัน ทำให้เราต้องสร้างรูปแบบที่เป็นไปได้ของการเกิดการทดออกมาก่อน เพื่อเป็นจุดเริ่มในการคำนวณความเป็นไปได้ของตัวทดที่จะส่งผลถึงเลขโดดในตำแหน่งเลขชี้กำลังถัดไปทั้งหน้าและหลัง ยังผลให้สามารถสร้างออกมาเป็นคำตอบที่ถูกต้องได้โดยไม่จำเป็นต้องรอผลของตัวทดอีก ซึ่งก็คือการคำนวณแบบขนานนั่นเอง โดยทำการสร้าง ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 การแปลงจากเลขโดดมาสู่รูปแบบเลขโดดซ้ำซ้อนที่เป็นไปได้ 3 ตำแหน่ง

โดยเริ่มแรก จำเป็นที่จะต้องทำการรวมค่าของรูปแบบแทนจำนวนที่จะทำการคำนวณโดยทำการรวมค่าในแต่ละตำแหน่งออกมาก่อน โดยจะได้รูปแบบการแทนที่มีเลขโดดที่เป็นสมาชิกใน $\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ แล้วจึงทำการแปลงผันตามรูปแบบที่แสดงในรูปที่ 3.1 โดยในแต่ละคอลัมภ์จะแสดงถึงรูปแบบเลขโดดที่ซ้ำซ้อนที่เป็นไปได้ 3 ตำแหน่งที่จะสร้างได้ โดยตำแหน่งซ้าย, ขวาคือตัวทดที่มีผลไปยังตำแหน่งเลขชี้กำลังถัดไปซ้ายและขวาตามลำดับ และเลขโดดตำแหน่งกลางคือเลขโดดตำแหน่งเดิมที่มีผลอันเนื่องมาจากการเกิดตัวทดซ้ายและขวา โดยจะทำการพิสูจน์ว่าหลังการแปลงค่าที่ได้นั้นมีค่าเชิงตัวเลขเท่ากันกับเลขโดดก่อนการแปลงเสมอ โดยตั้งเป็นทฤษฎีดังนี้

บทตั้งที่ 3.1 *การแปลงเลขโคดที่เป็นสมาชิกใน* $\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ *ไปสู่รูปแบบแทนจำนวนเลขโคด 3 หลัก อันเกิดจากกฎการแปลงดังรูปที่ 3.1 นั้นจะมีค่าคงเดิมเสมอ*

พิสูจน์ : ในการพิสูจน์บทตั้งที่ 3.1 นั้นจะใช้ค่าในรูปแบบแทนจำนวนตามสมการเพื่อพิสูจน์ว่าหลังจากการแปลงแล้วค่ายังคงเดิม โดยนิยามว่าการแปลงจากเลขโคดตั้งต้นใด ๆ a ที่มีสมาชิกเป็น $\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ ไปสู่รูปแบบแทนจำนวนเลขโคด 3 หลัก bcb มีการเปลี่ยนค่าตามสมการ

$$a\tau^2 = b\tau^4 + c\tau^2 + b \tag{3.7}$$

โดยที่กฎการแปลงนั้นจะมีการบังคับให้ b นั้นเป็นสมาชิกใน $\{\bar{1},0,1\}$ เสมอ โดยการพิสูจน์จะถูกแบ่งออกเป็น 5 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 : $a = \bar{2}$

$$\begin{aligned}
-2\tau^2 &= -\tau^2 - \tau^2 \\
-2\tau^2 &= -\tau^2 - \tau^1 - \tau^0 \\
-2\tau^2 &= -\tau^3 - \tau^0 \\
-2\tau^2 &= -\tau^3 - \tau^0 + \tau^2 - \tau^2 \\
-2\tau^2 &= -\tau^3 - \tau^2 + \tau^2 - \tau^0 \\
-2\tau^2 &= -\tau^4 + \tau^2 - 1
\end{aligned}$$

กรณีที่ 2 : $a = \bar{1}$

$$\begin{aligned}
-\tau^2 &= -\tau^2 - \tau^2 + \tau^2 \\
-\tau^2 &= -\tau^2 - \tau^1 - \tau^0 + \tau^2 \\
-\tau^2 &= -\tau^3 + \tau^2 - \tau^0 \\
-\tau^2 &= -\tau^3 + \tau^2 - \tau^0 - \tau^2 + \tau^2 \\
-\tau^2 &= -\tau^3 + \tau^2 - \tau^0 - \tau^2 + \tau^2 \\
-\tau^2 &= -\tau^4 + 2\tau^2 - 1
\end{aligned}$$

กรณีที่ 3 : $a = 0$ มีสองรูปแบบ ได้แก่

$$\begin{aligned}
0\tau^2 &= -\tau^2 - \tau^2 + \tau^2 + \tau^2 \\
0\tau^2 &= -\tau^3 + 2\tau^2 - \tau^0 - \tau^2 + \tau^2 \\
0\tau^2 &= -\tau^4 + 3\tau^2 - 1
\end{aligned}$$

และส่วนกลับคือ

$$0\tau^2 = \tau^4 - 3\tau^2 + 1$$

กรณีที่ 4 : $a = 1$

$$\begin{aligned}
\tau^2 &= \tau^2 + \tau^2 - \tau^2 \\
\tau^2 &= \tau^2 + \tau^1 + \tau^0 - \tau^2 \\
\tau^2 &= \tau^3 + \tau^0 - \tau^2 + \tau^2 - \tau^2 \\
\tau^2 &= \tau^4 - 2\tau^2 + 1
\end{aligned}$$

กรณีที่ 5 : $a = 2$

$$\begin{aligned}
2\tau^2 &= \tau^2 + \tau^2 \\
2\tau^2 &= \tau^2 + \tau^1 + \tau^0 \\
2\tau^2 &= \tau^3 + \tau^0 + \tau^2 - \tau^2 \\
2\tau^2 &= \tau^4 - \tau^2 + 1
\end{aligned}$$

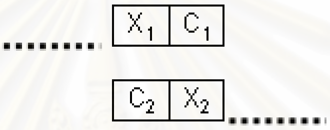
สิ้นสุดการพิสูจน์ ■

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3.3.2 การผสานรูปแบบเลขโดดซ้ำซ้อนที่เป็นไปได้ 3 ตำแหน่ง

ในส่วนนี้จะอธิบายถึงการผสานรวมรูปแบบเลขโดดซ้ำซ้อนที่เป็นไปได้ 3 ตำแหน่งที่ได้ทำการสร้างไว้ในหัวข้อที่ 3.4.1 จะทำการผสานตามตำแหน่งเลขโดดที่ทำการแปลงเป็นสำคัญ โดยจะผสานจากตำแหน่งที่ใกล้กันเข้าด้วยกันทีละคู่ไปเรื่อย ๆ จนสามารถสร้างรูปแบบที่มีความเป็นไปได้ว่าจะเป็นคำตอบที่ถูกต้องไว้และทำควบคุมไม่ให้ทำการสร้างรูปแบบแทนจำนวนที่ไม่สามารถนำไปสู่คำตอบได้โดยการใช้กฎการผสานที่จะกล่าวถึงในภายหลัง ในที่นี้จะทำการอธิบายลักษณะของการผสานอันเป็นแกนหลักของการคำนวณบวกและลบแบบขนานก่อน

การผสานคือการนำเลขโดดที่ตำแหน่งขอบและรองขอบของรูปแบบแทนจำนวนเลขโดด 3 หลัก (และขอบของรูปแบบแทนจำนวนที่เกิดจากหลังการผสานรวมในแต่ละขั้น) ที่อยู่ติดกันมารวมกันแบบขนานหลักต่อหลักโดยไม่มีการส่งตัวทดออกมา ดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 ลักษณะการผสานของเลขโดดที่ตำแหน่งขอบและรองขอบของรูปแบบการแทนจำนวน

จากรูปที่ 3.2 ส่วนบนแสดงถึงตำแหน่งขอบและรองขอบของรูปแบบแทนจำนวนที่เป็นเลขโดด 2 หลักขอบสุดทางด้านขวา $X = d_1d_2d_3\ldots x_1c_1$ ตามลำดับ และส่วนล่างแสดงถึงตำแหน่งขอบและรองขอบของรูปแบบแทนจำนวนที่เป็นเลขโดด 2 หลักขอบสุดทางด้านซ้าย $Y = c_2x_2\ldots e_3e_2e_1$ ตามลำดับ การผสานจะเป็นการรวมค่าของ $x_1 + c_2$ และ $x_2 + c_1$ ภายใต้กฎการผสานดังนี้

$$-c_1 + 2 \geq x_2 \geq -c_1 - 2 \qquad (3.8)$$

และ

$$-c_2 + 2 \geq x_1 \geq -c_2 - 2 \qquad (3.9)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าจากกฎการผสานเป็นการบังคับให้การรวมค่าของ $x_1 + c_2$ และ $x_2 + c_1$ นั้น ทำให้เลขโดดที่ได้หลังจากการผสานต้องเป็นสมาชิกใน $\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ และรวมถึงหลังทำการผสานจะทำการตรวจสอบเลขโดดทุกตัวที่ไม่ใช่ตำแหน่งขอบสองหลักซ้ายและขวาในรูปแบบแทนจำนวนว่าเป็นสมาชิกใน $\{\bar{1},0,1\}$ เท่านั้นอีกด้วย

3.3.3 อัลกอริทึมการบวกและลบแบบขนานในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่

เมื่อนำแนวคิดทั้งหมดที่ได้กล่าวในหัวข้อที่ 3.4.1 และ 3.4.2 มาทำการรวมกันจะสามารถสร้างการคำนวณเชิงคณิตศาสตร์บวกและลบแบบขนานของระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ได้ตามทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.1

การบวกและการลบของรูปแบบแทนจำนวนสองรูปแบบแทนจำนวนในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่นั้นสามารถที่จะทำได้ในการคำนวณแบบขนาน

การพิสูจน์ : ในการพิสูจน์นั้น ผู้วิจัยขอเสนออัลริทึมในการคำนวณบวกและลบแบบขนานพร้อมทั้งการพิสูจน์ความถูกต้อง

อัลกอริทึมที่ 3.2 อัลกอริทึมการคำนวณบวกและลบแบบขนานของระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่

Input: $X = \left(x_n x_{n-1} x_{n-2} \ldots x_0\right)_{\tau^2}$,

$x_i \in D = \{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$

Output: $Y = \left(y_{n+1} y_n y_{n-1} \ldots y_0\right)_{\tau^2}$,

$y_i \in E = \{\bar{1}, 0, 1\}$ where $\|X\| = \|Y\|$

begin

//Convert each digit to redundancy 3-digit forms

for each i $(0 \leq i \leq n)$

case $x_i = 2$ **do**

$\left(x_i^+ x_i x_i^-\right)_1 \leftarrow 020$;

$\left(x_i^+ x_i x_i^-\right)_2 \leftarrow 1\bar{1}1$; **end;**

case $x_i = 1$ **do**

$\left(x_i^+ x_i x_i^-\right)_1 \leftarrow 010$;

$\left(x_i^+ x_i x_i^-\right)_2 \leftarrow 1\bar{2}1$; **end**;

case $x_i = 0$ **do**

$\left(x_i^+ x_i x_i^-\right)_1 \leftarrow 000$;

$\left(x_i^+ x_i x_i^-\right)_2 \leftarrow 1\bar{3}1$;

$\left(x_i^+ x_i x_i^-\right)_3 \leftarrow \bar{1}3\bar{1}$; **end;**

case $x_i = \bar{1}$ **do**

$\left(x_i^+ x_i x_i^-\right)_1 \leftarrow 0\bar{1}0$;

$\left(x_i^+ x_i x_i^-\right)_2 \leftarrow \bar{1}2\bar{1}$; **end;**

case $x_i = \bar{2}$ **do**

$\left(x_i^+ x_i x_i^-\right)_1 \leftarrow 0\bar{2}0$;

$\left(x_i^+ x_i x_i^-\right)_2 \leftarrow \bar{1}1\bar{1}$; **end**;

enddo;

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

//Merge algorithm

$m \leftarrow 2$;

while $m < n$ **do**

for $(l \leftarrow n; l > 1; l \leftarrow l - m)$ **do**

for all a **and** b

if boundary digits satisfy the merging rules **do**

for all possible a, b **do**

$(x_l^+)_{ab} \leftarrow (x_l^+)_a$;

all $(x_i)_{ab} \leftarrow (x_i)_a$;

$(x_{(l+1-(m/2))})_{ab} \leftarrow (x_{(l+1-(m/2))})_a + (x^+_{(l-(m/2))})_b$;

$(x_{(l-(m/2))})_{ab} \leftarrow (x_{(l-(m/2))})_b + (x^-_{(l+1-(m/2))})_a$;

all $(x_i)_{ab} \leftarrow (x_i)_b$;

$(x^-_{(l+1-m)})_{ab} \leftarrow (x^-_{(l+1-m)})_b$;

if all digits that are not the boundary digit $\in \{\bar{2}, 2\}$ **do** delete the representation;

enddo;

enddo;

$m \leftarrow m \times 2$;

enddo.

//Merge with X_0

for all a **and** b

if boundary digits satisfy the merging rules **do**

for all possible a, b

$(x_{n+1})_{ab} \leftarrow (x_n^+)_a$;

for each j $(n > j > 1)$

all $(x_i)_{ab} \leftarrow (x_i)_a$;

end;

$(x_1)_{ab} \leftarrow (x_1)_a + (x_0^+)_b$;

$(x_0)_{ab} \leftarrow 2(x_1^-)_a + (x_0)_b$;

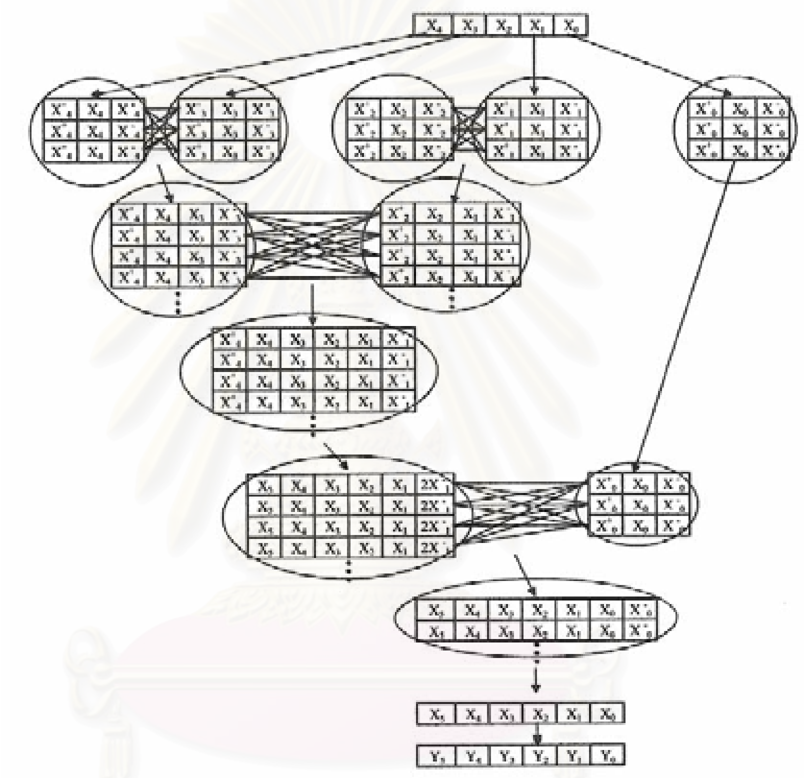
if all digits that are not the boundary digit $\in \{\bar{2}, 2\}$ **do** delete the representation;

end;

end;

```
//digit checking process
    for all representation do
        if digit set in {1̄,0,1} do
            (y_{n+1} y_n y_{n-1} ... y_0)_{τ^2} ← (x_{n+1} x_n x_{n-1} ... x_0) ;
        enddo;
end.
```

หรือสามารถอัลกอริทึมที่ 3.2 ได้ดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 อัลกอริทึมการบวกและลบแบบขนานของระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่

การพิสูจน์ความถูกต้องของอัลกอริทึมที่ 3.2 จะแบ่งเป็นสองส่วนคือ การพิสูจน์ความสมเหตุสมผลจากการผสานตามกฎการผสานที่ถูกใช้ในอัลกอริทึม และการพิสูจน์ความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากอัลกอริทึม โดยจะเริ่มจากการพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของการผสานก่อน

การพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของการผสาน

จากรูปที่ 3.3 เป็นการแสดงวิธีการทำงานของอัลกอริทึม การทำงานจะเริ่มจากการรวมค่าของรูปแบบแทนจำนวนสองรูปแบบแทนจำนวนที่จะมาทำการบวกและลบกันหลักต่อหลัก จากนั้นจึงมาทำการแปลงสู่รูปแบบเลขโดดซ้ำซ้อนที่เป็นไปได้ 3 หลักตามกฎการแปลงซึ่งในขั้นตอนนี้ได้ทำการพิสูจน์ในบทตั้งที่ 3.1 แล้วว่าการแปลงนั้นยังคงมีค่าคงเดิมอยู่ และต่อมาจึง

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เริ่มทำการผสานทีละคู่ของรูปแบบแทนจำนวนที่มีตำแหน่งใกล้เคียงกันเป็นคู่ ๆ ภายใต้กฎการผสานซึ่งเลขโดดที่ตำแหน่งขอบ 2 หลัก (ทั้งซ้ายและขวา) ของทุกรูปแบบแทนจำนวน ในระหว่างการทำงานของอัลกอริทึมไม่สามารถที่จะรวมกับเลขโดดที่ตำแหน่งขอบ 2 หลักของทุกรูปแบบแทนจำนวนได้ ดังนั้นจึงจำเป็นต้องทำการพิสูจน์ว่าการผสานสามารถที่จะเกิดขึ้นได้ในทุกการผสานอย่างน้อย 1 ครั้งเสมอเพื่อนำไปสู่คำตอบที่ถูกต้องต่อไป

เมื่อพิจารณาอัลกอริทึม 3.2 จะพบว่าเลขโดดที่ตำแหน่งขอบ 2 หลัก (ทั้งซ้ายและขวา) ที่ถูกนำมาผสานกัน มีอยู่ด้วยกัน 21 รูปแบบด้วยกัน ($x_1, x_2 \in \{\bar{3}, \bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2, 3\}$ และ $c_1, c_2 \in \{\bar{1}, 0, 1\}$) ซึ่งแท้จริงแล้ว เลขโดดที่ตำแหน่งขอบ 2 หลักที่เกิดขึ้นในอัลกอริทึมที่ 3.2 นั้นจะไม่ปรากฏรูปแบบเลขโดดที่ตำแหน่งขอบ 2 หลักดังต่อไปนี้

$x = \bar{3}$ กับ $c = \bar{1}$,

$x = \bar{2}$ กับ $c = \bar{1}$,

$x = \bar{1}$ กับ $c = \bar{1}$,

$x = 1$ กับ $c = 1$,

$x = 2$ กับ $c = 1$,

และ $x = 3$ กับ $c = 1$.

เนื่องจากสมการการแปลงค่าเลขโดดมาสู่รูปแบบแทนจำนวนที่เป็นไปได้ 3 หลักดังนี้

$$2\tau^{2i} = \tau^{2(i+1)} - \tau^{2i} + \tau^{2(i-1)}, \tag{3.10}$$

$$2\tau^{2i} - \tau^{2i} = \tau^{2i} = \tau^{2(i+1)} - 2\tau^{2i} + \tau^{2(i-1)}, \tag{3.11}$$

$$2\tau^{2i} - 2\tau^{2i} = 0\tau^{2i} = \tau^{2(i+1)} - 3\tau^{2i} + \tau^{2(i-1)}, \tag{3.12}$$

$$0\tau^{2i} = -\tau^{2(i+1)} + 3\tau^{2i} - \tau^{2(i-1)} \tag{3.13}$$

โดยค่าสัมประสิทธิของ τ^{2i} และ $\tau^{2(i-1)}$ คือค่าของเลขโดดที่ตำแหน่งขอบ x และ c ตามลำดับ ซึ่งจะเห็นได้ว่าค่าของ x และ c นั้นแตกต่างกันอยู่อย่างน้อย 2 เสมอ ซึ่งการจะเปลี่ยนแปลงค่าให้กลับมามีลักษณะเหมือนเลขโดดที่ตำแหน่งขอบ 2 หลักที่กล่าวมานั้น จำเป็นที่จะต้องมีการเปลี่ยนแปลงค่าของ x หรือ c อย่างน้อย 2 ขึ้นไปในการผสานแต่ละครั้งเพื่อที่จะทำให้เกิดเลขโดดที่ตำแหน่งขอบตามรูปแบบดังที่กล่าวข้างต้น (การผสานมากสุดในตำแหน่งหนึ่ง ๆ ของอัลกอริทึมนี้คือ 2 ครั้งซึ่งหลังจากการผสาน 2 ครั้งแล้วตำแหน่งนั้นจะไม่มีทางเป็นเลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวนใด ๆ อีก) แต่การเปลี่ยนแปลงค่าต่อการผสานแต่ละครั้งนั้นไม่เพียงพอต่อการสร้างให้เกิดเลขโดดที่ตำแหน่งขอบที่กล่าวมาข้างต้น 6 รูปแบบได้ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่ารูปแบบของเลขโดดที่ตำแหน่งขอบ 2 หลักที่เกิดขึ้นในอัลกอริทึมนั้นเหลือเพียงแค่ 15 รูปแบบเท่านั้น

ในขั้นต่อไปของการพิสูจน์ จะทำการแบ่งกลุ่มของเลขโดดที่ตำแหน่งขอบ 2 หลักที่เกิดขึ้นพร้อมกันเสมอออกมาเป็น 8 กลุ่มด้วยกัน อันได้แก่

1. $x = \bar{2}$ กับ $c = 1, x = 1$ กับ $c = 0$
2. $x = 2$ กับ $c = \bar{1}, x = \bar{1}$ กับ $c = 0$
3. $x = \bar{3}$ กับ $c = 0, x = 0$ กับ $c = \bar{1}$
4. $x = 3$ กับ $c = 0, x = 0$ กับ $c = 1$
5. $x = \bar{2}$ กับ $c = 0, x = 1$ กับ $c = \bar{1}$
6. $x = 2$ กับ $c = 0, x = \bar{1}$ กับ $c = 1$
7. $x = 0$ กับ $c = 0, x = \bar{3}$ กับ $c = 1$
8. $x = 0$ กับ $c = 0, x = 3$ กับ $c = \bar{1}$

จากข้างต้น กลุ่มที่ 1 และ 2, กลุ่มที่ 3 และ 4, กลุ่มที่ 5 และ 6, กลุ่มที่ 7 และ 8 เป็นส่วนกลับของกันและกันซึ่งการพิสูจน์จะคล้ายกันเพียงแต่กลับค่าของทุกสมการเท่านั้น ดังนั้นในการพิสูจน์จะพิสูจน์เพียงเฉพาะกลุ่มที่ 1, 3, 5 และ 7 เท่านั้น

กลุ่มที่ 1

พิจารณาจากรูปแบบแทนจำนวน $Y = y_m \ldots y_0 \bar{2} 1$ เกิดขึ้น จะทำการพิสูจน์ว่าจะมีรูปแบบแทนจำนวน $Z = z_m \ldots z_0 10$ เกิดขึ้นเสมอในระหว่างการทำงานของอัลกอริทึมการคำนวณบวกและลบแบบขนานในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่

พิจารณาขอบของรูปแบบแทนจำนวน $Y : y = y_0 \bar{2} 1$ มีค่าตามสมการ

$$y = y_0 \tau^{2(i+1)} - 2\tau^{2i} + \tau^{2(i-1)} \qquad (3.14)$$

บวกด้วยสมการ (3.11) ที่มีค่าเป็น 0 เสมอ จะได้สมการที่มีรูปดังนี้

$$y = z_0 \tau^{2(i+1)} + \tau^{2i} + 0\tau^{2(i-1)} \qquad (3.15)$$

โดยสมการด้านบนนั้นคือสมการเชิงตัวเลขของรูปแบบแทนจำนวน $Z = z_m \ldots z_0 10$ แสดงให้เห็นว่ารูปแบบขอบทั้งสองจะเกิดขึ้นพร้อมกันเสมอ

กลุ่มที่ 3

พิจารณาจากรูปแบบแทนจำนวน $Y = y_m \ldots y_0 \bar{3} 0$ เกิดขึ้น จะทำการพิสูจน์ว่าจะมีรูปแบบแทนจำนวน $Z = z_m \ldots z_0 0 \bar{1}$ เกิดขึ้นเสมอในระหว่างการทำงานของอัลกอริทึมการคำนวณบวกและลบแบบขนานในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่

พิจารณาขอบของรูปแบบแทนจำนวน $Y : y = y_0 \bar{3} 0$ มีค่าตามสมการ

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$y = y_0\tau^{2(i+1)} - 3\tau^{2i} + 0\tau^{2(i-1)} \tag{3.16}$$

บวกด้วยสมการ (3.11) ที่มีค่าเป็น 0 เสมอ จะได้สมการที่มีรูปดังนี้

$$y = z_0\tau^{2(i+1)} + 0\tau^{2i} - \tau^{2(i-1)} \tag{3.17}$$

โดยสมการด้านบนนั้นคือสมการเชิงตัวเลขของรูปแบบแทนจำนวน $Z = z_m \ldots z_0 0\bar{1}$ แสดงให้เห็นว่ารูปแบบขอบทั้งสองจะเกิดขึ้นพร้อมกันเสมอ

กลุ่มที่ 5

พิจารณาจากรูปแบบแทนจำนวน $Y = y_m \ldots y_0 \bar{2}0$ เกิดขึ้น จะทำการพิสูจน์ว่าจะมีรูปแบบแทนจำนวน $Z = z_m \ldots z_0 1\bar{1}$ เกิดขึ้นเสมอในระหว่างการทำงานของอัลกอริทึมการคำนวณบวกและลบแบบขนานในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่

พิจารณาขอบของรูปแบบแทนจำนวน $Y : y = y_0 \bar{2}0$ มีค่าตามสมการ

$$y = y_0\tau^{2(i+1)} - 2\tau^{2i} + 0\tau^{2(i-1)} \tag{3.18}$$

บวกด้วยสมการ (3.11) ที่มีค่าเป็น 0 เสมอ จะได้สมการที่มีรูปดังนี้

$$y = z_0\tau^{2(i+1)} + \tau^{2i} - \tau^{2(i-1)} \tag{3.19}$$

โดยสมการด้านบนนั้นคือสมการเชิงตัวเลขของรูปแบบแทนจำนวน $Z = z_m \ldots z_0 1\bar{1}$ แสดงให้เห็นว่ารูปแบบขอบทั้งสองจะเกิดขึ้นพร้อมกันเสมอ

กลุ่มที่ 7

พิจารณาจากรูปแบบแทนจำนวน $Y = y_m \ldots y_0 00$ เกิดขึ้น จะทำการพิสูจน์ว่าจะมีรูปแบบแทนจำนวน $Z = z_m \ldots z_0 \bar{3}1$ เกิดขึ้นเสมอในระหว่างการทำงานของอัลกอริทึมการคำนวณบวกและลบแบบขนานในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่

พิจารณาขอบของรูปแบบแทนจำนวน $Y : y = y_0 00$ มีค่าตามสมการ

$$y = y_0\tau^{2(i+1)} + 0\tau^{2i} + 0\tau^{2(i-1)} \tag{3.20}$$

บวกด้วยสมการ (3.11) ที่มีค่าเป็น 0 เสมอ จะได้สมการที่มีรูปดังนี้

$$y = z_0\tau^{2(i+1)} - 3\tau^{2i} + \tau^{2(i-1)} \tag{3.21}$$

โดยสมการด้านบนนั้นคือสมการเชิงตัวเลขของรูปแบบแทนจำนวน $Z = z_m \ldots z_0 \bar{3}1$ แสดงให้เห็นว่ารูปแบบขอบทั้งสองจะเกิดขึ้นพร้อมกันเสมอ

เนื่องด้วยอัลกอริทึมในการคำนวณบวกและลบแบบขนาน จะทำการสร้างรูปแบบแทนจำนวนที่เป็นไปได้ที่จะนำไปสู่คำตอบที่ถูกต้องทั้งหมด ภายใต้ข้อจำกัดคือ ตำแหน่งรองขอบ x จะต้องเป็น

สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สมาชิกใน $\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ และตำแหน่งขอบสุด c จะต้องเป็นสมาชิกใน $\{\bar{1},0,1\}$ ดังนั้นรูปแบบแทนจำนวนที่มีค่าเท่ากันและมีค่า x และ c ที่อยู่ภายใต้ข้อจำกัดเหล่านี้จะเกิดขึ้นพร้อมกันเสมอ

หลังจากที่ได้ทำการแบ่งกลุ่มของเลขโดดที่ตำแหน่งขอบ 2 หลักของรูปแบบการแทนที่จะนำมาทำการผสาน จะทำการพิสูจน์ว่าแต่ละกลุ่มของขอบที่เกิดขึ้นพร้อมกันเสมอนั้นสามารถรวมเข้ากับทุกกลุ่มของเลขโดดที่ตำแหน่งขอบ 2หลักเสมอ

กลุ่มที่ 1

พิจารณาจากกำหนดให้ $Y = y_m \ldots y_0 \bar{2}\,1$ คือรูปแบบแทนจำนวนที่จะทำการผสาน (โดยในที่นี้ x_1 คือ $\bar{2}$ และ c_1 คือ 1) จากกฎของการผสานจะทำให้พบว่าเลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวนนี้สามารถผสานได้กับ x_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{\bar{3},\bar{2},\bar{1},0\}$และ c_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{0,1\}$ ในขั้นต่อไปทำการพิจารณาการผสานที่เป็นไปได้ภายใต้กฎของรูปแบบแทนจำนวน $Z = z_m \ldots z_0 10$ ซึ่งสามารถทำการผสานกับ x_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ และ c_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{\bar{1},0\}$ ในท้ายที่สุดจะเหลือเลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวน 2 หลักที่ไม่สามารถผสานได้ภายใต้กฎอยู่สองรูปแบบคือ

$$x_2 = 3 \text{ กับ } c_2 = \bar{1},$$

และ

$$x_2 = 3 \text{ กับ } c_2 = 0.$$

ทั้งสองรูปแบบมีรูปแบบแทนจำนวนที่เกิดขึ้นพร้อมกันเสมอคือ

$$x_2 = 0 \text{ และ } c_2 = 0,$$

และ

$$x_2 = 0 \text{ และ } c_2 = 1.$$

ซึ่งทั้งสองรูปแบบที่สามารถผสานเข้ากับ $Y = y_m \ldots y_0 \bar{2}\,1$ หรือ/และ $Z = z_m \ldots z_0 10$ ได้ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า เลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวนในกลุ่มที่ 1 นั้นสามารถผสานเข้ากับเลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวน 2 หลักใด ๆ ในอัลกอริทึมได้

กลุ่มที่ 2

พิจารณาจากกำหนดให้ $Y = y_m \ldots y_0 2\bar{1}$ คือรูปแบบแทนจำนวนที่จะทำการผสาน (โดยในที่นี้ x_1 คือ 2 และ c_1 คือ $\bar{1}$) จากกฎของการผสานจะทำให้พบว่าเลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวนนี้สามารถผสานได้กับ x_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{0,1,2,3\}$ และ c_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{\bar{1},0\}$ ในขั้นต่อไปทำการพิจารณาการผสานที่เป็นไปได้ภายใต้กฎของรูปแบบแทนจำนวน $Z = z_m \ldots z_0 \bar{1} 0$ ซึ่งสามารถทำการผสานกับ x_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$ และ c_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{0,1\}$ ในท้ายที่สุดจะเหลือเลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวน 2 หลักที่ไม่สามารถผสานได้ภายใต้กฎอยู่สองรูปแบบคือ

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$x_2 = \bar{3}$ และ $c_2 = 1,$

และ $x_2 = \bar{3}$ และ $c_2 = 0.$

ซึ่งทั้งสองรูปแบบมีรูปแบบแทนจำนวนที่เกิดขึ้นพร้อมกันเสมอคือ

$x_2 = 0$ และ $c_2 = 0,$

และ $x_2 = 0$ และ $c_2 = \bar{1}.$

ซึ่งทั้งสองรูปแบบที่สามารถผสานเข้ากับ $Y = y_m \ldots y_0 2\bar{1}$ หรือ/และ $Z = z_m \ldots z_0 \bar{1} 0$ ได้ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า เลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวนในกลุ่มที่ 2 นั้นสามารถผสานเข้ากับเลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวน 2 หลักใด ๆ ในอัลกอริทึมได้

กลุ่มที่ 3

พิจารณาจากกำหนดให้ $Y = y_m \ldots y_0 \bar{3} 0$ คือรูปแบบแทนจำนวนที่จะทำการผสาน (โดยในที่นี้ x_1 คือ $\bar{3}$ และ c_1 คือ 0) จากกฎของการผสานจะทำให้พบว่าเลขโดดที่ตำแหน่งเลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวนนี้สามารถผสานได้กับ x_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$และ c_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{1\}$ ในขั้นต่อไปทำการพิจารณาการผสานที่เป็นไปได้ภายใต้กฎของรูปแบบแทนจำนวน $Z = z_m \ldots z_0 0\bar{1}$ ซึ่งสามารถทำการผสานกับ x_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{\bar{1},0,1,2,3\}$ และ c_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{\bar{1},0,1\}$ ในท้ายที่สุดจะเหลือเลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวน 2 หลักที่ไม่สามารถผสานได้ภายใต้กฎอยู่สองรูปแบบคือ

$x_2 = \bar{3}$ กับ $c_2 = 0,$

$x_2 = \bar{2}$ กับ $c_2 = 0,$

และ $x_2 = \bar{3}$ กับ $c_2 = 1.$

ซึ่งทั้งสองรูปแบบมีรูปแบบแทนจำนวนที่เกิดขึ้นพร้อมกันเสมอคือ

$x_2 = 0$ และ $c_2 = \bar{1},$

$x_2 = 1$ และ $c_2 = \bar{1},$

และ $x_2 = 0$ และ $c_2 = 0.$

ซึ่งทั้งสองรูปแบบที่สามารถผสานเข้ากับ $Y = y_m \ldots y_0 \bar{3} 0$ หรือ/และ $Z = z_m \ldots z_0 0\bar{1}$ ได้ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า เลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวนในกลุ่มที่ 3 นั้นสามารถผสานเข้ากับเลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวน 2 หลักใด ๆ ในอัลกอริทึมได้

กลุ่มที่ 4

พิจารณาจากกำหนดให้ $Y = y_m \ldots y_0 30$ คือรูปแบบแทนจำนวนที่จะทำการผสาน (โดยในที่นี้ x_1 คือ 3 และ c_1 คือ 0) จากกฎของการผสานจะทำให้พบว่าเลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวนนี้สามารถผสานได้กับ x_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$และ c_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{\bar{1}\}$ ในขั้น

ต่อไปทำการพิจารณาการผสานที่เป็นไปได้ภายใต้กฎของรูปแบบแทนจำนวน $Z = z_m \ldots z_0 01$ ซึ่งสามารถทำการผสานกับ x_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{3, \bar{2}, \bar{1}, 0, 1\}$ และ c_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{\bar{1}, 0, 1\}$ ในท้ายที่สุดจะเหลือเลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวน 2 หลักที่ไม่สามารถผสานได้ภายใต้กฎอยู่สองรูปแบบคือ

$x_2 = 3$ กับ $c_2 = 0$,

$x_2 = 2$ กับ $c_2 = 0$,

และ $x_2 = 3$ กับ $c_2 = \bar{1}$.

ซึ่งทั้งสองรูปแบบมีรูปแบบแทนจำนวนที่เกิดขึ้นพร้อมกันเสมอคือ

$x_2 = 0$ กับ $c_2 = 1$,

$x_2 = \bar{1}$ กับ $c_2 = 1$,

และ $x_2 = 0$ กับ $c_2 = 0$.

ซึ่งทั้งสองรูปแบบที่สามารถผสานเข้ากับ $Y = y_m \ldots y_0 30$ หรือ/และ $Z = z_m \ldots z_0 01$ ได้ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า ขอบของรูปแบบแทนจำนวนในกลุ่มที่ 4 นั้นสามารถผสานเข้ากับขอบของรูปแบบแทนจำนวน 2 หลักใด ๆ ในอัลกอริทึมได้

กลุ่มที่ 5

พิจารณาจากกำหนดให้ $Y = y_m \ldots y_0 \bar{2} 0$ คือรูปแบบแทนจำนวนที่จะทำการผสาน (โดยในที่นี้ x_1 คือ $\bar{2}$ และ c_1 คือ 0) จากกฎของการผสานจะทำให้พบว่าเลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวนนี้สามารถผสานได้กับ x_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$และ c_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{0, 1\}$ ในขั้นต่อไปทำการพิจารณาการผสานที่เป็นไปได้ภายใต้กฎของรูปแบบแทนจำนวน $Z = z_m \ldots z_0 1\bar{1}$ ซึ่งสามารถทำการผสานกับ x_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{\bar{1}, 0, 1, 2, 3\}$ และ c_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{\bar{1}, 0, 1\}$ ในท้ายที่สุดจะเหลือเลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวน 2 หลักที่ไม่สามารถผสานได้ภายใต้กฎอยู่สองรูปแบบคือ

$x_2 = \bar{3}$ กับ $c_2 = 0$,

และ $x_2 = \bar{3}$ กับ $c_2 = 1$.

ซึ่งทั้งสองรูปแบบมีรูปแบบแทนจำนวนที่เกิดขึ้นพร้อมกันเสมอคือ

$x_2 = 0$ กับ $c_2 = \bar{1}$,

และ $x_2 = 0$ กับ $c_2 = 0$.

ซึ่งทั้งสองรูปแบบที่สามารถผสานเข้ากับ $Y = y_m \ldots y_0 \bar{2} 0$ หรือ/และ $Z = z_m \ldots z_0 1\bar{1}$ ได้ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า เลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวนในกลุ่มที่ 5 นั้นสามารถผสานเข้ากับเลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวน 2 หลักใด ๆ ในอัลกอริทึมได้

กลุ่มที่ 6

พิจารณาจากกำหนดให้ $Y = y_m \ldots y_0 20$ คือรูปแบบแทนจำนวนที่จะทำการผสาน (โดยในที่นี้ x_1 คือ 2 และ c_1 คือ 0) จากกฎของการผสานจะทำให้พบว่าเลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวนนี้สามารถผสานได้กับ x_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$และ c_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{\bar{1},0\}$ ในขั้นต่อไปทำการพิจารณาการผสานที่เป็นไปได้ภายใต้กฎของรูปแบบแทนจำนวน $Z = z_m \ldots z_0 \bar{1} 1$ ซึ่งสามารถทำการผสานกับ x_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{\bar{3},\bar{2},\bar{1},0,1\}$ และ c_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{\bar{1},0,1\}$ ในท้ายที่สุดจะเหลือเลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวน 2 หลักที่ไม่สามารถผสานได้ภายใต้กฎอยู่สองรูปแบบคือ

$$x_2 = 3 \text{ กับ } c_2 = 0,$$

และ $$x_2 = 3 \text{ กับ } c_2 = \bar{1}.$$

ซึ่งทั้งสองรูปแบบมีรูปแบบแทนจำนวนที่เกิดขึ้นพร้อมกันเสมอคือ

$$x_2 = 0 \text{ กับ } c_2 = 1,$$

และ $$x_2 = 0 \text{ กับ } c_2 = 0.$$

ซึ่งทั้งสองรูปแบบที่สามารถผสานเข้ากับ $Y = y_m \ldots y_0 20$ หรือ/และ $Z = z_m \ldots z_0 \bar{1} 1$ ได้ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า เลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวนในกลุ่มที่ 6 นั้นสามารถผสานเข้ากับเลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวน 2 หลักใด ๆ ในอัลกอริทึมได้

กลุ่มที่ 7

พิจารณาจากกำหนดให้ $Y = y_m \ldots y_0 00$ คือรูปแบบแทนจำนวนที่จะทำการผสาน (โดยในที่นี้ x_1 คือ 0 และ c_1 คือ 0) จากกฎของการผสานจะทำให้พบว่าเลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวนนี้สามารถผสานได้กับ x_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$และ c_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{\bar{1},0,1\}$ ในขั้นต่อไปทำการพิจารณาการผสานที่เป็นไปได้ภายใต้กฎของรูปแบบแทนจำนวน $Z = z_m \ldots z_0 \bar{3} 1$ ซึ่งสามารถทำการผสานกับ x_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{\bar{3},\bar{2},\bar{1},0,1\}$ และ c_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{1\}$ ในท้ายที่สุดจะเหลือเลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวน 2 หลักที่ไม่สามารถผสานได้ภายใต้กฎอยู่สองรูปแบบคือ

$$x_2 = 3 \text{ กับ } c_2 = \bar{1},$$

$$x_2 = 3 \text{ กับ } c_2 = 0,$$

และ $$x_2 = \bar{3} \text{ กับ } c_2 = 0.$$

ซึ่งทั้งสองรูปแบบมีรูปแบบแทนจำนวนที่เกิดขึ้นพร้อมกันเสมอคือ

$$x_2 = 0 \text{ กับ } c_2 = 0,$$

$$x_2 = 0 \text{ กับ } c_2 = 1,$$

และ $$x_2 = 0 \text{ กับ } c_2 = \bar{1}.$$

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ซึ่งทั้งสองรูปแบบที่สามารถผสานเข้ากับ $Y = y_m \ldots y_0 00$ หรือ/และ $Z = z_m \ldots z_0 \bar{3}1$ ได้ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า เลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวนในกลุ่มที่ 7 นั้นสามารถผสานเข้ากับเลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวน 2 หลักใด ๆ ในอัลกอริทึมได้

กลุ่มที่ 8

พิจารณาจากกำหนดให้ $Y = y_m \ldots y_0 00$ คือรูปแบบแทนจำนวนที่จะทำการผสาน (โดยในที่นี้ x_1 คือ 0 และ c_1 คือ 0) จากกฎของการผสานจะทำให้พบว่าเลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวนนี้สามารถผสานได้กับ x_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$และ c_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{\bar{1},0,1\}$ ในขั้นต่อไปทำการพิจารณาการผสานที่เป็นไปได้ภายใต้กฎของรูปแบบแทนจำนวน $Z = z_m \ldots z_0 3\bar{1}$ ซึ่งสามารถทำการผสานกับ x_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{\bar{1},0,1,2,3\}$ และ c_2 ที่เป็นสมาชิกใน $\{\bar{1}\}$ ในท้ายที่สุดจะเหลือเลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวน 2 หลักที่ไม่สามารถผสานได้ภายใต้กฎอยู่สองรูปแบบคือ

$$x_2 = \bar{3} \text{ กับ } c_2 = 1,$$

$$x_2 = \bar{3} \text{ กับ } c_2 = 0,$$

และ $$x_2 = 3 \text{ กับ } c_2 = 0.$$

ซึ่งทั้งสองรูปแบบมีรูปแบบแทนจำนวนที่เกิดขึ้นพร้อมกันเสมอคือ

$$x_2 = 0 \text{ กับ } c_2 = 0,$$

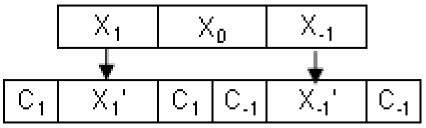
$$x_2 = 0 \text{ กับ } c_2 = \bar{1},$$

และ $$x_2 = 0 \text{ กับ } c_2 = 1.$$

ซึ่งทั้งสองรูปแบบที่สามารถผสานเข้ากับ $Y = y_m \ldots y_0 00$ หรือ/และ $Z = z_m \ldots z_0 3\bar{1}$ ได้ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า เลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวนในกลุ่มที่ 8 นั้นสามารถผสานเข้ากับเลขโดดที่ตำแหน่งขอบของรูปแบบแทนจำนวน 2 หลักใด ๆ ในอัลกอริทึมได้

การพิสูจน์ความถูกต้อง

จากการพิสูจน์ในบทตั้งที่ 3.1 ทำให้เราทราบแน่ชัดว่าค่าของเลขโดดที่ถูกแปลงมาอยู่ในรูปแบบแทนจำนวนเลขโดด 3 หลักนั้นมีค่าคงเดิมอยู่แล้วและในอัลกอริทึมนั้นก็ไม่มีการเพิ่มหรือลดค่านั้นอีกยกเว้นในช่วงของการผสานที่มีการเพิ่มตัวทดที่จะผสานเข้ากับตำแหน่ง τ^0 เป็นสองเท่าซึ่งอาจทำให้ค่ามีการเปลี่ยนแปลงขึ้นดังนั้นจึงจะทำการพิสูจน์ในส่วนนี้เป็นหลัก โดยแนวคิดการเพิ่มค่าของตัวทดเป็นสองเท่านั้นมาจากงานวิจัยเดิมของระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริก-คอล ที่สามารถทำการยุบการบวกลงครึ่งหนึ่งได้โดยการทำซ้ำ ตัวทดที่เข้าสู่ตำแหน่ง τ^0 เข้าไปอีกครั้งหนึ่งโดยจะอธิบายโดยสังเขปจากรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 ลักษณะการทดเข้าสู่ตำแหน่ง τ^0 ในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล

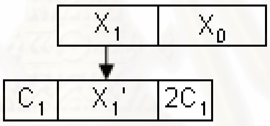
โดยที่ x_0 คือสัมประสิทธิหรือเลขโดดของตำแหน่ง τ^0

x_1 คือสัมประสิทธิหรือเลขโดดของตำแหน่ง τ^1

x_{-1} คือสัมประสิทธิหรือเลขโดดของตำแหน่ง τ^{-1}

และ c_i คือตัวทดที่เกิดมาจากตำแหน่งที่ i

จากคุณสมบัติผันกลับได้ของระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอลนั้นซึ่งบังคับค่า c_1 และ c_{-1} ต้องมีค่าเท่ากันเสมอ ดังนั้นเมื่อทำการลดรูปแบบแทนจำนวนลงเหลือเพียงครึ่งเดียวในการคำนวณนั้นการทดเข้าสู่ตำแหน่ง τ^0 จึงสามารถผสานได้ดังรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 ลักษณะการทดในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่

ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่าการผสานที่มีการเพิ่มตัวทดที่จะผสานเข้ากับตำแหน่ง τ^0 เป็นสองเท่านั้น ไม่ทำให้ค่าของผลลัพธ์มีการเปลี่ยนแปลงใด ๆ เกิดขึ้น

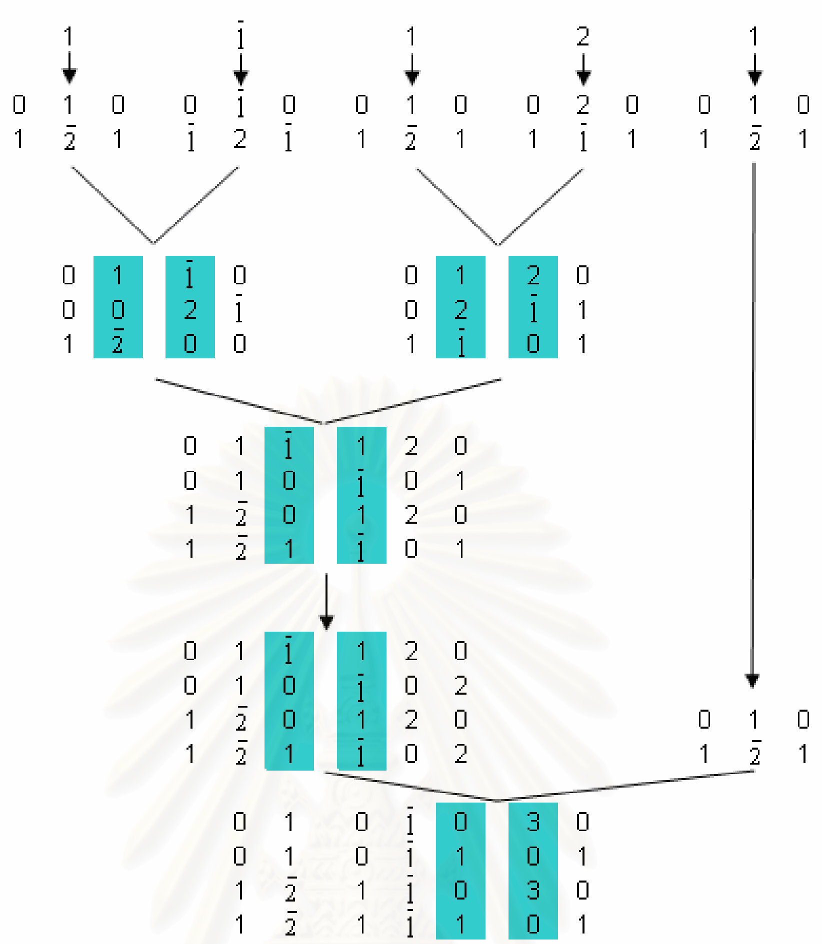
สิ้นสุดการพิสูจน์ ■

เพื่อให้สามารถทำความเข้าใจอัลกอริทึมที่ 3.2 มากยิ่งขึ้น จึงขอยกตัวอย่างการทำงาน ดังแสดงในตัวอย่างที่ 3.4

ตัวอย่างที่ 3.4 *ทำการบวกรูปแบบแทนจำนวนในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ระหว่าง* $40 = (1\bar{1}11)$ *กับ* $3 = (10)$ *แบบขนาน*

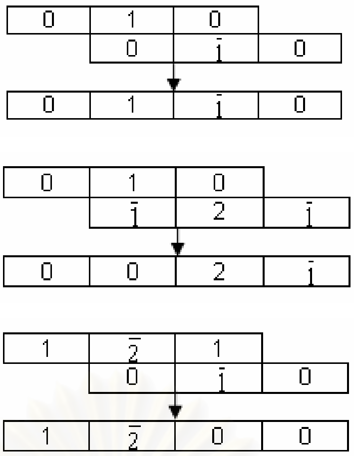
วิธีทำ สามารถทำการคำนวณทางคณิตศาสตร์แบบขนานได้ดังรูปที่ 3.6

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 3.6 ตัวอย่างคำนวณทางคณิตศาสตร์บวกแบบขนาน

จากรูปที่ 3.6 จะเห็นได้ว่าขั้นตอนแรกจะทำการแทนที่เลขโดดแต่ละตัวด้วยรูปแบบแทนจำนวนที่เป็นไปได้ของเลขโดด 3 หลักแทนในทุกหลักพร้อม ๆ กัน จากนั้นจึงเริ่มทำการผสานเป็นคู่ ๆ โดยเว้นเลขโดด 3 หลักของเลขโดดหลักสุดท้ายไว้ ซึ่งจะทำการผสานในตอนหลังแทน โดยสีเข้มที่เกิดหลังการผสานคือตำแหน่งที่มีการรวมค่าของเลขโดดที่ตำแหน่งขอบ 2 หลักเข้าด้วยกัน และขั้นตอนสุดท้ายจะทำการทำซ้ำตัวทดก่อนที่จะผสานเข้ากับเลขโดด 3 หลักของเลขโดดหลักสุดท้ายเพื่อให้ได้รูปแบบแทนจำนวนที่เป็นคำตอบออกมาและทำการตรวจสอบสมาชิกของเลขโดดให้อยู่ในชุดของเลขโดด $\{\bar{1},0,1\}$ โดยในที่นี้จะแสดงให้ดูถึงลักษณะวิธีการผสานโดยจะแสดงการผสานในตำแหน่งของเลขโดดสองตัวซ้ายสุดของรูปที่ 3.6 ดังรูปที่ 3.7



รูปที่ 3.7 ตัวอย่างการผสานในการคำนวณทางคณิตศาสตร์บวกแบบขนาน

จากรูปที่ 3.7 จะเห็นได้ว่า การผสานรวมกันและการรวมค่าหลักต่อหลักออกมาเป็นรูปแบบแทนจำนวนที่เป็นไปได้ต่อไป โดยรูปแบบแทนจำนวน 3 หลักคู่สุดท้าย $1\bar{2}1$ และ $\bar{1}2\bar{1}$ ไม่สามารถรวมกันได้ ตามกฎการผสาน ในท้ายที่สุดหลังทำการผสานไปเรื่อย ๆ จะได้คำตอบที่ถูกต้องคือรูปแบบแทนจำนวนที่มีค่าเท่ากับ $43 = (10\bar{1}10)$

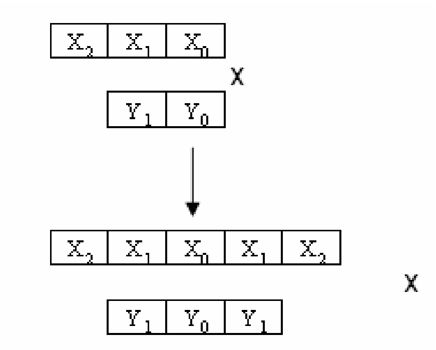
□

3.4 การคูณแบบขนานในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่

จากแนวคิดจากการประยุกต์ใช้แนวคิดของสถาปัตยกรรมแบบทำควบคู่กัน ทำให้สามารถสร้างอัลกอริทึมการคำนวณเชิงคณิตสาสตร์บวกและลบแบบขนานได้ ผู้วิจัยจึงได้นำมาทำการต่อยอดเพื่อประยุกต์ใช้กับการคูณที่แท้จริงแล้วหมายถึงการบวกแบบหลายครั้งของรูปแบบแทนจำนวนที่นำมาคูณกันนั่นเอง

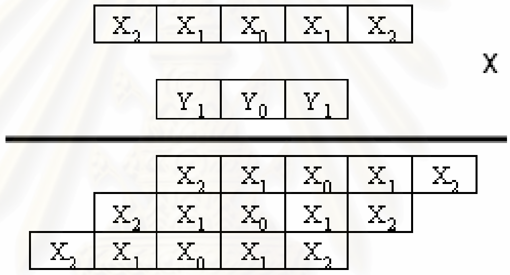
ในงานวิจัยระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอลได้นิยามการคูณไว้ดังที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อที่ 2.8.2 ซึ่งก็คือการทำซ้ำรูปแบบแทนจำนวน จัดตำแหน่งแล้วจึงนำมารวมค่าเหมือนกับการบวกหลายครั้งซ้อนกันนั่นเอง ทำให้เราสามารถนำแนวคิดนี้มาประยุกต์เข้ากับระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ที่ผู้วิจัยได้นำเสนอขึ้น พร้อมทั้งสร้างแนวคิดในการคำนวณเชิงคณิตศาสตร์คูณแบบขนานได้ดังนี้

เริ่มแรกด้วยคุณสมบัติการสะท้อนของระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล เราจึงจำเป็นที่จะต้องนำระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่มาทำการส่วนเพิ่มเติมอันได้แก่เลขโดดชุดที่มีคุณสมบัติการสะท้อนที่ดังรูปที่ 3.8



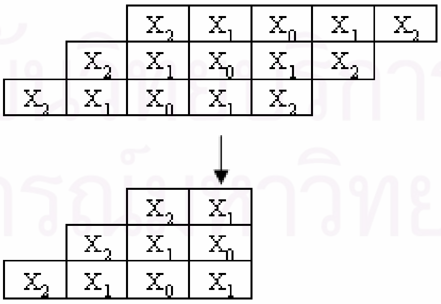
รูปที่ 3.8 การเพิ่มเลขโดดในการคูณของระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่

ขั้นตอนต่อไปจึงทำการสร้างรูปแบบแทนจำนวนที่ต้องมาทำการบวกทั้งหมด ซึ่งกรรมวิธีการสร้างนั้นเหมือนกับระบบจำนวนทั่วไป แต่มีการจัดตำแหน่งที่กล่าวออกไปกล่าวคือ ตำแหน่งของ X_0 ต้องตรงกับ Y_i ใด ๆ เท่านั้น ดังรูปที่ 3.9



รูปที่ 3.9 สร้างรูปแบบแทนจำนวนที่ทำการบวก

เมื่อได้รูปแบบแทนจำนวนที่ทำการรวมค่าแล้ว ขั้นตอนต่อไปจะทำการตัดเลขโดดที่ได้ทำการเพิ่มขึ้นมาเพื่อให้เข้าสู่รูปแบบแทนจำนวนของระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่เหมือนเช่นเดิม ดังรูปที่ 3.10

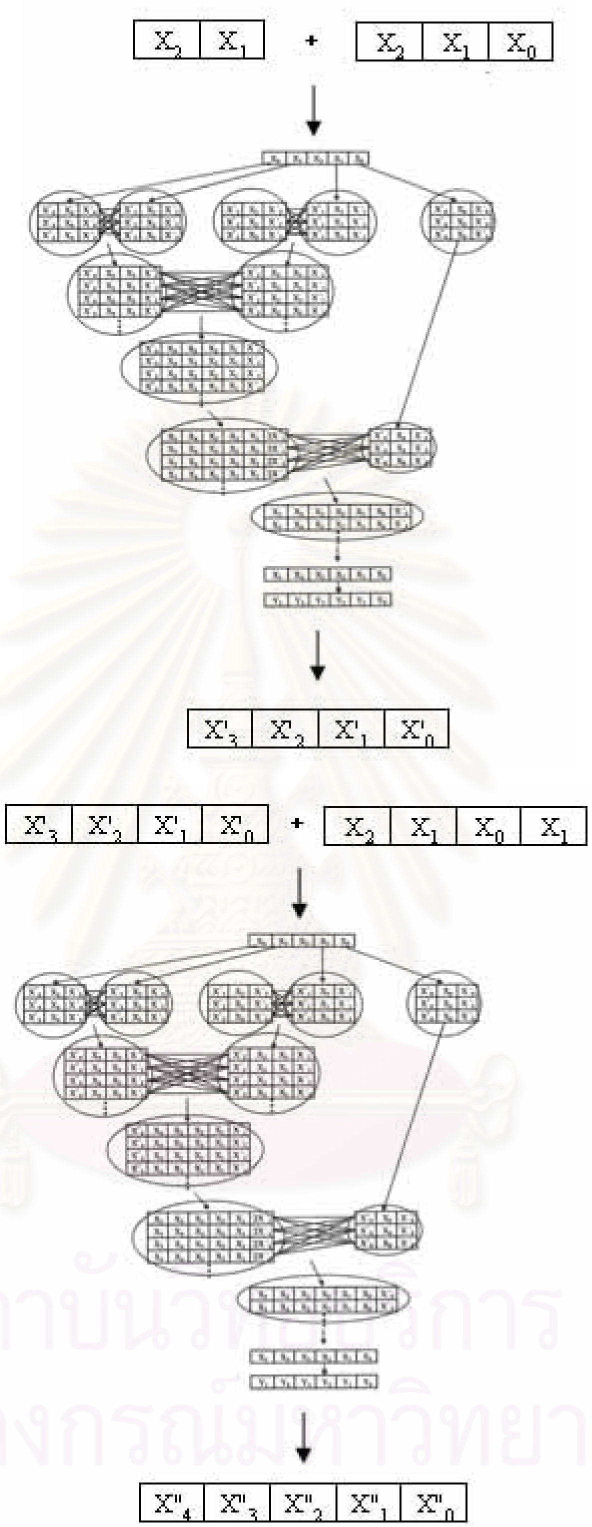


รูปที่ 3.10 การกำจัดเลขโดดในรูปแบบแทนจำนวน

ขั้นตอนต่อไปจะทำการบวกโดยใช้สู่อัลกอริทึมการบวกและลบแบบขนานเป็นคู่ ๆ ซึ่งในท้ายที่สุดก็จะได้คำตอบของการคูณที่ถูกต้องออกมา ดังรูปที่ 3.11

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โดยคำตอบในที่นี้คือ $X'' = x''_4x''_3x''_2x''_1x''_0$



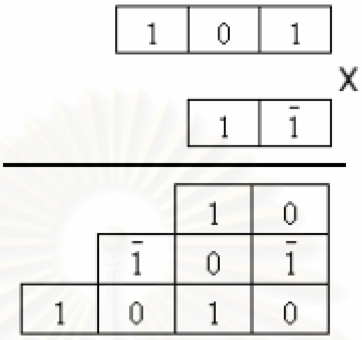
รูปที่ 3.11 การประยุกต์ใช้อัลกอริทึมการบวกและลบแบบขนานในการคูณ

โดยคำตอบในที่นี้คือ $X'' = x''_4x''_3x''_2x''_1x''_0$

เพื่อให้เข้าใจในการทำงานมากขึ้น จึงจะขอแสดงตัวอย่างการทำงาน ดังแสดงในตัวอย่างที่ 3.5

ตัวอย่างที่ 3.5 *ทำการคำนวณทางคณิตศาสตร์คูณของรูปแบบแทนจำนวนในระบบจำนวนฮาล์ฟเทอนารี่ระหว่าง* $8 = (101)$ *กับ* $2 = (1\bar{1})$

วิธีทำ ขั้นตอนการทำงานเริ่มจากทำการสร้างรูปแบบแทนจำนวนที่จะต้องนำมารวมกันจากการคูณได้ดังรูปที่ 3.12



รูปที่ 3.12 การจัดรูปแบบแทนจำนวนเพื่อทำการรวมค่าให้ได้ผลการคูณ

จากการสร้างรูปแบบแทนจำนวนอันเกิดจากการคูณ เราจะได้รูปแบบแทนจำนวนที่จำเป็นต้องนำมารวมค่ากันได้แก่ (10) , $(\bar{1}0\bar{1})$ และ (1010) โดยทำการคำนวณด้วยอัลกอริทึมการบวกและลบแบบขนานโดยเริ่มจากการคำนวณบวกระหว่าง (10) และ $(\bar{1}0\bar{1})$

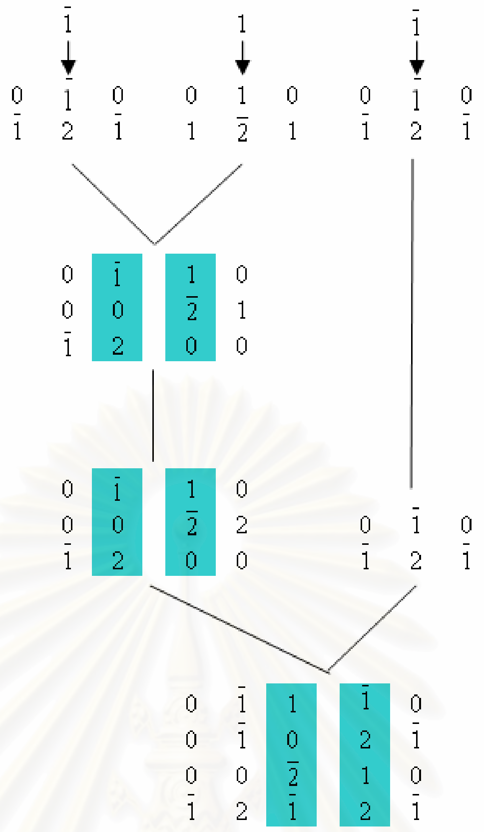
จากอัลกอริทึมการคำนวณบวกและลบในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่จะต้องทำการรวมค่าในแต่ละตำแหน่งแบบขนานก่อน ได้ดังรูปที่ 3.13

$$\begin{array}{ccc} & 1 & 0 \\ \bar{1} & 0 & \bar{1} \\ \hline \bar{1} & 1 & \bar{1} \end{array}$$

รูปที่ 3.13 การรวมค่าในแต่ละหลักระหว่าง (10) และ $(\bar{1}0\bar{1})$

จากนั้นจึงนำมาทำการคำนวณบวกแบบขนานด้วยอัลกอริทึมที่ 4.2ได้ผลลัพธ์ ดังรูปที่ 3.14

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 3.14 การคำนวณบวกแบบขนานระหว่าง (10) และ ($\bar{1}0\bar{1}$)

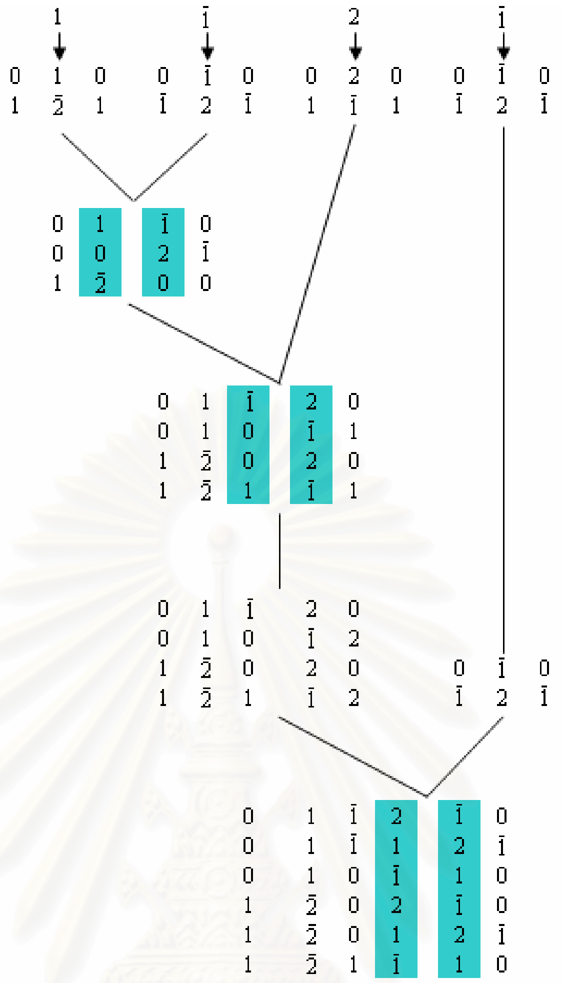
ซึ่งได้คำตอบที่ได้เป็น ($\bar{1}1\bar{1}$) จากนั้นจึงนำคำตอบที่ได้มารวมกับ (1010) โดยรวมค่าแต่ละหลักได้

$$\begin{array}{cccc} & \bar{1} & 1 & \bar{1} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & \bar{1} & 2 & \bar{1} \end{array}$$

รูปที่ 3.15 แสดงการรวมค่าในแต่ละหลักระหว่าง ($\bar{1}1\bar{1}$) และ (1010)

จากนั้นจึงนำมาทำการคำนวณบวกแบบขนาน ดังรูปที่ 3.16

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 3.16 การคำนวณบวกแบบขนานระหว่าง $(\bar{1}1\bar{1})$ และ (1010)

ซึ่งได้คำตอบของการคูณเท่ากับ $(10\bar{1}1)$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 16

□

3.5 สรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงการนิยามระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ อัลกอริทึมการแปลงจากจำนวนมาสู่รูปแบบแทนจำนวนในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ และอัลกอริทึมการคำนวณทางคณิตศาสตร์บวก ลบและคูณแบบขนานในระบบจำนวนภายใต้แนวคิดของสถาปัตยกรรมแบบทำควบคู่กัน เพื่อทำให้การคำนวณทางคณิตศาสตร์ในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริคอลเดิมนั้นมีประสิทธิภาพและความหลากหลายในการใช้งานมากขึ้น โดยได้มีการพิสูจน์ผลการทำงานว่าสามารถทำการคำนวณได้อย่างถูกต้อง

บทที่ 4

วิเคราะห์อัลกอริทึมคำนวณทางคณิตศาสตร์แบบขนานในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่

ในบทนี้ จะเป็นการวิเคราะห์ในรายละเอียดต่าง ๆ ของอัลกอริทึมการคำนวณทางคณิตศาสตร์ในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ที่ได้ถูกนำเสนอในบทที่ 3 อันได้แก่ การวิเคราะห์ความซับซ้อนในการคำนวณรวมถึงข้อดีข้อเสียในการนิยามระบบจำนวนฮาล์ฟเทอนารี่ และความเป็นไปได้ของการนำวิธีการผสานมาประยุกต์ใช้กับการคูณและการหารในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่

4.1 อัตราการเติบโตเชิงฟังก์ชันเวลาของการคำนวณทางคณิตศาสตร์แบบขนาน

จากเดิมที่การคำนวณทางคณิตศาสตร์บวกและลบในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอลเป็นการคำนวณแบบลำดับ ในงานวิจัยนี้จึงได้นำเสนอการคำนวณแบบขนานของการคำนวณบวกและลบขึ้นมา ซึ่งทำให้การคำนวณนั้นมีประสิทธิภาพมากขึ้นโดยสามารถวัดได้จากการวิเคราะห์อัลกอริทึมในรูปแบบสัญกรณ์เชิงเส้นกำกับ (asymptotic notation) ดังนี้

ก) สัญกรณ์เชิงเส้นกำกับของการคำนวณเชิงคณิตศาสตร์บวกและลบแบบลำดับในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล

โดยเราจะเริ่มจากการสร้างสมการประสิทธิภาพเชิงเวลาของการคำนวณบวกและลบ ซึ่งตัวแปรที่ส่งผลต่อความเร็วของการคำนวณแบบลำดับนั้นจะขึ้นกับความยาวของสายการทดโดยในรูปแบบที่เลวร้ายที่สุด (worst case) ดังที่แสดงในตัวอย่างที่ 2.7 จะพบว่าสมการประสิทธิภาพเชิงเส้นนั้นจะมีสมการดังนี้

$$T_{seq}(n) = \left[(\frac{n-1}{2})+1\right] T_{\text{plus}} \tag{4.1}$$

โดยที่ $T_{seq}(n)$ คือเวลาการทำงานของการคำนวณบวกและลบแบบลำดับ, T_{plus} คือเวลาในการคำนวณบวกและลบของแต่ละรอบ และ n คือขนาดของรูปแบบแทนจำนวนที่มาทำการคำนวณ

เมื่อสร้างสมการประสิทธิภาพเชิงเวลาแล้ว เราจึงนำมาหาสัณกรณ์เชิงเส้นกำกับของการคำนวณบวกและลบแบบลำดับได้มีค่าเท่ากับ

$$T_{seq}(n) = \left[(\frac{n-1}{2})+1\right] T_{plus} = \mathrm{O}(n) \tag{4.2}$$

จากสมการข้างต้น เราสามารถหาอัตราการเติบโตของการคำนวณทางคณิตศาสตร์บวกและลบของระบบจำนวนเทอนารี่มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอลมีค่าเทียบเท่ากับ O(n)

ข) สัญกรณ์เชิงเส้นกำกับของการคำนวณทางคณิตศาสตร์บวกและลบแบบขนานในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล

ในส่วนนี้ จะทำการนำเสนออัลกอริทึมการคำนวณทางคณิตศาสตร์บวกและลบแบบขนานของระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอลที่สามารถทำการคำนวณแบบขนานได้ ภายใต้แนวคิดที่เหมือนกับอัลกอริทึมที่ 3.2 โดยยังคงใช้รูปแบบแทนจำนวนของระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริคอลเช่นเดิม ซึ่งการพิสูจน์อัลกอริทึมนั้นเหมือนกับการพิสูจน์ในอัลกอริทึมที่ 3.2 ดังนั้นจึงจะแสดงแต่เพียงอัลกอริทึมเท่านั้น

อัลกอริทึมที่ 4.1 อัลกอริทึมการคำนวณทางคณิตศาสตร์บวกและลบแบบขนานของระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอล

Input: $X = (x_{2n+1}x_{2n}x_{2n-1}\ldots x_1)_{\tau^2}$,

$x_i \in D = \{\bar{2},\bar{1},0,1,2\}$

Output: $Y = (y_{n+1}y_n y_{n-1}\ldots y_1 y_0 y_{-1}\ldots y_{-n}y_{-n-1})_{\tau^2}$,

$y_i \in E = \{\bar{1},0,1\}$ where

begin

$x_0 \leftarrow 0$;

//Convert each digit to redundancy 3-digit forms

for each i $(0 \le i \le 2n+1)$

case $x_i = 2$ **do**

$(x_{ci}^{+}x_i x_{ci}^{-})_1 \leftarrow 020$;

$(x_{ci}^{+}x_i x_{ci}^{-})_2 \leftarrow 1\bar{1}1$; **end;**

case $x_i = 1$ **do**

$(x_{ci}^{+}x_i x_{ci}^{-})_1 \leftarrow 010$;

$(x_{ci}^{+}x_i x_{ci}^{-})_2 \leftarrow 1\bar{2}1$; **end**;

case $x_i = 0$ **do**

$(x_{ci}^{+}x_i x_{ci}^{-})_1 \leftarrow 000$;

$(x_{ci}^{+}x_i x_{ci}^{-})_2 \leftarrow 1\bar{3}1$;

$(x_{ci}^{+}x_i x_{ci}^{-})_3 \leftarrow \bar{1}3\bar{1}$; **end;**

case $x_i = \bar{1}$ **do**

$\left(x_{ci}^{+} x_i x_{ci}^{-}\right)_1 \leftarrow 0\bar{1}0$;

$\left(x_{ci}^{+} x_i x_{ci}^{-}\right)_2 \leftarrow \bar{1}2\bar{1}$; **end;**

case $x_i = \bar{2}$ **do**

$\left(x_{ci}^{+} x_i x_{ci}^{-}\right)_1 \leftarrow 0\bar{2}0$;

$\left(x_{ci}^{+} x_i x_{ci}^{-}\right)_2 \leftarrow \bar{1}1\bar{1}$; **end**;

//Merge algorithm

$m \leftarrow 2$;

while $m < 2n+1$ **do**

for $(l \leftarrow 2n+1; l > 0; l \leftarrow l-m)$ **do**

If boundary digits satisfy the merging rules **do**

for all possible a, b

$\left(x_{cl}^{+}\right)_{ab} \leftarrow \left(x_{cl}^{+}\right)_a$ **;**

all $\left(x_i\right)_{ab} \leftarrow \left(x_i\right)_a$;

$\left(x_{(l+1-(m/2))}\right)_{ab} \leftarrow \left(x_{(l+1-(m/2))}\right)_a + \left(x_{c(l-(m/2))}^{+}\right)_b$;

$\left(x_{(l-(m/2))}\right)_{ab} \leftarrow \left(x_{(l-(m/2))}\right)_b + \left(x_{c(l+1-(m/2))}^{-}\right)_a$;

all $\left(x_i\right)_{ab} \leftarrow \left(x_i\right)_b$;

$\left(x_{c(l+1-m)}^{-}\right)_{ab} \leftarrow \left(x_{c(l+1-m)}^{-}\right)_b$;

if all digits that are not the boundary digit $\in \left\{\bar{2}, 2\right\}$ **do** delete the representation;

enddo;

enddo;

$m \leftarrow m \times 2$;

enddo.

for all *a* **and** *b*

$\left(x_{2n+2}\right)_{ab} \leftarrow \left(x_{c(2n+1)}^{+}\right)_{ab}$;

//Mirror checking process

for all representation **do**

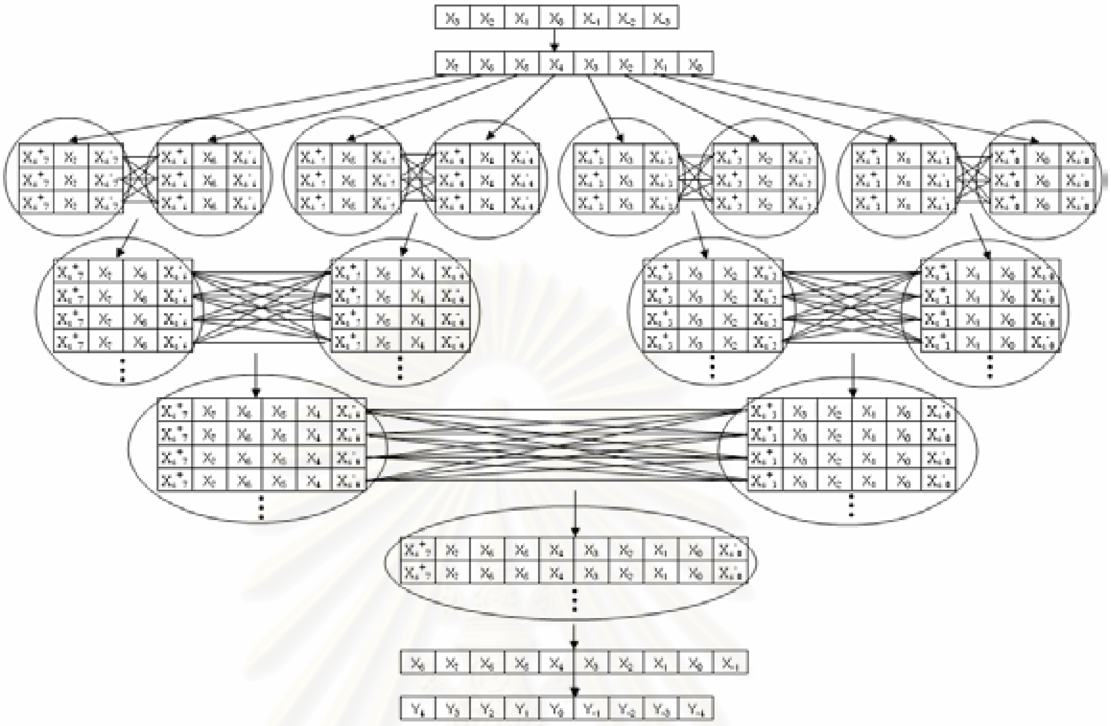
if Mirror property and digit set in $\{\bar{1},0,1\}$ **do**

$(y_{n+1} y_n y_{n-1} \ldots y_{-n-1})_{\tau^2} \leftarrow (x_{2n+2} x_{2n+1} x_{2n} \ldots x_1)$;

enddo;

end.

หรือสามารถแสดงลักษณะการทำงานของอัลกอริทึม 4.1 ได้ดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 อัลกอริทึมการคำนวณบวกและลบแบบขนานในระบบจำนวน เทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมท-ริกคอล

จากรูปที่ 4.1 จะเห็นได้ว่ามีลักษณะการทำงานคล้ายคลึงกับอัลกอริทึมที่ 3.2 โดยมีจุดต่างกันคือ ไม่มีการทำซ้ำตัวทดที่ทำการผสานกับรูปแบบแทนจำนวน 3 หลักอันเกิดจากเลขโดดที่ตำแหน่ง τ^0 และมีการตรวจสอบคุณสมบัติการสะท้อนเพิ่มเติมขึ้นมา โดยอัลกอริทึมที่ 4.1 นั้นสามารถสร้างออกมาเป็นสมการประสิทธิภาพเชิงเวลาได้ดังสมการ

$$T_{FP}(n) = T_{plusP} + T_{add} + T_{convert} + (\log n+1)T_{merge} + \left(\frac{n-1}{2}\right)T_{check} \quad (4.3)$$

โดยที่ $T_{FP}(n)$ คือเวลาการทำงานของการคำนวณบวกและลบแบบขนาน, T_{plusP} คือเวลาในการรวมค่าแต่ละหลักเข้าด้วยกันแบบขนาน, T_{add} คือเวลาที่ใช้ในการเพิ่มเลขโดดที่ไม่มีค่าหนึ่งตัวในตำแหน่งท้ายสุดของรูปแบบแทนจำนวนที่จะนำมาทำการคำนวณ, $T_{convert}$ คือเวลาที่ใช้ในการแปลงเลขโดดไปสู่รูปแบบแทนจำนวน 3 หลัก, T_{merge} คือเวลาที่ใช้ในการผสานแต่ละรอบและ T_{check} คือเวลาที่ใช้ในการตรวจสอบคำตอบในแต่ละบิท แล้วนำมาคำนวณหาสัญกรณ์เชิงเส้นกำกับของการคำนวณเชิงคณิตศาสตร์บวกและลบแบบขนานของระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอลได้ดังนี้

$$T_{FP}(n) = \Theta(n) \quad (4.4)$$

จากสมการข้างต้น สามารถหาอัตราการเติบโตของการคำนวณทางคณิตศาสตร์บวกและลบแบบขนานของระบบจำนวนเทอนารี่มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอลนั้นมีค่าเทียบเท่ากับ $\Theta(n)$

ค) สัญกรณ์เชิงเส้นกำกับของการคำนวณเชิงคณิตศาสตร์บวกและลบแบบขนานในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่

จากอัลกอริทึม 3.2 เราสามารถนำมาสร้างสมการประสิทธภาพเชิงเวลาได้ดังนี้

$$T_{HP} = T_{plusP} + T_{convert} + \left\lceil \log \frac{n-1}{2} \right\rceil T_{merge} + T_{merg(0)} + T_{check} \tag{4.5}$$

โดยที่ T_{HP} คือเวลาการทำงานของการคำนวณบวกและลบแบบขนานในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่, T_{plusP} คือเวลาในการรวมค่าแต่ละหลักเข้าด้วยกันแบบขนาน, $T_{convert}$ คือเวลาที่ใช้ในการแปลงเลขโดดไปสู่รูปแบบแทนจำนวน 3 หลัก, T_{merge} คือเวลาที่ใช้ในการผสานแต่ละรอบ, $T_{merge(0)}$ คือเวลาที่ใช้ในการผสานของรูปแบบแทนจำนวน 3 หลักของตำแหน่ง τ^0 และ T_{check} คือเวลาที่ใช้ในการตรวจสอบคำตอบในแต่ละบิท ทำการคำนวณหาสัญกรณ์เชิงเส้นกำกับของการคำนวณทางคณิตศาสตร์บวกและลบแบบขนานของระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ได้ ดังนี้

$$T_{HP} = \Theta(\log n) \tag{4.6}$$

จากสมการข้างต้น สามารถหาอัตราการเติบโตของการคำนวณทางคณิตศาสตร์บวกและลบแบบขนานของระบบจำนวนเทอนารี่มิลเลอร์ ซิมเมทริกคอลนั้นมีค่าเทียบเท่ากับ $\Theta(\log n)$

จากการคำนวณหาสัญกรณ์เชิงเส้นกำกับของการคำนวณทางคณิตศาสตร์บวกและลบในข้อ ก ข และ ค เมื่อนำมาเปรียบเทียบกัน

$$\Theta(\log n) \leq O(n) \leq \Theta(n)$$

สามารถสรุปได้ว่า ในส่วนของการคำนวณบวกและลบแบบขนานในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริคอลกลับมีอัตราการเติบโตที่ไม่ช้ากว่าการคำนวณบวกและลบแบบลำดับ อันเนื่องมาจากขั้นตอนของการตรวจสอบคำตอบที่ต้องมีคุณสมบัติของการสะท้อนเสมอ ซึ่งทำให้มีอัตราการเติบโตเฉพาะส่วนนี้มากกว่าการคำนวณในส่วนอื่น ทำให้การคำนวณนั้นไม่มีประสิทธิภาพ ผู้วิจัยจึงได้ทำการนิยามระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ขึ้น เพื่อลดขั้นตอนของการตรวจสอบคำตอบให้มีคุณสมบัติของการสะท้อน (แต่ยังคงจำเป็นต้องทำการตรวจสอบสมาชิกของเลขโดดให้เป็นสมาชิกของเซ็ตที่กำหนดเหมือนเดิม) ซึ่งอัตราการเติบโตของฟังก์ชั่นเชิงเวลาของการคำนวณบวกและลบแบบขนานของระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่นั้นมีการเติบโตที่ไม่เร็วกว่าการคำนวณบวกและลบแบบลำดับของระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริคอล จึงสามารถสรุปได้ว่าการคำนวณบวกและลบแบบขนานในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ สามารถเพิ่มประสิทธิภาพการคำนวณของระบบจำนวนได้จริง

4.2 ความเป็นไปได้ในการพัฒนาการคำนวณการคูณแบบขนาน

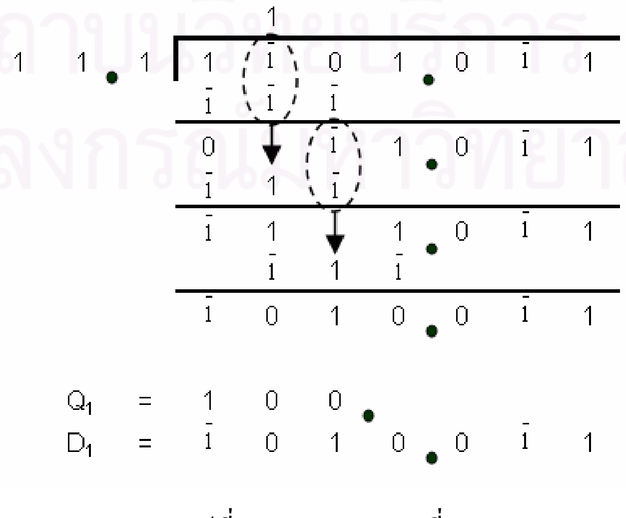
จากที่ได้แสดงในหัวข้อที่ 3.5 นั้นเป็นเพียงการประยุกต์การคำนวณทางคณิตศาสตร์บวกและลบแบบขนาน เพื่อทำให้สามารถทำการคูณได้แต่มีข้อจำกัดหลายอย่างอันได้แก่ จำเป็นที่จะต้องทำการสร้างรูปแบบแทนจำนวนที่จะต้องนำมารวมกันอันเกิดจากการคูณ โดยที่จำเป็นที่จะต้องแปลงระบบจำนวนกลับสู่ในรูปแบบแทนจำนวนในระบบเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริคอลเหมือนเดิมและจัดรูปใหม่เพื่อนำมารวมกันตามอัลกอริทึมการคำนวณแบบขนานเป็นคู่ ๆ ซึ่งผู้วิจัยมีความเห็นอาจจำเป็นต้องการสร้างรูปแบบทั่วไป (generic form) ของการสร้างรูปแบบแทนจำนวน 3 หลักของเลขโดดที่มีค่าใด ๆ เพื่อจะมาทำการผสานรวมภายใต้กฎที่ได้ถูกขยายขึ้นเช่นกัน ซึ่งจะทำให้สามารถลดเวลาการคูณจาก $O(n^2)$ ลงมาเหลือเพียง Θ (log n) โดยที่ n คือขนาดของรูปแบบแทนจำนวนที่มาทำการคูณ ซึ่งลดเวลาการคำนวณได้มาก

4.3 ความเป็นไปได้ในการพัฒนาการคำนวณทางคณิตศาสตร์หาร

ในการหารนั้น เนื่องจากข้อจำกัดของสถาปัตยกรรมการทำควบคู่ไม่สามารถนำมาประยุกต์ใช้กับการหารที่จัดว่าเป็นการคำนวณที่ยากที่สุดในรูปแบบการคำนวณพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ได้ อีกทั้งจากการศึกษางานวิจัยในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริคอลเดิมนั้นพบว่ามีจุดบอดในการคำนวณการหารที่ทำให้ไม่สามารถทำการหารออกมาได้ โดยที่การหารจะเป็นการวนรอบกลับมาเป็นตัวตั้งเหมือนเดิม ทำให้ไม่สามารถหาคำตอบได้ ดังตัวอย่างที่ 4.1

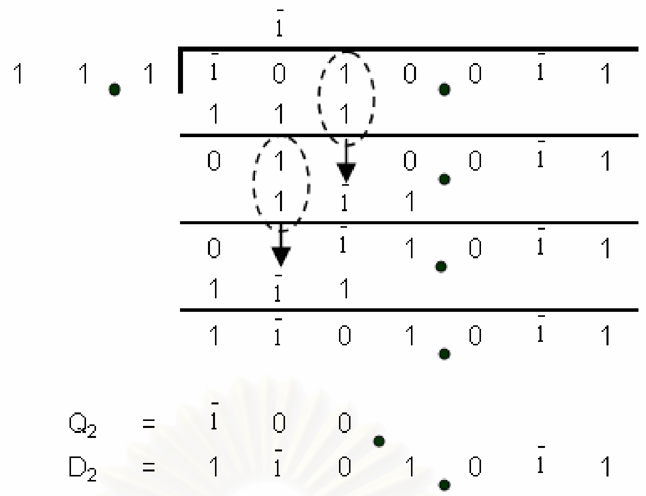
ตัวอย่างที่ 4.1 *ทำการหารในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริคอลของรูปแบบแทนจำนวน* $12 = 1\bar{1}01.0\bar{1}1$ *ด้วย* $4 = 11.1$

วิธีทำ เราสามารถทำการคำนวณทางคณิตศาสตร์หาร ได้ดังรูปที่ 4.2 และ 4.3 ดังนี้



รูปที่ 4.2 การหารรอบที่ 1

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 4.3 การหารรอบที่ 2

จากรูปที่ 4.3 จะเห็นได้ว่าหลังจากการหารรอบที่ 2 นั้น รูปแบบแทนจำนวน D_2 มีลักษณะเหมือนรูปแบบแทนจำนวนที่เป็นตัวตั้งทุกประการ รวมทั้งผลหาร Q_1 และ Q_2 เมื่อนำมารวมกันก็ได้ค่าเป็น 0 จะได้เห็นว่าเกิดการวนซ้ำเกิดขึ้นซึ่งทำให้ไม่สามารถหาคำตอบได้

□

จากตัวอย่างที่ 4.1 จะเห็นว่าในรูปแบบแทนจำนวนบางรูปแบบเมื่อนำมาทำการหารกันนั้นจะเกิดการวนรอบทำให้ไม่สามารถหาคำตอบออกมาได้ ดังนั้นในการที่จะเพิ่มประสิทธิภาพการหารในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริคอลหรือระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่นั้นจำเป็นต้องมีการแก้ไขในจุดนี้ก่อน

4.4 สรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงการวิเคราะห์ประสิทธิภาพการทำงานของอัลกอริทึมการคำนวณทางคณิตศาสตร์บวกและลบแบบขนานของระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่โดยเทียบกับการคำนวณแบบลำดับ และการคำนวณทางคณิตศาสตร์บวกและลบแบบขนาน ภายใต้การนิยามของสัญกรณ์เชิงเส้นกำกับ อีกทั้งยังทำการวิเคราะห์ความเป็นไปได้ในการสร้างการคำนวณเชิงคณิตศาสตร์แบบขนานของการคูณและการหารของระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่อีกด้วย

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย

5.1 สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยชิ้นนี้ได้นำเสนอการคำนวณพื้นฐานทางคณิตศาสตร์บวก ลบและคูณแบบขนานของระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริคอล โดยนำแนวคิดของสถาปัตยกรรมการทำควบคู่กันมาประยุกต์ใช้ยังผลให้แม้ระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริคอลนั้นจะมีวิธีในการคำนวณที่แตกต่างจากระบบจำนวนอื่น ๆ กล่าวคือ ในการคำนวณนั้นจะเกิดตัวทดไปสู่เลขโดดที่ตำแหน่งอื่น ๆ ทั้งด้านหน้าและด้านหลังส่งผลกระทบเป็นวงกว้าง ทำให้ในการสร้างการคำนวณแบบขนานขึ้นนั้นจำเป็นที่จะต้องทำการคาดเดาล่วงหน้าถึงความเป็นไปได้ของตัวทดที่จะส่งออกไปทุกรูปแบบ ออกมาในรูปของการสร้างรูปแบบแทนจำนวน 3 หลักจากเลขโดดใด ๆ ขึ้นมาและทำการผสานรูปแบบที่เป็นไปได้เหล่านั้นเข้าด้วยกันจนสุดท้าย จะได้ชุดของรูปแบบแทนจำนวนที่มีคำตอบที่ถูกต้องรวมอยู่ แต่เนื่องจากคุณสมบัติการสะท้อนของระบบจำนวนทำให้ในขั้นตอนการตรวจสอบคำตอบนั้น กลายเป็นอัลกอริทึมแบบไม่มีรูปแบบ ทำให้ผู้วิจัยได้ทำการนิยามระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ขึ้น โดยทำการลดรูปของรูปแบบแทนจำนวนในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริคอลลง และกำจัดคุณสมบัติการสะท้อนออกไป แต่ยังสามารถที่จะแปลงรูปแบบแทนจำนวนในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ระหว่างเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริคอลได้ ซึ่งเมื่อนำอัลกอริทึมการคำนวณบวก ลบและคูณแบบขนานมาประยุกต์ใช้กับระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ทำให้สามารถเพิ่มความเร็วและลดทรัพยากรที่ใช้ในการคำนวณแบบขนานของระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริคอลลงได้ พร้อมทั้งได้สร้างอัลกอริทึมการแปลงจากระบบจำนวนเต็มมาสู่ระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ ซึ่งทำให้ระบบจำนวนนี้มีความหลากหลายในการใช้งานมากขึ้น

โดยในงานวิจัยนี้ได้ทำการวิเคราะห์ถึงประสิทธิภาพการทำงานของการคำนวณทางคณิตศาสตร์บวกและลบแบบขนานเปรียบเทียบกับการคำนวณบวกและลบแบบลำดับในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริคอลและฮาล์ฟ เทอนารี่ ผ่านทางการสร้างสมการประสิทธิภาพเชิงเวลาและสัญกรณ์เชิงเส้นกำกับซึ่งได้ผลว่าการคำนวณบวกและลบแบบขนานของระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่มีการเติบโตเทียบเท่า $\Theta(\log n)$ โดยที่ n คือขนาดของรูปแบบแทนจำนวนที่นำมาคำนวณ ซึ่งมีอัตราการเติบโตที่ไม่มากกว่าการคำนวณบวกและลบแบบลำดับในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ ซิมเมทริคอลที่มีอัตราเติบโตเทียบเท่า $O(n)$ จากการเปรียบเทียบสัญกรณ์เชิงเส้น

กำกับที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า การคำนวณทางคณิตศาสตร์บวกและลบแบบขนานนั้นมีประสิทธิภาพของการคำนวณในเชิงความเร็วที่สูงกว่าการคำนวณบวกและลบแบบลำดับ

5.2 ข้อเสนอแนะ

ในงานวิจัยนี้ได้ทำการสร้างการคำนวณทางคณิตศาสตร์บวก ลบและคูณในระบบจำนวนฮาล์ฟ เทอนารี่ แต่การคำนวณคูณนั้นเป็นการประยุกต์การคำนวณบวกมาใช้ ซึ่งจริง ๆ แล้วอาจสามารถที่จะทำการสร้างรูปทั่วไปของการสร้างรูปแบบแทนจำนวน 3 หลักและกฎที่ทำให้สามารถใช้ได้กับสมาชิกของเลขโดดทั่วไปได้ ซึ่งทำให้สามารถทำการคูณได้อย่างมีประสิทธิภาพมากขึ้น แต่สำหรับการหารนั้น เนื่องจากอัลกอริทึมที่ได้นำเสนอในงานวิจัยนี้ ได้ใช้แนวคิดมาจากสถาปัตยกรรมแบบทำควบคู่กันซึ่งไม่สามารถทำการคำนวณหารได้ นับว่ายังเป็นข้อจำกัดของอัลกอริทึมการคำนวณหารของระบบจำนวนนี้ อีกทั้งการหารในระบบจำนวนเทอนารี่ มิลเลอร์ซิมเมทริคอลนั้นยังมีจุดบกพร่องคือ ไม่สามารถหารได้ทุกจำนวนอันเป็นข้อจำกัดของระบบจำนวนกล่าวคือ ไม่สามารถหารให้ออกมาในรูปเศษส่วนได้ และดังที่ได้แสดงในตัวอย่างที่ 4.1 จะเห็นได้ว่าการหารนั้นไม่สามารถทำได้ทุกรูปแบบการแทนซึ่งน่าจะเป็นหัวข้อในการพัฒนาระบบจำนวนนี้ต่อไป

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รายการอ้างอิง

[1] Bergman, G. A number system with an irrational base. Mathematics Magazine 31 (1957): 98-119.

[2] Stakhov AP. Ternary Mirror-Symmetrical Arithmetic and its Application to Digital Signal Processing. Journal "Computer Optics" Samara, Institute of Image Processing System of the Academy of Sciences of Russia 21 (2001). 164 -175.

[3] Stakhov AP. Brousentsov's ternary principle, Bergman's number system and ternary mirror- symmetrical arithmetic. Comput J 45(2) (2002): 222-236.

[4] Stakhov AP. The generalized golden proportions, a new theory of real numbers, and ternary mirror-symmetrical arithmetic. Chaos, Solitons & Fractals. (28 February 2006).

[5] Parhami B. Computer Arithmetic: Algorithm and hardware design. Oxford University Press, Inc, 2000.

[6] Kornerup, P. Digit-Set Conversion: Generalization and Application. IEEE Transactions on Computers 43 (1994): 622-629.

[7] Hoggat VE. Fibonacci and Lucas numbers. Palo Alto, CA: Houghton-Mifflin, 1969.

[8] V.Krcadinac. New generalization of the golden ratio. The Fibonacci Quarterly (2005).

[9] Vajda S. Fibonacci & Lucas numbers, and the golden section, Theory and applications. Ellis Horwood limited, 1989.

[10] Surarerks, A. Digit Set Conversion by On-Line Finite Automata. Bulletin of the Belgian Mathematial Society, Simon Stevin 8 (April-May-June 2001): 337-358.

[11] Stakhov, A. P. Codes of the Golden Proportion. Radio Communication, Moscow. (In Russian)

[12] Collection of article. Noise-tolerant codes: Fibonacci computers. Znanie, Moscow. (In Russian)

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายธนาพงษ์ ตัน เกิดเมื่อวันที่ 25 กันยายน พ.ศ. 2524 เรียนจบการศึกษาระดับมัธยมศึกษาที่โรงเรียนอัสสัมชัญ กรุงเทพ ในปี พ.ศ. 2542 สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาวิศวกรรมศาสตร์เคมี จากภาควิชาวิศวกรรมเคมี คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2547 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์ ที่ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปีการศึกษา 2548

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย