บทที่ 3

การระบุหากระบวนการ

สำหรับเนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึง ประวัติความเป็นมา และ อธิบายถึงวิธีการ และหลักการ ในแต่ละขั้นตอนของการระบุหาโครงสร้างแบบจำลองของกระบวนการ

3.1 บทนำ

ในทางด้านการควบคุมแบบอัตโนมัติ (automatic control) เป็นที่ทราบว่า สิ่งที่ต้องการมากเพื่อที่จะใช้ในการออกแบบระบบควบคุมก็คือความรู้เกี่ยวกับระบบและสิ่งแวดล้อม แต่ในบางครั้งพบว่าความรู้ที่เกี่ยวกับพารามิเตอร์ที่สำคัญบางตัวขาดหายไป ดังนั้นการระบุหาจึงเกิดขึ้นเพื่อหาพารามิเตอร์ และข้อมูลที่หายไปของระบบ เพื่อใช้ในการออกแบบและวางแผนการควบคุมต่อไป

ปัญหาของการระบุหาลักษณะของระบบ บางครั้งจำเป็นต้องให้ความสำคัญ ในการพิจารณาเป็น 2 เท่าของการควบคุม เพราะระบบไม่สามารถควบคุมได้ดี ถ้าไม่ทราบแบบจำลองหรือมีการระบุหาระบบทั้งก่อนหน้า และขณะที่มีการควบคุมอยู่ ยกตัวอย่างที่เห็นได้ชัดเจน เช่น เราไม่สามารถควบคุมรถยนต์บนถนนได้ ถ้าเราไม่คุ้นเคยกับการตอบสนองของล้อ ความเร่ง และเบรคของรถยนต์ ซึ่งสามารถทำได้โดยการเรียนรู้บางสิ่งบางอย่างเกี่ยวกับรถ

กระบวนการที่ใช้เรียนเพื่อที่จะขับรถ หรือเรียกว่า "วิธีใช้รถ" เปรียบเสมือนการระบุหากระบวนการนั่นเอง

ลักษณะของการระบุหา (Daniel, 1972) ขึ้นกับวัตถุประสงค์ในการทำ ซึ่งถ้าวัตถุประสงค์ของการระบุหาเพื่อการออกแบบการควบคุมระบบ ลักษณะของปัญหาที่เกิดขึ้นมีได้กว้างขวางมาก ขึ้นอยู่กับธรรมชาติหรือพื้นฐานของปัญหาการควบคุม ตัวอย่างเช่น

- การออกแบบเพื่อให้การควบคุมคงที่ โครงสร้างแบบจำลองที่ใช้อาจเป็นโครงสร้างแบบหยาบๆของไดนามิกของระบบก็เพียงพอ

- การออกแบบโปรแกรมการควบคุมเพื่อ ให้เกิดจุดที่ดีที่สุด ในการเปลี่ยนจากสภาวะหนึ่งไปยังอีกสภาวะหนึ่ง ต้องการแบบจำลองของระบบที่ถูกต้องมากขึ้น

- การออกแบบการควบคุมเพื่อลดการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรในกระบวนการ ซึ่งเกิดจากสิ่งรบกวน (disturbance) จำเป็นต้องมีแบบจำลองของสิ่งแวดล้อมของระบบ

ทฤษฎีของการระบุหาเกี่ยวข้องกับการประมาณค่าพารามิเตอร์จากข้อมูลอินพุท และเอาท์พุทซึ่งได้จากการวัด และผลต่อเนื่องจากความผิดพลาดในการระบุหากระบวนการ จะนำไปสู่ความผิดพลาดในการควบคุม และการประมาณค่าเอาท์พุทของระบบ ซึ่งค่าความผิดพลาดเหล่านี้สามารถนำไปใช้ปรับปรุงการระบุหาต่อไป จะเห็นได้ว่าทฤษฎีการระบุหาก็คล้ายคลึงกับการควบคุม คือ ค่าความผิดพลาดในการควบคุม (สมมติว่าระบบได้มีการระบุหาก่อนแล้ว) ถูกใช้ในการปรับปรุงการควบคุมต่อๆไป

การแบ่งแยก ความแตกต่างของสภาวะการระบุหา (Sö derströ m, T., Stotica, P., 1989) สามารถแบ่งแยกได้ดังต่อไปนี้

(1) ระบบเป็นแบบเชิงเส้น และไม่เป็นเชิงเส้น (Linear and Nonlinear) ระบบซึ่งเป็นเชิงเส้นสามารถระบุหาได้ง่ายกว่าเนื่องจาก คุณสมบัติการซ้อนทับ (superposition) เช่น คุณสมบัติในการรวมกัน (additive property) และ คุณสมบัติของการคูณ (homogeneity or scaling property) (ดูเพิ่มเติมที่ภาคผนวก ก)

(2) ระบบที่เปลี่ยนแปลงและไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (stationary and non stationary)

(3) ระบบแบบดิสครีสต์และต่อเนื่อง (discrete and continuous system)

(4) ระบบมีอินพุทหนึ่งตัวและหลายตัว (single-input and muti-input)

(5) ระบบดีเทอร์มินิสติกส์และสโตแคสติกส์ (deterministic and stochastic process) ในการวัดค่าส่วนใหญ่ จะมีสัญญาณแปลกปลอมเข้ามาเป็นสัญญาณรบกวน (noise) ฉะนั้น จึงต้องมีการกรองสัญญาณให้เรียบขึ้น ซึ่งบางครั้งจำเป็นต้องใช้ในการระบุหากระบวนการ โดยการระบุหาของระบบแบบดีเทอร์มินิสติกส์ ได้สมมุติไว้แล้วว่าได้มี การกรองสัญญาณเรียบร้อยแล้ว

3.2 ประวัติความเป็นมา

การพัฒนาแบบจำลองจากข้อมูล จริงๆแล้วเป็นงานทางด้านการคำนวนเกี่ยวกับตัวเลข จึงต้องมีการใช้ความรู้ทางด้านสถิติเข้ามาช่วยในการคำนวณ และการประมวณมวลผลของ

ข้อมูล ซึ่งเป็นธรรมชาติ และจุดเริ่มต้นของการระบุหากระบวนการ ต่อมาได้มีความพยายามในการการพัฒนาทางด้าน อัลกอริธึม (algorithm) และ ซอฟแวร์ โดยสามารถแบ่งช่วงการพัฒนาจากลักษณะเฉพาะของการพัฒนาซอฟแวร์ได้ 3 ช่วง (Derek A. Linkens, 1993)

ช่วงที่ 1 เป็นช่วง "การทำงานแบบแบทซ์ (The batch routine period.)" ในระหว่างปี 1960-1970 ภาษาที่ใช้ในการเขียนโปรแกรมเป็นภาษาฟอร์แทรน เขียนเป็นซับรูทีน (subroutine) ในการคำนวณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างของแบบจำลองที่แตกต่างกันการพัฒนาในช่วงนี้เกิดขึ้นในมหาวิทยาลัยต่างๆ และตามสถาบันการค้นคว้า เป็นต้น

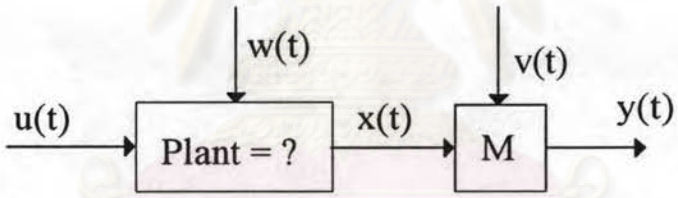
ช่วงที่ 2 เป็นช่วง "การติดต่อกับโปรแกรมสำเร็จรูปในการระบุหากระบวนการ (The interactive identification package period)" เริ่มประมาณปี 1970 ในช่วงนี้มีซับรูทีนต่างๆ สำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลอง และการวิเคราะห์แบบจำลองได้ถูกนำมารวมเข้าด้วยกันซึ่งทำให้การติดต่อของผู้ใช้กับตัวโปรแกรมสะดวกขึ้น โดยสามารถแสดงผลเป็นกราฟได้โดยตรง ประมาณปี 1974 ได้มีโปรแกรมสำเร็จรูปทางการค้าโปรแกรมแรกขึ้นคือ IDPAC เป็นโปรแกรมที่เขียนขึ้นด้วยภาษาฟอร์แทรน ในช่วงที่ 2 นี้ลักษณะที่แตกต่างกับช่วงที่ 1 คือในด้านการพัฒนาการคำนวณ และการติดต่อสื่อสารกับผู้ใช้มากขึ้น

ช่วงที่ 3 เป็นช่วง "โปรแกรมสำเร็จรูปมีลักษณะของการช่วยในการตัดสินใจเลือกรูปแบบของแบบจำลองและมีการพัฒนาทางด้านการอธิบายวิธีการใช้ตัวโปรแกรม (Identification packages with decision support and advanced help)" การพัฒนาเป็นลักษณะของระบบฐาน

ข้อมูล (knowledge-based system, KBS) ยังไม่เป็นเชิงการค้า แต่ก็มีการตีพิมพ์เนื้อหาการทดลองในทางด้านนี้ในวารสารต่างๆ เพิ่มมากขึ้น

3.3 ลักษณะปัญหาของการระบุหากระบวนการ (Process Identification Problem)

ลักษณะปัญหาของการระบุหากระบวนการ ดังแสดงในรูปที่ 3.1 เป็นการหาสมการความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ ของตัวแปรต่างๆ ในกระบวนการ ซึ่งสมการที่ได้เรียกว่า โครงสร้างของแบบจำลองของกระบวนการ



รูปที่ 3.1 ลักษณะปัญหาของการระบุกระบวนการ

โดย M เป็นหน่วยของการวัด y(t) เป็นเอาท์พุทของระบบที่ทำการวัด

v(t) เป็นสัญญาณรบกวนในการวัด x(t) เป็นเอาท์พุทที่ได้จากกระบวนการ

Plant เป็นกระบวนการที่ไม่ทราบโครงสร้าง w(t) เป็นสิ่งรบกวนในกระบวนการ

u(t) เป็นอินพุทของกระบวนการ

จากรูปที่ 3.2 สิ่งที่ทราบ

1. คุณลักษณะทางสถิติ ของ w และ v
2. ความสัมพันธ์ระหว่าง y, x และ v
3. ค่าที่ได้จากการเก็บข้อมูลของ y และ u

ดังนั้น ปัญหาที่ต้องหาคำตอบ คือ การแสดงค่าการประมาณ ที่ดีที่สุดของความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า x, w และ u ซึ่งก็คือโครงสร้างของแบบจำลองของกระบวนการนั่นเอง

3.4 ขั้นตอนการระบุหากระบวนการ

ในการระบุหากระบวนการมีวิธีการดำเนินการ (Söderström, T., Stotica, P., 1989) ดังแสดงในรูปที่ 3.2

จากไดอะแกรมของการระบุหากระบวนการ มีขั้นตอนที่สำคัญ 4 ขั้นตอน คือ

(1) การวางแผนการทดลอง (Experimental planing)

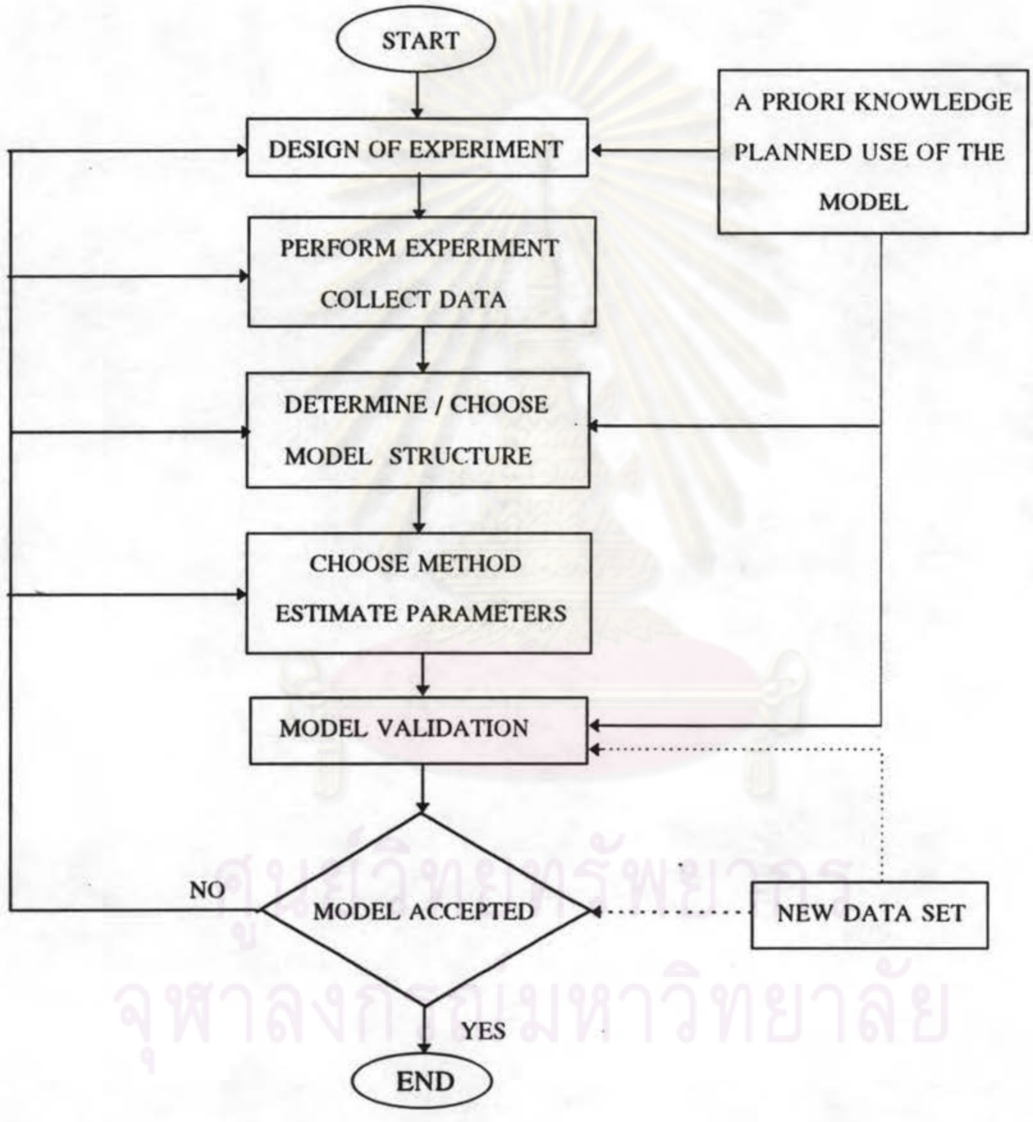
(2) การเลือกโครงสร้างของกระบวนการ (Selection of model structure)

(3) การประมาณค่าพารามิเตอร์ (Parameter estimation)

(4) การหาความผิดพลาดของโครงสร้างของระบบที่ได้ หรือเงื่อนไขในการยอมรับโครงสร้างของระบบที่จำลองขึ้นมา (Model validation)

ซึ่งถ้าแบบจำลองที่เลือกในขั้นตอนที่ (3) ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขการยอมรับแบบจำลองในขั้นตอนที่ (4) ให้ย้อนกลับไปทำการระบุหากระบวนการในขั้นตอนที่ (3) ใหม่ โดยการเปลี่ยนวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์วิธีใหม่ เป็นต้น จากนั้นจึงทำการหาความผิดพลาดของแบบจำลองในขั้นตอนที่ (4) อีกครั้ง ถ้ายังไม่ตรงกับเงื่อนไขของค่าความผิดพลาดในการประมาณค่าที่กำหนดเอาไว้อีก ก็ให้ย้อนไปทำการเปลี่ยนรูปแบบโครงสร้างของแบบจำลองที่ได้เลือกไว้ในขั้นตอนที่ (2) และดำเนินการระบุกระบวนการในขั้นตอนที่ (3) และ (4) ตามลำดับ

ส่วนขั้นตอนของการเปลี่ยนแปลงหรือการออกแบบการทดลองใหม่จะเลือกทางสุดท้าย เนื่องจาก การออกแบบการทดลองใหม่ เป็นการสิ้นเปลืองค่าใช้จ่าย



รูปที่ 3.2 ไดอะแกรมขั้นตอนการระบุหากระบวนการ

3.4.1. การวางแผนการทดลอง (experimental planning)

จากรูปที่ 3.2 ขั้นตอนของการวางแผนการทดลองนี้ ได้รวมถึงการออกแบบ การวางแผนการทดลอง และ การเก็บข้อมูลของผลการทดลอง

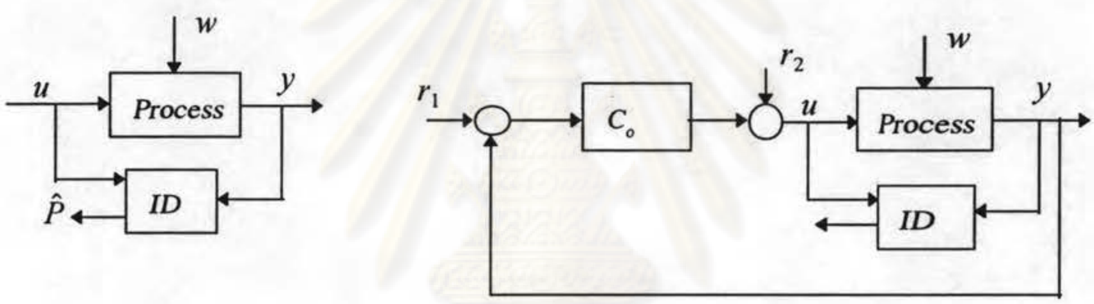
วัตถุประสงค์ในการออกแบบ หรือการวางแผนการทดลอง สำหรับการระบุหากระบวนการ คือ การทำให้ได้ข้อมูล ซึ่งให้ความรู้เกี่ยวกับกระบวนการที่เราทำการทดลองให้มากที่สุด การออกแบบการทดลองในการระบุหากระบวนการตามวัตถุประสงค์ที่กล่าวข้างต้นต้องคำนึงถึง

- จะวัดสัญญาณไหน และเมื่อไหร่จะทำการวัดสัญญาณเหล่านั้น
- ต้องทราบว่าสัญญาณไหนเป็นสัญญาณของตัวแปรปรับเปลี่ยน และจะปรับเปลี่ยนค่าเหล่านี้ได้อย่างไร
- ช่วงระยะเวลาของการเก็บตัวอย่างข้อมูล (Sampling interval, T)
- จำนวนข้อมูลที่ทำการเก็บ หรือระยะเวลาที่ทำการทดลอง (จำนวนข้อมูล N จุด)

การออกแบบการทดลอง และการเลือกตัวแปรที่จะทำการเก็บข้อมูล เป็นสิ่งที่สำคัญ เพราะถ้าจะเปลี่ยนแปลงข้อมูลของการทดลอง ทำได้วิธีเดียวคือทำการทดลองใหม่ ซึ่งจะต้องเสียค่าใช้จ่ายและเสียเวลามาก ดังนั้นการออกแบบการทดลองเพื่อที่จะสร้างข้อมูลจะต้องออกแบบเพื่อให้ได้ ข้อมูลพื้นฐานมากเพียงพอ

ในการทดลองทางการระบุหากระบวนการ เพื่อการออกแบบตัวควบคุมส่วนใหญ่ กระบวนการที่ทำการทดลองเป็นแบบ ระบบเปิด (open loop) หรือ ระบบปิด (closed loop) ดัง

นั้นลักษณะของข้อมูลที่เก็บได้ในแต่ละระบบก็จะแตกต่างกันไป จากรูปที่ 3.3 (a) ระบบเปิดคือ ระบบที่ไม่มีตัวควบคุม เพื่อควบคุมให้เอาท์พุทมีค่าตามเซ็ทพอยท์ที่ตั้งไว้ ดังนั้นเอาท์พุทจึงเกิดขึ้นจาก อินพุทที่ใช้ กับลักษณะของกระบวนการ ส่วนระบบปิด จะมีตัวควบคุมเป็นตัวปรับเปลี่ยนค่าของอินพุท ก่อนที่จะเข้าสู่กระบวนการ เพื่อปรับให้เอาท์พุทที่ออกจากกระบวนการมีค่าเข้าสู่เซ็ทพอยท์ที่กำหนด ดังแสดงในรูปที่ 3.3 (b)



(a) ระบบเปิด (b) ระบบปิด

รูปที่ 3.3 บล็อคไดอะแกรมของระบบแบบเปิด และแบบปิดในการระบุหากระบวนการ

w คือ สิ่งรบกวนของกระบวนการ *Process* คือ กระบวนการ

u และ y คือ อินพุท และเอาท์พุทของกระบวนการตามลำดับ

ID คือ พารามิเตอร์ที่ได้จากการประมาณค่าจากการระบุหากระบวนการ

r_1 , r_2 คือ เซ็ทพอยท์ และ สัญญาณกระตุ้นของอินพุท ตามลำดับ

C_o คือ ตัวควบคุม (controller)

สัญญาณอินพุท (input signal)

สัญญาณอินพุท เป็นสัญญาณที่ใช้ในการกระตุ้นระบบ เพื่อสังเกตการเปลี่ยนแปลงของระบบที่เกิดขึ้น และสามารถทำการวัดการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นได้ แต่ระบบต้องไม่เปลี่ยนแปลงมากจนกระทั่งเลยขีดจำกัดที่กำหนดไว้ ระหว่างที่ทำการทดลองในขั้นตอนการระบุหากระบวนการส่วนใหญ่ มักต้องการสัญญาณอินพุทซึ่งไม่ขึ้นกับสิ่งรบกวนของกระบวนการ แต่ในกรณีที่เกี่ยวเนื่องกันก็สามารถระบุกระบวนการได้ กระบวนการทั่วไป ระบบอยู่ภายใต้ลูพการควบคุมแบบปิดหรือการควบคุมแบบอะแด็พทีฟ ซึ่งอินพุทอาจขึ้นกับสัญญาณรบกวนในขณะที่บันทึกผลที่จุดปฏิบัติการปกติ

การเลือกใช้สัญญาณอินพุทในการทดลองการระบุกระบวนการ เป็นสิ่งสำคัญ เพราะจะเป็นผลต่อเนื่องไปยังผลของการประมาณค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ด้วย ชนิดของอินพุท ซึ่งใช้ กันบ่อยในทางปฏิบัติ (Sö derströ m, T., Stotica, P., 1989) ได้แก่

ก. ฟังก์ชั่นสเต็พ (Step function)

ข. ซูโดแรนดอมม์ไบนารีซีเคว็นซ์ (Pseudorandom binary sequence, PRBS)

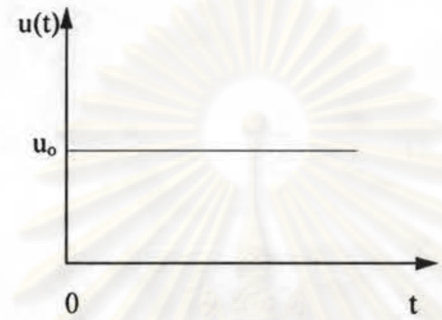
ค. ออโตรีเกรสซีฟมูวิ่งเอเวอเรจ (Autoregressive moving average process, ARMA)

ง. ผลรวมของฟังก์ชั่นซายน์ (Sum of sinusiods)

ก. ฟังก์ชั่นแบบสเต็พ (Step function) $u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ u_O & t \geq 0 \end{cases}$

เหมาะสำหรับ ระบบที่มีอัตราส่วนสัญญาณต่อนอยซ์ (Signal-to-noise ratio, SNR) สูง จะสามารถได้ข้อมูลไดนามิกของระบบได้เช่น ค่าเกน (static gain) โอเวอร์ชูต (overshoot) ซึ่งได้

โดยตรงจากสัญญาณการตอบสนองต่อสเต็พ ส่วนค่าคงที่ของเวลา (time constant) ก็สามารถประมาณค่าได้จากสัญญาณการตอบสนองแบบสเต็พเช่นกัน



รูปที่ 3.4 ลักษณะสัญญาณอินพุทที่เกิดจากฟังก์ชันแบบสเต็พ (step function)

ข. ซูโดแรนดอมม์ไบนารีซีเคว้นซ์ (Pseudorandom binary sequence , PRBS)

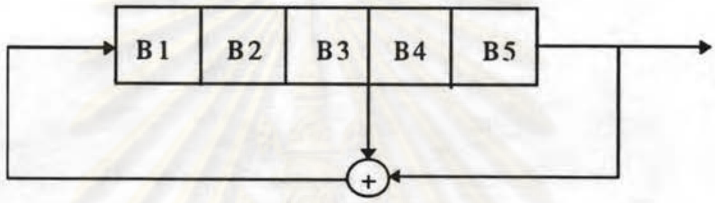
เป็น สัญญาณที่เปลี่ยนแปลงระดับอยู่ระหว่างค่าสองค่า อิมพลีเมนต์โดยใช้ฮาร์ดแวร์หรือซอฟแวร์ (Landau, I. D., 1990) ลักษณะของสัญญาณเป็นลำดับของพัลส์สี่เหลี่ยม (rectangular pulse) ซึ่งมีความกว้างปานกลาง ความกว้างของพัลล์มีขนาดต่างๆ กัน มีลักษณะเป็นแรนดอมม์ในช่วงความยาวของลำดับ แต่ในกรณีที่ใช้เวลานานๆพฤติกรรมของสัญญาณมีลักษณะเป็นเพอริออดิก (periodic) ซึ่งมีคาบคือความยาวของลำดับ ซึ่งความยาวสูงสุดของลำดับเท่ากับ 2^N-1 โดย N คือจำนวนเซลของชิฟท์เรจิสเตอร์ (shift register)

เมื่อใช้ ซูโดแรนดอมม์ไบนารีซีเคว้นซ์ เป็นสัญญาณอินพุทผู้ใช้จะต้องเลือก

- จำนวนเซลของของชิฟท์เรจิสเตอร์ เป็นจำนวน N

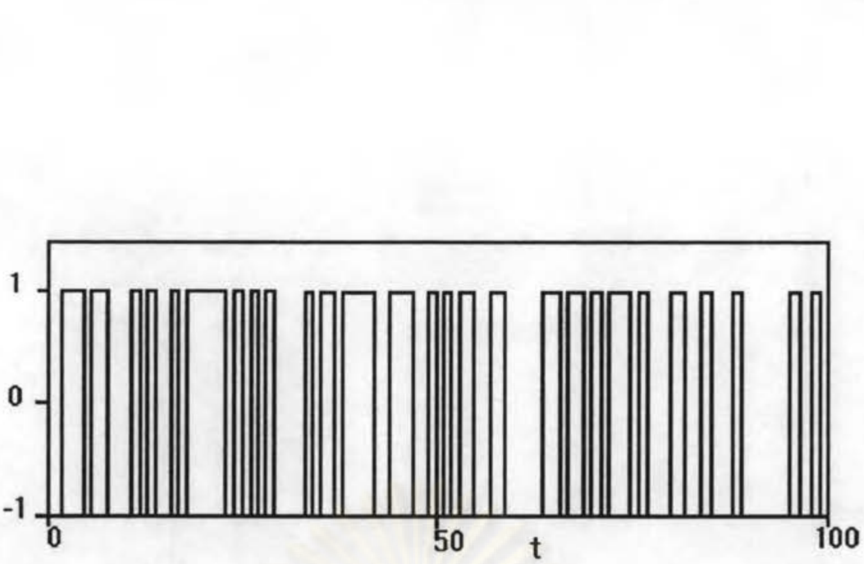
- ระดับของสัญญาณที่ใช้ในการเปลี่ยนแปลง (ตัวอย่างเช่น 0,1 หรือ -1,1)

รูปที่ 3.5 แสดงตัวอย่างของสัญญาณ แบบซูโดแรนดอมม์ไบนารีซีเคิ้วนซ์ ซึ่งมีความยาวของลำดับเท่ากับ $31 = 2^5-1$ (Landau, I. D., 1990) ฉะนั้นจำนวนเซลของชิฟท์เรจีสเตอร์ ที่ใช้เท่ากับ 5 เซล



รูปที่ 3.5 การกำเนิดสัญญาณ ซูโดแรนดอมม์ไบนารีซีเคิ้วนซ์ ความยาว $2^5-1 = 31$

ตัวอย่างลักษณะสัญญาณอินพุทแบบซูโดแรนดอมม์ไบนารีซีเคิ้วนซ์ แสดงในรูปที่ 3.6 โดยระดับของสัญญาณที่ใช้ในการเปลี่ยนแปลงคือ -1 และ 1 จากการซิมมูเลทข้อมูล 1000 จุด ซึ่งในรูปได้ยกตัวอย่างกราฟมาเพียง 100 จุดเท่านั้น (Sö derströ m, T., Stotica, P., 1989) สัญญาณ อินพุทชนิดนี้ เป็นสัญญาณที่มีรากฐานมาจากสัญญาณ ไบนารีนอยซ์ (Generalised Binary Noise)



รูปที่ 3.6 สัญญาณอินพุทแบบซูโดแรนดอมม์ไบนารีซีเคียวนซ์ (Pseudorandom binary sequence , PRBS)

ค. ออโตรีเกรสซีฟมูวิ่งเอเวอเรจ (Autoregressive moving average sequence, ARMA)

$$u(t) + C_1\, u(t\text{-}1) + \ldots + C_m\, u(t\text{-}m) = e(t) + d_1\, e(t\text{-}1) + \ldots + d_m\, e(t\text{-}m) \tag{3.1}$$

$u(t)$ = ARMA (Autoregressive moving average)

$C_i = 0$ เรียกว่า MA (moving average)

$d_i = 0$ เรียกว่า AR (autoregressive)

จากสมการ (3.1) ผู้ใช้จะต้องเลือก พารามิเตอร์ฟิลเตอร์ (filter parameter) คือ m, $\{C_j\}$, $\{d_j\}$ และ สัญญาณ $e(t)$ ซึ่งมีลักษณะเป็นแรนดอมม์ และ มีการกระจายเป็นแบบ เกาส์เซี่ยน (Guassian) ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้อีกรูปแบบหนึ่งคือ

$$C(q^{-1})\, u(t) = D\,(q^{-1})\, e(t) \tag{3.2a}$$

$$u(t) = \frac{D(q^{-1})}{C(q^{-1})}\, e(t) \tag{3.2b}$$

โดย q^{-1} คือ โอเปอร์เรเตอร์ถอยหลัง (back shift operator) ดังนั้น $q^{-1}e(t) = e(t-1)$ รายละเอียดดูเพิ่มเติมที่ภาคผนวก ก

และ $$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_m q^{-m}$$

$$D(q^{-1}) = 1 + d_1 q^{-1} + \dots + d_m q^{-m} \tag{3.2c}$$

ดังนั้นการเลือกจำนวนพารามิเตอร์ต่างๆ ก็เพื่อทำให้โพลีโนเมียลของ C(z) และ D(z) มีซีโร (zero) อยู่นอกวงกลมหนึ่งหน่วย ความต้องการ C(z) ใช้แสดงเพื่อยืนยันว่า $u(t)$ เป็นสัญญานที่ไม่ขึ้นกับเวลา ส่วน D(z) ตามทฤษฎีไม่มีการกำหนด หรือ การบังคับใช้ แต่จะมีประโยชน์ในกรณีการทำนายหาค่าต่ำสุด หรือ สูงสุด (optimal) ตัวอย่างของสัญญาณแบบออโตรีเกรสซีฟมูวิ่งอเวอเรจ แสดงดังรูปที่ 3.7(a) และ 3.7 (b)

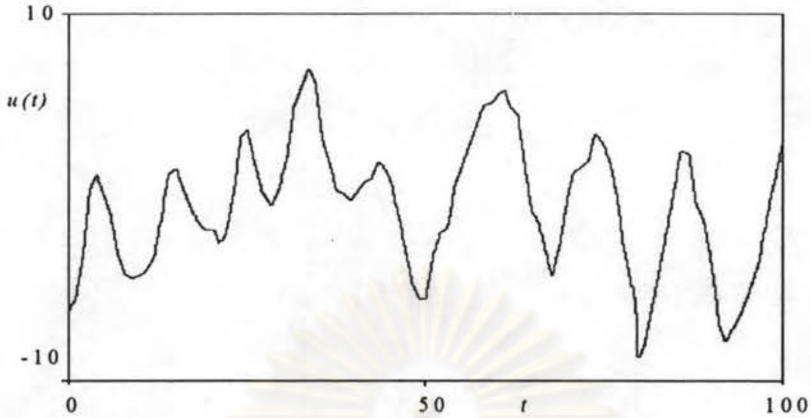
ง. ผลรวมของฟังก์ชันซายน์ (Sum of sinsoids)

$$u(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j \sin\left(w_j t + \varphi_j\right) \quad 0 \le w_1 < w_2 < \dots < w_m < \pi \tag{3.3}$$

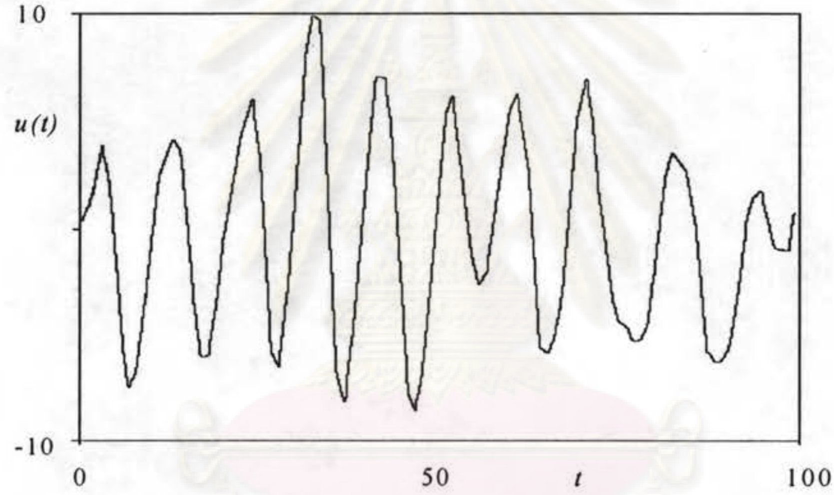
ผู้ใช้จะต้องเลือก $a_i = amplitude$, $w_i = frequency$, $\varphi_j = phase$ ซึ่งได้แสดงตัวอย่างของสัญญาณไว้ในรูปที่ 3.8

3.4.2 การเลือกโครงสร้างแบบจำลองของกระบวนการ (Selection of model structure)

การเลือกโครงสร้างของแบบจำลอง เป็นหนึ่งของส่วนประกอบพื้นฐานในปัญหาของหลักการของการระบุหากระบวนการ การเลือกโครงสร้างแบบจำลองมีผลต่อพฤติกรรมของปัญหาที่จะเกิดขึ้น ตัวอย่างเช่น ความยากง่ายในการคำนวณ วิธีที่ผลของการระบุสามารถนำไปใช้ได้ในจุดปฏิบัติการ และความเป็นไปได้ที่จะได้คำตอบมากกว่า 1 คำตอบ



(a)

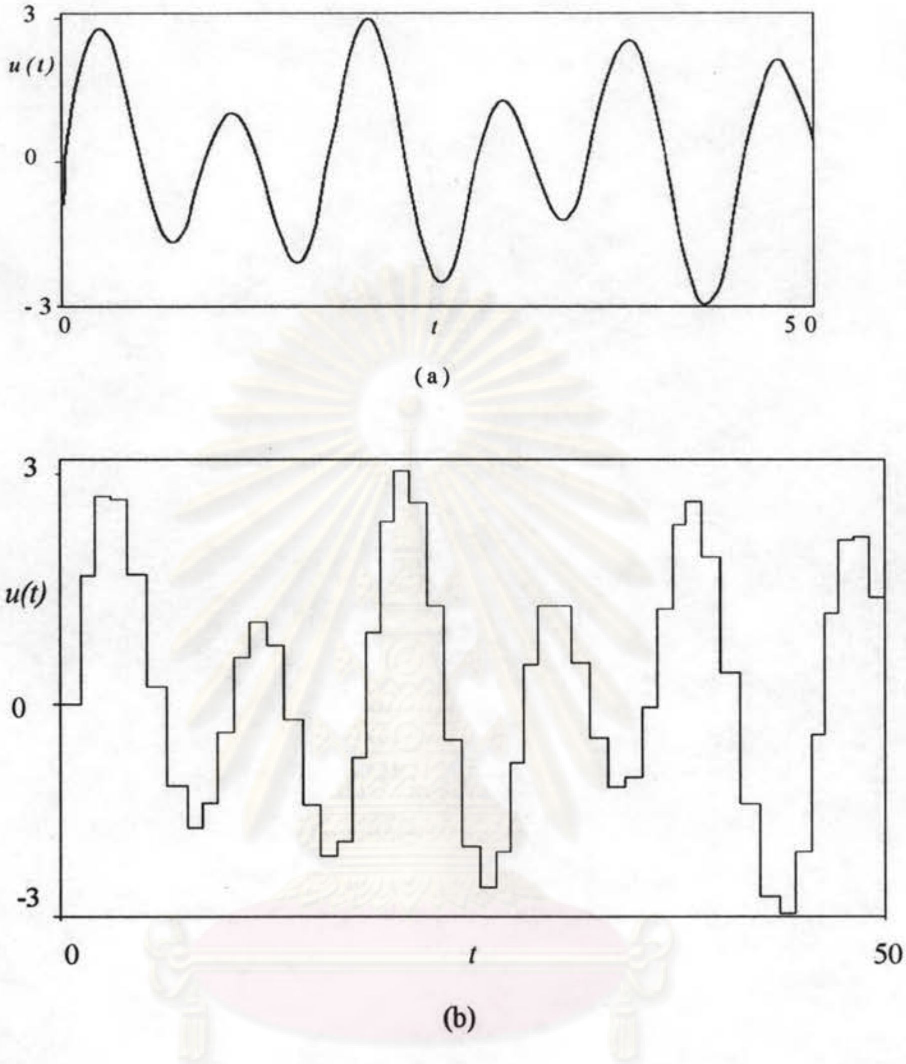


(b)

รูปที่ 3.7 สัญญาณอินพุทแบบออโตรีเกรสซีฟมูวิ่งเอเวอเรจจากการซิมมูเลทของ 2 รูปแบบของพารามิเตอร์ C โดย

(a) $C(q^{-1}) = 1 - 1.5q^{-1} + 0.7q^{-2}$, $D(q^{-1}) = 1$

(b) $C(q^{-1}) = 1 - 1.5q^{-1} + 0.9q^{-2}$, $D(q^{-1}) = 1$



รูปที่ 3.8 **ตัวอย่างของอินพุทซึ่งเป็นผลรวมของฟังก์ชั่นซายน์ โดย** $a_1 = 1, a_2 = 2,$

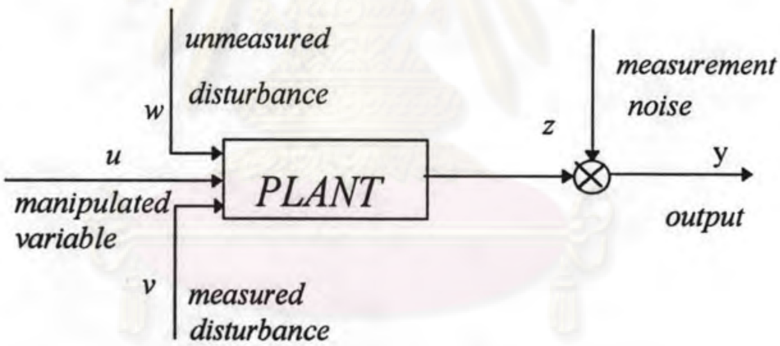
$w_1 = 0.4, w_2 = 0.7, \varphi_1 = \varphi_2 = 0$

(a) continuous form. (b) Sampling form.

การแสดงลักษณะโครงสร้างแบบจำลองของระบบสามารถแสดงได้หลายวิธี

ก. ลักษณะโครงสร้างเป็นแบบไม่มีค่าพารามิเตอร์ ในการอธิบายระบบ (nonparametric representations) ตัวอย่างเช่น การตอบสนองแบบอิมพัลส์ (impulse responses) การตอบสนองของฟังก์ชันสเต็พ (step response) เป็นต้น โครงสร้างแบบนี้มีประโยชน์ในกรณีที่ไม่จำเป็นต้องทราบค่าอันดับของกระบวนการที่แน่นอน และเวลาที่ใช้น้อย

ข. ลักษณะโครงสร้างที่มีพารามิเตอร์ในการอธิบายระบบ (parametric model) ตัวอย่างเช่น โครงสร้างแบบจำลองแบบสเตต (state model) โครงสร้างที่ลักษณะเป็นทรานส์เฟอร์ฟังก์ชัน โครงสร้างของแบบจำลองในลักษณะเป็นสมการพีชคณิต หรือสมการอนุพันธ์



รูปที่ 3.9 แผนภาพแสดงสัญญาณต่างๆ ที่เข้าสู่กระบวนการ

จากรูปที่ 3.9 แสดงถึงสัญญาณต่างๆ และ เป็นรูปแบบที่แสดงถึงระบบ และสิ่งแวดล้อมของระบบโดยรวม โครงสร้างของแบบจำลองที่เลือกใช้ หรือสร้างขึ้นมา ก็เพื่อที่จะสามารถอธิบายลักษณะความสัมพันธ์ของตัวแปรต่างๆในระบบ ซึ่งถ้าคำนึงถึงผลประโยชน์เพื่อออกแบบการควบคุม มักจะแสดงในรูปของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันระหว่างตัวแปรต่างๆที่สนใจ

กลุ่มของโครงสร้างของแบบจำลองที่เลือกใช้ ในการออกแบบการควบคุมส่วนใหญ่นิยมใช้เป็นแบบเชิงเส้นตรง โดยใช้ทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันที่ได้จากความสัมพันธ์ระหว่างอินพุทและเอาท์พุทเป็นแบบจำลองของระบบดังสมการ (3.4)

$$y(t) = G(t)\,u(t) + H(t)\,e(t) \tag{3.4}$$

โดย $y(t)$ = เอาท์พุท $G(t), H(t)$ = ทรานส์เฟอร์ฟังก์ชัน

$u(t)$ = อินพุท $e(t)$ = สัญญานรบกวน

3.4.3 ระบบดิสครีต (Discrete Time System)

จากที่ได้กล่าวมาแล้วว่า การระบุหากระบวนการ จะอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลอินพุทและเอาท์พุท ซึ่งลักษณะของข้อมูลจะเป็นลักษณะของ ช่วงเวลาที่ใช้ในการเก็บข้อมูล (sampling time) ดังนั้นโครงสร้างแบบจำลองจึงเป็นแบบ ดีสครีตไทม์ (discrete time model) ซึ่งหมายถึง แบบจำลองที่มีอินพุทและเอาท์พุทเป็นซีเควนซ์ของข้อมูล โดยสามารถแสดงแบบจำลองของกระบวนการได้ ในรูปสมการทางคณิตศาสตร์ได้ว่า

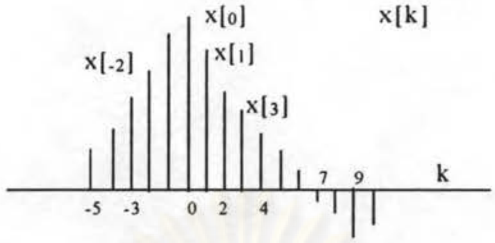
$$x = \{ x[k] \}, \quad -\infty < k < \infty \tag{3.5}$$

เมื่อ x: สัญญาณ k : เลขจำนวนเต็ม

โดยกระบวนการผลิต สัญญาณนี้ได้มาจากการเก็บตัวอย่าง (sampling) จากสัญญาณอะนาลอก x_a โดยมีช่วงเก็บตัวอย่าง T (sampling period)

$$x[k] = x_a(kt) \tag{3.6}$$

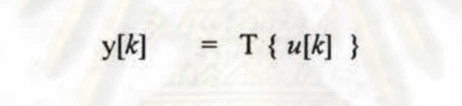
เมื่อ x_a : สัญญานอะนาลอก และรูปสัญญานแบบ ดีสครีตไทม์ แสดงดังรูปที่ 3.10



รูปที่ 3.10 แสดงตัวอย่างสัญญาณแบบดิสครีต (discrete time signal)

ส่วนนิยามเชิงคณิตศาสตร์ระหว่างซีเคว้นซ์ของสัญญาณอินพุท (input signal sequence):$u[k]$ และซีเคว้นซ์ของสัญญาณเอาท์พุท (output signal sequence) : $y[k]$ สามารถเขียนได้ดังนี้

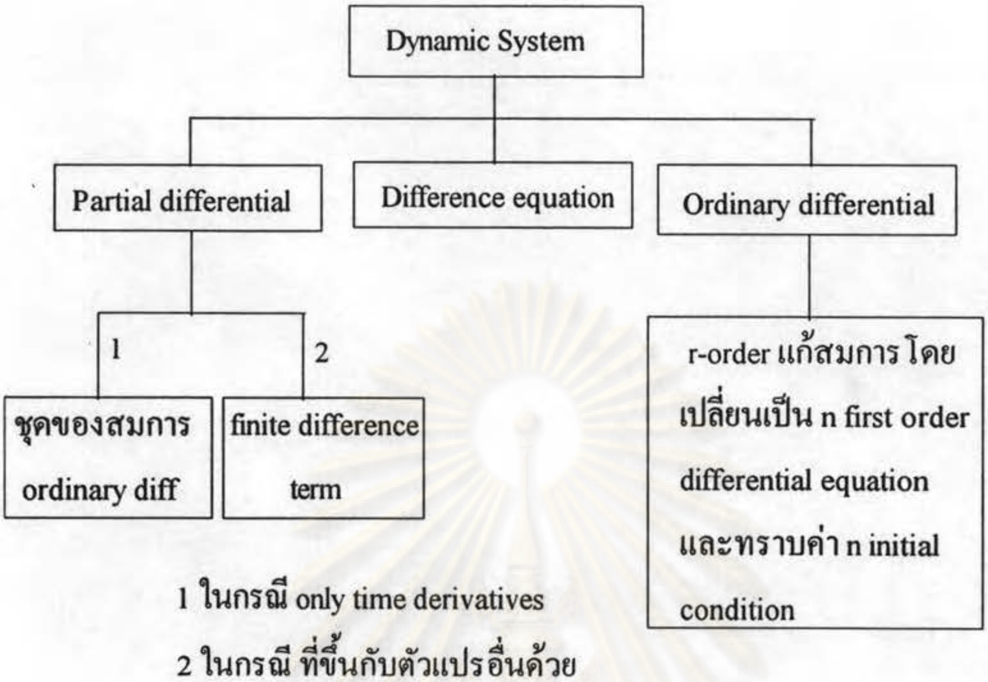
$$y[k] \quad = \quad T\{\, u[k] \,\} \tag{3.7}$$



รูปที่ 3.11 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างซีเคว้นซ์ของสัญญาณอินพุทและเอาท์พุท

3.4.4 การอธิบายไดนามิกของระบบ ในลักษณะที่โครงสร้างของแบบจำลอง เป็นแบบพาราเมตริก (parametric model)

ลักษณะไดนามิกของระบบสามารถอธิบายได้ด้วยลักษณะสมการ ดังแสดงในรูปที่ 3.12



รูปที่ 3.12 ไดอะแกรมแสดงลักษณะสมการ ที่ใช้อธิบายลักษณะไดนามิกของกระบวนการ

จากชุดของสมการ ดิฟเฟอเรนเชี่ยลอันดับที่หนึ่ง สามารถจัดเป็นรูปแบบของเวคเตอร์ขนาด n ได้ ซึ่งเวคเตอร์นี้เป็นตัวที่แสดงถึงสภาวะที่เจาะจงของระบบ เรียกเวคเตอร์นี้ว่า เวคเตอร์สเตต (state vector) และ เรียกสมการอนุพันธ์ของเวคเตอร์ (vecter differential) นี้ว่า สมการสเตต (state equation)

พิจารณา สมการเวคเตอร์สเตต (vector-state-equation) (Daniel Graupe, 1972)

$$\dot{X} = AX + Bu \tag{3.8}$$

X เป็นเวคเตอร์สเตต (state-vector) ขนาด $n \times 1$

u เป็นเวคเตอร์อินพุท (input-vector) ขนาด m × 1

Ω, Γ เป็นสัมประสิทธ์ (coefficient)

ทำให้เป็นเชิงเส้น (linear transformation) จะได้ว่า

$$X^{*} = \psi^{-1}X \tag{3.9}$$

X^{*} เป็นเวคเตอร์สเตตทรานส์ฟอร์ม (transform state vector)

ψ เป็นแมทริกซ์ทรานส์ฟอร์ม (transformation matrix)

ดังนั้น

$$\dot{X} = \Omega^{*}X^{*} + \Gamma^{*}u \tag{3.10}$$

โดย $\Omega^{*} = \psi^{-1}\Omega y$ $\Gamma^{*} = \psi^{-1}\Gamma$

แบบที่ 1 การเปลี่ยนแปลงเป็นรูปแบบบัญญัติ (Canonical transformation) เป็นหนึ่งในการเปลี่ยนเป็นระบบเชิงเส้น ซึ่ง ทรานส์ฟอร์เมชันแมทริกซ์ เป็น ไอเกนเวคเตอร์แมทริกซ์ ซึ่งเป็นแมทริกซ์ที่เป็นผลจากคำตอบของสมการเชิงเส้น

ตัวอย่างเช่น กรณี $\dot{X} = \Omega X$; $X(0) = X_0$

คำตอบของสมการคือ

$$x_1(t) = \upsilon_{11}\, exp(\lambda_1 t) + \ldots + \upsilon_{1n}\, exp(\lambda_n t)$$

.

.

.

$$x_n(t) = \upsilon_{n1}\, exp(\lambda_1 t) + \ldots + \upsilon_{nn}\, exp(\lambda_n t) \tag{3.11}$$

แสดงในรูปของเวคเตอร์

$$X(t) = V\, exp(\lambda t) = v_1\, exp(\lambda_1\, t) + \ldots + v_n\, exp(\lambda_n\, t) \tag{3.12}$$

$$\exp(\lambda t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \upsilon_{11} & \cdot\cdot\cdot & \upsilon_{1n} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \upsilon_{n1} & \cdot\cdot\cdot & \upsilon_{nn} \end{bmatrix} = [\, v_1 \ldots v_n \,] \tag{3.13}$$

ดังนั้น สมการรูปแบบบัญญัติแบบสเตต (Canonical state equation) แสดงได้ดังสมการข้างล่างนี้

$$\dot{X}^* = \Lambda X^* + \Gamma^* u \; ; \; \Lambda = V^{-1}\Omega V ,\ \Gamma^* = V^{-1}\Gamma \tag{3.14}$$

ค่าที่ได้จาก การวัดผลของการทดลอง

$$y = \Delta^* X^* \quad ; \; \Delta^* = \Delta V \tag{3.15}$$

แบบที่ 2. ดิสครีตฟอร์ม(discrete form)

$$x(k+1) = \Omega x(k) + \Gamma u(k) \; ; k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$y(k) = \Delta\, x(k) \tag{3.16}$$

สามารถเขียนสมการ ของ แบบจำลองแบบสเตตสเปซ (state space model) จาก ทรานส์-เฟอร์ฟังก์ชัน ซึ่งเป็นสมการของ ทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันแบบดิสครีต (discrete transfer function) หรือ จากการประมาณค่าของ

$$\frac{x(k+1)-x(k)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt} \qquad \text{ที่ } t = k\,\Delta t \; ; \; k = 0, 1, 2, . \tag{3.17}$$

สมการในรูปของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันแบบซี-ทรานส์ฟอร์ม (Z-transformed transfer function)

$$G(z) = \frac{b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n}} = \frac{y(z)}{u(z)} \tag{3.18}$$

จากสมการ (3.14) คูณไขว้ และใช้ โอเปอร์เรเตอร์ถอยหลัง (back-shift operator) จะได้ว่า

$$y_k + a_1 y_{k-1} + \ldots + a_n y_{k-n} = b_1 u_{k-1} + b_2 u_{k-2} + \ldots + b_m u_{k-m} \tag{3.19}$$

จากสมการ (3.15) จะเห็นว่า ลักษณะสมการเป็นสมการดิฟเฟอเรนซ์ (difference equation) ซึ่งในการระบุหากระบวนการ ใช้เป็นสมการโครงสร้างของแบบจำลองของระบบ ซึ่งสามารถแปลงเป็น สมการสเตตในรูปแบบดีสครีต ได้ดังแสดงในสมการ (3.16)

$$x(k) = \Phi x(k-1) + \Gamma u(k-1)$$

$$y(k) = C\,x(k)$$

$$\Phi = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \\ \cdot & I \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \hline -a_n \;\; -a_{n-1} & \cdots \;\; -a_1 \end{array}\right]$$

โดย

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ a_1 & 1 & & 0 & \\ a_2 & a_1 & 1 & & \\ \cdot & & & \ddots & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ a_{n-1} & \cdots & a_1 & & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix} = \alpha^{-1}\beta \tag{3.20}$$

จากที่กล่าวมา สามารถเขียนสมการที่แสดงถึงระบบได้ในหลายๆ รูปแบบซึ่งขึ้นอยู่กับประโยชน์ของการนำไปใช้ กรณีที่มีวัตถุประสงค์เพื่อการออกแบบการควบคุม นิยมเขียนในรูปของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันได้ดังนี้

$$y(t) \;=\; G(q)\,u(t) + H(q)\,e(t) \tag{3.21}$$

$G(q)$ = ทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันของอินพุทกับเอาท์พุท

$H(q)$ = ทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันของสัญญาณรบกวนกับเอาท์พุท

ในงานวิจัยนี้ พิจารณากระบวนการเป็นระบบเชิงเส้นตรง และพิจารณาถึงสิ่งรบกวน (disturbance) ของกระบวนการด้วย ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการทั่วไปได้ดังสมการ (3.22)

$$y(t) \;=\; G(q,\theta)\,u(t) + H(q,\theta)(t) \tag{3.22}$$

θ คือเวคเตอร์ของพารามิเตอร์

ซึ่งสามารถคำนวณหาค่าประมาณของเอาท์พุท ($\hat{y}(t/\theta)$) ได้ดังสมการ (3.23)

$$\hat{y}(t/\theta) \;=\; H^{-1}(q,\theta)\,G(q,\theta)\,u(t) + [1-H^{-1}(q,\theta)(t)]\,y(t) \tag{3.23}$$

จากสมการ (3.15) ซึ่งได้มาจากสมการของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชัน เรียกได้ว่าเป็น ฟังก์ชันถดถอยเชิงเส้นตรง (Linear regression) ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอินพุท และ เอาท์พุท ซึ่งเป็นวิธีที่จะหาค่า G และ H ได้อย่างรวดเร็ว ในลักษณะของฟังก์ชันเศษส่วน (rational function) โดยมีพารามิเตอร์ เป็นซึ่งเรียกว่า นิวเมอเรเตอร์ (numerator coefficient) เป็นตัวเศษ และพารามิเตอร์

ซึ่งเรียกว่า ดีโนมิเนเตอร์ (denominator coefficient) เป็นตัวส่วน ของ ทรานส์เฟอร์ฟังก์ชัน (Ljung, L., 1987) ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะกล่าวถึง 6 โครงสร้างคือ

(1) ARX (AutoRegressive with eXtra input)

(2) ARMA (AutoRegressive Moving Average)

(3) ARMAX (AutoRegressive Moving Average with eXtra input)

(4) OE (Output Error)

(5) BJ (Box-Jenkins)

(6) PEM (Prediction Error Method)

ที่มาของสมการของรูปแบบโครงสร้างแบบจำลองที่เสนอ มาจากเกณฑ์การหาค่าต่ำสุด ของค่าความผิดพลาดในการประมาณค่า หรือการคำนวณของแบบจำลองของกระบวนการ ซึ่งสามารถจำแนก ความผิดพลาดที่เกิดขึ้นได้ 3 รูปแบบ (K.J. *Åström* and P. Eykhoff, 1971) คือ

รูปแบบที่ 1 ค่าความผิดพลาดของสมการที่เกิดจากเอาท์พุท (output error)

$$e = y - y_m = y - M(u) \tag{3.24}$$

M(u) เป็น เอาท์พุทของแบบจำลองที่เลียนแบบกระบวนการจริง โดยมีอินพุทเหมือนกันคือ u และ e คือ ค่าความผิดพลาดของเอาท์พุท แสดงดังรูปที่ 3.13 (a)

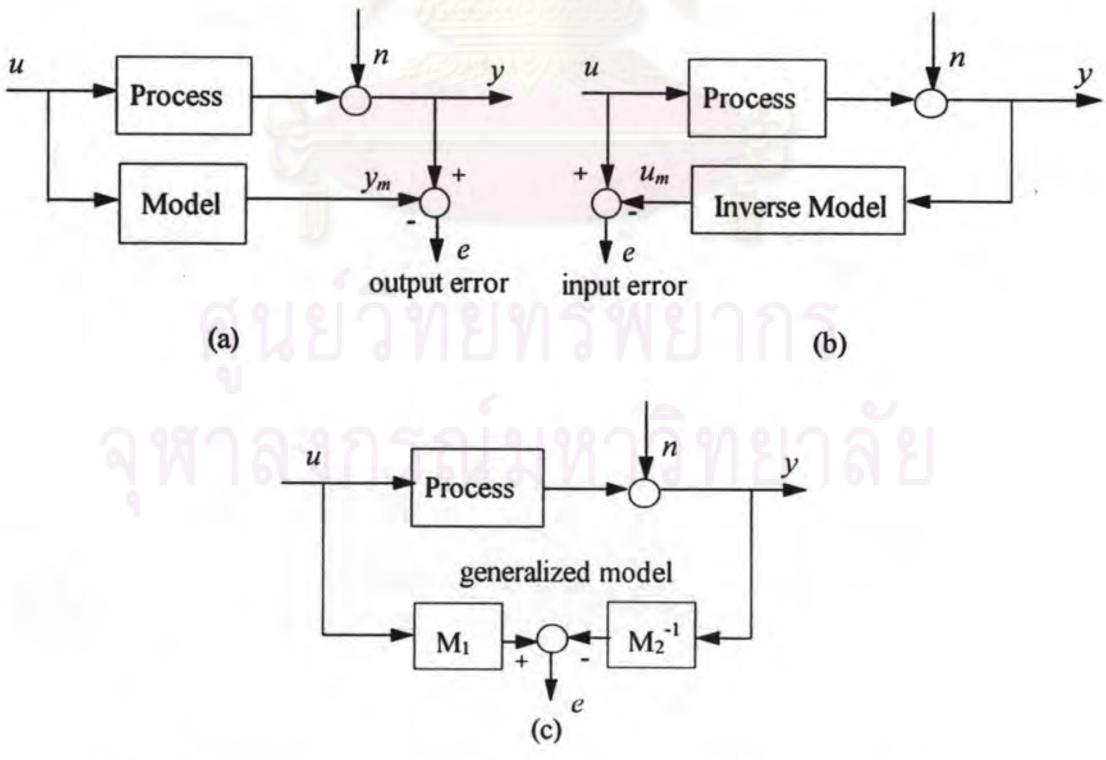
รูปแบบที่ 2 ค่าความผิดพลาดของสมการที่เกิดอินพุท (input error) แสดงดังรูปที่ 3.13(b)

$$e = u - u_m = u - M^{-1}(y) \tag{3.25}$$

$u_m = M^{-1}(y)$ เป็นอินพุทของแบบจำลองที่เลียนแบบกระบวนการจริง ซึ่งได้จากค่าเอาท์พุทของกระบวนการ เรียกแบบจำลองแบบนี้อีกอย่างหนึ่งว่า แบบจำลองแบบอินเวริสท์ (inverse model) ซึ่งเป็นการหาว่าควรใช้อินพุทแบบไหน ซึ่งเมื่อเข้าสู่กระบวนการแล้วทำให้ได้เอาท์พุทออกมาเหมือนกับกระบวนการจริง

รูปแบบที่ 3 เป็นความผิดพลาดในรูปแบบทั่วไป (generalized error) ซึ่งค่าความผิดพลาด แสดงได้ดังสมการ (3.26) โดยขึ้นอยู่กับค่าเอาท์พุท และอินพุท แสดงได้ดังรูปที่ 3.13 (c) หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า ค่าความผิดพลาดของสมการ (equation error)

$$e = M_2^{-1}(y) - M_1(u) \tag{3.26}$$



รูปที่ 3.13 รูปแบบของค่าของความผิดพลาดระหว่างกระบวนการจริงกับแบบจำลอง

ARX รูปแบบของโครงสร้างแสดงได้ดังสมการ (3.27) เป็นสมการอย่างง่ายที่ใช้กันทั่วไป สมการเป็นลักษณะสมการพีชคณิตเชิงเส้นตรง จากสมการจะเห็นได้ว่า เทอม $e(t)$ เป็นลักษณะของค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นโดยตรงจากสมการ ดังนั้นบางครั้ง จึงเรียกรูปแบบแบบจำลองนี้ว่า ค่าความผิดของสมการ (equation error model) โดย เทอม $e(t)$ เป็นเทอมของสัญญาณรบกวนต่างๆในกระบวนการซึ่งทำให้ การประมาณค่าของเอาท์พุทของกระบวนการเกิดความผิดพลาดได้ ซึ่งในที่นี้เรียกเทอมนี้ว่า ไวท์นอยซ์ (white noise)

$$y(t) + a_1\, y(t-1) + \ldots + a_{na}\, y(t-n_a) = b_1\, u(t-1) + \ldots + b_{nb}\, u(t-n_b) + e(t) \quad (3.27)$$

ได้ว่า

$$A(q)\, y(t) = B(q)\, u(t) + e(t)$$

$$A(q) = 1 + a_1\, q^{-1} + \ldots + a_{na}\, q^{-na} \quad ; B(q) = b_1\, q^{-1} + \ldots + b_{nb}\, q^{-nb} \quad (3.27a)$$

หรือ

$$y(t) = \frac{B(q)}{A(q)}u(t) + \frac{1}{A(q)}e(t) \quad (3.28)$$

ซึ่งค่า พารามิเตอร์ที่ต้องคำนวณหาของแบบจำลองนี้ คือ

$$\theta = [a_1 \;\; a_2 \ldots a_{na} \;\; b_1 \ldots b_{nb}]^T \quad (3.29)$$

สามารถแสดงอยู่ในรูปของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันดังสมการ (3.30)

$$G(q) = \frac{B}{A} \qquad H(q) = \frac{1}{A} \quad (3.30)$$

ARMA รูปแบบของโครงสร้างแสดงได้ดังสมการ (3.31) เป็นแบบจำลองที่พิจารณาการเปลี่ยนแปลงของเอาท์พุท เป็นฟังก์ชันแบบอนุกรมของเวลา (time series)

$$y(t) + a_1\, y(t-1) + \ldots + a_{na}\, y(t-n_a) = c_1\, e(t-1) + \ldots + c_{nc}\, e(t-n_c) \tag{3.31}$$

โดย $C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + \ldots + c_{nc} q^{--nc}$

จะได้ว่า

$$y(t) = \frac{C(q)}{A(q)} e(t)$$

ฉะนั้น $$H(q) = C(q) \,/\, A(q) \tag{3.32a}$$

พารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าคือ

$$\theta = [a_1 \;\ldots\; a_{na,}\; c_1 \;\ldots\; c_{nc}\,]^T \tag{3.33}$$

ARMAX รูปแบบของโครงสร้างแสดงได้ดังสมการ (3.34) เป็นแบบจำลองที่พัฒนามาจากแบบจำลองแบบ ARX เนื่องจากแบบจำลองแบบ ARX ไม่ได้อธิบายถึงคุณลักษณะของสิ่งรบกวนในกระบวนการ ดังนั้น จึงได้เพิ่มเทอมของการอธิบายของสิ่งรบกวนด้วยออโตรีเกรสซีฟมูฟวิ่งเอเวอเรจ ในโครงสร้างแบบจำลองแบบ ARMAX

$$y(t) + a_1\, y(t-1) + \ldots + a_{na}\, y(t-n_a) = b_1\, u(t-1) + \ldots + b_{nb}\, u(t-n_b) + e(t)$$

$$+ c_1\, e(t-1) + \ldots + c_{nc}\, e(t-n_c) \tag{3.34}$$

โดย $C(q) = 1 + c_1\, q^{-1} + \ldots + c_{nc}\, q^{-nc}$

จะได้ว่า

$$A(q)\, y(t) = B(q)\, u(t) + C(q)\, e(t) \tag{3.34a}$$

จะได้ว่า $$y(t) = \frac{B(q)u(t)}{A(q)} + \frac{C(q)e(t)}{A(q)} \tag{3.35}$$

ฉะนั้น $$G(q,\theta) = \frac{B(q)}{A(q)} \ , \qquad H(q,\theta) = \frac{C(q)}{A(q)} \tag{3.35a}$$

พารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าคือ

$$\theta = [a_1 \ldots a_{na} \ b_1 \ldots b_{nb} \ c_1 \ldots c_{nc}]^T \tag{3.36}$$

OE สำหรับแบบจำลองนี้มี โครงสร้างเป็นที่ค่าความผิดพลาดเกิดจากเอาท์พุท แสดงได้ดังสมการ (3.37) จากโครงสร้างซึ่งเป็นแบบค่าความผิดพลาดของสมการ (equation error) ดังสมการ (3.27) และทรานส์เฟอร์ฟังก์ชัน G และ H มีโพลีโนเมียล A เป็นแฟคเตอร์ร่วมของดีโนมิเนเตอร์ (denominator) ส่วนโครงสร้างแบบค่าความผิดพลาดของเอาท์พุทเป็นสมการแสดงค่าความสัมพันธ์ระหว่างอินพุท กับเอาท์พุทซึ่งไม่ถูกรบกวน w

$$w(t) + f_1 \, w(t-1) + \ldots + f_{nf} \, w(t-n_f) = b_1 \, u(t-1) + \ldots + b_{nb} \, u(t-n_b) \tag{3.37}$$

$$y(t) = w(t) + e(t) \tag{3.37a}$$

$$F(q) = 1 + f_1 \, q^{-1} + \ldots + f_{nf} \, q^{-nf}$$

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)} u(t) + e(t) \tag{3.38}$$

พารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าคือ

$$\theta = [\, b_1 \ldots b_{nb} \ \ f_1 \ \ldots f_{nf} \,]^T \tag{3.39}$$

BJ เป็นแบบจำลองที่พัฒนามาจาก OE โครงสร้างของแบบจำลอง แสดงได้ดังสมการ (3.40)

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t)+\frac{C(q)}{D(q)}e(t) \tag{3.40}$$

$D(q) = 1 + d_1\, q^{-1}+ \ldots + d_{nd}\ q^{-nd}$

พารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าคือ

$$\theta = [\, b_1 \ldots b_{nb}\ \ f_1 \ldots f_{nf}\ \ c_1 \ldots c_{nc}\ \ d_1 \ldots d_{nd}\,]^T \tag{3.41}$$

PEM เป็นโครงสร้างแบบทั่วไป โครงสร้างของแบบจำลอง แสดงได้ดังสมการ (3.42)

$$A(q)\, y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t)+\frac{C(q)}{D(q)}e(t) \tag{3.42}$$

$F(q) = 1 + f_1 q^{-1}+ \ldots + f_{nf} q^{-nf}$

$D(q) = 1 + d_1 q^{-1}+ \ldots + d_{nd} q^{-nd}$

พารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าคือ

$$\theta = [a_1 \ldots a_{na}\ b_1 \ldots b_{nb}\ \ f_1 \ldots f_{nf}\ \ c_1 \ldots c_{nc}\ \ d_1 \ldots d_{nd}\,]^T \tag{3.43}$$

สามารถเขียนเป็นสมการทั่วไป ได้ดังนี้

$$A(q)\, y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t)+\frac{C(q)}{D(q)}e(t) \tag{3.44}$$

จะเห็นได้ว่า สมการที่ยกตัวอย่างมาแล้วข้างต้น มีลักษณะที่แตกต่างกันคือ การใช้โพลีโนเมียลหน้าตัวแปรอินพุท เอาท์พุท และ สัญญาณรบกวน ดังนั้นถ้าพิจารณาตามลักษณะการใช้โพลี-

โนเมียลจากสมการทั่วไป สมการ (3.44) จะเห็นได้ว่า จะมีโครงสร้างของแบบจำลองที่แตกต่างกัน ถึง 32 โครงสร้าง โดยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้เลือกนำมาใช้เพียง 6 โครงสร้าง ซึ่งชื่อเรียกโครงสร้างต่างๆแสดงได้ดังต่อไปนี้

โพลีโนเมียลที่ใช้	ชื่อของแบบจำลอง
B	FIR (finite impulseresponse)
AB	ARX
ABC	ARMAX
ABD	ARMA
BF	OE
BFCD	BJ
ABCDF	PEM

ลักษณะการใช้โพลีโนเมียลต่างๆอธิบายไดนามิกของกระบวนการเรียกได้ว่า เป็นแมทริกซ์แฟคชัน (Matrix Fraction Descriptions, MFD)

กรณีมี ไทม์ดีเลย์(time delay (nk)) ของการเก็บตัวอย่างอินพุทกับเอาท์พุท

$$\begin{aligned} B(q) &= b_{nk}\, q^{-nk} + b_2\, q^{-nk-1} + \ldots + b_{nk+nb-1}\, q^{-nk-nb+1} \\ &= q^{-nk}\, \overline{B}(q) \end{aligned} \tag{3.45}$$

ระบบหลายตัวแปร (multivariable system)

เป็นระบบที่มีอินพุทและเอาท์พุทมากกว่า 1 ตัวแปร พิจารณา อินพุท ($u(t)$) มีจำนวนตัวแปร m ตัว และเอาท์พุท ($y(t)$) มีจำนวน p ตัว ลักษณะสมการอย่างง่ายซึ่งนิยมใช้กันทั่วไปคือ ค่าความผิดพลาดของสมการ (equation error) ดังสมการ (3.24)

$$y(t) + A_1\, y(t-1) + \ldots + A_{na}\, y(t-na) \quad = B_1\, u(t-1) + \ldots + B_{nb}\, u(t-nb) + e(\mathrm{t}) \tag{3.46}$$

ซึ่ง A_i เป็นแมทริกซ์ขนาด $p \times p$ และ B_i เป็นแมทริกซ์ขนาด $p \times m$

$$A(q) = \mathrm{I} + A_1\, q^{-1} + \ldots + A_{na}\, q^{-na}$$

$$B(q) = B_1\, q^{-1} + B_2\, q^{-2} + \ldots + B_{nb}\, q^{-nb} \tag{3.47}$$

จากสมการ (3.47) แมทริกซ์โพลีโนเมียลเป็น q^{-1} ใน $A(q)$ ดังนั้น ตัว $A(q)$ จริงๆ โพลีโนเมียลอยู่ในรูป q^{-1} (backward shift operator) เขียนในรูปของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันได้ว่า

$$y(t) = G(q, \theta)u(t) + H(q, \theta)\, e(t) \tag{3.48}$$

ซึ่ง $$G(q, \theta) = A^{-1}(q)\, B(q) \qquad H = A^{-1}(q) \tag{3.49}$$

$$\theta = [\, A_1\ A_2\ \ldots\ A_{na}\ \ B_1\ \ldots\ B_{nb}\,] \tag{3.50}$$

จากสมการ (3.47) จำนวนพารามิเตอร์ทั้งหมดที่ต้องคำนวณคือ $na.p^2 + nb.p.m$ และจากสมการ (3.50) ขนาดของคอลัมน์เวคเตอร์คือ $na.p + nb.m$ ขนาดของโรว์เวคเตอร์เท่ากับ p สามารถเขียนอีกรูปแบบหนึ่งได้ว่า

$$y(\mathrm{t}) \quad = \quad \Phi^{\mathrm{T}}(t)\, \theta + e(\mathrm{t})$$

$$\Phi^{T} = \begin{bmatrix} \varphi^{T}(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi^{T}(t) \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

$$\varphi^{T} = (-y^{T}(t-1) \ldots -y^{T}(t-n_a) \;\; u^{T}(t-1) \ldots u^{T}(t-n_b))$$

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta^{1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta^{ny} \end{bmatrix}$$

โดย

$$\begin{bmatrix} \theta^{1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta^{ny} \end{bmatrix} = (A_1 \ldots A_{na} \; B_1 \ldots B_{nb}) \tag{3.52}$$

ตัวอย่าง ny =2 nu = 3 na = 1 nb = 2

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_1^{21} & b_1^{22} & b_1^{23} \\ b_1^{11} & b_1^{12} & b_1^{13} \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} b_2^{11} & b_2^{12} & b_2^{13} \\ b_2^{21} & b_2^{22} & b_2^{23} \end{bmatrix}$$

$$\varphi^{T} = (-y_1(t-1)\ \ -y_2(t-1)\ \ u_1(t-1)\ \ u_2(t-1)\ u_3(t-1)$$

$$u_1(t-2)\ \ u_2(t-2)\ \ u_3(t-2)\ )$$

$$\theta^{1} = (a^{11} a^{12}\ \ b_1^{\ 11}\ \ b_1^{\ 12}\ \ b_1^{\ 13}\ \ b_2^{\ 11}\ \ b_2^{\ 12}\ \ b_2^{\ 13}\ )^{T}$$

$$\theta^{2} = (a^{21} a^{22}\ \ b_1^{\ 21}\ \ b_1^{\ 22}\ \ b_1^{\ 23}\ \ b_2^{\ 21}\ \ b_2^{\ 22}\ \ b_2^{\ 23}\ )^{T} \tag{3.53}$$

แบบจำลองแบบสเตตสเปซ (State-space model) รูปแบบสมการเป็นความสัมพันธ์ระหว่างอินพุท เอาท์พุท และ สัญญาณรบกวน ในรูปสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และสมการพีชคณิต โดยมีตัวแปรช่วย คือ เวคเตอร์สเตต ($x(t)$) สามารถเขียนสมการของโครงสร้างแบบสเตตในรูปแบบดิสครีสต์ได้ดังสมการ (3.54a และ 3.54b)

$$x(t+1) = \Omega(\theta)\, x(t) + \Gamma(\theta)\, u\,(t) \tag{3.54a}$$

$$y(t) = \Delta(\theta)\, x(t) \tag{3.54b}$$

แสดงความสัมพันธ์ในรูปแบบของทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันได้ดังสมการ

$$y(t) = G(q, \theta)\, u(t) \tag{3.55}$$

$$G(q, \theta) = \Delta(\theta)\ [\ qI - \Omega(\theta)\ ]^{-1}\ \Gamma(\theta) \tag{3.56}$$

กรณีมีสัญญาณรบกวน

$$y(t) = G(q, \theta)\, x(t) + \upsilon\,(t) \tag{3.57}$$

เขียนทรานส์เฟอร์ฟังก์ชันในรูปสัญญาณรบกวน $\upsilon\,(t)$ ได้ว่า

$$\upsilon\,(t) = H(q, \theta)\, e(t) \tag{3.58}$$

$e(t)$ เป็นไวท์นอยซ์มีค่าแวเรียนซ์ λ โดยค่าพารามิเตอร์ในเทอม $H(q, \theta)$ มีส่วนหนึ่งเป็นส่วนร่วมกับเทอมของ $G(q, \theta)$ เทอมของนอยซ์ส่วนใหญ่มาจากการวัด $\upsilon(t)$ และจากกระบวนการ $w(t)$ ดังนั้นรูปแบบจำลองโครงสร้างแบบสเตต สามารถเขียนได้ดังสมการ

$$x(t+1) = \Omega(\theta)\, x(t) + \Gamma(\theta)\, u(t) + w(t) \tag{3.59}$$

$$y(t) = \Delta(\theta)\, x(t) + \upsilon(t) \tag{3.60}$$

เขียนสมการอยู่ในรูปการประมาณค่าพารามิเตอร์ได้ว่า

$$\hat{x}(t+1, \theta) = \Omega(\theta)\hat{x}(t, \theta) + \Gamma(\theta)\, u(t) + K(\theta)[y(t) - \Delta(\theta))\hat{x}(t, \theta)] \tag{3.61}$$

$$\hat{y}(t \setminus \theta) = \Delta(\theta)\,)\hat{x}(t, \theta) \tag{3.62}$$

การแปลงค่าแบบจำลองแบบโครงสร้างสเตต ไปเป็นแบบจำลองซึ่งอธิบายกระบวนการโดยแมทริกซ์ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอินพุทและเอาท์พุท

จากสมการ (3.63a) และ (3.63b) ถ้าจำนวนเอาท์พุทของกระบวนการมี p ตัว โดยค่าอันดับของเอาท์พุทแต่ละตัวคือ $n_1, n_2 \ldots n_p$ ดังนั้นจำนวนอันดับรวมของกระบวนการเท่ากับ n

โดย $n = \sum_{i=1}^{p} n_i$

จากสมการโครงสร้างแบบสเตต

$$x(t+1) = \Omega x(t) + \Gamma\, u(t) \tag{3.63a}$$

$$y(t) = \Delta\, x(t) \tag{3.63b}$$

โดย
$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \cdots & \Omega_{1p} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ \Omega_{p1} & \cdots & \Omega_{pp} \end{bmatrix} \qquad (n \times n)$$

$$\Omega_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ \cdot & & \\ \cdot & I_{n_i 1} & \\ \cdot & & \\ 0 & & \\ \Omega_{ii1} & \cdots & \Omega_{iin_i} \end{bmatrix} \quad (n_i \times n_i)$$

$$\Omega_{ij} = \begin{bmatrix} & & \\ & 0 & \\ \Omega_{ij1} & \cdots & \Omega_{ijn_j} \end{bmatrix} \quad (n_i \times n_j) \tag{3.64}$$

และ Γ คือ แมทริกซ์ขนาด $p \times m$ ซึ่ง m คือจำนวนอินพุทของกระบวนการ ส่วนแมทริกซ์ Δ เป็นแมทริกซ์ ขนาด $p \times n$ ซึ่งประกอบด้วยค่าของ ศูนย์ โดยในแต่ละแถวของแมทริกซ์จะมีอยู่หนึ่งคอลัมน์ที่มีค่าเท่ากับหนึ่ง โดยหลักที่มีค่าเท่ากับหนึ่งคือ

$$q_j = 1 + \sum_{i=1}^{j1} n_i \tag{3.65}$$

กรณีที่แบบจำลองของกระบวนการเป็นแมทริกซ์ของความสัมพันธ์ระหว่างอินพุทและเอาท์พุท แสดงเป็นสมการได้ดังสมการ (3.66)

$$P(q)\ y(t) = Q(q)\ u(t) \tag{3.66}$$

โดย q เป็นโอเปอร์เรเตอร์เลื่อนไปข้างหน้า (forward shift operator) ส่วน $P(q)$ และ $Q(q)$ เป็นแมทริกซ์ของโพลีโนเมียลซึ่งเป็นความสัมพันธ์ของอินพุท และเอาท์พุท

$$P(q) = \begin{bmatrix} p_{11}(q) & \cdots & p_{1p}(q) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ P_{p1}(q) & \cdots & p_{pp}(q) \end{bmatrix} \quad (p \times p)$$

$$Q(q) = \begin{bmatrix} Q_{11}(q) & \dots & Q_{1m}(q) \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ Q_{p1}(q) & \dots & Q_{pm}(q) \end{bmatrix} \quad (p \times m) \tag{3.67}$$

$$P_{ii} = q^{n_i} - \Omega_{iin_i} q^{n_i 1} - \dots - \Omega_{ii2} q - \Omega_{ii1}$$

$$P_{ij} = -\Omega_{ijn_j} q^{n_j 1} - \dots - \Omega_{ij2} q - \Omega_{ij1}$$

$$Q_{ij} = \Gamma_{ijr_i} q^{r_i 1} + \dots - \Gamma_{ij2} q - \Gamma_{ij1} \quad \text{โดย } r_i = max\,(r_i\,,\, n_i) \quad r = max(n_j) - 1 \tag{3.68}$$

3.4.5 การประมาณค่าพารามิเตอร์ (parameter estimation)

ในกรณีโครงสร้างของแบบจำลอง เป็นลักษณะที่มีค่าพารามิเตอร์ (parametric model) ดังนั้นจึงจำเป็นต้องมีวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโครงสร้างที่สร้างขึ้นมา

ลักษณะวิธีของการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ดี ต้องคำนึงถึงสิ่งต่อไป นี้คือ

- เป็นวิธีซึ่งได้คำตอบ และ ความเร็วหรือเวลาที่ใช้ในการคำนวณ

- ให้ผลคำตอบในการคำนวณที่ดี คือเมื่อทดสอบโครงสร้างแล้ว ผลที่ออกมาใกล้เคียงกับค่าจริงมากที่สุด

- ความยากง่ายของวิธีที่ใช้

วิธีการระบุหากระบวนการ(Identification method) ที่ใช้

ก. วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least square, LS)

ข. วิธี ไอวี (Instrumental variable, IV)

วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (least squares method)

ค่าเอาท์พุทในปัจจุบัน y_n จะเกี่ยวเนื่องมาจากค่าเอาท์พุทในอดีต y_{n-1}, y_{n-2} และค่าปัจจุบัน และค่าในอดีตของอินพุท u_n , u_{n-1}, ... แสดงความสัมพันธ์ได้ดังสมการ

$$\hat{y}_n = a_o u_n + a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \ldots + a_m u_{n-m} - b_1 y_{n-1} - b_2 y_{n-2} - \ldots - b_N y_{n-N} \tag{3.69}$$

$\hat{y}_n$ เป็นค่าประมาณของเอาท์พุทของกระบวนการในเวลาปัจจุบัน

$a_o, a_1, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_N$ เป็นพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า จำนวน $m+N+1$ ตัว สามารถเขียนอยู่ในรูปแมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\theta = \begin{bmatrix} a_o \\ a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_m \\ b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_N \end{bmatrix} \tag{3.70}$$

ถ้าให้ $N_c = N+m+1$ ฉนั้น เวคเตอร์จะมี N_c แถว สมมุติว่า ข้อมูล NP จุดที่ให้ค่าของเอาท์พุท y_n

NP	y_n value	y_{n-1} value	. . . y_{n-N} value	u_n value	u_{n-1} value	. . . u_{n-M}value
1	$y_{1,n}$	$y_{1,n-1}$	$y_{1,n-N}$	$u_{1,n}$	$u_{1,n-1}$	$u_{1,n-M}$
2	$y_{2,n}$	$y_{2,n-1}$	$y_{2,n-N}$	$u_{2,n}$	$u_{2,n-1}$	$u_{2,n-M}$
.						
.						
.						
NP	$y_{NP,n}$	$y_{NP,n-1}$	$y_{NP,n-N}$	$u_{NP,n}$	$u_{NP,n-1}$	$u_{NP,n-M}$

(3.71)

โดยค่ากำลังสองน้อยที่สุดของค่าความผิดพลาดของโครงสร้างจริง และโครงสร้างที่ได้จากการ

ประมาณค่าแสดงดังสมการ (3.60) ซึ่ง $V(\theta)$ เป็นค่าแวเรียนซ์ของความผิดพลาด หรือค่าความแตกต่างระหว่างเอาท์พุทจากกระบวนการจริง กับ ค่าเอาท์พุทซึ่งได้จากการคำนวณค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองของกระบวนการ ซึ่งบางครั้งเรียกว่า ฟังก์ชันความสูญเสีย (Loss function)

$$V(\theta) = \sum_{i=1}^{NP} \left(y_{i,n} - \hat{y}_{i,n} \right)^2 = \sum_{i=1}^{NP} \varepsilon^2(t) \tag{3.72}$$

ดังนั้นสามารถประมาณค่า พารามิเตอร์ได้โดย

$$\theta = \left[\Phi^T \Phi \right]^{-1} \Phi^T y \tag{3.73}$$

หรือ เขียนในเทอมของการหาค่าต่ำสุดของค่าความผิดพลาดในการประมาณค่าได้ว่า

$$\theta = \operatorname{argmin} V(\theta) \tag{3.74}$$

โดย

$$\Phi = \begin{bmatrix} y_{1,n-1} \; y_{1,n-2} \; . \; . \; . \; y_{1,n-N} & u_{1,n} \; . \; . \; . \; u_{1,n-1} & u_{1,n-M} \\ y_{2,n-1} \; y_{2,n-2} \; . \; . \; . \; y_{2,n-N} & u_{2,n} \; . \; . \; . \; u_{2,n-1} & u_{2,n-M} \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ y_{NP,n} \; y_{NP,n-1} \; . \; . \; . \; y_{NP,n-N} & u_{NP,n} \; . \; . \; . u_{NP,n-1} & u_{NP,n-M} \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_{1,n} \\ y_{2,n} \\ . \\ . \\ . \\ y_{NP,n} \end{bmatrix}$$

หรือเขียนในรูปแบบของสมการฟังก์ชันถดถอยเชิงเส้นตรง (Linear regression) ได้ดังสมการ (3.75) โดย Φ เป็นเวคเตอร์รีเกรสชัน

$$\hat{y}(t \setminus \theta) = \Phi^{\mathrm{T}} \theta \tag{3.75}$$

$$\Phi(t) = [\ -y(t-1)\ \ -y(t-2) \ldots -y(t-na)\ \ u(t-1)\ \ u(t-2) \ldots u(t-nb)\ ]^{\mathrm{T}} \tag{3.76}$$

ดังนั้น
$$\varepsilon(t,\theta) = y(t) - \Phi^{\mathrm{T}}(t)\,\theta \tag{3.77}$$

$$\hat{\theta}_N^{LS} = \arg\min V_N(\theta) = \left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\Phi(t)\Phi^T(t)\right]^{-1} \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\Phi(t)y(t) \tag{3.78}$$

ให้
$$R(N) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\Phi(t)\Phi^T(t) \tag{3.79}$$

$$f(N) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\Phi(t)y(t) \tag{3.80}$$

คุณสมบัติที่ต้องการของการประมาณค่าวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

- พารามิเตอร์ที่ประมาณค่าได้มีค่าใกล้เคียงกับค่าจริง (θ_o)

- พารามิเตอร์ที่ได้จากประมาณค่าจะเข้าสู่ค่าจริง(θ_o) เมื่อ N เข้าใกล้ค่าอนันต์

กรณีที่ สมมุติว่า ข้อมูลที่ได้จากกระบวนการจริง สามารถสร้างเป็นสมการได้ดังสมการ (3.81)

$$y(t) = \Phi^{\mathrm{T}}(t)\theta_o + v_o(t) \tag{3.81}$$

จะได้ว่า
$$\hat{\theta}_N^{LS} = [R(N)]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\Phi(t)\left[\Phi^T(t)\theta_o + v_o(t)\right]$$

$$= \theta_o + [R(N)]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\Phi(t)v_o(t) \tag{3.82}$$

จากสมการ (3.82) มีค่าเป็นไปตามคุณสมบัติที่ต้องการเมื่อ $[R(N)]^{-1}$ เป็นน็อนซิงกูล่าร์ (non singular) ซึ่งเป็นไปได้ในกรณีที่ $u(t)$ และ $v_o(t)$ ไม่เกี่ยวเนื่องกัน โดยกล่าวได้ว่า กระบวนการถูกกระตุ้นด้วยอันดับ *nb* ดังสมการ (3.76) และ เทอม $\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\Phi(t)v_o(t)$ มีค่าเท่ากับ ศูนย์ ซึ่งเป็นไปได้ในกรณีที่ $v_o(t)$ เป็นซีเคว้นซ์ของแรนดอมซึ่งไม่เกี่ยวเนื่องกัน โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์ เรียกว่าไวท์นอยซ์ กล่าวได้ว่า $v_o(t)$ ไม่เกี่ยวเนื่องกับว่าเกิดอะไรขึ้นเมื่อเวลา t-1 และในอีกกรณีหนึ่งคือ ซีเคว้นซ์ของอินพุทไม่เกี่ยวเนื่องกับ $v_o(t)$ และ *na* ในสมการ (3.76) เท่ากับศูนย์

วิธีไอวี (Instrumental Variable Method)

เป็นหนึ่งในการปรับปรุงวิธีของ วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least Squares) จากข้อจำกัดของวิธีนี้แสดงดังสมการข้างล่าง

จาก ระบบจริง (True system)

$$y(t) = \Phi^T(t)\,\theta_o + \upsilon(t) \tag{3.83}$$

$$\text{LS}: \quad \hat{\theta} = [\sum_{t=1}^{N} \Phi(t)\,\Phi^T(t)\,]^{-1}\ [\sum_{t=1}^{N} \Phi(t)y(t)\,] \tag{3.84}$$

$$\hat{\theta} - \theta_o = [\,1/N \sum_{t=1}^{N} \Phi\Phi^T(t)\,]^{-1}\ [\,1/N \sum_{t=1}^{N} \Phi(t)\upsilon(t)\,] \tag{3.85}$$

ข้อจำกัด

$$E\Phi(t)\upsilon(t) = 0 \tag{3.86}$$

ซึ่งข้อจำกัดจากสมการ (3.86) จะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อ υ(t) เป็น ไวท์นอยซ์ (white noise) ดังได้กล่าวไว้ข้างต้น ดังนั้นกรณีที่ไม่เป็น ไวท์นอยซ์(white noise) สามารถใช้ วิธี ไอวี ได้

พื้นฐานของวิธีไอวี (IV method)

สมมุติว่า $Z(t)$ = (nz×ny) แมทริกซ์ซึ่งไม่เกี่ยวเนื่องกับ นอยซ์ ($\upsilon(t)$)

ดังนั้น

$$1/N \sum_{t=1}^{N} Z(t)\, \varepsilon(t) = 1/N \sum_{t=1}^{N} Z(t)\, [y(t) - \Phi^{T}\theta] = 0 \tag{3.87}$$

$$\theta = [\sum_{t=1}^{N} Z(t)\, \Phi^{T}(t)]^{-1}\ [\sum_{t=1}^{N} Z(t) y(t)] \tag{3.88}$$

เรียก $Z(t)$ ว่า อินสตรูเมนท์ (instrument)

$$Z(t) = (-\eta(t-1) \ldots -\eta(t-na)\ \ u(t-1) \ldots u(t-nb))^{T} \tag{3.89}$$

$\eta(t)$ ได้จากการฟิลเตอร์ อินพุทก่อน

$$N(q)\ \eta(t) = M(q)\, u(t) \tag{3.90}$$

$N(q) = 1 + n_1 q^{-1} + \ldots + n_{nn} q^{-nn}$

$M(q) = m_o + m_1 q^{-1} + \ldots + m_{nm} q^{-nm}$

N and M อาจเลือกใช้จาก ค่าที่ได้จากการประมาณค่าครั้งก่อน (a priori estimates) ของ A , B หรือ $N(q) = 1$, $M(q) = -q^{-nb}$

กรณีหลายตัวแปร(multivariable system)

$$Z(t) = \begin{bmatrix} z(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z(t) \end{bmatrix} \tag{3.91}$$

ซึ่ง $z^{T}(t) = K(q)\, (u^{T}(t-1) \ldots u^{T}(t-m))$

$K(q)$ เป็นค่าคงที่

m เป็นตัวเลขที่ใช้ โดย $m \times nu \geq na \times ny + nb \times nu$

3.4.6 ค่าความถูกต้องของแบบจำลอง (Model Validation)

เป็นการทดสอบแบบจำลองที่เลือกมา และทำการหาค่าพารามิเตอร์เรียบร้อยแล้วว่ามีความถูกต้องมากน้อยเพียงไร โดยดูจากความแตกต่างระหว่างค่าเอาท์พุทของแบบจำลองที่จำลองขึ้นมา (predicted model output) กับ ค่าเอาท์พุทของกระบวนการจริง (measured output) ความถูกต้องของโครงสร้างของแบบจำลองที่ใช้ในการระบุหากระบวนการ เป็นงานในลักษณะดังนี้

(1) โครงสร้างที่ได้เหมาะสมหรือไม่กับข้อมูลที่ ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์

(2) โครงสร้างที่ได้เหมาะสมหรือไม่กับข้อมูลซึ่งไม่ได้ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์

(3) เงื่อนไขของการประมาณค่าพารามิเตอร์

ในลักษณะ (1) และ (2) ขึ้นอยู่กับความเหมาะสมหรือไม่ของข้อมูลเอาท์พุท $y_i\,(t)$ โดย

$$R_i = \frac{\mathrm{var}\left(e_i(t)\right)}{\mathrm{var}\left(y_i(t)\right)} \qquad \text{ซึ่ง } e_i\,(t) = y_i\,(t) - \hat{y}_i\,(t) \tag{3.92}$$

ถ้า R_i มีค่าเข้าใกล้ศูนย์โครงสร้างที่ใช้ สามารถฟิตได้ดีกับข้อมูล ส่วนลักษณะวิธีที่ (3) ใช้เพื่อในการแสดงในกรณีที่โครงสร้างมีอันดับ(order) สูง ซึ่งถ้าโครงสร้างที่ใช้มีอันดับสูงเกินไป ทำให้การประมาณค่าพารามิเตอร์อยู่ในเงื่อนไขที่ไม่ดี (ill conditioned)

เพื่อความต้องการให้ฟังก์ชั่นความสูญเสีย (loss function) ลดลง ในความเป็นจริงแล้วทำได้โดยเพิ่มจำนวนพารามิเตอร์ในโครงสร้าง (model parameter) ดังนั้นในกรณีที่พารามิเตอร์เพิ่มจาก n_1 เป็น n_2 และค่า แวเรียนซ์ของความผิดพลาดเป็น V_1 และ V_2 ตามลำดับ ดังนั้นเกณฑ์ในการเลือก (Ȧströ m, K.J., Eykhoff, P., 1971) แสดงดังสมการ (3.93)

$$t = \frac{V_2}{V_1 - V_2} \frac{N - n_2}{n_2 - n_1} \tag{3.93}$$

N = จำนวนของข้อมูลอินพุท และเอาท์พุท (input-output pairs)

ดังนั้นการเลือกค่าอันดับ (order) ของโพลีโนเมียลของสมการคือ เลือกค่าอันดับที่ต่ำที่สุดซึ่งค่าแวเรียนซ์ของค่าที่มีอันดับต่ำกว่า กับค่าที่อันดับสูงกว่าหนึ่งค่ามีค่าใกล้เคียงกัน

เงื่อนไขของการยอมรับแบบจำลองของกระบวนการอีกอย่างที่นิยมใช้ ในการเลือกแบบจำลอง เป็นตัวแทนของกระบวนการคือ เงื่อนไขของ Akaike ซึ่งพิจารณาค่าความผิดพลาด แบบ FPE (Final Prediction error, FPE) ดังแสดงในสมการ (3.94) (Ljung, L., 1987)

$$\text{FPE} = \text{loss function} \times (1 + n / N) / (1 - n / N) \tag{3.94}$$

โดย n คือ ค่าอันดับสูงสุดในการใช้ระบุหากระบวนการ

N คือ จำนวนข้อมูล ที่ใช้ในการหาค่าพารามิเตอร์

3.5 สรุปเนื้อหาในบท

ในการระบุหากระบวนการ จะเห็นได้ว่าส่วนที่สำคัญที่สุดคือ การออกแบบการทดลอง เพื่อที่จะให้ได้ข้อมูลครอบคลุม ในการนำไปใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองของกระบวนการ และ ขึ้นกับโครงสร้างของแบบจำลองที่เลือกใช้ ซึ่งถ้าเป็นแบบไม่มีค่าพารามิเตอร์ ก็จะได้แบบจำลองของกระบวนการอย่างคร่าวๆ ซึ่งสามารถนำไปใช้เป็นพื้นฐาน ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของ แบบจำลองที่มีพารามิเตอร์ได้ นอกจากนี้ยังขึ้นกับวิธีการในการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยเช่นกัน