

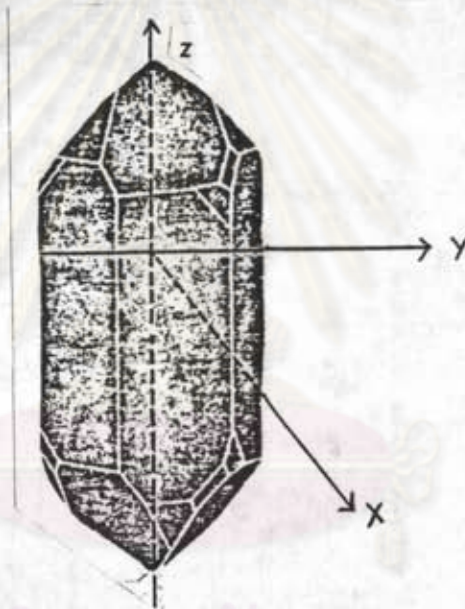


บทที่ 2

ทฤษฎี

### 2.1 คุณสมบัติทั่วไปของผลึกควอทซ์ (3)

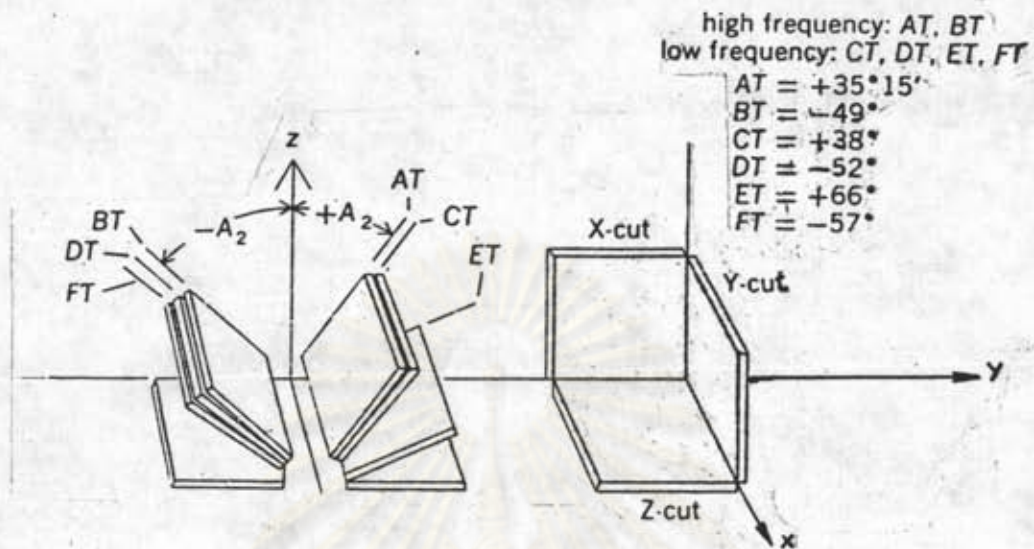
ควอทซ์มีโครงสร้างเป็นผลึกหกเหลี่ยม (hexagonal) ของสารประกอบ  $\text{SiO}_2$  ตามรูปที่ 2-1 จัดอยู่ในชั้นผลึกตรีโกณ (trigonal) มีความแข็ง 7 ตามสเกลโมห์ (Moh scale) เป็นผลึกโปร่งใสไม่มีสี



รูป 2-1 ผลึกควอทซ์อ้างอิงกับแกนธรรมชาติ, z

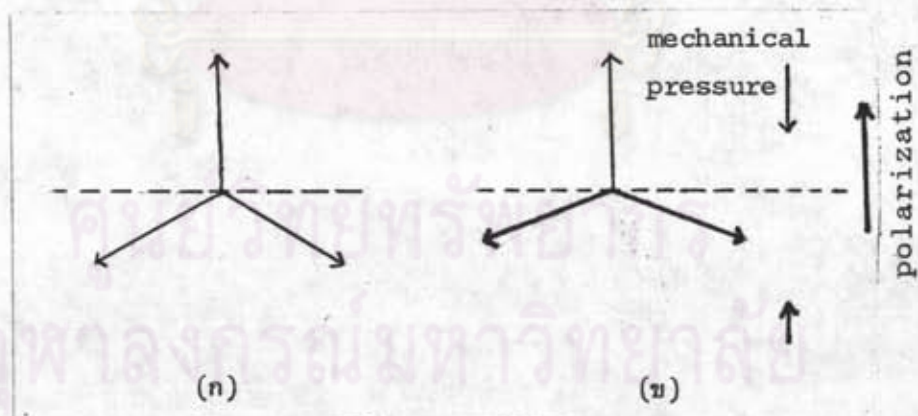
ในการนำเอาควอทซ์มาใช้งาน เราไม่ได้นำเอาผลึกธรรมชาติทั้งก้อนมาใช้ แต่ตัดออกมาเป็นชั้นผลึก การตัดมีด้วยกันหลายแบบ ตามรูปที่ 2-2 ชั้นกับมุมที่ตัดเทียบกับแกนทัศนศาสตร์ (optical axis), z ของผลึก หรือบางทีเรียกว่าแกนธรรมชาติของผลึก, c

ควอทซ์ถูกจัดว่าเป็นสารพวกพิโซอิเล็กทริก (piezoelectric) กล่าวคือ บกติควอทซ์มีสภาพเป็นไดอิเล็กทริก (dielectric) มีค่าคงที่ไดอิเล็กทริก 4.5 ซึ่งโดยปรกติองค์ประกอบเวกเตอร์ของไดโพลโมเมนต์ (electric dipole moment) ทั้ง 3 แกนของมันจะหักล้างกันพอดี ตามรูปที่



รูป 2-2 มุมตัดผลึกควอทซ์ชนิดต่าง ๆ

2-3ก ทาทำไม่มีโพลาไรเซชัน (polarization) แต่เมื่อมีความดันเชิงกลกระทำทางด้านใดด้านหนึ่ง จะทำให้ไดโพลโมเมนต์แนวใดแนวหนึ่งบิดเบนไป จะมีโพลาไรเซชันเกิดขึ้นเพราะไดโพลโมเมนต์หักล้างกันไม่หมด ตามรูป 2-3ข (4)



รูป 2-3 การเกิดโพลาไรเซชันของสารพิโซอิเล็กทริก

และในทางกลับกันถ้าหากเกิดโพลาไรเซชัน ก็จะทำให้เกิดการบิดเบนของไดโพลโมเมนต์ได้ และหากเกิดโพลาไรเซชันเป็นช่วงๆก็จะเกิดการบิดเบนเป็นช่วงๆของไดโพลโมเมนต์ ทำให้เกิดการสั่นภายในผลึก (crystal vibration) ในระบบการสั่นเช่นในวงจรออสซิลเลเตอร์ (oscillator circuit) เป็นต้น

จากค่าแควเตอร์คุณภาพ (quality factor),  $Q$  ซึ่งเป็นค่าพลังงานสะสมใน ระบบต่อพลังงานที่สูญเสียไปในการสั่นสะเทือน ถ้าหากค่า  $Q$  สูง แสดงว่ามีการ สูญเสียพลังงานน้อย เมื่อเปรียบเทียบกับสารพีโรอิเล็กทริกอีกตัวหนึ่งคือ แบเรียมไทตาเนท (barium titanate)

$Q_{\text{quartz}}$	มีค่าประมาณ	10,000 ถึง 100,000
$Q_{\text{barium titanate}}$	มีค่าประมาณ	200

จะเห็นว่าควอทซ์เป็นสารพีโรอิเล็กทริกที่มีค่า  $Q$  สูงมากซึ่งเป็นคุณสมบัติที่เด่นมาก ของควอทซ์ นอกจากนั้นควอทซ์ยังมีเสถียรภาพทางเคมีและเชิงกล ฯลฯ ซึ่งทำให้ ควอทซ์มักถูกเลือกใช้เป็นตัววัดความหนาของฟิล์มบาง มากกว่าสารพีโรอิเล็กทริก ตัวอื่น ส่วนคุณสมบัติทั่วไปอื่น ๆ ของควอทซ์ได้แก่

ความหนาแน่น	2.651	$\text{g/cm}^3$
จุดหลอมตัว	1,728	$^{\circ}\text{C}$
สัมประสิทธิ์การขยายตัว	$7.5 \times 10^{-6}$	$\text{cm}^3 / ^{\circ}\text{C}$
ดัชนีหักเหของแสง	1.544	

## 2.2 การสั่นของผลึก (crystal vibration) (5)

โดยทั่วไป เมื่อชิ้นของแข็งยืดหยุ่น (elastic solid body) ถูกทำ ให้อยู่ในสภาวะการสั่นอิสระ (state of free vibration) เช่นถูกตีในทันที ทันใดการเคลื่อนที่ของมัน ถ้าหากมีแอมพลิจูดน้อยๆ ในทางทฤษฎีจะวิเคราะห์ว่าเป็น แบบปกติของการสั่น (normal vibrational modes) จำนวนมากจำนวนหนึ่ง จำนวนของแบบก็คือจำนวนของระดับขั้นความเสรี (degree of freedom) ซึ่ง ในทางทฤษฎีจะเป็นอนันต์เสมอ แม้แต่สำหรับของแข็งรูปทรงเรขาคณิตที่ง่ายที่สุดก็ ตาม แต่ละแบบปกติ (normal mode) จะมีความถี่ปกติ (normal frequency) ที่สมนัยกันอยู่ค่าหนึ่ง

สำหรับความถี่ปกติใดๆ คุณสมบัติประจำตัวที่จำเป็นคือว่า ทุกอนุภาค

จะเคลื่อนร่วมเฟสกัน (in phase) กับการเคลื่อนที่ฮาร์โมนิกอย่างง่ายและด้วยแอมพลิจูดที่มีอัตราส่วนคงที่ต่อกันและกัน (คิดเมื่อความหนืดมีค่าน้อยๆ)

รูปแบบที่สำคัญๆของการสั่น ซึ่งแต่ละอันอาจประกอบด้วยความถี่ปกติ (หรืออาจเป็น overtones) จำนวนมากจำนวนหนึ่ง ได้แก่

แบบกด (compressional) - การเคลื่อนที่ของอนุภาคของการสั่นจะขนานกับทิศทางของการแผ่ (propagation) ของคลื่นยืดหยุ่น (elastic wave) ซึ่งก็คือคลื่นตามยาว (longitudinal) หรือคลื่นขยาย (extensional)

แบบเฉือน (shear) - อนุภาคจะเคลื่อนที่ในทิศทางตั้งฉากกับทิศทางของการแผ่ของคลื่น หรือขนานกับหน้าคลื่นนั่นเอง จึงเป็นคลื่นตามขวาง (transverse)

นอกจากนั้นยังมี แบบโค้งงอ (flexural) อันเนื่องมาจากการโค้งงอของวัตถุและแบบบิด (torsional) ซึ่งเกิดจากการบิดและมีการขจัดเชิงมุมเกิดขึ้นรอบแกนอันหนึ่ง ทิศทางของการแผ่จึงอยู่ตามแนวแกนนี้ ซึ่งสองแบบหลังนี้เราจะไม่นำมากล่าวในรายงานนี้เลย

เมื่อพิจารณาแผ่น (plate) บางที่มีพื้นที่มากอันหนึ่งซึ่งทางทฤษฎีจะคิดว่ามากเป็นอนันต์ จะเกิดการบังคับ (constrained) ทางด้านผิวหน้าของมัน การสั่นจะเกิดขึ้นเฉพาะตามความหนาของแผ่น เรียกว่าการสั่นตามความหนา (thickness vibrations) ซึ่งอาจจะเป็นแบบกด (compressional) หรือแบบเฉือน (shear) ก็ได้

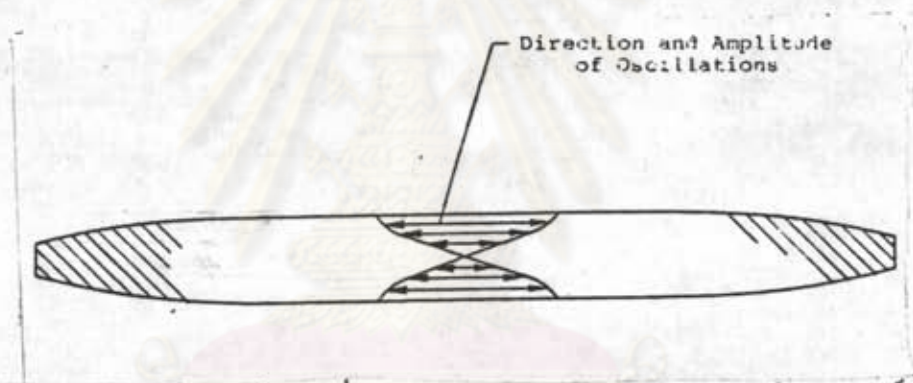
### 2.3 ออสซิลเลเตอร์ผลึก (crystal oscillator) (2)

ตัววัดแบบออสซิลเลเตอร์ผลึก (crystal oscillator) ได้อาศัยคุณสมบัติพิโซอิเล็กทริกของควอทซ์ (หัวข้อ 2.1) เมื่อติดผิวหน้าที่ฉาบด้วยเงินหรือทองบางๆ ของชั้นผลึกทั้ง 2 ด้าน เราก็สามารถนำออกมาใช้เป็นส่วนหนึ่งของ

วงจรรอสซิลเลเตอร์ และเมื่อให้สนามไฟฟ้าสลับเข้าไป จะทำให้ชั้นผลึกอยู่ในสถานะของการสั่นเชิงบังคับ (forced vibration) เนื่องจากผลของพิโซอิเล็กทริกของสนาม สนามจะเหนี่ยวนำทำให้เกิดออสซิลเลชันตามความหนาแบบเฉือน (thickness-shear) ชั้นในผลึก โดยมีความถี่เรโซแนนซ์,  $f$  เป็นสัดส่วนกลับกับความหนา,  $d_q$  ของผลึก

$$f = v/2d_q \quad (2.1)$$

เมื่อ  $v$  เป็นความเร็วในการแผ่ของคลื่นยืดหยุ่นแบบเฉือน (shear propagation velocity) ในทิศทางตามความหนา โดยที่ผิวหน้าของชั้นผลึกจะเป็นปฏิบัพ (antinode) ดังแสดงในรูป 2-4

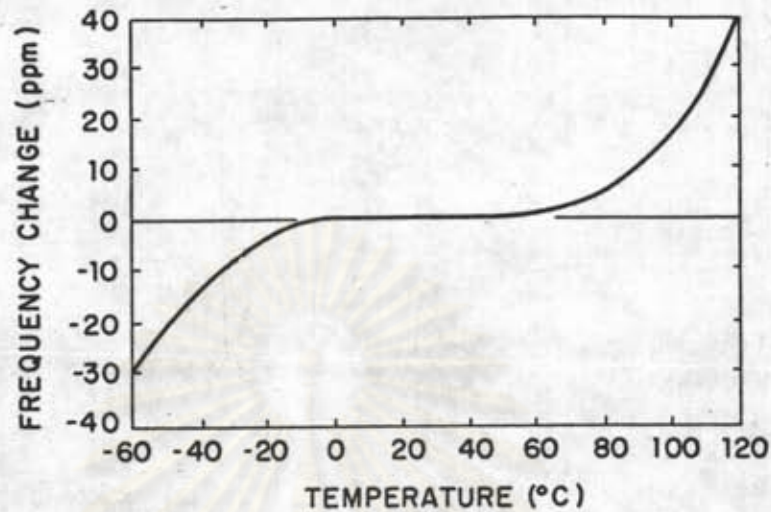


รูป 2-4 ออสซิลเลชันตามความหนาแบบเฉือนในผลึกควอตซ์

#### 2.4 ผลึกควอตซ์ชนิด AT(2)

สิ่งหนึ่งที่ควรพิจารณาสำหรับชั้นผลึกควอตซ์คือการที่ความถี่เรโซแนนซ์ขึ้นกับอุณหภูมิ สัมประสิทธิ์ของอุณหภูมิของความถี่ (TCF) ของควอตซ์จะสัมพันธ์กับค่าคงที่การยืดหยุ่น มันมีทั้งเทอมบวกและลบ ขึ้นกับทิศทางของการสั่น เทียบกับแกนธรรมชาติของผลึก,  $c$  เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงความถี่ที่ขึ้นกับการแกว่งค่าของอุณหภูมิจะมีผลต่อความแม่นยำในการวัด ดังนั้นผลึกจึงถูกตัดในทิศทางที่ TCF จะชดเชยซึ่งกันและกัน การตัดแบบนี้ทำมุมประมาณ 35 องศา กับระนาบ  $c$ ,  $x$  ดังรูปที่ 2-2 ซึ่งเรียกว่าการตัดแบบ AT และถูกใช้ในตัววัดความหนาของฟิล์มโดยทั่วไป Phelps ได้ทำการทดลองหาการขึ้นกับอุณหภูมิของ TCF

สำหรับผลึก AT จำนวนหนึ่ง ซึ่งมีแนวการตัดแตกต่างกันเพียงเล็กน้อย พบว่ามี การเปลี่ยนแปลงของ TCF น้อยมากทีเดียว ดังรูปที่ 2-5



รูป 2-5 การเปลี่ยนแปลงความถี่กับอุณหภูมิสำหรับผลึกควอทซ์ที่ตัดแบบ AT นั้นคือผลึกควอทซ์ที่ถูกตัดแบบ AT จะมีการเปลี่ยนแปลงตามอุณหภูมิเล็กน้อย จากคุณสมบัติต่างๆที่กล่าวมา ทำให้ควอทซ์เหมาะสมในการนำมาใช้งานจร ออสซิลเลเตอร์ และสำหรับผลึกควอทซ์ที่ถูกตัดแบบ AT นั้น

$$v = (\mu/\rho_q)^{1/2} \quad (2.2)$$

เมื่อ  $\mu$  เป็นค่าคงที่ยืดหยุ่นแบบเฉือน (shear elastic constant) และ  $\rho_q$  เป็นความหนาแน่นของควอทซ์ ดังนั้น

$$f = N/d_q$$

โดยที่ค่าคงที่  $N = v/2 = 1.670 \text{ MHz/mm} \quad (2.3)$

## 2.5 ผลึกควอทซ์ในการหาความหนาของฟิล์มบาง

เมื่อมีการเติมมวลน้อยๆ,  $\Delta m$  ลงบนผลึกด้านหนึ่ง หรือทั้ง 2 ด้านถ้า มวลน้อยพอ อาจะยังสมมุติได้ว่าผิวของผลึกยังเป็นปฏิบัพของการสั่นอยู่ นั่นคือ

สารที่ฉาบจะไม่สะสมพลังงานยืดหยุ่น (elastic deformation) ระหว่างรอบของการสั่น ดังนั้นสารที่ฉาบ จะมีผลทำให้ความถี่เรโซแนนซ์เปลี่ยนไปด้วยมวลของมันเท่านั้น ขณะที่สมบัติเฉพาะอย่างอื่นของมัน เช่น ความหนาแน่นหรือค่าคงที่ยืดหยุ่นยังคงเดิม ผลของการเพิ่มน้ำหนักที่มีต่อความถี่ อาจหาได้โดยการหาอนุพันธ์ของ  $f$  เทียบกับ  $d_q$  และแทนความหนาที่เพิ่มขึ้น  $\Delta d_q$  ด้วย  $\Delta m$  ผลที่ได้นี้จะสอดคล้องกับที่ Stockbridge ได้หาไว้ โดยวิธีวิเคราะห์แบบเพอร์เทอร์เบชัน (perturbation analysis) สำหรับแผ่นเรโซแนนซ์ ซึ่งได้การเปลี่ยนแปลงความถี่เนื่องจากมวล  $\Delta m$  เป็น

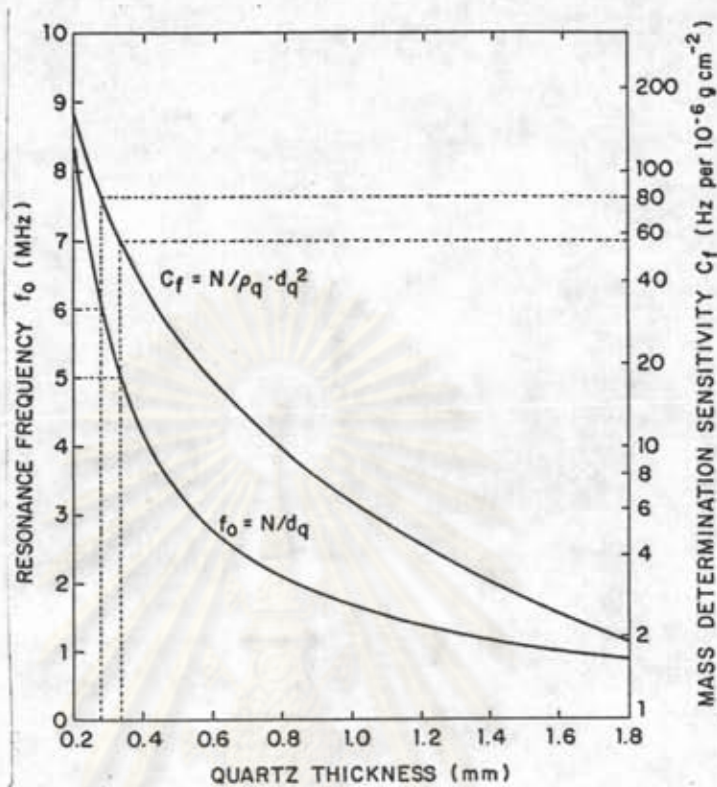
$$\Delta f = \frac{-Kf^2 \Delta m}{N \rho_q A} = \frac{-NK \Delta m}{\rho_q d_q^2 A} \quad (2.4)$$

เมื่อ  $K$  เป็นค่าคงที่ขึ้นกับการกระจายของสารที่ฉาบบนพื้นที่ผิวของชิ้นผลึก และ  $A$  เป็นพื้นที่ผิวของผลึก (หรือพื้นที่ของอิเล็กโตรดนั่นเอง)

เราจะกำหนดแฟคเตอร์สัดส่วน (proportionality factor) ในสมการ 2.4

$$\frac{N}{\rho_q d_q^2} = C_f \quad (2.5)$$

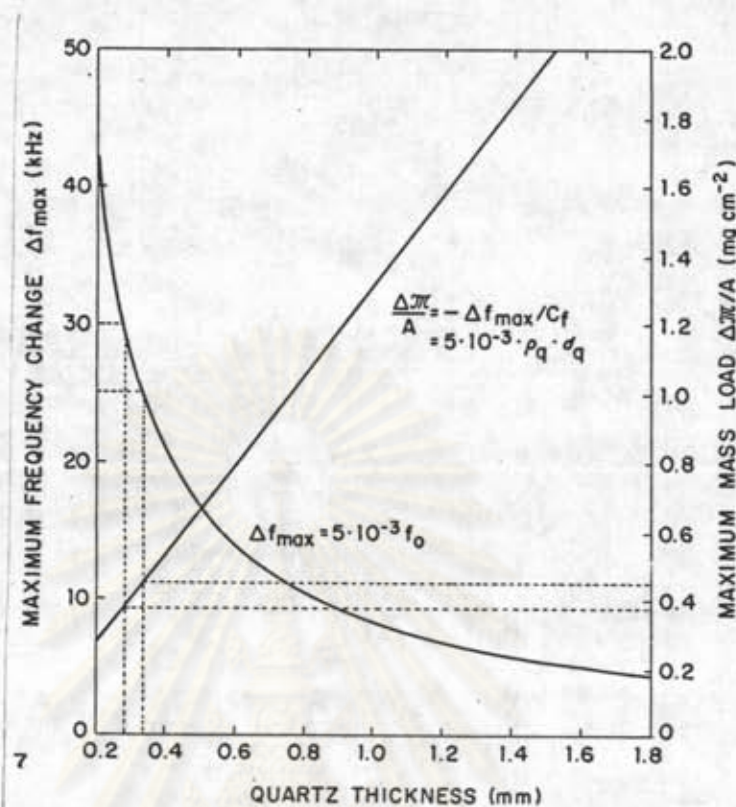
เรียกกันว่าสภาพไวกำหนดมวล (mass-determination sensitivity) ของผลึก ดังรูป 2-6 ผลึกที่บางกว่าจะมีความถี่ก่าทอนสูงกว่า และจะทำให้การเปลี่ยนแปลงความถี่ต่อมวลของสารที่ฉาบต่อหน่วยพื้นที่ได้มากกว่า ดังนั้นเมื่อคำนึงถึงความไว ชิ้นผลึกควรจะถูกทำให้บางที่สุดเท่าที่ความสามารถ ในการแตกหักของมันจะอำนวย แต่ก็ยังมีข้อจำกัดอีกประการหนึ่ง ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\Delta f$  กับ  $\Delta m$  จะเป็นเชิงเส้น ถ้าหากว่าความหนาของสารที่ฉาบ ถือได้ว่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความหนาของชิ้นผลึก ถึงแม้ว่าการเปลี่ยนแปลงความถี่ที่มากที่สุดที่เป็นไปได้จะมากกว่าสำหรับชิ้นผลึกที่บางกว่า แต่มวลซึ่งทำให้เกิด  $\Delta f_{max}$  นี้จะมากขึ้นสำหรับชิ้นผลึกที่หนากว่า (รูป 2-7) ค่าที่ประนีประนอมระหว่างความไวสูงสุดและความจุสูงสุดของมวลสารที่ฉาบ ควรอยู่ที่ความหนาของชิ้นผลึก ประมาณ 0.3 มม. ซึ่งให้ความถี่เริ่มต้นราว 5 ถึง 6 เมกกะเฮิรตซ์ ซึ่งแสดงดังเส้นประในรูปทั้งสอง



รูป 2-6 กราฟแสดงความถี่เรโซแนนซ์และสภาพต่อการกำหนดมวลของผลึก AT เป็นฟังก์ชันของความหนาของผลึก

อย่างไรก็ดี เมื่อความหนาของฟิล์มที่ฉาบไม่หน้อย เมื่อเทียบกับของชั้นผลึกสารที่ฉาบจะ เริ่มสะสมพลังงานยืดหยุ่น และทำให้เกิดการสั่นอย่างอื่นนอกเหนือไปจาก การสั่นตามความหนาแบบเฉือน (thickness-shear mode) ดังนั้น สมมติฐานของการไม่มีการสะสมพลังงานก็ใช้ไม่ได้ต่อไป และคงต้องคิดสมบัติเชิงกลอย่างอื่นของสารที่ฉาบเข้ามาเกี่ยวข้องกับด้ายและสภาพไม่เชิงเส้นระหว่างความถี่-มวลจะ เกิดขึ้น ซึ่งจะเริ่มเกี่ยวข้องกับเทอมอันดับสอง (second order) และเทอมที่สูงขึ้นในการวิเคราะห์แบบเพอร์เทอร์เบชันของ Stockbridge แต่หากเราทราบสัดส่วนที่ใหม่เป็นเชิงเส้นของผลึกเฉพาะอัน ก็สามารถวัดความหนาของฟิล์มได้มากขึ้น แม้แต่ในเรอโนไมครอนก็ตาม





รูป 2-7 การเปลี่ยนแปลงความถี่สูงสุดและ mass loading ของผลึก AT เป็นฟังก์ชันของความหนาของผลึก

เมื่อมีฟิล์มของสารชั้นไปฉาบบนผลึกควอทซ์ อาจหาความหนาโดยคิดจากการขจัดของคลื่นเรโซแนนซ์ ในผลึกควอทซ์ และในฟิล์มบางที่ฉาบบนผิวผลึกควอทซ์ (6), (7)

$$Y_i = A_i \sin(k_i z + \phi_i) \quad (2.6)$$

เมื่อ  $Y$  แทนการขจัด  $A$  แทนแอมพลิจูด,  $k =$  เลขคลื่น  $= 2\pi/\lambda$ ,  $\phi$  แทนแพดเตอร์เฟส (phase factor) และ  $z$  แทนความหนา  $i$  อาจจะแทนควอทซ์ ( $q$ ) หรือฟิล์ม ( $f$ ) ขึ้นกับว่าความหนา  $z$  อยู่ในช่วงของควอทซ์หรือฟิล์มตามลำดับ และโดยการใช้เงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) ที่ตำแหน่งความหนาต่างๆจะได้ว่า ปฏิบัติจะอยู่ที่ผิวนอก ( $z = 0, z = d_q + d_f$ ) และที่ขอบเขตระหว่างควอทซ์และฟิล์ม ( $z = d_q$ ) นั้น การขจัด  $y_q(d_q)$  และ  $y_f(d_q)$  จะต้องเท่ากัน แรงเฉือน (shear stress,  $\mu_1 \partial y_i / \partial z$ , เมื่อ  $\mu_1$  เป็น

ค่ามอดุลัสแบบเฉือน (shear modulus) หรือค่าคงที่ยืดหยุ่นแบบเฉือน (shear elastic constant) จะต้องต่อเนื่องที่ขอบเขตนี้ด้วย สรุปเงื่อนไขขอบเขตต่างๆ ได้ดังนี้

$$\phi_q = 0 ; \quad k_f (d_q + d_f) + \phi_f = \pi \quad (2.7\text{ก})$$

$$A_q \cos(k_q d_q) = A_f \cos(k_f d_f) \quad (2.7\text{ข})$$

$$\mu_q k_q A_q \sin(k_q d_q) = \mu_f k_f A_f \sin(k_f d_f + \phi_f) \quad (2.7\text{ค})$$

เมื่อแก้สมการทั้ง 3 จะได้

$$k_f d_f = \tan^{-1} [Z \tan(\pi - k_q d_q)] \quad (2.8)$$

เมื่อ  $Z^2 = \mu_q \rho_q / \mu_f \rho_f$  เป็นอัตราส่วนความต้านทานเชิงซ้อนเชิงสวอนศาสตร์ (acoustic-impedance ratio) ของรอยต่อควอท์ซ์-ฟิล์ม และจากความสัมพันธ์ตามสมการ (2.2) และความสัมพันธ์ระหว่างความถี่และเวกเตอร์คลื่น

$$2\pi f_f = V_q k_q = V_f k_f$$

สุดท้ายจะได้

$$d_f = (N \rho_q / \rho_f \pi z f_f) \tan^{-1} [z \tan \pi (1 - f_f / f_q)] \quad (2.9)$$

ถ้าความถี่ที่เปลี่ยนไปมีค่าน้อย ( $f_f \simeq f_q \simeq f$ ) และถ้า  $\Delta f = f_f - f_q$  นานที่สุดจะได้

$$d_f = N (\rho_q / \rho_f) (\Delta f / f^2) \quad (2.10)$$

และโดยใช้สมการที่ (2.10) เราจะได้ความหนาของฟิล์มจากการเปลี่ยนแปลง

ความถี่ แต่อย่างไรก็ตาม หากความถี่ที่สังเกตได้เบี่ยงเบนไปจากความถี่เริ่มต้นมากจนเกินไป อาจใช้สมการที่เป็นรูปทั่วไปมากกว่า คือสมการ (2.9) โดยที่ อัตราส่วนความต้านทานเชิงซ้อน ,  $Z$  อาจประมาณได้จากค่าคงที่ยึดหยุ่นที่ทราบค่าแล้ว



ศูนย์วิจัยทรัพยากร  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย