

บทที่ 2

ทฤษฎี

2.1 สมมติฐานเบื้องต้นสำหรับการวิเคราะห์แผ่นพื้น

ในการวิเคราะห์แผ่นพื้น อัดแรงหล่อสำเร็จ และทับหน้า นั้นจะอาศัยทฤษฎีกำลังประลัย เป็นพื้นฐานโดยมีสมมติฐานดังนี้

2.1.1 หน้าตัดที่เป็นระนาบและตั้งฉากกับแนวแกนจะคงความเป็นระนาบ และตั้งฉากกับแนวแกนเมื่อรับน้ำหนักบรรทุก

2.1.2 ความเครียดผันแปรเป็นสัดส่วนกับความลึกขององค์อาคารตลอดช่วงรับน้ำหนักบรรทุก และความเครียดในเหล็กเสริมมีค่าเท่ากับความเครียดของคอนกรีตที่ตำแหน่งเดียวกัน

2.1.3 ที่หน้าตัดแตกร้าว ไม่นำความต้านทานแรงดึงของคอนกรีตมาคำนวณ

2.2 การคำนวณหน่วยแรง

การคำนวณหาหน่วยแรงที่เกิดขึ้น ณ หน้าตัดใด ๆ ของแผ่นพื้นอัดแรงและทับหน้า สามารถคำนวณหน่วยแรงที่เกิดขึ้นได้โดยอาศัยทฤษฎีอิลาสติค ด้วยการแยกพิจารณาหน่วยแรงที่เกิดขึ้นจากสาเหตุต่าง ๆ ที่ละอย่าง ผลลัพธ์ของหน่วยแรงจะได้จากการรวมหน่วยแรงเหล่านั้น แยกพิจารณาหน่วยแรงออกเป็น

ก. หน่วยแรงที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงอัดกระทำเยื้องจากศูนย์กลางของหน้าตัด มีค่าเท่ากับ

$$f = -F / A_{cp} \pm (F e Y_{cp}) / I_{cp} \quad (2.1)$$

โดยที่ F = แรงอัดซึ่งกระทำต่อพื้นอัดแรง

A_{cp} = พื้นที่หน้าตัดของพื้นอัดแรง

e = ระยะเยื้องศูนย์กลางของเหล็กเสริมอัดแรง

Y_{cp} = ระยะห่างจากศูนย์กลางของหน้าตัดพื้นอัดแรง

I_{cp} = โมเมนต์อินเนอร์เซียของหน้าตัดพื้นอัดแรง

ข. หน่วยแรงที่เกิดขึ้นเนื่องจากน้ำหนักบรรทุกทุกที่กระทำ ขณะยังไม่หล่อทับหน้าคอนกรีต จะมีค่าเท่ากับ

$$f = \pm (M_p Y_{cp}) / I_{cp} \quad (2.2)$$

โดยที่ M_p = โมเมนต์ดัดเนื่องจากน้ำหนักบรรทุกทุกที่กระทำ ขณะยังไม่หล่อทับหน้าคอนกรีต

ค. หน่วยแรงที่เกิดขึ้นเนื่องจากน้ำหนักบรรทุกจรที่กระทำ เมื่อหล่อทับหน้าคอนกรีตแล้ว แข็งตัว และให้กำลังตามต้องการ

$$f = \pm (M_{lc} Y_{cc}) / I_{cc} \quad (2.3)$$

โดยที่ M_{lc} = โมเมนต์ดัดเนื่องจากน้ำหนักบรรทุกจรกระทำเมื่อทับหน้าคอนกรีต แข็งตัว และให้กำลังตามต้องการ

Y_{cc} = ระยะห่างจากจุดศูนย์ถ่วงของหน้าตัดแปลงของแผ่นพื้น-ทับหน้า

I_{cc} = โมเมนต์อินเนอร์เซียของหน้าตัดแปลงของแผ่นพื้น-ทับหน้า

ดังนั้น หน่วยแรงลัพท์ที่หน้าตัดใด ๆ ของแผ่นพื้น-ทับหน้าจะมีค่าเท่ากับ

$$f_c = - F / A_{cp} \pm (F e Y_{cp}) / I_{cp} \pm (M_p Y_{cp}) / I_{cp} \pm (M_{lc} Y_{cc}) / I_{cc} \quad (2.4)$$

และมีลักษณะการกระจายของหน่วยแรงดังแสดงในรูปที่ 2.1

2.3 โมเมนต์ดัดแตกร้าว

โมเมนต์ดัดแตกร้าว คือ โมเมนต์ดัดที่ทำให้หน้าตัดคานเกิดการแตกร้าวเริ่มแรก ซึ่งจะทำให้พฤติกรรมของคานเปลี่ยนแปลงไปจากช่วงแรกก่อนการแตกร้าว โมเมนต์ดัดแตกร้าวนี้สามารถวิเคราะห์ได้ โดยทฤษฎีอีลาสติค และมักสมมุติว่าคอนกรีตจะแตกร้าวเมื่อหน่วยแรงดึงสูงสุดที่ผิวนอกสุดของหน้าตัด มีค่าเกินโมดูลัสแตกร้าว

ถ้าให้ M_{cr} เป็นโมเมนต์ดัดที่ทำให้หน้าตัดเกิดการแตกร้าวเริ่มแรก หน่วยแรงดึงที่ผิวนอกสุดของหน้าตัดมีค่าเท่ากับโมดูลัสแตกร้าว f_r และจากสมการ (2.1) และ (2.4) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} M_{cr} = & (F e C_{2p} I_{cc}) / (C_{2c} I_{cp}) + (F I_{cc}) / (A_{cp} C_{2c}) \\ & + (f_r I_{cc}) / C_{2c} - (M_d C_{2p} I_{cc}) / (C_{2c} I_{cp}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

โดยที่ C_{2p} = ระยะจากแกนสะเทินของพื้นอัดแรงไปยังผิวล่างสุดของพื้นอัดแรง

C_{2c} = ระยะจากแกนสะเทินของแผ่นพื้น-ทับหน้าไปยังผิวล่างสุดของแผ่นพื้น-ทับหน้า

M_d = โมเมนต์ดัดเนื่องจากน้ำหนักของแผ่นพื้น-ทับหน้า

จากสมการ (2.5) เมื่อทราบค่าโมดูลัสแตกร้าวของคอนกรีตก็จะทำให้สามารถคาดคะเนโมเมนต์ดัดแตกร้าวของพื้นอัดแรง และแผ่นพื้น-ทับหน้าได้ มาตรฐาน ACI (17) กำหนดให้ใช้ค่าโมดูลัสแตกร้าวของคอนกรีต (f_r) เท่ากับ $1.99 \sqrt{f'_c}$ กก./ ซม.²

2.4 ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้ง

วิธีความเครียดสอดคล้อง (Strain Compatibility)

ในช่วงก่อนคอนกรีตเกิดการแตกร้าว ความสัมพันธ์ระหว่าง หน่วยแรง และความเครียดในคอนกรีตยังคงเป็นเส้นตรง จึงสามารถใช้ทฤษฎีอีลาสติกวินิจฉัยได้ ในช่วงหลังจากคอนกรีตเกิดการแตกร้าว การแจกแจงหน่วยแรงบนหน้าตัดจะไม่เป็นเส้นตรง Burn (18) ได้อาศัยหลักการด้านความเครียดสอดคล้อง (Strain Compatibility) บนหน้าตัด ตลอดจนคุณสมบัติของวัสดุที่ได้จากการทดสอบ เสนอวิธีวิเคราะห์พฤติกรรมทางโครงสร้างของหน้าตัด จากความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดและความโค้ง (Moment Curvature Relationship) ซึ่งอยู่ภายใต้สมมุติฐานที่สำคัญดังต่อไปนี้คือ

1. เหล็กเสริมยึดเหนี่ยวกับคอนกรีตโดยสมบูรณ์ ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงความเครียดในเหล็กเสริม และคอนกรีต จะมีค่าเท่ากัน
2. การแจกแจงความเครียดบนหน้าตัดเป็นเส้นตรง ดังแสดงในรูปที่ 2.2
3. คอนกรีตสามารถรับแรงดึงจนกระทั่ง หน่วยแรงที่ผิวของหน้าตัดวิกฤติมีค่า เท่ากับ Modulus of Rupture หลังจากเกิดการแตกร้าวแล้ว คอนกรีตไม่สามารถรับแรงดึงได้
4. องค์อาคารมีกำลังรับแรงเฉือนอย่างเพียงพอ การวิบัติขององค์อาคารจะเนื่องมาจากการดัดเท่านั้น
5. คอนกรีตจะวิบัติเมื่อเกิดความเครียดในคอนกรีต ϵ_c เท่ากับ 0.003 มม./ มม.
6. แรงลัพท์ในคอนกรีต และแรงลัพท์ในเหล็กเสริม จะมีค่าเท่ากัน ตามกฎการสมดุลย์ และโมเมนต์ของแรงคู่ควบที่ขณะใดๆ จะเท่ากับโมเมนต์ดัด ที่กระทำบนหน้าตัด

7. ความโค้งหลังการแตกร้าวของหน้าตัดเป็นค่าเฉลี่ย ระหว่างค่าความโค้งสูงสุดที่หน้าตัดแตกร้าวและความโค้งต่ำสุด ที่หน้าตัดซึ่งอยู่ระหว่างรอยแตกร้าว ดังแสดงในรูปที่ 2.4

จากความสัมพันธ์ระหว่าง หน่วยแรงและความเครียดของคอนกรีต และลวดอัดแรง จะถูกใช้เป็นข้อมูลในการพิจารณาหาความสัมพันธ์ระหว่าง โมเมนต์ดัด และความโค้ง โดยจะแบ่งการวิเคราะห์ออกเป็น 2 ส่วน คือ ในช่วงก่อนเกิดการแตกร้าวการแจกแจงหน่วยแรงบนหน้าตัดเป็นเส้นตรง การวิเคราะห์สามารถใช้ทฤษฎีอีลาสติกได้ และในช่วงหลังเกิดการแตกร้าว พฤติกรรมจะเป็นแบบอินอีลาสติก คอนกรีตส่วนที่อยู่ใต้แกนสะเทิน ถือว่าไม่สามารถรับแรงดึงได้ ดังนั้นแรงดึงที่เกิดขึ้นเนื่องจากโมเมนต์ดัดทั้งหมดจะถูกรับโดยเหล็กเสริมเพียงอย่างเดียว การแจกแจงหน่วยแรงอัดในพื้นที่หน้าตัดไม่เป็นเส้นตรงดังแสดงในรูปที่ 2.3 การคำนวณแรงอัดลัพท์ C_c และตำแหน่งจุดศูนย์ถ่วง X ของแรงลัพท์สามารถหาได้โดยวิธีการอินทิเกรต พิจารณาจากรูปที่ 2.3 ความเครียดในคอนกรีตที่ ระยะ X จากแกนสะเทินจะเท่ากับ ϕX

Hognestad (19) ได้เสนอสมการที่แสดงความสัมพันธ์ ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของคอนกรีต ดังสมการที่ 2.6

$$f_c = f'_c [2(\epsilon/\epsilon_0) - (\epsilon/\epsilon_0)^2] \quad (2.6)$$

$$f_c(X) = f'_c [2(\phi X/\epsilon_0) - (\phi X/\epsilon_0)^2] \quad (2.7)$$

โดยที่ f_c = หน่วยแรงในคอนกรีตที่ระดับใด ๆ

f'_c = กำลังอัดของแท่งคอนกรีตทรงกระบอก

ϵ_0 = ความเครียดที่ตำแหน่ง f'_c (โดยทั่วไปมีค่าประมาณ 0.002)

ϵ = ความเครียดที่ระดับใด ๆ

ϕ = มุมเปลี่ยนของเส้นความเครียด

และตำแหน่งของแรงอัด C_c จะอยู่สูงจากตำแหน่งแกนสะเทินเป็นระยะเท่ากับ

$$C_c = \int_0^c f_c(X) b dx \quad (2.8)$$

$$X = (\int_0^c f_c(X) b dx) / C_c \quad (2.9)$$

โดยที่ C_c = แรงอัด

- b = ความกว้างของคานรับแรงอัด
 C = ระยะจากผิวรับแรงอัดนอกสุดไปยังแกนสะเทิน

ก. กรณี เมื่อแกนสะเทินอยู่ในส่วนพื้นสำเร็จ (Precast)

$$f_c(X) = f'_c [2(\phi X / \epsilon_0) - (\phi X / \epsilon_0)^2]$$

$$C_c = \int_0^c f_c(X) b dx$$

$$\begin{aligned} C_{c1} &= \int_0^{c1} b f_{c1} [2(\phi X / \epsilon_0) - (\phi X / \epsilon_0)^2] dx \\ &= b f_{c1} \phi C_1^2 [(1 - (\phi C_1) / (3 \epsilon_0)) / \epsilon_0] \end{aligned} \quad (2.8ก)$$

$$\begin{aligned} C_{c2} &= \int_{c1}^{c2} b f_{c2} [2(\phi X / \epsilon_0) - (\phi X / \epsilon_0)^2] dx \\ &= b f_{c2} \phi [(C_2^2 - C_1^2) - \phi (C_2^3 - C_1^3) / (3 \epsilon_0)] / \epsilon_0 \end{aligned} \quad (2.8ข)$$

โดยที่

$$C_c = C_{c1} + C_{c2}$$

จาก

$$X = (\int_0^c f_c(X) b dx) / C_c$$

$$\begin{aligned} X_1 &= (\int_0^{c1} f_{c1}(X) b dx) / C_{c1} \\ &= C_1 [(8 \epsilon_0 - 3 \phi C_1) / (3 \epsilon_0 - \phi C_1)] / 4 \end{aligned} \quad (2.9ก)$$

และ

$$\begin{aligned} X_2 &= (\int_{c1}^{c2} f_{c2}(X) b dx) / C_{c2} \\ &= \frac{[8 \epsilon_0 (C_2^3 - C_1^3) - 3 \phi (C_2^4 - C_1^4)]}{4 [3 \epsilon_0 (C_2^2 - C_1^2) - \phi (C_2^3 - C_1^3)]} \end{aligned} \quad (2.9ข)$$

ข. กรณี เมื่อแกนสะเทินอยู่ในส่วนทับหน้า (Topping)

$$C_{c2} = \int_0^{c2} b f_{c2} [2(\phi X / \epsilon_0) - (\phi X / \epsilon_0)^2] dx$$

$$= b f_{c2} \phi C_2^2 [(1 - \phi C_2 / (3 \epsilon_0)) / \epsilon_0] \quad (2.8ค)$$

และ

$$X_2 = \left(\int_0^{c2} f_{c2}(X) b dx \right) / C_{c2}$$

$$= C_2 [(8 \epsilon_0 - 3 \phi C_2) / (3 \epsilon_0 - \phi C_2)] / 4 \quad (2.9ค)$$

โดยที่ f_{c1} = หน่วยแรงในคอนกรีต ในส่วนพื้นสำเร็จ (Precast)

f_{c2} = หน่วยแรงในคอนกรีต ในส่วนทับหน้า (Topping)

C_{c1} = แรงอัดส่วนที่อยู่ในพื้นอัดแรง

C_{c2} = แรงอัดส่วนที่อยู่ในทับหน้า

X_1 = ระยะจากแกนสะเทินถึงศูนย์ถ่วงแรงอัดที่อยู่ในส่วนพื้นสำเร็จ

X_2 = ระยะจากแกนสะเทินถึงศูนย์ถ่วงแรงอัดที่อยู่ในส่วนทับหน้า

C_1 = ระยะผิวรับแรงอัดนอสุดของพื้นอัดแรง(Precast)ไปยังแกนสะเทิน

C_2 = ระยะผิวรับแรงอัดนอสุดของพื้นทับหน้า(Topping)ไปยังแกนสะเทิน (= $C_1 + t$)

t = ความหนาของทับหน้า

การวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัด และความโค้งจากวิธีความเครียดสอดคล้อง สามารถสรุปได้ตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 เมื่อไม่มีแรงภายนอกกระทำ ($M = 0$)

ขั้นตอนที่ 2 เมื่อความเครียดในคอนกรีตที่ระดับลวดกำลังสูง (ϵ_{cs}) เท่ากับศูนย์

ขั้นตอนที่ 3 ที่จุดเริ่มต้นของการแตกร้าว ($M = M_{crack}$)

ขั้นตอนที่ 4 เมื่อกำหนดให้ความเครียดที่ผิวบนคอนกรีต ϵ_c มีค่าอยู่ระหว่าง 0.001 ถึง 0.003

ในขั้นตอนที่ 4 เป็นช่วงหลังจากคอนกรีตเกิดการแตกร้าว (Crack) การวิเคราะห์ค่าโมเมนต์ และความโค้งมีลำดับขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. เริ่มต้นโดยกำหนด ความเครียดที่ผิวบนของหน้าตัด ϵ_c
 2. สมมติตำแหน่งของแกนสะเทิน C
 3. จากค่า ϵ_c และ C คำนวณหาแรงอัดลัพท์ C_c และตำแหน่งจุดศูนย์ถ่วงของแรงได้
 4. แล้วหาค่าความเครียดในเหล็กเสริมอัดแรง ϵ_{ps} แล้วจึงหาค่าแรงดึงในเหล็กเสริมอัดแรง จากกราฟความสัมพันธ์ ของหน่วยแรงดึง กับความเครียดของเหล็กเสริมอัดแรง
 5. เปรียบเทียบค่าแรงดึงกับแรงอัด C_c และ T ว่าเท่ากันหรือไม่ ถ้าไม่เท่ากันให้ย้อนกลับไป ข้อ 3-5 ใหม่ กระทำจนกระทั่งค่าแรงดึงเท่ากับแรงอัด
 6. เมื่อได้ $C_c = T$ จึงสามารถคำนวณหาค่าโมเมนต์ดัด และความโค้ง (Moment Curvature Relationship) ได้
- วิธีความเครียดสอดคล้องจะหาค่าความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ และความโค้งได้จนกระทั่งถึงจุดวิบัติ

2.5 การแอ่นตัว

2.5.1 การแอ่นตัวของแผ่นพื้น - ทับหน้า ก่อนเกิดการแตกร้าวเริ่มแรก

การแอ่นตัวของคานก่อนที่คอนกรีตจะมีการแตกร้าว สามารถคำนวณได้โดยอาศัยเส้นโค้งอีลาสติคซึ่งเขียนเป็นความสัมพันธ์กับแรงดัดและสติเฟนของคานได้ในรูปสมการดิฟเฟอเรนเชียล

$$d^2y/dx^2 = M/(EI) \quad (2.10)$$

โดยที่ y = ระยะตามแกนตั้ง หรือระยะการแอ่นตัว

x = ระยะตามแกนนอน หรือระยะความยาว

M = โมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นในคาน

E = โมดูลัสยืดหยุ่นของคอนกรีต

I = โมเมนต์อินเนอร์เชียของหน้าตัดแปลง

การคำนวณหาระยะการแอ่นตัวของคาน เป็นการแก้สมการที่ (2.10) ซึ่งสามารถทำได้หลายวิธี เช่น Double-Integration, วิธี Moment-Area ฯลฯ

สำหรับคานคอนกรีตอัดแรงแบบอัดแรงก่อน ซึ่งมีระยะเยื้องศูนย์ของเหล็กเสริมอัดแรงที่ตลอดความยาวของคาน และมีลักษณะเป็นคานช่วงเดียว

เมื่อมีการตัดลวดอัดแรง คานจะมีการแอ่นตัวขึ้นเนื่องจากการอัดแรง มีค่าเท่ากับ

$$\Delta_1 = - (F e L^2) / (8 E_{ci} I) \quad (2.11)$$

โดยที่ Δ_1 = ระยะเวลาแอ่นตัวที่จุดกึ่งกลางช่วงเนื่องจากการอัดแรง

F = แรงอัด

e = ระยะเยื้องศูนย์กลางของเหล็กเสริมอัดแรง

L = ความยาวคาน

E_{ci} = โมดูลัสยืดหยุ่นของคอนกรีตขณะถ่ายแรง

เมื่อคานรับน้ำหนักบรรทุกทุกแบบบรรทุกน้ำหนักที่จุดแบ่งสาม จะได้ระยะเวลาแอ่นตัว

$$\Delta_2 = (23 P L^3) / (648 E I) \quad (2.12)$$

โดยที่ P = น้ำหนักบรรทุกที่กระทำลงบนคานเพียงจุดเดียว

ดังนั้น ระยะเวลาแอ่นตัวของพื้นคอนกรีตอัดแรง ซึ่งรับน้ำหนักบรรทุกทุกแบบบรรทุกน้ำหนักที่จุดแบ่งสาม จะเป็น

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta_1 + \Delta_2 \\ &= - (F e L^2) / (8 E_{ci} I) + (23 P L^3) / (648 E I) \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.5.2 การแอ่นตัวของแผ่นพื้นอัดแรง-ทับหน้า หลังเกิดการแตกร้าวเริ่มแรก

เมื่อคอนกรีตที่ผิวล่างของคานเริ่มแตกร้าว จะทำให้ค่าสติฟเนสของคานลดลง ดังนั้น การคำนวณระยะเวลาแอ่นตัวของคานหลังเกิดการแตกร้าวเริ่มแรก จึงต้องใช้ค่าโมเมนต์อินเนอร์เซียประสิทธิภาพ I_e ซึ่งจะได้ว่า

เมื่อคานรับน้ำหนักบรรทุกทุกแบบบรรทุกน้ำหนักที่จุดแบ่งสาม จะได้ระยะเวลาแอ่นตัว

$$\Delta = (23 P L^3) / (648 E I_e) \quad (2.14)$$

โดยที่ค่าโมเมนต์อินเนอร์เซียประสิทธิภาพ I_e หาได้จากสมการ

$$I_e = (M_{cr} / M_{max})^3 I_g + [1 - (M_{cr} / M_{max})^3] I_{cr} \quad (2.15)$$

เมื่อ M_{cr} = โมเมนต์แตกร้าวของคาน

M_{max} = โมเมนต์ดัดสูงสุดในคานตอนที่คำนวณหาระยะโค้ง

I_g = โมเมนต์อินเนอร์เซียของหน้าตัดทั้งหมด

l_{cr} = โมเมนต์อินเนอร์เชียของหน้าตัดแปลงซ้ำ

นอกจากนี้ ACI 318 - 89 (17) ได้ให้ค่าประมาณหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในเหล็กเสริมอัดแรงที่จุดตัดประลัยของคานคอนกรีตอัดแรงแบบยึดเกาะ ซึ่งมีหน่วยแรงอัดประสิทธิผลในเหล็กเสริมอัดแรง f_{se} ไม่น้อยกว่า $0.50 f_{pu}$ ไว้ดังนี้

$$f_{ps} = f_{pu} (1 - 0.5 p f_{pu} / f'_c) \quad (2.16)$$

โดยที่ f_{pu} = หน่วยแรงดึงประลัยของเหล็กเสริมอัดแรง

$$p = A_{ps} / (b d)$$

= เปอร์เซ็นต์ของเหล็กเสริมอัดแรง

และให้ค่ากำลังตัดประลัยของพื้นอัดแรงไว้ ดังนี้

กรณีที่ค่าอัตราเหล็กเสริมอัดแรง $p f_{ps} / f'_c$ มีค่าน้อยกว่า 0.3

$$M'_u = A_{ps} f_{ps} d (1 - 0.59 p f_{ps} / f'_c) \quad (2.17)$$

การวิเคราะห์หากำลังตัดประลัยของแผ่นพื้นอัดแรง-ทับหน้า ที่ใช้ทดสอบทุกตัวนั้น จะใช้ทั้งวิธี Strain Compatibility (18,19) และวิธีของ ACI 318 - 89 (17)

และเนื่องจากช่วงเวลาของการวิจัยนั้นสั้น ดังนั้นผลการกระจายของแรงที่เกิดขึ้น เนื่องจากการหดตัวที่ไม่เท่ากัน (Differential Shrinkage) ระหว่างพื้นอัดแรงกับทับหน้าจะไม่นำมาพิจารณา

ศูนย์วิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย