

บทที่ 2

สัญญาณและระบบ

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงนิยามเบื้องต้นของสัญญาณและระบบซึ่งประกอบด้วยคุณลักษณะของสัญญาณและระบบรวมถึงขนาดของสัญญาณและระบบ โดยเฉพาะความหมายของนอร์ม H_2 ที่ใช้กับระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่องและระบบเวลาเติมหน่วยตามลำดับ รวมทั้งวิธีการออกแบบตัวควบคุมเชิงอุปมานและเชิงเลขแบบเหมาะสมที่สุด

2.1 สัญญาณ

สัญญาณเป็นฟังก์ชันของการวัดซึ่งถูกกระทำจากจำนวนจริง \mathcal{R} ไปยัง \mathcal{R}^n โดยเซตของสัญญาณสามารถแสดงได้ดังนี้

$$S = \{f: \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}^n\}$$

สัญญาณมีคุณลักษณะของปริภูมิเวกเตอร์ (vector space) และอยู่ภายใต้กฎของตัวดำเนินการ (operator) 2 ลักษณะดังนี้คือ การบวกของปริภูมิเวกเตอร์ (vector addition) และการคูณด้วยสเกลาร์ (scalar multiplication) โดยสามารถแสดงได้ดังนี้

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t)$$

$$(af)(t) = af(t)$$

เพื่อความสะดวกในการพิจารณา เราสามารถแบ่งลักษณะของสัญญาณออกเป็นสองปริภูมีย่อย (subspace) ได้ดังนี้

$$S_+ = \{f \in S: f(t) = 0\} \text{ สำหรับทุก } t < 0$$

$$S_- = \{f \in S: f(t) = 0\} \text{ สำหรับทุก } t > 0$$

2.1.1 ขนาดของสัญญาณ

วัตถุประสงค์ของการออกแบบตัวควบคุมมีหลายประเภทด้วยกัน แต่วัตถุประสงค์หนึ่งที่เป็นที่ต้องการคือ ขนาดของสัญญาณ (size of signal) ที่ต้องการในหลายลักษณะด้วยกันเช่น สัญญาณที่ได้จากความคลาดเคลื่อนของการติดตาม (tracking error signal) ที่ต้องการให้มีค่าน้อยหรือสัญญาณเข้าควบคุม (actuator input signal) ที่ต้องการไม่ให้มากเกินไป เป็นต้น

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงนิยามโดยทั่วไปของขนาดของสัญญาณสามารถทำการวัดในรูปของนอร์ม H_2 เพื่อนำไปใช้หัวข้อต่อ ๆ ไปที่เกี่ยวข้องกับนอร์ม H_2 ของระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่องและในเวลาเต็มหน่วยรวมทั้งเนื้อหาในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ โดยเริ่มจากการพิจารณานอร์ม H_2 ในช่วงขอบเขตจำกัด (finite horizon) และนอร์ม H_2 ในช่วงขอบเขตอนันต์ (infinite horizon)

นอร์ม H_2 ในช่วงขอบเขตจำกัด

กำหนดให้ นอร์ม H_2 ในช่วงขอบเขตจำกัดมีลักษณะดังนี้

$$\|f\|_{2,[0,T]} = \left(\int_0^T \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \quad (2.1)$$

และเซตของสัญญาณซึ่งมีค่านอร์ม H_2 จำกัดนี้เรียกว่า ปริภูมิเลอเบสก์ 2 ในช่วงขอบเขตจำกัด (finite-horizon Lebesgue 2-space) :

$$L_2[0, T] = \{f \in S_+ : \|f\|_{2,[0,T]} < \infty\} \quad (2.2)$$

สำหรับทุก ๆ สัญญาณที่มีความต่อเนื่องในขอบเขต $[0, T]$ อยู่ในเซตของ $L_2[0, T]$

ทุก ๆ สัญญาณ f ที่สามารถอยู่ภายในปริภูมิสองในช่วงขอบเขตจำกัด (finite horizon 2-space) $L_2[t_0, T]$ ได้ก็ต่อเมื่อมีสัญญาณที่มีการเลื่อนไปทางเวลา $g(t) = f(t + t_0)$ อยู่ใน $L_2[0, T - t_0]$ โดยนอร์ม H_2 ของ $\|f\|_{2,[t_0,T]}$ สามารถทำการกำหนดได้ในลักษณะเดียวกัน

นอร์ม H_2 ในช่วงขอบเขตอนันต์

เพื่อศึกษาผลของเสถียรภาพ เราจำเป็นต้องพิจารณาถึงพฤติกรรมของสัญญาณที่ครอบคลุมถึงช่วงเวลาอนันต์ โดยพิจารณาปริภูมิเลอเบสก์สองในช่วงของเขตอนันต์ (infinite-horizon Lebesgue 2-space) กำหนดได้ดังนี้

$$L_2(-\infty, \infty) = \{f \in S : \|f\|_2 < \infty\} \quad (2.3)$$

ดังนั้นนอร์ม H_2 ในช่วงขอบเขตอนันต์มีลักษณะดังนี้

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \quad (2.4)$$

โดย $L_2[0, \infty)$ และ $L_2(-\infty, 0]$ สามารถหาได้จาก $L_2[0, \infty) = S_+ \cap L_2(-\infty, \infty)$ และ $L_2(-\infty, 0] = S_- \cap L_2(-\infty, \infty)$ และเพื่อสะดวกในการพิจารณาของบทต่อไป โดยกำหนดให้

ปริภูมิสองภาคขยาย (extend 2-space) L_{2e} โดยกำหนดให้มีลักษณะดังนี้

$$L_{2e} = \{f \in L_2[0, T], \quad \forall T < \infty\} \quad (2.5)$$

สังเกตว่า $f \in L_{2e}$ ไม่ได้หมายความว่า $\sup_T \|f\|_{2,[0,T]} < \infty$ ตัวอย่างเช่น $f(t) = t$ และ $g(t) = e^t$ อยู่ใน L_{2e} แต่ไม่อยู่ใน $L_2[0, \infty)$

2.1.2 สัญญาณในโดเมนความถี่

สัญญาณในโดเมนความถี่หมายถึงฟังก์ชันที่ได้จากการวัด $f(j\omega)$ ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้คือ $(f(j\omega))^* = f^T(-j\omega)$ โดยตัวแปร ω เป็นตัวแปรความถี่เป็นจำนวนจริงและมีหน่วยเป็นเรเดียนต่อหนึ่งหน่วยเวลาและ $(\)^*$ หมายถึงการสลับเปลี่ยนสังยุค (conjugate transpose) ดังนั้นนอร์ม H_2 ของโดเมนความถี่กำหนดให้เป็นดังนี้

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(j\omega)f(j\omega)d\omega \right)^{1/2} \quad (2.6)$$

ปริภูมิเลอเบสก์ 2 ในโดเมนความถี่ (frequency domain Lebesgue 2-space) ประกอบด้วยสัญญาณที่มีค่านอร์มจำกัด

$$L_2 = \{f : \|f\|_2 < \infty\} \quad (2.7)$$

และคุณสมบัติที่สำคัญที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างนอร์ม H_2 ของโดเมนความถี่กับนอร์ม H_2 ของโดเมนเวลาคือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^T(t)f(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(j\omega)f(j\omega)d\omega$$

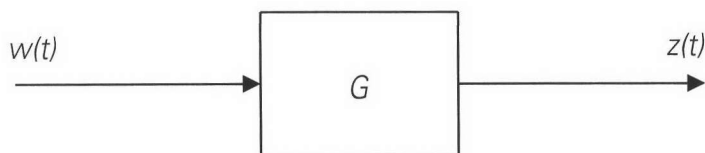
โดยเรียกว่า เอกลักษณ์ปาร์เซอวาล (Parseval's identity)

2.2 ระบบ

ระบบเป็นการกระทำจากปริภูมิสัญญาณ (signal space) หนึ่งหรือปริภูมิสัญญาณเข้า (input space) ไปยังอีกปริภูมิสัญญาณหนึ่งหรือปริภูมิสัญญาณออก (output space) ดังแสดงในรูปที่

2.1:

$$\begin{aligned} G &: S_1 \mapsto S_2 \\ &: w \mapsto z = Gw \end{aligned}$$



รูปที่ 2.1 ระบบเชิงเส้นที่ประกอบด้วยสัญญาณเข้า $w(t)$ และสัญญาณออก $z(t)$

ระบบเชิงเส้น (linear system) อยู่ภายใต้กฎการบวกของปริภูมิเวกเตอร์และการคูณด้วยสเกลาร์ซึ่งกำหนดได้ดังต่อไปนี้

$$(G_1 + G_2)w = G_1 w + G_2 w$$

$$(\alpha G)w = \alpha(Gw)$$

กำหนดให้ $z(t)$ เป็นผลตอบสนองของระบบ G เมื่อมีสัญญาณเข้า $w(t)$ และถ้าผลตอบสนองมีการเลื่อนไปทางเวลา $z(t-T)$ เมื่อมีสัญญาณเข้า $w(t-T)$ แล้วเราเรียกระบบที่พิจารณามีระบบที่มีคุณลักษณะไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา (time-invariant) ซึ่งอาจกล่าวได้ง่ายดังนี้คือ ถ้าสัญญาณเข้ามีการเลื่อนไปทางเวลาสัญญาณออกก็จะเลื่อนไปทางเวลาด้วยช่วงเวลาเท่าเดิมโดยรูปร่างไม่เปลี่ยนแปลง

2.2.1 ระบบเชิงเส้น

พิจารณาระบบ $G : S_1 \mapsto S_2$ เป็นระบบเชิงเส้น ถ้า

$$G(\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha Gw_1 + \beta Gw_2$$

สำหรับทุก ๆ สเกลาร์ α, β และสำหรับทุก ๆ $w_1, w_2 \in S_1$ โดยทุก ๆ ระบบเชิงเส้นสามารถแทนได้ด้วย ตัวดำเนินการอินทิกรัล (integral operator) ดังนี้

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, \tau) w(\tau) d\tau$$

โดยฟังก์ชันเมตริกซ์ $G(t, \tau)$ อาจเป็นฟังก์ชันนัยทั่วไป (generalized function) เช่น ฟังก์ชันเดลต้า เราเรียกระบบว่ามีคุณลักษณะของเหตุภาพ (causal) ได้ก็ต่อเมื่อ $G(t, \tau) = 0$ สำหรับทุก ๆ $\tau > t$ และระบบเชิงเส้นมีคุณลักษณะไม่แปรเปลี่ยนตามเวลาถ้า $G(t, \tau) = G(t - \tau, 0)$ สำหรับทุก ๆ $\tau > t$ ดังนั้นทุก ๆ ระบบที่เป็นเชิงเส้นและมีคุณลักษณะไม่แปรเปลี่ยนตามเวลาสามารถแทนได้ด้วย

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau)w(\tau)d\tau$$

โดยเราสามารถเขียน $G(t, \tau)$ แทน $G(t-\tau, 0)$ เพื่อให้ให้อยู่ในรูปนัยทั่วไป

2.2.2 ขนาดของระบบ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงวิธีการวัดของขนาดของระบบเชิงเส้น G ที่ประกอบด้วยสัญญาณเข้า $w(t)$ และสัญญาณออก $z(t)$ ซึ่งมีหลายวิธีที่ใช้ในการวัดขนาดของระบบในเทอมของสัญญาณเข้าและสัญญาณออกซึ่งผู้สนใจสามารถศึกษาได้จากเอกสารอ้างอิงเช่น Boyd และ Barratt (1991) หรือ Green และ Limebeer (1995) หรือหนังสือที่เกี่ยวข้องของกับสัญญาณและระบบ สำหรับในหัวข้อถัดไปจะพิจารณาขนาดของระบบเฉพาะนอร์ม H_2 ของระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่อง (continuous-time domain) และนอร์ม H_2 ของระบบในโดเมนเวลาเต็มหน่วย (discrete-time domain) เพื่อให้มีความเข้าใจในนอร์ม H_2 ของระบบซักร้อยข้อมูลที่จะกล่าวถึงในบทที่ 3 ต่อไป

2.2.3 นอร์ม H_2 ของระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่อง

นอร์ม H_2 ของระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่องเป็นค่าคาดหวังของรากที่สองเฉลี่ย (expected root-mean square หรือ RMS) ของสัญญาณออกในช่วงขอบเขตจำกัด เมื่อมีสัญญาณเข้าเป็นสัญญาณรบกวนขาว (white noise) คือมีค่าความแปรปรวน (variance) เท่ากับหนึ่ง โดยลักษณะของสัญญาณเข้าสามารถแสดงได้ดังนี้

$$w(t) = \delta(t) \quad ; \quad t \in [0, T] \quad (2.8)$$

กำหนดให้ $z = Gw$ ซึ่งนอร์ม H_2 ของระบบ G ในช่วงขอบเขตจำกัดกำหนดให้เป็นดังนี้

$$\|G\|_{2,[0,T]}^2 = E \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T z^T(t)z(t)dt \right\} \quad (2.9)$$

โดย $E(\cdot)$ เป็นตัวดำเนินการความคาดหวัง (expectation operator) และพิจารณาระบบเชิงเส้นดังที่กล่าวมา แล้วจะได้

$$z(t) = \int_0^t G(t, \tau)w(\tau)d\tau \quad (2.10)$$

พิจารณา w ในสมการที่ (2.8) โดยแทนในสมการที่ (2.9) จะได้

$$\begin{aligned}\|G\|_{2,[0,T]}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_0^T d\tau \int_0^T \text{trace}(G(t,\tau)E\{w(\tau)w^T(\sigma)\}G^T(t,\sigma))d\sigma \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_0^T \text{trace}(G(t,\tau)G^T(t,\tau))d\tau\end{aligned}\quad (2.11)$$

ดังนั้นจะได้ norms H_2 ของระบบปริภูมิสถานะ (state-space system) ดังในทฤษฎีต่อไป

ทฤษฎีที่ 2.1 สมมติว่าระบบในเวลาเต็มหน่วย G เป็นระบบเชิงเส้นที่สามารถอธิบายได้ใน สมการปริภูมิสถานะ (state-space equation) ดังนี้

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), & x_0 &= 0 \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)w(t)\end{aligned}\quad (2.12)$$

- เงื่อนไขจำเป็นและพอเพียง (necessary and sufficient condition) เพื่อให้ $\|G\|_{2,[0,T]}^2 < \infty$ คือ $D(t) \equiv 0$ สำหรับทุก ๆ ค่า $t \in [0, T]$
- ถ้า $D(t) \equiv 0$ สำหรับทุก ๆ ค่า $t \in [0, T]$ แล้ว

$$\|G\|_{2,[0,T]}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \text{trace}(C(t)P(t)C^T(t))dt \quad (2.13)$$

$$\|G\|_{2,[0,T]}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \text{trace}(B^T(t)Q(t)B(t))dt \quad (2.14)$$

ซึ่ง $P(t)$ เป็นผลเฉลยที่ได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + B(t)B^T(t), \quad P(0) = 0$$

และ $Q(t)$ เป็นผลเฉลยที่ได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$-\dot{Q}(t) = A^T(t)Q(t) + Q(t)A(t) + C^T(t)C(t), \quad Q(T) = 0$$

- ถ้าเมตริกซ์ A, B และ C เป็นค่าคงที่ และ A มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ (asymptotically stable) แล้ว $\|G\|_2$ มีค่าจำกัด ก็ต่อเมื่อ $D = 0$ จะได้

$$\|G\|_2^2 = \text{trace}(CPC^T) = \text{trace}(B^TQB) \quad (2.15)$$

โดยทั้ง P และ Q เป็นผลเฉลยที่ได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$AP + PA^T + BB^T = 0$$

$$QA + A^TQ + C^TC = 0$$

ข้อสังเกต Norm H_2 ของระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่อง G มีลักษณะที่แปรผันตามเวลา (time varying) เมื่อพิจารณาเฉพาะในช่วงขอบเขตจำกัดจะได้ดังในสมการที่ (2.13) และ (2.14) ตามลำดับ

แต่เมื่อพิจารณานอร์ม H_2 ของระบบ G ที่มีคุณลักษณะที่ไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา (time-varying) ในช่วงขอบเขตอนันต์จะได้ดังสมการที่ (2.15)

2.2.4 นอร์ม H_2 ของระบบในเวลาเต็มหน่วย

การพิจารณานอร์ม H_2 ของระบบในเวลาเต็มหน่วย G_d เป็นผลรวมของสัญญาณออกที่อยู่ในลักษณะของลำดับ (sequence) ซึ่งเราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ $f = \{f[k]\}_{-\infty}^{\infty}$ โดยที่แต่ละ $f[k]$ อยู่ภายใน \mathcal{R}^n และกำหนดให้ปริภูมิ $L_2(-\infty, \infty)$ และ $L_2(0, N)$ มีลักษณะดังนี้

$$L_2(-\infty, \infty) = \{f: \|f\|_2 < \infty\}$$

$$L_2[0, N] = \{f: f_k = 0 \text{ สำหรับ } k \notin [0, N], \|f\|_{2,[0,N]} < \infty\}$$

โดยนอร์ม H_2 ของระบบในเวลาเต็มหน่วยทั้งในช่วงขอบเขตจำกัดและขอบเขตอนันต์มีลักษณะดังนี้

$$\|f\|_2 = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} f^T[k]f[k] \right\}^{1/2}$$

$$\|f\|_{2,[0,N]} = \left\{ \sum_{k=0}^N f^T[k]f[k] \right\}^{1/2}$$

และปริภูมิ $L_2[0, \infty)$ สามารถหาได้จาก

$$L_2[0, \infty) = \{f \in L_2(-\infty, \infty): f[k] = 0, k \leq -1\}$$

สำหรับการพิจารณานอร์มของระบบในเวลาเต็มหน่วยมีสัญญาณเข้าเป็นฟังก์ชันโครเนค-เกอร์เดลต้า (Kronecker delta function) ซึ่งต่างจากระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่องที่มีสัญญาณเข้าเป็นฟังก์ชันดิเรกเดลต้า (Dirac delta function) ดังนั้นลักษณะของสัญญาณเข้ามีลักษณะดังนี้

$$w[k] = \delta_{k0} := \begin{cases} 1 & ; k = 0 \\ 0 & ; k \neq 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

พิจารณาระบบเชิงเส้นในเวลาเต็มหน่วย G_d

$$z[k] = \sum_{\tau=0}^N G(t - k\tau)w[\tau] \quad (2.17)$$

และนอร์ม H_2 ของระบบในเวลาเต็มหน่วยทั้งในช่วงขอบเขตจำกัดจะได้ดังนี้

$$\|G_d\|_{2,[0,N]} = \left\{ \sum_{k=0}^N z^T[k]z[k] \right\}^{1/2} \quad (2.18)$$

แทนสัญญาณเข้าในสมการที่ (2.16) ในสมการที่ (2.18) จะได้ดังนี้

$$\|G_d\|_{2,[0,N]} = \left\{ \sum_{k=0}^N G^T(t-k\tau)G(t-k\tau) \right\}^{1/2} \quad (2.19)$$

ดังนั้นจะได้ norms H_2 ของระบบปริภูมิสถานะ (state-space system) ดังในทฤษฎีต่อไป

ทฤษฎีที่ 2.2 สมมุติว่าระบบ G_d เป็นระบบเชิงเส้นในเวลาเต็มหน่วยที่สามารถอธิบายในสมการปริภูมิสถานะ (state-space equation) ดังนี้

$$\begin{aligned} x[k+1] &= A_d[k]x[k] + B_d[k]u[k], & x[0] &= 0 \\ y[k] &= C_d[k]x[k] + D_d[k]u[k] \end{aligned} \quad (2.20)$$

1. ถ้า $\|G_d\|_2 < \infty$ สำหรับทุก ๆ ค่า $k \in [0, N]$ แล้ว

$$\|G\|_{2,[0,N]}^2 = D_d^T[0]D_d[0] + \sum_{k=1}^N (C_d[k]A_d^{k-1}[k]B_d[k])^T (C_d[k]A_d^{k-1}[k]B_d[k]) \quad (2.21)$$

2. ถ้าเมตริกซ์ A, B และ C เป็นค่าคงที่ และ A มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ (asymptotically stable) แล้ว $\|G_d\|_2$ มีค่าจำกัดและหาได้จาก

$$\begin{aligned} \|G_d\|_2^2 &= \text{trace}(C_d P_d C_d^T) + \text{trace}(D_d D_d^T) \\ &= \text{trace}(B_d^T Q_d B_d) + \text{trace}(D_d^T D_d) \end{aligned} \quad (2.22)$$

โดยทั้ง P_d และ Q_d เป็นผลเฉลยที่ได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} P_d &= A_d P_d A_d^T + B_d B_d^T \\ Q_d &= A_d^T Q_d A_d + C_d^T C_d \end{aligned}$$

2.3 การออกแบบตัวควบคุม

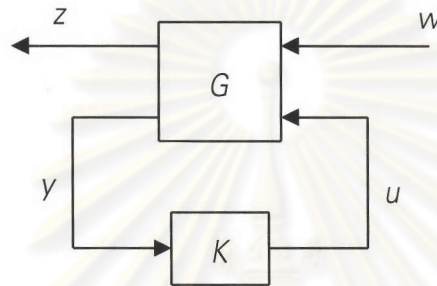
จุดประสงค์หลักประการหนึ่งในการศึกษาปัญหาทางระบบควบคุมคือการออกแบบตัวควบคุมอย่างไรให้เกณฑ์สมรรถนะของระบบ (performance of system) เป็นไปตามต้องการเกณฑ์สมรรถนะของระบบมีหลายลักษณะด้วยกันเช่น norms H_2 , H_∞ และ L_1 เป็นต้น สำหรับในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้นorm H_2 เป็นเกณฑ์สมรรถนะ เราจะออกแบบตัวควบคุมอย่างไรเพื่อทำให้ระบบป้อนกลับวงรอบปิดมีเสถียรภาพภายในเชิงเส้นกำกับและให้เกณฑ์สมรรถนะnorm H_2 ของระบบวงรอบปิดมีค่าน้อยที่สุด (minimized)

ต่อไปจะกล่าวถึงการออกแบบตัวควบคุม 2 ลักษณะคือ

- การออกแบบตัวควบคุมในโดเมนเวลาต่อเนื่อง
- การออกแบบตัวควบคุมในเวลาเต็มหน่วย

2.3.1 การออกแบบตัวควบคุมในโดเมนเวลาต่อเนื่อง

พิจารณาระบบดังในแผนภาพกรอบ (block diagram)



รูปที่ 2.2 แสดงระบบในโดเมนเวลาต่อเนื่อง

กำหนดให้

กระบวนการในโดเมนเวลาต่อเนื่องจะได้ระบบปริภูมิสถานะดังนี้

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t), \quad x(0) = 0$$

$$z(t) = C_1x(t) + D_{12}u(t) \tag{2.23}$$

$$y(t) = C_2x(t) + D_{21}w(t)$$

การพิจารณามีข้อสมมุติดังต่อไปนี้

1. (A, B_2) สามารถทำให้เสถียรได้ (stabilizable) และ (C_2, A) สามารถตรวจวัดได้ (detectable)
2. $D_{12}^T D_{12} = I$ โดย D_{12} เป็นเมตริกซ์สูง (tall matrix) กล่าวคือมีจำนวนแถวมากกว่าหรือเท่ากับจำนวนคอลัมน์ และ $D_{21}^T D_{21} = I$ โดย D_{21} เป็นเมตริกซ์กว้าง (fat matrix) กล่าวคือมีจำนวนคอลัมน์มากกว่าหรือเท่ากับจำนวนแถว
3. เมตริกซ์ 2 อันต่อไปนี้

$$\begin{pmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{pmatrix}$$

มีค่าลำดับชั้นเต็ม (full rank) สำหรับทุก ๆ ค่าความถี่ ω

เพื่อมิให้เกิดความสับสนระหว่างสัญญาณเชิงอุปมาน (continuous signal หรือ analog signal) และสัญญาณเชิงเลข (digital signal หรือ discrete signal) ในแผนภาพกรอบ (block diagram) เราใช้เส้นทึบ (solid line) แทนสัญญาณเชิงอุปมานและเส้นประ (dotted line) แทนสัญญาณเชิงเลข

ในที่นี้จะพิจารณากรณีเมื่อมีตัวถ่วงน้ำหนักที่เกี่ยวข้องกัน (cross weighting) ระหว่างตัวแปรสถานะและสัญญาณเข้าควบคุม สำหรับรายละเอียดเพิ่มเติมสามารถหาได้จาก Doyle et al. (1989) หรือ Green และ Limebeer (1995)

การออกแบบตัวควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (optimal controller) K ซึ่งทำให้ออร์ม H_2 ของระบบวงรอบปิด $\|T_{zw}\|_2$ มีค่าน้อยที่สุดหาได้จากวิธีการดังนี้ กำหนดให้ T_{zw} เป็นเมตริกซ์ถ่ายโอน (transfer matrix) จาก w ไปยัง z ในโดเมนเวลาต่อเนื่องและเมตริกซ์แฮมิลตัน (Hamilton matrix) มีลักษณะดังนี้

$$H_2 = \begin{pmatrix} A - B_2 D_{12}^T C_1 & -B_2 B_2^T \\ -C_1^T (I - D_{12} D_{12}^T) C_1 & -(A - B_2 D_{12}^T C_1)^T \end{pmatrix}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} (A - B_1 D_{21}^T C_2)^T & -C_2^T C_2 \\ -B_1 (I - D_{21}^T D_{21}) B_1^T & -(A - B_1 D_{21}^T C_2) \end{pmatrix}$$

จะได้ว่า $X_2 = \text{Ric}(H_2)$ และ $Y_2 = \text{Ric}(J_2)$ ซึ่งทั้งสองเป็นเมตริกซ์บวกกึ่งแน่นอน (positive semidefinite) และ

$$F_2 := -(B_2^T X_2 + D_{12}^T C_1), \quad L_2 := -(Y_2 C_2^T + B_1^T D_{21}) \quad (2.24)$$

โดยตัวดำเนินการริคคาติ (Riccati Operator หรือ $\text{Ric}(\cdot)$) สามารถหารายละเอียดได้จาก Doyle et al. (1989) ที่กล่าวถึงตัวดำเนินการริคคาติในโดเมนเวลาต่อเนื่อง

ทฤษฎีที่ 2.3 โครงสร้างของตัวควบคุมที่เหมาะสมที่สุดคือ

$$K_{opt}(s): \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \tilde{A}_2 \hat{x}(t) - L_2 y(t) \\ u(t) = F_2 \hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.25)$$

โดยที่ $\tilde{A}_2 = A + B_2 F_2 + L_2 C_2$

จะเห็นได้ว่า สมการของตัวควบคุมดังกล่าวสามารถแสดงในรูปแบบของตัวสังเกตมาตรฐานได้ดังนี้

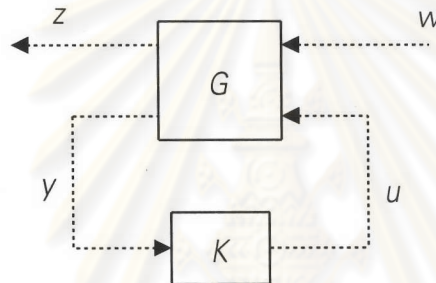
$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B_2u(t) + L_2(C_2\hat{x}(t) - y(t))$$

$$u(t) = F_2\hat{x}(t)$$

โดย $\hat{x}(t)$ เป็นตัวประมาณค่าที่เหมาะสมที่สุด (optimal estimator) ของ $x(t)$

2.3.1 การออกแบบตัวควบคุมในเวลาเต็มหน่วย

พิจารณาระบบดังในแผนภาพกรอบ (block diagram)



รูปที่ 2.3 แสดงระบบในเวลาเต็มหน่วย

กำหนดให้

กระบวนการในเวลาเต็มหน่วยจะได้ระบบปริภูมิสถานะดังนี้

$$x[k+1] = Ax[k] + B_1w[k] + B_2u[k], \quad x[0] = 0$$

$$z[k] = C_1x[k] + D_{11}w[k] + D_{12}u[k] \quad (2.26)$$

$$y[k] = C_2x[k] + D_{21}w[k]$$

การพิจารณาที่มีข้อกำหนดดังต่อไปนี้

1. (A, B_2) สามารถทำให้เสถียรได้ (stabilizable) และ (C_2, A) สามารถตรวจวัดได้ (detectable)
2. $D_{12}^T D_{12} = I$ โดย D_{12} เป็นเมตริกซ์สูง (tall matrix) และ $D_{21}^T D_{21} = I$ โดย D_{21} เป็นเมตริกซ์กว้าง (fat matrix)
3. เมตริกซ์ 2 อันต่อไปนี้

$$\begin{pmatrix} A - \lambda I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A - \lambda I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{pmatrix}$$

มีค่าลำดับชั้นเต็ม (full rank) สำหรับทุก ๆ ค่า λ ที่อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย นั่นคือ

$$|\lambda| = 1$$

ในที่นี้จะพิจารณาในกรณีเมื่อมีตัวถ่วงน้ำหนักที่เกี่ยวข้องกัน (cross weighting) สำหรับรายละเอียดเพิ่มเติมสามารถหาได้ Chen และ Francis (1992) หรือ Zhou et al. (1996)

การออกแบบตัวควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (optimal controller) K ซึ่งจะทำให้ norms H_2 ของระบบวงรอบปิด $\|T_{zw}\|_2$ มีค่าน้อยที่สุดหาได้จากวิธีการดังนี้ กำหนดให้ \mathcal{X}_{zw} เป็นเมตริกซ์ถ่ายโอนจาก w ไปยัง z ในเวลาเต็มหน่วยและเมตริกซ์แฮมิลตัน (Hamilton matrix) มีลักษณะดังนี้

$$H_2 = \begin{pmatrix} I & B_2 B_2^T \\ 0 & (A - B_2 D_{12}^T C_1)^T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A - B_2 D_{12}^T C_1 & 0 \\ -C_1^T (I - D_{12} D_{12}^T) C_1 & I \end{pmatrix}$$

และ

$$J_2 = \begin{pmatrix} I & C_2^T C_2 \\ 0 & A - B_1 D_{21}^T C_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (A - B_1 D_{21}^T C_2)^T & 0 \\ -B_1 (I - D_{21} D_{21}^T) B_1^T & I \end{pmatrix}$$

จะได้ว่า $X_2 = \text{Ric}(H_2)$ และ $Y_2 = \text{Ric}(J_2)$ ซึ่งทั้งสองเป็นเมตริกซ์บวกกึ่งแน่นอน (positive semidefinite) และ

$$F := -(I + B_2^T X_2 B_2)^{-1} (B_2^T X_2 A + D_{12}^T C_1), F_1 := -(I + B_2^T X_2 B_2)^{-1} (B_2^T X_2 B_1 + D_{12}^T D_{11})$$

$$L := -(B_1 D_{12}^T + A Y_2 C_2^T) (I + C_2 Y_2 C_2^T)^{-1}, L_1 := (F_1 D_{12}^T + F Y_2 C_2^T) (I + C_2 Y_2 C_2^T)^{-1}$$

(2.27)

โดยตัวดำเนินการริคคาติ (Riccati Operator หรือ $\text{Ric}(\cdot)$) สามารถหารายละเอียดได้จาก Zhou et al. (1996) หรือ Pappas et al. (1980) ที่กล่าวถึงตัวดำเนินการริคคาติในเวลาเต็มหน่วย

ทฤษฎีที่ 2.4 โครงสร้างของตัวควบคุมที่เหมาะสมที่สุดคือ

$$K_{opt}[z]: \begin{cases} \hat{x}[k+1] = \tilde{A}_2 \hat{x}[k] + (L_2 - B_2 L_1) y[k] \\ u[k] = (L_1 C_2 - F_2) \hat{x}[k] + L_1 y[k] \end{cases} \quad (2.28)$$

โดยที่ $\tilde{A}_2 = A + B_2 F + L_2 C_2 - B_2 L_1 C_2$

โดย $\hat{x}[k]$ เป็นตัวประมาณค่าที่เหมาะสมที่สุด (optimal estimator) ของ $x[k]$