การแบ่งกลุ่มของเซมิริงที่เป็นอันดับบริบูรณ์บางชนิด

นาย ประภัทร วิเศษมงคลชัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2533

ISBN 974-577-114-7

CLASSIFICATION OF SOME COMPLETE ORDERED SEMIRINGS

MR. PRAPAT WISETMONGKOLCHAI

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1990

ISBN 974-577-114-7

Thesis Title	Classification of Some Complete Ordered Semirings
By	Mr. Prapat Wisetmongkolchai
Department	Mathematics
Thesis Advisor	Dr. Sidney S. Mitchell Ph.D.

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in partial fulfillment of the requirements for the Master's degree.

Thavorn Vajrabhaya .... Dean of Graduate School

(Professor Thavorn Vajrabhaya Ph.D.)

Thesis Committee

Yupaporn Kemprasit .... Chairman

(Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.)

Sidney S. Mitchell .... Thesis Advisor

(Dr. Sidney S. Mitchell Ph.D.)

Wanida Hemakul .... Member

(Associate Professor Wanida Hemakul Ph.D.)

พิมพ์ต้นฉบับบทคัดย่อวิทยานิพนธ์ภายในกรอบสีเขียวนี้เพียงแผ่นเดียว

ประภัทร วิเศษมงคลชัย : การแบ่งกลุ่มของเซมิริงที่เป็นอันดับบริบูรณ์บางชนิด (CLASSIFICATION OF SOME COMPLETE ORDERED SEMIRINGS)
อ.ที่ปรึกษา : ดร.ซิดนีย์ เอส.มิทเชลล์, 135 หน้า ISBN 974-577-114-7

เราจะเรียกความสัมพันธ์ $\leq$ บนเซต X ว่า <u>อันดับ</u> ถ้าสำหรับทุก ๆ $a,b,c \in X$ สอดคล้อง (1) (1) $a \leqslant a$, (2) ถ้า $a \leqslant b$ และ $b \leqslant a$ แล้ว $a = b$ (3) ถ้า $a \leqslant b$ และ $b \leqslant c$ แล้ว $a \leqslant c$ และ (4) $a < b$ หรือ $a = b$ หรือ $b < a$ เราจะเรียกเซมิริง $(S,+,\cdot)$ ว่า<u>สกิวเรโซเซมิริง</u>ถ้า $(S,\cdot)$ เป็นกรุป, <u>สกิวฟิลด์</u> ถ้า $(S\setminus\{0\},\cdot)$ เป็นกรุป เมื่อ o เป็นศูนย์ภายใต้การคูณของ S <u>สกิวริง</u> ถ้า $(S,+)$ เป็นกรุป เราจะเรียก $(D,+,\cdot,\leqslant)$ ว่า <u>สกิวเรโซเซมิริงที่เป็นอันดับ</u> ถ้า $(D,+,\cdot)$ เป็นสกิวเรโซเซมิริง และ $\leqslant$ เป็นอันดับบน D ซึ่งสำหรับทุก ๆ $x,y,z \in D$, ถ้า $x \leqslant y$ แล้ว $x+z \leqslant y+z$, $xz \leqslant yz$ และ $zx \leqslant zy$ เราจะเรียก $(K,+,\cdot,\leqslant)$ ว่า <u>o-สกิวเซมิฟิลด์ที่เป็นอันดับ</u> ถ้า $(K,+,\cdot)$ เป็น สกิวเซมิฟิลด์ และ $\leqslant$ เป็นอันดับบน K ซึ่งสำหรับทุก $x,y,z \in K$, (1) ถ้า $x \leqslant y$ แล้ว $x+z \leqslant y+z$, $xw \leqslant yw$ และ $wx \leqslant wy$ สำหรับทุก $w \geqslant 0$, (2) $0 < 1$ และ (3) $0+x = x$ เราจะเรียก $(K,+,\cdot,\leqslant)$ ว่า <u>∞-สกิวเซมิฟิลด์ที่เป็นอันดับ</u> ถ้า $(K,+,\cdot)$ เป็นสกิวเซมิฟิลด์ และ $0+x = 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in K$ เราจะเขียน ∞ แทน o และ $\leqslant$ เป็นอันดับบน K ซึ่งสำหรับทุก ๆ $x,y \in K$ สำหรับทุก ๆ $z \leqslant \infty$, ถ้า(1) $x \leqslant y$ แล้ว $x+z \leqslant y+z$, $xz \leqslant yz$ และ $zx \leqslant zy$ และ (2) $1 < \infty$ เราจะเรียก $(R,+,\cdot,\leqslant)$ ว่า <u>สกิวริงที่เป็นอันดับ</u> ถ้า $(R,+,\cdot)$ เป็นสกิวริงและ $\leqslant$ เป็นอันดับบน R ซึ่งสำหรับทุก $x,y,z \in R$, (1) ถ้า $x \leqslant y$ แล้ว $x+z \leqslant y+z$ และ $z+x \leqslant z+y$ และ (2) ถ้า $x \leqslant y$ แล้ว $xw \leqslant yw$ และ $wx \leqslant wy$ สำหรับทุก ๆ $w \geqslant 0$ สัญลักษณ์ max(min) จะแทนการดำเนินการ $*$ ซึ่งกำหนดโดย $x*y = \max\{x,y\}(\min\{x,y\})$ ถ้าไม่กล่าวเป็นอย่างอื่น $+,\cdot$ และ $\leqslant$ หมายถึง การบวก, การคูณและอันดับปกติ สำหรับ $\leqslant_{opp}$ หมายถึง อันดับตรงข้ามของ $\leqslant$

<u>ทฤษฎีบท 1</u> สำหรับสกิวเรโซเซมิริง D ใดๆที่เป็นอันดับบริบูรณ์จะได้ว่า D ถอดแบบกับ $(\{1\},+,\cdot,\leqslant)$ หรือ $(\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\},\min,\cdot,\leqslant)$ หรือ $(\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\},\max,\cdot,\leqslant)$ หรือ $(\mathbb{R}^+,+,\cdot,\leqslant)$ หรือ $(\mathbb{R}^+,+,\cdot,\leqslant_{opp})$

<u>ทฤษฎีบท 2</u> สำหรับ o-สกิวเซมิฟิลด์ K ใด ๆ ที่เป็นอันดับบริบูรณ์จะได้ว่า K ถอดแบบกับ $(\mathbb{R}_0^+,+,\cdot,\leqslant)$ หรือ $(\mathbb{R}_0^+,\max,\cdot,\leqslant)$ หรือ $(\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}\cup\{0\},\max,\cdot,\leqslant)$ หรือ $(C = \{-(2^n) \mid n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\}\cup\{0,1\},+,\cdot,\leqslant)$ เมื่อ $|x|$ เป็นค่าสัมบูรณ์ของ x และสำหรับทุก ๆ $x,y \in C$, $x+y = x$ ถ้า $|x| \geqslant |y|$ และ $x\cdot y = 1$ ถ้า $x = y^{-1}$ และ $x\cdot y = -|xy|$ ถ้า $x \neq y^{-1}$ หรือ $(K_{(p)},+,\cdot,\leqslant)$ สำหรับบาง $p \in \mathbb{Z}^+\setminus\{1\}$ เมื่อ $K_{(p)} = \{\beta^n \mid n \in \mathbb{Z}\}\cup\{0\}$ และ β คือสัญลักษณ์ที่ไม่ใช่จำนวนเต็มใด ๆ เรานิยาม $+$ และ $\cdot$ บน $K_{(p)}$ โดย $0+0 = 0$, $\beta^n+0 = 0+\beta^n = \beta^n$, $\beta^n+\beta^m=\beta^{\min\{m,n\}}$, $\beta^n\cdot 0$ $0\cdot\beta^n = 0\cdot 0 = 0$ และ $\beta^n\cdot\beta^m = \beta^{n+m}$ สำหรับทุก ๆ $m, n \in \mathbb{Z}$ เรานิยาม $\leqslant$ บน $K_{(p)}$ ดังนี้ ให้ $m,n \in \mathbb{Z}$ (1) $0 < \beta^m$ ถ้า $m \equiv 0 \pmod p$, (2) $\beta^n < 0$ ถ้า $n \not\equiv 0 \pmod p$ (3) ถ้า $m \equiv 0 \pmod p$ และ $n \equiv 0 \pmod p$ แล้ว $\beta^m \leqslant \beta^n$ เมื่อและต่อเมื่อ $n \leqslant m$ และ (4) ถ้า $n \not\equiv 0 \pmod p$ และ $m \not\equiv 0 \pmod p$ แล้ว $\beta^m \leqslant \beta^n$ เมื่อและต่อเมื่อ $m \leqslant n$ หรือ $(\{0,1\},+,\cdot,\leqslant)$ เมื่อ $1+1 = 1 = 1\cdot 1$ และ $0+0 = 0 = 0\cdot 0 = 0\cdot 1 = 1\cdot 0$

<u>ทฤษฎีบท 3</u> สำหรับ ∞-สกิวเซมิฟิลด์ K ใด ๆ ที่เป็นอันดับบริบูรณ์ จะได้ว่า $\mathrm{Cor}_K(1) = \{\infty\}$ หรือ $\mathrm{Cor}_K(1) = \{\infty\}\cup D_K^i$ หรือ $\mathrm{Cor}_K(1) = K$ เมื่อ $\mathrm{Cor}_K(1) = \{y \in K \mid y+1 = \infty\}$ และ $D_K^i = \{x \in K \mid x > \infty\}$

<u>ทฤษฎีบท 4</u> สำหรับสกิวริง R ใด ๆ ที่เป็นอันดับบริบูรณ์จะได้ว่า R ถอดแบบกับ $(\mathbb{R},+,\cdot,\leqslant)$ หรือ $(n\mathbb{Z},+,\cdot,\leqslant)$ สำหรับบาง $n \in \mathbb{Z}_0^+$ หรือ $(\mathbb{R},+,*,\leqslant)$ หรือ $(\mathbb{Z},+,*,\leqslant)$ เมื่อ $x*y = 0$ สำหรับทุก ๆ $x,y \in \mathbb{R}\cup\mathbb{Z}$

ภาควิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อนิสิต ประภัทร วิเศษมงคลชัย

สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2532 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา Sidney S. Mitchell

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม

PRAPAT WISETMONGKOLCHAI : CLASSIFICATION OF SOME COMPLETE ORDERED SEMIRINGS. THESIS ADVISOR : DR.SIDNEY S. MITCHELL, Ph.D. 135 PP.

A binary relation $\leqslant$ on a set X is called an <u>order</u> on X iff for every $a,b,c \in X$: (1) $a \leqslant a$, (2) $a \leqslant b$ and $b \leqslant a$ implies that $a = b$, (3) $a \leqslant b$ and $b \leqslant c$ implies that $a \leqslant c$ and (4) either $a < b$ or $a = b$ or $b < a$. A semiring $(S,+,\cdot)$ is called a <u>skew ratio semiring</u> iff $(S,\cdot)$ is a group, a <u>skew semifield</u> iff $(S\setminus\{0\},\cdot)$ is a group and $\forall s \in S, s0 = 0 = 0s$, a <u>skew ring</u> iff $(S,+)$ a group and $(D,+,\cdot,\leqslant)$ is called an <u>ordered skew ratio semiring</u> iff $(D,+,\cdot)$ is a skew ratio semiring and $\leqslant$ is an order on D such that for every $x,y,z \in D$, (1) $x \leqslant y$ implies $x+z \leqslant y+z$ and (2) $xz \leqslant yz$ and $zx \leqslant zy$. A system $(K,+,\cdot,\leqslant)$ is called an <u>ordered 0-skew semifield</u> iff $(K,+,\cdot)$ is a skew semifield and $\leqslant$ is an order on K such that for every $x,y \in K$, (1) $x \leqslant y$ implies $x+z \leqslant y+z$ for all $z \in K$, (2) $x \leqslant y$ implies $xz \leqslant yz$ and $zx \leqslant zy$ for all $z \geqslant 0$, (3) $0 < 1$ and (4) 0 is an additive identity. A system $(K,+,\cdot,\leqslant)$ is called an <u>ordered ∞-skew semifield</u> iff $(K,+,\cdot)$ is a skew semifield where 0 is an additive zero (denote it by ∞) and for every $x,y \in K$, (1) $x \leqslant y$ implies $x+z \leqslant y+z$ for all $z \leqslant \infty$, (2) $x \leqslant y$ implies $xz \leqslant yz$ and $zx \leqslant zy$ for all $z \leqslant \infty$ and (3) $1 < \infty$. A system $(R,+,\cdot,\leqslant)$ is called an <u>ordered skew ring</u> iff $(R,+,\cdot)$ is a skew ring and $\leqslant$ is an order on R such that for every $x,y \in R$, (1) $x \leqslant y$ implies $x+z \leqslant y+z$ and $z+x \leqslant z+y$ for all $z \in R$ and (2) $x \leqslant y$ implies $xz \leqslant yz$ and $zx \leqslant zy$ for all $z \geqslant 0$.

<u>Theorem 1</u>. Let $(D,\oplus,\bullet,\overset{*}{\leqslant})$ be a complete ordered skew ratio semiring. Then $(D,\oplus,\bullet,\overset{*}{\leqslant})$ is isomorphic to either $(\{1\},+,\cdot,\leqslant)$ or $(\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\},\min,\cdot,\leqslant)$ or $(\{2^n \mid n \in \mathbb{Z},\max,\cdot,\leqslant)$ or $(\mathbb{R}^+,+,\cdot,\leqslant)$ or $(\mathbb{R}^+,+,\cdot,\leqslant_{opp})$.

<u>Theorem 2</u>. Let $(K,\oplus,\bullet,\overset{*}{\leqslant})$ be a complete ordered 0-skew semifield. Then $(K,\oplus,\bullet,\overset{*}{\leqslant})$ is isomorphic to either $(\mathbb{R}_0^+,+,\cdot,\leqslant)$ or $(\mathbb{R}_0^+,\max,\cdot,\leqslant)$ or $(\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\},\max,\cdot,\leqslant)$ or $(\{0,1\},+,\cdot,\leqslant)$ or $(C = \{-(2^n) \mid n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\} \cup \{0,1\},\oplus,\bullet,\leqslant)$ where $|x|$ is the absolute value of x and for every $x,y \in C$, $x \oplus y = x$ iff $|x| \geqslant |y|$ and $x \bullet y = 1$ iff $x = y$ and $x \bullet y = -|xy|$ iff $x \neq y^{-1}$ or $(K_{(p)},\oplus,\bullet,\leqslant_1)$ for some $p \in \mathbb{Z}^+\setminus\{1\}$ where $K_{(p)} = \{\beta^n \mid n \in Z\} \cup \{0\}$ and β is a symbol not representing any integer. Define $\oplus$ and $\bullet$ on $K_{(p)}$ by $0 \oplus 0 = 0$, $\beta^n \oplus 0 = 0 \oplus \beta^n = \beta^n$, $\beta^n \oplus \beta^m = \beta^{\min\{m,n\}}$, $\beta^n \bullet 0 = 0 \bullet \beta^n = 0 \bullet 0 = 0$ and $\beta^n \bullet \beta^m = \beta^{n+m}$ for all $m,n \in \mathbb{Z}$. Define $\leqslant_1$ on $K_{(p)}$ as follows: Let $m,n \in \mathbb{Z}$, (1) $m \equiv 0 \pmod p$ iff $0 \leqslant_1 \beta^m$, (2) $n \not\equiv 0 \pmod p$ iff $\beta^n \leqslant_1 0$, (3) If $n \equiv 0 \pmod p$ and $m \equiv 0 \pmod p$, then $\beta^m \leqslant_1 \beta^n$ iff $n \leqslant m$ and (4) If $n \not\equiv 0 \pmod p$ and $m \not\equiv 0 \pmod p$, then $\beta^m \leqslant_1 \beta^n$ iff $m \leqslant n$.

<u>Theorem 3</u>. Let K be a complete ordered ∞-skew semifield. Then either $Cor_K(1) = \{\infty\}$ or $Cor_K(1) = \{\infty\} \cup D_K^i$ or $Cor_K(1) = K$ where $Cor_K(1) = \{y \in K \mid y+1 = \infty\}$ $D_K^i = \{x \in K \mid x >^* \infty\}$.

<u>Theorem 4</u>. Let $(R,\oplus,\bullet,\overset{*}{\leqslant})$ be a complete ordered skew ring. Then $(R,\oplus,\bullet,\overset{*}{\leqslant})$ is isomorphic to either $(\mathbb{R},+,\cdot,\leqslant)$ or $(\mathbb{R},+,*,\leqslant)$ where $x*y = 0$ for all $x,y \in \mathbb{R}$ or $(n\mathbb{Z},+,\cdot,\leqslant)$ for some $n \in \mathbb{Z}_0^+$ or $(\mathbb{Z},+,*,\leqslant)$ where $x*y = 0$ for all $x,y \in \mathbb{Z}$.

(In Theorem 1,2 and 4 $+,\cdot,\leqslant$ are the usual relation and $\leqslant_{opp}$ is the opposite order of $\leqslant$, operation max(min) means that $x+y = \text{maximum}\{x,y\}$ $(\text{minimum}\{x,y\})$

ภาควิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อนิสิต ประภัทร วิเศษมงคลชัย

สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2532 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา Sidney S. Mitchell

ACKNOWLEDGEMENT

I am greatly indebted to Dr. Sidney S. Mitchell, my thesis supervisor, for the invaluable guidance considerately offered in the preparation and completion of this thesis. Also, I would like to thank all of the lecturers for their previous valuable lectures while studying.

In particular, deep gratitude and appreciation are shown to my beloved father, mother and brothers for their encouragement throughout my graduate study.

CONTENTS