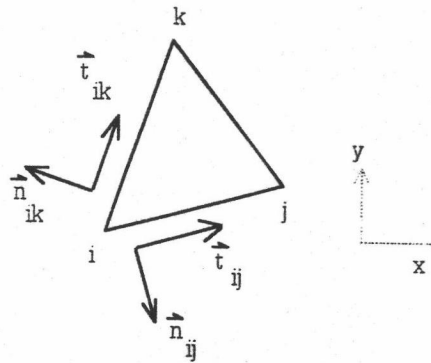




ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์สำหรับสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในแนวขวาง 2 ส่วนประกอบ

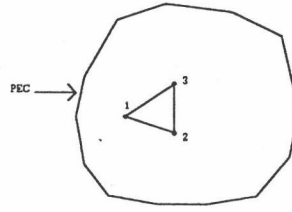
3.1 บทนำ

ในงานวิจัยนี้ ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ที่เสนอจะเป็นการกระจายส่วนประกอบของเวกเตอร์สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวาง E_x และ H_x ที่จุดไหนให้อยู่ในทิศเดียวกับเวกเตอร์สัมผัสและตั้งฉากกับด้านของอีลีเมนต์

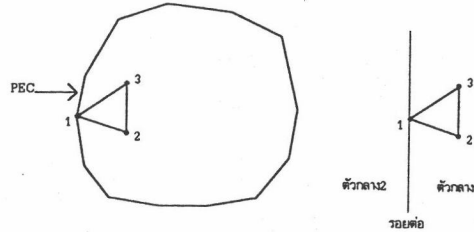


รูปที่3-1 แสดงเวกเตอร์สัมผัสและเวกเตอร์ตั้งฉากของอีลีเมนต์อันหนึ่ง

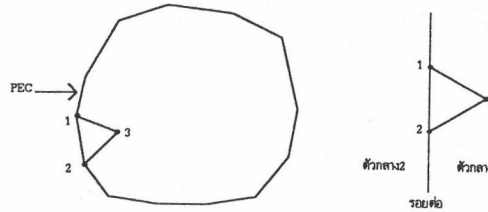
รูปที่ 3-1 แสดงอีลีเมนต์อันหนึ่ง มีโหนด 3 โหนด คือ โหนด i , j และ k ซึ่งด้าน i-j ,ด้านj-k และด้าน i-k วางอยู่ในทิศที่ไม่อยู่ในแนวแกน x หรือ y สนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่โหนด i สามารถกระจายส่วนประกอบของสนามด้วยเวกเตอร์สัมผัส t_{ij} และ t_{ik} หรือเวกเตอร์ตั้งฉาก n_{ij} และ n_{ik} แทนเวกเตอร์ในแนวแกน x และ y คือ i_x และ i_y ได้ โดยในที่นี้ t_{ij} และ t_{ik} เป็นเวกเตอร์สัมผัสขนาดหนึ่งหน่วยของด้าน i-j และด้าน i-k ตามลำดับ โดยมีทิศจากโหนด i ไป j และจากโหนด i ไป k ตามลำดับ n_{ij} และ n_{ik} เป็นเวกเตอร์ตั้งฉากขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศชี้ออกจากอีลีเมนต์ของด้าน i-j และด้าน i-k ตามลำดับ i_x และ i_y เป็นเวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วยในทิศของแกนพิกัด x และ y ตามลำดับ ซึ่งการกระจายส่วนประกอบของสนามโดยวิธีนี้จะมีประโยชน์เมื่อใช้กับท่อนำคลื่นที่มีขอบเขตเป็นเส้นโค้ง ที่อีลีเมนต์อันนอกสุดมีด้านของอีลีเมนต์ไม่อยู่ในแนวแกน x หรือ y



(a)



(b)



(c)

รูปที่ 3-2 แสดงอีลีเมนต์ทั้ง 3 แบบ a) เป็นอีลีเมนต์ที่ไม่มีโหนดอยู่บนผนังขอบเขตของท่อ นำคลื่นหรือบนรอยต่อระหว่างตัวกลางสองชนิด b) เป็นอีลีเมนต์ที่มีโหนดอยู่บนผนังขอบเขตหรือบนรอยต่อระหว่างตัวกลางสองชนิด 1 โหนด และ c) เป็นอีลีเมนต์ที่มีโหนดอยู่บนผนังขอบเขตหรือบนรอยต่อระหว่างตัวกลางสองชนิด 2 โหนด

สำหรับงานวิจัยนี้ ผู้ศึกษาในงานวิจัยได้แยกประเภทของอีลีเมนต์ออกเป็น 3 ประเภท คือ

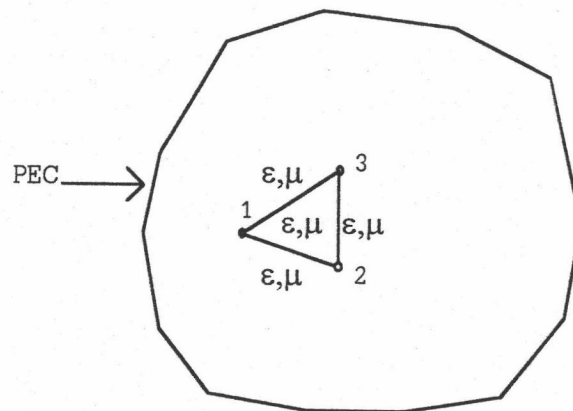
1. อีลีเมนต์ที่ไม่มีโหนดอยู่บนผนังขอบเขตของท่อ นำคลื่นหรือบนรอยต่อระหว่างตัวกลางสองชนิด ดังแสดงในรูป 3-2a
2. อีลีเมนต์ที่มีโหนดอยู่บนผนังขอบเขตของท่อ นำคลื่นหรือบนรอยต่อระหว่างตัวกลางสองชนิด 1 โหนด ดังแสดงในรูป 3-2b
3. อีลีเมนต์ที่มีโหนดอยู่บนผนังขอบเขตของท่อ นำคลื่นหรือบนรอยต่อระหว่างตัวกลางสองชนิด 2 โหนด ดังแสดงในรูป 3-2c

และกระจายสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวาง \mathbf{E}_s และ \mathbf{H}_s ภายในอีลีเมนต์หนึ่งเป็นดังนี้

$$\mathbf{E}_s^e = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{E}_{is} \quad , \quad \mathbf{H}_s^e = \sum_{i=1}^3 b_i \mathbf{H}_{is} \quad (3-1)$$

โดย a_i และ b_i เป็นสัมประสิทธิ์ไม่ทราบค่า \mathbf{E}_s^e และ \mathbf{H}_s^e คือฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ ซึ่งมีรายละเอียดของฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์สำหรับอีลีเมนต์ที่แบ่งออกเป็น 3 ประเภทดังที่จะกล่าวต่อไป

3.2 ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์สำหรับอีลีเมนต์ที่ไม่มีโหนดอยู่บนผนังขอบเขตของท่อนำคลื่น หรือบนรอยต่อระหว่างตัวกลางสองชนิด



รูปที่ 3-3 แสดงอีลีเมนต์ที่ไม่มีโหนดอยู่บนผนังขอบเขตของท่อนำคลื่น หรือบนรอยต่อระหว่างตัวกลางสองชนิด

รูปที่ 3-3 แสดงอีลีเมนต์ที่ไม่มีโหนดอยู่บนผนังขอบเขตของท่อนำคลื่น อีลีเมนต์ประเภทนี้จะอยู่ในตัวกลางชนิดเดียวกัน และไม่มีโหนดใดโหนดหนึ่งอยู่บนผนังท่อนำคลื่นหรือรอยต่อระหว่างตัวกลางสองชนิด จากลักษณะดังกล่าวนี้ทำให้เราสามารถเขียนสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวาง \mathbf{E}_s และ \mathbf{H}_s ที่ทุก ๆ โหนดให้อยู่ในแนวแกน x และ y ได้โดยไม่มีปัญหา ในงานวิจัยนี้ได้กระจายสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวาง \mathbf{E}_s และ \mathbf{H}_s ภายในอีลีเมนต์ประเภทนี้ด้วยส่วนประกอบของสนามในแนวแกน x และ y คือ

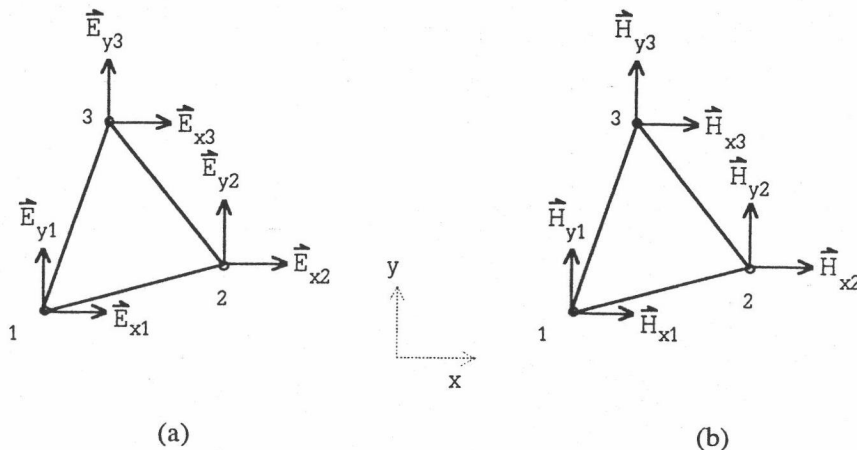
$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s^e(x, y) &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{E}_i N_i(x, y) \\ \mathbf{H}_s^e(x, y) &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{H}_i N_i(x, y) \end{aligned} \quad (3-2a)$$

โดย $E_i = \begin{bmatrix} \alpha_{xi} \\ \alpha_{yi} \end{bmatrix}$ และ $H_i = \begin{bmatrix} \beta_{xi} \\ \beta_{yi} \end{bmatrix}$ เป็นสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่โหนด i และ α_{xi} , α_{yi} , β_{xi} และ β_{yi} เป็นตัวไม่ทราบค่าที่บอกขนาดของส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวแกน x และ y ตามลำดับ และ $N_i(x, y)$ เป็นฟังก์ชันรูปร่างแบบสเกลาร์ของโหนด i ซึ่งแปรตามตำแหน่งต่าง ๆ ในอีลีเมนต์เป็นฟังก์ชันดังนี้

$$N_i(x, y) = \frac{(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y}{x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - x_1 y_3} \quad (3-3)$$

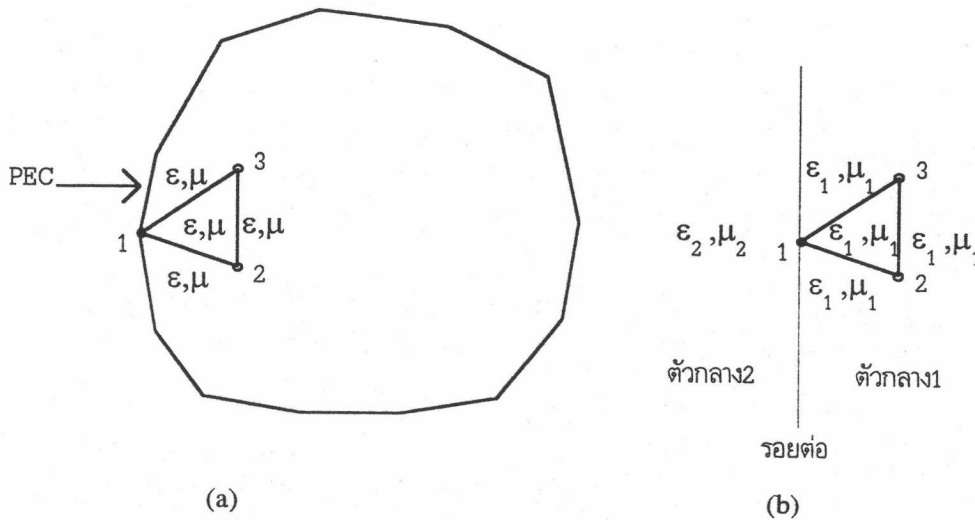
โดย (x_i, y_i) , (x_j, y_j) และ (x_k, y_k) เป็นตำแหน่งพิกัดของโหนด i , j และ k ตามลำดับ เมื่อลำดับของโหนด (i, j, k) คือ $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$ และ $(3, 1, 2)$ สำหรับอีลีเมนต์ตามรูปที่ 3-3

รูปที่ 3-4 แสดงการกระจายสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวาง ด้วยส่วนประกอบในแนวแกน x และ y ที่โหนดทั้งสาม ของอีลีเมนต์ที่ไม่มีโหนดอยู่บนผนังขอบเขตของท่อนำคลื่นและรอยต่อระหว่างตัวกลาง ตามสมการ(3-2a)



รูปที่ 3-4 a) และ b) แสดงการกระจายสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวาง ตามลำดับ ด้วยส่วนประกอบในแนวแกน x และ y ที่โหนดทั้งสาม ตามสมการ(3-2a)

3.3 ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์สำหรับอีลีเมนต์ที่มีโหนดอยู่บนผนังขอบเขตของท่อนำคลื่น หรือบนรอยต่อระหว่างตัวกลางสองชนิด 1 โหนด



รูปที่ 3-5 a) แสดงอีลีเมนต์ที่มีโหนดอยู่บนผนังขอบเขต 1 โหนด และ b) แสดงอีลีเมนต์ที่มีโหนดอยู่บนรอยต่อระหว่างตัวกลางสองชนิด 1 โหนด

รูปที่ 3-5a) แสดงอีลีเมนต์ที่มีโหนดอยู่บนผนังขอบเขต 1 โหนด คือโหนด 1 และมีโหนด 2 และ 3 ไม่อยู่บนผนังขอบเขต และรูปที่ 3-5b) แสดงอีลีเมนต์ที่มีโหนดอยู่บนรอยต่อระหว่างตัวกลางสองชนิด คือโหนด 1 และมีโหนด 2 และ 3 ไม่อยู่บนรอยต่อ สำหรับอีลีเมนต์ประเภทนี้ การกระจายส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวาง E_s และ H_s ที่โหนด 1 ด้วยส่วนประกอบของสนามในแนวแกน x และ y จะมีปัญหาในการหาค่าเงื่อนไขขอบเขตสำหรับท่อนำคลื่นที่มีขอบเป็นเส้นโค้งดังที่ได้อธิบายในบทที่ 2 ในงานวิจัยนี้จึงได้ทำการกระจายสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวาง E_s และ H_s ที่โหนด 1 ด้วยฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ที่มีส่วนประกอบเป็นเวกเตอร์สัมผัสและเวกเตอร์ตั้งฉากของด้าน 1-2 และด้าน 1-3 แทนการกระจายด้วยส่วนประกอบของสนามในแนวแกน x และ y สำหรับโหนด 2 และ 3 ซึ่งไม่อยู่บนผนังขอบเขต เรายังสามารถเขียนสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวาง E_s และ H_s ที่โหนด 2 และ 3 นี้ให้อยู่ในแนวแกน x และ y ได้โดยไม่มีปัญหาเช่นเดียวกับอีลีเมนต์ในหัวข้อ 3.2 เพราะฉะนั้นการกระจายสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวาง E_s และ H_s ภายในอีลีเมนต์ประเภทนี้เป็น

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_s^e(x, y) &= \sum_{j=1}^2 \phi_j \mathbf{L}_j(x, y) + \sum_{i=2}^3 \mathbf{E}_i N_i(x, y) \\
 \mathbf{H}_s^e(x, y) &= \sum_{j=1}^2 \phi_j \mathbf{L}_{Hj}(x, y) + \sum_{i=2}^3 \mathbf{H}_i N_i(x, y)
 \end{aligned} \tag{3-2b}$$

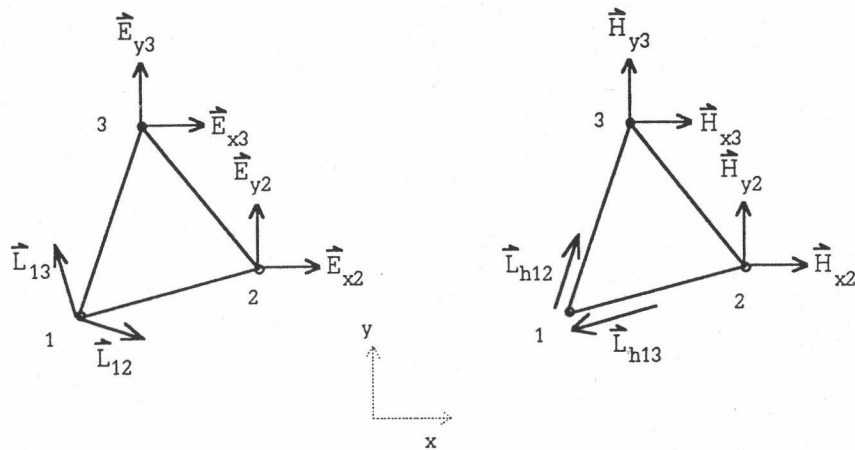
ในพจน์ที่สองของด้านขวาของสมการ (3-2b) เป็นการกระจายสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กด้วยส่วนประกอบในแนวแกน x และ y เช่นเดียวกับในอีลีเมนต์ในหัวข้อที่ 3.2 โดย $E_i = \begin{bmatrix} \alpha_{xi} \\ \alpha_{yi} \end{bmatrix}$ และ $H_i = \begin{bmatrix} \beta_{xi} \\ \beta_{yi} \end{bmatrix}$ เป็นสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่โหนด i และ α_{xi} , α_{yi} , β_{xi} และ β_{yi} เป็นตัวไม่ทราบค่าที่บอกขนาดของส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวแกน x และ y ตามลำดับ และ $N_i(x, y)$ เป็นไปตามสมการ (3-3)

ในพจน์แรกทางด้านขวาของสมการ (3-2b) มี ϕ_j ($j=1,2$) เป็นตัวแปรไม่ทราบค่า ϕ_{12} และ ϕ_{13} ตามลำดับ และ φ_j ($j=1,2$) เป็นตัวแปรไม่ทราบค่า φ_{12} และ φ_{13} ตามลำดับ และฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ L_j ($j=1,2$) คือ L_{12} และ L_{13} ตามลำดับ และฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ L_{hj} ($j=1,2$) คือ L_{h12} และ L_{h13} ตามลำดับ โดยฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์นี้มีสมการคือ

$$L_{ij}(x, y) = \frac{t_{ik} \times i_z}{t_{ij} \cdot (t_{ik} \times i_z)} N_i(x, y) \tag{3-4}$$

$$L_{hij}(x, y) = i_z \times L_{ij}(x, y) \tag{3-5}$$

โดย t_{ij} , t_{ik} เป็นเวกเตอร์สัมผัสของด้าน i-j และ i-k และมีทิศทางจากโหนด i ไปโหนด j และจากโหนด i ไปโหนด k ตามลำดับ i_z เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศแกน z ซึ่งเป็นแนวแกนของท่อนำคลื่น และ $N_i(x, y)$ เป็นไปตามสมการ (3-3)



(a)

(b)

รูปที่ 3-6 a) แสดงทิศทางของ L_{12} และ L_{13} สำหรับการกระจายส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าในแนวแกน E_x ที่โหนด 1 b) แสดงทิศทางของ L_{h12} และ L_{h13} สำหรับการกระจายส่วนประกอบของสนามแม่เหล็กในแนวแกน H_x ที่โหนด 1

รูปที่ 3-6 แสดงทิศทางของฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ L_{12} , L_{13} , L_{h12} และ L_{h13} ในสมการ (3-4) และ (3-5) การใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ในสมการ (3-4) และ (3-5) นี้ จะทำให้สามารถเขียนสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวาง E_{s1} และ H_{s1} ที่โหนด 1 ให้อยู่ ในพจน์ของเวกเตอร์สัมผัสและเวกเตอร์ตั้งฉากของด้าน 1-2 และด้าน 1-3 ซึ่งมี ϕ_{12} , ϕ_{13} , ϕ_{12} และ ϕ_{13} คือ

$$\phi_{12} = \mathbf{i}_z \cdot (\mathbf{n}_{12} \times \mathbf{E}_{s1}) \quad (3-6a)$$

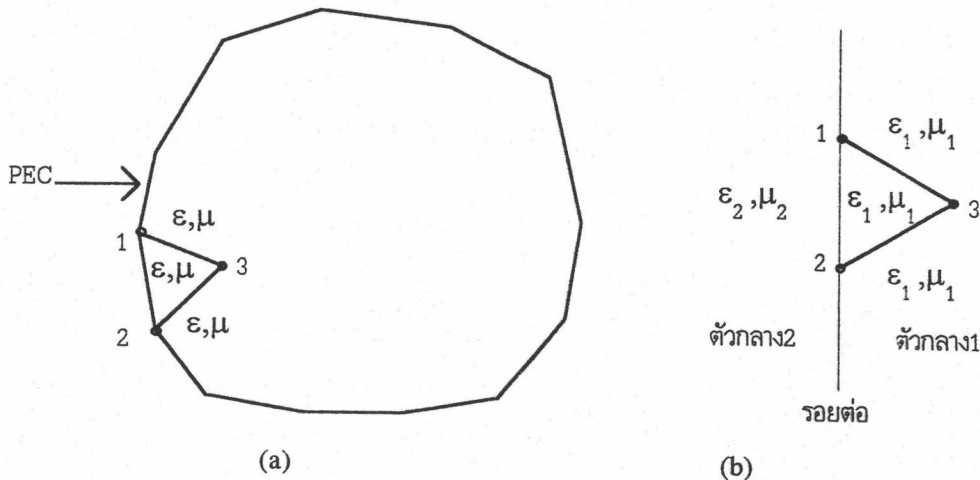
$$\phi_{13} = -\mathbf{i}_z \cdot (\mathbf{n}_{13} \times \mathbf{E}_{s1}) \quad (3-6b)$$

$$\phi_{12} = -\mathbf{n}_{12} \cdot \mathbf{H}_{s1} \quad (3-6c)$$

$$\phi_{13} = \mathbf{n}_{13} \cdot \mathbf{H}_{s1} \quad (3-6d)$$

ϕ_{12} และ ϕ_{13} จะบอกขนาดของส่วนประกอบในแนวสัมผัสของด้าน 1-2 และด้าน 1-3 ของสนามไฟฟ้าในแนวขวางที่โหนด 1 E_{s1} ϕ_{12} และ ϕ_{13} จะบอกขนาดของส่วนประกอบในแนวตั้งฉากของด้าน 1-2 และด้าน 1-3 ของสนามแม่เหล็กในแนวขวางที่โหนด 1 H_{s1}

3.4 ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์สำหรับอีลีเมนต์ที่มีโหนดอยู่บนผนังขอบเขตของท่อ นำคลื่น หรือบนรอยต่อระหว่างตัวกลางสองชนิด 2 โหนด



รูปที่ 3-7 a) แสดงอีลีเมนต์ที่มีโหนดอยู่บนผนังขอบเขต 2 โหนด และ b) แสดงอีลีเมนต์ที่มีโหนดอยู่บนรอยต่อระหว่างตัวกลางสองชนิด 2 โหนด

รูปที่ 3-7a) แสดงอีลีเมนต์ที่มีโหนดอยู่บนผนังขอบเขต 2 โหนด คือโหนด 1 และ 2 และมีโหนด 3 ไม่อยู่บนผนังขอบเขต และรูปที่ 3-7b) แสดงอีลีเมนต์ที่มีโหนดอยู่บนรอยต่อระหว่างตัวกลางสองชนิด 2 โหนด คือโหนด 1 และ 2 และมีโหนด 3 ไม่อยู่บนรอยต่อ สำหรับอีลีเมนต์ประเภทนี้ จะกระจายสนามแม่เหล็กไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวาง E_s และ H_s ที่

โหนด 1 และ 2 ด้วยฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ แทนการกระจายด้วยส่วนประกอบของสนามในแนวแกน x และ y โดยมีเหตุผลเช่นเดียวกับการกระจายด้วยฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ในโหนด 1 ของอีลีเมนต์ในหัวข้อที่ 3.3 และสำหรับโหนด 3 ซึ่งไม่อยู่บนผนังขอบเขต จะใช้การกระจายด้วยส่วนประกอบของสนามในแนวแกน x และ y เพราะฉะนั้นการกระจายสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวาง E_s และ H_s ภายในอีลีเมนต์ประเภทนี้เป็น

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s^e(x, y) &= \sum_{j=1}^4 \phi_j \mathbf{L}_j(x, y) + \mathbf{E}_3 N_3(x, y) \\ \mathbf{H}_s^e(x, y) &= \sum_{j=1}^4 \phi_j \mathbf{L}_{hj}(x, y) + \mathbf{H}_3 N_3(x, y) \end{aligned} \quad (3-2c)$$

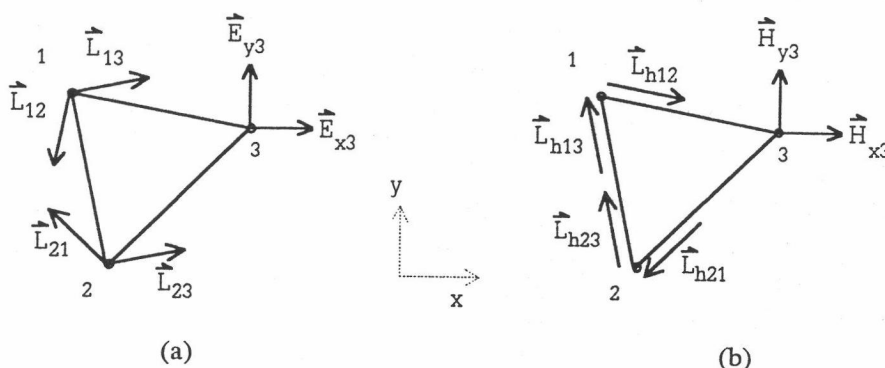
ในพจน์ที่สองของด้านขวาของสมการ (3-2c) เป็นการกระจายสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กด้วยส่วนประกอบในแนวแกน x และ y เช่นเดียวกับในอีลีเมนต์ในหัวข้อที่ 3.2

โดย $\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} \alpha_{x3} \\ \alpha_{y3} \end{bmatrix}$ และ $\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} \beta_{x3} \\ \beta_{y3} \end{bmatrix}$ เป็นสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่โหนด 3 และ α_{x3} ,

α_{y3} , β_{x3} และ β_{y3} เป็นตัวไม่ทราบค่าที่บอกขนาดของส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวแกน x และ y ตามลำดับ และ $N_3(x, y)$ เป็นไปตามสมการ (3-3)

ในพจน์แรกทางด้านขวาของสมการ (3-2c) มี ϕ_j ($j=1...4$) เป็นตัวแปรไม่ทราบค่า ϕ_{12} , ϕ_{13} , ϕ_{21} และ ϕ_{23} ตามลำดับ และ φ_j ($j=1...4$) เป็นตัวแปรไม่ทราบค่า φ_{12} , φ_{13} , φ_{21} และ φ_{23} ตามลำดับ

ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ \mathbf{L}_j ($j=1...4$) คือ \mathbf{L}_{12} , \mathbf{L}_{13} , \mathbf{L}_{21} และ \mathbf{L}_{23} ตามลำดับ และ \mathbf{L}_{hj} ($j=1...4$) คือ \mathbf{L}_{h12} , \mathbf{L}_{h13} , \mathbf{L}_{h21} และ \mathbf{L}_{h23} ตามลำดับ โดยใช้สมการ (3-4) และ (3-5) สำหรับ \mathbf{L}_j และ \mathbf{L}_{hj} ตามลำดับ เช่นเดียวกับอีลีเมนต์ในหัวข้อ 3.3



รูปที่ 3-8 a) แสดงทิศทางของ \mathbf{L}_{12} , \mathbf{L}_{13} , \mathbf{L}_{21} และ \mathbf{L}_{23} สำหรับการกระจายส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าในแนวขวาง E_s ที่โหนด 1 และ 2 b) แสดงทิศทางของ \mathbf{L}_{h12} , \mathbf{L}_{h13} , \mathbf{L}_{h21} และ \mathbf{L}_{h23} สำหรับการกระจายส่วนประกอบของสนามแม่เหล็กในแนวขวาง H_s ที่โหนด 1 และ 2

รูปที่ 3-8 แสดงทิศทางของฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ L_{12} , L_{13} , L_{21} และ L_{23} ตามสมการ (3-4) และ L_{h12} , L_{h13} , L_{h21} และ L_{h23} ตามสมการ (3-5)

เช่นเดียวกับอีลีเมนต์ในหัวข้อที่ 3.3 การใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ในสมการ (3-4) และ (3-5) สำหรับอีลีเมนต์ในหัวข้อนี้ จะทำให้สามารถเขียนสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวาง E_s และ H_s ที่โหนด 1 และ 2 ให้อยู่ในพจน์ของเวกเตอร์สัมผัสและเวกเตอร์ตั้งฉากของด้าน 1-2, ด้าน 2-3 และด้าน 1-3 ซึ่งมี ϕ_{12} , ϕ_{13} , ϕ_{21} , ϕ_{23} , φ_{12} , φ_{13} , φ_{21} และ φ_{23} คือ

$$\phi_{12} = \mathbf{i}_z \cdot (\mathbf{n}_{12} \times \mathbf{E}_{s1}) \quad (3-7a)$$

$$\phi_{13} = -\mathbf{i}_z \cdot (\mathbf{n}_{13} \times \mathbf{E}_{s1}) \quad (3-7b)$$

$$\phi_{21} = -\mathbf{i}_z \cdot (\mathbf{n}_{12} \times \mathbf{E}_{s2}) \quad (3-7c)$$

$$\phi_{23} = \mathbf{i}_z \cdot (\mathbf{n}_{23} \times \mathbf{E}_{s2}) \quad (3-7d)$$

$$\varphi_{12} = -\mathbf{n}_{12} \cdot \mathbf{H}_{s1} \quad (3-7e)$$

$$\varphi_{13} = \mathbf{n}_{13} \cdot \mathbf{H}_{s1} \quad (3-7f)$$

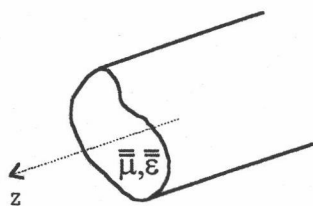
$$\varphi_{21} = \mathbf{n}_{12} \cdot \mathbf{H}_{s2} \quad (3-7g)$$

$$\varphi_{23} = -\mathbf{n}_{23} \cdot \mathbf{H}_{s2} \quad (3-7h)$$

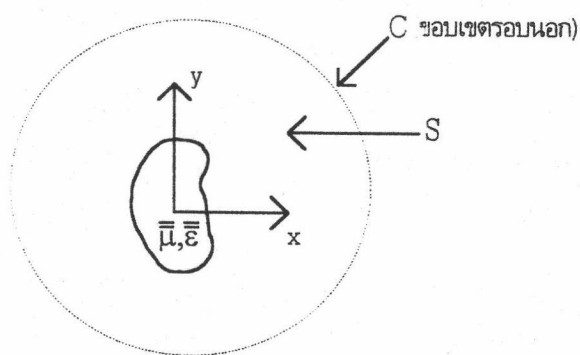
ϕ_{12} และ ϕ_{13} จะบอกขนาดของส่วนประกอบในแนวสัมผัสของด้าน 1-2 และด้าน 1-3 ของสนามไฟฟ้าในแนวขวางที่โหนด 1 \mathbf{E}_{s1} ϕ_{21} และ ϕ_{23} จะบอกขนาดของส่วนประกอบในแนวสัมผัสของด้าน 1-2 และด้าน 2-3 ของสนามไฟฟ้าในแนวขวางที่โหนด 2 \mathbf{E}_{s2} φ_{12} และ φ_{13} จะบอกขนาดของส่วนประกอบในแนวตั้งฉากของด้าน 1-2 และด้าน 1-3 ของสนามแม่เหล็กในแนวขวางที่โหนด 1 \mathbf{H}_{s1} φ_{21} และ φ_{23} จะบอกขนาดของส่วนประกอบในแนวตั้งฉากของด้าน 1-2 และด้าน 2-3 ของสนามแม่เหล็กในแนวขวางที่โหนด 2 \mathbf{H}_{s2}

3.5 การใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ในนิพจน์การแปรผันที่เสนอโดย W.C. Chew และ M.A. Nasir [5]

3.5.1 สมการเมตริกซ์



(a)



(b)

รูปที่ 3-9 a) แสดงท่อนำคลื่นที่วางแนวแกนของท่อในแนวแกน z และ b) แสดงภาคตัดขวางในระนาบ x-y และ แสดงบริเวณพื้นที่ S และ เส้นรอบขอบเขต C

ในบทที่ 2 ได้อธิบายสมการนิพจน์การแปรผันสำหรับท่อนำคลื่นที่วางแนวแกนของท่อในแนวแกน z ตามรูปที่ 3-9 ซึ่งเสนอโดย W.C. Chew และ M.A. Nasir [5] คือ

$$\beta_z^2 = - \frac{\langle \mathbf{H}_s, \mathcal{L} \cdot \mathbf{E}_s \rangle}{\langle \mathbf{H}_s, \mathcal{B} \cdot \mathbf{E}_s \rangle} \quad (2-1)$$

โดยผลคูณภายใน

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{H}_s, \mathcal{L} \cdot \mathbf{E}_s \rangle = & - \int_S dS \mathbf{i}_z \cdot \nabla_s \times \mathbf{E}_s \nu_{zz} \nabla_s \cdot \overset{t}{\mu}_s \cdot \mathbf{H}_s \\ & + \int_S dS \mathbf{i}_z \cdot \nabla_s \times \mathbf{H}_s \kappa_{zz} \nabla_s \cdot \overset{t}{\epsilon}_s \cdot \mathbf{E}_s \end{aligned} \quad (2-2a)$$

$$\begin{aligned} & - \omega^2 \int_S dS \mathbf{i}_z \cdot (\overset{t}{\epsilon}_s \cdot \mathbf{E}_s) \times (\overset{t}{\mu}_s \cdot \mathbf{H}_s) \\ & + \int_C d\mathbf{l} \mathbf{n} \cdot \overset{t}{\mu}_s \cdot \mathbf{H}_s \nu_{zz} \mathbf{i}_z \cdot \nabla_s \times \mathbf{E}_s \\ & - \int_C d\mathbf{l} \mathbf{i}_z \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{H}_s \kappa_{zz} \nabla_s \cdot \overset{t}{\epsilon}_s \cdot \mathbf{E}_s \\ \langle \mathbf{H}_s, \mathcal{B} \cdot \mathbf{E}_s \rangle = & \int_S dS \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_s \end{aligned} \quad (2-2b)$$

\mathbf{E}_s และ \mathbf{H}_s เป็นสนามไฟฟ้าในแนวขวางและสนามแม่เหล็กในแนวขวาง ตามลำดับ

และเมื่อพิจารณาพจน์ที่เป็นอินทิกรัลเชิงเส้นในสมการ (2-2a) คือ

$$\begin{aligned} & + \int_C d\mathbf{l} \cdot \overline{\overline{\mu}}_s \cdot \mathbf{H}_s v_{zz} \mathbf{i}_z \cdot \nabla_s \times \mathbf{E}_s \\ & - \int_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{H}_s \kappa_{zz} \nabla_s \cdot \overline{\overline{\epsilon}}_s \cdot \mathbf{E}_s \end{aligned} \quad (2-3)$$

ในกรณีที่เส้นรอบขอบเขต C นี้ เป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ(perfect electric conductor หรือ PEC) หรือเป็นตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์แบบ(perfect magnetic conductor หรือ PMC) หรือเส้นรอบขอบเขต C นี้อยู่บนรอยต่อระหว่างตัวกลางสองชนิด หรือเส้นรอบขอบเขต C นี้อยู่ที่ระนาบอนันต์ พจน์ที่เป็นอินทิกรัลเชิงเส้น $\int_C d\mathbf{l}$ ในสมการ (2-2a) จะมีค่าเท่ากับ 0 ตามเงื่อนไขขอบเขตที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 2.2 ในบทที่ 2 ทำให้สามารถเขียนสมการ (2-2) ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{H}_s, \mathcal{L} \cdot \mathbf{E}_s \rangle &= - \int_S dS \mathbf{i}_z \cdot \nabla_s \times \mathbf{E}_s v_{zz} \nabla_s \cdot \overline{\overline{\mu}}_s \cdot \mathbf{H}_s \\ & + \int_S dS \mathbf{i}_z \cdot \nabla_s \times \mathbf{H}_s \kappa_{zz} \nabla_s \cdot \overline{\overline{\epsilon}}_s \cdot \mathbf{E}_s \end{aligned} \quad (2-8a)$$

$$- \omega^2 \int_S dS \mathbf{i}_z \cdot (\overline{\overline{\epsilon}}_s \cdot \mathbf{E}_s) \times (\overline{\overline{\mu}}_s \cdot \mathbf{H}_s)$$

$$\langle \mathbf{H}_s, \mathcal{B} \cdot \mathbf{E}_s \rangle = \int_S dS \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_s \quad (2-8b)$$

ซึ่งเมื่อกระจาย \mathbf{E}_s และ \mathbf{H}_s ด้วยสมการ

$$\mathbf{E}_s = \sum_{n=1}^N a_n \mathbf{E}_{ns} \quad \mathbf{H}_s = \sum_{m=1}^N b_m \mathbf{H}_{ms} \quad (2-9)$$

โดย a_n ($n=1..N$) และ b_m ($m=1..N$) เป็นตัวแปรสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการขยาย \mathbf{E}_{ns} ($n=1..N$) และ \mathbf{H}_{ms} ($m=1..N$) ตามลำดับ จะมีสมการเมตริกซ์สำหรับค่าต่ำสุดของนิพจน์การแปรผัน (2-1) คือ

$$\left[\overline{\overline{\mathbf{L}}} + \beta_z^2 \overline{\overline{\mathbf{B}}} \right] \cdot \overline{\mathbf{a}} = 0 \quad (2-15a)$$

$$\left[\overline{\overline{\mathbf{L}}} + \beta_z^2 \overline{\overline{\mathbf{B}}} \right] \cdot \overline{\mathbf{b}} = 0 \quad (2-15b)$$

เมื่อสมาชิกของเมตริกซ์ $\overline{\overline{\mathbf{L}}}$ และ $\overline{\overline{\mathbf{B}}}$ คือ

$$\left[\overline{\overline{\mathbf{L}}} \right]_{mn} = \langle \mathbf{H}_{ms}, \mathcal{L} \cdot \mathbf{E}_{ns} \rangle \quad (2-11a)$$

$$\left[\overline{\overline{\mathbf{B}}} \right]_{mn} = \langle \mathbf{H}_{ms}, \mathcal{B} \cdot \mathbf{E}_{ns} \rangle \quad (2-11b)$$

และสมการ (2-15a) และ (2-15b) นี้มีค่าเจาะจง β_z^2 ที่ใช้ร่วมกัน จึงสามารถเลือกใช้สมการใดสมการหนึ่งเพียงสมการเดียวก็เพียงพอ

การนำฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์มาใช้กับนิพจน์การแปรผันข้างต้นนี้ ผู้ศึกษาในงานวิจัยจะใช้การกระจายสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวาง \mathbf{E}_s และ \mathbf{H}_s ด้วยสมการ (3-2a), (3-2b) และ (3-2c) สำหรับอิลิเมนต์ในหัวข้อ 3.2, 3.3 และ 3.4 ตามลำดับ แทนลงไป ในสมการ (2-9) ซึ่งสมการสำหรับค่าต่ำสุดของนิพจน์การแปรผันยังคงสามารถใช้สมการ (2-15) ได้

เช่นเดิม โดยสมการ (2-15a) เวกเตอร์เจาะจง $\bar{\mathbf{a}}$ จะประกอบด้วยตัวแปรไม่ทราบค่า α_{xi} , α_{yi} และ ϕ_j ของสนามไฟฟ้าในแนวขวาง \mathbf{E}_s และสมการ (2-15b) เวกเตอร์เจาะจง $\bar{\mathbf{b}}$ จะประกอบด้วยตัวแปรไม่ทราบค่า β_{xi} , β_{yi} และ ϕ_j ของสนามแม่เหล็กในแนวขวาง \mathbf{H}_s และสมาชิกเมตริกซ์ $\bar{\mathbf{L}}$ และ $\bar{\mathbf{B}}$ จะมีค่าเป็น

$$[\bar{\mathbf{L}}]_{mn} = \langle \mathbf{H}_{ms}^e, \mathcal{L} \cdot \mathbf{E}_{ns}^e \rangle \quad (3-8a)$$

$$[\bar{\mathbf{B}}]_{mn} = \langle \mathbf{H}_{ms}^e, \mathcal{B} \cdot \mathbf{E}_{ns}^e \rangle \quad (3-8b)$$

โดย \mathbf{E}_{ns}^e และ \mathbf{H}_{ms}^e เป็นสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวางที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ในสมการ (3-2a), (3-2b) และ (3-2c) สำหรับอิลิเมนต์ในหัวข้อ 3.2, 3.3 และ 3.4 ตามลำดับ

3.5.2 การพิจารณาเงื่อนไขขอบเขต

เมื่อนำฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์มาใช้ในการกระจายส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวาง การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตสำหรับสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในแนวขวางที่ผนังท่อนำคลื่นที่เป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ ยังคงจะเป็นไปตามสมการ (2-24) คือ

$$\mathbf{i}_z \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_s) = 0 \quad (2-24a)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_s = 0 \quad (2-24b)$$

เมื่อ \mathbf{n} เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศตั้งฉากกับผนังท่อนำคลื่น และมีเงื่อนไขขอบเขตที่รอยต่อระหว่างตัวกลางสองชนิดยังคงจะเป็นไปตามสมการ (2-25) คือ

$$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2} \quad (2-25a)$$

$$\varepsilon_1 \mathbf{E}_{n1} = \varepsilon_2 \mathbf{E}_{n2} \quad (2-25b)$$

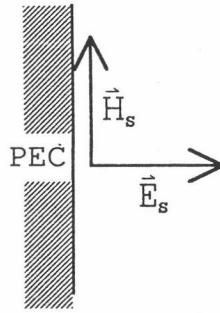
$$\mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2} \quad (2-25c)$$

$$\mu_1 \mathbf{H}_{n1} = \mu_2 \mathbf{H}_{n2} \quad (2-25d)$$

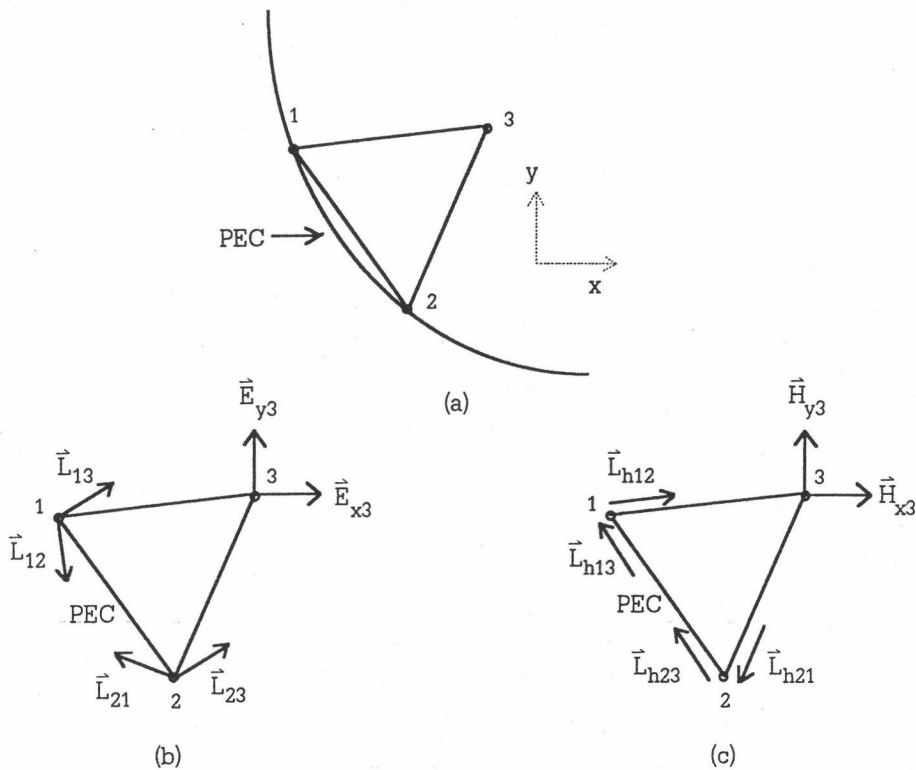
ในที่นี้ ธรรมชาติล่าง t หมายถึงสนามในทิศแนวสัมผัสกับรอยต่อ และธรรมชาติล่าง n หมายถึงสนามในแนวตั้งฉากกับรอยต่อ ธรรมชาติล่าง 1 และ 2 หมายถึงชั้นของตัวกลาง 1 หรือ 2

สมการ (2-24) นี้ จะทำให้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวาง \mathbf{E}_s และ \mathbf{H}_s มีทิศตั้งฉากและขนานกับผนังขอบเขตของท่อนำคลื่นตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 3-10

เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ตามสมการ (3-2) สามารถกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (2-24) ได้ที่อิลิเมนต์ที่มีด้านอยู่ติดกับผนังขอบเขต ซึ่งในที่นี้คืออิลิเมนต์ที่มีโหนดอยู่บนผนังขอบเขต 2 โหนด ที่ได้อธิบายในหัวข้อ 3.4 ในอิลิเมนต์ประเภทนี้จะมีโหนด 1 และ 2 อยู่บนผนังขอบเขต ทำให้ด้าน 1-2 เป็นด้านที่ติดกับผนังขอบเขต ซึ่งจะสามารถกำหนดเงื่อนไขขอบเขตได้ โดยให้ค่าตัวแปร ϕ_j และ ϕ_j สำหรับฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์บางค่ามีค่าเท่ากับ 0

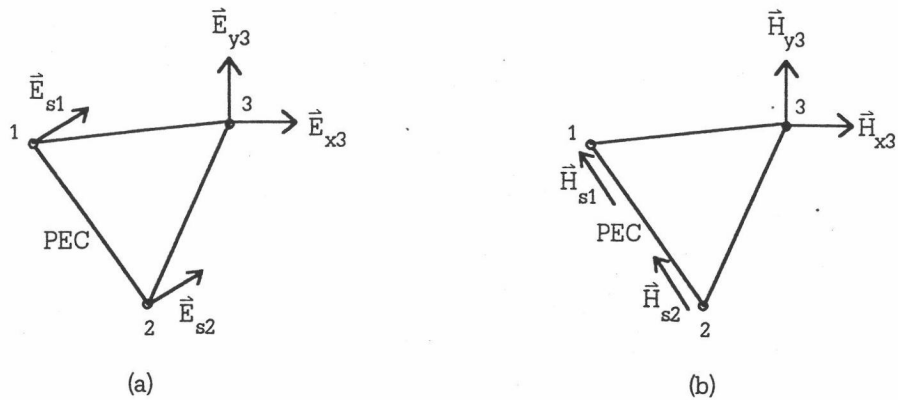


รูปที่3-10 แสดงทิศของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวาง E_s และ H_s ที่ผนังท่อนำคลื่นแบบตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ



รูปที่3-11 a)แสดงอีลีเมนต์ซึ่งมีโหนดหมายเลข 1 และ 2 อยู่บนผนังขอบเขตซึ่งเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ b)แสดงการกระจายส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าในแนวขวาง E_s ที่โหนด 1, 2 และ 3 c)แสดงการกระจายส่วนประกอบของสนามแม่เหล็กในแนวขวาง H_s ที่โหนด 1, 2 และ 3

ตามรูปที่ 3-11 แสดงอีลีเมนต์ซึ่งมีโหนดหมายเลข 1 และ 2 อยู่บนผนังขอบเขต ซึ่งเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ และมีการกระจายสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามสมการ (3-2c) การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตเพื่อให้คำตอบจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตในสมการ (2-24) จะกำหนดโดยให้ตัวแปรสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ L_{12} , L_{21} , L_{h12} และ L_{h21} ได้แก่ ϕ_{12} , ϕ_{21} , ϕ_{h12} และ ϕ_{h21} ตามลำดับ มีค่าเท่ากับ 0 นั่นก็จะเป็นไปตามสมการดังนี้



รูปที่ 3-12 แสดงส่วนประกอบที่เหลือจากการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตสำหรับอีลีเมนต์ในรูปที่ 3-9
 a) แสดงส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าในแนวขวาง E_s ภายหลังจากการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต
 b) แสดงส่วนประกอบของสนามแม่เหล็กในแนวขวาง H_s ภายหลังจากการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต

$$\phi_{12} = 0 \quad (3-9a)$$

$$\phi_{21} = 0 \quad (3-9b)$$

$$\varphi_{12} = 0 \quad (3-9c)$$

$$\varphi_{21} = 0 \quad (3-9d)$$

การกำหนดให้ตัวแปรสัมประสิทธิ์ ϕ_{12} , ϕ_{21} , φ_{12} และ φ_{21} นี้มีค่าเท่ากับศูนย์ จะทำให้ส่วนประกอบของฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ L_{12} , L_{21} , L_{h12} และ L_{h21} ที่โหนด 1 และ 2 ถูกกำจัดไป คงไว้แต่เฉพาะส่วนประกอบของ L_{13} , L_{23} , L_{h13} และ L_{h23} ซึ่งจะหาคำตอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวาง E_s และ H_s สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (2-24)

รูปที่ 3-12 แสดงส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก ภายหลังจากการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตด้วยสมการ (3-9) สมการ (3-9a) และ (3-9b) จะทำให้สนามไฟฟ้าในแนวขวาง E_s ที่ทุกตำแหน่งตลอดด้าน 1-2 ซึ่งเป็นผนังตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต (2-24a) และสมการ (3-9c) และ (3-9d) จะทำให้สนามแม่เหล็กในแนวขวาง H_s ที่ทุกตำแหน่งตลอดด้าน 1-2 ซึ่งเป็นผนังตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตในสมการ (2-24b)

การกำหนดค่าเงื่อนไขขอบเขตด้วยสมการ (3-9) นี้จะทำกับอีลีเมนต์ที่มีโหนดอยู่บนผนังขอบเขต 2 โหนด ที่ได้อธิบายในหัวข้อ 3.4 ทุก ๆ อีลีเมนต์ ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวาง E_s และ H_s จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่ผนังท่อนำคลื่นที่เป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ

3.5.3 การคำนวณหาค่าเงาเงงและเวกเตอร์เงาเงง

จากหัวข้อ 3.5.1 เมื่อใช้การกระจายสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแนวขวาง ด้วยฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์แล้วจะได้สมการเมตริกซ์ (2-15a) และ (2-15b) ซึ่งทั้งสองสมการมีค่าเงาเงง β_z^2 ที่ใช้ร่วมกัน จึงสามารถเลือกใช้สมการใดสมการหนึ่งเพียงสมการเดียวก็เพียงพอในงานวิจัยนี้ ผู้ศึกษาในงานวิจัยได้เลือกใช้สมการ (2-15a) ในการคำนวณ ซึ่งสมการ (2-15a) นี้จะให้ผลเฉลยเวกเตอร์เงาเงง $\bar{\mathbf{a}}$ ที่ประกอบด้วยตัวแปรสัมประสิทธิ์ไม่ทราบค่า α_{xi} , α_{yi} และ ϕ_j ของสนามไฟฟ้า E_x ผลการคำนวณที่ได้จะให้ชุดคำตอบค่าเงาเงง β_z^2 และ เวกเตอร์เงาเงง $\bar{\mathbf{a}}$ เป็นจำนวนเท่ากับขนาดของเมตริกซ์จตุรัส $\bar{\mathbf{L}}$ และ $\bar{\mathbf{B}}$ ในชุดคำตอบทั้งหมดนี้จะมีบางคำตอบเท่านั้นที่เป็นคำตอบของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ส่งผ่านในท่อนำคลื่น โดยเงื่อนไขในการเลือกชุดคำตอบที่เป็นคำตอบของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ส่งผ่านในท่อนำคลื่นนี้คือ

$$\beta_z^2 > 0 \quad (3-10)$$

จากชุดคำตอบที่สอดคล้องกับสมการ (3-10) ค่าเงาเงง β_z^2 จะเป็นค่าคงที่ของการส่งผ่านของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในแต่ละโหมด และเวกเตอร์เงาเงง $\bar{\mathbf{a}}$ ที่สัมพันธ์กับค่าเงาเงง β_z^2 ซึ่งประกอบด้วยตัวแปรสัมประสิทธิ์ α_{xi} , α_{yi} และ ϕ_j จะสามารถนำไปประกอบเป็นแพดเทิร์นของสนามไฟฟ้าในแนวขวาง E_x ได้ โดยสนามไฟฟ้าภายในแต่ละอิลีเมนต์จะมีค่าตามสมการ (3-2a), (3-2b) และ (3-3c) สำหรับอิลีเมนต์ในหัวข้อ 3.2, 3.3 และ 3.4 ตามลำดับ และสำหรับแพดเทิร์นของสนามแม่เหล็กในแนวขวาง H_x ซึ่งสามารถหาได้จากการคำนวณเวกเตอร์เงาเงง $\bar{\mathbf{b}}$ ในสมการ (2-15b) และนำมาประกอบเป็นแพดเทิร์นของสนามแม่เหล็กในแนวขวาง H_x แต่เนื่องจากสมการ (2-15a) และ (2-15b) มีค่าเงาเงงที่ใช้ร่วมกัน เมื่อทราบคำตอบของเวกเตอร์เงาเงง $\bar{\mathbf{a}}$ แล้ว การคำนวณหาเวกเตอร์เงาเงง $\bar{\mathbf{b}}$ จะสามารถทำได้โดยใช้สมการ

$$\bar{\mathbf{b}}_j^t \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{a}}_i = \beta_z^2 \delta_{ij} \quad (3-11)$$

ในที่นี้ ครรชนีล่าง i และ j หมายถึง ค่าเงาเงงและเวกเตอร์เงาเงง ลำดับที่ i และ j ตามลำดับ และ δ_{ij} มีค่าเท่ากับ 1 เมื่อ i เท่ากับ j และ δ_{ij} มีค่าเท่ากับ 0 เมื่อ i ไม่เท่ากับ j สมการ (3-11) สามารถใช้คำนวณหาเวกเตอร์เงาเงง $\bar{\mathbf{b}}$ ได้โดยไม่ต้องใช้สมการ (2-15b) [5]

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์สำหรับเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลคือ โปรแกรม 386-MATLAB เวอร์ชัน 3.5j ในการคำนวณ ในโปรแกรมนี้มี routines สำหรับใช้ในการคำนวณคือ LINPACK และ EISPACK ซึ่งเป็นชุดของขั้นตอนวิธีในการคำนวณเกี่ยวกับเมตริกซ์