



บทที่ 2

วรรณคดี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ผู้วิจัยได้เสนอรายงานการค้นคว้าเกี่ยวกับวรรณคดี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องตามลำดับดังนี้

วรรณคดีที่เกี่ยวข้อง

1.  Joythayapitakadimitasasat

1.1 ความหมายของ Joythayapitakadimitasasat

1.2 ลักษณะของ Joythayapitakadimitasasat ที่น่าสนใจ

1.3 องค์ประกอบที่ช่วยในการแก้ Joythayapitakadimitasasat

2.  การแก้ Joythayapitakadimitasasat โดยใช้สมการ

2.1 ความหมายของสมการ

2.2 การแปลงประโยคภาษา เป็นประโยคสัญลักษณ์

2.3 คุณสมบัติที่ใช้ในการแก้สมการ

2.4 ขั้นตอนในการแก้ Joythayapitakadimitasasat

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1. งานวิจัยในประเทศไทย

2. งานวิจัยในต่างประเทศ

วรรณคดีที่เกี่ยวข้อง

1.  Joythayapitakadimitasasat

1.1  ความหมายของ Joythayapitakadimitasasat

แอนเดอร์สัน และพิงกรี (Anderson and Pingry, 1973)

ได้ให้ความหมายของ Joythayapitakadimitasasat ว่า " เป็นสถานการณ์หรือคำถามที่ต้องการหาข้อสรุปหรือคำตอบซึ่งผู้แก้ปัญหาคงทำได้โดยจะต้องมีกระบวนการที่เหมาะสม ซึ่งใช้ความรู้ ประสบการณ์ การวางแผน และการตัดสินใจประกอบกันไป "

อดัมส์ (Adams, 1977) ได้ให้ความเห็นว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นสถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับปริมาณ และคำตอบที่ต้องการจะเกี่ยวข้องกับปริมาณ โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์นี้รวมถึงปัญหาที่เป็นภาษา (Word Problem) ปัญหาที่เป็นเรื่องราว (Story Problem) และปัญหาที่เป็นคำพูด (Verbal Problem)

มณูญ อรุณไพโรจน์ (2517) ให้ความหมายว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึง สภาพปัญหาทางคณิตศาสตร์ซึ่งประกอบด้วยจำนวนและตัวเลขตลอดจนคำที่มัล้อม ก่อให้เกิดปัญหา ซึ่งนักเรียนจะต้องคิดและตัดสินใจว่า จะใช้วิธีการอะไรทางคณิตศาสตร์ มาแก้ปัญหา นั้น

จากความหมายที่กล่าวมานั้นพอสรุปได้ว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หมายถึงสถานการณ์ที่ประกอบไปด้วยภาษาและตัวเลขที่ต้องการคำตอบ โดยที่ผู้แก้ปัญหา นั้นจะต้องหาวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม เลือก ตัดสินใจและลงมือแก้ปัญหาเอง

#### 1.2 ลักษณะของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ

โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ตรงกับความสนใจของนักเรียนจะทำให้ นักเรียนมีความกระตือรือร้นที่จะแก้ปัญหา นั้น ดังนั้นครูผู้สอนจึงควรที่จะได้ทราบถึงชนิดและ ลักษณะของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ เพื่อที่จะได้นำมาสร้าง เป็นโจทย์ปัญหาสำหรับ ใช้สอนนักเรียน

โคลด์ (Clyde, 1967) ได้กล่าวถึงลักษณะของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ที่น่าสนใจว่าควรมีลักษณะดังนี้

1. มีความใกล้เคียงกับปัญหาในชีวิตประจำวัน และสัมพันธ์กับผู้แก้ปัญหา มากที่สุด โดยอาจเป็น เรื่องราวหรือเหตุการณ์ที่เกิดกับผู้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน หรือลักษณะ คล้ายกับสถานการณ์ในชีวิตจริง
2. สถานการณ์ที่สร้างขึ้น เป็นปัญหาควรใช้ภาษา หรือบรรยายในลักษณะ ที่ผู้แก้ปัญหามีประสบการณ์และไม่ควรเป็นปัญหาธรรมดาทั่ว ๆ ไป

นิพนธ์ จิตต์ภักดี (2517) ได้เสนอแนะวิธีการสร้างโจทย์ปัญหา  
คณิตศาสตร์ที่น่าสนใจไว้ดังต่อไปนี้

1. สร้างโจทย์ปัญหาให้ตรงกับความสนใจของเด็ก โดยใช้ความรู้  
ทางจิตวิทยา และสังเกตความสนใจของเด็กด้วยวิธีการต่าง ๆ ดังนี้

1.1 ให้อาณา

1.2 ให้เลือกของเล่น

1.3 สัมภาษณ์

1.4 ให้เด็กเล่าเรื่องที่สนใจ

2. สร้างโจทย์ปัญหาให้เหมาะสมกับสภาพของท้องถิ่น

3. สร้างโจทย์ปัญหาให้สัมพันธ์กับเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นจริง ๆ

4. สร้างโจทย์ปัญหาให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่าง การบวกกับการลบ

การคูณกับการหาร

5. สร้างโจทย์ปัญหาในหลาย ๆ ลักษณะ เพื่อจะช่วยให้เด็กรู้จัก  
พิจารณาแยกแยะปัญหา และสามารถสร้างโจทย์ปัญหาได้เอง เช่น

5.1 โจทย์ที่ขาดตัวเลข

5.2 โจทย์ที่มีข้อความไม่สมบูรณ์

5.3 โจทย์ที่มีข้อความบางตอนไม่เกี่ยวข้องกับการหาคำตอบ

5.4 โจทย์ที่ขาดคำถาม มีแต่สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

รัสเซลล์ (Russell, 1961) และ เลอบลองค์ (Le Blanc, 1977)

ได้แบ่งลักษณะของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ชนิด คือ

1. โจทย์ที่มีรูปแบบ โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ลักษณะนี้ต้องการคำตอบ  
ที่ถูกต้องเพียงอย่างเดียว ได้แก่ โจทย์ปัญหาที่ปรากฏอยู่ในหนังสือแบบ เรียนและหนังสือทั่ว ๆ ไป  
การหาคำตอบของโจทย์ลักษณะนี้ใช้วิธีการคิดคำนวณทางคณิตศาสตร์โดยตรง เช่น "นายวิชัย  
ต้องการจัดน้อยหน้าจำนวน 486 ผล ใส่กระถงโดยใส่กระถงละ 6 ผล เท่า ๆ กัน อยากรทราบว่า  
จะต้องใส่กระถงกี่ใบ"



2. โจทย์ที่ไม่มีรูปแบบ โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ลักษณะนี้ต้องการให้นักเรียนแสดงกระบวนการหรือขั้นตอนในการหาคำตอบ ซึ่งอาจจะต้องใช้แผนภาพ แผนภูมิหรือรูปภาพประกอบ โจทย์ปัญหาลักษณะนี้จะมีความเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน เช่น "มีผู้ชาย 8 คนในงานเลี้ยง ถ้าผู้ชายคนหนึ่งจะต้องจับมือกันกับคนอื่น ๆ ให้ครบทุกคนแล้ว อยากทราบว่า จะมีการจับมือกันทั้งหมดกี่ครั้ง"

กรุลิคและเรย์ (Kruлик and Reys, 1977) ได้กล่าวถึงการสร้าง โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจว่า ควรคำนึงถึงสิ่งต่อไปนี้

1. ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ของผู้แก้ปัญหา
2. กลวิธีที่ต้องใช้ในการแก้ปัญหา
3. ความสามารถในการใช้ภาษาของผู้แก้ปัญหา

จากข้อความที่กล่าวมาข้างต้นพอสรุปได้ว่า โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจนั้น ควรจะเป็นโจทย์ปัญหาซึ่งแตกต่างไปจากปัญหาที่พบเห็นบ่อย ๆ ในบทเรียน และควรจะมีลักษณะดังนี้

1. เป็นปัญหาที่สัมพันธ์กับผู้แก้ปัญหาและชีวิตประจำวัน
2. เป็นปัญหาที่ใช้ภาษาในลักษณะที่เข้าใจง่าย
3. เป็นปัญหาที่เหมาะสมกับระดับความรู้พื้นฐานของผู้แก้ปัญหา
4. เป็นปัญหาที่มีความยากง่าย เหมาะสมกับผู้แก้ปัญหา
5. เป็นปัญหาที่ให้โอกาสผู้แก้ปัญหาใช้ทักษะเบื้องต้นทั้งสี่ คือ

บวก ลบ คูณ หาร

นอกจากลักษณะของโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ดังกล่าวมาแล้ว เทคนิคอันหนึ่งที่จะช่วยทำให้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์น่าสนใจ คือ การให้นักเรียนได้ช่วยกันสร้างโจทย์ปัญหาขึ้นเอง (Fehr, 1972)

### 1.3 องค์ประกอบที่ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

การแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์นับได้ว่า เป็นปัญหาที่ยากสำหรับนักเรียน ซึ่งครูผู้สอนสามารถพบได้ทั่ว ๆ ไปว่า นักเรียนสามารถที่จะเรียนเลขคณิตประเภททักษะได้ดีกว่า การแก้โจทย์ปัญหา สาเหตุที่เป็น เช่นนี้ เพราะนักเรียนส่วนมากเรียนโจทย์ปัญหาด้วยการท่องจำ โดยนักเรียนจะจำค่าหลักเพื่อใช้บอกวิธีทำ เช่น นักเรียนจะจำคำว่า "รวมกัน" ในโจทย์ปัญหาว่าต้องใช้วิธีบวกในการแก้ปัญหานั้น และถ้าครูสร้างโจทย์ปัญหาที่มีค่าหลักค่าเดียว และวิธีซึ่งใช้หาค่าตอบตรงกับวิธีที่นักเรียนจำ นักเรียนจะสามารถบอกได้ถูกต้องว่า โจทย์ปัญหาข้อนั้น จะใช้วิธีใดเพื่อหาค่าตอบ แต่ถ้าตามเหตุผลแวดล้อมในโจทย์ปัญหาข้อนั้นต้องใช้วิธีอื่นสำหรับหาค่าตอบ นักเรียนจะตอบผิดและถ้าในโจทย์ปัญหามีค่าซึ่งนักเรียนจำเป็นหลักสำหรับวิธีทำอยู่หลายค่า นักเรียนจะเกิดความสับสนมากยิ่งขึ้น

จอห์นสัน และไรซิง (Johnson and Rising, 1969) กล่าวว่า การแก้ปัญหาคือกระบวนการทางสมองที่ซับซ้อน ซึ่งประกอบด้วย

1. การมองเห็นภาพ (Visualizing)
2. การจินตนาการ (Imagining)
3. การจัดกระทำอย่างมีทักษะ (Manipulating)
4. การวิเคราะห์ (Analyzing)
5. การสรุปในเชิงนามธรรม (Abstracting)
6. การเชื่อมโยงความคิด (Associating Ideas)

เฮนนี่ (Henney, 1971) ได้ศึกษาถึงองค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อความสำเร็จในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ พบว่า องค์ประกอบที่สำคัญประกอบด้วย

1. ความสามารถในการเข้าใจคำพูด
2. ความเข้าใจแนวคิดของปัญหา
3. การตีความของปัญหา อย่างมีเหตุผล
4. การคิดคำนวณ

ไฮเมอร์ และทรูบลัด (Heimer and Trueblood, 1977) ได้กล่าวถึง องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. เทคนิคการรู้ค่าศัพท์ การรู้ค่าศัพท์ในโจทย์คำถาม จะช่วยให้นักเรียนมองเห็นแนวทางในการแก้ปัญหา ครูอาจช่วยฝึกฝนให้นักเรียนได้มีความรู้ค่าศัพท์ทางคณิตศาสตร์เพิ่มมากขึ้น โดยจัดหาเกม หรือกิจกรรมที่ส่งเสริมการใช้คำศัพท์มาให้เป็น
2. ทักษะการคำนวณ ครูควรช่วยให้นักเรียนได้ฝึกฝนในด้านนี้
3. การแยกแยะข้อมูล ที่ไม่เกี่ยวข้อง
4. การหาความสัมพันธ์ของข้อมูล
5. การคาดคะเนคำตอบ
6. การเลือกใช้วิธีจัดกระทำกับข้อมูลอย่างถูกต้อง
7. ความสามารถในการหาข้อมูล เพิ่มเติม
8. การแปลความหมายของโจทย์

ซาลิวสกี (Zalewski, 1987) ไคลด์ (Clyde, 1967)

ได้ทำการศึกษาและพบว่า องค์ประกอบที่ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียน ประกอบด้วย

1. ความเข้าใจในการอ่านค่าศัพท์ การตีความกราฟและตาราง
2. ความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์
3. ความสามารถในการเข้าใจสัญลักษณ์
4. การรวบรวมข้อมูลอย่างมีระบบ
5. ประสบการณ์ในการแก้ปัญหา
6. ความสามารถในการคำนวณ

นอกจากองค์ประกอบดังกล่าวมาแล้ว เทราต์แมนและลิชเตนเบิร์ก (Troutman and Lichtenberg, 1974) บรुकเนอร์และกรอสส์นิกเกิล (Bruckner and Grossnickle, 1974) และนิพนธ์ จิตต์ภักดี (2517) ยังได้เสนอแนะความสามารถเฉพาะที่ส่งผลในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ดังต่อไปนี้

1. ความสามารถในการแปลประโยคภาษาคณิตศาสตร์เป็นประโยคสัญลักษณ์
2. ความสามารถในการหาลักษณะที่เหมือนกันและต่างกันในโจทย์ปัญหา
3. ความสามารถในการวิเคราะห์ปัญหา
4. ความสามารถในการวางหลักเกณฑ์ทั่ว ๆ ไป
5. ความสามารถในการกะประมาณคำตอบ

ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ต้องอาศัยองค์ประกอบหลายอย่างช่วยให้การแก้ปัญหาประสบผลสำเร็จ องค์ประกอบต่าง ๆ ที่มีส่วนช่วยในการแก้ปัญหา นั้น ควรได้รับการสอน และฝึกฝน พัฒนา ดังที่คณะกรรมการพัฒนาการสอน และผลิตภัณฑวัสดุอุปกรณ์การสอนคณิตศาสตร์ (2525) ได้กล่าวว่า การที่นักเรียนจะมีความสามารถในการแก้ปัญหาได้ นักเรียนควรจะต้องได้รับการฝึกฝนให้มีความรู้ ความสามารถพื้นฐาน และมีองค์ประกอบในด้านเจตคติที่จะช่วยเป็นพลังที่สำคัญยิ่ง ในการแก้ปัญหา ดังต่อไปนี้

1. มีความรู้เกี่ยวกับเนื้อหา มีความเข้าใจ มีมโนคติ และทักษะในเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับปัญหานั้น ๆ
2. มีความสามารถในการอ่าน การแปลความ การตีความ และการขยายความ
3. มีความสามารถในการแปลงข้อความ เป็นสัญลักษณ์ หรือแผนภาพ
4. มีความสามารถในการวิเคราะห์ ความเกี่ยวข้องระหว่างข้อมูลกับประสบการณ์เก่า
5. มีความสามารถในการจัดระบบข้อมูล จัดลำดับขั้นตอน การวิเคราะห์หารูปแบบและการหาข้อสรุป
6. ความไม่ใจใคร่รู้ มีความกระตือรือร้น อยากรู้ อยากเห็น
7. มีศรัทธา มีกำลังใจ และมีความอดทน ในการคิดแก้ปัญหา

จากผลการศึกษาตามที่กล่าวมาข้างต้นอาจสรุปได้ว่า องค์ประกอบหรือ สิ่งที่มีอิทธิพลต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย ความสามารถ ทางสติปัญญา เช่น ความสามารถในการคิดวิเคราะห์วิจารณ์ต่าง ๆ และสิ่งที่มีอิทธิพลต่อ ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์อีก ก็คือ ความสามารถในการอ่าน คือ อ่านแล้วสามารถ แปลความ ตีความ และขยายความได้ ประสบการณ์ในการแก้ปัญหา นอกจากนี้ยังมีทักษะในการคำนวณเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย

## 2. การแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้สมการ

### 2.1 ความหมายของสมการ

ได้มีผู้ให้ความหมายของสมการไว้ดังนี้

มุลเลอร์ (Mueller, 1972) ได้ให้ความหมายของสมการไว้ว่า "สมการ หมายถึง ประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่แสดงถึงการเท่ากันของนิพจน์สองนิพจน์ (Expression)

รีส, สปาร์ค และ รีส (Rees, Sparks and Rees, 1978) ได้กล่าวว่า "สมการ หมายถึง ประโยคสัญลักษณ์ที่แสดงถึงการเท่ากันของนิพจน์สองนิพจน์ แต่ละนิพจน์เรียกว่า สมาชิกของสมการ" (Member of the Equation)

โกรซา (Groza, 1983) ได้ให้ความหมายของสมการไว้ว่า "สมการ หมายถึง ประโยคคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปของ  $A=B$  และสมการไม่จำเป็นต้องเป็น ประโยคคณิตศาสตร์ที่เป็นจริงเสมอไป" เช่น

$2 + 4 = 6$	เป็นจริง
$7 - 3 = 8$	เป็นเท็จ
$x + 5 = 5 + x$	เป็นจริงทุกค่าของ $x$
$x + 5 = x + 1$	เป็นเท็จทุกค่าของ $x$
$x + 5 = 9$	เป็นจริงสำหรับบางค่าของ $x$ และ เป็นเท็จสำหรับบางค่าของ $x$



จากค่ากล่าวข้างต้นสรุปได้ว่า สมการ หมายถึง ประโยคสัญลักษณ์  
ที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ของนิพจน์สองนิพจน์ โดยมีสัญลักษณ์ " = " บอกความสัมพันธ์ของนิพจน์ เช่น

$$2 + 3 = 5$$

$$x + 2 = 8$$

## 2.2 การแปลงประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์

การแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้สมการนั้น ความสามารถในการ  
แปลงประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ เป็นขั้นตอนที่สำคัญยิ่งดังความเห็นของ  
มุลเลอร์ (Mueller, 1972) ที่กล่าวว่า "การใช้สมการช่วยในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์  
ประกอบด้วยกระบวนการสำคัญ 2 ประการคือ การแปลงโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ให้อยู่ในรูป  
ของประโยคทางพีชคณิต หรือสมการ และการแก้สมการ โดยใช้วิธีการทางพีชคณิต และเขา  
ได้สรุปว่า กระบวนการแปลงโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ให้เป็นสมการ เป็นกระบวนการที่ยากกว่า  
กระบวนการแก้สมการ

การเปลี่ยนข้อความทางคณิตศาสตร์ให้เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์  
โกรซา (Groza, 1983) ได้เสนอในรูปแบบของตารางตามลักษณะของปัญหาดังนี้

ตารางที่ 1 ปัญหาเกี่ยวกับจำนวน

ข้อความ	เขียน เป็นสัญลักษณ์
a บวก b	
ผลบวกของ a และ b	
a รวมกับ b	$a+b$
a เพิ่มขึ้น b	
a ลบ b	
ผลต่างของ a และ b	
b ลบด้วย a	$a-b$
a ลดลง b	
a เท่าของ b	
ผลคูณของ a และ b	$ab$
a คูณด้วย b	
2 เท่าของ x	$2x$
ครึ่งหนึ่งของ x	$\frac{x}{2}$
หนึ่งในสามของ x	$\frac{x}{3}$
สามในห้าของ x	$\frac{3x}{5}$
a ทหารด้วย b	
a แบ่งออก b	$\frac{a}{b}$
อัตราส่วนของ a ต่อ b	

ตารางที่ 2 ปัญหาเกี่ยวกับจำนวนเต็ม เมื่อ  $x$  แทนจำนวนเต็มใด ๆ

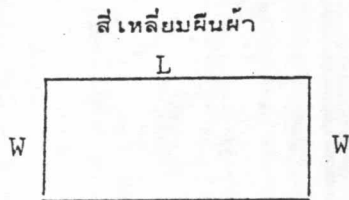
ข้อความ	เขียนเป็นสัญลักษณ์
จำนวนเต็มสองจำนวนเรียงกัน	$x, x + 1$
จำนวนเต็มสามจำนวนเรียงกัน	$x, x + 1, x + 2$
จำนวนเต็มสี่จำนวนเรียงกัน	$x, x + 1, x + 2, x + 3$
จำนวนเต็ม คู่ สองจำนวนเรียงกัน	$x, x + 2$
จำนวนเต็ม คู่ สองจำนวนเรียงกัน	$x, x + 2$
จำนวนเต็ม คู่ สามจำนวนเรียงกัน	$x, x + 2, x + 4$
จำนวนเต็ม คู่ สามจำนวนเรียงกัน	$x, x + 2, x + 4$
จำนวนเต็ม คู่ (หรือคู่) สี่จำนวนเรียงกัน	$x, x + 2, x + 4, x + 6$

ตารางที่ 3 ปัญหาเกี่ยวกับอายุ

ข้อความ	เขียนเป็นสัญลักษณ์
อายุมากกว่า $x$ อยู่ 5 ปี	$x + 5$
อายุน้อยกว่า $x$ อยู่ 5 ปี	$x - 5$
อีก 10 ปีข้างหน้า (ถ้าปัจจุบันอายุ $x$ ปี)	$x + 10$
เมื่อ 8 ปีที่แล้ว (ถ้าปัจจุบันอายุ $x$ ปี)	$x - 8$

ตารางที่ 4 ปัญหาเกี่ยวกับรูปเรขาคณิต

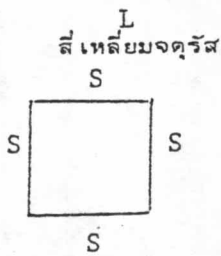
การแก้ไขโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ โดยใช้สมการเกี่ยวกับรูปเรขาคณิตให้ใช้วิธีการ  
วาดรูปประกอบ เขียนตัวเลขกำกับด้านแต่ละด้านของรูป และแทนค่าในสูตร ดังนี้



สูตร

$$\text{เส้นรอบรูป} = 2L + 2W$$

$$\text{พื้นที่} = Lw$$

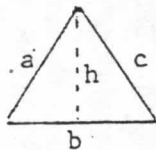


สูตร

$$\text{เส้นรอบรูป} = 4S$$

$$\text{พื้นที่} = S^2$$

สามเหลี่ยม (ด้าน)

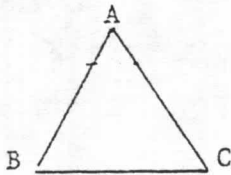


สูตร

$$\text{เส้นรอบรูป} = a + b + c$$

$$\text{พื้นที่} = \frac{bh}{2}$$

สามเหลี่ยม (มุม)



สูตร

$$A + B + C = 180$$

2.3 คุณสมบัติที่ใช้ในการแก้สมการ

คุณสมบัติพื้นฐานที่ใช้ในการแก้สมการเป็นดังนี้ (สถาบันส่งเสริมการสอน  
วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2532)

2.3.1 คุณสมบัติสมมาตร ซึ่งกล่าวว่า

ให้  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนใด ๆ

ถ้า  $a = b$  แล้ว  $b = a$

2.3.2 คุณสมบัติถ่ายทอด ซึ่งกล่าวว่า

ให้  $a$ ,  $b$  และ  $c$  แทนจำนวนใด ๆ

ถ้า  $a = b$  และ  $b = c$  แล้ว  $a = c$

### 2.3.3 คุณสมบัติการบวก ซึ่งกล่าวว่า

ถ้ามีจำนวนสองจำนวนเท่ากัน นำจำนวนอีกจำนวนหนึ่งมาบวก  
แต่ละจำนวนที่เท่ากันนั้น ผลลัพธ์จะเท่ากัน

เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

ให้  $a, b$  และ  $c$  แทนจำนวนใด ๆ

ถ้า  $a = b$  แล้ว  $a + c = b + c$

### 2.3.4 คุณสมบัติการคูณ ซึ่งกล่าวว่า "ถ้ามีจำนวนสองจำนวนเท่ากัน

นำจำนวนอีกจำนวนหนึ่งคูณกับแต่ละจำนวนที่เท่ากัน ผลลัพธ์จะเท่ากัน

เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

ให้  $a, b$  และ  $c$  แทนจำนวนใด ๆ

ถ้า  $a = b$  แล้ว  $ac = bc$

## 2.4 ขั้นตอนในการแก้โจทย์สมการ

สำหรับขั้นตอนต่าง ๆ ในการแก้โจทย์สมการ ได้มีผู้เสนอวิธีการ  
ไว้ดังนี้

เฮลตัน (Helton, 1958) ได้ให้ข้อเสนอเกี่ยวกับขั้นตอนในการแก้  
โจทย์สมการไว้ดังนี้

1. อ่านโจทย์ให้เข้าใจ เพื่อหาว่าโจทย์ต้องการอะไร ต้องการ  
ให้หาตัวไม่ทราบค่าเพียงตัวเดียวหรือมากกว่านั้น
2. กำหนดสัญลักษณ์เป็นตัวแทนของตัวไม่ทราบค่า
3. หาความสัมพันธ์ของจำนวนต่าง ๆ ที่สอดคล้องกับโจทย์
4. เขียนสมการ
5. แก้สมการ
6. ให้ความหมายของคำตอบ เช่น บอกหน่วย
7. ตรวจสอบคำตอบ



รัสเซลล์ (Russell, 1961) กล่าวว่า วิธีการที่ช่วยให้การแก้ปัญหา  
โจทย์สมการได้ดีควรปฏิบัติดังนี้

1. เรียนรู้ให้เข้าใจอย่างถูกต้องถึงวิธีการแก้โจทย์สมการ
2. เรียนรู้การวิเคราะห์ โจทย์ปัญหาอย่างระมัดระวัง ทุกแง่ทุกมุม
3. เรียนรู้ที่จะ เขียนสมการจากข้อมูลที่โจทย์กำหนดมาให้ถูกต้อง

และยังได้ เน้นย้ำว่า สิ่งสำคัญที่จะต้องกระทำในการแก้โจทย์สมการคือ

- 3.1 การสร้างสมการ
- 3.2 การแก้สมการ

เมื่อพิจารณาจากการแก้ปัญหาโจทย์สมการของนักเรียนโดยทั่วไป  
แล้วจะพบว่าลำดับขั้นตอนในการแก้ปัญหาที่นักเรียนคิดว่ายากที่สุดคือ การสร้างสมการให้ถูกต้อง

นอกจากนี้ รัสเซลล์ (Russell, 1961) ยังได้เสนอขั้นตอนในการแก้  
ปัญหาโจทย์สมการ ไว้ดังนี้

1. สมมุติสัญลักษณ์แทนตัวไม่ทราบค่าในโจทย์
2. พยายามเขียน หรือ แสดงพจน์ของตัวไม่ทราบค่าตัวอื่นในรูปของ

ตัวไม่ทราบค่าตัวแรที่กำหนด

3. เขียนสมการให้ถูกต้อง โดยอาศัยความสัมพันธ์ของข้อมูล
4. แก้สมการ
5. ตรวจสอบคำตอบว่าเป็นไปตามเงื่อนไขของโจทย์หรือไม่

ดอลเซียณี และคนอื่น ๆ (Dolciani and Others, 1967)

ได้กล่าวถึงขั้นตอนในการแก้โจทย์สมการไว้ดังนี้

1. ทำความเข้าใจโจทย์
2. โจทย์บอกอะไร สมมุติสัญลักษณ์ แทนตัวไม่ทราบค่าได้อย่างไร

และอธิบายสัญลักษณ์นั้นอย่างไร

3. สามารถเขียนออกมาเป็นภาพ เพื่อช่วยให้เข้าใจชัดเจนขึ้นได้หรือไม่
4. ข้อเท็จจริงที่โจทย์ให้มา มีความสัมพันธ์กับสิ่งที่ต้องการหาอย่างไร

จะเขียนอย่างไร

5. แก้วสมการ
6. ตรวจสอบคำตอบ

มุลเลอร์ (Mueller, 1972) ได้เสนอขั้นตอนในการแก้ไขโจทย์

สมการไว้ดังนี้

1. พิจารณาว่า โจทย์ให้หาอะไร ตัวไม่ทราบค่าคืออะไร แล้วสมมติตัวแปรแทนตัวไม่ทราบค่านั้น

ที่โจทย์ให้มา

2. หาความสัมพันธ์ระหว่างตัวที่ทราบค่ากับตัวไม่ทราบค่า จากข้อมูล
3. เขียนสมการ แสดงความสัมพันธ์จากข้อมูลในขั้นที่ 2
4. แก้วสมการ เพื่อหาค่าของตัวแปรจากขั้นที่ 3
5. ตรวจสอบคำตอบ โดยใช้คำตอบจากขั้นที่ 4

โมเชอร์ (Mosher, 1974) ได้เสนอขั้นตอนในการแก้โจทย์สมการ

ไว้ดังนี้

1. อ่านโจทย์ให้ละเอียดรอบคอบ ถ้าเป็นไปได้ควรวาดรูปประกอบ
2. ทำความเข้าใจว่าโจทย์ให้หาอะไร
3. สมมติตัวแปรแทนตัวที่โจทย์ต้องการให้หา
4. เขียนปริมาณอื่น ๆ ในรูปของตัวแปรจากขั้นที่ 3
5. หาความสัมพันธ์ที่เท่ากันของปริมาณ 2 ปริมาณ
6. นำปริมาณ 2 ปริมาณนั้นมาเขียนให้อยู่ในรูปของสมการ
7. แก้วสมการ
8. ตรวจสอบคำตอบว่าถูกต้องหรือไม่ สอดคล้องกับเงื่อนไขที่โจทย์

กำหนดหรือไม่

แมสซิง และ แซนเดอร์ (Massing and Sanders, 1977)

ได้เสนอขั้นตอนการแก้โจทย์สมการไว้ดังนี้

1. อ่านโจทย์ให้ละเอียดรอบคอบว่าโจทย์ให้หาอะไร
2. สมมุติสิ่งที่โจทย์ให้หาว่าต้องการอะไร
3. เขียนสมการโดยใช้ข้อมูลที่โจทย์ให้มา
4. แก้สมการ
5. ตรวจสอบคำตอบ

จากขั้นตอนดังกล่าวข้างต้น จึงพอจะสรุปได้ว่า ขั้นตอนของการแก้  
โจทย์สมการประกอบด้วยขั้นตอนต่อไปนี้

1. ตีความและทำความเข้าใจโจทย์
2. ใช้ตัวแปรแทนตัวไม่ทราบค่า
3. เขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ตามที่โจทย์กำหนด
4. แก้สมการหาคำตอบ
5. ตรวจสอบคำตอบ

### งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องโดยตรงกับการศึกษาความสามารถในการแก้โจทย์สมการ  
ของนักเรียนในระดับมัธยมศึกษา ยังไม่ปรากฏว่ามีผู้ใดเคยทำการศึกษามาก่อน เท่าที่ศึกษา  
พบว่า ส่วนใหญ่ เป็นงานวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับ องค์ประกอบที่มีอิทธิพลต่อความสามารถในการ  
แก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ในลักษณะของการหาความสัมพันธ์ และการเปรียบเทียบการสอน  
ผู้วิจัยจึงได้เสนองานวิจัยในลักษณะดังกล่าว อันจะเป็นแนวทางในการวิจัยดังนี้

#### 1. งานวิจัยในประเทศ

บุหงา วัฒนะ (2515) ได้ทำการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหา  
ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ระหว่างนักเรียนที่เรียนคณิตศาสตร์แนวใหม่  
กับนักเรียนที่ไม่ได้เรียนคณิตศาสตร์แนวใหม่ ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3  
สังกัดกรมสามัญศึกษาส่วนกลางซึ่งเรียนคณิตศาสตร์แนวใหม่เป็นกลุ่มทดลอง ได้แก่ โรงเรียนพญาไท  
โรงเรียนทีบุลอุปถัมภ์และโรงเรียนวัดเวตวันธรรมมาเวส รวมทั้งสิ้น 131 คน และใช้นักเรียน



ที่ไม่ได้เรียนคณิตศาสตร์แนวใหม่ เป็นกลุ่มควบคุมซึ่งได้แก่ นักเรียนโรงเรียนวัดมหาบุศย์ โรงเรียนวัดชนะสงคราม จำนวน 138 คน เครื่องมือที่ใช้ได้แก่ แบบทดสอบวัดความสามารถ ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า

1. โดยทั่ว ๆ ไปนักเรียนที่เรียนคณิตศาสตร์แนวใหม่กับนักเรียนที่ไม่ได้เรียนคณิตศาสตร์แนวใหม่ มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกัน
2. เมื่อใช้ครูผู้สอนเหมือนกัน ประสบการณ์การสอนใกล้เคียงกันทำการสอนปรากฏว่านักเรียนที่เรียนคณิตศาสตร์แนวใหม่มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ไม่ได้เรียนคณิตศาสตร์แนวใหม่ และเมื่อพิจารณาแยกตามชนิดของปัญหาพบว่านักเรียนที่เรียนคณิตศาสตร์แนวใหม่มีความสามารถในการวิเคราะห์ปัญหาสูงกว่านักเรียนที่ไม่ได้เรียนคณิตศาสตร์แนวใหม่ ส่วนความสามารถในการคำนวณและวิธีการแก้ปัญหานักเรียนทั้งสองกลุ่มมีความสามารถไม่แตกต่างกัน

วรรณดี วรรณศิลป์ (2522) ได้ศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถ ในการแก้ปัญหากับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 พบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหของนักเรียน มีความสัมพันธ์ในทางบวกกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และคะแนนความสามารถ ในการแก้ปัญหของนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง และนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

อานวย เลิศชัยนติ (2523) ได้ศึกษาเพื่อหาความสัมพันธ์ ระหว่างความสามารถทางสมองกับความสามารถทางด้านการคิดแก้ปัญหาในวิชาคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ของโรงเรียนรัฐบาลในกรุงเทพมหานคร ปีการศึกษา 2522 จำนวน 420 คน โดยแบ่งความสามารถทางสมองออกเป็น 2 ส่วน คือ ความถนัดทางการเรียนและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยคือ แบบทดสอบวัดความถนัดทางการเรียน จากแบบสอบถาม สอบมาตรฐาน ของสำนักทดสอบมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร 10 ประเภท แบบสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ที่ผู้วิจัยได้สร้างขึ้นจากเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ค 101 เพื่อวัดตามพฤติกรรมการเรียนรู้ และแบบสอบถามวัดความสามารถในการแก้ปัญหทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อวัดตามขั้นตอนการแก้ปัญหทางคณิตศาสตร์ ในเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์

ค.101 ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถทางการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และ ความสามารถทางสมองมีความสัมพันธ์กันสูงมาก ( $R = .7474$ ) และความสามารถทางการคิดแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ มีความสัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ และความถนัดทางการเรียนสูงมาก ( $R = .745$  และ  $.529$  ตามลำดับ)

จรรยา ภูอุดม (2524) ได้ศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน โดยใช้กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ปีการศึกษา 2523 ของโรงเรียนสังกัดกรมสามัญศึกษา จำนวน 6 โรงเรียน เป็นนักเรียนชาย 235 คน หญิง 190 คน พบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ มีความสัมพันธ์ในทางบวก กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยเฉลี่ย และมีค่าสัมประสิทธิ์ระหว่าง  $.486$  ถึง  $.618$  ส่วนค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์กับวิชาคณิตศาสตร์มีค่าระหว่าง  $.373$  ถึง  $.672$  และพบว่า นักเรียนที่มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้สูง กับนักเรียนที่มีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ต่ำ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ  $.01$  และพบว่านักเรียนชายกับนักเรียนหญิง มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ

บุญรวย ชูรักษา (2524) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเข้าใจในการอ่านกับการแก้โจทย์ปัญหา เลขคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 จังหวัดสุราษฎร์ธานี พบว่า ความเข้าใจในการอ่าน กับการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ มีความสัมพันธ์กันในทางบวก มีระดับนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ  $.01$  ความสัมพันธ์ระหว่างความเข้าใจในการอ่านกับความเข้าใจ โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ พบว่า มีความสัมพันธ์กันในทางบวก มีระดับนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ  $.01$  และความสัมพันธ์ระหว่างความเข้าใจในการอ่านกับการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เฉพาะการ คิดคำนวณ พบว่า มีความสัมพันธ์ต่อกันในทางบวก มีระดับนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ  $.01$

จันทร์เพ็ญ ธนาหุภกรกุล (2526) ได้ศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่าง ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ความคิดสร้างสรรค์เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 กลุ่มตัวอย่างเป็น นักเรียนสังกัดกรมสามัญศึกษาในจังหวัดพระนครศรีอยุธยา ประจำปีการศึกษา 2525 จำนวน 580 คน ผลปรากฏว่า ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการแก้ปัญหาทาง

คณิตศาสตร์ ความคิดสร้างสรรค์ และ เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน  
คณิตศาสตร์ มีค่าเท่ากับ .74328, .48520 และ .41494 ตามลำดับ ซึ่งทุกค่ามีนัยสำคัญ  
ทางสถิติที่ระดับ .01 และตัวแปรทั้งสามร่วมกันพยากรณ์ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์  
ของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ได้

พรทิพย์ พรหมสาขา ณ สกลนคร (2527) ได้เปรียบเทียบผลการสอนที่มีต่อ  
ความสามารถในการแก้ปัญหา และ ความวิตกกังวลในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา  
ปีที่ 2 เรื่อง โจทย์สมการ พบว่า

1. นักเรียนที่ได้รับการสอนแก้ปัญหาโจทย์ตามคู่มือครู นักเรียนที่ได้รับการสอนเน้นทักษะการแปลความหมายโจทย์ แก้ปัญหาโดยตารางวิเคราะห์ และนักเรียนที่ได้รับการสอนเน้นทักษะการแปลความหมายโจทย์ และแก้ปัญหาโดยอิสระ มีความสามารถในการแก้ปัญหาแตกต่างกัน มีระดับนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01
2. นักเรียนที่ได้รับการสอนแก้ปัญหาโจทย์ตามคู่มือครู และนักเรียนที่ได้รับการสอนเน้นทักษะการแปลความหมายโจทย์ และแก้ปัญหาโดยตารางวิเคราะห์ มีความสามารถในการแก้ปัญหาแตกต่างกัน มีระดับนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01
3. นักเรียนที่ได้รับการสอนแก้โจทย์ตามคู่มือครู และนักเรียนที่ได้รับการสอนเน้นทักษะการแปลความหมายโจทย์ และแก้ปัญหาโดยอิสระ มีความสามารถในการแก้ปัญหาแตกต่างกัน มีระดับนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01
4. นักเรียนที่ได้รับการสอนเน้นทักษะการแปลความหมายโจทย์ และแก้ปัญหาโดยตารางวิเคราะห์ และนักเรียนที่ได้รับการสอนเน้นทักษะการแปลความหมายโจทย์ และแก้ปัญหาโดยอิสระมีความสามารถในการแก้ปัญหาไม่แตกต่างกัน

## 2. งานวิจัยในต่างประเทศ

เบโล (Balow, 1964) ได้ทำการศึกษาถึงความสำคัญของความสามารถในการอ่านและความสามารถในการคิดคำนวณ ที่มีผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีการวิเคราะห์ความแปรปรวนและการควบคุมระดับสถิติปัญญากับนักเรียนจำนวน 468 คน ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์จะเพิ่มขึ้นถ้าความสามารถในการอ่านและความสามารถในการคิดคำนวณเพิ่มขึ้น

จอห์นสัน (Johnson, 1966) ได้ศึกษาเรื่อง ผลของการสอนคำศัพท์ที่มีต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ โดยทำการศึกษากับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 7 จำนวน 28 ห้องเรียน แบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 316 คน กลุ่มควบคุม 282 คน โปรแกรมการสอนนักเรียนทั้งสองกลุ่มประกอบด้วย เรื่อง ทศนิยม ร้อยละ การวัดและกราฟ ใช้เวลาในการทดลอง 14 สัปดาห์ ซึ่งแบ่งเป็น 3 ระยะ แต่ละระยะมีการทดสอบคำศัพท์และการแก้ไขโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งอาศัยพื้นฐานมาจากสิ่งที่สอนในระหว่างระยะเวลานั้น ๆ การเรียนคำศัพท์ของกลุ่มควบคุมอาศัยจากแบบเรียนและการอภิปรายในชั้น ส่วนกลุ่มทดลองเรียนคำศัพท์โดยมีอุปกรณ์ทำแบบฝึกหัดซึ่งมีคำศัพท์ที่สัมพันธ์กับ เรื่องที่เรียน เข้าไว้ เป็นหมวดหมู่ มีการอภิปรายร่วมกัน เพื่อให้ได้ความหมายของคำศัพท์แต่ละคำ เพื่อให้เห็นความสัมพันธ์ซึ่งกันและกัน สรุปข้อค้นพบที่สำคัญ ๆ ได้ดังนี้

1. การใช้อุปกรณ์ช่วยสอนคำศัพท์ช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจคำศัพท์ต่าง ๆ ได้ดีขึ้น และช่วยนำไปสู่การแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ต้องใช้คำศัพท์เหล่านั้นได้ดีขึ้น
2. การที่จะให้การเรียนที่เกิดจากอุปกรณ์คงอยู่ได้นานจำเป็นต้องใช้อยู่เสมอ และใช้อย่างมีระบบอย่างเป็นส่วนหนึ่งของวิธีการเรียนในห้องเรียน

เทรซี (Treacy, 1966) ได้ทำการศึกษาความสัมพันธ์ของทักษะการอ่านที่มีต่อความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยศึกษาจากนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 7 จำนวน 244 คน แบบทดสอบที่ใช้ประกอบด้วยแบบทดสอบโจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ และแบบทดสอบวัดความสามารถในการอ่าน ผลการวิจัยพบว่า การอ่านมีความสัมพันธ์กับความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

ทักเคอร์ (Tucker, 1975) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถด้านการแก้ปัญหา กับความสามารถในการอ่าน การคำนวณ และทักษะในการให้ความหมายของรูปแบบที่เกี่ยวข้องกับปัญหา พบว่า ทักษะในการคำนวณ และทักษะในการให้ความหมายรูปแบบที่เกี่ยวข้องกับปัญหามีความสัมพันธ์กับความสามารถด้านการคิดแก้ปัญหา และรูปภาพอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ และเมื่อควบคุมตัวแปรที่เป็นทักษะในการให้ความหมายของรูปแบบที่เกี่ยวข้องกับปัญหาไว้คงที่ พบว่า ตัวแปรที่เหลืออยู่ ไม่มีความสัมพันธ์กับความสามารถในการแก้ปัญหา

โฮโลเวลล์ (Hollowell, 1977) ได้ศึกษาถึงกระบวนการแก้ปัญหา 7 ขั้นตอน ดังนี้

1. ความเข้าใจปัญหา
2. การระลึกถึงข้อเท็จจริง
3. การรวบรวมข้อเท็จจริงเพื่อคิดแก้ปัญหา
4. สร้างวางแผนวิธีแก้ปัญหา
5. การตรวจผลที่เป็นคำตอบ
6. การทดสอบดูว่าวิธีการคิดแก้ปัญหานั้นถูกต้องหรือไม่
7. การคิดค้นหรือยอมรับวิธีการแก้ปัญหานั้น

ผลการศึกษา พบว่าในชั้นที่หนึ่งมีความสอดคล้องกับกระบวนการแก้ปัญหาถึงร้อยละ 85 และพบว่ากลุ่มนักเรียนที่แก้ปัญหาสำเร็จทำคะแนนเฉลี่ยสูงกว่ากลุ่มนักเรียนที่คิดแก้ปัญหาไม่สำเร็จ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ฮอลล์ (Hall, 1977) ได้ศึกษาผลของการสอนการวิเคราะห์การแก้ปัญหา คณิตศาสตร์และความสามารถในการวิเคราะห์ ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 60 คน ซึ่งแบ่งเป็นกลุ่มควบคุมและกลุ่มทดลองกลุ่มละ 30 คน โดยแต่ละกลุ่มประกอบด้วยนักเรียนที่คาดคะเนเก่งและไม่เก่งกลุ่มละ 15 คน กลุ่มทดลองได้เรียนเกี่ยวกับการวิเคราะห์เป็นเวลา 8.5 ชั่วโมง แล้วทำการทดสอบการวิเคราะห์และความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ผลปรากฏว่า

1. นักเรียนที่มีความสามารถในการวิเคราะห์สูง มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่มีความสามารถในการวิเคราะห์ต่ำ

2. นักเรียนที่ได้รับการสอนการวิเคราะห์มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ไม่ได้เรียนการวิเคราะห์

คลาร์กสัน (Clarkson, 1979) ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างทักษะในการแปลความหมายในวิชาคณิตศาสตร์กับความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ และศึกษาต่อนักเรียนจะใช้การแปลความหมายในการแก้โจทย์ปัญหาหรือไม่ ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนระดับชั้นปีที่ 1 ที่เรียนพีชคณิตจำนวน 5 ห้องเรียน นำมาทดสอบความสามารถในการแปลความหมาย 3 แบบ คือ สัญลักษณ์ที่เป็นภาษา สัญลักษณ์ที่เป็นสัญลักษณ์ และสัญลักษณ์ที่เป็นรูปภาพ แล้วนำคะแนนไปหาความสัมพันธ์กับคะแนนความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ปรากฏว่าการแปลความหมายทั้ง 3 แบบมีความสัมพันธ์กับความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์และนักเรียนที่มีความสามารถในการแปลความหมายต่างกัน จะมีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ นอกจากนี้ยังพบว่า ทักษะในการแปลความหมาย เป็นองค์ประกอบหนึ่งของความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์

มูราสกี (Muraski, 1979) ได้ทำการศึกษาผลของการสอนอ่านในทางคณิตศาสตร์กับความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 แบ่งเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมกลุ่มละ 13 คน กลุ่มทดลองได้รับการสอนอ่านในทางคณิตศาสตร์ 3 บทเรียน แต่ละบทเรียนจะแบ่งออกเป็น 5 เรื่อง ใช้เวลา 5 สัปดาห์ ต่อจากนั้นวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของกลุ่มควบคุมและกลุ่มทดลอง ผลการทดลองปรากฏว่า กลุ่มทดลองมีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

กิฟฟิน (Giffunc, 1979) ได้ศึกษาผลการสอนโจทย์ปัญหาที่มุ่งเน้นความเข้าใจโจทย์ปัญหา ฝึกทักษะการอ่านโจทย์ที่มีทักษะการเขียนสมการ การหาคำตอบ ความคงทนในการเขียนสมการ พบว่า กลุ่มทดลอง มีความสามารถทั้งสามด้านสูงกว่าควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

พท (Putt, 1979) ได้ทำการศึกษาถึงปัจจัยที่ส่งผลต่อการแก้ไข  
ปัญหาคณิตศาสตร์ เมื่อมีขบวนการแก้ปัญหต่างกัน ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนระดับ  
ชั้นปีที่ 5 จำนวน 2 ห้องเรียน ห้องแรกได้รับการสอนกลวิธีแก้ปัญหา อีกห้องหนึ่งให้นักเรียน  
ได้รับประสบการณ์โดยตรงจากการพยายามแก้ปัญหิต่าง ๆ เอง ใช้เวลาทำการทดลอง  
4 สัปดาห์ แล้ววัดผลสัมฤทธิ์ในการแก้ไขปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนทั้ง 2 กลุ่ม พบว่า  
นักเรียนทั้ง 2 กลุ่มมีความสามารถในการแก้ไขปัญหาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกัน

