

การศึกษาฟังก์ชันเปอร์ฮาร์โมนิคในทรงกลมของ \mathbb{R}^n โดยการส่งผ่านไปยัง \mathbb{R}^{n+2}



นางสาว ปรีญา ชุมทรัพย์

001691

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2521

11652808b

A STUDY OF SUPERHARMONIC FUNCTIONS IN A BALL OF \mathbb{R}^n

BY PASSING TO \mathbb{R}^{n+2}

MISS PREYA KHUMSUP

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1979

Thesis Title A Study of Superharmonic Functions in a Ball
 of \mathbb{R}^n by Passing to \mathbb{R}^{n+2}

By Miss Preya Khumsup

Department Mathematics

Thesis Advisor Associate Professor Sawai Nualtaranee, **Ph.D.**

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University
in partial fulfillment of the requirements for the master's degree.

S. Bunnag
..... Dean of the Graduate School
(Associate Professor Supradit Bunnag Ph.D.)

Thesis Committee

Surawit Kongsasna
..... Chairman
(Professor Surawit Kongsasna M.A.)

Subha Sutchritpongsa Member
(Associate Professor Subha Sutchritpongsa Ph.D.)

Sawai Nualtaranee Member
(Associate Professor Sawai Nualtaranee Ph.D.)

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การศึกษาฟังก์ชันซูเปอร์ฮาร์โมนิกในทรงกลมของ \mathbb{R}^n โดยการส่งผ่าน
 ไปยัง \mathbb{R}^{n+2}
 ชื่อผู้เขียน นางสาวปรียา ชุมทรัพย์
 อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร.ไสว นวดครณี
 ภาควิชา คณิตศาสตร์
 ปีการศึกษา 2521



บทคัดย่อ

B เป็นทรงกลมหนึ่งหน่วยใน \mathbb{R}^n มีฟังก์ชัน q จาก $\mathbb{R}^{n+2} \setminus E$ ไปบนช่วง $(0,1]$ และมีฟังก์ชัน f จาก $\mathbb{R}^{n+2} \setminus E$ ไปบน B โดยที่ $E = \{(x_1, \dots, x_n, 0, 0) / (x_1, \dots, x_n) \in \partial B\}$ ฟังก์ชัน f ซึ่งนิยามโดย

$$f(x) = \int_E \frac{1}{\|x - z\|^n} dz \quad (x \in \mathbb{R}^{n+2} \setminus E)$$

เป็นฟังก์ชันซูเปอร์ฮาร์โมนิกใน $\mathbb{R}^{n+2} \setminus E$ และสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$f(x) = \frac{\lambda^{n/2}(x)}{1 - \|q(x)\|^2}$$

ถ้า u เป็นฟังก์ชันซูเปอร์ฮาร์โมนิกในเซตเปิด $\omega \subset B$ และนิยามฟังก์ชัน u^* ดังนี้

$$u^*(x) = f(x) u(q(x)) \quad (x \in \Omega = q^{-1}[\omega])$$

เราจะได้ว่า u^* ซูเปอร์ฮาร์โมนิกใน $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+2}$

โดยทางนี้ผลสรุปบางอย่างที่เกี่ยวกับฟังก์ชันซูเปอร์ฮาร์โมนิกใน B จะหาได้จากคุณสมบัติของฟังก์ชันซูเปอร์ฮาร์โมนิกใน \mathbb{R}^{n+2} เป็นต้นว่า $u \geq 0$ ใน B เมื่อและก็ต่อเมื่อเราขยาย u^* ให้เป็นฟังก์ชันซูเปอร์ฮาร์โมนิกใน \mathbb{R}^{n+2} ได้

การประยุกต์ทางหนึ่งที่จะแสดงคือฟังก์ชันฮาร์โมนิกที่เป็นบวกบน B สามารถแทนได้ด้วย
 อินทิกรัล นอกจากนั้นในบทสุดท้ายเรายังแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันฮาร์โมนิกที่เป็นบวกบนสเปซ
 $\mathbb{R}^{n-1} \times (a, \infty)$ ใดๆ ก็แทนได้ด้วยอินทิกรัลเช่นกัน

Thesis Title **A Study of Superharmonic Functions in a Ball
of \mathbb{R}^n by Passing to \mathbb{R}^{n+2}**

Name Miss Preya Khumsup

Thesis Advisor Associate Professor Sawai Nualtaranee, **Ph.D.**

Department Mathematics

Academic Year 1978

ABSTRACT

Let B be the unit ball in \mathbb{R}^n . There exist a real-valued function λ and a vector-valued Q from $\mathbb{R}^{n+2} \setminus E$ onto $(0,1]$ and B respectively, $E = \{(x_1, \dots, x_n, 0, 0) / (x_1, \dots, x_n) \in \partial B\}$.

The function f defined by

$$f(x) = \int_E \frac{1}{\|x - z\|^n} dz \quad (x \in \mathbb{R}^{n+2} \setminus E)$$

is harmonic in $\mathbb{R}^{n+2} \setminus E$ and we have

$$f(x) = \frac{\lambda^{n/2}(x)}{1 - \|Q(x)\|^2} .$$

If u is a superharmonic function in an open set $\omega \subset B$ and we define the function u^* by

$$u^*(x) = f(x)u(Q(x)) \quad (x \in \Omega = Q^{-1}[\omega])$$

then u^* is superharmonic in $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+2}$.

By this passage we will show that certain results on superharmonic functions in B can be deduced from the properties of superharmonic functions in \mathbb{R}^{n+2} . For example, u^* has a unique superharmonic extension U to \mathbb{R}^{n+2} if and only if $u \geq 0$ on B .

As an application we will show that a positive harmonic function in B can be represented by the integral. Moreover, in the last chapter, we also give the integral representations of positive harmonic functions in the half-space $\mathbb{R}^{n-1} \times (a, \infty)$.

ACKNOWLEDGEMENT

I would like to express my gratitude and deep appreciation to Dr. Sawai Nualtaranee, my thesis supervisor who kindly give me invaluable suggestions and patiently encourage me in preparing and writting this thesis.

In particular I am greatly indebted to all lecturers who taught me in undergraduate and graduate courses at Chulalongkorn University.



CONTENTS



	page
ABSTRACT IN THAI	iv
ABSTRACT IN ENGLISH	vi
ACKNOWLEDGEMENT	viii
INTRODUCTION	1
CHAPTER	
I PRELIMINARIES	2
II A PASSAGE FROM \mathbb{R}^n INTO \mathbb{R}^{n+2}	13
III ON THE SUPERHARMONICITY OF u^*	28
IV HARMONIC FUNCTIONS IN $\mathbb{R}^{n-1} \times (a, \infty)$	38
REFERENCES	45
VITA	46