ระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยาย

นายพิชาญ ประทุมมาลย์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2550

AN EXTENDED DOUBLE DIMENSIONAL LOGARITHMIC NUMBER SYSTEM

Mr.Pichan Pratummal

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering Program in Computer Engineering
Department of Computer Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2007

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยาย
โดย	นายพิชาญ ประทุมมาลย์
สาขาวิชา	วิศวกรรมคอมพิวเตอร์
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(รองศาสตราจารย์ ดร.บุญสม เลิศหิรัญวงศ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ
(ศาสตราจารย์ ดร.ประภาส จงสถิตย์วัฒนา)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์)

.... กรรมการ
(อาจารย์ ดร.เศรษฐา ปานงาม)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อานนท์ รุ่งสว่าง)

นายพิชาญ ประทุมมาลย์ : ระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยาย (AN EXTENDED DOUBLE DIMENSIONAL NUMBER SYSTEM) อ.ที่ปรึกษา : ผศ. ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์, 45 หน้า

ในวงการเลขคณิตสำหรับคอมพิวเตอร์ หนึ่งในปัญหาที่ท้าทายคือการปัญหาด้านการพัฒนาประสิทธิภาพการคำนวณพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ของระบบจำนวน โดยทั้งนี้ได้นักวิจัยส่วนใหญ่ได้มีการนำเสนอระบบจำนวนตัวเลขใหม่ๆ ขึ้นมาเพื่อให้เหมาะสมกับงานในแต่ละประเภท แต่อย่างไรก็ตามระบบจำนวนโดยทั่วไปนั้นมักมีจุดด้อยเหมือนกันในด้านประสิทธิภาพการทำงานเมื่อต้องดำเนินการคูณและการหาร ดังนั้นเพื่อที่จะแก้ปัญหานี้จึงได้มีการนำเสนอระบบจำนวนที่สามารถดำเนินการคูณและการหารได้อย่างมีประสิทธิภาพขึ้นมา ระบบจำนวนจำนวนลอการิทึมนั้นเป็นหนึ่งในระบบจำนวนที่สามารถดำเนินการคูณและหารได้อย่างมีประสิทธิภาพ แต่เนื่องด้วยเหตุผลที่ว่าระบบนี้มีจุดด้อยในการดำเนินการบวกและการลบซึ่งจะต้องอาศัยตารางเรียกดูค่า นักวิจัยหลายๆ คนจึงได้มีความพยายามในการนำเสนอถึงวิธีที่จะลดการใช้งานตารางเรียกดูค่าในระบบจำนวนนี้ลง

ในงานวิจัยนี้จึงได้นำเสนอระบบจำนวนซึ่งถูกปรับปรุงจากระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่โดยเรียกว่าระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยาย ด้วยการนำเสนออัลกอริทึมการบวกและการลบแบบใหม่ ระบบจำนวนที่นำเสนอนี้สามารถลดการใช้งานของตารางเรียกดูค่าลงได้เมื่อเทียบกับระบบเดิม ทั้งนี้ยังได้นำเสนออัลกอริทึมสำหรับการดำเนินการพื้นฐานทางคณิตศาสตร์อื่นๆ ทั้งการคูณและการหารและการปรับปรุงค่าความแม่นยำของผลลัพธ์ในระบบจำนวนนี้อีกด้วย

ภาควิชา วิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต พิชาญ
สาขาวิชา วิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา
ปีการศึกษา 2550

4770315021 : MAJOR COMPUTER ENGINEERING

KEY WORD : LOGARITHMIC NUMBER SYSTEM / DOUBLE DIMENSIONAL LOGARITHMIC NUMBER SYSTEM / LOOK-UP

PICHAN PRATUMMAL : AN EXTENDED DOUBLE DIMENSIONAL LOGARITHMIC NUMBER SYSTEM. THESIS ADVISOR : ASST.PROF. ATHASIT SURARERKS, Ph.D., 45 pp.

In computer arithmetic research field, one of the challenging problems is how to improve the performance of fundamental arithmetic operations. Most researchers have proposed various number systems which are suitable for a certain type of computation. However, many number systems have the same limitation in performance when operating with the multiply and divide calculation. Therefore, the number systems that perform well in those operations have been proposed. Logarithm number system is one of the number systems which have an advantage in multiplication and division. Unfortunately, this number system has its limitation in addition and subtraction because it requires a look-up table. Hence, many researchers focus on how to reduce the size of a look-up table.

This thesis proposes an improvement version of the double dimension logarithmic number system called an extended double dimensional logarithmic number system. By our proposed the addition and the subtraction algorithm, this number system shows a significantly reduction in the usage of look-up table comparing with the classic double dimensional logarithmic number system. Fundamental arithmetic operations such as multiplication and division are also introduced in this work. We also propose a novel approach to solve the accuracy problem in this number system.

Department ....Computer Engineering.... Student's signature ....พิชาน....

Field of study ....Computer Engineering.... Advisor's signature ....Athasit Surarerks....

Academic year ....2007....

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยความอนุเคราะห์ และความช่วยเหลืออย่างยิ่งจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ อาจารย์ที่ปรึกษา ซึ่งเป็นผู้ให้ข้อคิด แนวทาง และคำปรึกษา ตลอดจนเป็นผู้ตรวจทานแก้ไข ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วง ขอขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ เป็นอย่างสูงที่ให้ความเมตตาช่วยเหลือ รวมทั้งโอกาสและสิ่งที่ดีแก่ผู้วิจัยเสมอมา

ขอขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.ประภาส จงสถิตย์วัฒนา อาจารย์ ดร.เศรษฐา ปานงาม คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อานนท์ รุ่งสว่าง คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ประธานกรรมการและกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ได้กรุณาให้คำแนะนำในการแก้ไขวิทยานิพนธ์ให้มีคุณภาพยิ่งขึ้น และขอขอบพระคุณคณาจารย์ในภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยทุกท่านที่ประสิทธิประสาทความรู้อันมีค่ายิ่งแก่ผู้วิจัย

ท้ายนี้ขอขอบพระคุณ บิดา มารดา ที่เป็นกำลังใจสำคัญ และขอขอบคุณพี่เมศ เฮ้ง เพื่อนๆ พี่ๆ และน้องๆ ทุกคน ที่เปรียบเสมือนแรงผลักดันและให้ความช่วยเหลือในทุกๆ ด้าน จนผู้วิจัยสามารถทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วง

สารบัญ

สารบัญตาราง

สารบัญภาพ

ภาพที่ หน้า

อภิธานศัพท์

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

b	ค่าเลขชี้กำลังของฐานคู่ (exponent value of binary base)
t	ค่าเลขชี้กำลังของฐานสาม (exponent value of ternary base)
z	ค่าเลขชี้กำลังของฐานคู่ซึ่งบ่งบอกขนาดของค่าเชิงตัวเลข x โดยที่ x เป็นจำนวนจริงใดๆ (exponent value of binary base which indicate the size of numerical value x, where x is a real number)
s	ค่าตัวเลขบ่งบอกเครื่องหมาย (sign digit)
$d_{i,j}$	ดิจิตในตำแหน่งแถวที่ i คอลัมน์ที่ j (digit in the i^{th} row and j^{th} column)
$\|\|a\|\|$	ค่าเชิงตัวเลขของ a (a numerical value of a)

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในปัจจุบันระบบจำนวนในระบบคอมพิวเตอร์นั้นมีอยู่หลากหลายระบบ ซึ่งแต่ละระบบจำนวนก็มีจุดเด่นและจุดด้อยแตกต่างกันออกไป เช่นระบบจำนวนฐานคู่ (double base number system)[6-7] ที่สามารถทำการบวกและการลบได้รวดเร็วและสามารถทำงานแบบขนานได้ โดยทั้งนี้งานวิจัยทางด้านระบบจำนวนส่วนใหญ่จะมุ่งเน้นไปที่ความเร็วในการคำนวณ การเพิ่มความเร็วในการคำนวณนั้นสามารถทำได้หลายวิธี เช่นแก้ไขรูปแบบแทนจำนวน เป็นต้น แต่ทั้งนี้ระบบจำนวนส่วนใหญ่ที่มีการคิดค้นขึ้นมานั้นมักจะมีปัญหาในด้านการคูณและการหารซึ่งมักจะทำได้ช้าและไม่มีประสิทธิภาพ หรือในบางระบบจำนวนก็ไม่อาจทำการคูณหรือการหารหรือทั้งสองอย่างได้เลย เพื่อที่จะแก้ปัญหานี้จึงต้องมีการนำเสนอระบบจำนวนที่สามารถทำการคูณและการหารได้อย่างมีประสิทธิภาพขึ้นมา โดยระบบจำนวนหนึ่งที่เราสนใจคือ ระบบจำนวนลอการิทึม (logarithmic number system) ซึ่งเป็นระบบจำนวนที่มีความสามารถทำการคูณและการหารได้รวดเร็วอันเนื่องมาจากคุณสมบัติของลอการิทึมที่ช่วยให้การคูณและการหารในระบบสามารถทำได้อย่างมีประสิทธิภาพเสมือนการบวกและการลบ ตัวอย่างเช่น ระบบจำนวนลอการิทึมแบบมีเครื่องหมาย (signed logarithmic number system) [1] เป็นต้น อย่างไรก็ตาม เนื่องด้วยเหตุผลที่ว่าการบวกและการลบของระบบจำนวนลอการิทึมที่ทำได้ยุ่งยากโดยต้องอาศัยตารางเรียกดูค่า (look-up table) รวมถึงผลลัพธ์ที่ได้จากการบวกและลบจะมีค่าความคลาดเคลื่อน (error) ทำให้การใช้งานของระบบจำนวนลอการิทึมถูกจำกัดสำหรับใช้กับงานเฉพาะด้านที่การทำงานต้องใช้การคูณและการหารเป็นหลัก โดย ชวาทซ์แลนเดอร์และอเล็กซ์โพลอส (Swartz- lander and Alexpoulos) [1] ได้กล่าวไว้ว่า “ระบบจำนวนลอการิทึมนั้นไม่สามารถนำมาใช้ทดแทนระบบจำนวนที่มีใช้อยู่ในระบบคอมพิวเตอร์ทั่วไปได้ แต่เหมาะสำหรับงานเฉพาะทางที่จำเป็นต้องใช้การคำนวณทางด้านการคูณและการหารมากเป็นพิเศษ”

ในปี 1998 ฌอง มิเชล มูลเลอร์ (Jean-Michel Muller) ได้เสนอระบบจำนวนกึ่งลอการิทึม (semi-logarithmic number system)[2-3] ซึ่งใช้แนวคิดของการประยุกต์ระบบจำนวนจุดลอยตัว (floating point number) เข้ากับจำนวนลอการิทึม ซึ่งสามารถลดขนาดของตารางเรียกดูค่า ในการบวกและการลบ แต่ทำให้การคูณและการหารมีขั้นตอนที่ยุ่งยากมากขึ้น

โดยในปี 1996 ดิมิทรอฟ (V. Dimitrov) ได้นำเสนอระบบจำนวนลอการิทึมหลายมิติ (multi-dimensional logarithmic number system)[4] ประยุกต์มาจากระบบจำนวนฐานคู่ โดยที่ รูปแบบการแทนจำนวน (number representation) จะอยู่ในรูปของจำนวนเต็มเพียงอย่างเดียว ซึ่งมีประโยชน์ในการนำไปใช้งานกับระบบการประมวลผลด้วยสัญญาณดิจิทัล (digital signal processing systems)[5] อย่างไรก็ตามระบบจำนวนนี้ยังมีปัญหาเหมือนในระบบลอการิทึมแบบดั้งเดิมคือในการบวกและการลบจะต้องมีการสร้างตารางเรียกดูค่าขนาดใหญ่มาเก็บค่าไว้ล่วงหน้าและขนาดของตารางจะสัมพันธ์กับระดับความแม่นยำของผลลัพธ์

ในงานวิจัยนี้จะมุ่งเน้นไปที่การปรับปรุงระบบจำนวนลอการิทึมหลายมิติที่ใช้ฐานเพียงสองฐานหรือระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่ โดยนำเสนอรูปแบบแทนจำนวนแบบดัดแปลงรวมถึงอัลกอริทึมการคูณและการหารแบบใหม่ โดยมีเป้าหมายที่จะไม่ใช้ตารางเรียกดูค่าในขั้นตอนการคำนวณ

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

งานวิจัยนี้จะเสนอระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายซึ่งไม่ต้องใช้ตารางเรียกดูค่าในขั้นตอนการบวกและการลบ พร้อมทั้งเสนออัลกอริทึมการบวกและการลบแบบใหม่ที่ใช้วิธีคำนวณโดยไม่ต้องอาศัยตารางเรียกดูค่าและการเสนอส่วนขยายเพื่อปรับลดค่าความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ที่ได้จากอัลกอริทึม

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

1) เสนอระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยาย พร้อมกับบทพิสูจน์ความสมบูรณ์
2) เสนออัลกอริทึมการบวกและการลบแบบใหม่ เพื่อลดหรือเลิกการใช้งานตารางเรียกดูค่า
3) เสนออัลกอริทึมในการปรับลดค่าความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์จากการบวกและลบ

1.4 ขั้นตอนและวิธีดำเนินงานวิจัย

1) ศึกษาคุณสมบัติของระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่ และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2) ปรับแก้รูปแบบแทนจำนวนของระบบจำนวน พร้อมทั้งพิสูจน์ความสมบูรณ์ (completeness) ของระบบจำนวน
3) ออกแบบอัลกอริทึมในการบวกและการลบของระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่ใหม่ และพิสูจน์การผลทำงาน
4) ออกแบบอัลกอริทึมในการปรับลดค่าความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์จากการบวกและลบ
5) พิสูจน์ผลการทำงาน และปรับปรุงแก้ไข
6) สรุปผลและเรียบเรียงวิทยานิพนธ์

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัย

1) ได้ระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยาย ซึ่งลดหรือเลิกการใช้งานตารางเรียกดูค่า
2) ได้ขั้นตอนในการปรับแก้ค่าความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์จากการบวกและลบ

1.6 ผลงานที่ตีพิมพ์จากวิทยานิพนธ์

ส่วนหนึ่งของวิทยานิพนธ์นี้ได้รับการตีพิมพ์เป็นผลงานวิชาการในหัวข้อเรื่องดังต่อไปนี้

1) “An Extended Double Dimensional Logarithmic Number System” โดย พิชาญ ประทุมมาลย์ และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการ National Computer Science and Engineering Conference (NCSEC2007)

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ระบบจำนวน (Number System)

ระบบจำนวน (β, D) ประกอบด้วยเลขฐาน β โดยที่ β สามารถเป็นได้ทั้งจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $|\beta| > 1$ และ ชุดตัวเลขแบบจำกัด (finite digit-set) D ที่ตัวเลขสามารถเป็นได้ทั้งจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน

กำหนดให้ X เป็นจำนวนใดๆ X สามารถแสดงได้ในเลขฐาน β ในรูปแบบ

$$X = (x_n x_{n-1} \cdots x_0 . x_{-1} x_{-2} \cdots)_\beta$$

ซึ่ง $x_i \in D$ โดยที่ $i \le n,\ \exists n \in \mathrm{z}$

โดยค่าเชิงตัวเลขของ X ฐาน β สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\|X\| = \sum_{i=n}^{-\infty} x_i \beta^i$$

ซึ่งค่าเชิงตัวเลขทั้งหมดที่แสดงได้สามารถเขียนให้อยู่รูปของเซต $P[\beta, D]$ ได้ดังนี้

$$P_n^m[\beta, D] = \left\{ X = (x_n x_{n-1} \cdots x_{m+1} x_m)_\beta \middle| x_i \in D, m \le i \le n \right\}$$

$$P_n[\beta, D] = \left\{ X = (x_n x_{n-1} \cdots)_\beta \middle| x_i \in D, i \le n \right\}$$

โดย $P_n^m[\beta, D]$ และ $P_n[\beta, D]$ เท่ากับ เซตจำกัดและเซตไม่จำกัด ตามลำดับ ในระบบเลขฐานจำนวนเต็มโดยทั่วไปแล้วนิยมให้ $D = \{0, 1, \cdots, |\beta| - 1\}$ ซึ่ง D จะถูกเรียกว่าเป็น ชุดตัวเลขแบบบัญญัติ (canonical digit-set)

2.2 ระบบจำนวนลอการิทึม (logarithmic number system)

ระบบจำนวนลอการิทึมเป็นระบบจำนวนที่มีรูปแบบแทนจำนวนสำหรับจำนวนจริง *x* ใดๆ เป็นค่าลอการิทึมของค่าสัมบูรณ์ *x* โดยมีรูปแบบแทนจำนวนในรูปทั่วไปเป็น (*b*, *n*) โดยที่ *b* เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ไม่เท่ากับ 1 และมีค่ามากกว่า 0 และ *n* เป็นจำนวนจริงใดๆ โดยที่ค่าเชิงตัวเลข (numerical value) คือ $x = b^n$ เช่นจำนวนจริง 16_{10} จะมีค่าเชิงตัวเลขเป็น 2^4

ระบบจำนวนลอการิทึมนั้นมีจุดเด่นในด้านการคำนวณผลคูณและหารได้อย่างรวดเร็วเนื่องมาจากคุณสมบัติของลอการิทึมที่ว่า

$$\log_b(XY) = \log_b X + \log_b Y$$

$$\log_b\left(\frac{X}{Y}\right) = \log_b X - \log_b Y$$

ทำให้การคูณและหารสามารถทำได้ง่ายเสมือนการบวกและลบในระบบจำนวนธรรมดา เช่นถ้าให้ $x = b^{n_x}$ และ $y = b^{n_y}$ จะได้ว่า $x \times y = b^{n_x+n_y}$ และ $x \div y = b^{n_x-n_y}$

2.3 ระบบจำนวนลอการิทึมแบบมีเครื่องหมาย (signed logarithmic number system)

ในปี ค.ศ. 1975 ชวาทซ์แลนเดอร์และอเล็กซ์โพลอส (Swartz- lander and Alexpoulos) ได้เสนอระบบจำนวนลอการิทึมแบบมีเครื่องหมาย (signed logarithmic number system) [1] โดยมีจุดประสงค์เพื่อนำมาใช้ในงานที่จำเป็นต้องมีการคูณและการหารสูง ซึ่งระบบจำนวนนี้สามารถสรุปได้ตามนิยามดังต่อไปนี้

นิยามที่ 1 *ระบบจำนวน* ลอการิทึมแบบมีเครื่องหมาย *คือระบบจำนวนที่ประกอบด้วย จำนวนจริง b เป็นเลขฐาน และจำนวน n เป็นเลขชี้กำลัง (exponent) และ s เป็นค่าตัวเลขบอกเครื่องหมาย(sign) จำนวนจริง x ใดๆ สามารถเขียนในระบบนี้ได้เป็น x = (s , b , n) โดยที่* ค่าเชิงตัวเลข (numerical value) *คือ*

$$x = \begin{cases} -b^n & if\ \ s = 1 \\ b^n & if\ \ s = 0 \\ 0 & if\ \ s = -\infty \end{cases}$$

เช่น 16_{10} สามารถเขียนในระบบนี้ได้เป็น (0,2,4) เป็นต้น
สำหรับการคูณและการหารในระบบนี้สามารถทำได้ดังต่อไปนี้ ถ้าให้

$$x = (s_x, b, n_x) \text{ และ } y = (s_y, b, n_y)$$
$$x \cdot y = ((s_x \oplus s_y), b, n_x + n_y)$$
$$x \div y = ((s_x \oplus s_y), b, n_x - n_y)$$

สำหรับการบวกของสองจำนวน *x* และ *y* สามารถคำนวณได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$x + y = \begin{cases} n_y & if\ \ s_x = -\infty \\ n_x + d_b(n_y - n_x) & if\ \ s_x = s_y \\ n_x + s_b(n_y - n_x) & if\ \ s_x \neq s_y \end{cases}$$

เมื่อฟังก์ชันของ $s_b(n_y - n_x)$ และ $d_b(n_y - n_x)$ นิยามได้ดังนี้

$$s_b(x) = \log_b(1 + b^x)$$
$$d_b(x) = \log_b\left|1 - b^x\right|$$

โดยเครื่องหมายของคำตอบคือ

$$s_{x+y} = \begin{cases} s_x & if\ \ n_x > n_y \\ s_y & if\ \ n_x \leq n_y \end{cases}$$

แต่ในความเป็นจริง ค่าของฟังก์ชันของ $s_b(n_y - n_x)$ และ $d_b(n_y - n_x)$ ซึ่งต้องใช้เวลาในการคำนวณสูงนั้นได้มาจากการใช้ตารางเรียกดูค่า

2.4 ระบบจำนวนแบบกึ่งลอการึทึม

ในปี ค.ศ. 1998 ฌอง มิเชล มูลเลอร์ และคณะ (Jean-Michel Muller, et al.) ได้เสนอระบบจำนวนแบบกึ่งลอการิทึม (semi-logarithmic number system) [2-3] ซึ่งเป็นระบบจำนวนฐานสอง (binary base) โดยมีแนวทางดังนี้

สำหรับจำนวนจริง *x* ใดๆ ที่ไม่เท่ากับ 0 การหาค่าช่วงของการประมาณค่า *x* ที่อยู่ในรูปกำลังของ 2 ทำได้โดยการกำหนดให้ *k* เป็นจำนวนเต็ม และ

$$e_{k,x} = \frac{\lfloor 2^k \log_2 |x| \rfloor}{2^k}$$

จะได้ว่า $2^{e_{k,x}} \le |x| < 2^{e_{k,x}+2^{-k}}$ เป็นจริงเสมอ

ค่าของจำนวนเต็ม *k* ที่เพิ่มขึ้นมีผลทำให้ช่วงของการประมาณแคบลงได้ ในกรณีการประมาณ *x* ด้วยค่าต่ำสุดของช่วง ค่าความแตกต่างจริงอธิบายได้จาก *ตัวประกอบแก้ไขการคูณ* (multiplicative correction factor: $m_{k,x}$) ซึ่งคำนวณได้จาก

$$m_{k,x} = \frac{|x|}{2^{e_{k,x}}}$$

รูปแบบแทนจำนวนตามแนวคิดนี้ สามารถให้คำนิยามได้ดังต่อไปนี้

นิยามที่ 2 *ระบบจำนวนแบบ* กึ่งลอการึทึม *ประกอบด้วยจำนวนจริง* $m_{k,x}$ *เป็นตัวประกอบแก้ไขการคูณ ซึ่งมีค่าอยู่ในช่วง* $[1,1+2^{-k})$ *และจำนวนจริง* $e_{k,x}$ *เป็นเลขชี้กำลังของฐานสองและ* s_x *เป็นค่าตัวเลขบอกเครื่องหมาย จำนวนจริง x ใดๆ สามารถเขียนในระบบนี้ได้เป็น* $(s_x, m_{k,x}, e_{k,x})$ *โดยค่าเชิงตัวเลขของจำนวนจริง x คือ*

$$x = s_x \cdot m_{k,x} \cdot 2^{e_{k,x}}$$

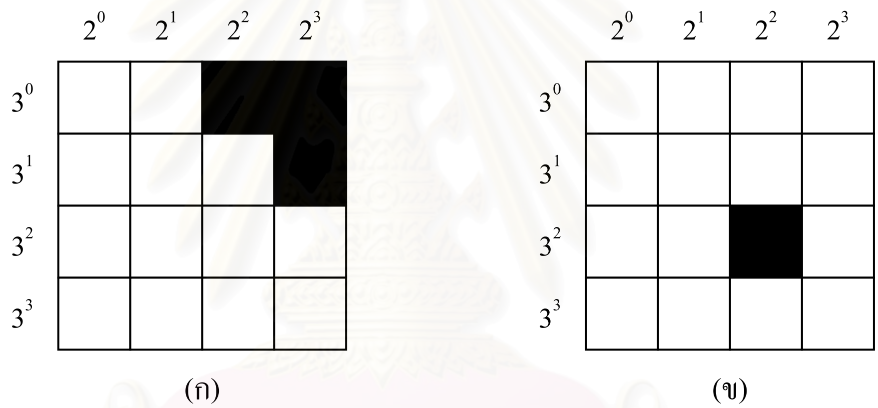
ระบบจำนวนกึ่งลอการิทึมสามารถทำการคูณ การหารการบวกและการลบโดยใช้ตารางเรียกดูค่าที่มีขนาดเล็กซึ่งถ้าหากค่า *k* ที่กำหนดมีค่าที่เหมาะสมก็สามารถทำให้การคูณและการหารทำได้ง่ายเช่นเดียวกับในระบบจำนวนลอการิทึมธรรมดา

2.5 ระบบจำนวนฐานคู่ (Double-Base Number System)

ระบบจำนวนฐานคู่ได้ถูกนำเสนอในปี 1996 โดยดิมิทรอฟ (Dimitrov) จูเลี่ยน (Jullien) และ มิลเลอร์ (Miller) [6-7] เป็นระบบจำนวนที่ใช้ฐานคู่ ประกอบด้วยฐานสองและฐานสาม โดยที่ค่าเชิงตัวเลขของระบบจำนวนนี้คือ

$$\|X\| = \sum_{i,j} d_{i,j} 2^i 3^j,\ d_{i,j} \in \{0,1\}$$

ซึ่ง $d_{i,j}$ เป็นชุดของตัวเลข (digit set) $\{0,1\}$ และ i, j เป็นจำนวนเต็มใดๆ ระบบจำนวนแบบฐานคู่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบตารางสองมิติ โดยให้ค่าตามหลัก เป็นค่ายกกำลังของสอง และค่าตามแถว เป็นค่ายกกำลังของสาม ระบบจำนวนนี้เป็นระบบจำนวนแบบซ้ำซ้อน เช่น ค่าของ 36 สามารถแสดงแทนด้วยตารางสองมิติในระบบจำนวนฐานคู่ได้มากกว่าหนึ่งรูปแบบ ดังรูปที่ 2.1 โดยเรียกช่องสีดำว่าบิตที่แอ็กทิฟ หรือ แอ็กทิฟเซลล์ (active cell) ซึ่งมีค่า $d_{i,j}$ มีค่าเป็น 1 สำหรับช่องที่เป็นสีขาวจะมีค่า $d_{i,j}$ เป็น 0 เรียกว่าบิตที่ไม่แอ็กทิฟ



รูปที่ 2.1 การแทนค่าของ 36 ด้วยตารางในระบบเลขจำนวนฐานคู่

จากรูปที่ 2.1(ก) จะแสดงค่า 36 ในรูปแบบของสมการได้ดังนี้

$$36 = 2^2 3^0 + 2^3 3^0 + 2^3 3^1$$

จากรูปที่ 2.1(ข) จะแสดงค่า 36 ในรูปแบบของสมการได้ดังนี้

$$36 = 2^2 3^2$$

2.6 ระบบจำนวนลอการิทึมแบบมิติคู่

ในปี ค.ศ. 1996 ดิมิทรอฟและคณะ (Dimitrov, et al.) [4] ได้เสนอระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่ซึ่งประยุกต์มาจากระบบจำนวนฐานคู่ โดยมีนิยามดังนี้

นิยามที่ 3 *ระบบจำนวน* ลอการีทึมมิติคู่ (double dimensional logarithmic number system) *ประกอบด้วยจำนวนจำนวนเต็ม b ซึ่งเป็นเลขชี้กำลังของฐานสอง (Binary Base) จำนวนเต็ม t ซึ่งเป็นเลขชี้กำลังของฐานสาม (Ternary Base) และ s เป็นค่าตัวเลขบอกเครื่องหมาย จำนวนจริง x ใดๆ สามารถเขียนในระบบนี้ได้เป็น x = (s, b, t) โดยมีค่าเชิงตัวเลขคือ*

$$x = \begin{cases} 2^b 3^t & if \;\; s = 0 \\ -2^b 3^t & if \;\; s = 1 \end{cases}$$

การคูณและการหารของระบบจำนวนลอการิทึมแบบมิติคู่สามารถคำได้ง่ายด้วยการบวกกันของเลขชี้กำลังดังต่อไปนี้ ถ้าให้จำนวนจริง $x = (s_x, b_x, t_x)$ และ $y = (s_y, b_y, t_y)$ เป็นสองจำนวนในระบบ จะได้ว่า

$$x \times y = ((s_x + s_y) \bmod 2, b_x + b_y, t_x + t_y)$$
$$x \div y = ((s_x + s_y) \bmod 2, b_x - b_y, t_x - t_y)$$

ตัวอย่างที่ 1 *จงหาผลคูณและหารของ 3900 ด้วย 2600*

วิธีทำ เริ่มต้นจาก 3900 สามารถเขียนในระบบได้เป็น $2^4 3^5$ และ 2600 สามารถเขียนในระบบได้เป็น $2^5 3^4$

ผลคูณ $3900 \times 2600 = 2^{4+5} 3^{5+4} = 2^9 3^9$

ผลหาร $3900 \div 2600 = 2^{4-5} 3^{5-4} \times = 2^{-1} 3^1$ □

ในขั้นตอนการบวกและการลบจำเป็นต้องมีการสร้างตารางเรียกดูค่า (look up table) เพื่อไว้เก็บค่าของฟังก์ชัน $\Phi(x, y)$ และ $\Psi(x, y)$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$2^{x_1} 3^{y_1} + 2^{x_2} 3^{y_2} = 2^{x_1} 3^{y_1} \times \Phi(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$
$$\Phi(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (1 + 2^{x_2 - x_1} 3^{y_2 - y_1})$$

$$2^{x_1} 3^{y_1} - 2^{x_2} 3^{y_2} = 2^{x_1} 3^{y_1} \times \Psi(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$
$$\Psi(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (1 - 2^{x_2 - x_1} 3^{y_2 - y_1})$$

ซึ่งขนาดของฟังก์ชัน $\Phi(x, y)$ และ $\Psi(x, y)$ นั้นจะแปรผันตามความแตกต่างของเลขชี้กำลังของทั้งสองฐาน ซึ่งเป็นข้อด้อยของระบบจำนวนนี้

ตัวอย่างที่ 2 *จงหาค่าของ 288 + 48 และ 288 – 48*

วิธีทำ 288 สามารถเขียนในระบบได้เป็น $2^5 3^2$ และ 48 สามารถเขียนในระบบได้เป็น $2^4 3^1$ จะสามารถหาค่าของ 288 + 48 ได้ดังต่อไปนี้

$2^5 3^2 + 2^4 3^1 = 2^5 3^2 \times (1 + 2^{4-5} 3^{1-2})$ ซึ่งจาก look-up table ขนาด 33 × 33 จะได้ว่า $(1 + 2^{4-5} 3^{1-2})$ มีค่าเท่ากับ $2^5 3^{-1}$ เมื่อนำมาแทนลงในสมการจะได้ว่าคำตอบของ 288 + 48 มีค่าเท่ากับ $2^{10} 3^1$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 341.333333 มีค่าความคลาดเคลื่อนเท่ากับ 5.333333

และสามารถหาค่าของ 288 - 48 ได้ดังต่อไปนี้

$2^5 3^2 + 2^4 3^1 = 2^5 3^2 \times (1 - 2^{4-5} 3^{1-2})$ ซึ่งจาก look-up table ขนาด 33 × 33 จะได้ว่า$(1 + 2^{4-5} 3^{1-2})$ มีค่าเท่ากับ $2^{-13} 3^8$ เมื่อนำมาแทนลงในสมการจะได้ว่าคำตอบของ 288 - 48 มีค่าเท่ากับ $2^{-8} 3^{10}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 230.660156 มีค่าความคลาดเคลื่อนเท่ากับ 9.339844 □

บทที่ 3

ระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยาย

จุดประสงค์หลักของงานวิจัยนี้ คือ การนำเสนอวิธีการปรับปรุงระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบเดิม โดยจะเรียกระบบจำนวนใหม่ที่ปรับปรุงว่า ระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยาย (An extended double dimensional logarithmic number system) โดยที่ระบบจำนวนใหม่ที่ได้รับการปรับปรุงนี้จะสามารถลดการใช้งานตารางเรียกดูค่าในขั้นตอนการบวกและการลบของระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่ลงได้ โดยจะเลือกใช้การคำนวณในบางส่วนเท่าที่จำเป็นและการไล่หาค่าของผลลัพธ์แบบเป็นลำดับขั้น รวมไปถึงการนำเสนอวิธีการปรับปรุงค่าความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้จากขั้นตอนการทำงานดังกล่าว

สำหรับเนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงแรงจูงในการนำเสนอรูปแบบการแทนจำนวนแบบใหม่ พร้อมทั้งได้นำเสนอระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยาย อัลกอริทึมการประมาณค่า อัลกอริทึมการคูณและการหาร อัลกอริทึมการบวกและการลบใหม่ รวมถึงอัลกอริทึมปรับปรุงค่าความแม่นยำของผลลัพธ์ สำหรับระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบใหม่นี้

3.1 บทกล่าวนำ

งานวิจัยด้านเลขคณิตสำหรับคอมพิวเตอร์ (computer arithmetic) ในปัจจุบัน การเพิ่มความถูกต้องแม่นยำสำหรับการคำนวณเป็นสิ่งจำเป็นและได้รับความสนใจอย่างมาก นอกจากนี้การเพิ่มประสิทธิภาพในแง่ของความเร็วในการคำนวณก็เป็นสิ่งที่นักวิจัยส่วนใหญ่ให้ความสนใจเช่นเดียวกัน แนวทางหนึ่งที่นำเสนอคือการเสนอระบบจำนวนที่เหมาะสมกับการคำนวณ ระบบจำนวนซ้ำซ้อน (redundant number system) เช่น ระบบจำนวนแบบมีเครื่องหมาย (signed-digit number system)[1] หรือ ระบบจำนวนฐานคู่ (double-base number system)[6-7] ได้ถูกนำเสนอขึ้นเพื่อรองรับระบบการคำนวณแบบขนาน (parallel computation system)

ระบบจำนวนส่วนใหญ่จะมีปัญหาเรื่องประสิทธิภาพด้านความเร็วในการคำนวณสำหรับการคูณ และการหาร เมื่อเทียบกับการบวกและการลบ อย่างไรก็ดีระบบจำนวนที่เหมาะสมสำหรับการคูณและการหารก็มีการนำเสนอขึ้น เช่น ระบบจำนวนลอการิทึม (logarithmic number system) ในงานวิจัยนี้เราสนใจระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่ (double dimensional logarithmic number system) ซึ่งอาศัยแนวคิดของการใช้เลขฐานสองจำนวน

ในปี 1996 ดิมิทรอฟ (V. Dimitrov) ได้นำเสนอระบบจำนวนลอการิทึมหลายมิติ (multi-dimensional logarithmic number system)[4] ประยุกต์มาจากระบบจำนวนฐานคู่โดยที่รูปแบบการแทนจำนวน (number representation) จะอยู่ในรูปของจำนวนเต็มเพียงอย่างเดียว ซึ่งมีประโยชน์ในการนำไปใช้งานกับระบบการประมวลผลด้วยสัญญาณดิจิทัล (digital signal processing systems)[5] อย่างไรก็ตามระบบจำนวนนี้ยังมีปัญหาเหมือนในระบบลอการิทึมแบบดั้งเดิมคือในการบวกและการลบจะต้องมีการสร้างตารางเรียกดูค่าขนาดใหญ่มาเก็บค่าไว้ล่วงหน้าและขนาดของตารางจะสัมพันธ์กับระดับความแม่นยำของผลลัพธ์

ในงานวิจัยนี้จะมุ่งเน้นไปที่การปรับปรุงระบบจำนวนลอการิทึมหลายมิติที่ใช้ฐานเพียงสองฐานหรือระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่ โดยจะอธิบายถึงระบบลอการิทึมต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องรวมถึงจุดเด่นและจุดด้อย รวมถึงเสนอวิธีการปรับปรุงระบบลอการิทึมมิติคู่แบบดั้งเดิม โดยเสนออัลกอริทึมการบวกและลบแบบใหม่ที่สามารถทำได้โดยไม่ต้องใช้การสร้างตารางเรียกดูค่าเข้ามาช่วยและเสนอวิธีการปรับปรุงค่าความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้ โดยในส่วนท้ายจะสรุปถึงผลที่ได้และสิ่งที่ยังต้องปรับปรุงของระบบ

3.2 ระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยาย (An extended double dimensional number system)

เนื่องจากระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบดั้งเดิมนั้นจำเป็นต้องมีการใช้เนื้อที่ในหน่วยความจำเพื่อเก็บค่าของฟังก์ชัน $\Phi(x,y)$ และ $\Psi(x,y)$ ที่ต้องใช้ในการบวกและการลบ ซึ่งยังส่งผลให้ผลลัพธ์ที่ได้นั้นจะมีความถูกต้องมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับขนาดของตารางเรียกดูค่า ถ้าขนาดของตารางเรียกดูค่านั้นไม่ใหญ่พอ ค่าที่สามารถนำมาใช้เป็นผลลัพธ์ก็จะมีน้อยลง เนื่องจากถ้าหากค่าผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องมากกว่าอยู่ภายนอกบริเวณตารางเรียกดูค่า ก็จะทำให้มีการนำค่าในตารางเรียกดูค่าที่มีความถูกต้องน้อยกว่ามาใช้แทน ส่งผลให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความคลาดเคลื่อน ในงานวิจัยนี้ เราสนใจวิธีการแสดงจำนวนด้วยมิติคู่เช่นกัน แต่เนื่องจากความแม่นยำของผลลัพธ์นั้นขึ้นอยู่กับขนาดของตารางเรียกดูค่า ซึ่งมักจะมีขนาดใหญ่ ในที่นี้เราจึงเสนอแนวทางในการหาคำตอบโดยไม่ต้องอาศัยตารางเรียกดูค่า ซึ่งจะช่วยให้ลดข้อจำกัดในการนำเอาระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่มาใช้งาน และยังรวมไปถึงวิธีการปรับปรุงค่าความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้เพื่อเพิ่มขีดความสามารถของระบบให้ดีกว่าเดิม

สำหรับหลักการการทำงานของระบบลอการิทึมมิติคู่แบบขยายที่เรานำเสนอจะใช้วิธีการเลือกค่าที่ดีที่สุดในช่วงที่คำนวณได้ โดยขนาดของช่วงสามารถลดลงได้ตามความต้องการ กล่าวโดยสรุปคือ ระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายสามารถนิยามดังนี้

นิยามที่ 4 *ระบบจำนวนระบบจำนวน*ลอการิทึมมิติคู่แบบขยาย (extended double dimensional logarithmic number system) *ประกอบด้วยจำนวนเต็ม b ซึ่งเป็นเลขชี้กำลังของฐานสอง (Binary Base) จำนวนเต็ม t ซึ่งเป็นเลขชี้กำลังของฐานสาม (Ternary Base) จำนวนเต็ม z คือค่าเลขชี้กำลังของพจน์บอกขนาด และ s เป็นค่าตัวเลขบอกเครื่องหมาย รูปแบบแทนจำนวนของจำนวนจริง x ใด ๆ สามารถแสดงได้ดังนี้*

$$x = (s, b, t, z)$$

โดยค่าเชิงตัวเลขของจำนวน x ใด ๆคือ

$$x = \begin{cases} 2^b 3^t \times 2^z & if \;\; s = 0 \\ -2^b 3^t \times 2^z & if \;\; s = 1 \end{cases}$$

โดยที่ $2^b 3^t \in [0,2)$

จะเห็นได้ว่า ระบบนี้จะทำการแยกค่าของเลขชี้กำลังของสองในระบบลอการิทึมมิติคู่ออกเป็นสองส่วน คือ *b* กับ *t* และ *z* โดยจำกัดค่าของ $2^b 3^t$ ให้อยู่ในช่วงของ [0,2) โดยสามารถแสดงให้เห็นตัวอย่างของรูปแบบแทนจำนวนได้ดังตัวอย่างที่ 1

ตัวอย่างที่ 3 *จำนวนจริง x =$(3900)_{10}$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบแทนจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบปรับปรุงเป็น* $2^{-7}3^5 \times 2^{11}$ *มีค่าประมาณ 3888 และมีค่าความคลาดเคลื่อนเท่ากับ 12* □

สิ่งที่ต้องคำนึงถึงในงานวิจัยนี้คือ ระบบแทนจำนวนที่นำเสนอนี้มีความสมบูรณ์หรือไม่ หมายความว่าจำนวนจริงใดๆ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบแทนจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายได้เสมอ ในการพิสูจน์แนวคิดนี้ เราจะนำเสนอ อัลกอริทึมในการประมาณค่าของจำนวนจริงใดๆ ด้วยรูปแบบแทนจำนวนในระบบลอการิทึมมิติคู่แบบขยายในหัวข้อถัดไป จากนั้นจะเป็นเรื่องของระบบการคำนวณเลขคณิตขั้นพื้นฐาน คือ การบวก การลบ การคูณ การหาร และวิธีการปรับปรุงค่าความแม่นยำของผลลัพธ์

3.3 ความสมบูรณ์ของระบบจำนวน

เราสามารถแสดงความสมบูรณ์ของระบบจำนวนได้โดยการเสนอขั้นตอนการหารูปแบบแทนจำนวนสำหรับจำนวนจริง *x* ใดๆ โดยเพื่อความง่ายในการหารูปแบบแทนจำนวนในที่นี้การหาค่าประมาณของ *x* จะทำการกำหนดค่าของ *b* และ *t* โดยที่ $2^b 3^t$ มีค่าอยู่ในช่วง [1,2) อันเนื่องมาจากการทำงานของอัลกอริทึมการหารูปแบบแทนจำนวนซึ่งจะทำการแปลงจำนวนจริง *x* ใดๆ ให้อยู่ในรูปของ $a\times 2^z$ โดยที่ *a* นั้นเป็นจำนวนจริงที่มีค่าอยู่ในช่วง [1,2) จะหาค่าประมาณของ *a* ในรูปของ $2^b 3^t$ โดยจะสามารถเห็นได้ว่า ค่าของ *b* และ *t* สามารถหาค่าได้เสมอและอาจมีได้หลายค่า ซึ่งขั้นตอนการทำงานในการหารูปแบบแทนจำนวนนี้จะสามารถแสดงให้เห็นได้ในหัวข้อที่ 3.5 โดยเราจะเสนอวิธีการคำนวณค่าของ *b* และ *t* โดยเริ่มจากการหาค่าของ *z* จากนั้นจะปรับค่าของ *b* และ *t* เพื่อคำนวณค่าให้ได้ใกล้เคียงจำนวนจริง *x* มากที่สุดตามต้องการ

3.4 อัลกอริทึมการประมาณค่า (Estimation algorithm)

ก่อนที่จะกล่าวถึงวิธีการในการหาค่าของรูปแบบแทนจำนวนในระบบนี้ จะขอกล่าวถึงอัลกอริทึมการประมาณค่า โดยจุดประสงค์ของอัลกอริทึมการประมาณค่านั้นคือทำการประมาณค่าของจำนวนจริงใดๆ ที่มีค่าอยู่ในช่วง [1,2) และให้ผลลัพธ์ออกมาอยู่ในรูปของ $2^b 3^t$

โดยอัลกอริทึมการประมาณค่านั้นจะถูกนำไปใช้ในขั้นตอนการหารูปแบบแทนจำนวน การบวกและการลบ และด้วยการใช้อัลกอริทึมการประมาณค่าจะสามารถช่วยลดการใช้งานตารางเรียกดูค่าลงได้ ซึ่งจะได้แสดงในส่วนถัดไป สำหรับแนวคิดในการหาค่าประมาณ เพื่อความเข้าใจจะอธิบายโดยเริ่มจากนิยาม *ค่าใกล้เคียงมิติคู่* เพิ่มเติมดังนี้

นิยามที่ 5 *สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ* ค่าใกล้เคียงมิติคู่ *ของ x คือค่าที่อยู่ในช่วง* $(\frac{x}{2},2x)$

นิยามนี้มีจุดประสงค์เพื่อแสดงให้เห็นถึงแนวทางในการหาค่าประมาณของเราซึ่งจะเริ่มจากค่าๆ หนึ่งและทำการปรับไปเรื่อยๆ โดยค่านั้นจะต้องอยู่ในช่วงของค่าใกล้เคียงมิติคู่ที่ได้นิยามขึ้นมา

บทตั้งที่ 1 *กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่มีค่าเท่ากับ* $D_{b,t} = 2^b 3^t$ *เมื่อ b และ t เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า* $D_{b+1,t-1}$, $D_{b+2,t-1}$, $D_{b-1,t+1}$ *และ* $D_{b-2,t+1}$ *เป็น ค่าใกล้เคียงมิติคู่ของ x และมีค่าเป็นอัตราส่วนกับ* $D_{b,t}$

พิสูจน์ จากการพิจารณาค่าของ $2^b 3^t$ สำหรับจำนวนเต็ม *b* และ *t* ในตารางแสดงค่ามิติคู่ จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนต่างๆ ดังแสดงในรูปที่ 3.1

	3^{t-1}	3^t	3^{t+1}
2^{b+2}	$\frac{4x}{3}$	$4x$	$12x$
2^{b+1}	$\frac{2x}{3}$	$2x$	$6x$
2^b	$\frac{x}{3}$	x	$3x$
2^{b-1}	$\frac{x}{6}$	$\frac{x}{2}$	$\frac{3x}{2}$
2^{b-2}	$\frac{x}{12}$	$\frac{x}{4}$	$\frac{3x}{4}$

รูปที่ 3.1 ความสัมพันธ์ของ $2^b 3^t$ กับค่าใกล้เคียงในตารางมิติคู่

จะเห็นได้ว่าค่าของ $D_{b+1,t-1}$, $D_{b+2,t-1}$, $D_{b-1,t+1}$ *และ* $D_{b-2,t+1}$ จะอยู่ในช่วงของ $(\frac{x}{2},2x)$ เสมอ ดังนั้น ค่าเหล่านี้จึงเป็นค่าใกล้เคียงมิติคู่ และทุกค่าจะเป็นอัตราส่วนจากการคูณด้วย $2^i 3^j$ โดยที่ *i* และ *j* เป็นเลขจำนวนเต็ม ■

บทตั้งที่ 1 นี้มีจุดประสงค์เพื่อที่จะแสดงให้เห็นว่าหากมีค่าจำนวนจริง *x* ใดๆ ค่าหนึ่งที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ $2^b 3^t$ ได้ จะมีค่าเพียง 4 ค่าที่ใกล้เคียงกับ *x* และอยู่ในนิยามของค่า

ใกล้เคียงมิติคู่ที่ได้กล่าวไว้ในข้างต้น ซึ่งจะนำหลักการนี้ไปใช้ในการช่วยหาค่าประมาณของอัลกอริทึมการประมาณค่า

บทตั้งที่ 2 *กำหนดให้* $D_{b,t} = 2^b 3^t$ *เมื่อ b และ t เป็นจำนวนเต็ม สำหรับค่าคงที่ t จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม b เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ทำให้ ค่าของ* $D_{b,t}$ *อยู่ในช่วง (1, 2)*

พิสูจน์ จากที่กำหนดให้ $D_{b,t}$ คือค่าของ $2^b 3^t$ ใดๆ ถ้าให้ t เป็นค่าคงที่ เราจะแบ่งการพิสูจน์ออกเป็นสองส่วน โดยส่วนแรกคือ สำหรับทุกๆ ค่าของ b ที่เปลี่ยนด้วย n โดยที่ n คือจำนวนเต็มใดๆ ที่ไม่เท่ากับ 0 จะทำให้ค่าของ $D_{b,t}$ เปลี่ยนแปลงไป 2^n เท่าหรือเขียนได้เป็น $D_{b+n,t} = 2^{b+n} 3^t$ สำหรับส่วนที่สองคือหากมีค่า D_{b_x,t_x} ซึ่งอยู่ในช่วง (1,2) การเปลี่ยนแปลงของค่า b_x ไปด้วย n โดยที่ n คือจำนวนเต็มใดๆ ที่ไม่เท่ากับ 0 นั้นจะทำให้ได้ค่าใหม่ที่อยู่ในช่วง $(2^n, 2^{n+1})$ ซึ่งจะไม่อยู่ในช่วง (1,2) ■

บทตั้งที่ 2 นี้มีจุดประสงค์เพื่อแสดงให้เห็นว่าสำหรับ $D_{b,t}$ โดยที่กำหนดค่าจำนวนเต็ม t ให้เป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง สำหรับใน $D_{b,t} = 2^b 3^t$ จะมีเพียง b ตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ค่านี้อยู่ในช่วง (1,2) เมื่อนำพิจารณาพร้อมบทตั้งที่ 1 จะได้ว่าสำหรับ $D_{b,t}$ ใดๆ ที่มีค่าอยู่ในช่วง (1,2) จะสามารถหาค่าใกล้เคียงมิติคู่ที่อยู่ในช่วง (1,2) ได้จาก $D_{b+n,t}$ โดยที่ n นั้นเป็นจำนวนเต็มใดๆ ที่ไม่เท่ากับ 0 ได้เสมอ

บทตั้งที่ 3 *สำหรับค่า* $D_{b,t}$ *ใดๆ ภายในขอบเขตตารางของช่วง* $(t-5, t+5)$ *และ* $(b-8, b+8)$ *จะมีค่าที่มากกว่าและใกล้เคียงที่สุดที่* $D_{b+8,t-5}$ *และจะมีค่าที่น้อยกว่าและใกล้เคียงที่สุดที่* $D_{b-8,t+5}$

พิสูจน์ จากบทตั้งที่ 1 และ 2 จะเห็นได้ว่าสำหรับค่า $D_{b,t}$ ใดๆ จะมีค่าที่อยู่ในช่วง (1,2) เพียง 1 ค่าสำหรับทุก t_x ใดๆ และทุกค่าจะเป็นอัตราส่วนกับ $D_{b,t}$ เพราะฉะนั้นหากเราทำการแจกแจงค่าใกล้เคียง $D_{b,t}$ ทุกตัวสำหรับ $D_{b,t}$ ที่มีค่า t ในช่วงของ $(t-5, t+5)$ และ b ในช่วง $(b-8, b+8)$ จะได้ค่าที่มากกว่าและใกล้เคียงที่สุดคือ $D_{b+8,t-5} = \frac{256}{243} D_{b,t}$ และน้อยกว่าและใกล้เคียงที่สุดคือ $D_{b-8,t+5} = \frac{243}{256} D_{b,t}$ ■

บทตั้งที่ 3 นี้มีจุดประสงค์เพื่อแสดงให้เห็นว่าหากมีจำนวนจริง x ใดๆ อยู่ค่าหนึ่งหากต้องการหาค่าที่เป็นค่าใกล้เคียงมิติคู่ของ x และมีค่าใกล้เคียงกับ x โดยเลือกมาจากช่วงแคบๆ ของ b และ t ซึ่งในที่นี้คือ t ในช่วงของ $(t-5, t+5)$ และ b ในช่วง $(b-8, b+8)$ ซึ่งจากบทตั้งที่ 1 และ 2 จะได้ว่าใน $D_{b,t}$ ที่จำนวนเต็ม t มีค่าคงที่จะมีค่า $D_{b,t}$ ที่อยู่ในช่วง (1,2) เพียง 1 ค่า เพราะฉะนั้นหากเลือกมาทั้งหมด 10 ค่าจากช่วงที่กำหนดไว้ จะได้ว่าค่าที่ใกล้เคียงกับ $D_{b,t}$ มากที่สุดและมี

ค่าน้อยกว่าคือ $D_{b-8,t+5} = \frac{243}{256} D_{b,t}$ และค่าที่ใกล้เคียงกับ $D_{b,t}$ มากที่สุดและมีค่ามากกว่าคือ $D_{b+8,t-5} = \frac{256}{243} D_{b,t}$

สำหรับอัลกอริทึมการประมาณค่านั้นจะทำงานโดยใช้หลักการจากนิยามของค่าใกล้เคียงมิติคู่และบทตั้งทั้ง 3 ที่ได้กล่าวไว้ในข้างต้น ถ้าสมมติให้เราหาค่าประมาณของจำนวนจริง *x* ใดๆ ที่อยู่ในช่วง [1,2) ในรูปของ 2^b3^t นั้น สามารถทำได้โดยเริ่มต้นจากค่าใกล้เคียงมิติคู่ทั้งหมด 10 ค่า ดังแสดงในตารางที่ 3.1 ซึ่งจะเรียกค่าทั้ง 10 นี้ว่าค่าเริ่มต้น (initial value) ซึ่งค่าเริ่มต้นทั้ง 10 ค่านี้จะมีค่าอยู่ในช่วง [1,2) โดยเราจะใช้ค่าเริ่มต้นทั้ง 10 ค่านี้เพื่อนำไปสู่การหาค่าที่ใกล้เคียงกับจำนวนจริง *x* ที่เราต้องการ

ตารางที่ 3.1 แสดงการเรียงลำดับของค่าเริ่มต้นที่สร้างจากน้อยไปมาก

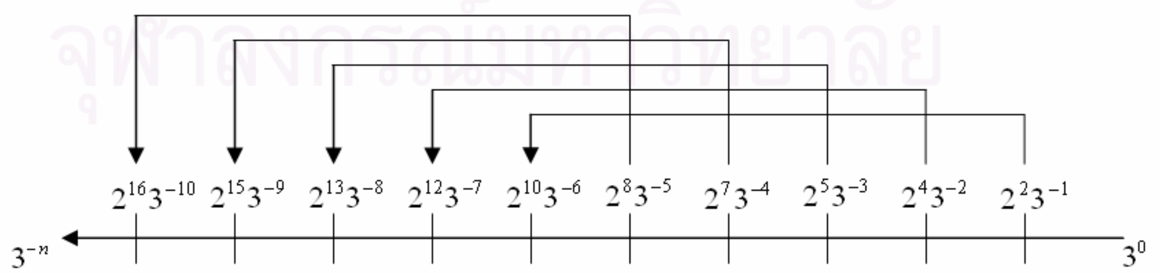
$2^8 3^{-5}$	1.053498
$2^{-3} 3^2$	1.125000
$2^5 3^{-3}$	1.185185
$2^{-6} 3^4$	1.265625
$2^2 3^{-1}$	1.333333
$2^{-1} 3^1$	1.500000
$2^7 3^{-4}$	1.580247
$2^{-4} 3^3$	1.687500
$2^4 3^{-2}$	1.777778
$2^{-7} 3^5$	1.898438

สำหรับเหตุผลในการใช้ค่าทั้ง 10 ค่านี้เป็นค่าเริ่มต้นจะสามารถอธิบายได้ดังนี้ จากตารางที่ 3.1 จะเห็นได้ว่าค่าเริ่มต้นที่น้อยสุดคือ $2^8 3^{-5}$ หรือ 1.053498 และค่าเริ่มต้นที่มากที่สุดคือ $2^{-7} 3^5$ หรือ 1.898438 ส่วนค่าที่เหลือทั้ง 8 ค่าจะอยู่ในระหว่างช่วงของค่าเริ่มต้นทั้ง 2 ค่านี้ และจะเห็นได้ว่าค่าเริ่มต้นทั้ง 10 นั้นมีค่าของกำลังของฐานสามอยู่ในช่วง [-5,5] ทั้งหมดยกเว้น 0 ซึ่งหากนำมาแสดงบนตารางสองมิติดั่งในตารางที่ 3.2 จะเห็นได้ว่าค่าเริ่มต้นทั้ง 10 ค่านี้จะครอบคลุมค่าในช่วง [1,2) ซึ่งอยู่ในรูปของ 2^b3^t เพียงแค่ 10 ค่าของจำนวนเต็ม *t* ที่อยู่ในช่วง [-5,5] ยกเว้น 0 ดังนั้นสิ่งที่ต้องพิจารณาคือในการหาค่าของช่วง [1,2) ซึ่งอยู่ในรูปของ 2^b3^t โดยที่จำนวนเต็ม *t* นั้นอยู่นอกช่วง [-5,5] นั้นสามารถคำนวณได้จากการค่าเริ่มต้นทั้ง 10 ค่านี้หรือไม่

ตารางที่ 3.2 แสดงค่าใกล้เคียงมิติคู่ของ 1 ที่มีค่าอยู่ในช่วง [1,2) สำหรับค่า *b* ในช่วง [-12,12] และ *t* ในช่วง [-7,7]

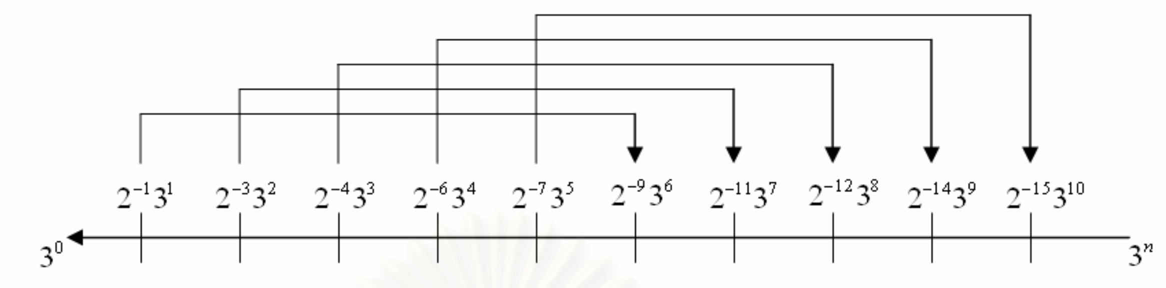
■							2^{12}							
							2^{11}							
	■						2^{10}							
							2^{9}							
		■					2^{8}							
			■				2^{7}							
							2^{6}							
				■			2^{5}							
					■		2^{4}							
							2^{3}							
						■	2^{2}							
							2^{1}							
3^{-7}	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	$2^{0}3^{0}$	3^{1}	3^{2}	3^{3}	3^{4}	3^{5}	3^{6}	3^{7}
							2^{-1}	■						
							2^{-2}							
							2^{-3}		■					
							2^{-4}			■				
							2^{-5}							
							2^{-6}				■			
							2^{-7}					■		
							2^{-8}							
							2^{-9}						■	
							2^{-10}							
							2^{-11}							■
							2^{-12}							

โดยในอัลกอริทึมการประมาณค่านี้จะทำการไล่หาค่าในตำแหน่งถัดไปโดยการคูณค่าเริ่มต้นด้วยค่า $2^{8}3^{-5}$ หรือ $2^{-8}3^{5}$ ซึ่งเมื่อพิจารณาจากตาราง 3.2 จะเห็นได้ว่าค่าใกล้เคียงมิติคู่ค่าถัดไปที่อยู่ติดกับ $2^{8}3^{-5}$ นั้นคือ $2^{10}3^{-6}$ ซึ่งเกิดจาก $2^{2}3^{-1}\times2^{8}3^{-5}$ และค่าใกล้เคียงมิติคู่ตัวถัดไปคือ $2^{12}3^{-7}$ นั้นเกิดจาก $2^{4}3^{-2}\times2^{8}3^{-5}$ ซึ่งค่าใกล้เคียงมิติคู่ค่าถัดๆ ไปนั้นก็เกิดขึ้นในทำนองเดียวกันจนไปถึงๆ จุดๆ หนึ่งซึ่งค่านั้นไม่อยู่ในช่วง [1,2) ซึ่งสามารถอธิบายได้ด้วยรูปที่ 3.2 ดังนี้



รูปที่ 3.2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าเริ่มต้นกับค่าใกล้เคียงมิติคู่ในลำดับถัดไปที่อยู่ในช่วง [1,2) และอยู่ในรูปของ $2^{b}3^{t}$ สำหรับจำนวนเต็ม $t < 0$

ซึ่งในทำนองเดียวกันกับค่าเริ่มต้นอีก 5 ค่าก็สามารถแสดงความสัมพันธ์กับค่าใกล้เคียงมิติคู่ได้ดังรูปที่ 3.3 ดังนี้



รูปที่ 3.3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าเริ่มต้นกับค่าใกล้เคียงมิติคู่ในลำดับถัดไปที่อยู่ในช่วง [1,2) และอยู่ในรูปของ $2^{b}3^{t}$ สำหรับจำนวนเต็ม $t > 0$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าจากค่าเริ่มต้นทั้ง 10 ค่านี้ ก็เพียงพอสำหรับการไล่หาค่าในลำดับถัดไปแล้ว

ในขั้นต่อมาจากค่าเริ่มต้นทั้ง 10 ค่านั้นเราจะทำการหาค่าที่เป็นขีดจำกัดบนและขีดจำกัดล่างของค่าเป้าหมายที่ต้องการหาค่าประมาณซึ่งในที่นี้คือ x โดยขีดจำกัดล่างของ x นั้นก็คือค่าที่ใกล้เคียงที่สุดและมีค่าน้อยกว่า x จากค่าเริ่มตั้งทั้งหมด 10 ค่าโดยเราจะเรียกค่านี้ว่า s_l และขีดจำกัดบนของ x นั้นก็คือค่าที่ใกล้เคียงที่สุดและมีค่ามากกว่า x จากค่าเริ่มตั้งทั้งหมด 10 ค่าโดยเราจะเรียกค่านี้ว่า s_r หลังจากที่เราได้ค่า s_l และ s_r ซึ่งเป็นขีดจำกัดล่างและขีดจำกัดบนของ x แล้ว ก็จะทำการปรับค่า s_l และ s_r ให้เข้าใกล้กับค่า x ที่เราต้องการหาค่าประมาณมากขึ้น โดย s_l จะทำการปรับโดยนำไปคูณด้วย $2^{8}3^{-5}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{256}{243}$ ซึ่งส่งผลให้ค่า s_l นั้นจะเพิ่มขึ้นเป็นลำดับ และทำการปรับค่า s_r โดยนำไปคูณด้วย $2^{-8}3^{5}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{243}{256}$ ซึ่งส่งผลให้ค่า s_r นั้นจะลดลงเป็นลำดับ โดยหลังจากทำการปรับค่าในแต่ละรอบแล้วก็จะนำค่า s_l และ s_r ใหม่มาทำการเปรียบเทียบหาค่าความคลาดเคลื่อนเมื่อเทียบกับ s_l และ s_r เดิม ถ้าหากว่าค่า s_l และ s_r ใหม่นั้น มีค่าความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าค่า s_l และ s_r เดิมก็จะใช้ s_l และ s_r ใหม่แทน s_l และ s_r เดอม แต่ถ้าหากว่าค่าความคลาดเคลื่อนของ s_l และ s_r ใหม่มีค่ามากกว่าเดิมก็ให้คง s_l และ s_r ตัวเดิมไว้ โดยการทำงานในขั้นตอนนี้จะทำงานวนรอบไปเรื่อยๆ และจะหยุดเมื่อค่า s_l นั้นมีค่ามากกว่า x และค่า s_r นั้นมีค่าน้อยกว่า x เนื่องด้วยสาเหตุที่ว่าค่า s_l นั้นจะเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ฉะนั้นเมื่อค่า s_l มากกว่า x แล้วเมื่อทำการหาค่าประมาณต่อไปก็จะให้ค่าความคลาดเคลื่อนที่สูงขึ้นเรื่อยๆ ในทำนองเดียวกันค่า s_r นั้นก็จะมีค่าลดลงเรื่อยๆ และเมื่อลดจนน้อยกว่า x แล้วก็จะให้ค่าความคลาดเคลื่อนที่สูงขึ้นเรื่อยๆ โดยหลังจากที่ได้ค่า s_l และ s_r ที่ดีที่สุดจากอัลกอริทึมการประมาณค่าแล้วก็จะนำค่า s_l และ s_r ที่ได้นี้มาทำการเปรียบเทียบหาค่าความคลาดเคลื่อนหากค่าใดให้ค่าความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าก็จะเลือกออกมาเป็นผลลัพธ์ของอัลกอริทึมการประมาณค่าซึ่งจะอยู่ในรูปของ $2^{b}3^{t}$

สำหรับขั้นตอนการทำงานของอัลกอริทึมการประมาณค่านั้นจะสามารถเขียนแสดงได้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.1 *กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่มีค่าอยู่ในช่วงของ [1,2) การหาค่าประมาณของ x ซึ่งอยู่ในรูปของ* $2^{b_x}3^{t_x}$ *สามารถคำนวณได้ในระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยาย โดยผลลัพธ์สามารถแสดงได้เป็นจำนวนเต็ม b และ t ซึ่งเป็นค่าเลขชี้กำลังของฐานสองฐานสามตามลำดับ ดังที่แสดงในอัลกอริทึม 3.1*

อัลกอริทึม 3.1 อัลกอริทึมการประมาณค่า

input : x where $x \in [1, 2)$
output : b , t where b and t are integers.
begin
$a[0] \leftarrow 2^8 3^{-5}$; $a[1] \leftarrow 2^{-3}3^2$; $a[2] \leftarrow 2^5 3^{-3}$;
$a[3] \leftarrow 2^{-6}3^4$; $a[4] \leftarrow 2^2 3^{-1}$; $a[5] \leftarrow 2^{-1}3^1$;
$a[6] \leftarrow 2^7 3^{-4}$; $a[7] \leftarrow 2^{-4}3^3$; $a[8] \leftarrow 2^4 3^{-2}$;
$a[9] \leftarrow 2^{-7}3^5$;
Find the lower bound of ***x***
Let s_l be of the form $2^{b_l}3^{t_l}$;
$s_l \leftarrow a[0]$; $L \leftarrow x - \| s_l \|$; $i \leftarrow 1$;
while $L > 0$ **do**
$L \leftarrow x - a[i]$
i ++
$s_l \leftarrow a[i\text{-}1]$
enddo
Find the upper bound of ***x***
Let s_r be of the form $2^{b_r}3^{t_r}$;
$s_r \leftarrow a[9]$; $R \leftarrow \| s_r \| - x$; $i \leftarrow 8$;
while $R > 0$ **do**
$R \leftarrow a[i] - x$
i – –
$s_r \leftarrow a[i+1]$
enddo
$f_l \leftarrow 2^8 3^{-5}$
$f_r \leftarrow 2^{-8}3^5$
while $|x - \| s_l \| | > |x - \| s_l \times f_l \| |$ **do**
$s_l \leftarrow s_l \times f_l$
enddo
while $|x - \| s_r \| | > |x - \| s_r \times f_r \| |$ **do**
$s_r \leftarrow s_r \times f_r$
enddo
Select the closest estimator ***s***
if $| \| s_l \| - x| < | \| s_r \| - x|$
$b \leftarrow b_l$
$t \leftarrow t_l$
else

$b \leftarrow b_r$
$t \leftarrow t_r$
endif
end
หมายเหตุ: $\| a \|$ แสดงถึงค่าเชิงตัวเลขของ a.

พิสูจน์

จากอัลกอริทึมการประมาณค่าจะได้ว่าผลลัพธ์ b และ t นั้นคือค่าของเลขชี้กำลังฐานสองและฐานสามตามลำดับ โดยที่ 2^b3^t นั้นมีเป็นค่าประมาณของ x ซึ่งมีค่าในช่วง [1,2) หรือเขียนได้ว่า

$$2^b3^t \approx x$$

โดยที่ b นั้นและ t นั้นได้จากการพิจารณาค่า s_l และ s_r ดังต่อไปนี้

ค่า s_l เป็นค่าที่น้อยกว่า x และมีค่าอยู่ในรูปของ $2^{b_l}3^{t_l}$ ถูกคูณด้วย 2^83^{-5} ซึ่งจะทำให้มีค่ามากขึ้นเป็นลำดับ จนกระทั่งค่าของ x สอดคล้องกับสมการ

$$s_l \times (2^8 3^{-5})^n \le x \le s_l \times (2^8 3^{-5})^{n+1}$$

โดยที่ n นั้นเป็นจำนวนเต็มที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0
จะได้ว่า

$$s_l \times (2^8 3^{-5})^{n+1} - x < s_l \times (2^8 3^{-5})^{n+2} - x$$

และ

$$\left| s_l \times (2^8 3^{-5})^n - x \right| < \left| s_l \times (2^8 3^{-5})^{n-1} - x \right|$$

เพราะฉะนั้น $s_l \times (2^8 3^{-5})^n$ และ $s_l \times (2^8 3^{-5})^{n+1}$ จึงเป็นค่าที่ใกล้เคียงกับ x และอยู่ในรูปของ 2^b3^t และผลลัพธ์สุดท้ายของ s_l คือ $s_l \times (2^8 3^{-5})^n$ ถ้า

$$\left| s_l \times (2^8 3^{-5})^n - x \right| < \left| s_l \times (2^8 3^{-5})^{n+1} - x \right|$$

หรือ $s_l \times (2^8 3^{-5})^{n+1}$ เมื่อเป็นกรณีอื่นๆ

ค่า s_r เป็นค่าที่มากกว่า x และมีค่าอยู่ในรูปของ $2^{b_r}3^{t_r}$ ถูกคูณด้วย $2^{-8}3^5$ ซึ่งจะทำให้มีค่าน้อยลงเป็นลำดับ จนกระทั่งค่าของ x สอดคล้องกับสมการ

$$s_r \times (2^{-8} 3^5)^{m+1} \le x \le s_r \times (2^{-8} 3^5)^m$$

โดยที่ m นั้นเป็นจำนวนเต็มที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0
จะได้ว่า

$$s_r \times (2^{-8} 3^5)^m - x < s_r \times (2^{-8} 3^5)^{m-1} - x$$

และ

$$\left| s_r \times (2^{-8} 3^5)^{m+1} - x \right| < \left| s_r \times (2^{-8} 3^5)^{m+2} - x \right|$$

เพราะฉะนั้น $s_r \times (2^{-8} 3^5)^m$ และ $s_r \times (2^{-8} 3^5)^{m+1}$ จึงเป็นค่าที่ใกล้เคียงกับ x และอยู่ในรูปของ 2^b3^t และผลลัพธ์สุดท้ายของ s_r คือ $s_r \times (2^{-8} 3^5)^m$ ถ้า

$$\left| s_r \times (2^{-8} 3^5)^m - x \right| < \left| s_r \times (2^{-8} 3^5)^{m+1} - x \right|$$

หรือ $s_r \times (2^{-8}3^5)^{m+1}$ เมื่อเป็นกรณีอื่นๆ
เพราะฉะนั้น s_l และ s_r จึงเป็นค่าใกล้เคียงกับ x และเนื่องจาก 2^b3^t นั้นมีค่าเท่ากับ $2^{b_l}3^{t_l}$ หรือ $2^{b_r}3^{t_r}$ ซึ่งเป็นค่าที่ใกล้เคียงกับ x ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า 2^b3^t นั้นมีเป็นค่าประมาณของ x จริง ■

โดยเราสามารถแสดงตัวอย่างการทำงานของอัลกอริทึมการหาค่าประมาณได้ดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4 *จงหาค่าประมาณของ 1.2 ในรูปของ* 2^b3^t
วิธีทำ จากค่าเริ่มต้นทั้ง 10 ค่า ค่าประมาณที่มากกว่าใกล้เคียง 1.2 ที่สุดคือ 1.265625 หรือ $2^{-6}3^4$ มีค่าความคลาดเคลื่อนประมาณ 0.065625 เรียกว่า s_r และค่าที่น้อยกว่าและใกล้เคียง 1.2 ที่สุดคือ 1.185185 หรือ 2^53^{-3} มีค่าความคลาดเคลื่อนประมาณ 0.014815 เรียกว่า s_l ถ้าต้องหาค่าประมาณที่ใกล้เคียงขึ้น สามารถทำได้โดยคำนวณค่าของ ค่าของ s_l ใหม่ซึ่งมีค่าเท่ากับ $2^{5+8}3^{-3-5}$ มีค่าประมาณเท่ากับ 1.24859 ค่าความคลาดเคลื่อนประมาณ 0.04859 จะเห็นว่าค่าของ s_l นั้นมีค่าคลาดเคลื่อนที่สูงขึ้นและค่าของ s_l มีค่ามากกว่า 1.2 จึงทำการหยุดหาค่า s_l อันถัดไปและค่าที่ดีที่สุดของ s_l คือ 2^53^{-3}

คำนวณค่า s_r ใหม่เท่ากับ $2^{-6-8}3^{4+5}$ มีค่าประมาณเท่ากับ 1.201355 ค่าความคลาดเคลื่อนประมาณ 0.001355 ซึ่งยังสามารถคำนวณต่อไปได้อีก โดยค่า s_r สามารถคำนวณหาค่าประมาณต่อได้เท่ากับ $2^{-6-8-8}3^{4+5+5}$ มีค่าเท่ากับ 1.140348 มีค่าความคลาดเคลื่อนเท่ากับ 0.059652 ซึ่งสูงกว่าค่าเดิมและ s_r มีค่าน้อยกว่า 1.2 จึงหยุดการคำนวณและทำการเลือกค่าที่ดีที่สุดของ s_r คือ $2^{-14}3^9$

จะเห็นได้ว่าค่า s_r มีค่าที่ใกล้เคียง 1.2 มากกว่า s_l จึงทำการเลือก y = $2^{-14}3^9$ เป็นค่าประมาณของ 1.2 □

จากตัวอย่างที่ผ่านมา ในกรณีของการคำนวณโดยใช้วิธีการตามระบบลอการิทึมมิติคู่นั้น เพื่อให้ได้คำตอบที่มีความถูกต้องใกล้เคียงกัน จำเป็นต้องใช้ตารางที่ครอบคลุมค่าของ b ในช่วง (-16 , 16) และ t ในช่วง (-16 , 16) โดยการสร้างค่า 2^b3^t ทั้งหมดในช่วงที่กำหนดใส่ในตารางเรียกดูค่า และทำการเลือกค่าประมาณที่ใกล้เคียง 1.2 ที่สุดมาจะได้ว่าค่าประมาณนั้นคือ $2^{-14}3^9$ ซึ่งจะเห็นว่าในตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่าระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายสามารถหาผลลัพธ์ที่มีค่าความแม่นยำเท่ากับระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบเดิมได้โดยไม่ต้องใช้การสร้างตารางเรียกดูค่าขึ้นมาใช้ โดยทั้งนี้ถ้าหากต้องการปรับค่าความแม่นยำของผลลัพธ์นี้ก็สามารถทำได้ โดยรายละเอียดเกี่ยวกับการปรับปรุงค่าความแม่นยำนี้จะได้กล่าวถึงในส่วนท้ายของบทนี้

3.5 การหารูปแบบแทนจำนวน

ระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายนั้นสามารถหารูปแบบแทนจำนวนของค่าจำนวนจริงใดๆ ได้ สำหรับการหารูปแบบแทนจำนวนในระบบนี้ สามารถทำได้โดย หากมีค่าจำนวนจริง x ใดๆ จะเริ่มต้นจากการคำนวณหาค่าของ 2^z ที่ทำให้ $2^z \le x < 2^{z+1}$ ซึ่งทำได้โดยนำ x มาหารด้วย 2 จนกระทั่ง x มีค่าอยู่ในช่วง [1,2) สำหรับกรณีที่ x มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 2 และนำ x ไปคูณด้วย 2 จนกระทั่ง x มีค่าอยู่ในช่วง [1,2) สำหรับกรณีที่ x มีค่าน้อยกว่ากว่า 1 โดยค่า z นั้นคือจำนวนครั้งของการคูณหรือการหารที่เกิดขึ้นในขั้นตอนนี้ ซึ่งจะสังเกตได้ว่าจำนวนเต็ม z มีเพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่สอดคล้องกับคุณสมบัติของรูปแบบแทนจำนวนมิติคู่แบบขยาย และเรียกค่าของ x ที่อยู่ในช่วง [1,2) นี้ว่า a ซึ่งสามารถหาค่าประมาณของ a ได้จากอัลกอริทึมการประมาณค่าโดยจะให้ผลลัพธ์ออกมาอยู่ในรูปของ 2^b3^t โดยค่าของ 2^b3^t มีค่าอยู่ในช่วง [1,2) จากนั้นจึงทำการหาค่าประมาณของ 2^b3^t โดยใช้อัลกอริทึมการประมาณค่า ซึ่งขั้นตอนการทำงานของอัลกอริทึมการหารูปแบบแทนจำนวนนั้นสามารถเขียนแสดงได้ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.2 *กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ การหารูปแบบแทนจำนวนของ x ในระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายสามารถทำได้โดยอัลกอริทึมที่ 3.2 โดยผลลัพธ์จะสามารถแสดงได้เป็น (s, b, t, z) โดยที่ b และ t และ z เป็นจำนวนเต็มและ s เป็นค่าตัวเลขบอกเครื่องหมาย*

อัลกอริทึมที่ 3.2 อัลกอริทึมในการหารูปแบบแทนจำนวน

```
input  : x            where x is a real number
output : b ,t ,z ,s   where b ,t ,z ,s are integers.
begin
    if x ≥ 0
        s ← 0
    else
        s ← 1
    endif
    i ← 0
    if x ≥ 2 then
        while x ≥2 do
            x ← x ÷2
            i ++
        enddo
    else
        while x < 1 do
            x ← x ×2
            i – –
        enddo
    endif
    z ← i
    b , t ← estimate algorithm(x)
end
```

พิสูจน์

จากอัลกอริทึมที่ 3.2 จะได้ว่ารูปแบบแทนจำนวนของจำนวนจริง x คือ (s, b, t, z)

เราสามารถหา s ได้จาก ถ้าค่าจำนวนจริง x มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 นั้น s จะมีค่าเท่ากับ 0 และสำหรับกรณีอื่นๆ s จะมีค่าเท่ากับ 1

สำหรับค่า z เราสามารถแบ่งการหาออกได้เป็น 2 กรณี ดังต่อไปนี้

1. ถ้าค่าจำนวนจริง x มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 2 นั้น z คือจำนวนเต็มบวกที่ทำให้ $1 \leq \dfrac{x}{2^z} < 2$ ซึ่งหาได้จากนำ x มาหารด้วย 2 เป็นจำนวน z ครั้งจนกระทั่งค่า x นั้นอยู่ในช่วง [1,2)
2. ถ้าค่าจำนวนจริง x มีค่าน้อยกว่า 1 นั้น z คือจำนวนเต็มบวกที่ทำให้ $1 \leq x \times 2^z < 2$ ซึ่งหาได้จากนำ x มาคูณด้วย 2 เป็นจำนวน z ครั้งจนกระทั่งค่า x นั้นอยู่ในช่วง [1,2)

จากอัลกอริทึมการประมาณค่าจะได้ว่า $\dfrac{x}{2^z}$ และ $x \times 2^z$ มีค่าอยู่ในช่วง [1,2) เสมอเพราะฉะนั้นเมื่อนำไปใช้เป็นตัวแปรเริ่มต้นในอัลกอริทึมการประมาณค่าจะได้คำตอบของ b และ t เสมอ เพราะฉะนั้นจึงสรุปได้ว่าอัลกอริทึมการประมาณค่าสามารถหารูปแบบแทนจำนวนของจำนวนจริง x ใดๆ ในรูป (s, b, t, z) ได้เสมอ ■

ซึ่งตัวอย่างในการทำงานของอัลกอริทึมการหารูปแบบแทนจำนวนนี้สามารถแสดงให้เห็นได้ดังในตัวอย่างที่ 5 ดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5 *จงเขียนขั้นตอนการหารูปแบบแทนจำนวนของระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายของ 3900*

วิธีทำ ขั้นตอนการหารูปแบบแทนจำนวนคือ

หาค่า z โดยการหาร 3900 ด้วย 2 จำนวนทั้งหมด 11 ครั้งจะได้ว่าค่า z มีค่าเท่ากับ 11 และผลลัพธ์ที่ได้คือ 1.904297 หรือเขียน 3900 ในอีกรูปได้เป็น 1.904297×2^{11}

หาค่าประมาณของ 1.904297 ด้วยอัลกอริทึมการประมาณซึ่งสามารถแสดงขั้นตอนการทำงานได้ดังต่อไปนี้

เนื่องจากไม่มีค่าเริ่มต้นค่าใดมีค่าสูงกว่า 1.904297 ดังนั้นค่า s_r จึงไม่สามารถระบุได้ ทำให้ต้องพิจารณาจาก s_l เพียงตัวเดียวแทนโดยจากค่าเริ่มต้นทั้ง 10 ค่านั้น ค่า s_l คือ $2^{-7}3^5$ = 1.898438 ซึ่งมีค่าความคลาดเคลื่อนเท่ากับ 0.005859 และเป็น s_l ที่ดีที่สุดที่หาได้ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $2^{-7}3^5$ นั้นเป็นค่าประมาณของ 1.904297 เนื่องจาก 3900 เป็นมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 ดังนั้นค่าของ s จึงเป็น 0 และสามารถเขียนผลลัพธ์สุดท้ายได้เป็น $2^{-7}3^5 \times 2^{11}$ = 3888 ซึ่งมีค่าความคลาดเคลื่อนเท่ากับ 12 □

3.6 การแก้ปัญหากรณีเกิดการล้น (Overflow problem)

สำหรับในบางกรณีที่ค่าของพจน์ 2^b3^t หลังจากการดำเนินการใดๆ มีค่าที่ไม่อยู่ในช่วง [0,2) ซึ่งทำให้ไม่อยู่ในนิยามของระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายจะ ต้องทำการแก้ไขด้วยขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ปรับค่ากำลังของ *b* ในพจน์ 2^b3^t ด้วยการหารพจน์ 2^b3^t ด้วย 2 จนจะมีค่าอยู่ในช่วงที่กำหนดเรียกจำนวนครั้งที่หารว่า *d*
2. ปรับเพิ่มค่าของพจน์ 2^z โดยนำไปคูณกับ 2^d
3. จะได้ผลลัพธ์สุดท้ายออกมาเป็น $2^{b-d}3^t \times 2^{z+d}$

ทฤษฎีบทที่ 3.3 *กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่งแสดงอยู่ในรูปแบบของลอการิทึมมิติคู่แบบขยายได้เป็น (s, b_x, t, z_x) และ* $2^{b_x}3^t \notin [0,2)$ *สามารถทำการแก้ปัญหาการล้นได้โดยอัลกอริทึมที่ 3.3 โดยผลลัพธ์จะสามารถแสดงได้เป็น (s, b_r, t, z_r) โดยที่* $2^{b_r}3^t \in [0,2)$

อัลกอริทึมที่ 3.3 อัลกอริทึมในการแก้ปัญหากรณีเกิดการล้น

input : x where x is represented by (s, b_x, t, z_x) and $2^{b_x}3^t \notin [0,2)$
output : R where R is represented by (s, b_r, t, z_r) and $2^{b_r}3^t \in [0,2)$
begin
  $i \leftarrow 0$
  $a \leftarrow 2^{b_x}3^t$
  while $||a|| \geq 2$ **do**
    $b_x \leftarrow b_x - 1$
    $i{+}{+}$
  enddo
  $d \leftarrow i$
  $b_r \leftarrow b_x$
  $z_r \leftarrow z + d$
end

พิสูจน์

การพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 3.3 จะเป็นการพิสูจน์ให้เห็นว่าค่าของจำนวนจริง *x* ซึ่งแสดงได้โดย *(s, b_x, t, z_x)* โดยที่ $2^{b_x}3^t \notin [0,2)$ ซึ่งไม่อยู่ในนิยามของระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายสามารถแปลงให้เป็น *z* ซึ่งแสดงได้โดย *(s, b_r, t, z_r)* และ $2^{b_r}3^t \in [0,2)$ ซึ่งอยู่ในนิยามของระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายได้

กรณีที่ค่าของ *x* ไม่อยู่ในนิยามของระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายนั้นเกิดจากพจน์ $2^{b_x}3^t$ ของ *x* นั้นมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 2 ซึ่งจากอัลกอริทึม 3.3 จะทำการแก้ไขโดยนำพจน์ $2^{b_x}3^t$ ของ *x* ไปหารด้วย *2* เป็นจำนวน *d* ครั้งและสอดคล้องกับสมการ

$$0 \leq 2^{b_x-d}3^t < 2$$

จะเห็นได้ว่า $2^{b_x-d}3^t$ นั้นมีค่าอยู่ในช่วง [1,2) ซึ่งอยู่ในนิยามของระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่จริงและ z_x จะถูกเปลี่ยนเป็น $z_x + d$ เพื่อทำให้ค่าเชิงตัวเลขยังคงเท่ากันอยู่ซึ่งแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$2^{b_r}3^t \times 2^{z_r} = 2^{b_x-d}3^t \times 2^{z_x+d} = 2^{b_x}3^t \times 2^{z_x}$$

เพราะฉะนั้นเราสามารถแก้ไขปัญหาค่าที่ไม่อยู่ในนิยามของระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายหรือเป็นค่าที่เกิดการล้นได้เสมอ ■

โดยตัวอย่างของการแก้ปัญหากรณีเกิดการล้นสามารถแสดงให้เห็นได้ดังตัวอย่างที่ 6

ตัวอย่างที่ 6 *จงปรับแก้ค่าของ* $2^{-13}3^9 \times 2^{22}$ *ให้อยู่ในนิยามของระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยาย*

วิธีทำ เนื่องจากว่าค่าของ $2^{-13}3^9$ นั้นมีค่าเท่ากับ 2.402709 ซึ่งไม่อยู่ในช่วง [0,2) ดังที่ได้นิยามไว้ จึงต้องทำการปรับแก้ค่าโดยทำการหาร $2^{-13}3^9$ ด้วย 2 จำนวน 1 ครั้ง จะได้ผลลัพธ์เป็น $2^{-14}3^9$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1.201355 ซึ่งอยู่ในนิยามที่ได้กำหนดไว้ และทำการปรับค่าของ 2^{22} โดยนำไปคูณด้วย 2 จำนวน 1 ครั้งจะได้ผลลัพธ์เป็น 2^{23} ซึ่งผลลัพธ์สุดท้ายที่ได้คือ $2^{-14}3^9 \times 2^{23}$ □

3.7 ตัวดำเนินการคูณและการหาร

ในการคูณและการหารของระบบระบบจำนวนลอการิทึมแบบมิติคู่แบบขยายนั้นจะทำโดยใช้แนวทางเดียวกับระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่เดิม ซึ่งอาศัยหลักการคุณสมบัติของลอการิทึม ทำให้การคูณนั้นสามารถทำได้เสมือนเป็นการบวกของเลขชี้กำลังและการหารสามารถทำได้เสมือนเป็นการลบของเลขชี้กำลัง ซึ่งในที่นี้ก็คือค่าจำนวนเต็ม b, t และ z ซึ่งเป็นค่าของเลขชี้กำลังของฐานสอง ฐานสาม และพจน์บอกขนาดตามลำดับ ซึ่งสามารถเขียนแสดงได้ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.4 *กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่งแสดงอยู่ในรูปแบบของระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายเป็น* (s_x, b_x, t_x, z_x) *และ* (s_y, b_y, t_y, z_y) *ตามลำดับ การคูณและการหารของ x ด้วย y สามารถคำนวณได้ในระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยาย โดยผลลัพธ์แสดงได้เป็น* $((s_x+s_y) \bmod 2,\ b_x + b_y,\ t_x + t_y,\ z_x + z_y)$ *และ* $((s_x+s_y) \bmod 2,\ b_x - b_y,\ t_x - t_y,\ z_x - z_y)$ *ตามลำดับ*

พิสูจน์

การพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 3.4 จะเป็นการพิสูจน์ให้เห็นว่าการคูณและการหารในระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายนั้นสามารถทำได้จริงและมีผลลัพธ์เป็น ((s_x+s_y)mod 2, $b_x + b_y$, $t_x + t_y$, $z_x + z_y$) และ ((s_x+s_y)mod 2, $b_x – b_y$, $t_x – t_y$, $z_x – z_y$) ตามลำดับ

จากคุณสมบัติของลอการิทึมที่แสดงในหัวข้อ 2.2 จะได้ว่า สามารถเห็นได้ชัดเจนว่า ถ้ากำหนดให้ x = (s_x, b_x, t_x, z_x) ซึ่งมีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับ $2^{b_x}3^{t_x} \times 2^{z_x}$ และ $y = (s_y, b_y, t_y, z_y)$ ซึ่งมีค่าเชิงตัวเลขเท่ากับ $2^{b_y}3^{t_y} \times 2^{z_y}$ จะได้ว่าผลคูณของ $|x \times y|$ คือ

$$2^{b_x+b_y}3^{t_x+t_y} \times 2^{z_x+z_y}$$

และผลหารของ $|x \div y|$ คือ

$$2^{b_x-b_y}3^{t_x-t_y} \cdot 2^{z_x-z_y}$$

ดังนั้นการคูณและการหารในระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายสามารถทำได้จริงและให้ผลลัพธ์เป็น ((s_x+s_y)mod 2, $b_x + b_y$, $t_x + t_y$, $z_x + z_y$) และ ((s_x+s_y)mod 2, $b_x – b_y$, $t_x – t_y$, $z_x – z_y$) ตามลำดับ ■

สำหรับตัวอย่างของการคูณและการหารในระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายนั้นสามารถแสดงให้เห็นดังตัวอย่างที่ 7

ตัวอย่างที่ 7 *จงหาผลคูณและหารของ 3900 ด้วย 2600*

วิธีทำ เนื่องจากว่า 3900 สามารถเขียนในระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่ได้เป็น $2^{-7}3^{5} \times 2^{11}$ และ 2600 สามารถเขียนในระบบได้เป็น $2^{-6}3^{4} \times 2^{11}$

ผลคูณของ 3900×2600 จึงมีค่าเท่ากับ $2^{-7-6}3^{5+4} \times 2^{11+11} = 2^{-13}3^{9} \times 2^{22}$

แต่เมื่อพิจารณาจะพบว่าค่าของ $2^{-13}3^{9}$ มีนั้นไม่อยู่ในช่วง [1,2) จึงต้องทำการปรับแก้ค่าของ $2^{-13}3^{9}$ โดยใช้หลักการจากหัวข้อการแก้ปัญหาเมื่อเกิดค่าล้นซึ่งจะทำให้ได้ผลลัพธ์สุดท้ายออกมามีค่าเท่ากับ $2^{-13-1}3^{9} \times 2^{22+1} = 2^{-14}3^{9} \times 2^{23}$

ผลหารของ $3900 \div 2600$ จึงมีค่าเท่ากับ $2^{-7+6}3^{5-4} \times 2^{11-11} = 2^{-1}3^{1} \times 2^{0}$ เมื่อพิจารณาจะพบว่าค่าของ $2^{-1}3^{1}$ มีนั้นอยู่ในช่วง [1,2) อยู่แล้ว จึงไม่ต้องทำการปรับแก้ค่า □

3.8 ตัวดำเนินการบวก

ในการบวกของระบบจำนวนลอการิทึมแบบมิติคู่แบบขยายนั้นจะไม่ใช้การสร้างตารางเรียกดูค่าในการหาผลลัพธ์ของการบวก แต่จะใช้การคำนวณเฉพาะในส่วนของพจน์ $2^{b}3^{t}$ และการใช้อัลกอริทึมการประมาณค่าเพื่อนำไปสู่การหาผลลัพธ์แทน โดยจะสามารถเขียนรูปทั่วไปของการบวกได้ดังนี้

สำหรับ $x = 2^{b_x}3^{t_x} \times 2^{z_x}$ และ $y = 2^{b_y}3^{t_y} \times 2^{z_y}$ รูปทั่วไปของ $x + y$ คือ

$$x + y = 2^{b_x}3^{t_x} \times 2^{z_x} \times (1 + 2^{b_y-b_x+z_y-z_x}3^{t_y-t_x})$$

ซึ่งถ้าหากกำหนดให้ $|x| \geq |y|$ จะได้ว่า

$$1 + 2^{b_y - b_x + z_y - z_x} 3^{t_y - t_x} \in [1, 2]$$

และ

$$2^{b_y - b_x + z_y - z_x} 3^{t_y - t_x} \in (0,1]$$

ซึ่งสามารถแบ่งการพิจารณาออกได้เป็นสองส่วน โดยถ้า $2^{b_y - b_x + z_y - z_x} 3^{t_y - t_x} = 1$ ก็สามารถหาผลลัพธ์ของการบวกได้ทันที นั่นคือเท่ากับ 2^1 และมีผลลัพธ์สุดท้ายเป็น $2^{b_x} 3^{t_x} \times 2^{z_x + 1}$ หรือ $2^{b_y} 3^{t_y} \times 2^{z_y + 1}$ แต่ถ้าพิจารณาเฉพาะในกรณี $|x| > |y|$ ในรูปของระบบจำนวนตัวเลขธรรมดา คำตอบของพจน์ $2^{b_y - b_x + z_y - z_x} 3^{t_y - t_x}$ จะอยู่ในรูป $0.a_1 a_2 ... a_n$ ซึ่งเมื่อนำมาบวกด้วย 1 จะได้คำตอบในรูปของระบบจำนวนตัวเลขธรรมดาเป็น $1.a_1 a_2 ... a_n$ ซึ่งก็คือค่าของ $1 + 2^{b_y - b_x + z_y - z_x} 3^{t_y - t_x}$ นั่นเอง จะเห็นได้ว่าสามารถละการบวกด้วย 1 ด้วยการเปลี่ยนเลข 0 ตัวซ้ายสุดแทนได้ และจะเห็นได้ว่า $1 + 2^{b_y - b_x + z_y - z_x} 3^{t_y - t_x}$ มีค่าอยู่ในช่วง [1,2) ซึ่งอยู่ในช่วงการทำงานของอัลกอริทึมการประมาณค่า ทำให้สามารถหาคำตอบออกมาอยู่ในรูป $2^{b_r} 3^{t_r}$ ใดๆ และสามารถหาผลลัพธ์สุดท้ายได้เป็น $x + y = 2^{b_x + b_r} 3^{t_x + t_r} \times 2^{z_x}$ ซึ่งจะเห็นได้ว่าในขั้นตอนการทำงานของอัลกอริทึมการบวกนี้ไม่จำเป็นต้องใช้การสร้างตารางเรียกดูค่าเพื่อเก็บค่าของฟังก์ชันที่เกิดขึ้นจากการบวกเหมือนในระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่ตัวเดิมแต่อย่างใด

สำหรับขั้นตอนการทำงานของอัลกอริทึมการบวกจะสามารถเขียนแสดงได้ดังต่อไปนี้

ทฤษฏีบทที่ 3.5 *กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่งแสดงอยู่ในรูปแบบของระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายเป็น* (s_x, b_x, t_x, z_x) *และ* (s_y, b_y, t_y, z_y) *ตามลำดับ การบวกของ x + y สามารถคำนวณได้ในระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่ โดยผลลัพธ์แสดงได้เป็น (s, b, t, z) ซึ่งสามารถแสดงได้ในอัลกอริทึม 3.5*

อัลกอริทึมที่ 3.5 อัลกอริทึมการบวก

input : x where x is of the form $2^{b_x} 3^{t_x} \times 2^{z_x}$,
: y where y is of the form $2^{b_y} 3^{t_y} \times 2^{z_y}$,
and $|x| \geq |y|$
output : R where R is of the form $2^b 3^t \times 2^z$
and $R = x + y$
begin
$w \leftarrow \| 2^{b_y - b_x + z_y - z_x} 3^{t_y - t_x} \|$
if $w = 1$ **then**
$r_x \leftarrow b_x$
$r_y \leftarrow t_x$
$r_z \leftarrow z_x + 1$
else
$b_r, t_r \leftarrow$ estimate algorithm$(w + 1)$

$r_x \leftarrow b_x + b_r$
$r_y \leftarrow t_x + t_r$
$r_z \leftarrow z_x$
endif
$R \leftarrow 2^{r_x}3^{r_y} \times 2^{r_z}$
end

พิสูจน์

การพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 3.5 จะเป็นการพิสูจน์ให้เห็นว่าคำตอบที่ได้จากอัลกอริทึม 3.6 นั้นเป็นผลลัพธ์ของการบวกจริง

จากผลของอัลกอริทึมจะได้ว่า

$x + y = 2^{r_x}3^{r_y} \times 2^{r_z}$

$= 2^{b_x+b_y}3^{t_x+t_y} \times 2^{z_x}$

$= 2^{b_x}3^{t_x} \times 2^{b_r}3^{t_r} \times 2^{z_x}$

เมื่อ $2^{b_r}3^{t_r} = w + 1$

โดยใช้อัลกอริทึมการประมาณค่าจะได้ว่า

$w + 1 = 2^{b_y-b_x+z_y-z_x}3^{t_y-t_x} + 1$

ดังนั้น

$2^{b_x}3^{t_x} \times (w+1) \times 2^{z_x} = 2^{b_x}3^{t_x} \times 2^{z_x} \times [1 + 2^{b_y-b_x+z_y-z_x}3^{t_y-t_x}]$

$= 2^{b_x}3^{t_x} \times 2^{z_x} + 2^{b_y}3^{t_y} \times 2^{z_y}$

$= x + y$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าคำตอบจากอัลกอริทึม 3.5 นั้นเป็นผลลัพธ์ของ $x + y$ จริง ■

ตัวอย่างที่ 8 *จงหาค่าของ 288 + 48*

วิธีทำ 288 สามารถเขียนในระบบได้เป็น $2^{-3}3^2 \times 2^8$ และ 48 สามารถเขียนในระบบได้เป็น $2^{-1}3^1 \times 2^5$ จะสามารถหาค่าของ 288 + 48 ได้ดังต่อไปนี้

$2^{-3}3^2 \times 2^8 + 2^{-1}3^1 \times 2^5 = 2^{-3}3^2 \times 2^8 \times [1 + 2^{-1+3+5-8}3^{1-2}]$

คำนวณค่าของ $2^{-1+3+5-8}3^{1-2}$ ได้ประมาณเท่ากับ 0.166667 ดังนั้นค่าของ $1 + 2^{-1+3+5-8}3^{1-2}$ มีค่าเท่ากับ 1.166667 หลังจากนั้นจึงหาค่าประมาณของ 1.166667 ด้วยอัลกอริทึมการประมาณค่าจะได้ว่า 1.166667 มีค่าเท่ากับ $2^{24}3^{-15}$ และนำค่าประมาณที่ได้มาแทนลงใน $1 + 2^{-1+3+5-8}3^{1-2}$ จะได้ผลลัพธ์สุดท้ายเป็น $2^{24-3}3^{-15+2} \times 2^8$ ซึ่งมีค่าประมาณ 336.739112 และผลลัพธ์ที่ได้มีความคลาดเคลื่อนเท่ากับ 0.739112 □

3.9 ตัวดำเนินการลบ

สำหรับการลบจะมีอัลกอริทึมที่ต่างออกไปจากการบวกเนื่องจากผลลัพธ์ของ $1 - 2^{b_y-b_x+z_y-z_x}3^{t_y-t_x}$ จะไม่อยู่ในช่วง [1,2) เสมอไป แม้ว่าจะทำการจัดเรียงลำดับตัวตั้งและตัว

ดำเนินการแล้ว เพื่อให้ค่าของ $1-2^{b_y-b_x+z_y-z_x}3^{t_y-t_x}$ มีค่าอยู่ในช่วง [1,2) จึงต้องมีการคำนวณบางส่วนเพิ่มขึ้นมา โดยใช้แนวคิดของเศษส่วนเข้ามาช่วย โดยจะสามารถเขียนรูปทั่วไปของการลบได้ดังนี้

สำหรับ $x = 2^{b_x}3^{t_x} \times 2^{z_x}$ และ $y = 2^{b_y}3^{t_y} \times 2^{z_y}$ รูปทั่วไปของ $x-y$ คือ

$$x - y = 2^{b_x}3^{t_x} \times 2^{z_x} \times (1-2^{b_y-b_x+z_y-z_x}3^{t_y-t_x})$$

ซึ่งถ้ากำหนดให้ $|x| \ge |y|$ จะได้ว่า

$$1-2^{b_y-b_x+z_y-z_x}3^{t_y-t_x} \in [0,1)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าค่าของพจน์ $1-2^{b_y-b_x+z_y-z_x}3^{t_y-t_x}$ นั้นไม่อยู่ในช่วงที่สามารถหาค่าประมาณด้วยอัลกอริทึมการประมาณค่าได้ จึงต้องมีการนำขั้นตอนบางอย่างเพิ่มเข้ามาเพื่อให้สามารถประมาณค่าของพจน์ $1-2^{b_y-b_x+z_y-z_x}3^{t_y-t_x}$ ได้ โดยหากพิจารณาจะพบว่าสามารถเขียน $1-2^{b_y-b_x+z_y-z_x}3^{t_y-t_x}$ ในรูปของเศษส่วนได้ดังนี้

$$1-2^{b_y-b_x+z_y-z_x}3^{t_y-t_x} = 1-\frac{e}{d}$$

โดยที่ *e* และ *d* นั้นเป็นจำนวนเต็มและอยู่ในรูปของ 2^b หรือ 3^t หรือ 2^b3^t และเนื่องจากว่า

$$1-\frac{e}{d} = \frac{d-e}{d}$$

นิยามให้ *c* คือจำนวนจริงที่อยู่ในรูป 2^b3^t และสอดคล้องกับสมการ $\frac{e}{d} \times c = \frac{d-e}{d}$ จะได้ว่า

$$c = \frac{d-e}{e}$$

เนื่องจากค่า *d* – *e* นั้นเป็นจำนวนเต็ม ซึ่งสามารถหาค่าประมาณได้โดยใช้อัลกอริทึมในการหารูปแบบแทนจำนวนซึ่งจะให้คำตอบออกมาในรูปของ $2^b3^t \times 2^z$ และทำการรวมค่าของพจน์เลขชี้กำลังฐานสองเข้าด้วยกันเพื่อให้คำตอบของ *d* – *e* อยู่ในรูปของ 2^b3^t ซึ่งหากนำค่านี้มาหารด้วย *e* ซึ่งอยู่ในรูป 2^b หรือ 3^t หรือ 2^b3^t จะทำให้ได้คำตอบออกมาอยู่ในรูป 2^b3^t เหมือนเดิม และเมื่อนำ *c* ไปคูณกลับด้วย $\frac{e}{d}$ จะได้ผลลัพธ์เป็นค่าของ $1-2^{b_y-b_x+z_y-z_x}3^{t_y-t_x}$ นั่นเอง

สำหรับขั้นตอนการทำงานของอัลกอริทึมการลบจะสามารถเขียนแสดงได้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.6 *กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่งแสดงอยู่ในรูปแบบของระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายเป็น* (s_x, b_x, t_x, z_x) *และ* (s_y, b_y, t_y, z_y) *ตามลำดับ การลบของ x - y สามารถคำนวณได้ในระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่ โดยผลลัพธ์แสดงได้เป็น (s, b, t, z) ซึ่งสามารถแสดงได้ในอัลกอริทึม 3.6*

อัลกอริทึมที่ 3.6 อัลกอริทึมการลบ

input : x where x is of the form $2^{b_x}3^{t_x} \times 2^{z_x}$,
: y where y is of the form $2^{b_y}3^{t_y} \times 2^{z_y}$,
and | x | ≥ | y |

output : R where R is of the form $2^b 3^t \times 2^z$
and $R = x - y$

begin

$f \leftarrow b_y - b_x + z_y - z_x$

$g \leftarrow t_y - t_x$

if f and $g < 0$ **then**

$e \leftarrow 1$

$d \leftarrow 2^f 3^g$

endif

if $f \geq 0$ and $g < 0$ **then**

$e \leftarrow 2^f$

$d \leftarrow 3^g$

endif

if $f < 0$ and $g \geq 0$ **then**

$e \leftarrow 3^g$

$d \leftarrow 2^f$

endif

$b, t, z \leftarrow$ number representation algorithm($d - e$)

$k \leftarrow b + z$

$l \leftarrow t$

$c \leftarrow 2^k 3^l \div e$

$2^{b_r} 3^{t_r} \leftarrow c \times \dfrac{e}{d}$

$r_x \leftarrow b_x + b_r$

$r_y \leftarrow t_x + t_r$

$r_z \leftarrow z_x$

$R \leftarrow 2^{r_x} 3^{r_y} \times 2^{r_z}$

end

พิสูจน์

การพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 3.6 จะเป็นการพิสูจน์ให้เห็นว่าคำตอบที่ได้จากอัลกอริทึม 3.7 นั้นเป็นผลลัพธ์ของการลบจริง

จากอัลกอริทึมการลบ จะได้ผลลัพธ์คือ

$$\begin{aligned} x - y &= 2^{r_x} 3^{r_y} \times 2^{r_z} \\ &= 2^{b_x + b_y} 3^{t_x + t_y} \times 2^{z_x} \\ &= 2^{b_x} 3^{t_x} \times 2^{b_r} 3^{t_r} \times 2^{z_x} \\ &= 2^{b_x} 3^{t_x} \times c \times \frac{e}{d} \times 2^{z_x} \end{aligned}$$

เมื่อ $2^{b_r} 3^{t_r} = c \times \dfrac{e}{d}$

$f = b_y - b_x + z_y - z_x$

$g = t_y - t_x$

จากอัลกอริทึมการลบจะได้ว่า $c \approx \dfrac{d - e}{e}$

ดังนั้น $c \times \frac{e}{d} = 1 - \frac{e}{d}$

เราจะได้ว่า $\frac{e}{d}$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ

$2^{b_y - b_x + z_y - z_x} 3^{t_y - t_x}$

ได้ ดังนั้น $c \times \frac{e}{d} = 1 - 2^{b_y - b_x + z_y - z_x} 3^{t_y - t_x}$

$$
\begin{aligned}
2^{b_x} 3^{t_x} \times c \times \frac{e}{d} \times 2^{z_x} &= 2^{b_x} 3^{t_x} \times 2^{z_x} \times [1 - 2^{b_y - b_x + z_y - z_x} 3^{t_y - t_x}] \\
&= 2^{b_x} 3^{t_x} \times 2^{z_x} - 2^{b_y} 3^{t_y} \times 2^{z_y} \\
&= x - y
\end{aligned}
$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าคำตอบจากอัลกอริทึม 3.6 นั้นเป็นผลลัพธ์ของ $x + y$ จริง ■

ตัวอย่างที่ 9 *จงหาค่าของ 288 - 48*

วิธีทำ 288 สามารถเขียนในระบบได้เป็น $2^{-3}3^{2} \times 2^{8}$ และ48 สามารถเขียนในระบบได้เป็น $2^{-1}3^{1} \times 2^{5}$

สำหรับ $2^{-3}3^{2} \times 2^{8} - 2^{-1}3^{1} \times 2^{5} = 2^{-3}3^{2} \times 2^{8} \times [1 - 2^{-1+3+5-8}3^{1-2}]$

จาก $2^{-1+3+5-8}3^{1-2} = 2^{-1}3^{-1}$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ $\frac{e}{d}$ ได้เป็น $\frac{1}{6}$ จะได้ว่าค่าของ $d - e$ คือ 5 และสามารถหาค่าประมาณด้วยอัลกอริทึมการหารูปแบบแทนจำนวนและทำการรวมพจน์ของเลขชี้กำลังฐานสองเข้าด้วยกันจะค่าได้เป็น $2^{15}3^{-8}$

เนื่องจากค่าของ e เป็น 1 = 2^{0} เพราะฉะนั้นจากอัลกอริทึม 3.7 จะได้ว่า c = มีค่าเท่ากับ $(d - e)/e$ เพราะฉะนั้น $c = 2^{15}3^{-8}$

นำค่าของ c ไปคูณด้วย $2^{-1}3^{-1}$ จะได้ค่าประมาณของ $1 - 2^{b_y - b_x + z_y - z_x} 3^{t_y - t_x}$ มีค่าเท่ากับ $2^{14}3^{-9}$ นำค่าประมาณของ $1 - 2^{b_y - b_x + z_y - z_x} 3^{t_y - t_x}$ มาคูณกับพจน์ $2^{-3}3^{2}$ ใน $2^{-3}3^{2} \times 2^{8}$ จะได้ผลลัพธ์สุดท้ายเป็น $2^{11}3^{-7} \times 2^{8}$ ซึ่งมีค่าประมาณ 239.729309 และผลลัพธ์ที่ได้มีความคลาดเคลื่อนเท่ากับ 0.270690 ซึ่ง 240 นั้นสามารถแสดงในระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายได้เป็น $2^{11}3^{-7} \times 2^{8}$ เช่นกัน □

3.10 การปรับปรุงค่าความแม่นยำของผลลัพธ์จากอัลกอริทึมการประมาณค่า

เนื่องจากว่าในอัลกอริทึมการประมาณค่านั้น ผลลัพธ์ที่ได้จะมีค่าความถูกต้องอยู่เพียงในระดับหนึ่ง เพราะว่าตัวอัลกอริทึมการประมาณค่านั้นจะหยุดทำงานเมื่อ s_l มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับค่าที่เราต้องการหาค่าประมาณ หรือเมื่อ s_r มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับค่าที่เราต้องการหาค่าประมาณ ซึ่งส่งผลให้ผลลัพธ์ที่ได้ของอัลกอริทึมการประมาณค่าถูกจำกัดอยู่ในช่วงๆ หนึ่ง หรือ อาจจะกล่าวในอีกแง่ได้ว่าจำนวนผลลัพธ์ของอัลกอริทึมการประมาณค่านั้นมีอยู่จำกัด โดยทั้งนี้อาจจะมีผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องสูงกว่าแต่ไม่อยู่ในช่วงของอัลกอริทึมการประมาณ เพื่อจะ

แก้ไขปัญหาที่เกิดขึ้นนี้ จึงต้องมีการเสนอส่วนขยายของอัลกอริทึมการประมาณค่า เพื่อช่วยให้สามารถหาผลลัพธ์ที่อาจจะมีความถูกต้องมากขึ้นกว่าผลลัพธ์เดิมได้

3.10.1 ส่วนขยายของอัลกอริทึมการประมาณค่า

จากอัลกอริทึมที่ 3.1 ค่า s_l และ s_r นั้นจะเป็นค่าประมาณที่ดีที่สุด 2 ค่าในช่วงการทำงานของอัลกอริทึม ซึ่งหากใช้วิธีการเดิมคือคูณ s_l ด้วย $2^8 3^{-5}$ และคูณ s_r ด้วย $2^{-8}3^5$ ค่านั้นจะเริ่มออกห่างจากค่าที่เราต้องการหาหรืออาจกล่าวได้ว่าค่าความถูกต้องของผลลัพธ์จะลดลงเรื่อยๆ เราจึงต้องมีการออกแบบส่วนขยายที่สามารถทำงานต่อจากอัลกอริทึมการประมาณค่าแบบเดิมและให้ผลลัพธ์ที่อาจจะมีค่าความแม่นยำมากขึ้นได้

หากนิยาม e_n เป็นจำนวนจริงและสอดคล้องกับสมการ

$$e_n = \frac{y-x}{x}$$

โดยที่ $y > x$

จะกล่าวได้ว่า e_n คือค่าของร้อยละที่ต้องเพิ่มขึ้นของ x เพื่อให้มีค่าเท่ากับ y หรืออาจกล่าวได้ว่าหากเพิ่มค่าของ x ไปอีกร้อยละ e_n จะมีค่าเท่ากับ y และสามารถเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ของ x และ y และ e_n ได้ดังนี้

$$(1+e_n)\times x = y$$

หากพิจารณา x เป็นผลลัพธ์ที่ได้จากอัลกอริทึมที่ 3.1 และ y เป็นค่าจริงที่ต้องการ ปัญหาที่ต้องให้ความสนใจนั้นคือการหาค่าของ $1 + e_n$ ในรูปของ 2^b3^t เพื่อที่จะนำมาคูณกับค่า x และได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากขึ้น แต่ทั้งนี้เนื่องจากว่าค่าต่างๆ ในระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายนั้นไม่อาจจะแสดงผลได้ตรงกับค่าที่ต้องการได้ทุกค่า วิธีการที่จะนำเสนอในส่วนขยายของอัลกอริทึมการประมาณค่านั้นจะใช้การหาค่าที่เพิ่มขึ้นมาใกล้เคียงกับ $1 + e_n$ มากที่สุดและอยู่ในรูปของ 2^b3^t ซึ่งในอัลกอริทึมการประมาณค่าเดิมนั้นความห่างของแต่ละคำตอบในอัลกอริทึมนั้นจะมีค่าเท่ากับ $2^8 3^{-5}$ ซึ่งมีค่าประมาณ 1.053498 นั่นหมายความว่าในกรณีแย่สุดนั้นค่าเป้าหมายที่เราต้องการหาค่าประมาณจะตกอยู่กึ่งกลางระหว่างค่าคำตอบสองค่าซึ่งจะทำให้เกิดค่า e_n มากสุดเท่ากับ 0.053498 ÷ 2 = 0.026749 ซึ่งทำให้ $1 + e_n$ มีค่าอยู่ในช่วง (1,1.026749) ดังนั้นหากนิยามฟังก์ชัน F(p) ดังต่อไปนี้

$$\mathrm{F}(p) = p\times 2^{8n-1}3^{-5n}$$

โดยที่ n คือจำนวนเต็มที่เล็กที่สุดที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $m\times 2^{8n}3^{-5n} > 2$ และ p นั้นอยู่ในช่วง [1,2) และมีค่าอยู่ในรูปของ $2^{b_p}3^{b_p}$ จะกล่าวได้ว่า F(p) นั้นอยู่ในช่วง $[1,2^8 3^{-5})$ และอยู่ในรูปของ $2^{b_f}3^{b_f}$

หลักการทำงานของอัลกอริทึมส่วนขยายที่เราจะนำเสนอนี้จะใช้แนวคิดจากการที่เมื่อเราทำการคูณค่า s_l ด้วย $2^8 3^{-5}$ ไปเรื่อยๆ กระทั่ง s_l มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 2 เป็นครั้งแรกแล้วทำการหาค่านั้นด้วย 2 เราจะได้ค่า s_l ที่มีค่าอยู่ในช่วง $[1,2^8 3^{-5})$ ดังที่ได้แสดงไว้ในนิยาม

ของ F(p) โดยที่ขั้นตอนการทำงานของส่วนขยายของอัลกอริทึมการประมาณค่าสามารถสรุปได้ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1

เนื่องจากส่วนขยายของอัลกอริทึมการประมาณค่านั้นจะทำการประมาณค่าที่อยู่ในช่วง $[1, 2^{8}3^{-5})$ เท่านั้น แต่ในกรณีที่ค่า $x > y$ นั้นจะอยู่นอกเหนือการทำงานของอัลกอริทึมนี้ จึงต้องทำการปรับแก้ค่าของ x ให้น้อยกว่า y ซึ่งจะทำได้โดยคูณ x ด้วย $2^{-8}3^{5}$ และเรียกค่าที่ปรับแก้นี้ว่า c สำหรับในกรณีที่ $x < y$ จะไม่ทำการปรับแก้ใดๆ และกำหนดให้ c มีค่าเท่ากับ x

ขั้นตอนที่ 2

2. นำผลลัพธ์ที่ได้จากขั้นตอนที่ 1 มาทำการหาค่า e_n และ e โดยกำหนดให้ e_n คือความคลาดเคลื่อนของ c เมื่อเทียบกับ y ซึ่งอยู่ในรูปร้อยละของ c และ e คือความคลาดเคลื่อนของ x เมื่อเทียบกับ y ซึ่งอยู่ในรูปร้อยละของ c ซึ่งสามารถแบ่งการหา e_n และ e ออกได้เป็นสองกรณีดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $x < y$

$$e = \frac{y - X}{X}$$

โดยที่ X คือค่าเชิงตัวเลขของ x และ

$$e_n = e$$

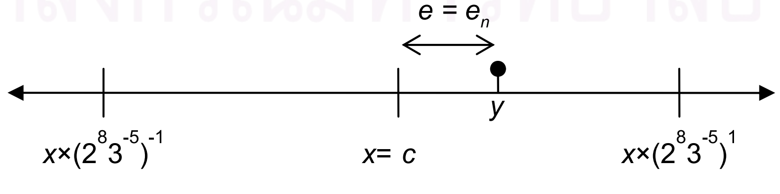
กรณีที่ 2 ถ้า $x > y$

$$e = \frac{X - y}{C}$$

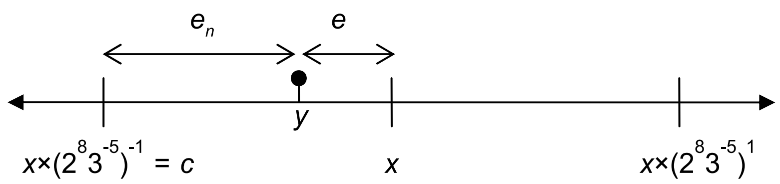
โดยที่ C คือค่าเชิงตัวเลขของ c และ

$$e_n = \frac{y - C}{C}$$

ซึ่งการทำงานในขั้นตอนนี้ของทั้งสองกรณีสามารถแสดงให้ดังรูปที่ รูปที่ 3.4 และรูปที่ 3.5 ตามลำดับ



รูปที่ 3.4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง e และ e_n และ c กรณีที่ $x < y$



รูปที่ 3.5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง e และ e_n และ c กรณีที่ $x > y$

ขั้นตอนที่ 3

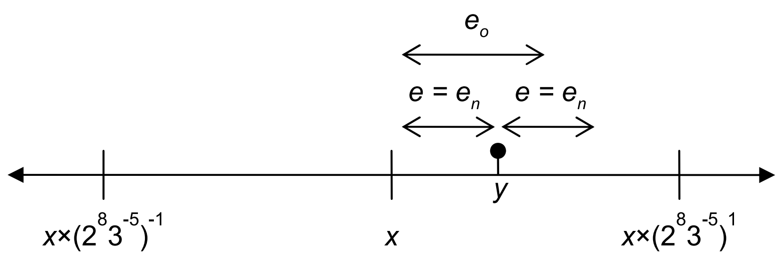
การทำงานปรับค่าความแม่นยำของผลลัพธ์โดยใช้นิยามของฟังก์ชัน F(p) ซึ่งจะเริ่มโดยนำค่าเริ่มต้นทั้ง 5 ค่าดังตารางที่ 3.3 ซึ่งถูกใส่ในในอาร์เรย์ a[0] จนถึง a[4] ตามลำดับ มาหาค่าใหม่ด้วยฟังก์ชัน F(p) ซึ่งก็คือการนำ a[i] มาคูณด้วยพจน์ $2^8 3^{-5}$ ซึ่งจะส่งผลให้ค่าเพิ่มขึ้นเป็นลำดับ จนกระทั่งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 2 เป็นครั้งแรกแล้วจึงทำการหารด้วย 2 จะได้ค่า a[i] ใหม่ที่อยู่ในช่วง $[1, 2^8 3^{-5})$ ดังที่ได้แสดงไว้ข้างต้น

ตารางที่ 3.3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอาร์เรย์และค่าของเลขมิติคู่ในรูปของ $2^b 3^t$

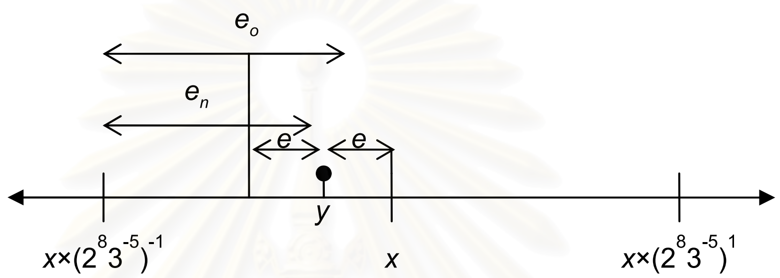
$2^b 3^t$	arrays
$2^8 3^{-5}$	a[0]
$2^5 3^{-3}$	a[1]
$2^2 3^{-1}$	a[2]
$2^7 3^{-4}$	a[3]
$2^4 3^{-2}$	a[4]

ขั้นตอนที่ 4

นำค่า a[i] ใหม่ที่ได้จากขั้นตอนที่ 3 มาทำการหาค่าร้อยละที่เพิ่มขึ้นเมื่อนำไปคูณกับจำนวนจริงบวกใดๆ ซึ่งมีค่าเท่ากับ a[i] – 1 ซึ่งในที่นี้จะเรียกว่า e_o เช่นถ้าหากค่า a[i] ใหม่มีค่าเท่ากับ 1.1 จะได้ว่าค่า e_o มีค่าเท่ากับ 0.1 เป็นต้น ซึ่งหากนำค่ารอบใหม่นี้ไปคูณกับจำนวนจริงบวกใดๆ จะทำให้มีค่าเพิ่มขึ้นร้อยละ 10 หรือเพิ่มขึ้น 10 เปอเซ็นต์นั่นเอง ซึ่งหากค่า e_o สอดคล้องกับสมการ $|e_o - e_n| < e$ ดังรูปที่ 3.6 และ 3.7 ก็จะนำค่าที่ได้นั้นเก็บไว้ในพจน์ที่เรียกว่า o ซึ่งมีค่าเริ่มต้นเป็น $2^0 3^0$ และทำการปรับลดค่า e ลง โดยที่ค่า e ใหม่นั้นมีค่าเท่ากับ $|e_o - e_n|$ แต่ถ้าหากค่า e_o นั้นไม่สอดคล้องกับสมการในข้างต้นก็จะกลับไปเริ่มการทำงานในขั้นตอนที่ 3 ใหม่



รูปที่ 3.6 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง e_o และ e_n และ e กรณีที่ $x < y$



รูปที่ 3.7 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง e_o และ e_n และ e กรณีที่ $x > y$

ขั้นตอนที่ 5

หากว่าค่า e นั้นยังมีค่ามากกว่า t_s ซึ่งเป็นค่าขั้นต่ำ ให้กลับไปทำงานในข้อ 3 อีกรอบโดยเปลี่ยนจาก *a*[*i*] เป็น *a*[*i*+1] และทำในทำนองเดียวกันนี้เรื่อยๆ โดยหาก i มีมากกว่า 4 แล้ว ให้ทำการปรับลดค่า i ให้เป็น 0 เพื่อกลับเริ่มต้นกระบวนการจากค่ารอบใหม่ที่ได้ในครั้งที่แล้วต่อไปอีก

การทำงานของส่วนขยายของอัลกอริทึมการประมาณค่าสามารถเขียนแสดงได้ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.7 *กำหนดให้ x เป็นจำนวนผลลัพธ์จากอัลกอริทึมการประมาณค่า ซึ่งแสดงอยู่ในรูปแบบของ 2^u3^v และมีค่าอยู่ในช่วง [1, 2) และ y เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่มีค่าอยู่ในช่วง [1,2) และ T เป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่งเป็นค่าขั้นต่ำในการทำงานและมีค่าอยู่ในช่วง (0,0.5) จะสามารถคำนวณหาค่าประมาณของ y ที่ใกล้เคียงมากกว่า x โดยผลลัพธ์แสดงได้เป็น $z=2^b3^t$ ได้ดังอัลกอริทึมที่ 3.7*

อัลกอริทึมที่ 3.7 ส่วนขยายของอัลกอริทึมการประมาณค่า

input: $x = 2^u3^v$ where $x \in [1, 2)$ and $\| x \| = X$
$y \in [1, 2)$
T : terminate condition where $0 < T < 0.5$
output: $z = 2^b3^t$ the estimation of y
begin

Define initial values

arrays	2^b3^t
$a[0]$	$2^8 3^{-5}$
$a[1]$	$2^5 3^{-3}$
$a[2]$	$2^2 3^{-1}$
$a[3]$	$2^7 3^{-4}$
$a[4]$	$2^4 3^{-2}$

Let $c = \begin{cases} x & : X < y \\ x \times 2^{-8}3^{5} & : X > y \end{cases}$

Let $C = \| c \|$

if $X < y$ **then** $e \leftarrow \dfrac{y - X}{X}$

$\quad e_n \leftarrow e$

endif

if $X > y$ **then** $e \leftarrow \dfrac{X - y}{C}$

$\quad e_n \leftarrow \dfrac{y - C}{C}$

endif

$o \leftarrow 2^0 3^0$

end $\leftarrow$ false

while not.end **do**

  $i \leftarrow 0$

  while $i < 5$ **do**

    while $a[i] < 2$ **do**

      $a[i] \leftarrow a[i] \times 2^8 3^{-5}$

    enddo

    $a[i] \leftarrow a[i] / 2$

    $e_o \leftarrow \| a[i] \| - 1$

    if $| e_o - e_n | < e$ **then** $o \leftarrow a[i]$

      $e \leftarrow | e_o - e_n |$

    endif

    if $\|e \times c\| \leq T$ **then** $i \leftarrow 5$

      end $\leftarrow$ true

    else i++

    endif

  enddo

enddo

$z \leftarrow c \times o$

end

พิสูจน์

การพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 3.7 จะเป็นการพิสูจน์ให้เห็นว่าคำตอบที่ได้จากอัลกอริทึม 3.7 นั้นเป็นผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับ y จริง

เนื่องจากว่า $z = 2^b3^t = c \times o$ โดยที่ c มีค่าอยู่ในรูปของ $2^{b_c}3^{t_c}$ และ o มีค่าอยู่ในรูปของ $2^{b_o}3^{t_o}$

เนื่องจากว่า $o = (1+e_o)$ และ $(1+e_n)$ เพื่อพิสูจน์ว่าอัลกอริทึมที่ 3.7 ให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับ y

โดยที่ $y = c\times(1+e_n)$ จริง จึงต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า $o \approx (1+e_n)$ ถ้า $|e_o - e_n| < e$ หรือพูดในอีกแง่หนึ่งว่าค่า e ต้องเข้าใกล้ 0

จากอัลกอริทึมที่ 3.7

$e = \|\, a[i] \,\| - 1 - e_n$

เนื่องจาก $1+e_n \in (1,1.026749)$ ซึ่งเป็นเซตย่อยของ $(1,2^8 3^{-5}) = (1,1.053498)$ ซึ่งเป็นช่วงของค่า $a[i]$ ดังนั้นถ้าหากอัลกอริทึมทำการเลือกค่า a[i] ที่มีค่าเข้าใกล้ $1+e_n$ จะได้ว่าค่า e นั้นจะเข้าใกล้ 0 จริง และจะได้ว่า

$$Z = 2^{b_c}3^{t_c} \times 2^{b_o}3^{t_o}$$

ซึ่งเป็นค่าที่ใกล้เคียงกับ y จริง ■

สำหรับตัวอย่างการทำงานของส่วนขยายของอัลกอริทึมการประมาณค่านั้น จะแสดงทั้ง 2 กรณี คือกรณี $x < y$ และ $x > y$ ดังตัวอย่างที่ 10 และ 11 ตามลำดับ และได้มีการกำหนดค่าขั้นต่ำในการทำงาน (threshold :t_s) ของตัวอย่างที่ 10 และ 11 ไว้ที่ 0.008 ทั้งสองตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 10 จงหาค่าประมาณของ 1.53

วิธีทำ จากอัลกอริทึมการประมาณค่าตัวเดิมจะได้ว่าค่าประมาณของ 1.53 คือ 1.5 หรือ $2^{-1}3^{1}$ ซึ่งมีค่าน้อยกว่าค่าเป้าหมายที่เราต้องการดังนั้นเราสามารถเข้ากระบวนการปรับแก้ค่าได้ดังต่อไปนี้

1. เนื่องจากว่าค่าเป้าหมายที่ต้องการนั้นมีค่าสูงกว่าค่าคำตอบที่ได้จากอัลกอริทึมการประมาณค่าอยู่แล้วฉะนั้นจึงไม่ต้องมีการปรับแก้ ดังนั้น c จึงมีค่าเท่ากับ 1.5 หรือ $2^{-1}3^{1}$

2. ทำการหาค่า e และ e_n ซึ่งสามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้

$e = \dfrac{(1.53-1.50)}{1.50} = 0.02$ ซึ่งหมายความว่าต้องทำการเพิ่มค่า c ไปอีกร้อยละ 2 จึงจะมีค่าเท่ากับ 1.53 หรือ $(1+0.02)\times1.5 = 1.53$ และเนื่องจากว่าในกรณีนี้ค่าจริงที่ต้องการนั้นมีค่าสูงกว่าค่าคำตอบที่ได้จากอัลกอริทึมการประมาณค่า ดังนั้น e_n จึงมีค่าเท่ากับ e ซึ่งก็คือ 1.5

3. สำหรับในการทำงานรอบแรกนี้จะเริ่มโดยนำ $a[0]$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $2^{8}3^{-5}$ มาทำการหาค่า $a[0]$ ใหม่ซึ่งสามารถทำได้โดยนำค่า $a[0]$ เก่านั้นคูณด้วย $2^{8}3^{-5}$ เรื่อยๆ จนกระทั่งค่านั้นมีค่ามากกว่า 2 แล้วจึงทำการหารด้วย 2 ซึ่งจะได้ว่าค่า $a[0]$ ใหม่นั้นคือ $2^{111}3^{-70}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1.037150 และทำการแทนค่า $a[0]$ เก่าด้วย $a[0]$ ใหม่

4. จะได้ว่า e_o มีค่าเท่ากับ 1.037150 – 1 = 0.037150 ซึ่งหมายความว่าค่า $a[0]$ นี้เมื่อนำไปคูณกับ c แล้วจะทำให้ค่า c เพิ่มขึ้นร้อยละ 3.7150 และเมื่อทำการพิจารณาค่า e_o ในอสมการ $|e_o - e_n| < e$ จะได้ผลลัพธ์เป็น 0.01715 < 0.02 ซึ่งเป็นจริง ดังนั้นจะทำการแทนที่ o ซึ่งแต่เดิมคือ $2^{0}3^{0}$ ด้วย ด้วย $2^{111}3^{-70}$

5. ทำการปรับลดค่า e ลงโดยค่า e สำหรับทำงานในรอบต่อไปจะมีค่าเท่ากับ $|e_o - e_n|$ ที่ได้ในข้อที่ 4 ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.01715

6. เนื่องจากค่า $e \times c$ = 0.01715×1.50 = 0.025725 ที่ได้นี้ยังมีค่ามากกว่าค่าขั้นต่ำที่กำหนดไว้ หรือ t_s ก็ให้วนรอบการทำงานตั้งแต่ข้อที่ 3 ใหม่ โดยให้หาค่าใหม่จาก $a[i+1]$ ซึ่งในที่นี้คือ $a[1]$ แทน โดยจะสามารถอธิบายได้ดังต่อไปนี้

สำหรับการทำงานในรอบใหม่ด้วย a[1]

ทำการหาใหม่ของ $a[1]$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $2^{92}3^{-58}$ หรือ 1.0513 ซึ่งจะได้ว่าค่า e_o นั้นมีค่าเท่ากับ 0.0513 เมื่อนำมาแทนลงในอสมการเงื่อนไข $|e_o - e_n| < e$ จะได้ว่า 0.0313 < 0.01715 ซึ่งไม่เป็นจริง ดังนั้นจึงยังใช้ o ตัวเดิมและไม่ทำการปรับลด e

สำหรับการทำงานในรอบใหม่ด้วย a[2]

ทำการหาค่าใหม่ของ $a[2]$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $2^{65}3^{-41}$ หรือ 1.011529 ซึ่งจะได้ว่าค่า e_o นั้นมีค่าเท่ากับ 0.011529 เมื่อนำมาแทนลงในอสมการเงื่อนไข $|e_o - e_n| < e$ จะได้ว่า 0.00847 < 0.01715 ซึ่งเป็นจริง ดังนั้นจึงแทน o ด้วย $2^{65}3^{-41}$ และทำการปรับลด e ลงเป็น 0.00847 ซึ่งค่า $e \times c$ = 0.012705 ซึ่งยังมากกว่า t_s ดังนั้นจึงต้องหาค่าใหม่จาก $a[3]$

สำหรับการทำงานในรอบใหม่ด้วย a[3]

ทำการหาค่าใหม่ของ $a[3]$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $2^{46}3^{-29}$ หรือ 1.025329 ซึ่งจะได้ว่าค่า e_o นั้นมีค่าเท่ากับ 0.025329 เมื่อนำมาแทนลงในอสมการเงื่อนไข $|e_o - e_n| < e$ จะได้ว่า 0.005329 < 0.00847 ซึ่งเป็นจริง ดังนั้นจึงแทน o ด้วย $2^{46}3^{-29}$ และทำการปรับลด e ลงเป็น 0.005329 และมีค่า $e \times c$ = 0.007994 ซึ่งน้อยกว่า t_s ที่กำหนดไว้จึงสรุปได้ว่าการทำงานในข้างต้นคำตอบสุดท้ายเป็น $c \times o = 2^{-1}3^{1} \times 2^{46}3^{-29} = 1.537994$ ซึ่งมีค่าความคลาดเคลื่อนจากค่าเป้าหมายเท่ากับ 0.007994 □

ตัวอย่างที่ 11 จงหาค่าประมาณของ 1.49

วิธีทำ จากอัลกอริทึมการประมาณค่าตัวเดิมจะได้ว่าค่าประมาณของ 1.49 คือ 1.5 หรือ $2^{-1}3^{1}$ ซึ่งมีค่ามากกว่าค่าเป้าหมายที่เราต้องการดังนั้นเราสามารถเข้ากระบวนการปรับแก้ค่าได้ดังต่อไปนี้

1. เนื่องจากว่าค่าเป้าหมายที่ต้องการนั้นมีค่าต่ำกว่าค่าคำตอบที่ได้จากอัลกอริทึมการประมาณค่า ฉะนั้นจึงต้องมีการปรับแก้ค่าคำตอบนี้ก่อนจะดำเนินการในขั้นตอนไป โดยจะได้ว่าค่า c นั้นจะมีค่าเท่ากับ $1.5 \times 2^{-8}3^{5}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1.423828

2. ทำการหาค่า e และ e_n ซึ่งสามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้

$e = \dfrac{(1.50 - 1.49)}{1.423828} = 0.0070233$ และ $e_n = \dfrac{(1.49 - 1.423828)}{1.423828} = 0.0464746$ ซึ่งหมายความว่าต้องทำการเพิ่มค่าของ c ไปอีกร้อยละ 4.64746 จึงจะมีค่าเท่ากับ 1.49 หรือ $(1+0.0464746) \times c = 1.49$

3. สำหรับในการทำงานรอบแรกนี้จะเริ่มโดยนำ *a*[0] ซึ่งมีค่าเท่ากับ $2^{8}3^{-5}$ มาทำการหาค่า *a*[0] ใหม่ซึ่งสามารถทำได้โดยนำค่า *a*[0] นั้นคูณด้วย $2^{8}3^{-5}$ เรื่อยๆ จนกระทั่งค่านั้นมีค่ามากกว่า 2 แล้วจึงทำการหารด้วย 2 ซึ่งจะได้ว่าค่ารอบใหม่ของ *a*[0] นั้นคือ $2^{111}3^{-70}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1.037150 และทำการแทนค่า *a*[0] เก่าด้วย *a*[0] ใหม่

4. จะได้ว่า e_o มีค่าเท่ากับ 1.037150 – 1 = 0.037150 ซึ่งหมายความว่าค่า *a*[0] ใหม่นี้เมื่อนำไปคูณกับ *c* แล้วจะทำให้ค่า *c* เพิ่มขึ้นร้อยละ 3.7150 และเมื่อนำค่า e_o ไปแทนในอสมการเงื่อนไข $|e_o - e_n| < e$ จะได้ผลลัพธ์เป็น 0.0093246 < 0.0070233 ซึ่งไม่เป็นจริง ดังนั้นจึงยังใช้ *o* ตัวเดิม

5. เนื่องจากสมการเงื่อนไข $|e_o - e_n| < e$ นั้นไม่เป็นจริง จึงไม่มีการปรับค่า *e* โดยให้คงค่าเดิมไว้

6. เนื่องจากค่า $e \times c$ ที่ได้นี้ยังมีค่ามากกว่าค่าขั้นต่ำที่กำหนดไว้หรือ t_s ก็ให้วนรอบการทำงานตั้งแต่ข้อที่ 3 ใหม่ โดยให้หาค่าใหม่จาก *a*[*i*+1] ซึ่งในที่นี้คือ *a*[1] แทน โดยจะสามารถอธิบายได้ดังต่อไปนี้

สำหรับการทำงานในรอบใหม่ด้วย a[1]

ทำการหาค่าใหม่ของ *a*[1] ซึ่งมีค่าเท่ากับ $2^{92}3^{-58}$ หรือ 1.0513 ซึ่งจะได้ว่าค่า e_o นั้นมีค่าเท่ากับ 0.0513 เมื่อนำมาแทนลงในอสมการเงื่อนไข $|e_o - e_n| < e$ จะได้ว่า 0.0048254 < 0.0070233 ซึ่งเป็นจริง ดังนั้นจึงแทน *o* ด้วย $2^{92}3^{-58}$ และทำการปรับลด *e* ลงเป็น 0.0048254และมีค่า $e \times c$ = 0.006871 ซึ่งน้อยกว่า t_s ที่กำหนดไว้จึงสรุปได้ว่าการทำงานในข้างต้นคำตอบสุดท้ายเป็น $c \times o = 2^{-1}3^{1} \times 2^{-8}3^{5} \times 2^{92}3^{-58} = 1.496871$ ซึ่งมีค่าความคลาดเคลื่อนจากค่าเป้าหมายเท่ากับ 0.006871 □

3.11 สรุป

ในบทนี้เราได้นำเสนอระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายซึ่งได้แสดงให้เห็นถึงการพัฒนาขึ้นมาจากระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบเดิม โดยระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่นั้นได้นำแนวคิดการคำนวณเฉพาะช่วงที่สนใจและเลือกค่าที่ดีที่สุดในแต่ละช่วงมาเป็นคำตอบ ทำให้ระบบจำนวนนี้สามารถลดการใช้งานของตารางเรียกดูค่าซึ่งเป็นปัญหาหลักของระบบจำนวนลอการิทึมลงได้ ช่วยให้ลดข้อจำกัดในการนำระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่มาใช้งานลง นอกจากนี้ยังได้แสดงให้เห็นถึงวิธีการปรับปรุงค่าความแม่นยำของผลลัพธ์อีกด้วย

บทที่ 4

บทวิเคราะห์ระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยาย

เนื้อหาในบทนี้กล่าวถึงบทวิเคราะห์ในแง่มุมต่างๆ ของระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยาย โดยมุ่งเน้นไปที่การวิเคราะห์เปรียบเทียบระหว่างระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายกับระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบเดิม

4.1 การวิเคราะห์ค่าความแม่นยำของอัลกอริทึมการประมาณในระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยาย

ดั่งที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 3 อัลกอริทึมการประมาณค่านั้นให้ผลลัพธ์ได้ในช่วงที่จำกัดไว้ในช่วงหนึ่งอันเนื่องมาจากอัลกอริทึมจะต้องหยุดการทำงานลงเมื่อถึงจุดๆ หนึ่ง ซึ่งความแม่นยำของผลลัพธ์จึงถูกจำกัดไว้อยู่ที่จำนวนผลลัพธ์ของอัลกอริทึมการประมาณค่าโดยสามารถวิเคราะห์ได้ดังต่อไปนี้

เนื่องจากจำนวนของผลลัพธ์ที่ได้จากอัลกอริทึมการประมาณค่านั้นจะถูกจำกัดอยู่ในช่วง [1,2) เท่านั้นจากการทำงาน ซึ่งจะสามารถแจกแจงผลลัพธ์ที่ได้ออกมาโดยไม่รวมค่าเริ่มต้นทั้ง 10 ค่าเป็น 2 กรณีดังนี้

1. สำหรับกรณีไล่ค่าด้วยการคูณกับพจน์ $2^{8}3^{-5}$ นั้นสามารถแจกแจงผลลัพธ์ได้เป็น

- สำหรับการไล่หาค่าจาก $2^{8}3^{-5}$ ทั้งหมด 12 ค่าได้แก่ $2^{16}3^{-10}$, $2^{24}3^{-15}$, $2^{32}3^{-20}$, $2^{40}3^{-25}$, $2^{48}3^{-30}$, $2^{56}3^{-35}$, $2^{64}3^{-40}$, $2^{72}3^{-45}$, $2^{80}3^{-50}$, $2^{88}3^{-55}$, $2^{96}3^{-60}$, $2^{104}3^{-65}$
- สำหรับการไล่หาค่าจาก $2^{7}3^{-4}$และ $2^{-1}3^{1}$ ทั้งหมด 4 ค่าได้แก่ $2^{15}3^{-9}$, $2^{23}3^{-14}$, $2^{31}3^{-19}$, $2^{39}3^{-24}$
- สำหรับการไล่หาค่าจาก $2^{5}3^{-3}$และ $2^{-3}3^{2}$ ทั้งหมด 10 ค่าได้แก่ $2^{13}3^{-8}$, $2^{21}3^{-13}$, $2^{29}3^{-18}$, $2^{37}3^{-23}$, $2^{45}3^{-28}$, $2^{53}3^{-33}$, $2^{61}3^{-38}$, $2^{69}3^{-43}$, $2^{77}3^{-48}$, $2^{85}3^{-53}$
- สำหรับการไล่หาค่าจาก $2^{4}3^{-2}$และ $2^{-4}3^{3}$ ทั้งหมด 2 ค่าได้แก่ $2^{12}3^{-7}$, $2^{20}3^{-12}$
- สำหรับการไล่หาค่าจาก $2^{2}3^{-1}$และ $2^{-6}3^{4}$ ทั้งหมด 7 ค่าได้แก่ $2^{10}3^{-6}$, $2^{18}3^{-11}$, $2^{26}3^{-16}$, $2^{34}3^{-21}$, $2^{42}3^{-26}$, $2^{50}3^{-31}$, $2^{58}3^{-36}$

2. สำหรับกรณีไล่ค่าด้วยการคูณกับพจน์ $2^{-8}3^{5}$ นั้นสามารถแจกแจงผลลัพธ์ได้เป็น

- สำหรับการไล่หาค่าจาก $2^{8}3^{-5}$ ทั้งหมด 1 ค่าได้แก่ $2^{0}3^{0}$
- สำหรับการไล่หาค่าจาก $2^{7}3^{-4}$และ $2^{-1}3^{1}$ ทั้งหมด 7 ค่าได้แก่ $2^{-9}3^{6}$, $2^{-17}3^{11}$, $2^{-25}3^{16}$, $2^{-33}3^{21}$, $2^{-41}3^{26}$, $2^{-49}3^{31}$, $2^{-57}3^{36}$
- สำหรับการไล่หาค่าจาก $2^{5}3^{-3}$และ $2^{-3}3^{2}$ ทั้งหมด 2 ค่าได้แก่ $2^{-11}3^{7}$, $2^{-19}3^{12}$
- สำหรับการไล่หาค่าจาก $2^{4}3^{-2}$และ $2^{-4}3^{3}$ ทั้งหมด 10 ค่าได้แก่ $2^{-12}3^{8}$, $2^{-20}3^{13}$, $2^{-28}3^{18}$, $2^{-36}3^{23}$, $2^{-44}3^{28}$, $2^{-52}3^{33}$, $2^{-60}3^{38}$, $2^{-68}3^{43}$, $2^{-76}3^{48}$, $2^{-84}3^{53}$

- สำหรับการไล่หาค่าจาก $2^{2}3^{-1}$ และ $2^{-6}3^{4}$ ทั้งหมด 4 ค่าได้แก่ $2^{-14}3^{9}$, $2^{-22}3^{14}$, $2^{-30}3^{19}$, $2^{-38}3^{24}$
- สำหรับการไล่หาค่าจาก $2^{-7}3^{5}$ ทั้งหมด 12 ค่าได้แก่ $2^{-15}3^{10}$, $2^{-23}3^{15}$, $2^{-31}3^{20}$, $2^{-39}3^{25}$, $2^{-47}3^{30}$, $2^{-55}3^{35}$, $2^{-63}3^{40}$, $2^{-71}3^{45}$, $2^{-79}3^{50}$, $2^{-87}3^{55}$, $2^{-95}3^{60}$, $2^{-103}3^{65}$

หากค่าที่ต้องการหาค่าประมาณนั้นไม่ตรงกับค่าของผลลัพธ์จากอัลกอริทึมนี้จะทำให้ค่าผลลัพธ์ที่ได้จะมีความคลาดเคลื่อน ซึ่งจะต่างกับระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบเดิมซึ่งค่าความแม่นยำของผลลัพธ์นั้นขึ้นกับขนาดของตาราง ซึ่งถ้าต้องการให้ความแม่นยำนั้นเท่ากับระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายโดยที่ไม่คำนึงถึงขนาดของค่าจำนวนจริงนั้นจะต้องใช้ตารางขนาด 208×131 ซึ่งเท่ากับขนาดขอบเขตบน(s_r)และขอบเขตล่าง(s_l)ของคำตอบในอัลกอริทึมการประมาณค่าซึ่งก็คือ $2^{104}3^{-65}$ และ $2^{-103}3^{65}$ ตามลำดับ

4.2 ขนาดของตารางเรียกดูค่าที่ต้องใช้ในระบบลอการิทึมมิติคู่แบบขยาย

แม้ว่าในทางทฤษฏีระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายจะไม่ใช้การสร้างตารางเรียกดูค่าขึ้นมาใช้ในการเก็บฟังก์ชันที่เกิดขึ้นในการบวกและการลบก็ตาม แต่ในทางปฏิบัตินั้นทุกๆ ครั้งที่มีการใช้งานอัลกอริทึมการประมาณค่าจะต้องมีการสร้างตารางเพื่อมาเก็บค่าของค่าเริ่มต้นทั้ง 10 ตัวและในส่วนขยายของอัลกอริทึมนั้นก็ต้องมีการสร้างตารางเพื่อมาเก็บค่าเริ่มต้นจำนวน 5 ตัว

4.3 ค่าความซับซ้อนของเวลาในการคำนวณของการดำเนินการบวกและการลบ

ในการทำงานของระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายนั้น ค่าความซับซ้อนของเวลาการคำนวณที่ได้นั้นจะต่างออกไปจากระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบเดิม ซึ่งสามารถเขียนอธิบายเปรียบเทียบได้ดังนี้

ค่าความซับซ้อนของเวลาการคำนวณในระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่

เนื่องจากว่าในระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่นั้นเมื่อเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปของการบวกและการลบแล้วนั้น สิ่งที่ต้องทำในขั้นตอนไปคือการคำนวณค่าของฟังก์ชันการบวกและฟังก์ชันการลบซึ่งในขั้นตอนนี้จะใช้เวลาในการคำนวณที่คงที่สำหรับทุกการบวกและการลบ ซึ่งเมื่อได้ผลลัพธ์มาแล้วจึงนำไปทำการหาค่าที่ต้องการจากตารางเรียกดูค่าซึ่งมีขนาดคงที่ เพราะฉะนั้นจึงสรุปได้ว่าค่าความซับซ้อนของเวลาการคำนวณในระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่จึงเป็นค่าคงที่หรือ O(1)

ค่าความซับซ้อนของเวลาการคำนวณในระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยาย

สำหรับในระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายนั้นเมื่อคำนวณผลลัพธ์ของฟังก์ชันการบวกและฟังก์ชันการลบแล้วก็จะใช้อัลกอริทึมที่ 3.1 มาทำการประมาณค่าโดยทำการเลือกค่าที่ใกล้เคียงที่สุด 2 ตัวจากค่าเริ่มต้นที่เป็นค่าคงที่ทั้ง 10 ค่า แล้วจึงปรับค่าทั้ง 2 นี้ด้วยการคูณกับค่าคงที่ $2^{8}3^{-5}$ หรือ $2^{-8}3^{5}$ ซึ่งจะเห็นได้ว่าการทำงานในขั้นตอนนี้ใช้เวลาคงที่และสามารถนำ

ผลลัพธ์ในขั้นตอนนี้ไปปรับให้มีค่าความแม่นยำขึ้นได้โดยอัลกอริทึมที่ 3.7 ซึ่งจะทำงานจนกระทั่งค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าน้อยกว่า T ที่ตั้งไว้ โดยที่ T นั้นเป็นค่าความคลาดเคลื่อนระหว่างค่าเชิงตัวเลขของคำตอบที่ได้จากอัลกอริทึมที่ 3.1 และค่าจริงที่ต้องการหาค่าประมาณ เพราะฉะนั้นจึงอาจสรุปได้ว่าค่าความซับซ้อนของเวลาการคำนวณในระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายนั้นเป็นค่าที่แปรผกผันกับค่าความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์หรือ T ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น $O(T^{-1})$

บทที่ 5

สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลงานวิจัย

งานวิจัยนี้นำเสนอระบบจำนวนที่พัฒนามาจากระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่ ที่มีชื่อเรียกว่า ระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยาย ซึ่งเป็นระบบจำนวนที่สามารถลดการใช้งานของตารางเรียกดูค่าในการดำเนินการขั้นพื้นฐานทางคณิตศาสตร์เช่นในการบวกและการลบ โดยใช้การคำนวณในเฉพาะส่วนที่จำเป็นแทน รวมไปถึงเสนออัลกอริทึมเพื่อทำการปรับปรุงค่าความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้จากขั้นตอนการบวกและการลบ ซึ่งสามารถช่วยลดข้อจำกัดในการนำระบบจำนวนนี้มาใช้งาน ซึ่งถือเป็นวัตถุประสงค์หลักของงานวิจัยนี้

ผลจากทฤษฏีงานวิจัยนี้ทำให้ได้ข้อสรุปที่น่าสนใจ คือ ในระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายนั้น เราสามารถหาค่าความสัมพันธ์ของ 2^b3^t ใดๆ สำหรับช่วงๆ หนึ่ง ซึ่งด้วยความสัมพันธ์ในจุดนี้ทำให้เราสามารถนำมาใช้ประโยชน์เพื่อคำนวณหาค่าประมาณของค่าที่เราต้องการในรูปของ 2^b3^t ได้ เช่นในการบวกและการลบหากเราทำการจัดเรียงตัวตั้งในการดำเนินการให้เหมาะสมก็จะทำให้สามารถระบุค่าของช่วงผลลัพธ์ได้ และเรายังพบอีกว่าในระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายนั้น เราไม่สามารถระบุได้ว่าจะพบค่าที่ตรงพอดีกับค่าจริงที่เราต้องการเมื่อไหร่ ซึ่งหากใช้ตารางเรียกดูค่าเพื่อนำมาใช้หาผลลัพธ์ในการบวกและการลบเหมือนในอัลกอริทึมมิติคู่ตัวเดิมนั้นก็ต้องมีการสร้างตารางเรียกดูค่าที่มีขนาดใหญ่มากและยังไม่การันตีว่าจะเจอผลลัพธ์ที่ต้องการหรือไม่อีกด้วย ซึ่งทำให้ในกรณีที่ต้องการผลลัพธ์ในการบวกและการลบมีโอกาสที่จะใกล้เคียงกับค่าจริงที่เราต้องการให้มากที่สุด การใช้วิธีการคำนวณโดยพิจารณาความสัมพันธ์ในระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายนั้นจะเหมาะสมกว่า

โดยในบทวิเคราะห์นั้นได้แสดงให้เห็นถึงการเปรียบเทียบระหว่างระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายเมื่อเทียบกับระบบจำนวนมิติคู่แบบเดิมทั้งในแง่การใช้งานตารางเรียกดูค่าซึ่งจะเห็นได้ว่าในระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายนั้นใช้เพียงตารางเรียกดูค่าที่มีขนาดเล็กและคงที่ก็เพียงพอสำหรับใช้ในการดำเนินการ ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบแล้วจะพบว่าระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่ตัวเดิมต้องใช้ตารางเรียกดูค่าที่มีขนาดใหญ่มากถ้าหากต้องการค่าความแม่นยำของผลลัพธ์เทียบเท่ากับระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยาย โดยที่ในส่วนของค่าความซับซ้อนของเวลาการคำนวณในการดำเนินการบวกและการลบนั้นในระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่จะใช้เวลาคงที่ แต่สำหรับระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายนั้นจะเวลาจะแปรผกผันกับค่า T ซึ่งเป็นตัวระบุความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ต้องการ โดยที่ T นั้นเป็นค่าความคลาดเคลื่อนระหว่างค่าเชิงตัวเลขของคำตอบที่ได้จากอัลกอริทึมที่ 3.1 และค่าจริงที่ต้องการหาค่าประมาณ นั่นก็คือถ้าต้องการผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูงก็อาจจะต้องใช้การคำนวณมากรอบซึ่งขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของงานที่นำไปใช้ด้วย

5.2 ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะจากงานวิจัยนี้คือ สำหรับการทำงานในอัลกอริทึมที่ 3.1 อัลกอริทึมการประมาณค่านั้น ค่าของ $2^{8}3^{-5}$ และ $2^{-8}3^{5}$ นั้นอาจสามารถปรับเปลี่ยนไปใช้ค่าอื่นแทนที่อาจจะให้ผลลัพธ์ที่มีความละเอียดมากขึ้นกว่าแต่ต้องแลกกับเวลาการคำนวณในแต่ละรอบที่อาจจะเพิ่มขึ้นเนื่องจากค่าของเลขชี้กำลังนั้นเปลี่ยนไป ซึ่งการเลือกค่าในจุดนี้ควรพิจารณาถึงความเหมาะสมกับงานที่นำไปใช้ด้วย และสำหรับในการทำงานของอัลกอริทึมที่ 3.7 ส่วนขยายของอัลกอริทึมการประมาณค่านั้นก็อาจสามารถปรับเปลี่ยนการทำงานในบางจุดได้ โดยที่ยังคงหลักการเดิมของตัวอัลกอริทึมไว้ เช่น แทนที่จะทำการหาค่าในช่วง $[1,2^{8}3^{-5})$ ให้เปลี่ยนเป็นหาค่าในช่วง [0,1) แทนสำหรับในกรณีที่ $x > y$ ทั้งนี้จะเห็นได้ว่าหลักการทำงานของระบบจำนวนลอการิทึมมิติคู่แบบขยายนั้นใช้หลักการของความสัมพันธ์ระหว่างค่าของ $2^{b}3^{t}$ กับค่าในช่วงหนึ่งๆ ซึ่งในจุดนี้ถ้าสามารถหาค่าความสัมพันธ์แบบใหม่ได้ ก็อาจสามารถปรับแก้การทำงานในอัลกอริทึมที่ 3.5 อัลกอริทึมการบวกและอัลกอริทึมที่ 3.6 อัลกอริทึมการลบให้มีการคำนวณที่ลดน้อยลงได้

รายการอ้างอิง

[1] Swartzlander, E. E.; and Alexpoulos, A. G. The Sign-Logarithm Number System. IEEE Transactions on Computers (1975).

[2] Muller, J.; and Tisserand, A. Semi-Logarithmic Number Systems. IEEE Transactions on Computers 47, 2 (1998): 145-151.

[3] Muller, J.; and Tisserand, A. Semi-Logarithmic Number Systems. Proceedings of the 12th IEEE Symposium on Computer Arithmetic (1995): 201-207.

[4] Dimitrov, V. S.; and Jullien, G. A. Loading the Bases: A New Number Representation with Applications. IEEE Circuits and Systems Magazine (2003): 6-23.

[5] Dimitrov, V. S.; Eskritt, J.; Imbert, L.; Jullien, G. A.; and Miller, W. C. The Use of The Multi-Dimensional Logarithmic Number System in DSP Applications. Proceedings of the 15th IEEE Symposium on Computer Arithmetic (1998): 247-254.

[6] Dimitrov, V. S.; Jullien, G. A.; and Miller, W. C. Theory and Applications for a Double-Base Number System. Proceedings 13th IEEE Symposium on Computer Arithmetic (1998).

[7] Dimitrov, V. S.; Jullien, G. A.; and Miller, W. C. Theory and Apllications of a Double-Base Number System. IEEE Transactions on Computers (1999).

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายพิชาญ ประทุมมาลย์ เกิดเมื่อวันที่ 1 มกราคม พ.ศ. 2527 เรียนจบการศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนต้นและตอนปลายจากโรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัยนนทบุรี อ.ปากเกร็ด จ.นนทบุรี เข้ารับการศึกษาต่อที่จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย คณะวิศวกรรมศาสตร์ สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา ภาควิชาวิศวกรรมโยธา และสำเร็จการศึกษาระดับปริญญาบัณฑิตในปี พ.ศ. 2549