การคลุมและการแบ่งกั้นกราฟกำลัง K ด้วยคลิก

นายธนวัฒน์ วิเชียรไพศาล

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2550
ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

CLIQUE COVERINGS AND CLIQUE PARTITIONS OF THE K-POWER OF GRAPHS

Mr. Tanawat Wichianpaisarn

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Sciences Program in Mathematics
Department of Mathematics
Faculty of Science
Chulalongkorn University
Academic Year 2007
Copyright of Chulalongkorn University

501539

Thesis Title	CLIQUE COVERINGS AND CLIQUE PARTITIONS OF THE K-POWER OF GRAPHS
By	Mr. Tanawat Wichianpaisarn
Field of Study	Mathematics
Thesis Advisor	Chariya Uiyyasathian, Ph.D.

Accepted by the Faculty of Science, Chulalongkorn University in Partial Fulfillment of the Requirements for the Master's Degree

..... Dean of the Faculty of Science

(Professor Piamsak Menasveta, Ph.D.)

THESIS COMMITTEE

..... Chairman

(Associate Professor Wanida Hemakul, Ph.D.)

..... Thesis Advisor

(Chariya Uiyyasathian, Ph.D.)

..... Member

(Associate Professor Patanee Udomkavanich, Ph.D.)

ธนวัฒน์ วิเชียรไพศาล : การคลุมและการแบ่งกั้นกราฟกำลัง K ด้วยคลิก (CLIQUE COVERINGS AND CLIQUE PARTITIONS OF THE K-POWER OF GRAPHS)
อ. ที่ปรึกษา : อ.ดร.จริยา อุ่ยยะเสถียร, 74 หน้า.

กำหนดให้ G เป็นกราฟใด ๆ *การคลุมกราฟ G ด้วยคลิก* คือ เซตของคลิกของ G ซึ่งเส้นเชื่อมแต่ละเส้นของ G เป็นเส้นเชื่อมของคลิกอย่างน้อยหนึ่งคลิก และเรียกจำนวนสมาชิกที่น้อยที่สุดของการคลุมกราฟ G ด้วยคลิกว่า *จำนวนคลิกคลุมกราฟ G* เขียนแทนด้วย $cc(G)$ *การแบ่งกั้นกราฟ G ด้วยคลิก* คือ เซตของคลิกของ G ซึ่งเส้นเชื่อมแต่ละเส้นของ G เป็นเส้นเชื่อมของคลิกเพียงหนึ่งคลิกเท่านั้น และเรียกจำนวนสมาชิกที่น้อยที่สุดของการแบ่งกั้นกราฟ G ด้วยคลิกว่า *จำนวนคลิกแบ่งกั้นกราฟ G* เขียนแทนด้วย $cp(G)$ *กราฟกำลัง k* ของกราฟ G เขียนแทนด้วย G^k คือกราฟที่มีเซตของจุดยอดเป็นเซตเดียวกับเซตของจุดยอดของ G และมีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด u และ v ใน G^k ก็ต่อเมื่อมีวิถีที่มีความยาวไม่เกิน k ระหว่างจุดยอด u และ v ใน G

เราหาค่าหรือขอบเขตของจำนวนคลิกคลุมกราฟและจำนวนคลิกแบ่งกั้นกราฟของกราฟกำลัง k ของ กราฟวิถี กราฟวัฏจักร กราฟพีระมิด กราฟบันได และกราฟตาราง

ภาควิชา .....คณิตศาสตร์..... ลายมือชื่อนิสิต.....
สาขาวิชา .....คณิตศาสตร์..... ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.....
ปีการศึกษา .....2550.....

4872307423 : MAJOR MATHEMATICS
KEY WORD: CLIQUE COVERINGS / CLIQUE PARTITIONS / K-POWER OF GRAPHS

TANAWAT WICHIANPAISARN : CLIQUE COVERINGS AND CLIQUE PARTITIONS OF THE K-POWER OF GRAPHS.
THESIS ADVISOR : CHARIYA UIYYASATHIAN, Ph.D., 74 pp.

Let G be any graph. A *clique covering* of G is a set of cliques of G, which together contain each edge of G at least once. The smallest cardinality of clique coverings of G is called the *clique covering number* of G, and is denoted by *cc(G)*. A *clique partition* of G is a set of cliques of G, which together contain each edge of G exactly once. The smallest cardinality of clique partitions of G is called the *clique partition number* of G, and is denoted by *cp(G)*. The graph G^k is the *k-power* of a graph G if $V(G^k) = V(G)$ and there is an edge between vertices u and v in G^k if and only if there is a path of length at most k between u and v in G.

We investigate values or bounds of the clique covering numbers and the clique partition numbers of the k-power of paths, cycles, pyramids, ladders and grids.

Department .....Mathematics... Student's signature Tanawat Wichianpaisarn
Field of Study .....Mathematics... Advisor's signature .....
Academic Year .....2007.....

ACKNOWLEDGEMENTS

First, I would like to thank Dr. Chariya Uiyyasathian, my thesis advisor, for her suggestions and so much useful helps. Next, I would like to thank Associate Professor Dr. Wanida Hemakul and Associate Professor Dr. Patanee Udomkavanich, my thesis committee members, for their suggestions. I also would like to thank all of the teachers.

Finally, my sincere gratitude and appreciation go to my family for their love and encouragement throughout my study.

CONTENTS

page

ABSTACT IN THAI iv

ABSTRACT IN ENGLIGH v

ACKNOWLEDGEMENTS vi

CONTENTS vii

LIST OF FIGURES ix

CHAPTER

I INTRODUCTION 1

1.1 Definitions 1

1.2 History and Overview 7

II CLIQUE PARAMETERS OF THE K-POWER OF PATHS AND CYCLES 9

2.1 Clique Parameters of the k-power of Paths 9

2.2 Clique Parameters of the k-power of Cycles 15

III CLIQUE PARAMETERS OF THE K-POWER OF PYRAMIDS . . . 25

3.1 Clique Coverings of the k-power of Pyramids 25

3.2 Clique Partitions of the Square of Pyramids 31

IV CLIQUE PARAMETERS OF THE K-POWER OF LADDERS AND GRIDS 38

4.1 Clique Coverings of the k-power of Ladders 38

4.2 Clique Partitions of the Square of Ladders 44

4.3 Clique Coverings of the k-power of Grids 48

CHAPTER

4.4 Clique Partitions of the Square of Grids 56

V CONCLUSION AND OPEN PROBLEMS 68

5.1 Conclusion 68

5.2 Open Problems 71

REFERENCES 72

VITA 74

LIST OF FIGURES

1.1 Examples of complete graphs 1

1.2 All cliques of $K_4\backslash e$ 2

1.3 $\{A_1, A_2\}$ is a minimum clique covering of $K_4\backslash e$ in Figure 1.2 . . . 3

1.4 $\{B_1, B_2, B_3\}$ is a minimum clique partition of $K_4\backslash e$ in Figure 1.2 3

1.5 Example of a clique-independent set of a graph 4

1.6 Example of the k-power of a star 5

1.7 Example of the square and cube of a path 5

1.8 Example of the k-power of a cycle 6

1.9 Example of the square of a tree 6

2.1 Path of n vertices (P_n) 9

2.2 P_5^2 10

2.3 $\mathcal{C}$ in Example 2.1.4 11

2.4 I in Example 2.1.4 11

2.5 $\mathcal{P}$ in Example 2.1.4 11

2.6 I_k in Theorem 2.1.5 12

2.7 B_i in Theorem 2.1.5 13

2.8 B_i in Theorem 2.1.6 14

2.9 Cycle of n vertices (C_n) 15

2.10 V_1 and V_2 of v_0 in Proposition 2.2.3 16

2.11 C_6^2 17

2.12 $\mathcal{C}$ in Example 2.2.4 17

2.13 I in Example 2.2.4 17

2.14 I_k in Theorem 2.2.6 where $k = 3$ and $n = 10$ 19

2.15 Case 1 in Theorem 2.2.6 19

2.16 Case 2.1 in Theorem 2.2.6 20
2.17 Case 2.2 in Theorem 2.2.6 20
2.18 B_i in Theorem 2.2.8 22

3.1 Pyramid of $\frac{n(n+1)}{2}$ vertices (PG_n) 25
3.2 I_k in Lemma 3.1.2 26
3.3 Case 1 in Lemma 3.1.2 27
3.4 Case 2 in Lemma 3.1.2 27
3.5 $C_l(i,j)$ in Lemma 3.1.3 28
3.6 Case 1 in Lemma 3.1.4 29
3.7 Case 2 in Lemma 3.1.4 29
3.8 Case 3 in Lemma 3.1.4 30
3.9 Degrees of vertices of PG_n^2 31
3.10 Cliques of PG_n^2 in Theorem 3.2.2 (ii) 34
3.11 F_j in Theorem 3.2.2 (iii) 36

4.1 $P_2 \times P_n$ 39
4.2 I_k in Lemma 4.1.3 39
4.3 Case 1 in Lemma 4.1.3 40
4.4 Case 2 in Lemma 4.1.3 40
4.5 Case 3.1 in Lemma 4.1.3 41
4.6 Case 3.2 in Lemma 4.1.3 41
4.7 A_i and B_i in Lemma 4.1.4 42
4.8 Degrees of vertices of $(P_2 \times P_n)^2$ 45
4.9 A_i, B_i and C_i in Theorem 4.2.2 (ii) 47
4.10 D in Theorem 4.2.2 (iii) 48
4.11 $P_m \times P_n$ 49

4.12 I_k in Lemma 4.3.3 50

4.13 I_k in Lemma 4.3.4 52

4.14 $\mathcal{C}$ in Theorem 4.3.5 54

4.15 Degrees of vertices of $(P_m \times P_n)^2$ 57

4.16 Cliques of $(P_m \times P_n)^2$ in Theorem 4.4.3 (i) 60

4.17 E_i and $D2_i$ in Theorem 4.4.3 (ii) 63

4.18 F_j and Z in Theorem 4.4.3 (iv) 65

5.1 $P_3 \times P_3 \times P_3$ 71