

การวิเคราะห์การโค้งของแผ่นบางภายใต้ภาระตั้งฉากทางกลและอุณหภูมิ  
ด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสครีตเคอร์ซอพฟ์แบบปรับปรุงที่ปรับขนาดได้

นายพิชญ์นทร์ โพธิคุณ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
CHULALONGKORN UNIVERSITY

บทคัดย่อและแฟ้มข้อมูลฉบับเต็มของวิทยานิพนธ์ตั้งแต่ปีการศึกษา 2554 ที่ให้บริการในคลังปัญญาจุฬาฯ (CUIR)  
เป็นแฟ้มข้อมูลของนิสิตเจ้าของวิทยานิพนธ์ ที่ส่งผ่านทางบัณฑิตวิทยาลัย

The abstract and full text of theses from the academic year 2011 in Chulalongkorn University Intellectual Repository (CUIR)  
are the thesis authors' files submitted through the University Graduate School.

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2557

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

PLATE BENDING ANALYSIS WITH TRANSVERSE MECHANICAL AND THERMAL LOADINGS  
BY ADAPTIVE IMPROVED DISCRETE KIRCHHOFF QUADRILATERAL ELEMENTS

Mr. Pichayen Bhothikhun



A Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Doctor of Philosophy Program in Mechanical Engineering  
Department of Mechanical Engineering  
Faculty of Engineering  
Chulalongkorn University  
Academic Year 2014  
Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์

การวิเคราะห์การโค้งของแผ่นบางภายใต้ภาระตั้งฉากทาง  
กลและอุณหภูมิด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสครีตเคอร์ชอฟฟ์  
แบบปรับปรุงที่ปรับขนาดได้

โดย

นายพิชฌันทร์ โพธิคุณ

สาขาวิชา

วิศวกรรมเครื่องกล

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

ศาสตราจารย์ ดร. ปราโมทย์ เดชะอำไพ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้รับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วน  
หนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาตรีบัณฑิต

.....คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร. บัณฑิต เอื้ออาภรณ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.....ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. กุณจินี มณีรัตน์)

.....อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(ศาสตราจารย์ ดร. ปราโมทย์ เดชะอำไพ)

.....กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. นิพนธ์ วรรณโสภาคย์)

.....กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ชัญญาพันธ์ วิรุฬห์ศรี)

.....กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร. วิโรจน์ ลิ้มตระการ)

พิชเชนทร์ โพธิคุณ : การวิเคราะห์การโก่งของแผ่นบางภายใต้ภาระตั้งฉากทางกลและอุณหภูมิด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสครีตเคอร์ซอพฟ์แบบปรับปรุงที่ปรับขนาดได้ (PLATE BENDING ANALYSIS WITH TRANSVERSE MECHANICAL AND THERMAL LOADINGS BY ADAPTIVE IMPROVED DISCRETE KIRCHHOFF QUADRILATERAL ELEMENTS) อ. ที่ปริกษาวิทยานิพนธ์หลัก: ศ. ดร. ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 165 หน้า.

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้นำเสนอระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางอันเนื่องมาจากภาระตั้งฉากทางกลและอุณหภูมิโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสครีตเคอร์ซอพฟ์แบบปรับปรุง (ไอทีเคคิว) ซึ่งเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสี่จุดต่อที่ให้ความแม่นยำของผลลัพธ์สูง และได้ถูกนำมาประยุกต์ร่วมกับเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูงมากขึ้น และสามารถนำไปวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางที่มีลักษณะซับซ้อนได้

สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหา หลักการและขั้นตอนในการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ต่าง ๆ ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น โหลดเวกเตอร์รูปแบบปิดที่ได้มาจากการอินทิเกรตโดยตรง ซึ่งทำให้ลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณลงเมื่อเทียบกับโหลดเวกเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นจากการอินทิเกรตเชิงตัวเลข รวมไปถึงหลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ได้ถูกแสดงไว้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์นี้จะปรับใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่มีความเปลี่ยนแปลงของความชันของผลลัพธ์สูง และปรับใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณอื่น ๆ ทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความแม่นยำสูงมากขึ้นรวมถึงช่วยลดเวลาและหน่วยความจำที่ใช้ในการคำนวณลงด้วย

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ทำโดยการนำผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์นั้นไปเปรียบเทียบกับปัญหาเบื้องต้นที่ทราบผลเฉลยแม่นยำตรง จากนั้นจึงนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้ไปใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น โดยผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางต่าง ๆ ในวิทยานิพนธ์นี้แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของการใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสครีตเคอร์ซอพฟ์แบบปรับปรุงที่ปรับขนาดได้ในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางที่มีความซับซ้อนได้ดี

ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล

ลายมือชื่อนิสิต .....

สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล

ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาหลัก .....

ปีการศึกษา 2557

# # 5371802321 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING

KEYWORDS: PLATE BENDING / IDKQ / FINITE ELEMENT METHOD / ADAPTIVE MESH

PICHAYEN BHOTHIKHUN: PLATE BENDING ANALYSIS WITH TRANSVERSE MECHANICAL AND THERMAL LOADINGS BY ADAPTIVE IMPROVED DISCRETE KIRCHHOFF QUADRILATERAL ELEMENTS. ADVISOR: PROF. PRAMOTE DECHAUMPHAI, 165 pp.

In this thesis, a finite element method for analyzing plate bending problems under both mechanical and thermal loadings by the Improved Discrete Kirchhoff Quadrilateral (IDKQ) thin-plate bending element is presented. The IDKQ element provides higher solution accuracy as compared to other standard quadrilateral elements. The element is also combined with an adaptive meshing technique to improve solution accuracy for analyzing more complex problems.

The governing differential equations, finite element method concepts and procedures, finite element matrices and closed-form of load vectors obtained from exact integration are presented. These load vectors take less computational time as compared to the load vectors obtained from numerical integration. The basic idea of the adaptive meshing technique is also introduced. The adaptive meshing technique generates small clustered elements in the regions of high stress gradients to provide higher solution accuracy. At the same time, larger elements are generated in the other regions to reduce the total numbers of unknowns and the computational time.

A corresponding finite element computer program is developed and verified by using examples that have exact solutions. The effectiveness of the IDKQ element combined with the adaptive meshing technique is evaluated by several problems. Results illustrate that the combined method can improve the solution accuracy and reduce the computational effort.

Department: Mechanical Engineering      Student's Signature .....

Field of Study: Mechanical Engineering      Advisor's Signature .....

Academic Year: 2014

## กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์เป็นอย่างสูง ที่ได้ให้ความรู้ คำแนะนำ ตลอดจนข้อคิดและประสบการณ์ที่มีคุณค่าอย่างยิ่งในการทำวิจัย

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.กฤษณี มณีรัตน์ ประธานกรรมการ รองศาสตราจารย์ ดร.วิโรจน์ ลิ้มตระการ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นิพนธ์ วรรณโสภากย์ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชญญาพันธ์ วิรุฬห์ศรี กรรมการ ที่ได้ให้ความอนุเคราะห์ ให้คำแนะนำ ตลอดจนข้อคิดเห็นที่ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอขอบคุณทุน 90 ปี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กองทุนรัชดาภิเษกสมโภช ที่ให้การสนับสนุนในการทำวิจัยนี้

ขอขอบคุณ คุณพัชรี ธีระเอก คุณสุธิ ไตรวิวัฒนา คุณปริญญา บุญมาเลิศ คุณอติพงษ์ มาลาทิพย์ คุณสุทธิคมน์ พันธิมากรกิจ คุณณัฐชนนท์ ประสมสุข คุณชัชวาล ศิริปัฐ คุณวิทยา สดับสาร และคุณเมธิศา จิตมานะ ซึ่งเป็นผู้ร่วมงานในห้องปฏิบัติการวิจัยกลศาสตร์การคำนวณ สำหรับคำแนะนำและความช่วยเหลือต่าง ๆ ตลอดระยะเวลาในการทำงานวิจัยนี้

ขอขอบคุณ อาจารย์ ดร.สร้อย ศาลากิจ ที่คอยช่วยเหลือในเรื่องบทความทางวิชาการ และคอยให้คำแนะนำต่าง ๆ แก่ผู้วิจัยเสมอมา

ท้ายสุดนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดามารดาที่เป็นกำลังใจและสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยมาโดยตลอดจนสำเร็จลุล่วง อนึ่งประโยชน์และคุณค่าอันใดที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์นี้ขอมอบเป็นกตัญญูตราบเท่าแต่บิดามารดา ครูอาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

## สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญตาราง.....	ญ
สารบัญรูป.....	ฎ
คำอธิบายสัญลักษณ์.....	ต
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์.....	4
1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์.....	4
1.4 ขั้นตอนการดำเนินงานวิทยานิพนธ์.....	4
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากวิทยานิพนธ์.....	5
บทที่ 2 ปรีทัศน์วรรณกรรม.....	6
2.1 ความยากลำบากในการประดิษฐ์เอลิเมนต์การโค้งของแผ่นบาง.....	6
2.2 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมมุมฉาก.....	7
2.3 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ.....	11
2.3.1 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ ที่เกิดจากรูปสามเหลี่ยมย่อย.....	11
2.3.2 เอลิเมนต์แผ่นมายด์ลีน.....	13
2.3.3 เอลิเมนต์ดิสครีตเคอร์ชอฟฟ์.....	18
2.4 บทสรุป.....	24
บทที่ 3 ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์สี่เหลี่ยมดิสครีตเคอร์ชอฟฟ์แบบปรับปรุง.....	26

3.1	สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาการโค้งของแผ่นบาง .....	26
3.2	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการโค้งของแผ่นบาง.....	30
3.3	เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสครีตเคอร์ซอर्फี่.....	33
3.4	เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสครีตเคอร์ซอर्फี่แบบปรับปรุง .....	41
3.5	บทสรุป.....	58
บทที่ 4	ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการโค้งของแผ่นบาง .....	59
4.1	ขั้นตอนการคำนวณ.....	59
4.2	รายละเอียดของโปรแกรม.....	60
4.3	รายละเอียดของไฟล์ข้อมูลนำเข้า.....	61
4.4	ตัวอย่างการใช้โปรแกรม PLATEIDKO.....	63
4.5	บทสรุป.....	66
บทที่ 5	การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์.....	67
5.1	ปัญหาการโค้งของแผ่นบางเนื่องจากแรงกระทำทางกล.....	67
5.1.1	ปัญหาแผ่นบางถูกแรงกระจายกระทำตลอดทั้งแผ่น .....	67
5.1.2	ปัญหาแผ่นบางที่มีการรองรับที่ขอบต่างกัน .....	71
5.1.3	ปัญหาแผ่นบางถูกแรงเดียวกระทำที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่น .....	74
5.1.4	ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลาง.....	76
5.2	ปัญหาการโค้งของแผ่นบางเนื่องจากภาวะทางความร้อน .....	79
5.2.1	ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่รองรับด้วยลิ่มตลอดขอบสองด้าน.....	80
5.2.2	ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่รองรับด้วยลิ่มตลอดขอบทั้งสี่ด้าน .....	85
5.2.3	ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ขอบรองรับด้วยลิ่มและถูกยึดแน่น.....	89
5.2.4	ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ขอบรองรับด้วยลิ่ม.....	93
5.3	บทสรุป.....	97



บทที่ 6 เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์.....	98
6.1 หลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์.....	98
6.2 บทสรุป.....	102
บทที่ 7 การวิเคราะห์ปัญหาที่ใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์.....	103
7.1 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลาง .....	103
7.2 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนรองรับด้วยลิ้ม .....	106
7.3 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนขอบด้านหนึ่งถูกยึดแน่น .....	111
7.4 ปัญหาแผ่นบางรูปตัวแอล.....	115
7.5 บทสรุป.....	119
บทที่ 8 บทสรุป ปัญหาที่พบ และข้อเสนอแนะ.....	120
8.1 บทสรุป.....	120
8.2 ปัญหาที่พบในขณะที่ทำวิทยานิพนธ์.....	121
8.3 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต.....	121
รายการอ้างอิง.....	122
ภาคผนวก .....	128
ภาคผนวก ก การเสียรูปในแนวตั้งที่แปรผันในรูปกำลังสามตลอดขอบของเอลิเมนต์.....	129
ภาคผนวก ข สมการความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องสำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสครีตเคอร์ซอพฟ์.....	132
ภาคผนวก ค ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ใหม่โดยวิธีกำลังสองน้อยสุด .....	134
ภาคผนวก ง ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ในรูปของกำลังสามคู่.....	138
ภาคผนวก จ รายละเอียดโปรแกรม PLATEIDKQ.....	148
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์ .....	165

## สารบัญตาราง

ตารางที่ 2.1 ชนิดของเอลิเมนต์และจำนวนจุดเกาส์ที่ใช้ในการอินทิเกรตเชิงตัวเลขของวิธีการเลือกอินทิเกรตสำหรับเอลิเมนต์แผ่นมาดลีน.....	17
ตารางที่ 3.1 การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการประดิษฐ์โหนดเวกเตอร์เนื่องจากแรงภายนอกที่จำนวนรอบในการประดิษฐ์โหนดเวกเตอร์ต่าง ๆ.....	57
ตารางที่ 3.2 การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการประดิษฐ์โหนดเวกเตอร์เนื่องจากอนุกรมที่เปลี่ยนแปลงไปตลอดความหนาที่จำนวนรอบในการประดิษฐ์โหนดเวกเตอร์ต่าง ๆ.....	58
ตารางที่ 5.1 การเปรียบเทียบค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นจากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสี่แบบ .....	71
ตารางที่ 5.2 การเปรียบเทียบค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นจากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสี่แบบ .....	74
ตารางที่ 5.3 การเปรียบเทียบค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นจากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสี่แบบ .....	76
ตารางที่ 5.4 การเปรียบเทียบค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งที่ตำแหน่งที่ 1 จากการใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดีเคคิวและไอดีเคคิว .....	79
ตารางที่ 5.5 การเปรียบเทียบค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นจากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสี่แบบ .....	83
ตารางที่ 5.6 การเปรียบเทียบค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นจากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสี่แบบ .....	88
ตารางที่ 5.7 การเปรียบเทียบค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นจากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสี่แบบ .....	92
ตารางที่ 5.8 การเปรียบเทียบค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นจากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสามแบบ .....	97
ตารางที่ 7.1 การเปรียบเทียบค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งที่ตำแหน่งที่ 1 จากการใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอดีเคคิวละเอียดขนาดสม่ำเสมอ และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอดีเคคิวที่ปรับขนาดแล้ว.....	106

ตารางที่ 7.2 การเปรียบเทียบค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นจากการใช้เอลิเมนต์ละเอียดขนาดสม่ำเสมอ และเอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้วครั้งที่ 3..... 111

ตารางที่ 7.3 การเปรียบเทียบค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งในลักษณะตัวแปรไร้มิติที่ตำแหน่ง *A* จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรม ABAQUS และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไฮโดรเจนที่ปรับขนาดแล้ว..... 114

ตารางที่ 7.4 การเปรียบเทียบค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งในลักษณะตัวแปรไร้มิติที่ตำแหน่ง *B* จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรม ABAQUS และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไฮโดรเจนที่ปรับขนาดแล้ว..... 114



## สารบัญรูป

รูปที่ 2.1	เอลิเมนต์เอซีเอ็มและตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อทั้งสี่.....	7
รูปที่ 2.2	พจน์พหุนามของเอลิเมนต์เอซีเอ็มตามรูปแบบสามเหลี่ยมปาสคาล.....	8
รูปที่ 2.3	เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมมุมฉากสองเอลิเมนต์ที่อยู่ติดกัน.....	8
รูปที่ 2.4	พจน์พหุนามของเอลิเมนต์บีเอฟเอสตามรูปแบบสามเหลี่ยมปาสคาล.....	9
รูปที่ 2.5	เอลิเมนต์ที่มีการเชื่อมต่อกันที่จุดต่อไม่เป็นมุมฉาก.....	10
รูปที่ 2.6	การแบ่งเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสองรูปย่อยตามแนวเส้นทแยงมุม.....	11
รูปที่ 2.7	การแบ่งเอลิเมนต์ออกเป็นสามเหลี่ยมสี่รูปย่อย.....	12
รูปที่ 2.8	การโค้งของคานเนื่องจากโมเมนต์คงที่เปรียบเทียบกับกรณีโดยใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์.....	16
รูปที่ 2.9	ลักษณะของเอลิเมนต์ดีเคทีพีที่ประกอบด้วย 12 ระดับชั้นความเสรี.....	20
รูปที่ 2.10	ลักษณะของเอลิเมนต์ลูฟโฟนด์ที่ประกอบด้วย 12 ระดับชั้นความเสรี.....	20
รูปที่ 2.11	เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอดีเคคิว.....	21
รูปที่ 2.12	ลักษณะของเอลิเมนต์ดีเคคิวพีที่ประกอบด้วย 16 ระดับชั้นความเสรี.....	22
รูปที่ 2.13	ลักษณะของเอลิเมนต์เซมิลูฟที่ประกอบด้วย 16 ระดับชั้นความเสรี.....	23
รูปที่ 2.14	ลักษณะของเอลิเมนต์ดีแอลทีพีที่ประกอบด้วย 27 ระดับชั้นความเสรี.....	23
รูปที่ 2.15	ลักษณะของเอลิเมนต์ดีเคคิว16ที่ประกอบด้วย 16 ระดับชั้นความเสรี.....	23
รูปที่ 2.16	การพัฒนาเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมการโค้งของแผ่นบาง.....	25
รูปที่ 3.1	แผ่นบางในแนวระนาบ $x-y$ ที่มีแรงกระทำในแนวแกน $z$ .....	26
รูปที่ 3.2	ความเค้นย่อยต่าง ๆ ผ่านความหนาของแผ่นบางเล็กใด ๆ ที่ยาว $dx$ กว้าง $dy$ และหนา $t$ .....	27
รูปที่ 3.3	โมเมนต์และแรงเฉือนย่อยต่าง ๆ ตามขอบของแผ่นบางเล็กใด ๆ ที่ยาว $dx$ กว้าง $dy$ และหนา $t$ .....	29
รูปที่ 3.4	รูปแสดงทิศทางบวกของมุมบิด $\beta_x$ และ $\beta_y$ .....	31

รูปที่ 3.5	เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสครีตเคอร์ซอร์ซอฟต์แวร์และตัวไม่ทราบค่าที่แต่ละจุดต่อ .....	34
รูปที่ 3.6	เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม 8 จุดต่อ .....	35
รูปที่ 3.7	เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม 9 จุดต่อ .....	43
รูปที่ 4.1	ลักษณะขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม PLATEIDKQ.....	60
รูปที่ 4.2	แผ่นบางสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่รองรับด้วยลิ้มตลอดขอบสองด้านและมีการกระจายของ อุณหภูมิตลอดความหนาแบบเชิงเส้น .....	63
รูปที่ 4.3	แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาตัวอย่าง.....	64
รูปที่ 4.4	ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้า ‘TEST1.DAT’ .....	65
รูปที่ 4.5	ลักษณะของไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ ‘TEST1.OUT’ .....	66
รูปที่ 5.1	แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางถูกแรงกระทำแบบกระจายตลอดทั้งแผ่น.....	67
รูปที่ 5.2	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สามเหลี่ยมและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา .....	68
รูปที่ 5.3	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา .....	69
รูปที่ 5.4	การเสียรูปของแผ่นบางโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมสี่เหลี่ยมในการวิเคราะห์ .....	70
รูปที่ 5.5	การเสียรูปของแผ่นบางใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควในการวิเคราะห์ .....	70
รูปที่ 5.6	การเปรียบเทียบค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของการเสียรูปในแนวแกนตั้งสูงสุดที่ ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นที่คำนวณได้จากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสี่แบบ.....	70
รูปที่ 5.7	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สามเหลี่ยมและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา .....	72
รูปที่ 5.8	รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา .....	72
รูปที่ 5.9	การเสียรูปของแผ่นบางโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควในการวิเคราะห์.....	73
รูปที่ 5.10	การเปรียบเทียบค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของการเสียรูปในแนวแกนตั้งสูงสุดที่ ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นที่คำนวณได้จากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสี่แบบ.....	73
รูปที่ 5.11	แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางถูกแรงเดี่ยวกระทำที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่น.....	74
รูปที่ 5.12	การเสียรูปของแผ่นบางโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควในการวิเคราะห์.....	75
รูปที่ 5.13	การเปรียบเทียบค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของการเสียรูปในแนวแกนตั้งสูงสุดที่ ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นที่คำนวณได้จากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสี่แบบ.....	76

รูปที่ 5.14 แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางที่มีรูปกลมตรงกลางภายใต้แรงกระจาย .....	77
รูปที่ 5.15 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูปกลมตรงกลางโดยใช้เอลิเมนต์ขนาดสม่ำเสมอตลอดทั้งโดเมน.....	77
รูปที่ 5.16 รูปแบบโดเมนของปัญหาและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา .....	78
รูปที่ 5.17 การเสียรูปของแผ่นบางโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควในการวิเคราะห์.....	78
รูปที่ 5.18 การเปรียบเทียบค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของการเสียรูปในแนวแกนตั้งที่ตำแหน่งที่ 1 ที่คำนวณได้จากการใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควและไอติเคคว.....	79
รูปที่ 5.19 แผ่นบางสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่รองรับด้วยลิ้มตลอดขอบสองด้านและมีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาแบบเชิงเส้น .....	81
รูปที่ 5.20 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สามเหลี่ยมและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา.....	82
รูปที่ 5.21 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา .....	82
รูปที่ 5.22 การเสียรูปของแผ่นบางโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควในการวิเคราะห์.....	83
รูปที่ 5.23 การเสียรูปของแผ่นบางในแกนแนวตั้ง $w$ ตลอดแนวแกน $x$ โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำ.....	84
รูปที่ 5.24 การเปรียบเทียบค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของการเสียรูปในแกนตั้งสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นที่คำนวณได้จากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสี่แบบ.....	84
รูปที่ 5.25 แผ่นบางสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่รองรับด้วยลิ้มตลอดขอบทั้งสี่ด้านและมีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาแบบเชิงเส้น .....	85
รูปที่ 5.26 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สามเหลี่ยมและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา.....	86
รูปที่ 5.27 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา .....	86
รูปที่ 5.28 การเสียรูปของแผ่นบางโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควในการวิเคราะห์.....	86
รูปที่ 5.29 การเสียรูปของแผ่นบางในแกนแนวตั้ง $w$ ตลอดแนวแกน $x$ โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำ.....	87
รูปที่ 5.30 การเปรียบเทียบค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของการเสียรูปในแกนตั้งสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นที่คำนวณได้จากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสี่แบบ.....	88

รูปที่ 5.31 แผ่นบางสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ขอบรองรับด้วยลิ้มและถูกยึดแน่นและมีการกระจายของ อุณหภูมิตลอดความหนาแบบเชิงเส้น .....	90
รูปที่ 5.32 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สามเหลี่ยมและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา.....	90
รูปที่ 5.33 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา .....	91
รูปที่ 5.34 การเสียรูปของแผ่นบางโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควในการวิเคราะห์.....	91
รูปที่ 5.35 การเสียรูปของแผ่นบางในแกนแนวตั้ง $w$ ตลอดแนวแกน $x$ โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม ไอติเคควเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำ.....	92
รูปที่ 5.36 การเปรียบเทียบค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของการเสียรูปในแนวแกนตั้งสูงสุดที่ ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นที่คำนวณได้จากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสี่แบบ.....	93
รูปที่ 5.37 แผ่นบางสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ขอบรองรับด้วยลิ้มและมีการกระจายของอุณหภูมิตลอด ความหนาแบบเชิงเส้น .....	94
รูปที่ 5.38 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สามเหลี่ยมและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา.....	95
รูปที่ 5.39 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา .....	95
รูปที่ 5.40 การเสียรูปของแผ่นบางโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควในการวิเคราะห์.....	96
รูปที่ 5.41 การเปรียบเทียบค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของการเสียรูปในแนวแกนตั้งสูงสุดที่ ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นที่คำนวณได้จากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสี่แบบ.....	96
รูปที่ 6.1 รูปแสดงหลักการการหาค่าในแนวแกนหลักและหลักการการหาค่าอนุพันธ์อันดับที่สอง ของตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์.....	99
รูปที่ 6.2 ตัวอย่างไฟล์ข้อมูลนำเข้าเพื่อปรับขนาดเอลิเมนต์.....	101
รูปที่ 7.1 แผ่นบางสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีรูปกลมตรงกลางภายใต้แรงกระจาย .....	103
รูปที่ 7.2 รูปแบบโดเมนของปัญหาและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา .....	104
รูปที่ 7.3 ค่าความเค้นวอนมิเชสโดยใช้เอลิเมนต์เริ่มต้น .....	104
รูปที่ 7.4 รูปแบบโดเมนของปัญหาที่ปรับขนาดเอลิเมนต์แล้ว.....	105
รูปที่ 7.5 การเสียรูปของแผ่นบางสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีรูปกลมตรงกลางโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเค ควที่ปรับขนาดแล้ว .....	105
รูปที่ 7.6 ค่าความเค้นวอนมิเชสโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้ว.....	106

รูปที่ 7.7 แผ่นบางสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนรองรับด้วยลิ้ม .....	107
รูปที่ 7.8 รูปแบบโดเมนของปัญหาและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา .....	107
รูปที่ 7.9 ค่าความเค้นวอนมิเชสโดยใช้เอลิเมนต์เริ่มต้น .....	108
รูปที่ 7.10 รูปแบบโดเมนของปัญหาที่ปรับขนาดเอลิเมนต์แล้ว (ก) เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 1 (ข) เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 2 (ค) เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 3 .....	109
รูปที่ 7.11 การเสียรูปของแผ่นบางสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนรองรับด้วยลิ้มโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม ไอติเคควที่ปรับขนาดครั้งที่ 3 .....	109
รูปที่ 7.12 ค่าความเค้นวอนมิเชสโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 3 .....	110
รูปที่ 7.13 รูปแบบโดเมนของปัญหาโดยใช้เอลิเมนต์ละเอียดตลอดทั้งโดเมน .....	110
รูปที่ 7.14 การเปรียบเทียบค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของการเสียรูปในแนวแกนตั้งสูงสุดที่ ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นที่คำนวณได้จากการใช้เอลิเมนต์ละเอียดและเอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้ว .....	110
รูปที่ 7.15 แผ่นบางสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนขอบด้านหนึ่งถูกยึดแน่น .....	111
รูปที่ 7.16 ลักษณะของเอลิเมนต์โดยใช้โปรแกรม ABAQUS ในการวิเคราะห์ [63] .....	112
รูปที่ 7.17 รูปแบบโดเมนของปัญหาและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา .....	112
รูปที่ 7.18 ค่าความเค้นวอนมิเชสโดยใช้เอลิเมนต์เริ่มต้น .....	112
รูปที่ 7.19 รูปแบบโดเมนของปัญหาที่ได้ปรับขนาดเอลิเมนต์แล้ว (ก) เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 1 (ข) เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 2 .....	113
รูปที่ 7.20 ค่าความเค้นวอนมิเชสโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 2 .....	114
รูปที่ 7.21 แผ่นบางรูปตัวแอลที่มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้น .....	115
รูปที่ 7.22 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาแผ่นบางรูปตัวแอล .....	116
รูปที่ 7.23 ค่าความเค้นวอนมิเชสโดยใช้เอลิเมนต์เริ่มต้น .....	116
รูปที่ 7.24 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาแผ่นบางรูปตัวแอลที่มีการกระจายของอุณหภูมิ ตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้นด้วยเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ .....	117
รูปที่ 7.25 การเสียรูปของแผ่นบางแผ่นบางรูปตัวแอลโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 4 .....	118
รูปที่ 7.26 ค่าความเค้นวอนมิเชสของแผ่นบางรูปตัวแอลโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 4 .....	118



รูปที่ 7.27 การลู่เข้าของค่าความเค้นวอนมิเชสของแผ่นบางรูปตัวแอลที่ตำแหน่งกึ่งกลางของส่วน  
โค้งด้วยเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์..... 119



## คำอธิบายสัญลักษณ์

$A$	พื้นที่
$a_k$	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์
$b_k$	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์
$c_k$	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์
$d_k$	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์
$e_k$	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์
$e_k$	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์
$p_k$	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์
$q_k$	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์
$r_k$	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์
$s_k$	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์
$t_k$	สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์
$D$	ค่าความแข็งเกร็งของการโก่ง
$E$	ค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น
$F_p$	โหลดเนื่องจากแรงตั้งฉากภายนอก
$F_T$	โหลดเนื่องจากภาระทางความร้อน
$h$	ขนาดโดยเฉลี่ยของเอลิเมนต์
$H_x$	ฟังก์ชันพื้นฐานของ $\beta_x$
$H_y$	ฟังก์ชันพื้นฐานของ $\beta_y$
$\bar{H}_x$	ฟังก์ชันพื้นฐานของ $\beta_x$
$\bar{H}_y$	ฟังก์ชันพื้นฐานของ $\beta_y$
$\kappa_i$	เวกเตอร์ความโค้ง
$J$	จาโคเบียน
$M_x$	โมเมนต์ดัดแกน $x$
$M_y$	โมเมนต์ดัดแกน $y$
$M_{xy}$	โมเมนต์ดัดเฉือน

$M_T$	โมเมนต์ความร้อน
$N_i$	ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์
$\bar{N}_i$	ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์
$N'_i$	ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์
$p$	แรงกระจายภายนอกที่กระทำในแนวตั้งฉาก
$F$	แรงเดียวภายนอกที่กระทำในแนวตั้งฉาก
$Q_x$	แรงเฉือนในแนวแกน $x$
$Q_y$	แรงเฉือนในแนวแกน $y$
$r$	รัศมี
$T$	อุณหภูมิ
$T_0$	อุณหภูมิอ้างอิงที่วัสดุไม่เกิดความเค้น
$T_U$	อุณหภูมิผิวด้านบนของแผ่นบาง
$T_L$	อุณหภูมิผิวด้านล่างของแผ่นบาง
$\Delta T$	ผลต่างของอุณหภูมิ
$t$	ความหนาแผ่นบาง, ความหนาของเอลิเมนต์
$U$	พลังงานความเครียดภายใน
$u$	ระยะการเสียรูปในแนวแกน $x$
$v$	ระยะการเสียรูปในแนวแกน $y$
$w$	ระยะการเสียรูปในแนวแกน $z$
$x$	ระยะในแนวแกน $x$
$y$	ระยะในแนวแกน $y$
$z$	ระยะในแนวแกน $z$
$x_{ij}$	ผลต่างของพิกัดแกน $x$ ของจุดต่อ $i$ และ $j$
$y_{ij}$	ผลต่างของพิกัดแกน $y$ ของจุดต่อ $i$ และ $j$
$l_{ij}$	ความยาวด้านของเอลิเมนต์ที่อยู่ระหว่างจุดต่อ $i$ และ $j$
$\gamma_{ij}$	มุมระหว่างแกน $x$ กับแกนตั้งฉากกับขอบของเอลิเมนต์
$W_i$	ค่าน้ำหนัก
$\phi$	ตัวแปรตามไม่ทราบค่าที่จุดต่อบนเอลิเมนต์

$\hat{\phi}$	ตัวแปรตามสมมุติ
$\sigma_x$	ความเค้นตั้งฉากในแนวแกน $x$
$\sigma_y$	ความเค้นตั้งฉากในแนวแกน $y$
$\sigma_{VM}$	ความเค้นวอนมิเชส
$\tau_{xy}$	ความเค้นเฉือน
$\varepsilon_x$	ความเครียดตั้งฉากในแนวแกน $x$
$\varepsilon_y$	ความเครียดตั้งฉากในแนวแกน $y$
$\varepsilon_0$	ความเครียดอันเป็นผลมาจากอุณหภูมิ
$\gamma_{xy}$	ความเครียดเฉือน
$\theta_x$	มุมบิดรอบแกน $x$
$\theta_y$	มุมบิดรอบแกน $y$
$\beta_x$	มุมบิดของระนาบที่ตั้งฉากกับระนาบของแผ่นบางที่เสียรูปในระนาบ $x$ - $z$
$\beta_y$	มุมบิดของระนาบที่ตั้งฉากกับระนาบของแผ่นบางที่เสียรูปในระนาบ $y$ - $z$
$\delta_i$	ตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อ
$\nu$	อัตราส่วนปัวซองส์
$\lambda$	ตัวแปรในการปรับขนาดเอลิเมนต์
$\alpha$	สัมประสิทธิ์การกระจายความร้อน
$\xi$	แกนนอนในพิกัดธรรมชาติ
$\eta$	แกนตั้งในพิกัดธรรมชาติ

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

ในปัจจุบันความรู้วิธีการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบาง (plate bending analysis) ได้ถูกนำมาใช้ในงานทางวิศวกรรมจำนวนมาก ตัวอย่างเช่น การโก่งของแผ่นเหล็กหรือการโก่งของกระบอกบ่ออาคารสูง ซึ่งเป็นผลมาจากแรงดัดและโหลดความร้อนอันเกิดจากอุณหภูมิที่ต่างกันของพื้นผิวด้านในและพื้นผิวด้านนอกอาคาร การโก่งของแผ่นหลังคาบ้าน หรือการโก่งของโครงสร้างแผ่นบางที่มีรูปร่างซับซ้อนต่าง ๆ เป็นต้น ซึ่งปัญหาเหล่านี้ล้วนเป็นปัญหาที่มีลักษณะรูปร่างซับซ้อน การหาผลลัพธ์ของปัญหาดังกล่าวในรูปของผลเฉลยแม่นยำตรงนั้นทำได้ยากหรืออาจไม่สามารถทำได้เลย ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จึงเข้ามามีบทบาทสำคัญที่จะนำมาใช้หาคำตอบในรูปของผลเฉลยโดยประมาณแทนการหาผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหาดังกล่าว

การวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [1] ขั้นตอนแรกคือ การแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ซึ่งเอลิเมนต์ที่นิยมใช้คือเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมและเอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยม เอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมนั้นโดยทั่วไปจะให้ความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ที่ดีกว่าเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมเนื่องจากมีอันดับขั้นของการประมาณภายในเอลิเมนต์ที่สูงกว่า ดังเช่นในปัญหาความเค้นระนาบ (plane stress) เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมมีการสมมุติการกระจายของผลเฉลยเป็นเชิงเส้น ลักษณะเป็นแผ่นเรียบ (flat plane) ส่วนเอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมใช้การสมมุติการกระจายของผลเฉลยเป็นเชิงเส้นคู่ (bilinear) ซึ่งมีลักษณะโค้งมนบนเอลิเมนต์ทำให้ได้ผลเฉลยที่ดีกว่า เป็นต้น อีกทั้งเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจะมีจำนวนเอลิเมนต์น้อยกว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเมื่อใช้จำนวนจุดต่อที่เท่ากันบนรูปร่างของปัญหาทำให้มีจำนวนรอบการคำนวณที่น้อยกว่าด้วย เอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมชนิดต่าง ๆ จึงได้ถูกพัฒนาขึ้นเพื่อการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความถูกต้องแม่นยำมากขึ้น

เอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางนั้นเริ่มต้นจากการพัฒนาเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมมุมฉาก (rectangular element) ก่อน ตัวอย่างเช่น เอลิเมนต์เอซีเอ็ม (ACM element) ที่นำเสนอโดย Adini, Clough และ Melosh [2] และเอลิเมนต์บีเอฟเอส (BFS element) ที่นำเสนอโดย Bogner, Fox และ Schmit [3] เป็นต้น แต่เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ (quadrilateral element) นั้นมีความต้องการสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาโดยทั่วไปมากกว่า เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ จึงได้มีการพัฒนาขึ้นโดยเริ่มต้นจากแนวคิดในการสร้างเอลิเมนต์จากการแบ่งเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมออกเป็นสามเหลี่ยมรูปย่อยที่นำเสนอโดย De Veubeke [4] รวมไปถึงเอลิเมนต์คิว 19 (Q19

element) ซึ่งนำเสนอโดย Clough และ Felippa [5] แม้เอลิเมนต์ดังกล่าวจะเป็นเอลิเมนต์ที่มีความต่อเนื่องระหว่างเอลิเมนต์แบบ  $C^1$  แต่เอลิเมนต์ดังกล่าวที่ประดิษฐ์ขึ้นจากการแบ่งเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม ออกเป็นสามเหลี่ยมย่อยนั้นจะไม่สามารถประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ขึ้นได้หากเอลิเมนต์นั้นมี รูปร่างลักษณะใกล้เคียงรูปสามเหลี่ยม ซึ่งมีโอกาสเกิดขึ้นได้หากการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็น เอลิเมนต์ย่อย ๆ นั้นทำได้ไม่ดี

นอกจากนี้ยังมีการประดิษฐ์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ จากทฤษฎีแผ่นมายด์ลิน (Mindlin plate theory) เรียกว่า เอลิเมนต์แผ่นมายด์ลิน (Mindlin plate element) ซึ่งมีข้อดีคือต้องการความ ต่อเนื่องระหว่างเอลิเมนต์แบบ  $C^0$  เท่านั้นในการประดิษฐ์เอลิเมนต์ เนื่องจากการประดิษฐ์เอลิเมนต์ แผ่นมายด์ลินนั้นมีการประมาณฟังก์ชันการเสียรูปในแนวแกนตั้งและค่าความชันหรือมุมบิดที่แยกเป็น อิสระต่อกัน และค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งและมุมบิดในสมการพลังงานความเครียดนั้นค่าอนุพันธ์ อันดับสูงสุดคือค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง อีกทั้งเนื่องจากฟังก์ชันการเสียรูปในแนวแกนตั้งและค่าความชัน หรือมุมบิดที่แยกเป็นอิสระต่อกันทำให้ไม่มีข้อจำกัดในเรื่องของสมการพหุนามที่จะนำมาใช้ประมาณ ในฟังก์ชัน จึงสามารถนำฟังก์ชันการประมาณของไอโซพารามेटริกซ์เอลิเมนต์ (isoparametric element) มาใช้ได้ซึ่งทำให้ง่ายต่อการประดิษฐ์เอลิเมนต์อีกด้วย ตัวอย่างเช่น เอลิเมนต์แผ่นมายด์ ลินควอด4 (QUAD4) [6] ซึ่งประดิษฐ์มาจากไอโซพารามेटริกซ์เอลิเมนต์ 4 จุดต่อ ที่มี 12 ระดับชั้น ความเสรี หรือเอลิเมนต์แผ่นมายด์ลินควอด8 (QUAD8) และควอด9 (QUAD9) [7] ที่ประดิษฐ์จาก ไอโซพารามेटริกซ์เอลิเมนต์ 8 จุดต่อ และ 9 จุดต่อ ที่ประกอบด้วย 24 และ 27 ระดับชั้นความเสรี ซึ่งให้ผลลัพธ์ที่ดี แต่อย่างไรก็ตามเอลิเมนต์แผ่นมายด์ลินนี้จะมีปัญหาการล็อกเฉือน (shear locking) ในกรณีที่มีความหนาของแผ่นน้อยมาก ๆ อีกทั้งจากการที่ใช้ฟังก์ชันการประมาณเช่นเดียวกับไอโซ พารามेटริกซ์เอลิเมนต์ซึ่งความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้ส่วนหนึ่งขึ้นอยู่กับลักษณะรูปร่างเอลิเมนต์ด้วย ดังนั้นหากรูปร่างของเอลิเมนต์ชนิดนี้มีความบิดเบี้ยวจะทำให้ผลลัพธ์ที่คำนวณได้จะคลาดเคลื่อนตาม ไปด้วย

เอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมสี่จุดต่อชนิดหนึ่งที่มีประสิทธิภาพมากคือ เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสครีต เคอร์ชอฟฟ์ (Discrete Kirchhoff Quadrilateral element) หรือเรียกกันโดยทั่วไปว่า เอลิเมนต์ สี่เหลี่ยมดีเคคว (DKQ) [8] ซึ่งเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสี่จุดต่อที่ให้ความแม่นยำและการลู่เข้าของผลลัพธ์ ที่ดีเมื่อใช้เอลิเมนต์ที่ละเอียดมากขึ้น อีกทั้งสะดวกและไม่ซับซ้อนในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์ เอลิเมนต์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เอลิเมนต์ชนิดนี้ได้พัฒนาต่อมาจากเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุด ต่อที่มีประสิทธิภาพสูงชนิดหนึ่งคือ เอลิเมนต์สามเหลี่ยมดิสครีตเคอร์ชอฟฟ์ (Discrete Kirchhoff Triangle) หรือเรียกกันโดยทั่วไปว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยมดีเคที (DKT) [9] โดยใช้สมมติฐานและการ สมมุติการกระจายของผลเฉลยในลักษณะเดียวกันแต่ใช้กับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสี่จุดต่อแทน ซึ่งต่อมา เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดีเคควนี้ยังได้มีการพัฒนาขึ้นไปอีกโดยประยุกต์เทคนิควิธีกำลังสองน้อยสุด (least-

square) เข้ากับฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากขึ้น โดยเรียกเอลิเมนต์นี้ว่า เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสครีตเคอร์ซอพฟ์แบบปรับปรุง (Improved Discrete Kirchhoff Quadrilateral element) หรือเรียกโดยย่อว่า เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอดีเคคว (IDKQ) [10] ซึ่งให้ความแม่นยำและการลู่เข้าของผลลัพธ์ที่ดีกว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดีเคคว นอกจากนี้เอลิเมนต์ดิสครีตเคอร์ซอพฟ์ยังนิยมนำมาประยุกต์ใช้กับเอลิเมนต์แผ่นเปลือก (shell element) และยังคงพบอยู่ในโปรแกรมคอมพิวเตอร์เชิงพาณิชย์ เช่น SolidWorks, ANSYS เป็นต้น ซึ่งแสดงถึงการเป็นที่ยอมรับและน่าเชื่อถือในวงกว้างของเอลิเมนต์ชนิดนี้อีกด้วย

นอกจากการปรับปรุงและพัฒนาความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้ของเอลิเมนต์ต่าง ๆ แล้ว เทคนิควิธีหนึ่งที่จะช่วยในการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูงยิ่งขึ้นและลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณลงคือ เทคนิควิธีการปรับขนาดเอลิเมนต์ (adaptive meshing technique) โดยบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของความชันของผลลัพธ์สูงมาก เอลิเมนต์ในบริเวณนั้นจะถูกปรับให้มีขนาดเล็กลงเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากขึ้น และบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงความชันของผลลัพธ์น้อย เอลิเมนต์บริเวณนั้นจะถูกปรับให้มีขนาดใหญ่เพื่อลดจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าลง ซึ่งได้มีการประยุกต์วิธีดังกล่าวทั้งในด้านกลศาสตร์ของไหลและกลศาสตร์ของแข็ง ตัวอย่างเช่น Dechaumphai [11] ได้นำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์นี้มาช่วยในการวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อน รวมไปถึง Dechaumphai [12] ได้นำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์นี้มาช่วยในการวิเคราะห์ปัญหาแผ่นบางในแนวระนาบซึ่งทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความเที่ยงตรงมากขึ้นโดยใช้จำนวนเอลิเมนต์และเวลาในการคำนวณน้อยลง รวมถึงผู้วิจัยได้ประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์นี้ร่วมกับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมดีเคทีในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของโครงสร้างแผ่นบางอันเนื่องมาจากแรงกระทำตั้งฉากทางกลและภาระทางความร้อนที่เป็นผลมาจากความแตกต่างของอุณหภูมิตลอดความหนาของโครงสร้างแผ่นบาง [13] ซึ่งทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความเที่ยงตรงมากยิ่งขึ้น โดยใช้จำนวนเอลิเมนต์และเวลาในการคำนวณที่น้อยลงอีกด้วย

นอกจากนี้ การวิเคราะห์การโก่งของแผ่นบางที่ทำการศึกษาทั้งหมดเป็นปัญหาการโก่งของแผ่นบางอันเนื่องมาจากอันเนื่องมาจากแรงกระทำตั้งฉากทางกล (mechanical loading) ในขณะที่การวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางอันเนื่องมาจากภาระทางความร้อน (thermal loading) หรือการที่แผ่นบางมีอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปตลอดความหนาของแผ่นบางโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสี่จุดต่อนั้นยังไม่พบว่ามีผู้ใดได้ทำการวิจัยในเรื่องดังกล่าว

ดังนั้นวิทยานิพนธ์นี้จึงขอเสนอ การใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสครีตเคอร์ซอพฟ์แบบปรับปรุงหรือไอดีเคควในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางอันเนื่องมาจากทั้งแรงกระทำตั้งฉากทางกลและภาระทางความร้อนด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ พร้อมทั้งนำเอาเทคนิคการปรับขนาด

เอลิเมนต์มาประยุกต์ใช้เพื่อเพิ่มความถูกต้องของผลลัพธ์ที่คำนวณได้ อีกทั้งยังช่วยลดเวลาและหน่วยความจำเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการคำนวณอีกด้วย

## 1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

- 1.2.1 ศึกษาพฤติกรรมและทฤษฎีปัญหาการโค้งของแผ่นบาง
- 1.2.2 ศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาการโค้งของแผ่นบางโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสคริตเคอร์ซอพฟ์แบบปรับปรุง
- 1.2.3 ศึกษาและประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการโค้งของแผ่นบางที่ซับซ้อน

## 1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

- 1.3.1 ประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ และเอลิเมนต์เมทริกซ์สำหรับปัญหาการโค้งของแผ่นบาง
- 1.3.2 ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกัน เพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาการโค้งของแผ่นบาง
- 1.3.3 ประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพของผลลัพธ์ในการวิเคราะห์ปัญหาการโค้งของแผ่นบาง

## 1.4 ขั้นตอนการดำเนินงานวิทยานิพนธ์

- 1.4.1 ศึกษาทฤษฎีที่เกี่ยวข้องสำหรับปัญหาการโค้งของแผ่นบาง
- 1.4.2 ศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการโค้งของแผ่นบางโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสคริตเคอร์ซอพฟ์แบบปรับปรุง
- 1.4.3 ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการโค้งของแผ่นบางด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสคริตเคอร์ซอพฟ์แบบปรับปรุง
- 1.4.4 ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นกับปัญหาที่ทราบผลเฉลยแน่นอนตรง
- 1.4.5 ประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์กับโปรแกรมคอมพิวเตอร์
- 1.4.6 นำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ไปใช้แก้ปัญหาการโค้งของแผ่นบางที่มีความซับซ้อน
- 1.4.7 สรุปผล และจัดพิมพ์วิทยานิพนธ์
- 1.4.8 สอบวิทยานิพนธ์



## 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากวิทยานิพนธ์

- 1.5.1 มีความเข้าใจในการวิเคราะห์ปัญหาการโค้งของแผ่นบางด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
- 1.5.2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น สามารถนำไปวิเคราะห์ปัญหาการโค้งของแผ่นบางที่ซับซ้อนได้
- 1.5.3 เป็นแนวทางสำหรับการศึกษาและพัฒนาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไปในอนาคต



## บทที่ 2

### ปริทัศน์วรรณกรรม

ในบทนี้จะกล่าวถึงเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางที่ผ่านมา เริ่มต้นจากความยากลำบากในการประดิษฐ์เอลิเมนต์การโก่งของแผ่นบางอันเป็นที่มาของการพัฒนาเอลิเมนต์แบบต่าง ๆ เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมมุมฉากที่ถูกพัฒนาขึ้นในช่วงแรก และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมรูปร่างใด ๆ

#### 2.1 ความยากลำบากในการประดิษฐ์เอลิเมนต์การโก่งของแผ่นบาง

เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางนั้นได้มีการพัฒนามาโดยตลอด นับตั้งแต่ทศวรรษที่ 60 ความยากลำบากหลัก ๆ ในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คือ เอลิเมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางนั้นต้องมีความต่อเนื่องแบบ  $C^1$  ( $C^1$  continuity) เนื่องจากอันดับสูงสุดของค่าอนุพันธ์ของตัวไม่ทราบค่าหรือค่าระยะการเสียรูปในแนวแกนตั้งในสมการพลังงานความเครียดนั้นเป็นอนุพันธ์อันดับสองตั้งในสมการ [7]

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{\kappa\}^T [D] \{\kappa\} dA \quad (2.1)$$

โดยที่

$$\{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

$$[D] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

ดังนั้น ทั้งค่าระยะการเสียรูปในแนวแกนตั้ง  $w$  และค่าความชันของค่าการเสียรูปในแนวตั้ง  $\frac{\partial w}{\partial x}$  (หรือ  $w_{,x}$ ) และ  $\frac{\partial w}{\partial y}$  (หรือ  $w_{,y}$ ) จำเป็นต้องมีความต่อเนื่องระหว่างเอลิเมนต์ ผลลัพธ์ที่ได้จึงจะเข้าสู่ผลลัพธ์ที่ถูกต้องเมื่อใช้จำนวนเอลิเมนต์ที่เพิ่มมากขึ้น [1] จึงได้มีนักวิจัยพยายามพัฒนา

เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางเพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าว โดยเริ่มจากการประดิษฐ์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมมุมฉาก (rectangular element) จากนั้นจึงพัฒนาต่อมา เป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ (quadrilateral element) ด้วยเทคนิควิธีต่าง ๆ ดังนี้

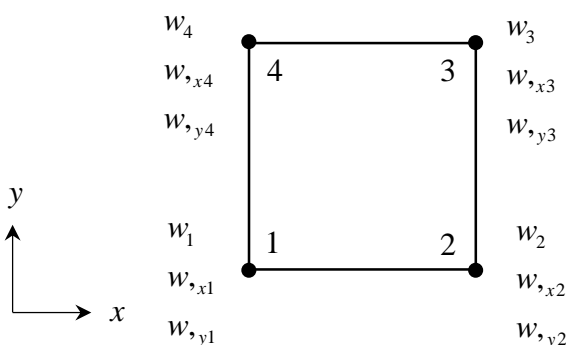
## 2.2 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมมุมฉาก

เนื่องจากเงื่อนไขความต่อเนื่องแบบ  $C^1$  นั่นคือ ค่าระยะการเสียรูปในแนวแกนตั้ง  $w$  และค่าความชันของค่าการเสียรูปในแนวตั้ง  $w_x$  และ  $w_y$  นั้นจำเป็นต้องมีความต่อเนื่องระหว่างเอลิเมนต์ ดังนั้นค่าทั้งสามจึงถูกนำมาใช้เป็นตัวไม่ทราบค่าที่แต่ละจุดต่อ อีกทั้งฟังก์ชันพหุนามที่จะนำมาใช้ประมาณลักษณะภายในเอลิเมนต์นั้นอย่างน้อยต้องเป็นพหุนามดีกรีสองแบบสมบูรณ์ขึ้นไป เพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขการลู่อู่เข้าสู่คำตอบของเรย์เลห์-ริตซ์ (Rayleigh-Ritz method) [14] ดังนั้นรูปทั่วไปของฟังก์ชันการเสียรูปของแผ่นบางในแนวตั้งจะต้องอยู่ในรูปของ

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + \text{พหุนามดีกรีสูงกว่าสองขึ้นไป} \quad (2.4)$$

เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมมุมฉากเอลิเมนต์แรกได้ถูกนำเสนอโดย Adini, Clough และ Melosh [2] โดยเรียกเอลิเมนต์นี้ตามตัวอักษรตัวแรกของชื่อผู้นำเสนอว่า เอลิเมนต์เอซีเอ็ม (ACM element) เอลิเมนต์นี้ประกอบด้วยตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อทั้งสิ้นสี่ของสี่เหลี่ยมมุมฉากคือ ค่าระยะการเสียรูปในแนวแกนตั้ง  $w$  และค่าความชัน  $w_x$  และ  $w_y$  ดังแสดงในรูปที่ 2.1 โดยเนื่องจากเอลิเมนต์มีตัวไม่ทราบค่าหรือระดับขั้นความเสรี (degree of freedom) ทั้งหมด 12 ค่า ฟังก์ชันการประมาณของค่าระยะการเสียรูปในแนวแกนตั้ง  $w$  (displacement function) จึงประมาณด้วยพหุนามที่ประกอบไปด้วย 12 พจน์ ซึ่งคือรูปของพหุนามกำลังสามสมบูรณ์ (10 พจน์) พร้อมด้วยพจน์ของพหุนามกำลังสี่ ( $x^3y$  และ  $xy^3$ ) ทั้งนี้เพื่อความสมมาตรของพจน์ของพหุนามตามในรูปแบบสามเหลี่ยมปascalดังแสดงในรูปที่ 2.2 ดังนี้

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3 \quad (2.5)$$



รูปที่ 2.1 เอลิเมนต์เอซีเอ็มและตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อทั้งสิ้นสี่



การโค้งงอของคาน ซึ่งค่าคงที่ต่าง ๆ ในสมการ ( $a_1, a_2, a_4$  และ  $a_7$ ) สามารถหาได้จากค่า  $w_1, w_2, w_{x1}$  และ  $w_{x2}$  ที่จุดต่อ 1 และ 2 แต่ในส่วน of ค่าความชัน  $w_y$  ในสมการ (2.8) ซึ่งเป็นพหุนามกำลังสามที่เป็นฟังก์ชันของ  $x$  ซึ่งมีค่าคงที่ 4 ตัว ( $a_3, a_5, a_8$  และ  $a_{11}$ ) ในขณะที่มีตัวไม่รู้ค่าเหลือเพียงแค่ 2 ตัว คือ  $w_{y1}$  และ  $w_{y2}$  ดังนั้นค่าความชัน  $w_y$  ที่ขอบของเอลิเมนต์ 1-2 จึงไม่สามารถหาค่าได้ด้วยค่าเพียงแค่ว่าที่จุดต่อทั้งสองเท่านั้น ดังนั้นเอลิเมนต์จึงมีความไม่ต่อเนื่องของค่าความชันระหว่างขอบของเอลิเมนต์ (เอลิเมนต์จะมีความต่อเนื่องก็ต่อเมื่อค่าที่ขอบของเอลิเมนต์นั้นสามารถอธิบายได้สมบูรณ์ด้วยค่าที่จุดต่อทั้งสองเท่านั้น)

เพื่อให้จะได้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความต่อเนื่องแบบ  $C^1$  อย่างสมบูรณ์ จึงได้มีการพัฒนาและนำเสนอโดย Bogner, Fox และ Schmit [3] โดยเรียกชื่อเอลิเมนต์ตามอักษรตัวแรกของชื่อผู้นำเสนอว่า เอลิเมนต์บีเอฟเอส (BFS element) ซึ่งเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมมุมฉากที่จุดต่อที่มีความต่อเนื่องระหว่างเอลิเมนต์ โดยมีการเพิ่มตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อนั้นคือค่าอนุพันธ์อันดับสอง  $w_{xy}$  เข้ามาด้วย (ตัวไม่ทราบค่าที่แต่ละจุดต่อคือ  $w, w_x, w_y$  และ  $w_{xy}$ ) จึงเป็นเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วย 16 ระดับขั้นความเสรี ดังนั้นฟังก์ชันการประมาณของการเสียรูปในแนวแกนตั้ง  $w$  จึงประมาณด้วยพหุนามกำลังสามคู่ (bicubic polynomial) ที่ประกอบด้วย 16 พจน์ โดยมีความสมมาตรในสามเหลี่ยมปascalของพหุนามดังรูปที่ 2.4 จะได้สมการ

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{14}x^3y^2 + a_{15}x^2y^3 + a_{16}x^3y^3 \quad (2.9)$$

$$\begin{array}{cccc} & & & 1 \\ & & & x & y \\ & & & x^2 & xy & y^2 \\ & & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 \\ & x^3y & x^2y^2 & xy^3 & & \\ & x^3y^2 & x^2y^3 & & & \\ & x^3y^3 & & & & \end{array}$$

รูปที่ 2.4 พจน์พหุนามของเอลิเมนต์บีเอฟเอสตามรูปแบบสามเหลี่ยมปascal

พิจารณาที่ขอบเอลิเมนต์ 1-2 ดังในรูปที่ 2.3 จะพบว่าสมการของค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้ง  $w$  และค่าความชัน  $w_x$  และ  $w_y$  นั้นอยู่ในรูปของพหุนามกำลังสาม กำลังสอง และกำลังสามตามลำดับดังในสมการ (2.6-2.8) ซึ่งค่าคงที่ในสมการ (2.6) และ (2.7) นั้นสามารถหาค่าได้จากค่า  $w_1, w_2, w_{x1}$  และ  $w_{x2}$  ที่จุดต่อ 1 และ 2 ในทำนองเดียวกันค่าคงที่ในสมการ (2.8) สามารถหาค่า



ที่มีความแม่นยำเทียบเท่ากันจะใช้เวลาและทรัพยากรในการคำนวณที่น้อยกว่า เอลิเมนต์ดังกล่าวจึงไม่เป็นที่นิยมและกล่าวถึง ประกอบกับในปัจจุบันนี้คอมพิวเตอร์ตั้งโต๊ะหรือคอมพิวเตอร์แบบพกพา โดยทั่วไปนั้นสามารถประมวลผลได้เร็วขึ้นมาก เอลิเมนต์ดังกล่าวจึงไม่มีความจำเป็นและไม่ได้ถูกนำมาพัฒนาต่อ

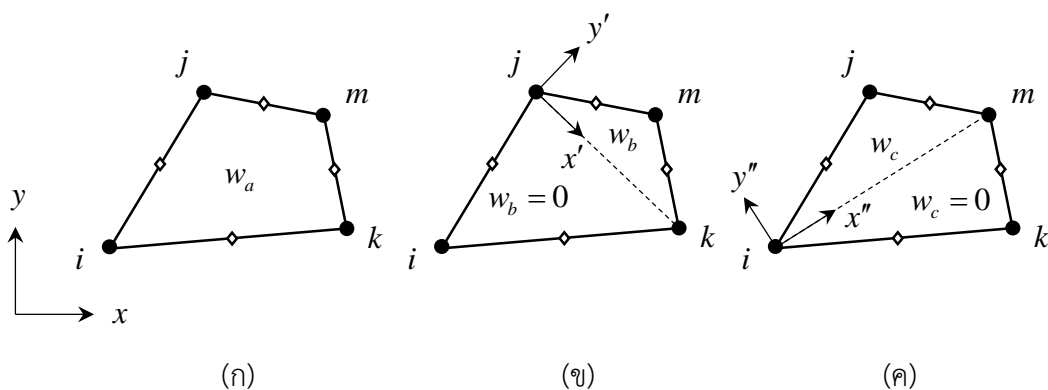
### 2.3 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ

แม้จะได้มีการประดิษฐ์และพัฒนาเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมมุมฉากในการวิเคราะห์ปัญหาการโค้งของแผ่นบาง แต่เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมรูปร่างใด ๆ นั้นมีความจำเป็นและเป็นที่ต้องการในการวิเคราะห์ปัญหามากกว่า จึงได้มีความพยายามที่จะประดิษฐ์และพัฒนาเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ ในการวิเคราะห์ปัญหาการโค้งของแผ่นบางในเวลาต่อมา

จากในหัวข้อที่ผ่านมาเราพบว่า เป็นการยากที่จะหาฟังก์ชันพื้นฐาน (shape function) ที่อยู่ในรูปของพหุนามอย่างง่ายที่จะทำให้ได้เอลิเมนต์ที่มีความต่อเนื่องระหว่างเอลิเมนต์แบบ  $C^1$  โดยที่มีตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อเพียงแค่ระยะการเสียรูปในแนวแกนตั้ง  $w$  และค่าความชัน  $w_x$  และ  $w_y$  เท่านั้น จึงได้มีการพัฒนาการประดิษฐ์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ ในแนวทางอื่นดังต่อไปนี้

#### 2.3.1 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ ที่เกิดจากรูปสามเหลี่ยมย่อย

เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมรูปร่างใด ๆ เอลิเมนต์แรกที่สอดคล้องกับเงื่อนไขความต่อเนื่องระหว่างเอลิเมนต์แบบ  $C^1$  ได้ถูกนำเสนอโดย De Veubeke [4] ซึ่งเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ ที่ประกอบไปด้วย 16 ระดับชั้นความเสรี ( $w$ ,  $w_x$  และ  $w_y$  ที่จุดต่อมุมทั้งสี่ และความชันตั้งฉาก  $w_n$  ที่จุดต่อกึ่งกลางแต่ละขอบ) โดยมีการแบ่งเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสองรูปย่อยตามแนวเส้นทแยงมุมสองแบบดังแสดงในรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 การแบ่งเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสองรูปย่อยตามแนวเส้นทแยงมุม

โดยฟังก์ชันการประมาณของค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งประกอบด้วย การบวกกันของสามฟังก์ชันดังสมการ

$$w = w_a + w_b + w_c \quad (2.10)$$

โดยจากรูปที่ 2.6(ก) รูปสี่เหลี่ยม  $ikmj$  นั้นมีฟังก์ชันการเคลื่อนตัวในแนวตั้ง  $w_a$  เป็นพหุนามกำลังสามสมบูรณ์ซึ่งประกอบด้วย 10 พจน์ดังนี้

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 \quad (2.11)$$

ฟังก์ชัน  $w_b$  นั้นนิยามจากรูปที่ 2.6(ข) ให้สามเหลี่ยมล่าง (สามเหลี่ยม  $ikj$ ) มี  $w_b = 0$  ส่วนสามเหลี่ยมบน (สามเหลี่ยม  $jkm$ )  $w_b$  มีลักษณะการกระจายเป็นพหุนามกำลังสามบนพิกัด  $x' - y'$  ดังสมการ

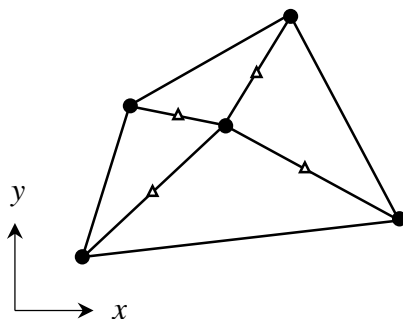
$$w_b = a_{11}y'^2 + a_{12}y'^3 + a_{13}x'y'^2 \quad (2.12)$$

ฟังก์ชัน  $w_c$  นั้นนิยามจากรูปที่ 2.6(ค) ให้สามเหลี่ยมล่าง (สามเหลี่ยม  $ikm$ ) มี  $w_c = 0$  ส่วนสามเหลี่ยมบน (สามเหลี่ยม  $imj$ )  $w_c$  มีลักษณะการกระจายเป็นพหุนามกำลังสามบนพิกัด  $x'' - y''$  ดังสมการ

$$w_c = a_{14}y''^2 + a_{15}y''^3 + a_{16}x''y''^2 \quad (2.13)$$

ดังนั้นสมการรวม (2.10) จะประกอบไปด้วยค่าคงที่ 16 ค่า ซึ่งจากตัวไม่ทราบค่าทั้ง 16 ค่า จะทำให้หาฟังก์ชันการประมาณของค่าการเสียรูปออกมาได้ และยังเป็นเอลิเมนต์ที่มีความต่อเนื่องระหว่างเอลิเมนต์แบบ  $C^1$  ที่ค่าที่จุดต่อไม่ได้เป็นค่าอนุพันธ์อันดับสองของ  $w$  ที่จุดต่อมุม และยังพบว่าเอลิเมนต์ชนิดนี้ปรากฏอยู่ในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ALGOR อีกด้วย

นอกจากนี้ยังมีเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ อีกเอลิเมนต์หนึ่งที่ประดิษฐ์มาจากการแบ่งเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมออกเป็นรูปสามเหลี่ยมย่อยนั่นคือ เอลิเมนต์คิว19 (Q19 element) ซึ่งนำเสนอโดย Clough และ Felippa [5] ซึ่งประดิษฐ์จากการแบ่งเอลิเมนต์ออกเป็นสามเหลี่ยมสี่รูปย่อยดังแสดงในรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7 การแบ่งเอลิเมนต์ออกเป็นสามเหลี่ยมสี่รูปย่อย



โดยสาเหตุที่เรียกว่าเอลิเมนต์คว19เพราะว่า เป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ ที่เริ่มต้นจากเอลิเมนต์ที่มี 19 ระดับชั้นความเสรี โดย 7 ระดับชั้นความเสรีที่อยู่ภายในเอลิเมนต์นั้นจะถูกกำจัดออกไปโดยเงื่อนไขการรวมกันทางสถิตย์ (static condensation) [16] ก่อนที่จะผนวกสามเหลี่ยมทั้งหมดกลายเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ สี่จุดต่อ 12 ระดับชั้นความเสรีที่ประกอบด้วยตัวไม่ทราบค่าที่แต่ละจุดต่อมุม คือ ค่าระยะการเสีรูบในแนวแกนตั้ง  $w$  และค่าความชัน  $w_x$  และ  $w_y$  โดยที่ตลอดขอบของเอลิเมนต์มีการกระจายตัวของความชันที่ตั้งฉากกับขอบเป็นเชิงเส้นจึงทำให้มีความต่อเนื่องระหว่างเอลิเมนต์ด้วย

อย่างไรก็ตามเอลิเมนต์ดังกล่าวที่ประดิษฐ์ขึ้นจากการแบ่งเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมออกเป็นสามเหลี่ยมย่อยนั้นจะไม่สามารถประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ขึ้นได้หากเอลิเมนต์นั้นมีจุดต่อคู่ใดคู่หนึ่งเข้าใกล้กันทำให้ลักษณะของเอลิเมนต์มีรูปร่างลักษณะใกล้เคียงรูปสามเหลี่ยม ซึ่งมีโอกาสเกิดขึ้นได้หากการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ นั้นทำได้ไม่ดีหรือไม่มีการกำหนดสัดส่วนระหว่างด้านกว้างและด้านสูง (aspect ratio) ของเอลิเมนต์ที่เหมาะสม

### 2.3.2 เอลิเมนต์แผ่นมายด์ลิน

จากที่ผ่านมานั้นเป็นการประดิษฐ์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางภายใต้ทฤษฎีแผ่นบางของเคอร์ชอฟฟ์ (Kirchhoff plate theory) ซึ่งก่อให้เกิดความยุ่งยากซับซ้อนในการประดิษฐ์เอลิเมนต์เนื่องจากเอลิเมนต์ต้องมีความต่อเนื่องระหว่างเอลิเมนต์แบบ  $C^1$  ในขณะที่ทฤษฎีแผ่นมายด์ลิน (Mindlin plate theory) ที่คำนึงถึงทั้งการเสีรูบจากการโก่ง (bending deformation) และการเสีรูบเนื่องจากแรงเฉือนตามแนวขวาง (transverse shear deformation) ซึ่งใช้วิเคราะห์ได้ทั้งในกรณีแผ่นหนาและแผ่นบางนั้นต้องการความต่อเนื่องระหว่างเอลิเมนต์แบบ  $C^0$  เท่านั้นในการประดิษฐ์เอลิเมนต์ เนื่องจากการประดิษฐ์เอลิเมนต์แผ่นมายด์ลินนั้นมีการประมาณฟังก์ชันการเสีรูบในแนวแกนตั้งและค่าความชันหรือมุมบิดที่แยกเป็นอิสระต่อกันดังในสมการ

$$\begin{Bmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \beta_{xi} \\ \beta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\text{หรือ} \quad \{u\} = [N]\{d\} \quad (2.15)$$

และค่าการเสีรูบในแนวแกนตั้งและมุมบิดในสมการพลังงานความเครียดนั้นค่าอนุพันธ์อันดับสูงสุดคือค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งดังในสมการรูปแบบเดียวกับสมการ (2.1) นั่นคือ [7]

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{\kappa_M\}^T [D] \{\kappa_M\} dA \quad (2.16)$$

โดยที่

$$\{K_M\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ \beta_x - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \beta_y - \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (2.17)$$

หรือเขียนสมการพลังงานความเครียดให้อยู่ในรูปของตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อ  $\{d\}$  ได้ดังนี้

$$U = \frac{1}{2} \{d\}^T [k] \{d\} \quad (2.18)$$

โดยที่  $[k] = \int_A [B_b]^T [D_M] [B_b] dA + \int_A [B_s]^T [D_M] [B_s] dA \quad (2.19)$

หรือ  $[k] = [k_b] + [k_s] \quad (2.20)$

โดยที่  $[k_b]$  คือเมทริกซ์ความแข็งเกร็งเนื่องจากการโก่ง (bending stiffness matrix)

$[k_s]$  คือเมทริกซ์ความแข็งเกร็งเนื่องจากการเฉือนตามแนวขวาง (transverse shear stiffness matrix)

และ  $[D_M] = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 & 0 & 0 \\ \nu D & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)D}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6}Gt & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6}Gt \end{bmatrix} \quad (2.21)$

อีกทั้งเนื่องจากฟังก์ชันการเสียรูปในแนวแกนตั้งและค่าความชันหรือมุมบิดที่แยกเป็นอิสระต่อกันทำให้ไม่มีข้อจำกัดในเรื่องของสมการพหุนามที่จะนำมาใช้ประมาณในฟังก์ชัน จึงสามารถนำฟังก์ชันการประมาณของไอโซพารามेटริกซ์เอลิเมนต์ (isoparametric element) ซึ่งคือเอลิเมนต์ที่มีการใช้ฟังก์ชันการกระจายตัวของตัวแปรและฟังก์ชันการแปลงรูปร่างเอลิเมนต์เป็นฟังก์ชันเดียวกัน [1] มาใช้ได้อีกด้วย

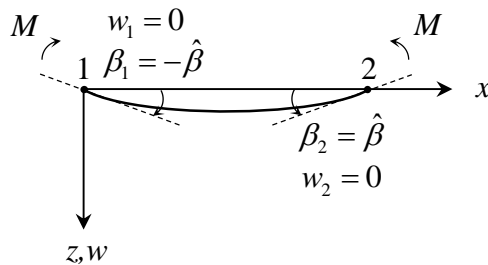
ด้วยเหตุผลที่กล่าวมาข้างต้น ทำให้เอลิเมนต์แผ่นมอดัลลินจึงเป็นที่สนใจในการพัฒนาเอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบาง โดยมีการประดิษฐ์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจากทฤษฎีแผ่นมอดัลลินที่มี 12 ระดับชั้นความเสรี (ตัวไม่ทราบค่าที่แต่ละจุดต่อเป็น  $w$ ,  $\theta_x$  และ  $\theta_y$ )

นำเสนอโดย Hinton และคณะ [17], [18] และ Hughes และคณะ [19] โดยฟังก์ชันการประมาณของ  $w$ ,  $\theta_x$  และ  $\theta_y$  อยู่ในรูปเชิงเส้นคู่ แต่ก็มีปัญหาในกรณีความหนาของแผ่นมีความบางเนื่องจากเอลิเมนต์มีผลของการเฉือนตามแนวขวางด้วย ต่อมา Hughes และ Tezduyar [20] และ McNeal [6] ได้นำเสนอเอลิเมนต์แผ่นมายด์ลีนควอด4 (QUAD4) ซึ่งประดิษฐ์มาจากไอโซพาราเมตริกซ์เอลิเมนต์ 4 จุดต่อ ที่มี 12 ระดับชั้นความเสรี แต่เอลิเมนต์นี้ให้ผลลัพธ์ที่ดีเฉพาะในกรณีของแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสและสี่เหลี่ยมมุมฉาก และเหมาะกับการวิเคราะห์ปัญหาที่เป็นแผ่นหนามากกว่า อีกทั้งยังมีเอลิเมนต์แผ่นมายด์ลีนที่ประดิษฐ์จากไอโซพาราเมตริกซ์เอลิเมนต์ 8 จุดต่อ (QUAD8) และ 9 จุดต่อ (QUAD9) [7] ที่ประกอบด้วย 24 และ 27 ระดับชั้นความเสรี ซึ่งให้ผลลัพธ์ที่ดีในกรณีที่เอลิเมนต์รูปร่างสี่เหลี่ยมใด ๆ ด้วย แต่เอลิเมนต์ชนิดนี้ใช้เวลาในการคำนวณมากและมีปัญหาการเฉือนลอค (shear locking) ในกรณีที่ความหนาของแผ่นน้อยมาก ๆ

เอลิเมนต์แผ่นมายด์ลีนนี้จะพบปัญหาที่เรียกว่าการเฉือนลอค [21] ซึ่งเป็นผลมาจากในกรณีที่ความหนาของแผ่นนั้นบางมาก ๆ (อัตราส่วนระหว่างความยาวต่อความหนาแผ่น,  $L/t$ , มีค่ามาก) ส่งผลให้พจน์ที่เกี่ยวข้องกับการเฉือนมีค่าสูงมากจนมีอิทธิพลเหนือกว่าพจน์ที่เกี่ยวข้องกับการโก่ง (ซึ่งในทางทฤษฎีควรจะเป็นว่า เมื่อแผ่นมีความหนาที่บางลงการเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือนตามแนวขวางจะน้อยมากหรือไม่มาพิจารณาตามทฤษฎีแผ่นบางของเคอร์ชอฟฟ์) อย่างไรก็ตาม มีวิธีแก้ปัญหานี้คือ การลดลำดับชั้นของการอินทิเกรต (reduced integration) [22], [15]

การลดลำดับชั้นของการอินทิเกรตนั้นสามารถอธิบายให้เห็นภาพโดยยกตัวอย่างการโก่งของคานที่เกิดจากการได้รับโมเมนต์ขนาดคงที่ดังในรูปที่ 2.8 หากเราทำการประมาณด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์ 2 จุดต่อที่ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้นความเครียดเฉือนที่ได้จะไม่เท่ากับ 0 ตามทฤษฎี แต่พบว่าที่ตำแหน่งกึ่งกลางคานนั้นความเครียดเฉือนมีค่าเป็น 0 ดังนั้นหากเราทำการอินทิเกรตเชิงตัวเลขโดยเลือกตำแหน่งดังกล่าวเป็นจุดที่ใช้อินทิเกรต (integration point) หรือจุดเกาส์ (Gauss point) สำหรับการอินทิเกรตเชิงตัวเลขแบบเกาส์-เลอจองด์ (Gauss-Legendre integration) ในการอินทิเกรตสมการพลังงานความเครียดเฉือน ผลที่ได้จากการประมาณด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์ก็จะถูกต้องตามทฤษฎี ดังนั้นการอินทิเกรตสมการพลังงานความเครียดเฉือนเราจึงใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลขด้วย 1 จุดเกาส์แทนการอินทิเกรตด้วย 2 จุดเกาส์ นี่คือตัวอย่างผลของการลดลำดับชั้นของการอินทิเกรต ดังนั้นวิธีการลดลำดับชั้นของการอินทิเกรตนั้นจึงถูกนำมาใช้ควบคู่กับเอลิเมนต์แผ่นมายด์ลีน

การโก่งของคานจริง

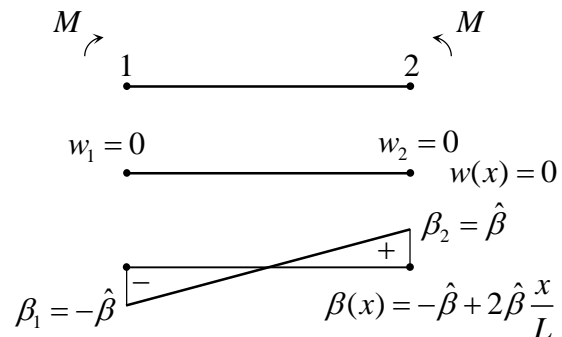


ความเครียดเฉือนจริง

$$\gamma \equiv 0$$

การโก่งของคานที่ได้จากฟังก์ชันการประมาณ

เชิงเส้น 2 จุดต่อของ  $w$  และ  $\beta$



ความเครียดเฉือนจากการประมาณด้วย

ไฟไนต์เอลิเมนต์ 2 จุดต่อ

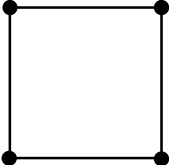
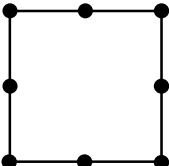
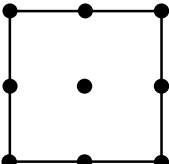
$$\bar{\gamma} = \frac{dw}{dx} + \beta = -\hat{\beta} + 2\hat{\beta} \frac{x}{L} \neq 0$$

รูปที่ 2.8 การโก่งของคานเนื่องจากโมเมนต์คงที่เปรียบเทียบกับ การประมาณโดยใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์

แม้วิธีการลดลำดับชั้นการอินทิเกรตจะช่วยแก้ปัญหาคานลื่นลื่นได้ แต่ในขณะเดียวกันการไปลดลำดับชั้นการอินทิเกรตจากที่มันควรจะเป็นนั้นก่อให้เกิดปัญหาอีกอย่างหนึ่งที่เรียกว่า โหมดพลังงานเป็นศูนย์ (zero energy mode, ZEM) [23] ซึ่งคือการที่พลังงานความเครียดเฉือนเป็นศูนย์ในบางโหมดอย่างที่ไม่ควรจะเป็น ดังนั้นจึงได้มีผู้เสนอแนวทางการลดลำดับชั้นการอินทิเกรตใหม่เพื่อลดปัญหาโหมดพลังงานเป็นศูนย์ ที่เรียกว่า วิธีการเลือกอินทิเกรต (selective integration) [24], [25] นั่นคือการเลือกที่จะลดลำดับชั้นการอินทิเกรตเฉพาะพจน์ของพลังงานความเครียดเฉือนเท่านั้น ตัวอย่างของชนิดของเอลิเมนต์และจำนวนจุดเกาส์ที่ใช้ในการอินทิเกรตเชิงตัวเลขของวิธีการเลือกอินทิเกรตเป็นดังตารางที่ 2.1

นอกจากนี้ ยังมีอีกวิธีหนึ่งเพื่อหลีกเลี่ยงการลดลำดับชั้นของการอินทิเกรตนั้นคือ นั่นคือวิธีการประมาณแบบผสม (mixed interpolation) นั่นคือในส่วนของพจน์ของพลังงานความเครียดเฉือนนั้นมีการประมาณความเครียดเฉือนตามแนวขวาง ( $\gamma_{xz}$  และ  $\gamma_{yz}$ ) แยกต่างหาก โดยเรียกเอลิเมนต์ชนิดนี้ว่าเอลิเมนต์เอ็มไอทีซี (MITC, Mixed Interpolation of Tensorial Components) ซึ่งได้ถูกนำเสนอโดย Bathe และ Dvorkin [26], [27] ในกรณีของไอโซพารามตริกซ์เอลิเมนต์แบบ 4 จุดต่อ (เรียกว่าเอ็มไอทีซี4, MITC4) โดยค่าการกระจายของ  $\gamma_{xz}$  และ  $\gamma_{yz}$  เป็นดังนี้

ตารางที่ 2.1 ชนิดของเอลิเมนต์และจำนวนจุดเกาส์ที่ใช้ในการอินทิเกรตเชิงตัวเลขของวิธีการเลือกอินทิเกรตสำหรับเอลิเมนต์แผ่นมายด์ลิน

ชนิดเอลิเมนต์	จำนวนจุดเกาส์ที่ใช้ในการอินทิเกรต	
	พจน์ของ $[k_b]$	พจน์ของ $[k_s]$
 QUAD4 4 จุดต่อ 12 d.o.f.	2 x 2	1 x 1
 QUAD8 8 จุดต่อ 24 d.o.f.	3 x 3	2 x 2
 QUAD9 9 จุดต่อ 27 d.o.f.	3 x 3	2 x 2

$$\gamma_{\xi z} = \frac{1}{2}(1+\eta) \left[ \frac{w_1 - w_2}{2} + \frac{\beta_{y1} + \beta_{y2}}{2} \right] + \frac{1}{2}(1-\eta) \left[ \frac{w_4 - w_3}{2} + \frac{\beta_{y4} + \beta_{y3}}{2} \right] \quad (2.22)$$

$$\gamma_{\eta z} = \frac{1}{2}(1+\xi) \left[ \frac{w_1 - w_4}{2} + \frac{\beta_{x1} + \beta_{x4}}{2} \right] + \frac{1}{2}(1-\xi) \left[ \frac{w_2 - w_3}{2} + \frac{\beta_{x2} + \beta_{x3}}{2} \right] \quad (2.23)$$

โดยที่  $\gamma_{xz} = \gamma_{\xi z} \sin \alpha_1 - \gamma_{\eta z} \sin \alpha_2 \quad (2.24)$

และ  $\gamma_{yz} = -\gamma_{\xi z} \cos \alpha_1 + \gamma_{\eta z} \cos \alpha_2 \quad (2.25)$

โดยที่  $\alpha_1$  และ  $\alpha_2$  คือมุมระหว่างแกน  $\xi$  และแกน  $x$  และมุมระหว่างแกน  $\eta$  และแกน  $y$  ตามลำดับ จากนั้นจึงทำการอินทิเกรตและคำนวณต่อไป ส่วนพจน์ของพลังงานความเครียดจากการโก่งนั้นคำนวณตามเดิมปรกติ อีกทั้ง Huang และ Hinton [28] ยังได้นำเสนอเทคนิควิธีนี้กับแผ่นมายด์

ลินไอโซพารามetriกรีเอลิเมนต์แบบ 9 จุดต่อไว้ อีกด้วย นั่นคือ เอลิเมนต์เอ็มไอทีซี9 (MITC9) และยังมีเอลิเมนต์เอ็มไอทีซี8 (MITC8), เอ็มไอทีซี16 (MITC16) รวมไปถึงเอลิเมนต์เอ็มไอทีซีที่เป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม เช่น เอลิเมนต์เอ็มไอทีซี7 (MITC7), เอ็มไอทีซี12 (MITC12) โดยรายละเอียดแสดงไว้ในเอกสารอ้างอิง [29]

อย่างไรก็ตาม แม้เอลิเมนต์แผ่นมายนั้นจะมีความสะดวกในแง่ของการที่ฟังก์ชันการประมาณของการเสียรูปในแนวแกนตั้งและค่าความชันหรือมุมบิดที่แยกเป็นอิสระต่อกันและต้องการความต่อเนื่องระหว่างเอลิเมนต์แบบ  $C^0$  เท่านั้น แต่จากการที่ใช้ฟังก์ชันการประมาณเช่นเดียวกับไอโซพารามetriกรีเอลิเมนต์ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จะแม่นยำหรือไม่ขึ้นอยู่กับลักษณะรูปร่างเอลิเมนต์ (element geometry) เป็นสำคัญ ดังนั้นหากรูปร่างของเอลิเมนต์ชนิดนี้มีความบิดเบี้ยวไปมากผลลัพธ์ที่คำนวณได้จะคลาดเคลื่อนมากตามไปด้วย

### 2.3.3 เอลิเมนต์ดิสกรีตเคอร์ชอฟฟ์

อีกเทคนิควิธีหนึ่งในการประดิษฐ์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางคือเทคนิคดิสกรีตเคอร์ชอฟฟ์ โดยได้มีการประยุกต์วิธีดังกล่าวกับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางครั้งแรกโดย Wempner และคณะ [30], [31] ตามด้วย Stricklin และคณะ [32] และ Dhatt [33] โดยได้นำเสนอการใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อชนิดใหม่ นั่นคือเอลิเมนต์สามเหลี่ยมดิสกรีตเคอร์ชอฟฟ์ หรือเอลิเมนต์สามเหลี่ยมดีเคที (DKT) ที่ประกอบไปด้วย 9 ระดับชั้นความเสรี (ตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อคือ  $w$ ,  $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}$  และ  $\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$ ) เอลิเมนต์ดิสกรีตเคอร์ชอฟฟ์นี้เริ่มต้นบนพื้นฐานเช่นเดียวกับเอลิเมนต์แผ่นมายนั่นคือ เริ่มต้นจากการสมมุติการประมาณของค่ามุมบิดตลอดทั้งเอลิเมนต์เป็นฟังก์ชันพหุนามกำลังสองที่เป็นอิสระต่อกันดังสมการ

$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{xi} \\ \beta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

จากนั้นจึงทำการประยุกต์สมมติฐานของเคอร์ชอฟฟ์ที่แต่ละจุดต่อดังสมการ

$$\begin{Bmatrix} \beta_{xi} + w_{,xi} \\ \beta_{yi} + w_{,yi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

$$\text{และ} \quad \beta_{sk} + w_{,sk} = 0 \quad (2.28)$$

และให้มีการกำหนดให้ลักษณะการเสียรูปในแนวตั้ง  $w$  แปรผันในรูปกำลังสามตลอดด้านทั้งสามของเอลิเมนต์ทำให้ได้ค่าความชันในแนวสัมผัสของขอบเอลิเมนต์เป็นดังสมการ

$$w_{,sk} = \frac{-3}{2l_{ij}} (w_i - w_j) - \frac{1}{4} (w_{,si} + w_{,sj}) \quad (2.29)$$

และกำหนดให้ค่ามุมบิดที่ตั้งฉากกับด้านทั้งสี่ของเอลิเมนต์มีการกระจายแบบเชิงเส้น

$$\beta_{nk} = \frac{1}{2}(\beta_{ni} + \beta_{nj}) \quad (2.30)$$

จากนั้นทำการจัดรูป  $\beta_x$  และ  $\beta_y$  ให้อยู่ในรูปของความสัมพันธ์ตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อได้ดังสมการ

$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_x] \\ [H_y] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

จากสมการพลังงานความเครียดนั้นค่าอนุพันธ์อันดับสูงสุดคือค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งดังในสมการรูปแบบเดียวกันกับสมการ (2.1) นั่นคือ

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{\kappa_D\}^T [D] \{\kappa_D\} dA \quad (2.32)$$

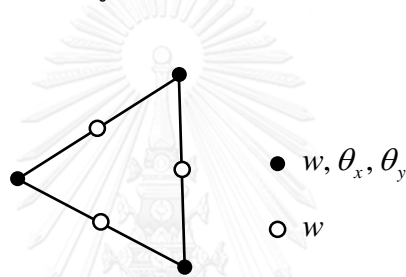
โดยที่

$$\{\kappa_D\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

ซึ่งจะเห็นว่าเอลิเมนต์ดิสกรีตเคอร์ซอพฟ์นี้เป็นเอลิเมนต์ที่มีความต่อเนื่องระหว่างเอลิเมนต์แบบ  $C^0$  อีกทั้งเอลิเมนต์สามเหลี่ยมติเคทีนี้ยังให้ผลลัพธ์ที่ลู่เข้าสู่ผลลัพธ์ที่ถูกต้องได้อย่างรวดเร็วเมื่อลดขนาดของเอลิเมนต์ลง และเอลิเมนต์สามเหลี่ยมติเคทีนี้ได้มีการทำการศึกษาเพิ่มเติมโดย Batoz และคณะ [9] โดยได้เปรียบเทียบประสิทธิภาพของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมติเคทีนี้กับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบอื่น ๆ ที่ประกอบด้วย 9 ระดับชั้นความเสรีเช่นเดียวกันในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบาง ซึ่งพบว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบติเคทีเป็นเอลิเมนต์ที่มีประสิทธิภาพสูงกว่าเอลิเมนต์อื่น ๆ และเนื่องจากในเบื้องต้นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมติเคทีนี้ได้มีการประยุกต์สมมติฐานหลาย ๆ ประการลงไปจึงทำให้ค่อนข้างมีความซับซ้อนในการประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ Batoz [34] จึงได้ศึกษาเพิ่มเติมโดยได้นำเสนอการประดิษฐ์เมทริกซ์ความแข็งเกร็ง (stiffness matrix) ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมติเคทีในโคออร์ดิเนตย่อย (local coordinates) และได้เปรียบเทียบประสิทธิภาพของเอลิเมนต์ชนิดนี้กับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบอื่น ๆ และแสดงไว้ว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบติเคทีนี้มีประสิทธิภาพดีกว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบอื่น ๆ การพยายามลดความซับซ้อนในการประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมติเคทียังคงมีการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง โดย Jeyachandrabose และคณะ [35] ได้นำเสนอการประดิษฐ์เมทริกซ์ความแข็งเกร็งของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบติเคทีในพิกัดรวม  $X-Y$  (global coordinates) ทำให้ลดเวลาและความซับซ้อนในการ

คำนวณ รวมไปถึงความผิดพลาดในการคำนวณที่อาจเกิดขึ้นจากการแปลงเมทริกซ์ความแข็งเกร็งจากพิกัดย่อยไปสู่พิกัดรวมในขั้นตอนการรวมสมการของเอลิเมนต์ย่อยเข้าสู่ระบบสมการรวม และสามารถนำเมทริกซ์ที่ได้ไปประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง

นอกจากนี้ เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดิสคริตเคอร์ซอพฟ์ยังได้ถูกพัฒนาโดย Dhatt และคณะ [36], [37] โดยมีชื่อว่าเอลิเมนต์ดีเคทีพี (DKTP) ที่ประกอบด้วย 12 ระดับชั้นความเสรี (ตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อคือ  $w$ ,  $\theta_x$  และ  $\theta_y$  และมีตัวไม่ทราบค่าที่จุดกึ่งกลางด้านเป็น  $w$ ) ดังแสดงในรูปที่ 2.9 นอกจากนี้ภายใต้แนวคิดดิสคริตเคอร์ซอพฟ์ยังได้มีการพัฒนาเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่เรียกว่าลูฟโหนด (Loof nodes) ที่นำเสนอไว้โดย Irons [38] Meek และ Tan [39] และ Poulsen และ Damkilde [40] ที่ประกอบด้วย 12 ระดับชั้นความเสรีเช่นกัน (คือ  $w$  ที่จุดต่อมุมและจุดกึ่งกลางด้าน และค่าความชัน 2 ค่าในแต่ละด้าน) ดังแสดงในรูปที่ 2.10



รูปที่ 2.9 ลักษณะของเอลิเมนต์ดีเคทีพีที่ประกอบด้วย 12 ระดับชั้นความเสรี

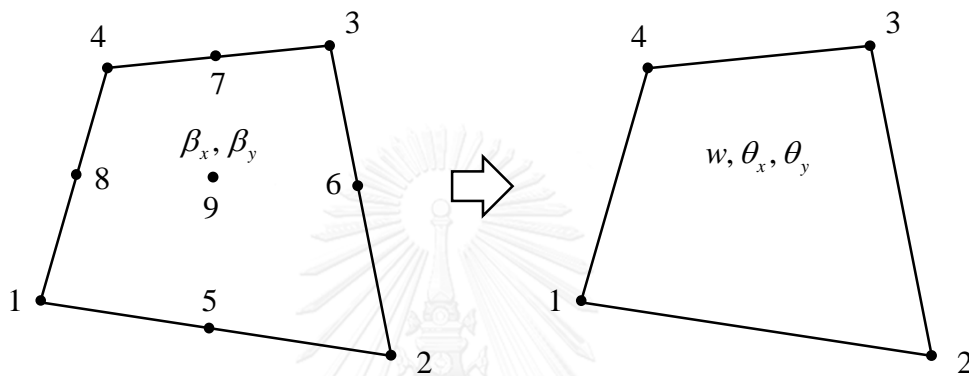


รูปที่ 2.10 ลักษณะของเอลิเมนต์ลูฟโหนดที่ประกอบด้วย 12 ระดับชั้นความเสรี

การวิเคราะห์การโก่งของแผ่นบางด้วยเอลิเมนต์ดิสคริตเคอร์ซอพฟ์นั้นได้ถูกพัฒนาต่อมาในรูปของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ สี่จุดต่อ โดย Batoz และ Tahar [8] ได้นำเสนอการใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสี่จุดต่อชนิดใหม่ในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบาง ที่มีชื่อว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสคริตเคอร์ซอพฟ์หรือเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดีเคคิว (DKQ) โดยใช้สมมติฐานและการสมมุติการกระจายของผลเฉลยในลักษณะเดียวกันกับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมดีเคที ซึ่งพบว่าเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อที่ประกอบไปด้วย 12 ระดับชั้นความเสรีที่ให้ความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ดี แต่พบว่ามีอัตราการลู่เข้าของผลลัพธ์ที่ยังไม่ดีขึ้นในบางปัญหา Jeyachandrabose และคณะ [10] จึงได้พัฒนาและนำเสนอ



เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสครีตเคอร์ซอพฟ์ที่จุดต่อชนิดใหม่ในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางที่เรียกว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสครีตเคอร์ซอพฟ์แบบปรับปรุงหรือเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอดีเคคิว (IDKQ) โดยการใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ที่ได้จากการประยุกต์เทคนิควิธีกำลังสองน้อยสุดกับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบดีเคคิวที่มีการเพิ่มการสมมติค่าที่จุดต่อตรงกลางภายในเอลิเมนต์ด้วยดังแสดงในรูปที่ 2.11 ซึ่งทำให้ได้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่จุดต่อประกอบไปด้วย 12 ระดับชั้นความเสรีที่ให้ความแม่นยำของผลลัพธ์ที่คำนวณได้สูงกว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดีเคคิว



รูปที่ 2.11 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอดีเคคิว

เทคนิควิธีกำลังสองน้อยสุดนี้ได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้แก้ปัญหาค่าความเค้นที่ไม่ต่อเนื่องกันในแต่ละเอลิเมนต์ที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในปัญหาการศาสตร์ของแข็งทำให้ได้ค่าความเค้นที่มีความต่อเนื่องกันตลอดทั้งรูปร่างของปัญหาโดย Hinton และ Campbell [41] อีกทั้ง Jeyachandrabose และ Kirkhope [42] ยังได้เคยนำวิธีดังกล่าวมาประยุกต์เข้ากับฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแปดจุดต่อในการวิเคราะห์ปัญหาความเค้นระนาบ โดยฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ใหม่นี้จะถูกใช้ในส่วนของความเครียดเฉือน ซึ่งช่วยทำให้ผลลัพธ์ค่าความเค้นที่คำนวณได้ที่จุดต่อมีค่าสอดคล้องกับผลเฉลยโดยไม่ต้องทำการประมาณค่านอกช่วง (extrapolation) จากค่าความเค้นที่จุดเกาส์ในแต่ละเอลิเมนต์ รวมไปถึง Jeyachandrabose และ Kirkhope [43] ยังได้นำเทคนิควิธีกำลังสองน้อยสุดนี้มาประยุกต์กับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมดีเคคิวที่มีการเพิ่มการสมมติค่าที่จุดต่อตรงกลาง ซึ่งทำให้ได้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อประกอบไปด้วย 9 ระดับชั้นความเสรีที่ให้ความแม่นยำของผลลัพธ์ที่สูงขึ้นอีกด้วย

เทคนิควิธีกำลังสองน้อยสุดนี้เป็นการลดอันดับชั้นของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ลง โดยที่ยังประกอบด้วยระดับชั้นความเสรีเท่าเดิม ยกตัวอย่างเช่น กรณีของไอโซพารามेटริกซ์เอลิเมนต์ 8 จุดต่อ ที่ฟังก์ชันการประมาณอยู่ในรูปของพหุนามกำลังสามคู่ตั้งสมการ

$$N_i = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\xi\eta + a_6\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi\eta^2 \quad (2.34)$$

$$\text{หรือ } N_i = \sum_{j=1}^8 a_j \xi^{m_j} \eta^{n_j} \quad (2.35)$$

ทำการประยุกต์เทคนิควิธีกำลังสองน้อยสุดเพื่อให้ได้ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ใหม่ที่อยู่ในรูปของพหุนามกำลังสองนั้นคือ

$$\bar{N}_i = b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi^2 + b_5\xi\eta + b_6\eta^2 \quad (2.36)$$

$$\text{หรือ } \bar{N}_i = \sum_{j=1}^6 b_j \xi^{m_j} \eta^{n_j} \quad (2.37)$$

ค่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า  $b_j$  สามารถหาให้อยู่ในรูปของสัมประสิทธิ์ที่ทราบค่า  $a_j$  โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดโดยกำหนดฟังก์ชันกำลังสอง

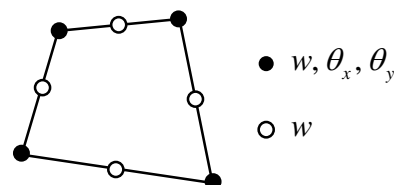
$$\Pi = \int_A (N_i - \bar{N}_i)^2 d\xi d\eta \quad (2.38)$$

และทำการหาค่าน้อยสุด

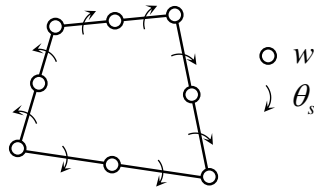
$$\frac{d\Pi}{db_j} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, 6 \quad (2.39)$$

ทำให้ได้ออกมา 6 สมการ จากนั้นแก้สมการทั้ง 6 เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า  $b_j$  ออกมาโดยอยู่ในรูปของค่าคงที่  $a_j$  ที่เราทราบในตอนแรก จากนั้นนำกลับไปแทนกลับในสมการ (2.36) ก็จะได้ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ใหม่  $\bar{N}_i$  ที่อยู่ในรูปของพหุนามกำลังสองที่พจน์  $\xi^2\eta$  และ  $\xi\eta^2$  ถูกทิ้งไป เป็นต้น

นอกจากนี้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสครีตเคอร์ซอพฟ์ยังได้ถูกพัฒนาในรูปแบบอื่น ๆ อีก ตัวอย่างเช่น เอลิเมนต์ดีเคคิวพี (DKQP) ที่นำเสนอโดย Dhatt และคณะ [37] ที่ประกอบด้วย 16 ระดับชั้นความเสรี ( $w$ ,  $\theta_x$  และ  $\theta_y$  ที่จุดต่อมุมและ  $w$  ที่จุดกึ่งกลางแต่ละด้าน) ดังแสดงในรูปที่ 2.12 และเอลิเมนต์เซมิลูฟ (Semiloof element) ที่นำเสนอไว้โดย Irons [38] ที่ประกอบด้วย 16 ระดับชั้นความเสรีเช่นกัน ( $w$  ที่จุดต่อมุมและจุดกึ่งกลางด้าน และค่าความชัน 2 ค่าในแต่ละด้าน) ดังแสดงในรูปที่ 2.13

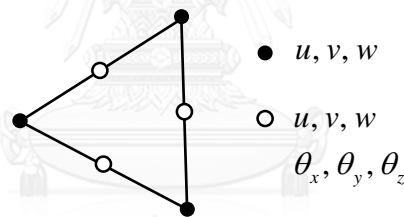


รูปที่ 2.12 ลักษณะของเอลิเมนต์ดีเคคิวพีที่ประกอบด้วย 16 ระดับชั้นความเสรี

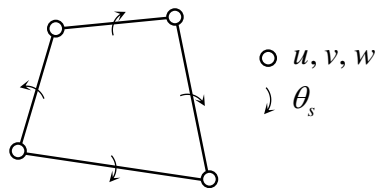


รูปที่ 2.13 ลักษณะของเอลิเมนต์เชลล์รูปสี่เหลี่ยมที่ประกอบด้วย 16 ระดับชั้นความเสรี

นอกจากนี้เอลิเมนต์ดิสครีตเคอร์ซอพฟ์ยังนิยมนำมาประยุกต์ใช้กับเอลิเมนต์แผ่นเปลือก (shell element) โดยการผนวกเอลิเมนต์ดิสครีตเคอร์ซอพฟ์นี้กับเมมเบรนเอลิเมนต์ (membrane element) ที่ใช้ในการคำนวณการเสียรูปของแผ่นบางในแนวระนาบ ดังเช่นเอลิเมนต์ดีเคที 18 (DKT18) ที่เกิดจากการผนวกเอลิเมนต์สามเหลี่ยมซีเอสที (CST membrane element) และเอลิเมนต์สามเหลี่ยมดีเคที [44] หรือเอลิเมนต์ดีแอลทีพี (DLTP) ที่เกิดจากการผนวกเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแอลเอสที (LST membrane element) และเอลิเมนต์สามเหลี่ยมดีเคทีพี [45], [46] ดังแสดงในรูปที่ 2.14 เอลิเมนต์ดีเคคว 16 (DKQ16) [47] ดังแสดงในรูปที่ 2.15 รวมไปถึงเอลิเมนต์อื่น ๆ ดังในเอกสารอ้างอิง [48], [49] และ [40] เป็นต้น



รูปที่ 2.14 ลักษณะของเอลิเมนต์ดีแอลทีพีที่ประกอบด้วย 27 ระดับชั้นความเสรี



รูปที่ 2.15 ลักษณะของเอลิเมนต์ดีเคคว 16 ที่ประกอบด้วย 16 ระดับชั้นความเสรี

อย่างไรก็ตามเอลิเมนต์ดิสครีตเคอร์ซอพฟ์นี้ในแง่ของฟังก์ชันการประมาณนั้นมีความซับซ้อนกว่าเอลิเมนต์แผ่นมายด์ลิน เนื่องจากมีการประยุกต์สมมติฐานหลาย ๆ ประการเข้าไปในการประดิษฐ์เอลิเมนต์ รวมถึงการประยุกต์สมมติฐานของเคอร์ซอพฟ์เฉพาะที่แต่ละจุดต่อเท่านั้นไม่ใช่เป็นแผ่นบางทั้งแผ่นตามทฤษฎีของเคอร์ซอพฟ์ อีกทั้งมีการกำหนดให้ลักษณะการเสียรูปในแนวตั้งเฉพาะตลอดขอบของเอลิเมนต์ จึงไม่สามารถบอกถึงฟังก์ชันการประมาณของการเสียรูปในแนวตั้งตลอดทั้งเอลิเมนต์ได้

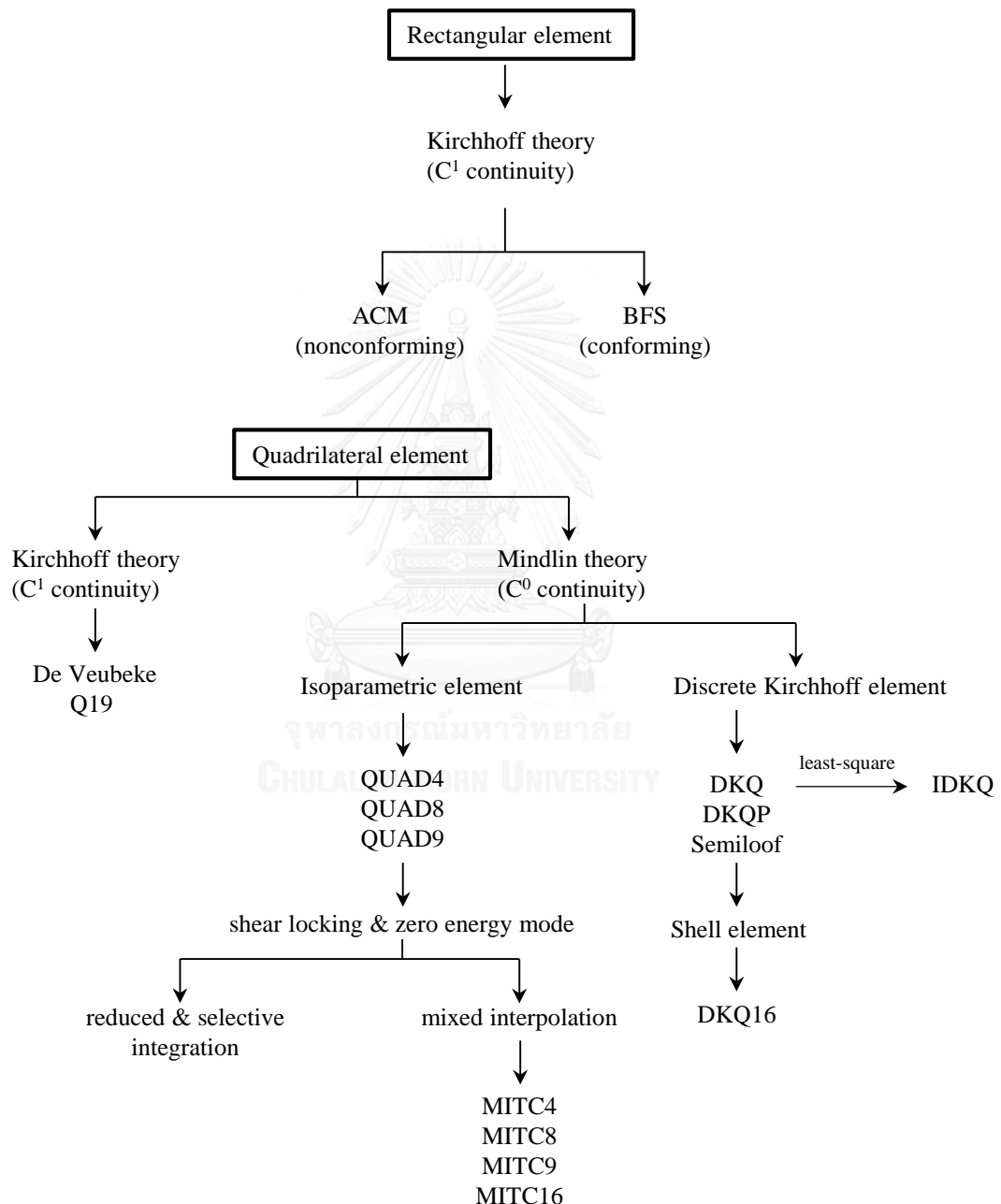
อย่างไรก็ดี เอลิเมนต์ดิสครีตเคอร์ซอพฟ์จัดได้ว่าเป็นเอลิเมนต์ที่มีประสิทธิภาพสูงเมื่อเทียบกับเอลิเมนต์ชนิดอื่น ๆ [9] อีกทั้งยังนิยมนำมาประยุกต์ใช้กับเอลิเมนต์แผ่นเปลือกเพื่อนำไปวิเคราะห์ปัญหาโครงสร้างแผ่นบางในสามมิติอีกด้วย และเอลิเมนต์ดิสครีตเคอร์ซอพฟ์นี้ยังพบได้อยู่ในโปรแกรมคอมพิวเตอร์เชิงพาณิชย์ เช่น SolidWorks, ANSYS เป็นต้น ซึ่งแสดงถึงความน่าเชื่อถือและการยอมรับในวงกว้าง

## 2.4 บทสรุป

ผลจากความยากลำบากที่สำคัญในการวิเคราะห์ปัญหาการโค้งของแผ่นบางด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นคือ เอลิเมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์นั้นต้องมีความต่อเนื่องแบบ  $C^1$  ส่งผลให้มีการพยายามที่จะพัฒนาเอลิเมนต์แบบต่าง ๆ ขึ้นมา โดยเริ่มจากเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมมุมฉาก อย่างไรก็ตาม เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ นั้นเป็นที่ต้องการมากกว่าเนื่องจากมีความยืดหยุ่นในด้านการสอดรับกับรูปร่างของปัญหารูปแบบต่าง ๆ ได้ดี ไม่จำกัดเฉพาะรูปร่างแผ่นบางที่เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉากเท่านั้น

การพัฒนาเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ เริ่มต้นจากเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ ที่สร้างจากสามเหลี่ยมรูปย่อย แม้จะสอดคล้องกับความต่อเนื่องแบบ  $C^1$  แต่พบว่าหากเอลิเมนต์มีรูปร่างลักษณะใกล้เคียงรูปสามเหลี่ยมจะทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์สูง ในขณะที่เดียวกันก็ได้มีความพยายามหลีกเลี่ยงเงื่อนไขความต่อเนื่องแบบ  $C^1$  โดยการพัฒนาเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ ภายใต้ทฤษฎีแผ่นมายด์ลินซึ่งมีความต้องการความต่อเนื่องแบบ  $C^0$  เท่านั้น ซึ่งใช้คำนวณได้ทั้งแผ่นหนาและแผ่นบาง อีกทั้งฟังก์ชันการประมาณการเสีรูปในแนวแกนตั้งและมุมบิดที่แยกเป็นอิสระต่อกันทำให้ไม่มีข้อจำกัดในเรื่องของสมการพหุนามที่จะนำมาใช้ประมาณในฟังก์ชัน จึงสามารถนำฟังก์ชันการประมาณของไอโซพาราเมตริกซ์เอลิเมนต์มาใช้ได้อีกด้วย แต่เอลิเมนต์ชนิดนี้จะพบปัญหาการเลื่อนลือคในกรณีที่ความหนาของแผ่นนั้นบางมาก ๆ อีกทั้งการใช้ฟังก์ชันการประมาณเช่นเดียวกับไอโซพาราเมตริกซ์เอลิเมนต์ซึ่งความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้จะขึ้นอยู่กับลักษณะรูปร่างเอลิเมนต์ เป็นสำคัญ ดังนั้นหากรูปร่างของเอลิเมนต์ชนิดนี้มีความบิดเบี้ยวไปมาก ผลลัพธ์ที่คำนวณได้จะคลาดเคลื่อนมากตามไปด้วย เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ อีกชนิดหนึ่ง คือ เอลิเมนต์ดิสครีตเคอร์ซอพฟ์ ซึ่งเป็นเอลิเมนต์ที่ให้ความแม่นยำของผลลัพธ์สูงและมีความต่อเนื่องระหว่างเอลิเมนต์แบบ  $C^0$  แม้เอลิเมนต์จะมีความซับซ้อนเนื่องจากมีการประยุกต์สมมติฐานหลาย ๆ ประการเข้าไปในการประดิษฐ์เอลิเมนต์ อีกทั้งมีการกำหนดให้ลักษณะการเสีรูปในแนวตั้งเฉพาะตลอดขอบของเอลิเมนต์ จึงไม่สามารถบอกถึงฟังก์ชันการประมาณของการเสีรูปในแนวตั้งตลอดทั้งเอลิเมนต์ได้ แต่เมื่อมองในแง่ของความเที่ยงตรงเป็นหลักสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการโค้งของแผ่นบาง เอลิเมนต์ดิสครีตเคอร์ซอพฟ์จึงเป็นเอลิเมนต์ที่น่าเชื่อถือมากที่สุด ในขณะที่เอลิเมนต์แผ่นมายด์ลินนั้นยังพบปัญหาในกรณี

แผ่นบางมาก ๆ อยู่ นอกจากนี้เอลิเมนต์ดิสกรีตเคอร์ชอฟฟ์นี้ยังพบได้อยู่ในโปรแกรมคอมพิวเตอร์เชิงพาณิชย์อย่าง SolidWorks และ ANSYS อีกด้วย ซึ่งแสดงถึงความน่าเชื่อถือและการยอมรับในวงกว้างของเอลิเมนต์ชนิดนี้ อีกทั้งยังเหมาะกับการนำไปพัฒนาเป็นเอลิเมนต์แผ่นเปลือกในอนาคตอีกด้วย โดยสรุปเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสำหรับวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางนั้นแสดงไว้ดังรูปที่ 2.16



รูปที่ 2.16 การพัฒนาเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมการโก่งของแผ่นบาง

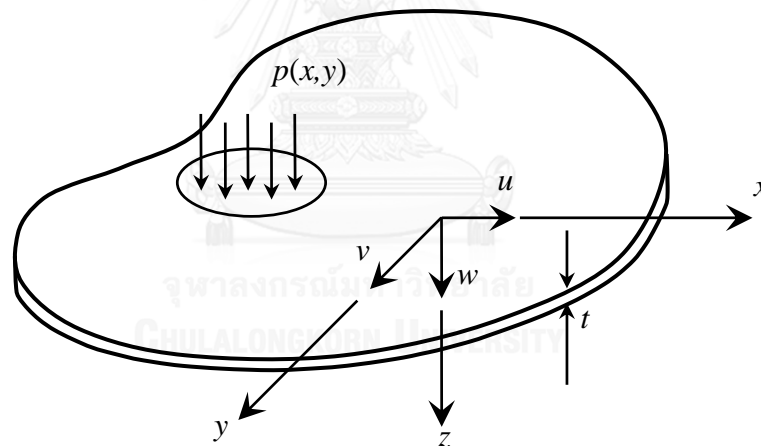
### บทที่ 3

## ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์สี่เหลี่ยมดิสกรีตเคอร์ซอว์แบบปรับปรุง

ในบทนี้จะเป็นการกล่าวถึงสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องสำหรับปัญหาการโก่งของแผ่นบาง การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบาง ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ที่ประดิษฐ์ขึ้นจากเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสกรีตเคอร์ซอว์และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสกรีตเคอร์ซอว์แบบปรับปรุงในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบาง

### 3.1 สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาการโก่งของแผ่นบาง

เพื่อเป็นการทำความเข้าใจลักษณะของปัญหาการโก่งของแผ่นบาง เราเริ่มต้นจากพิจารณาแผ่นบางรูปร่างลักษณะใด ๆ ซึ่งมีความหนา  $t$  และวางตัวอยู่ในแนวระนาบ  $x$ - $y$  ที่ผ่านกึ่งกลางความหนาของแผ่นบางถูกแรงแบบกระจาย (distributed load) มีค่า  $p(x,y)$  มากกระทำในแนวแกน  $z$  ดังแสดงในรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 แผ่นบางในแนวระนาบ  $x$ - $y$  ที่มีแรงกระทำในแนวแกน  $z$

สมมุติฐานพื้นฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบาง [1] คือ ระนาบหน้าตัดที่ตั้งฉากผ่านความหนาของแผ่นบางนั้นยังคงเป็นระนาบที่ตั้งฉากเช่นเดิมหลังจากที่แผ่นบางเกิดการโก่งตัวไปแล้ว ซึ่งสมมุติฐานนี้ก่อให้เกิดความสัมพันธ์ระหว่างค่าระยะการเสี้ยวรูป  $u$  และ  $v$  ในแนวระนาบ  $x$  และ  $y$  กับค่าระยะการเสี้ยวรูป  $w$  ในแนวแกนตั้ง  $z$  คือ

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{และ} \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.1)$$

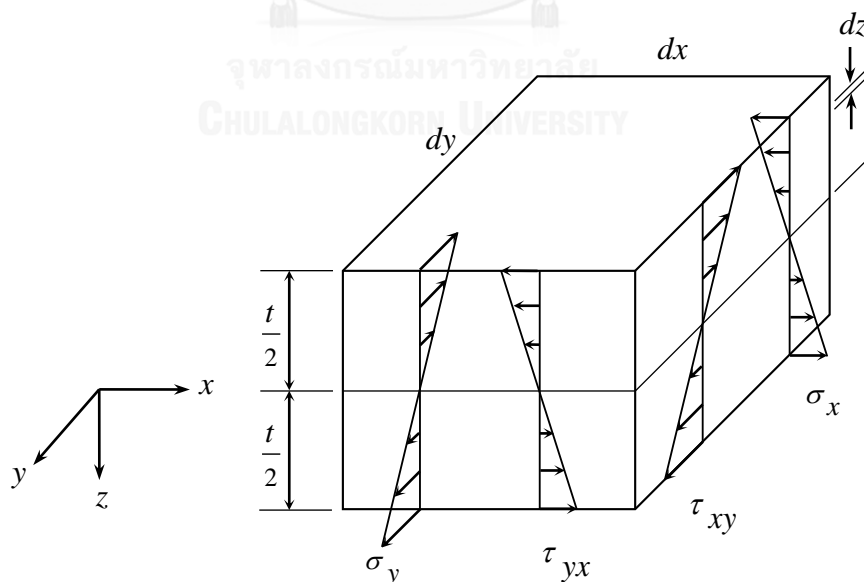
ทำให้สามารถเขียนค่าความเครียดในรูปแบบของค่าระยะการเสียรูปในแนวตั้ง  $w$  ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (3.2)$$

และจากความสัมพันธ์ตามกฎของฮุก (Hooke's law) [50] สามารถเขียนค่าความเค้นในรูปแบบของค่าระยะการเสียรูปในแนวตั้ง  $w$  ได้เป็น

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)z \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)z \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} = -\frac{E}{(1+\nu)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)z\end{aligned}\quad (3.3)$$

ความเค้นที่เกิดขึ้นนี้เองก่อให้เกิดโมเมนต์ย่อยตามมา รูปที่ 3.2 แสดงรายละเอียดการกระจายของความเค้นตามขอบเอลิเมนต์ของแผ่นบางขนาดเล็กใด ๆ ที่มีความหนา  $t$  ความยาว  $dx$  และความกว้าง  $dy$  ในแนวแกน  $x$  และ  $y$  ตามลำดับ



รูปที่ 3.2 ความเค้นย่อยต่าง ๆ ผ่านความหนาของแผ่นบางเล็กใด ๆ ที่ยาว  $dx$  กว้าง  $dy$  และหนา  $t$

โมเมนต์ย่อยต่าง ๆ ได้แก่

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz = \int_{-t/2}^{t/2} -\frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z^2 dz \\
 &= -\left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-t/2}^{t/2} \frac{E}{1-\nu^2} z^2 dz \\
 M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

โดย  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$  (3.5)

และเรียก  $D$  ว่าค่าความแข็งเกร็งของการโค้ง (flexural rigidity)

และในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.6)$$

$$M_{xy} = -\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.7)$$

$$M_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz = -M_{xy} \quad (3.8)$$

ส่วนแรงเฉือนต่าง ๆ นั้น ได้แก่

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} z dz \quad (3.9)$$

$$Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} z dz \quad (3.10)$$

ซึ่งลักษณะและทิศทางของโมเมนต์และแรงที่เกิดขึ้นนี้แสดงในรูปที่ 3.3

หลังจากแผ่นบางเกิดการโค้งตัวและอยู่ในสภาวะสมดุล (equilibrium condition) ผลลัพธ์ของแรงในแนวตั้งจำเป็นต้องเท่ากับศูนย์ดังสมการ (3.11)

$$\sum F_z = 0; \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \quad (3.11)$$

และผลรวมของโมเมนต์รอบแกน  $y$  และ  $x$  ต้องเท่ากับศูนย์เช่นกัน ดังสมการ (3.12) และ (3.13)

$$\sum M_y = 0; \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (3.12)$$

$$\sum M_x = 0; \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \quad (3.13)$$

จากสมการ (3.12) และ (3.13) จะได้



$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (3.14)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (3.15)$$

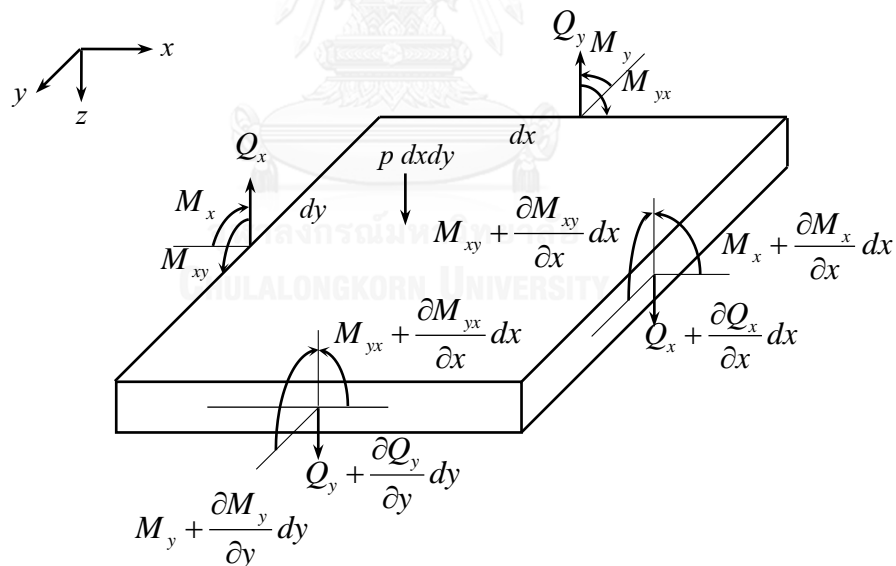
จากนั้น แทนค่า  $Q_x$  และ  $Q_y$  ในสมการ (3.11) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + p &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + p &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

แทนค่า  $M_x$ ,  $M_y$  และ  $M_{xy}$  จากสมการ (3.4), (3.6) และ (3.7) ในสมการ (3.16)

ก่อให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหาการโก่งของแผ่นบาง

$$\begin{aligned} -D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - 2D(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} &= -p(x, y) \\ D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) &= p(x, y) \end{aligned} \quad (3.17)$$



รูปที่ 3.3 โมเมนต์และแรงเฉือนย่อยต่าง ๆ ตามขอบของแผ่นบางเล็กใด ๆ ที่ยาว  $dx$  กว้าง  $dy$  และ

หนา  $t$

ซึ่งสมการ (3.17) นี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหาการโก่งของแผ่นบางในกรณีที่มีเฉพาะแรงกระทำในแนวตั้ง หากเราพิจารณารวมถึงการโก่งอันเกิดจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไป

ตลอดความหนาซึ่งก่อให้เกิดความเค้นเนื่องจากความร้อน (thermal stress) ค่าโมเมนต์ย่อย  $M_x$  และ  $M_y$  ในสมการ (3.4) และ (3.6) จะเปลี่ยนเป็น [51]

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{1-\nu} M_T \quad (3.18)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{1-\nu} M_T \quad (3.19)$$

โดยที่ 
$$M_T = E\alpha \int_{-t/2}^{t/2} (T(z) - T_0) z dz \quad (3.20)$$

และเรียก  $M_T$  ว่า โมเมนต์ความร้อน (thermal moment) ส่วน  $T(z)$  คือ การกระจายตัวของอุณหภูมิตลอดความหนาของแผ่นบาง และ  $T_0$  คือ อุณหภูมิอ้างอิงที่วัสดุไม่มีความเค้น

ซึ่งจะนำมาสู่สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหาการโค้งของแผ่นบางทั้งในกรณีที่มีแรงกระทำในแนวตั้ง และมีผลจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปตลอดความหนา ดังสมการที่ (3.21)

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = -\frac{1}{1-\nu} \left( \frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_T}{\partial y^2} \right) + p(x, y) \quad (3.21)$$

### 3.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการโค้งของแผ่นบาง

จากสมมุติฐานของเคอร์ชอฟฟ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการโค้งของแผ่นบางที่กล่าวไว้ในหัวข้อที่ 3.1 นั้นคือ ระนาบหน้าตัดที่ตั้งฉากผ่านความหนาของแผ่นบางนั้นยังคงเป็นระนาบที่ตั้งฉากเช่นเดิมหลังจากที่แผ่นบางเกิดการโค้งตัวไปแล้ว ซึ่งก่อให้เกิดความสัมพันธ์ระหว่างค่าระยะการเสียรูป  $u$  และ  $v$  ในแนวระนาบ  $x$  และ  $y$  กับค่าระยะการเสียรูป  $w$  ในแนวแกนตั้ง  $z$  ดังในสมการ (3.1) นั้นคือ

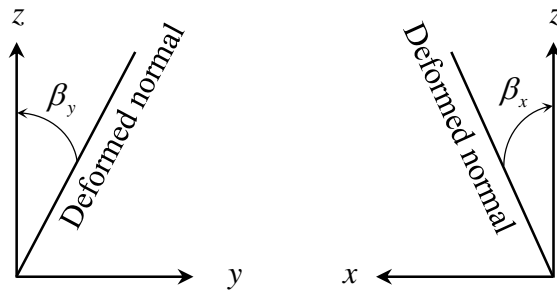
$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{และ} \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.1)$$

หากกำหนดให้  $\beta_x$  และ  $\beta_y$  คือ มุมบิดของระนาบที่ตั้งฉากกับแผ่นบางที่เสียรูปไปในระนาบ  $x-z$  และระนาบ  $y-z$  ตามลำดับ (โดยทิศทางบวกของมุมบิด  $\beta_x$  และ  $\beta_y$  แสดงไว้ดังรูปที่ 3.4) [8] ซึ่งมีความสัมพันธ์ดังสมการ

$$\beta_x(x, y) = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{และ} \quad \beta_y(x, y) = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.22)$$

จะทำให้ค่าเคลื่อนตัวในแนวแกน  $x$ ,  $y$  และ  $z$  ( $u$ ,  $v$  และ  $w$ ) สามารถเขียนให้ได้ดังสมการ (3.23) ซึ่ง  $u$  และ  $v$  นั้นเขียนอยู่ในรูปของ  $\beta_x$  และ  $\beta_y$  ดังนี้

$$u = z\beta_x(x, y), \quad v = z\beta_y(x, y) \quad \text{และ} \quad w = w(x, y) \quad (3.23)$$



รูปที่ 3.4 รูปแสดงทิศทางบวกของมุมบิด  $\beta_x$  และ  $\beta_y$

ดังนั้นค่าความเครียดสามารถเขียนอยู่ในรูปของค่าระยะการเสียรูปและมุมบิดได้ดังนี้

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \quad (3.24)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \quad (3.25)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \quad (3.26)$$

หรือเขียนในรูปเวกเตอร์ได้เป็น

$$\{\varepsilon_b\} = z \{\kappa\} \quad (3.27)$$

โดยที่  $\{\kappa\}$  คือ เวกเตอร์ความโค้ง (vector of curvatures) ซึ่งอยู่ในรูปของ

$$\{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

ถ้ากำหนดให้

$$\beta_x = [H_x] \{\delta\} \quad (3.29)$$

และ

$$\beta_y = [H_y] \{\delta\} \quad (3.30)$$

โดยที่  $H_x$  และ  $H_y$  คือฟังก์ชันพื้นฐาน (shape function) ของมุมบิด  $\beta_x$  และ  $\beta_y$  และ  $\{\delta\}$  คือ เวกเตอร์ของตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ

ดังนั้นเวกเตอร์ความโค้ง  $\{\kappa\}$  จะเขียนได้เป็น

$$\{\kappa\} = \begin{bmatrix} \left[ \frac{\partial H_x}{\partial x} \right] \\ \left[ \frac{\partial H_y}{\partial y} \right] \\ \left[ \frac{\partial H_x}{\partial y} \right] + \left[ \frac{\partial H_y}{\partial x} \right] \end{bmatrix} \{\delta\} \quad (3.31)$$

หรือ  $\{\kappa\} = [B]\{\delta\}$  (3.32)

โดยที่  $[B]$  คือเมทริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและระยะการเสียรูป นั่นคือ

$$[B] = \begin{bmatrix} \left[ \frac{\partial H_x}{\partial x} \right] \\ \left[ \frac{\partial H_y}{\partial y} \right] \\ \left[ \frac{\partial H_x}{\partial y} \right] + \left[ \frac{\partial H_y}{\partial x} \right] \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

โดยการใช้ระเบียบวิธีการแปรผัน (variational method) ค่าพลังงานศักย์ (potential energy) ในส่วนของพลังงานความเครียดภายใน (internal strain energy) ของแผ่นบางจะอยู่ในรูป

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{\kappa\}^T [D] \{\kappa\} dA \quad (3.34)$$

โดยที่

$$[D] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

จากหลักการของค่าต่ำสุดของพลังงานศักย์รวม (principle of total minimum potential energy) ตามระเบียบวิธีแปรผันก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการโก่งของแผ่นบางที่อยู่ในรูปของ [1]

$$[K]\{\delta\} = \{F_p\} + \{F_T\} \quad (3.36)$$

โดยที่  $[K]$  คือ เอลิเมนต์เมทริกซ์ของความแข็งเกร็ง (element stiffness matrix) ซึ่งอยู่ในรูปของ

$$[K] = \int_A [B]^T [D] [B] dxdy \quad (3.37)$$

$\{F_p\}$  คือ โหลดเวกเตอร์เนื่องจากแรงภายนอกซึ่งหาได้จาก

$$\{F_p\} = \int_A p \{N\} dxdy \quad (3.38)$$

$\{F_T\}$  คือ โหลดเวกเตอร์เนื่องจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปตลอดความหนาซึ่งคำนวณได้จาก

$$\{F_T\} = \int_A [B]^T \{M\} dA \quad (3.39)$$

$$\{M\}^T = [M_T \quad M_T \quad 0] \quad (3.40)$$

โดย  $M_T$  คือ โมเมนต์ความร้อน (thermal moment) ดังแสดงไว้ในสมการ (3.20) นั่นคือ

$$M_T = E\alpha \int_{-t/2}^{t/2} T(z) z dz \quad (3.41)$$

$T(z)$  คือ อุณหภูมิตลอดความหนาของแผ่นบาง ดังนั้นจากสมการ (3.39) จะเขียนได้เป็น

$$\{F_T\} = M_T \int_A [B]^T dx dy \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

เมื่อได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังเช่นแสดงในสมการ (3.36) ขั้นตอนต่อไปคือการรวมสมการของเอลิเมนต์ย่อยเข้าด้วยกันก่อให้เกิดระบบสมการรวม จากนั้นกำหนดค่าที่ขอบเขตแล้วจึงแก้ระบบสมการรวมเพื่อหาผลลัพธ์ที่จุดต่อต่าง ๆ ต่อไป ด้วยขั้นตอนและวิธีการที่กล่าวมานี้ จะนำมาใช้ในการประดิษฐ์เอลิเมนต์เมทริกซ์สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสครีตเคอร์ชอฟฟ์และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสครีตเคอร์ชอฟฟ์แบบปรับปรุงซึ่งจะกล่าวในหัวข้อต่อไป

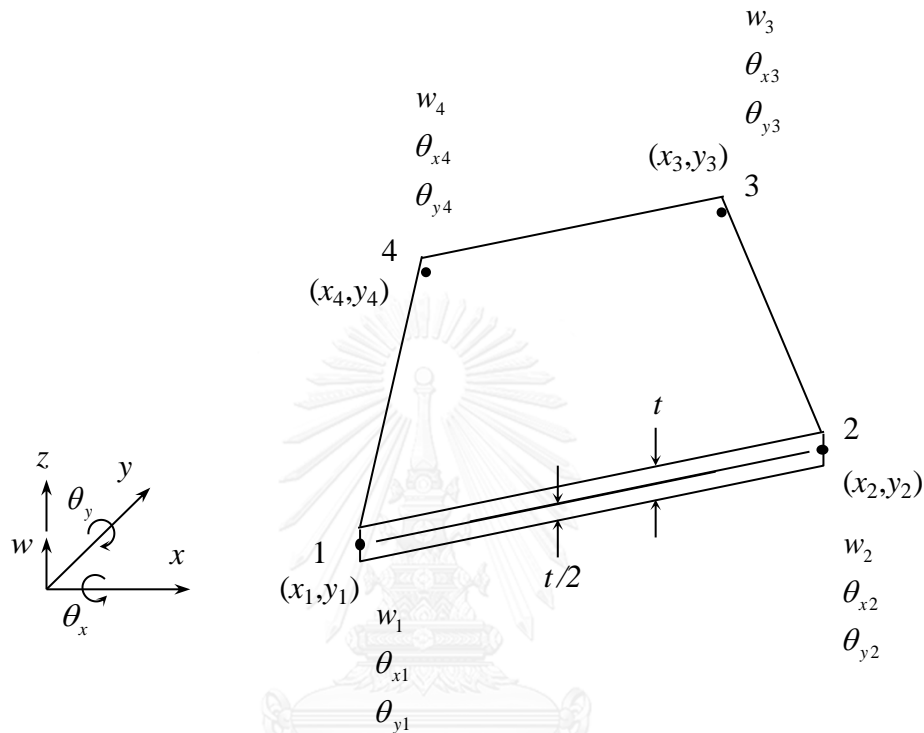
### 3.3 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสครีตเคอร์ชอฟฟ์

เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสครีตเคอร์ชอฟฟ์ (Discrete Kirchhoff Quadrilateral element) หรือเรียกกันโดยทั่วไปว่า เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดีเคคิว (DKQ) นั้นได้ถูกนำเสนอครั้งแรกในเอกสารอ้างอิง [8] ว่าเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสี่จุดต่อที่ให้ความแม่นยำและการลู่เข้าของผลลัพธ์ที่ดีเมื่อใช้เอลิเมนต์ที่ละเอียดมากขึ้น อีกทั้งสะดวกและไม่ซับซ้อนในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เอลิเมนต์ชนิดนี้ได้พัฒนาต่อมาจากเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อที่มีประสิทธิภาพสูงชนิดหนึ่งคือ เอลิเมนต์สามเหลี่ยมดิสครีตเคอร์ชอฟฟ์ (Discrete Kirchhoff Triangle element) หรือเรียกกันโดยทั่วไปว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยมดีเคที (DKT) [9] โดยใช้สมมติฐานและการสมมุติการกระจายของผลเฉลยในลักษณะเดียวกันแต่ใช้กับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสี่จุดต่อแทน

เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดีเคคิวเริ่มต้นจากเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม 8 จุดต่อ ประกอบด้วยจุดต่อที่มุมทั้งสี่และจุดต่อที่กึ่งกลางขอบแต่ละด้าน แล้วจึงประยุกต์เงื่อนไขหลาย ๆ ประการในการทำงานเดียวกันกับการประดิษฐ์เอลิเมนต์สามเหลี่ยมดีเคทีเพื่อลดจำนวนตัวไม่รู้ค่า ทำให้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม 8 จุดต่อนี้ลดรูปลงเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบ 4 จุดต่อ ซึ่งประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าคือค่าของการเสียรูปในแนวตั้ง  $w$

และค่ามุมบิด  $\theta_x$  และ  $\theta_y$  ที่บิดไปรอบแกน  $x$  และ  $y$  สำหรับแต่ละจุดต่อนั้น ๆ (โดยที่  $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}$

และ  $\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$ ) ดังแสดงในรูปที่ 3.5 ทำให้มีตัวไม่รู้ค่าทั้งหมด 12 ค่าต่อหนึ่งเอลิเมนต์



รูปที่ 3.5 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสครีตเคอร์ซอพฟ์และตัวไม่รู้ค่าที่แต่ละจุดต่อ

เงื่อนไขหลาย ๆ ประการที่ใช้ในการประดิษฐ์เอลิเมนต์ชนิดนี้ซึ่งได้นำเสนอโดยละเอียดในเอกสารอ้างอิง [8] ประกอบด้วย

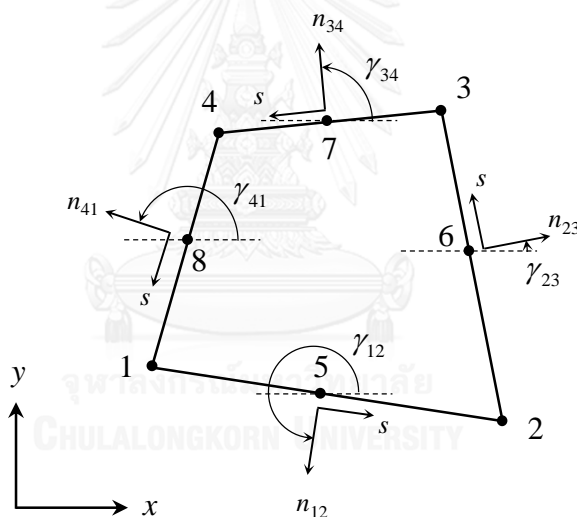
1.) สมมติลักษณะการกระจายของมุมบิด  $\beta_x$  และ  $\beta_y$  เป็นแบบกำลังสามแบบไม่สมบูรณ์ (incomplete cubic) ตลอดเอลิเมนต์ ดังนี้

$$\beta_x = \sum_{i=1}^8 N_i \beta_{xi} \quad (3.43)$$

$$\beta_y = \sum_{i=1}^8 N_i \beta_{yi} \quad (3.44)$$

โดยที่ฟังก์ชันการประมาณภายใน ( $N_i$ ) นี้อยู่ในรูปของพิกัดธรรมชาติ (natural coordinates)  $\xi - \eta$  ดังแสดงในรูปที่ 3.6 คือ [7]

$$\begin{aligned}
N_1 &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) \\
N_2 &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta) \\
N_3 &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta) \\
N_4 &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta) \\
N_5 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \\
N_6 &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \\
N_7 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \\
N_8 &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)
\end{aligned} \tag{3.45}$$



รูปที่ 3.6 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม 8 จุดต่อ

2.) จากสมมติฐานของเคอร์ชอฟฟ์ (Kirchhoff hypothesis) กำหนดให้ความเครียดเฉือนย่อยในแนวตั้ง (transverse shears) มีค่าเป็นศูนย์ที่จุดต่อมุมทั้งสี่และที่จุดต่อที่กึ่งกลางแต่ละด้านของเอลิเมนต์ นั่นคือ

(2.1) ที่จุดต่อที่มุมทั้งสี่ของเอลิเมนต์

$$\begin{Bmatrix} \beta_{xi} + w_{,xi} \\ \beta_{yi} + w_{,yi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{3.46}$$

(2.2) ที่จุดต่อที่กึ่งกลางแต่ละด้านของเอลิเมนต์

$$\beta_{sk} + w_{,sk} = 0 \quad k = 5, 6, 7, 8 \quad (3.47)$$

3.) กำหนดให้ลักษณะการเสีรูปในแนวตั้ง  $w$  แปรผันในรูปกำลังสาม (cubic) ตลอดด้านทั้งสี่ของเอลิเมนต์ทำให้

$$w_{,sk} = \frac{-3}{2l_{ij}}(w_i - w_j) - \frac{1}{4}(w_{,si} + w_{,sj}) \quad (3.48)$$

โดย  $k = 5, 6, 7, 8$  เป็นหมายเลขจุดต่อกึ่งกลางด้าน  $ij = 12, 23, 34, 41$  ตามลำดับ

$l_{ij}$  คือ ความยาวด้าน  $ij$

(รายละเอียดที่มาของสมการ (3.48) นี้แสดงไว้ในภาคผนวก ก)

4.) กำหนดให้ค่ามุมบิดที่ตั้งฉากกับด้านทั้งสี่ของเอลิเมนต์มีการกระจายแบบเชิงเส้น (linear)

$$\beta_{nk} = \frac{1}{2}(\beta_{ni} + \beta_{nj}) \quad (3.49)$$

โดย  $k = 5, 6, 7, 8$  เป็นหมายเลขจุดต่อกึ่งกลางด้าน  $ij = 12, 23, 34, 41$  ตามลำดับ

ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบตีเคคิวนั้นมีสมการความสัมพันธ์อื่น ๆ ที่ต้องใช้ดังนี้ (รายละเอียดที่มาแสดงไว้ในภาคผนวก ข)

$$\beta_x = \beta_n \cos \gamma - \beta_s \sin \gamma \quad (3.50)$$

$$\beta_y = \beta_n \sin \gamma + \beta_s \cos \gamma \quad (3.51)$$

$$\beta_n = \beta_x \cos \gamma + \beta_y \sin \gamma \quad (3.52)$$

$$\beta_s = -\beta_x \sin \gamma + \beta_y \cos \gamma \quad (3.53)$$

$$w_{,n} = \theta_x \sin \gamma - \theta_y \cos \gamma \quad (3.54)$$

$$w_{,s} = \theta_x \cos \gamma + \theta_y \sin \gamma \quad (3.55)$$

$$x_{ij} = x_i - x_j \quad (3.56)$$

$$y_{ij} = y_i - y_j \quad (3.57)$$

$$l_{ij} = \sqrt{x_{ij}^2 + y_{ij}^2} \quad (3.58)$$

$$\sin \gamma_{ij} = \frac{y_{ij}}{l_{ij}} \quad (3.59)$$

$$\cos \gamma_{ij} = -\frac{x_{ij}}{l_{ij}} \quad (3.60)$$

ในการหารูปแบบของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบตีเคคิวนั้นเริ่มต้นจากสมการ (3.43) จะได้ว่า



$$\beta_x = \sum_{i=1}^8 N_i \beta_{xi} = N_1 \beta_{x1} + N_2 \beta_{x2} + N_3 \beta_{x3} + N_4 \beta_{x4} + N_5 \beta_{x5} + N_6 \beta_{x6} + N_7 \beta_{x7} + N_8 \beta_{x8} \quad (3.61)$$

จากสมมติฐานของเคอร์ซอพฟ์ในสมการ (3.46) จะได้ว่า

$$\beta_{x1} = -w_{,x1} = \theta_{y1} \quad (3.62)$$

$$\beta_{x2} = -w_{,x2} = \theta_{y2} \quad (3.63)$$

$$\beta_{x3} = -w_{,x3} = \theta_{y3} \quad (3.64)$$

$$\beta_{x4} = -w_{,x4} = \theta_{y4} \quad (3.65)$$

และจากความสัมพันธ์สมการ (3.50) จะได้ว่า

$$\beta_{x5} = \beta_{n5} \cos \gamma_{12} - \beta_{s5} \sin \gamma_{12} \quad (3.66)$$

$$\beta_{x6} = \beta_{n6} \cos \gamma_{23} - \beta_{s6} \sin \gamma_{23} \quad (3.67)$$

$$\beta_{x7} = \beta_{n7} \cos \gamma_{34} - \beta_{s7} \sin \gamma_{34} \quad (3.68)$$

$$\beta_{x8} = \beta_{n8} \cos \gamma_{41} - \beta_{s8} \sin \gamma_{41} \quad (3.69)$$

จากสมการ (3.62-3.69) แทนค่าในสมการ (3.61) จะได้

$$\begin{aligned} \beta_x = & N_1 \theta_{y1} + N_2 \theta_{y2} + N_3 \theta_{y3} + N_4 \theta_{y4} + N_5 (\beta_{n5} \cos \gamma_{12} - \beta_{s5} \sin \gamma_{12}) \\ & + N_6 (\beta_{n6} \cos \gamma_{23} - \beta_{s6} \sin \gamma_{23}) + N_7 (\beta_{n7} \cos \gamma_{34} - \beta_{s7} \sin \gamma_{34}) \\ & + N_8 (\beta_{n8} \cos \gamma_{41} - \beta_{s8} \sin \gamma_{41}) \end{aligned} \quad (3.70)$$

จากสมมติฐานของเคอร์ซอพฟ์ในสมการ (3.47) จะได้ว่า

$$\beta_{s5} = -w_{,s5} \quad (3.71)$$

$$\beta_{s6} = -w_{,s6} \quad (3.72)$$

$$\beta_{s7} = -w_{,s7} \quad (3.73)$$

$$\beta_{s8} = -w_{,s8} \quad (3.74)$$

และจากสมมติฐานในสมการ (3.49) จะได้ว่า

$$\beta_{n5} = \frac{1}{2} (\beta_{n1} + \beta_{n2}) \quad (3.75)$$

$$\beta_{n6} = \frac{1}{2} (\beta_{n2} + \beta_{n3}) \quad (3.76)$$

$$\beta_{n7} = \frac{1}{2} (\beta_{n3} + \beta_{n4}) \quad (3.77)$$

$$\beta_{n8} = \frac{1}{2} (\beta_{n4} + \beta_{n1}) \quad (3.78)$$

และจากความสัมพันธ์สมการ (3.52) จะได้ว่า

$$\beta_{n5} = \frac{1}{2} (\beta_{n1} + \beta_{n2}) = \frac{1}{2} [\beta_{x1} \cos \gamma_{12} + \beta_{y1} \sin \gamma_{12} + \beta_{x2} \cos \gamma_{12} + \beta_{y2} \sin \gamma_{12}] \quad (3.79)$$

$$\beta_{n6} = \frac{1}{2}(\beta_{n2} + \beta_{n3}) = \frac{1}{2}[\beta_{x2} \cos \gamma_{23} + \beta_{y2} \sin \gamma_{23} + \beta_{x3} \cos \gamma_{23} + \beta_{y3} \sin \gamma_{23}] \quad (3.80)$$

$$\beta_{n7} = \frac{1}{2}(\beta_{n3} + \beta_{n4}) = \frac{1}{2}[\beta_{x3} \cos \gamma_{34} + \beta_{y3} \sin \gamma_{34} + \beta_{x4} \cos \gamma_{34} + \beta_{y4} \sin \gamma_{34}] \quad (3.81)$$

$$\beta_{n8} = \frac{1}{2}(\beta_{n4} + \beta_{n1}) = \frac{1}{2}[\beta_{x4} \cos \gamma_{41} + \beta_{y4} \sin \gamma_{41} + \beta_{x1} \cos \gamma_{41} + \beta_{y1} \sin \gamma_{41}] \quad (3.82)$$

จากสมการ (3.71-3.74) และสมการ (3.79-3.82) แทนค่าในสมการ (3.70) จะได้

$$\begin{aligned} \beta_x = & N_1\theta_{y1} + N_2\theta_{y2} + N_3\theta_{y3} + N_4\theta_{y4} \\ & + \frac{1}{2}N_5 \cos \gamma_{12} [\beta_{x1} \cos \gamma_{12} + \beta_{y1} \sin \gamma_{12} + \beta_{x2} \cos \gamma_{12} + \beta_{y2} \sin \gamma_{12}] + N_5 w_{s5} \sin \gamma_{12} \\ & + \frac{1}{2}N_6 \cos \gamma_{23} [\beta_{x2} \cos \gamma_{23} + \beta_{y2} \sin \gamma_{23} + \beta_{x3} \cos \gamma_{23} + \beta_{y3} \sin \gamma_{23}] + N_6 w_{s6} \sin \gamma_{23} \\ & + \frac{1}{2}N_7 \cos \gamma_{34} [\beta_{x3} \cos \gamma_{34} + \beta_{y3} \sin \gamma_{34} + \beta_{x4} \cos \gamma_{34} + \beta_{y4} \sin \gamma_{34}] + N_7 w_{s7} \sin \gamma_{34} \\ & + \frac{1}{2}N_8 \cos \gamma_{41} [\beta_{x4} \cos \gamma_{41} + \beta_{y4} \sin \gamma_{41} + \beta_{x1} \cos \gamma_{41} + \beta_{y1} \sin \gamma_{41}] + N_8 w_{s8} \sin \gamma_{41} \end{aligned} \quad (3.83)$$

จากสมมติฐานของเคอร์ชอฟฟ์ในสมการ (3.46) จะได้ว่า

$$\beta_{x1} = -w_{x1} = \theta_{y1} \quad (3.84)$$

$$\beta_{x2} = -w_{x2} = \theta_{y2} \quad (3.85)$$

$$\beta_{x3} = -w_{x3} = \theta_{y3} \quad (3.86)$$

$$\beta_{x4} = -w_{x4} = \theta_{y4} \quad (3.87)$$

$$\beta_{y1} = -w_{y1} = -\theta_{x1} \quad (3.88)$$

$$\beta_{y2} = -w_{y2} = -\theta_{x2} \quad (3.89)$$

$$\beta_{y3} = -w_{y3} = -\theta_{x3} \quad (3.90)$$

$$\beta_{y4} = -w_{y4} = -\theta_{x4} \quad (3.91)$$

จากสมการ (3.84-3.91) แทนค่าในสมการ (3.83) จะได้

$$\begin{aligned} \beta_x = & N_1\theta_{y1} + N_2\theta_{y2} + N_3\theta_{y3} + N_4\theta_{y4} \\ & + \frac{1}{2}N_5 \cos \gamma_{12} [\cos \gamma_{12}\theta_{y1} - \sin \gamma_{12}\theta_{x1} + \cos \gamma_{12}\theta_{y2} - \sin \gamma_{12}\theta_{x2}] + N_5 w_{s5} \sin \gamma_{12} \\ & + \frac{1}{2}N_6 \cos \gamma_{23} [\cos \gamma_{23}\theta_{y2} - \sin \gamma_{23}\theta_{x2} + \cos \gamma_{23}\theta_{y3} - \sin \gamma_{23}\theta_{x3}] + N_6 w_{s6} \sin \gamma_{23} \\ & + \frac{1}{2}N_7 \cos \gamma_{34} [\cos \gamma_{34}\theta_{y3} - \sin \gamma_{34}\theta_{x3} + \cos \gamma_{34}\theta_{y4} - \sin \gamma_{34}\theta_{x4}] + N_7 w_{s7} \sin \gamma_{34} \\ & + \frac{1}{2}N_8 \cos \gamma_{41} [\cos \gamma_{41}\theta_{y4} - \sin \gamma_{41}\theta_{x4} + \cos \gamma_{41}\theta_{y1} - \sin \gamma_{41}\theta_{x1}] + N_8 w_{s8} \sin \gamma_{41} \end{aligned} \quad (3.92)$$

จากสมมติฐานในสมการ (3.48) จะได้ว่า

$$w_{s5} = \frac{-3}{2l_{12}}(w_1 - w_2) - \frac{1}{4}(w_{s1} + w_{s2}) \quad (3.93)$$

$$w_{s6} = \frac{-3}{2l_{23}}(w_2 - w_3) - \frac{1}{4}(w_{s2} + w_{s3}) \quad (3.94)$$

$$w_{s7} = \frac{-3}{2l_{34}}(w_3 - w_4) - \frac{1}{4}(w_{s3} + w_{s4}) \quad (3.95)$$

$$w_{s8} = \frac{-3}{2l_{41}}(w_4 - w_1) - \frac{1}{4}(w_{s4} + w_{s1}) \quad (3.96)$$

และจากความสัมพันธ์สมการ (3.55) จะได้ว่า

$$w_{s5} = \frac{-3}{2l_{12}}(w_1 - w_2) - \frac{1}{4}[\cos \gamma_{12}\theta_{x1} + \sin \gamma_{12}\theta_{y1} + \cos \gamma_{12}\theta_{x2} + \sin \gamma_{12}\theta_{y2}] \quad (3.97)$$

$$w_{s6} = \frac{-3}{2l_{23}}(w_2 - w_3) - \frac{1}{4}[\cos \gamma_{23}\theta_{x2} + \sin \gamma_{23}\theta_{y2} + \cos \gamma_{23}\theta_{x3} + \sin \gamma_{23}\theta_{y3}] \quad (3.98)$$

$$w_{s7} = \frac{-3}{2l_{34}}(w_3 - w_4) - \frac{1}{4}[\cos \gamma_{34}\theta_{x3} + \sin \gamma_{34}\theta_{y3} + \cos \gamma_{34}\theta_{x4} + \sin \gamma_{34}\theta_{y4}] \quad (3.99)$$

$$w_{s8} = \frac{-3}{2l_{41}}(w_4 - w_1) - \frac{1}{4}[\cos \gamma_{41}\theta_{x4} + \sin \gamma_{41}\theta_{y4} + \cos \gamma_{41}\theta_{x1} + \sin \gamma_{41}\theta_{y1}] \quad (3.100)$$

จากสมการ (3.97-3.100) แทนค่าในสมการ (3.92) จะได้

$$\begin{aligned} \beta_x = & N_1\theta_{y1} + N_2\theta_{y2} + N_3\theta_{y3} + N_4\theta_{y4} \\ & + \frac{1}{2}N_5 \cos \gamma_{12} [\cos \gamma_{12}\theta_{y1} - \sin \gamma_{12}\theta_{x1} + \cos \gamma_{12}\theta_{y2} - \sin \gamma_{12}\theta_{x2}] \\ & + N_5 \sin \gamma_{12} \left[ \frac{-3}{2l_{12}}(w_1 - w_2) - \frac{1}{4}(\cos \gamma_{12}\theta_{x1} + \sin \gamma_{12}\theta_{y1} + \cos \gamma_{12}\theta_{x2} + \sin \gamma_{12}\theta_{y2}) \right] \\ & + \frac{1}{2}N_6 \cos \gamma_{23} [\cos \gamma_{23}\theta_{y2} - \sin \gamma_{23}\theta_{x2} + \cos \gamma_{23}\theta_{y3} - \sin \gamma_{23}\theta_{x3}] \\ & + N_6 \sin \gamma_{23} \left[ \frac{-3}{2l_{23}}(w_2 - w_3) - \frac{1}{4}(\cos \gamma_{23}\theta_{x2} + \sin \gamma_{23}\theta_{y2} + \cos \gamma_{23}\theta_{x3} + \sin \gamma_{23}\theta_{y3}) \right] \\ & + \frac{1}{2}N_7 \cos \gamma_{34} [\cos \gamma_{34}\theta_{y3} - \sin \gamma_{34}\theta_{x3} + \cos \gamma_{34}\theta_{y4} - \sin \gamma_{34}\theta_{x4}] \\ & + N_7 \sin \gamma_{34} \left[ \frac{-3}{2l_{34}}(w_3 - w_4) - \frac{1}{4}(\cos \gamma_{34}\theta_{x3} + \sin \gamma_{34}\theta_{y3} + \cos \gamma_{34}\theta_{x4} + \sin \gamma_{34}\theta_{y4}) \right] \\ & + \frac{1}{2}N_8 \cos \gamma_{41} [\cos \gamma_{41}\theta_{y4} - \sin \gamma_{41}\theta_{x4} + \cos \gamma_{41}\theta_{y1} - \sin \gamma_{41}\theta_{x1}] \\ & + N_8 \sin \gamma_{41} \left[ \frac{-3}{2l_{41}}(w_4 - w_1) - \frac{1}{4}(\cos \gamma_{41}\theta_{x4} + \sin \gamma_{41}\theta_{y4} + \cos \gamma_{41}\theta_{x1} + \sin \gamma_{41}\theta_{y1}) \right] \end{aligned} \quad (3.101)$$

จากนั้นทำการจัดรูป  $\beta_x$  ให้อยู่ในรูปของความสัมพันธ์ตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อ  $\{\delta\}$  ดังสมการ

$$\beta_x = [H_x(\xi, \eta)]\{\delta\} \quad (3.102)$$

โดยที่

$$[H_x(\xi, \eta)] = [H_{x1} \ H_{x2} \ H_{x3} \ H_{x4} \ \dots \ H_{x9} \ H_{x10} \ H_{x11} \ H_{x12}] \quad (3.103)$$

$$\{\delta\}^T = [w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ w_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{y3} \ w_4 \ \theta_{x4} \ \theta_{y4}] \quad (3.104)$$

และ

$$\begin{aligned} H_{x1} &= \frac{3}{2}[a_5 N_5 - a_8 N_8] \\ H_{x2} &= b_5 N_5 + b_8 N_8 \\ H_{x3} &= N_1 - c_5 N_5 - c_8 N_8 \\ H_{x4} &= \frac{3}{2}[a_6 N_6 - a_5 N_5] \\ H_{x5} &= b_6 N_6 + b_5 N_5 \\ H_{x6} &= N_2 - c_6 N_6 - c_5 N_5 \\ H_{x7} &= \frac{3}{2}[a_7 N_7 - a_6 N_6] \\ H_{x8} &= b_7 N_7 + b_6 N_6 \\ H_{x9} &= N_3 - c_7 N_7 - c_6 N_6 \\ H_{x10} &= \frac{3}{2}[a_8 N_8 - a_7 N_7] \\ H_{x11} &= b_8 N_8 + b_7 N_7 \\ H_{x12} &= N_4 - c_8 N_8 - c_7 N_7 \end{aligned} \quad (3.105)$$

$$\text{โดยที่ } a_k = -\frac{x_{ij}}{l_{ij}^2} \quad (3.106)$$

$$b_k = \frac{3}{4} \frac{x_{ij} y_{ij}}{l_{ij}^2} \quad (3.107)$$

$$c_k = \frac{\left(\frac{1}{4} x_{ij}^2 - \frac{1}{2} y_{ij}^2\right)}{l_{ij}^2} \quad (3.108)$$

โดย  $k = 5, 6, 7, 8$  และ  $ij = 12, 23, 34, 41$  ตามลำดับ

ทำตามขั้นตอนที่ผ่านมาในทำนองเดียวกันจะได้  $\beta_y$  ที่อยู่ในรูปของความสัมพันธ์กับตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ  $\{\delta\}$  ดังสมการ

$$\beta_y = [H_y(\xi, \eta)]\{\delta\} \quad (3.109)$$

โดยที่

$$[H_y(\xi, \eta)] = [H_{y1} \ H_{y2} \ H_{y3} \ H_{y4} \ \dots \ H_{y9} \ H_{y10} \ H_{y11} \ H_{y12}] \quad (3.110)$$

และ

$$\begin{aligned}
 H_{y1} &= \frac{3}{2}[d_5N_5 - d_8N_8] \\
 H_{y2} &= -N_1 + e_5N_5 + e_8N_8 \\
 H_{y3} &= -b_5N_5 - b_8N_8 = -H_{x2} \\
 H_{y4} &= \frac{3}{2}[d_6N_6 - d_5N_5] \\
 H_{y5} &= -N_2 + e_6N_6 + e_5N_5 \\
 H_{y6} &= -b_6N_6 - b_5N_5 = -H_{x5} \\
 H_{y7} &= \frac{3}{2}[d_7N_7 - d_6N_6] \\
 H_{y8} &= -N_3 + e_7N_7 + e_6N_6 \\
 H_{y9} &= -b_7N_7 - b_6N_6 = -H_{x8} \\
 H_{y10} &= \frac{3}{2}[d_8N_8 - d_7N_7] \\
 H_{y11} &= -N_4 + e_8N_8 + e_7N_7 \\
 H_{y12} &= -b_8N_8 - b_7N_7 = -H_{x11}
 \end{aligned} \tag{3.111}$$

$$\text{โดยที่ } b_k = \frac{3}{4} \frac{x_{ij}y_{ij}}{l_{ij}^2} \tag{3.112}$$

$$d_k = -\frac{y_{ij}}{l_{ij}^2} \tag{3.113}$$

$$e_k = \frac{\left(-\frac{1}{2}x_{ij}^2 + \frac{1}{4}y_{ij}^2\right)}{l_{ij}^2} \tag{3.114}$$

โดย  $k = 5, 6, 7, 8$  และ  $ij = 12, 23, 34, 41$  ตามลำดับ

เมื่อทราบฟังก์ชันสัมพันธฐาน  $[H_x]$  และ  $[H_y]$  ของมุมบิด  $\beta_x$  และ  $\beta_y$  นำไปแทนค่าในสมการ (3.33) จะได้เมทริกซ์ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและระยะการเสียรูป  $[B]$  ซึ่งนำไปหาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการโก่งของแผ่นบางดังสมการ (3.36) ต่อไป ซึ่งด้วยหลักการเดียวกันนี้เอง เราจะนำไปใช้ในการประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสครีตเคอร์ซอพฟ์แบบปรับปรุงในหัวข้อต่อไป

### 3.4 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสครีตเคอร์ซอพฟ์แบบปรับปรุง

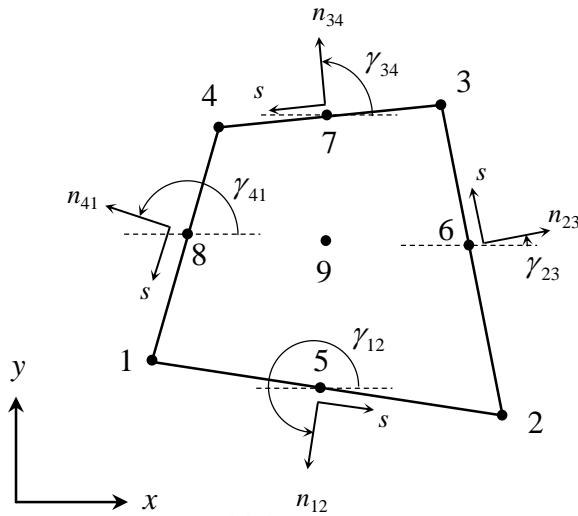
เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสครีตเคอร์ซอพฟ์แบบปรับปรุงนั้นได้พัฒนาต่อมาจากเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสครีตเคอร์ซอพฟ์เพื่อให้มีประสิทธิภาพที่ดีมากยิ่งขึ้น โดย Jeyachandrabose และคณะ [10] ได้

ประยุกต์เทคนิควิธีกำลังสองน้อยสุด (least-square) เข้ากับฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ที่มีการเพิ่มการสมมติค่าที่จุดต่อตรงกลางเข้าไปด้วย ทำให้ความแม่นยำของผลลัพธ์ที่คำนวณได้สูงกว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมตีเคคิ้วทั้งค่าระยะการเสียรูปและค่าความเค้น โดยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสี่จุดต่อชนิดใหม่นี้เรียกว่า เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมตีสคริตเคอร์ซอฟฟ์แบบปรับปรุง (Improved Discrete Kirchhoff Quadrilateral element) หรือเรียกโดยย่อว่า เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอดีเคคิ้ว (IDKQ)

เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอดีเคคิ้วเริ่มต้นจากเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม 9 จุดต่อ ประกอบด้วยจุดต่อที่มุมทั้งสี่ จุดต่อที่กึ่งกลางขอบแต่ละด้าน และจุดต่อที่อยู่ตรงกลางภายในเอลิเมนต์ แล้วจึงประยุกต์เงื่อนไขหลาย ๆ ประการในทำนองเดียวกันกับการประดิษฐ์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบตีเคคิ้วเพื่อลดจำนวนตัวไม่รู้ค่า ทำให้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม 9 จุดต่อนี้ลดรูปลงเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบ 4 จุดต่อ ซึ่งประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าคือค่าของการเสียรูปในแนวตั้ง  $w$  และค่ามุมบิด  $\theta_x$  และ  $\theta_y$  ที่บิดไปรอบแกน  $x$  และ  $y$  สำหรับแต่ละจุดต่อนั้น ๆ จึงมีตัวไม่รู้ค่าทั้งหมด 12 ค่าต่อหนึ่งเอลิเมนต์เช่นเดียวกับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบตีเคคิ้วดังแสดงในรูปที่ 3.5

ดังที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น การประดิษฐ์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมตีสคริตเคอร์ซอฟฟ์แบบปรับปรุงนี้เริ่มจากเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบ 9 จุดต่อดังแสดงในรูปที่ 3.7 ซึ่งมีฟังก์ชันการประมาณภายในอยู่ในรูปของพิกัดธรรมชาติ  $\xi - \eta$  คือ [7]

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4} \xi \eta (\xi - 1)(\eta - 1) = \frac{1}{4} \xi^2 \eta^2 - \frac{1}{4} \xi^2 \eta - \frac{1}{4} \xi \eta^2 + \frac{1}{4} \xi \eta \\
 N_2 &= \frac{1}{4} \xi \eta (\xi + 1)(\eta - 1) = \frac{1}{4} \xi^2 \eta^2 - \frac{1}{4} \xi^2 \eta + \frac{1}{4} \xi \eta^2 - \frac{1}{4} \xi \eta \\
 N_3 &= \frac{1}{4} \xi \eta (\xi + 1)(\eta + 1) = \frac{1}{4} \xi^2 \eta^2 + \frac{1}{4} \xi^2 \eta + \frac{1}{4} \xi \eta^2 + \frac{1}{4} \xi \eta \\
 N_4 &= \frac{1}{4} \xi \eta (\xi - 1)(\eta + 1) = \frac{1}{4} \xi^2 \eta^2 + \frac{1}{4} \xi^2 \eta - \frac{1}{4} \xi \eta^2 - \frac{1}{4} \xi \eta \\
 N_5 &= -\frac{1}{2} \eta (\eta - 1)(\xi^2 - 1) = -\frac{1}{2} \xi^2 \eta^2 + \frac{1}{2} \xi^2 \eta + \frac{1}{2} \eta^2 - \frac{1}{2} \eta \\
 N_6 &= -\frac{1}{2} \xi (\xi + 1)(\eta^2 - 1) = -\frac{1}{2} \xi^2 \eta^2 - \frac{1}{2} \xi \eta^2 + \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{1}{2} \xi \\
 N_7 &= -\frac{1}{2} \eta (\eta + 1)(\xi^2 - 1) = -\frac{1}{2} \xi^2 \eta^2 - \frac{1}{2} \xi^2 \eta + \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{2} \eta \\
 N_8 &= -\frac{1}{2} \xi (\xi - 1)(\eta^2 - 1) = -\frac{1}{2} \xi^2 \eta^2 + \frac{1}{2} \xi \eta^2 + \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{1}{2} \xi \\
 N_9 &= (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) = \xi^2 \eta^2 - \xi^2 - \eta^2 + 1
 \end{aligned} \tag{3.115}$$



รูปที่ 3.7 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม 9 จุดต่อ

โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยสุด ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ดังสมการ (3.115) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้เป็น

$$N_i = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\xi\eta + a_6\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi\eta^2 + a_9\xi^2\eta^2 \quad (3.116)$$

$$\text{หรือ} \quad N_i = \sum_{j=1}^9 a_j \xi^{m_j} \eta^{n_j} \quad (3.117)$$

สมมติฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ใหม่โดยละเทอม  $\xi^2\eta^2$  (ซึ่งจะเห็นได้ว่าฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ใหม่นั้นอยู่ในรูปแบบเดียวกันกับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแปดจุดต่อ) จะได้ว่า

$$\bar{N}_i = b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi^2 + b_5\xi\eta + b_6\eta^2 + b_7\xi^2\eta + b_8\xi\eta^2 \quad (3.118)$$

$$\text{หรือ} \quad \bar{N}_i = \sum_{j=1}^8 b_j \xi^{m_j} \eta^{n_j} \quad (3.119)$$

ค่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า  $b_i$  สามารถหาให้อยู่ในรูปของสัมประสิทธิ์ที่ทราบค่า  $a_i$  โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดโดยกำหนดฟังก์ชันกำลังสอง

$$\Pi = \int_A (N_i - \bar{N}_i)^2 d\xi d\eta \quad (3.120)$$

และทำการหาค่าน้อยสุด

$$\frac{d\Pi}{db_j} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, 8 \quad (3.121)$$

ทำให้ได้ออกมา 8 สมการ จากนั้นแก้สมการทั้ง 8 เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า  $b_i$  และหาค่าฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ใหม่  $\bar{N}_i$  ได้เป็น

$$\bar{N}_1 = -\frac{1}{36} + \frac{1}{12}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi\eta + \frac{1}{12}\eta^2 - \frac{1}{4}\xi^2\eta - \frac{1}{4}\xi\eta^2$$

$$\begin{aligned}
\bar{N}_2 &= -\frac{1}{36} + \frac{1}{12}\xi^2 - \frac{1}{4}\xi\eta + \frac{1}{12}\eta^2 - \frac{1}{4}\xi^2\eta + \frac{1}{4}\xi\eta^2 \\
\bar{N}_3 &= -\frac{1}{36} + \frac{1}{12}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi\eta + \frac{1}{12}\eta^2 + \frac{1}{4}\xi^2\eta + \frac{1}{4}\xi\eta^2 \\
\bar{N}_4 &= -\frac{1}{36} + \frac{1}{12}\xi^2 - \frac{1}{4}\xi\eta + \frac{1}{12}\eta^2 + \frac{1}{4}\xi^2\eta - \frac{1}{4}\xi\eta^2 \\
\bar{N}_5 &= \frac{1}{18} - \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{6}\xi^2 + \frac{1}{3}\eta^2 + \frac{1}{2}\xi^2\eta \\
\bar{N}_6 &= \frac{1}{18} + \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{3}\xi^2 - \frac{1}{6}\eta^2 - \frac{1}{2}\xi\eta^2 \\
\bar{N}_7 &= \frac{1}{18} + \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{6}\xi^2 + \frac{1}{3}\eta^2 - \frac{1}{2}\xi^2\eta \\
\bar{N}_8 &= \frac{1}{18} - \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{3}\xi^2 - \frac{1}{6}\eta^2 + \frac{1}{2}\xi\eta^2 \\
\bar{N}_9 &= \frac{8}{9} - \frac{2}{3}\xi^2 - \frac{2}{3}\eta^2
\end{aligned} \tag{3.122}$$

ดังนั้นจะได้ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ใหม่  $\bar{N}_i$  ที่พจน์  $\xi^2\eta^2$  ถูกละทิ้งไป (รายละเอียดการหาฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ใหม่  $\bar{N}_i$  นี้แสดงไว้ในภาคผนวก ค)

ลำดับถัดมาเงื่อนไขหลาย ๆ ประการที่ใช้ในการประดิษฐ์เอลิเมนต์ชนิดนี้ซึ่งได้นำเสนอโดยละเอียดในเอกสารอ้างอิง [10] ประกอบด้วย

1.) สมมติลักษณะการกระจายของ  $\beta_x$  และ  $\beta_y$  เป็นแบบกำลังสามแบบไม่สมบูรณ์ตลอดเอลิเมนต์ ดังนี้

$$\beta_x = \sum_{i=1}^9 \bar{N}_i \beta_{x_i} \tag{3.123}$$

$$\beta_y = \sum_{i=1}^9 \bar{N}_i \beta_{y_i} \tag{3.124}$$

2.) จากสมมติฐานของเคอร์ชอฟฟ์ กำหนดให้ความเครียดเฉือนย่อยในแนวตั้งมีค่าเป็นศูนย์ที่จุดต่อมุม ทั้งสี่ จุดต่อตรงกลางเอลิเมนต์ และจุดต่อที่กึ่งกลางแต่ละด้านของเอลิเมนต์ นั่นคือ

(2.1) ที่จุดต่อที่มุมทั้งสี่และจุดต่อตรงกลางเอลิเมนต์

$$\begin{cases} \beta_{x_i} + w_{,x_i} \\ \beta_{y_i} + w_{,y_i} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, 4, 9 \tag{3.125}$$

(2.2) ที่จุดต่อที่กึ่งกลางแต่ละด้านของเอลิเมนต์

$$\beta_{s_k} + w_{,s_k} = 0 \quad k = 5, 6, 7, 8 \tag{3.126}$$

3.) กำหนดให้ลักษณะการเคลื่อนตัวในแนวตั้ง  $w$  แปรผันในรูปกำลังสามตลอดด้านทั้งสี่ของเอลิเมนต์

$$w_{,s_k} = \frac{-3}{2l_{ij}}(w_i - w_j) - \frac{1}{4}(w_{,s_i} - w_{,s_j}) \tag{3.127}$$



โดย  $k = 5, 6, 7, 8$  เป็นหมายเลขจุดต่อกึ่งกลางด้าน  $ij = 12, 23, 34, 41$  ตามลำดับ

$l_{ij}$  คือ ความยาวด้าน  $ij$

(รายละเอียดที่มาของสมการ (3.127) นี้แสดงไว้ในภาคผนวก ก)

4.) กำหนดให้ค่ามุมบิดที่ตั้งฉากกับด้านทั้งสี่ของเอลิเมนต์มีการกระจายแบบเชิงเส้น

$$\beta_{n_k} = \frac{1}{2}(\beta_{n_i} + \beta_{n_j}) = -\frac{1}{2}(w_{,n_i} + w_{,n_j}) \quad (3.128)$$

โดย  $k = 5, 6, 7, 8$  เป็นหมายเลขจุดต่อกึ่งกลางด้าน  $ij = 12, 23, 34, 41$  ตามลำดับ

โดยในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคคิวนั้นยังต้องอาศัยสมการความสัมพันธ์สมการ (3.50-3.60) ซึ่งแสดงไว้ในหัวข้อ 3.3 อีกด้วย โดยรายละเอียดที่มาของสมการความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ข

เริ่มต้นทำการจัดรูป  $\beta_x$  ให้อยู่ในรูปของตัวไม่ทราบค่า  $\{\delta\}$  เพื่อหาฟังก์ชันสัญญาณ  $\bar{H}_x$  ของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคคิวนั้นโดยเริ่มต้นจากสมการ (3.123) นั่นคือ

$$\begin{aligned} \beta_x = \sum_{i=1}^9 \bar{N}_i \beta_{xi} = \bar{N}_1 \beta_{x1} + \bar{N}_2 \beta_{x2} + \bar{N}_3 \beta_{x3} + \bar{N}_4 \beta_{x4} + \bar{N}_5 \beta_{x5} + \bar{N}_6 \beta_{x6} \\ + \bar{N}_7 \beta_{x7} + \bar{N}_8 \beta_{x8} + \bar{N}_9 \beta_{x9} \end{aligned} \quad (3.129)$$

จากสมมติฐานของเคอร์ซอพฟ์ในสมการ (3.125) จะได้ว่า

$$\beta_{x1} = -w_{,x1} = \theta_{y1} \quad (3.130)$$

$$\beta_{x2} = -w_{,x2} = \theta_{y2} \quad (3.131)$$

$$\beta_{x3} = -w_{,x3} = \theta_{y3} \quad (3.132)$$

$$\beta_{x4} = -w_{,x4} = \theta_{y4} \quad (3.133)$$

และจากความสัมพันธ์สมการ (3.50) จะได้ว่า

$$\beta_{x5} = \beta_{n5} \cos \gamma_{12} - \beta_{s5} \sin \gamma_{12} \quad (3.134)$$

$$\beta_{x6} = \beta_{n6} \cos \gamma_{23} - \beta_{s6} \sin \gamma_{23} \quad (3.135)$$

$$\beta_{x7} = \beta_{n7} \cos \gamma_{34} - \beta_{s7} \sin \gamma_{34} \quad (3.136)$$

$$\beta_{x8} = \beta_{n8} \cos \gamma_{41} - \beta_{s8} \sin \gamma_{41} \quad (3.137)$$

จากสมการ (3.130-3.137) แทนค่าในสมการ (3.129) จะได้

$$\begin{aligned} \beta_x = \bar{N}_1 \theta_{y1} + \bar{N}_2 \theta_{y2} + \bar{N}_3 \theta_{y3} + \bar{N}_4 \theta_{y4} + \bar{N}_5 (\beta_{n5} \cos \gamma_{12} - \beta_{s5} \sin \gamma_{12}) \\ + \bar{N}_6 (\beta_{n6} \cos \gamma_{23} - \beta_{s6} \sin \gamma_{23}) + \bar{N}_7 (\beta_{n7} \cos \gamma_{34} - \beta_{s7} \sin \gamma_{34}) \\ + \bar{N}_8 (\beta_{n8} \cos \gamma_{41} - \beta_{s8} \sin \gamma_{41}) + \bar{N}_9 \beta_{x9} \end{aligned} \quad (3.138)$$

จากสมมติฐานของเคอร์ซอพฟ์ในสมการ (3.126) จะได้ว่า

$$\beta_{s5} = -w_{,s5} \quad (3.139)$$

$$\beta_{s6} = -w_{,s6} \quad (3.140)$$

$$\beta_{s7} = -w_{s7} \quad (3.141)$$

$$\beta_{s8} = -w_{s8} \quad (3.142)$$

และจากสมมติฐานในสมการ (3.128) จะได้ว่า

$$\beta_{n5} = \frac{1}{2}(\beta_{n1} + \beta_{n2}) \quad (3.143)$$

$$\beta_{n6} = \frac{1}{2}(\beta_{n2} + \beta_{n3}) \quad (3.144)$$

$$\beta_{n7} = \frac{1}{2}(\beta_{n3} + \beta_{n4}) \quad (3.145)$$

$$\beta_{n8} = \frac{1}{2}(\beta_{n4} + \beta_{n1}) \quad (3.146)$$

และจากความสัมพันธ์สมการ (3.52) จะได้ว่า

$$\beta_{n5} = \frac{1}{2}(\beta_{n1} + \beta_{n2}) = \frac{1}{2}[\beta_{x1} \cos \gamma_{12} + \beta_{y1} \sin \gamma_{12} + \beta_{x2} \cos \gamma_{12} + \beta_{y2} \sin \gamma_{12}] \quad (3.147)$$

$$\beta_{n6} = \frac{1}{2}(\beta_{n2} + \beta_{n3}) = \frac{1}{2}[\beta_{x2} \cos \gamma_{23} + \beta_{y2} \sin \gamma_{23} + \beta_{x3} \cos \gamma_{23} + \beta_{y3} \sin \gamma_{23}] \quad (3.148)$$

$$\beta_{n7} = \frac{1}{2}(\beta_{n3} + \beta_{n4}) = \frac{1}{2}[\beta_{x3} \cos \gamma_{34} + \beta_{y3} \sin \gamma_{34} + \beta_{x4} \cos \gamma_{34} + \beta_{y4} \sin \gamma_{34}] \quad (3.149)$$

$$\beta_{n8} = \frac{1}{2}(\beta_{n4} + \beta_{n1}) = \frac{1}{2}[\beta_{x4} \cos \gamma_{41} + \beta_{y4} \sin \gamma_{41} + \beta_{x1} \cos \gamma_{41} + \beta_{y1} \sin \gamma_{41}] \quad (3.150)$$

จากสมการ (3.139-3.142) และสมการ (3.147-3.150) แทนค่าในสมการ (3.138) จะได้

$$\begin{aligned} \beta_x = & \bar{N}_1 \theta_{y1} + \bar{N}_2 \theta_{y2} + \bar{N}_3 \theta_{y3} + \bar{N}_4 \theta_{y4} \\ & + \frac{1}{2} \bar{N}_5 \cos \gamma_{12} [\beta_{x1} \cos \gamma_{12} + \beta_{y1} \sin \gamma_{12} + \beta_{x2} \cos \gamma_{12} + \beta_{y2} \sin \gamma_{12}] + \bar{N}_5 w_{s5} \sin \gamma_{12} \\ & + \frac{1}{2} \bar{N}_6 \cos \gamma_{23} [\beta_{x2} \cos \gamma_{23} + \beta_{y2} \sin \gamma_{23} + \beta_{x3} \cos \gamma_{23} + \beta_{y3} \sin \gamma_{23}] + \bar{N}_6 w_{s6} \sin \gamma_{23} \\ & + \frac{1}{2} \bar{N}_7 \cos \gamma_{34} [\beta_{x3} \cos \gamma_{34} + \beta_{y3} \sin \gamma_{34} + \beta_{x4} \cos \gamma_{34} + \beta_{y4} \sin \gamma_{34}] + \bar{N}_7 w_{s7} \sin \gamma_{34} \\ & + \frac{1}{2} \bar{N}_8 \cos \gamma_{41} [\beta_{x4} \cos \gamma_{41} + \beta_{y4} \sin \gamma_{41} + \beta_{x1} \cos \gamma_{41} + \beta_{y1} \sin \gamma_{41}] + \bar{N}_8 w_{s8} \sin \gamma_{41} \\ & + \bar{N}_9 \beta_{x9} \end{aligned} \quad (3.151)$$

จากสมมติฐานของเคอร์ชอฟฟ์ในสมการ (3.125) จะได้ว่า

$$\beta_{x1} = -w_{x1} = \theta_{y1} \quad (3.152)$$

$$\beta_{x2} = -w_{x2} = \theta_{y2} \quad (3.153)$$

$$\beta_{x3} = -w_{x3} = \theta_{y3} \quad (3.154)$$

$$\beta_{x4} = -w_{x4} = \theta_{y4} \quad (3.155)$$

$$\beta_{y1} = -w_{y1} = -\theta_{x1} \quad (3.156)$$

$$\beta_{y_2} = -w_{,y_2} = -\theta_{x_2} \quad (3.157)$$

$$\beta_{y_3} = -w_{,y_3} = -\theta_{x_3} \quad (3.158)$$

$$\beta_{y_4} = -w_{,y_4} = -\theta_{x_4} \quad (3.159)$$

จากสมการ (3.152-3.159) แทนค่าในสมการ (3.151) จะได้

$$\begin{aligned} \beta_x = & \bar{N}_1\theta_{y_1} + \bar{N}_2\theta_{y_2} + \bar{N}_3\theta_{y_3} + \bar{N}_4\theta_{y_4} \\ & + \frac{1}{2}\bar{N}_5 \cos \gamma_{12} [\cos \gamma_{12}\theta_{y_1} - \sin \gamma_{12}\theta_{x_1} + \cos \gamma_{12}\theta_{y_2} - \sin \gamma_{12}\theta_{x_2}] + \bar{N}_5 w_{,s_5} \sin \gamma_{12} \\ & + \frac{1}{2}\bar{N}_6 \cos \gamma_{23} [\cos \gamma_{23}\theta_{y_2} - \sin \gamma_{23}\theta_{x_2} + \cos \gamma_{23}\theta_{y_3} - \sin \gamma_{23}\theta_{x_3}] + \bar{N}_6 w_{,s_6} \sin \gamma_{23} \\ & + \frac{1}{2}\bar{N}_7 \cos \gamma_{34} [\cos \gamma_{34}\theta_{y_3} - \sin \gamma_{34}\theta_{x_3} + \cos \gamma_{34}\theta_{y_4} - \sin \gamma_{34}\theta_{x_4}] + \bar{N}_7 w_{,s_7} \sin \gamma_{34} \\ & + \frac{1}{2}\bar{N}_8 \cos \gamma_{41} [\cos \gamma_{41}\theta_{y_4} - \sin \gamma_{41}\theta_{x_4} + \cos \gamma_{41}\theta_{y_1} - \sin \gamma_{41}\theta_{x_1}] + \bar{N}_8 w_{,s_8} \sin \gamma_{41} \\ & + \bar{N}_9 \beta_{x_9} \end{aligned} \quad (3.160)$$

จากสมมติฐานในสมการ (3.127) จะได้ว่า

$$w_{,s_5} = \frac{-3}{2l_{12}}(w_1 - w_2) - \frac{1}{4}(w_{,s_1} + w_{,s_2}) \quad (3.161)$$

$$w_{,s_6} = \frac{-3}{2l_{23}}(w_2 - w_3) - \frac{1}{4}(w_{,s_2} + w_{,s_3}) \quad (3.162)$$

$$w_{,s_7} = \frac{-3}{2l_{34}}(w_3 - w_4) - \frac{1}{4}(w_{,s_3} + w_{,s_4}) \quad (3.163)$$

$$w_{,s_8} = \frac{-3}{2l_{41}}(w_4 - w_1) - \frac{1}{4}(w_{,s_4} + w_{,s_1}) \quad (3.164)$$

และจากความสัมพันธ์สมการ (3.55) จะได้ว่า

$$w_{,s_5} = \frac{-3}{2l_{12}}(w_1 - w_2) - \frac{1}{4}[\cos \gamma_{12}\theta_{x_1} + \sin \gamma_{12}\theta_{y_1} + \cos \gamma_{12}\theta_{x_2} + \sin \gamma_{12}\theta_{y_2}] \quad (3.165)$$

$$w_{,s_6} = \frac{-3}{2l_{23}}(w_2 - w_3) - \frac{1}{4}[\cos \gamma_{23}\theta_{x_2} + \sin \gamma_{23}\theta_{y_2} + \cos \gamma_{23}\theta_{x_3} + \sin \gamma_{23}\theta_{y_3}] \quad (3.166)$$

$$w_{,s_7} = \frac{-3}{2l_{34}}(w_3 - w_4) - \frac{1}{4}[\cos \gamma_{34}\theta_{x_3} + \sin \gamma_{34}\theta_{y_3} + \cos \gamma_{34}\theta_{x_4} + \sin \gamma_{34}\theta_{y_4}] \quad (3.167)$$

$$w_{,s_8} = \frac{-3}{2l_{41}}(w_4 - w_1) - \frac{1}{4}[\cos \gamma_{41}\theta_{x_4} + \sin \gamma_{41}\theta_{y_4} + \cos \gamma_{41}\theta_{x_1} + \sin \gamma_{41}\theta_{y_1}] \quad (3.168)$$

จากสมการ (3.165-3.168) แทนค่าในสมการ (3.160) จะได้

$$\begin{aligned} \beta_x = & \bar{N}_1\theta_{y_1} + \bar{N}_2\theta_{y_2} + \bar{N}_3\theta_{y_3} + \bar{N}_4\theta_{y_4} \\ & + \frac{1}{2}\bar{N}_5 \cos \gamma_{12} [\cos \gamma_{12}\theta_{y_1} - \sin \gamma_{12}\theta_{x_1} + \cos \gamma_{12}\theta_{y_2} - \sin \gamma_{12}\theta_{x_2}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\bar{N}_5 \sin \gamma_{12} \left[ \frac{-3}{2l_{12}} (w_1 - w_2) - \frac{1}{4} (\cos \gamma_{12} \theta_{x1} + \sin \gamma_{12} \theta_{y1} + \cos \gamma_{12} \theta_{x2} + \sin \gamma_{12} \theta_{y2}) \right] \\
& + \frac{1}{2} \bar{N}_6 \cos \gamma_{23} [\cos \gamma_{23} \theta_{y2} - \sin \gamma_{23} \theta_{x2} + \cos \gamma_{23} \theta_{y3} - \sin \gamma_{23} \theta_{x3}] \\
& + \bar{N}_6 \sin \gamma_{23} \left[ \frac{-3}{2l_{23}} (w_2 - w_3) - \frac{1}{4} (\cos \gamma_{23} \theta_{x2} + \sin \gamma_{23} \theta_{y2} + \cos \gamma_{23} \theta_{x3} + \sin \gamma_{23} \theta_{y3}) \right] \\
& + \frac{1}{2} \bar{N}_7 \cos \gamma_{34} [\cos \gamma_{34} \theta_{y3} - \sin \gamma_{34} \theta_{x3} + \cos \gamma_{34} \theta_{y4} - \sin \gamma_{34} \theta_{x4}] \\
& + \bar{N}_7 \sin \gamma_{34} \left[ \frac{-3}{2l_{34}} (w_3 - w_4) - \frac{1}{4} (\cos \gamma_{34} \theta_{x3} + \sin \gamma_{34} \theta_{y3} + \cos \gamma_{34} \theta_{x4} + \sin \gamma_{34} \theta_{y4}) \right] \\
& + \frac{1}{2} \bar{N}_8 \cos \gamma_{41} [\cos \gamma_{41} \theta_{y4} - \sin \gamma_{41} \theta_{x4} + \cos \gamma_{41} \theta_{y1} - \sin \gamma_{41} \theta_{x1}] \\
& + \bar{N}_8 \sin \gamma_{41} \left[ \frac{-3}{2l_{41}} (w_4 - w_1) - \frac{1}{4} (\cos \gamma_{41} \theta_{x4} + \sin \gamma_{41} \theta_{y4} + \cos \gamma_{41} \theta_{x1} + \sin \gamma_{41} \theta_{y1}) \right] \\
& + \bar{N}_9 \beta_{x9}
\end{aligned} \tag{3.169}$$

จากสมมติฐานของเคอร์ซอพฟ์ในสมการ (3.125) จะได้ว่า

$$\beta_{x9} = -w_{x9} \tag{3.170}$$

โดยที่  $w_{x9}$  หรือ  $\frac{\partial w}{\partial x}$  ที่จุดต่อ 9 นั้นหาได้จากการสมมติลักษณะการกระจายตัวของค่าการเสียรูปในแนวตั้ง  $w$  อยู่ในรูปของกำลังสามคู่ (bicubic) ดังนี้

$$w = a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta + a_4 \xi^2 + a_5 \xi \eta + a_6 \eta^2 + a_7 \xi^3 + a_8 \xi^2 \eta + a_9 \xi \eta^2 + a_{10} \eta^3 + a_{11} \xi^3 \eta + a_{12} \xi \eta^3 \tag{3.171}$$

โดยค่าคงที่  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{12}$  สามารถแสดงอยู่ในรูปของตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อได้ และหาค่า  $\frac{\partial w}{\partial x}$  ที่จุดต่อ 9 ได้โดยแทนค่า  $\xi = 0$  และ  $\eta = 0$  ซึ่งรายละเอียดแสดงไว้ในภาคผนวก ง โดยจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\beta_{x9} = -w_{x9} & = \left( \frac{3}{2\Delta} y_{42} \right) w_1 + \left( \frac{1}{4\Delta} y_{42} (y_{21} + y_{41}) \right) \theta_{x1} + \left( \frac{1}{4\Delta} y_{24} (x_{21} + x_{41}) \right) \theta_{y1} \\
& + \left( \frac{3}{2\Delta} y_{13} \right) w_2 + \left( \frac{1}{4\Delta} y_{13} (y_{12} + y_{32}) \right) \theta_{x2} + \left( \frac{1}{4\Delta} y_{31} (x_{12} + x_{32}) \right) \theta_{y2} \\
& + \left( \frac{3}{2\Delta} y_{24} \right) w_3 + \left( \frac{1}{4\Delta} y_{24} (y_{23} + y_{43}) \right) \theta_{x3} + \left( \frac{1}{4\Delta} y_{42} (x_{23} + x_{43}) \right) \theta_{y3} \\
& + \left( \frac{3}{2\Delta} y_{31} \right) w_4 + \left( \frac{1}{4\Delta} y_{31} (y_{14} + y_{34}) \right) \theta_{x4} + \left( \frac{1}{4\Delta} y_{13} (x_{14} + x_{34}) \right) \theta_{y4}
\end{aligned} \tag{3.172}$$

$$\text{โดยที่ } \Delta = x_1 y_{24} + x_2 y_{31} + x_3 y_{42} + x_4 y_{13} \tag{3.173}$$

จากนั้นแทนค่า  $\beta_{x9} = -w_{x9}$  ในสมการ (3.169) จะได้

$$\begin{aligned}
\beta_x = & \bar{N}_1 \theta_{y1} + \bar{N}_2 \theta_{y2} + \bar{N}_3 \theta_{y3} + \bar{N}_4 \theta_{y4} \\
& + \frac{1}{2} \bar{N}_5 \cos \gamma_{12} \left[ \cos \gamma_{12} \theta_{y1} - \sin \gamma_{12} \theta_{x1} + \cos \gamma_{12} \theta_{y2} - \sin \gamma_{12} \theta_{x2} \right] \\
& + \bar{N}_5 \sin \gamma_{12} \left[ \frac{-3}{2l_{12}} (w_1 - w_2) - \frac{1}{4} (\cos \gamma_{12} \theta_{x1} + \sin \gamma_{12} \theta_{y1} + \cos \gamma_{12} \theta_{x2} + \sin \gamma_{12} \theta_{y2}) \right] \\
& + \frac{1}{2} \bar{N}_6 \cos \gamma_{23} \left[ \cos \gamma_{23} \theta_{y2} - \sin \gamma_{23} \theta_{x2} + \cos \gamma_{23} \theta_{y3} - \sin \gamma_{23} \theta_{x3} \right] \\
& + \bar{N}_6 \sin \gamma_{23} \left[ \frac{-3}{2l_{23}} (w_2 - w_3) - \frac{1}{4} (\cos \gamma_{23} \theta_{x2} + \sin \gamma_{23} \theta_{y2} + \cos \gamma_{23} \theta_{x3} + \sin \gamma_{23} \theta_{y3}) \right] \\
& + \frac{1}{2} \bar{N}_7 \cos \gamma_{34} \left[ \cos \gamma_{34} \theta_{y3} - \sin \gamma_{34} \theta_{x3} + \cos \gamma_{34} \theta_{y4} - \sin \gamma_{34} \theta_{x4} \right] \\
& + \bar{N}_7 \sin \gamma_{34} \left[ \frac{-3}{2l_{34}} (w_3 - w_4) - \frac{1}{4} (\cos \gamma_{34} \theta_{x3} + \sin \gamma_{34} \theta_{y3} + \cos \gamma_{34} \theta_{x4} + \sin \gamma_{34} \theta_{y4}) \right] \\
& + \frac{1}{2} \bar{N}_8 \cos \gamma_{41} \left[ \cos \gamma_{41} \theta_{y4} - \sin \gamma_{41} \theta_{x4} + \cos \gamma_{41} \theta_{y1} - \sin \gamma_{41} \theta_{x1} \right] \\
& + \bar{N}_8 \sin \gamma_{41} \left[ \frac{-3}{2l_{41}} (w_4 - w_1) - \frac{1}{4} (\cos \gamma_{41} \theta_{x4} + \sin \gamma_{41} \theta_{y4} + \cos \gamma_{41} \theta_{x1} + \sin \gamma_{41} \theta_{y1}) \right] \\
& + \bar{N}_9 \left[ \left( \frac{3}{2\Delta} y_{42} \right) w_1 + \left( \frac{1}{4\Delta} y_{42} (y_{21} + y_{41}) \right) \theta_{x1} + \left( \frac{1}{4\Delta} y_{24} (x_{21} + x_{41}) \right) \theta_{y1} \right. \\
& \quad + \left( \frac{3}{2\Delta} y_{13} \right) w_2 + \left( \frac{1}{4\Delta} y_{13} (y_{12} + y_{32}) \right) \theta_{x2} + \left( \frac{1}{4\Delta} y_{31} (x_{12} + x_{32}) \right) \theta_{y2} \\
& \quad + \left( \frac{3}{2\Delta} y_{24} \right) w_3 + \left( \frac{1}{4\Delta} y_{24} (y_{23} + y_{43}) \right) \theta_{x3} + \left( \frac{1}{4\Delta} y_{42} (x_{23} + x_{43}) \right) \theta_{y3} \\
& \quad \left. + \left( \frac{3}{2\Delta} y_{31} \right) w_4 + \left( \frac{1}{4\Delta} y_{31} (y_{14} + y_{34}) \right) \theta_{x4} + \left( \frac{1}{4\Delta} y_{13} (x_{14} + x_{34}) \right) \theta_{y4} \right] \quad (3.174)
\end{aligned}$$

จากนั้นทำการจัดรูป  $\beta_x$  ให้อยู่ในรูปของความสัมพันธ์ตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อ  $\{\delta\}$  ดังสมการ

$$\beta_x = [\bar{H}_x(\xi, \eta)] \{\delta\} \quad (3.175)$$

โดยที่

$$[\bar{H}_x(\xi, \eta)] = [\bar{H}_{x1} \quad \bar{H}_{x2} \quad \bar{H}_{x3} \quad \bar{H}_{x4} \quad \dots \quad \bar{H}_{x9} \quad \bar{H}_{x10} \quad \bar{H}_{x11} \quad \bar{H}_{x12}] \quad (3.176)$$

และ

$$\begin{aligned}
\bar{H}_{x1} &= \frac{p_1}{4} \bar{N}_5 - \frac{p_4}{4} \bar{N}_8 + \frac{3}{2\Delta} y_{42} \bar{N}_9 \\
\bar{H}_{x2} &= -\frac{q_1}{4} \bar{N}_5 - \frac{q_4}{4} \bar{N}_8 + \frac{y_{42}}{4\Delta} (y_{21} + y_{41}) \bar{N}_9 \\
\bar{H}_{x3} &= \bar{N}_1 - \frac{(s_1 - 2)}{4} \bar{N}_5 - \frac{(s_4 - 2)}{4} \bar{N}_8 - \frac{y_{42}}{4\Delta} (x_{21} + x_{41}) \bar{N}_9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{H}_{x_4} &= -\frac{p_1}{4}\bar{N}_5 + \frac{p_2}{4}\bar{N}_6 + \frac{3}{2\Delta}y_{13}\bar{N}_9 \\
\bar{H}_{x_5} &= -\frac{q_1}{4}\bar{N}_5 - \frac{q_2}{4}\bar{N}_6 + \frac{y_{13}}{4\Delta}(y_{12} + y_{32})\bar{N}_9 \\
\bar{H}_{x_6} &= \bar{N}_2 - \frac{(s_1-2)}{4}\bar{N}_5 - \frac{(s_2-2)}{4}\bar{N}_6 - \frac{y_{13}}{4\Delta}(x_{12} + x_{32})\bar{N}_9 \\
\bar{H}_{x_7} &= -\frac{p_2}{4}\bar{N}_6 + \frac{p_3}{4}\bar{N}_7 + \frac{3}{2\Delta}y_{24}\bar{N}_9 \\
\bar{H}_{x_8} &= -\frac{q_2}{4}\bar{N}_6 - \frac{q_3}{4}\bar{N}_7 + \frac{y_{24}}{4\Delta}(y_{23} + y_{43})\bar{N}_9 \\
\bar{H}_{x_9} &= \bar{N}_3 - \frac{(s_2-2)}{4}\bar{N}_6 - \frac{(s_3-2)}{4}\bar{N}_7 - \frac{y_{24}}{4\Delta}(x_{23} + x_{43})\bar{N}_9 \\
\bar{H}_{x_{10}} &= -\frac{p_3}{4}\bar{N}_7 + \frac{p_4}{4}\bar{N}_8 + \frac{3}{2\Delta}y_{31}\bar{N}_9 \\
\bar{H}_{x_{11}} &= -\frac{q_3}{4}\bar{N}_7 - \frac{q_4}{4}\bar{N}_8 + \frac{y_{31}}{4\Delta}(y_{14} + y_{34})\bar{N}_9 \\
\bar{H}_{x_{12}} &= \bar{N}_4 - \frac{(s_3-2)}{4}\bar{N}_7 - \frac{(s_4-2)}{4}\bar{N}_8 - \frac{y_{31}}{4\Delta}(x_{14} + x_{34})\bar{N}_9
\end{aligned} \tag{3.177}$$

$$\text{โดยที่ } p_k = -6\frac{x_{ij}}{l_{ij}^2} \tag{3.178}$$

$$q_k = -3\frac{x_{ij}y_{ij}}{l_{ij}^2} \tag{3.179}$$

$$s_k = 3\frac{x_{ij}^2}{l_{ij}^2} \tag{3.180}$$

โดย  $k = 1, 2, 3, 4$  และ  $ij = 12, 23, 34, 41$  ตามลำดับ

ทำตามขั้นตอนที่ผ่านมาในทำนองเดียวกันจะได้  $\beta_y$  ที่อยู่ในรูปของความสัมพันธ์กับตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ  $\{\delta\}$  ดังสมการ

$$\beta_y = [\bar{H}_y(\xi, \eta)]\{\delta\} \tag{3.181}$$

โดยที่

$$[\bar{H}_y(\xi, \eta)] = [\bar{H}_{y_1} \quad \bar{H}_{y_2} \quad \bar{H}_{y_3} \quad \bar{H}_{y_4} \quad \dots \quad \bar{H}_{y_9} \quad \bar{H}_{y_{10}} \quad \bar{H}_{y_{11}} \quad \bar{H}_{y_{12}}] \tag{3.182}$$

และ

$$\begin{aligned}
\bar{H}_{y_1} &= -\frac{t_1}{4}\bar{N}_5 + \frac{t_4}{4}\bar{N}_8 + \frac{3}{2\Delta}x_{24}\bar{N}_9 \\
\bar{H}_{y_2} &= -\bar{N}_1 + \frac{(r_1-2)}{4}\bar{N}_5 + \frac{(r_4-2)}{4}\bar{N}_8 + \frac{x_{24}}{4\Delta}(y_{21} + y_{41})\bar{N}_9 \\
\bar{H}_{y_3} &= \frac{q_1}{4}\bar{N}_5 + \frac{q_4}{4}\bar{N}_8 - \frac{x_{24}}{4\Delta}(x_{21} + x_{41})\bar{N}_9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{H}_{y_4} &= \frac{t_1}{4} \bar{N}_5 - \frac{t_2}{4} \bar{N}_6 + \frac{3}{2\Delta} x_{31} \bar{N}_9 \\
\bar{H}_{y_5} &= -\bar{N}_2 + \frac{(r_1 - 2)}{4} \bar{N}_5 + \frac{(r_2 - 2)}{4} \bar{N}_6 + \frac{x_{31}}{4\Delta} (y_{12} + y_{32}) \bar{N}_9 \\
\bar{H}_{y_6} &= \frac{q_1}{4} \bar{N}_5 + \frac{q_2}{4} \bar{N}_6 - \frac{x_{31}}{4\Delta} (x_{12} + x_{32}) \bar{N}_9 \\
\bar{H}_{y_7} &= \frac{t_2}{4} \bar{N}_6 - \frac{t_3}{4} \bar{N}_7 + \frac{3}{2\Delta} x_{42} \bar{N}_9 \\
\bar{H}_{y_8} &= -\bar{N}_3 + \frac{(r_2 - 2)}{4} \bar{N}_6 + \frac{(r_3 - 2)}{4} \bar{N}_7 + \frac{x_{42}}{4\Delta} (y_{23} + y_{43}) \bar{N}_9 \\
\bar{H}_{y_9} &= \frac{q_2}{4} \bar{N}_6 + \frac{q_3}{4} \bar{N}_7 - \frac{x_{42}}{4\Delta} (x_{23} + x_{43}) \bar{N}_9 \\
\bar{H}_{y_{10}} &= \frac{t_3}{4} \bar{N}_7 - \frac{t_4}{4} \bar{N}_8 + \frac{3}{2\Delta} x_{13} \bar{N}_9 \\
\bar{H}_{y_{11}} &= -\bar{N}_4 + \frac{(r_3 - 2)}{4} \bar{N}_7 + \frac{(r_4 - 2)}{4} \bar{N}_8 + \frac{x_{13}}{4\Delta} (y_{14} + y_{34}) \bar{N}_9 \\
\bar{H}_{y_{12}} &= \frac{q_3}{4} \bar{N}_7 + \frac{q_4}{4} \bar{N}_8 - \frac{x_{13}}{4\Delta} (x_{14} + x_{34}) \bar{N}_9
\end{aligned} \tag{3.183}$$

$$\text{โดยที่ } q_k = -3 \frac{x_{ij} y_{ij}}{l_{ij}^2} \tag{3.184}$$

$$r_k = 3 \frac{y_{ij}^2}{l_{ij}^2} \tag{3.185}$$

$$t_k = 6 \frac{y_{ij}}{l_{ij}^2} \tag{3.186}$$

โดยที่  $k = 1, 2, 3, 4$  และ  $ij = 12, 23, 34, 41$  ตามลำดับ

จากสมการ (3.177), (3.183) จะเห็นได้ว่า  $[\bar{H}_x]$  และ  $[\bar{H}_y]$  อยู่ในรูปฟังก์ชันธรรมชาติ โดยใช้กฎลูกโซ่ (chain rule) จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{H}_x}{\partial \xi} &= \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\
\frac{\partial \bar{H}_x}{\partial \eta} &= \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}
\end{aligned} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{3.187}$$

โดยที่

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \tag{3.188}$$

เมทริกซ์  $[J]$  คือเมทริกซ์จาโคเบียน (Jacobian matrix)

ทำการแปลงให้อยู่ในรูปพิกัด  $x$ - $y$  จะได้

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.189)$$

หรือ

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11}^* & j_{12}^* \\ j_{21}^* & j_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_{11}^* \left[ \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial \xi} \right] + j_{12}^* \left[ \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial \eta} \right] \\ j_{21}^* \left[ \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial \xi} \right] + j_{22}^* \left[ \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial \eta} \right] \end{Bmatrix} \quad (3.190)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{H}_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{H}_y}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_{11}^* \left[ \frac{\partial \bar{H}_y}{\partial \xi} \right] + j_{12}^* \left[ \frac{\partial \bar{H}_y}{\partial \eta} \right] \\ j_{21}^* \left[ \frac{\partial \bar{H}_y}{\partial \xi} \right] + j_{22}^* \left[ \frac{\partial \bar{H}_y}{\partial \eta} \right] \end{Bmatrix} \quad (3.191)$$

โดยที่  $j_{11}^* = \frac{J_{22}}{|J|}$ ,  $j_{12}^* = \frac{-J_{12}}{|J|}$ ,  $j_{21}^* = \frac{-J_{21}}{|J|}$ ,  $j_{22}^* = \frac{J_{11}}{|J|}$  (3.192)

$$J_{11} = \frac{1}{4} [x_{21} + x_{34} + \eta(x_{12} + x_{34})]$$

$$J_{12} = \frac{1}{4} [y_{21} + y_{34} + \eta(y_{12} + y_{34})] \quad (3.193)$$

$$J_{21} = \frac{1}{4} [x_{32} + x_{41} + \xi(x_{12} + x_{34})]$$

$$J_{22} = \frac{1}{4} [y_{32} + y_{41} + \xi(y_{12} + y_{34})]$$

$$|J| = \frac{1}{8} (x_{31}y_{42} - x_{42}y_{31}) + \frac{\xi}{8} (x_{21}y_{34} - x_{34}y_{21}) + \frac{\eta}{8} (x_{32}y_{41} - x_{41}y_{32}) \quad (3.194)$$

ดังนั้นเมทริกซ์  $[B]$  ในสมการ (3.33) จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$[B]_{(12 \times 3)} = \begin{Bmatrix} \left[ \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial x} \right] \\ \left[ \frac{\partial \bar{H}_y}{\partial y} \right] \\ \left[ \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial y} \right] + \left[ \frac{\partial \bar{H}_y}{\partial x} \right] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_{11}^* \left[ \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial \xi} \right] + j_{12}^* \left[ \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial \eta} \right] \\ j_{21}^* \left[ \frac{\partial \bar{H}_y}{\partial \xi} \right] + j_{22}^* \left[ \frac{\partial \bar{H}_y}{\partial \eta} \right] \\ \left( j_{21}^* \left[ \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial \xi} \right] + j_{22}^* \left[ \frac{\partial \bar{H}_x}{\partial \eta} \right] \right) + \left( j_{11}^* \left[ \frac{\partial \bar{H}_y}{\partial \xi} \right] + j_{12}^* \left[ \frac{\partial \bar{H}_y}{\partial \eta} \right] \right) \end{Bmatrix} \quad (3.195)$$



ดังนั้นเมทริกซ์ของความแข็งเกร็ง  $[K]$  ในสมการ (3.36) สามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปพิกัดธรรมชาติ เป็น

$$[K] = \int_A [B]^T [D][B] dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi, \eta)]^T [D][B(\xi, \eta)] |J| d\xi d\eta \quad (3.196)$$

โดยที่  $\frac{\partial \bar{H}_{xi}}{\partial \xi}, \frac{\partial \bar{H}_{yi}}{\partial \xi}$  หาได้จากการเปลี่ยน  $\bar{N}_i$  เป็น  $\frac{\partial \bar{N}_i}{\partial \xi}$  ใน  $\bar{H}_{xi}$  และ  $\bar{H}_{yi}$

$\frac{\partial \bar{H}_{xi}}{\partial \eta}, \frac{\partial \bar{H}_{yi}}{\partial \eta}$  หาได้จากการเปลี่ยน  $\bar{N}_i$  เป็น  $\frac{\partial \bar{N}_i}{\partial \eta}$  ใน  $\bar{H}_{xi}$  และ  $\bar{H}_{yi}$

โดยใช้วิธีการอินทิเกรตเชิงตัวเลขด้วยการประยุกต์สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ (Gauss-Legendre formulas) โดยใช้จำนวนจุดเกาส์ 2 จุดจะได้เมทริกซ์  $[K]$  ในรูปแบบดังนี้

$$[K]_{(12 \times 12)} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_i w_j [B(\xi_i, \eta_j)]^T_{(12 \times 3)} [D]_{(3 \times 3)} [B(\xi_i, \eta_j)]_{(3 \times 12)} |J(\xi_i, \eta_j)| \quad (3.197)$$

ในส่วนของโหลดเวกเตอร์เนื่องจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปตลอดความหนา  $\{F_T\}$  นั้น คำนวณได้จากสมการ (3.42) นั่นคือ

$$\{F_T\} = M_T \int_A [B]^T dx dy \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.198)$$

โดยสามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปพิกัดธรรมชาติได้เป็น

$$\{F_T\} = M_T \int_A [B(\xi, \eta)]^T |J| d\xi d\eta \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.199)$$

โดยการใช่วิธีการอินทิเกรตเชิงตัวเลขด้วยการประยุกต์สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ จะได้โหลดเวกเตอร์เนื่องจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปตลอดความหนา  $\{F_T\}$  คือ

$$\{F_T\} = M_T \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 w_i w_j [B(\xi_i, \eta_j)]^T |J(\xi_i, \eta_j)| \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.200)$$

งานวิจัยนี้ได้ทำการอินทิเกรตโดยตรงโดยใช้โปรแกรมแมทมาทิกา (Mathematica) เข้าช่วย เพื่อให้ได้โหลดเวกเตอร์เนื่องจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปตลอดความหนา  $\{F_T\}$  ที่อยู่ในรูปแบบปิด (closed form) โดยจากสมการ (3.199) ทำการจัดรูปใหม่จะได้

$$\{F_T\} = M_T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} B_{1,1}(\xi, \eta) + B_{2,1}(\xi, \eta) \\ B_{1,2}(\xi, \eta) + B_{2,2}(\xi, \eta) \\ B_{1,3}(\xi, \eta) + B_{2,3}(\xi, \eta) \\ \vdots \\ B_{1,12}(\xi, \eta) + B_{2,12}(\xi, \eta) \end{Bmatrix} |J| d\xi d\eta \quad (3.201)$$

ซึ่งจะได้แต่ละพจน์ที่จะต้องอินทิเกรตแต่ละแถวของโหนดเวกเตอร์นั้นอยู่ในรูปทั่วไป คือ

$$\begin{aligned} [B_{1,i}(\xi, \eta) + B_{2,i}(\xi, \eta)] |J| &= a_0 + a_1 \xi + a_2 \eta + a_3 \xi^2 + a_4 \xi \eta + a_5 \eta^2 \\ &\quad + a_6 \xi^3 + a_7 \xi \eta^2 + a_8 \xi^2 \eta + a_9 \eta^3 \\ &\quad + a_{10} \xi \eta^3 + a_{11} \xi^2 \eta^2 + a_{12} \xi^3 \eta \end{aligned} \quad (3.202)$$

จากนั้นทำการอินทิเกรตโดยตรงโดยใช้โปรแกรมแมทมาทิก้าและจัดรูปใหม่จะได้โหนดเวกเตอร์เนื่องจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปตลอดความหนา  $\{F_T\}$  ที่อยู่ในรูปแบบปิด นั่นคือ

$$\{F_T\} = \frac{1}{6} M_T [F_{T1} \quad F_{T2} \quad F_{T3} \quad \dots \quad F_{T12}]^T \quad (3.203)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} F_{T1} &= t_1 x_{21} + t_4 x_{41} + p_1 y_{21} + p_4 y_{41} \\ F_{T2} &= 3x_{24} + r_1 x_{12} + r_4 x_{41} + q_1 y_{12} + q_4 y_{41} \\ F_{T3} &= 3y_{24} + q_1 x_{12} + q_4 x_{41} + s_1 y_{12} + s_4 y_{41} \\ F_{T4} &= t_2 x_{32} + t_1 x_{12} + p_2 y_{32} + p_1 y_{12} \\ F_{T5} &= 3x_{31} + r_2 x_{23} + r_1 x_{12} + q_2 y_{23} + q_1 y_{12} \\ F_{T6} &= 3y_{31} + q_2 x_{23} + q_1 x_{12} + s_2 y_{23} + s_1 y_{12} \\ F_{T7} &= t_3 x_{43} + t_2 x_{23} + p_3 y_{43} + p_2 y_{23} \\ F_{T8} &= 3x_{42} + r_3 x_{34} + r_2 x_{23} + q_3 y_{34} + q_2 y_{23} \\ F_{T9} &= 3y_{42} + q_3 x_{34} + q_2 x_{23} + s_3 y_{34} + s_2 y_{23} \\ F_{T10} &= t_4 x_{14} + t_3 x_{34} + p_4 y_{14} + p_3 y_{34} \\ F_{T11} &= 3x_{13} + r_4 x_{41} + r_3 x_{34} + q_4 y_{41} + q_3 y_{34} \\ F_{T12} &= 3y_{13} + q_4 x_{41} + q_3 x_{34} + s_4 y_{41} + s_3 y_{34} \end{aligned} \quad (3.204)$$

โหนดเวกเตอร์เนื่องจากแรงภายนอก  $\{F_p\}$  หาได้จากสมการ (3.38) นั่นคือ

$$\{F_p\} = \int_A p \{N'\} dx dy \quad (3.205)$$

แต่เนื่องจากฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์  $\{N'\}$  ของค่าการเสียรูปในแนวแกนดิ่ง  $w$  ของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอตึเคคิวนั้นมีการสมมุติการกระจายตัวเฉพาะที่ขอบของเอลิเมนต์เท่านั้น ในการหาโหนดเวกเตอร์เนื่องจากแรงภายนอกเราจึงหาฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์  $\{N'\}$  โดย

เริ่มจากสมมุติลักษณะการกระจายของ  $w$  เป็นแบบกำลังสามคู่ตั้งในสมการ (3.171) โดยค่าคงที่  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{12}$  สามารถแสดงอยู่ในรูปของตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อได้ ดังนั้นเราจะสามารถแสดงค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้ง  $w$  ที่อยู่ในรูปของตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อได้ตั้งสมการ (รายละเอียดขั้นตอนที่มาแสดงไว้ในภาคผนวก ง)

$$w = [N']\{\delta\} \quad (3.206)$$

$$\begin{aligned} \text{โดยที่ } N'_1 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(2-\xi^2-\eta^2-\xi-\eta) \\ N'_2 &= \frac{1}{16}[y_{21}(1-\xi)(1-\eta)(1-\xi^2)+y_{41}(1-\xi)(1-\eta)(1-\eta^2)] \\ N'_3 &= -\frac{1}{16}[x_{21}(1-\xi)(1-\eta)(1-\xi^2)+x_{41}(1-\xi)(1-\eta)(1-\eta^2)] \\ N'_4 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(2-\xi^2-\eta^2+\xi-\eta) \\ N'_5 &= \frac{1}{16}[-y_{21}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi^2)+y_{32}(1+\xi)(1-\eta)(1-\eta^2)] \\ N'_6 &= -\frac{1}{16}[-x_{21}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi^2)+x_{32}(1+\xi)(1-\eta)(1-\eta^2)] \\ N'_7 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(2-\xi^2-\eta^2+\xi+\eta) \\ N'_8 &= -\frac{1}{16}[y_{34}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi^2)+y_{32}(1+\xi)(1+\eta)(1-\eta^2)] \\ N'_9 &= \frac{1}{16}[x_{34}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi^2)+x_{32}(1+\xi)(1+\eta)(1-\eta^2)] \\ N'_{10} &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(2-\xi^2-\eta^2-\xi+\eta) \\ N'_{11} &= \frac{1}{16}[y_{34}(1-\xi)(1+\eta)(1-\xi^2)-y_{41}(1-\xi)(1+\eta)(1-\eta^2)] \\ N'_{12} &= -\frac{1}{16}[x_{34}(1-\xi)(1+\eta)(1-\xi^2)-x_{41}(1-\xi)(1+\eta)(1-\eta^2)] \end{aligned} \quad (3.207)$$

ดังนั้นโหนดเวกเตอร์เนื่องจากแรงภายนอก  $\{F_p\}$  เขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันธรรมชาติได้เป็น

$$\{F_p\} = \int_A p\{N'\}dxdy = p \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{N'(\xi, \eta)\} |J| d\xi d\eta \quad (3.208)$$

โดยการใช้วิธีการอินทิเกรตเชิงตัวเลขด้วยการประยุกต์สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ จะได้

$$\{F_p\} = p \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 W_i W_j \{N'(\xi_i, \eta_j)\} |J(\xi_i, \eta_j)| \quad (3.209)$$

งานวิจัยนี้ได้ทำการอินทิเกรตโดยตรงโดยใช้โปรแกรมแมทมาทิกาเข้าช่วยเพื่อให้ได้โหนด  
เวกเตอร์เนื่องจากแรงภายนอก  $\{F_p\}$  ที่อยู่ในรูปแบบปิด โดยเริ่มจากการจัดรูปทั่วไปของแต่ละ  
พจน์ที่จะต้องอินทิเกรตแต่ละแถวของโหนดเวกเตอร์นั้นอยู่ในรูปทั่วไป คือ

$$N'_i(\xi, \eta) |J| = a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi^2 + a_4\xi\eta + a_5\eta^2 + a_6\xi^3 + a_7\xi\eta^2 + a_8\xi^2\eta + a_9\eta^3 \\ + a_{10}\xi\eta^3 + a_{11}\xi^3\eta \quad (3.210)$$

จากนั้นทำการอินทิเกรตโดยตรงโดยใช้โปรแกรมแมทมาทิกาและจัดรูปใหม่จะได้โหนดเวกเตอร์  
เนื่องจากแรงภายนอก  $\{F_p\}$  ที่อยู่ในรูปแบบปิด นั่นคือ

$$\{F_p\} = \frac{1}{720} p \left[ F_{p1} \quad F_{p2} \quad F_{p3} \quad \dots \quad F_{p12} \right]^T \quad (3.211)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} F_{p1} &= 36(x_{34}y_{21} - x_{21}y_{34}) + 36(x_{41}y_{32} - x_{32}y_{41}) + 90(x_{31}y_{42} - x_{42}y_{31}) \\ F_{p2} &= (x_{41}y_{32} - x_{32}y_{41})(5y_{21} + 3y_{41}) + (x_{34}y_{21} - x_{21}y_{34})(3y_{21} + 5y_{41}) \\ &\quad + 15(x_{31}y_{42} - x_{42}y_{31})(y_{21} + y_{41}) \\ F_{p3} &= (x_{32}y_{41} - x_{41}y_{32})(5x_{21} + 3x_{41}) + (x_{21}y_{34} - x_{34}y_{21})(3x_{21} + 5x_{41}) \\ &\quad + 15(x_{42}y_{31} - x_{31}y_{42})(x_{21} + x_{41}) \\ F_{p4} &= 36(x_{41}y_{32} - x_{32}y_{41}) + 36(x_{21}y_{34} - x_{34}y_{21}) + 90(x_{31}y_{42} - x_{42}y_{31}) \\ F_{p5} &= (x_{32}y_{41} - x_{41}y_{32})(5y_{21} - 3y_{32}) + (x_{34}y_{21} - x_{21}y_{34})(3y_{21} - 5y_{32}) \\ &\quad + 15(x_{42}y_{31} - x_{31}y_{42})(y_{21} - y_{32}) \\ F_{p6} &= (x_{41}y_{32} - x_{32}y_{41})(5x_{21} - 3x_{32}) + (x_{21}y_{34} - x_{34}y_{21})(3x_{21} - 5x_{32}) \\ &\quad + 15(x_{31}y_{42} - x_{42}y_{31})(x_{21} - x_{32}) \\ F_{p7} &= 36(x_{21}y_{34} - x_{34}y_{21}) + 36(x_{32}y_{41} - x_{41}y_{32}) + 90(x_{31}y_{42} - x_{42}y_{31}) \\ F_{p8} &= (x_{34}y_{21} - x_{21}y_{34})(5y_{32} + 3y_{34}) + (x_{41}y_{32} - x_{32}y_{41})(3y_{32} + 5y_{34}) \\ &\quad + 15(x_{42}y_{31} - x_{31}y_{42})(y_{32} + y_{34}) \\ F_{p9} &= (x_{21}y_{34} - x_{34}y_{21})(5x_{32} + 3x_{34}) + (x_{32}y_{41} - x_{41}y_{32})(3x_{32} + 5x_{34}) \\ &\quad + 15(x_{31}y_{42} - x_{42}y_{31})(x_{32} + x_{34}) \\ F_{p10} &= 36(x_{32}y_{41} - x_{41}y_{32}) + 36(x_{34}y_{21} - x_{21}y_{34}) + 90(x_{31}y_{42} - x_{42}y_{31}) \\ F_{p11} &= (x_{32}y_{41} - x_{41}y_{32})(5y_{34} - 3y_{41}) + (x_{34}y_{21} - x_{21}y_{34})(3y_{34} - 5y_{41}) \\ &\quad + 15(x_{31}y_{42} - x_{42}y_{31})(y_{34} - y_{41}) \\ F_{p12} &= (x_{41}y_{32} - x_{32}y_{41})(5x_{34} - 3x_{41}) + (x_{21}y_{34} - x_{34}y_{21})(3x_{34} - 5x_{41}) \\ &\quad + 15(x_{42}y_{31} - x_{31}y_{42})(x_{34} - x_{41}) \end{aligned} \quad (3.212)$$

รูปแบบปิดของโหนดเวกเตอร์เนื่องจากแรงภายนอก  $\{F_p\}$  และโหนดเวกเตอร์เนื่องจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปตลอดความหนา  $\{F_T\}$  ดังในสมการ (3.211) และ (3.203) นั้นสามารถนำไปประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง อีกทั้งยังพบว่าโหนดเวกเตอร์เนื่องจากแรงภายนอก  $\{F_p\}$  และโหนดเวกเตอร์เนื่องจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปตลอดความหนา  $\{F_T\}$  ที่ได้มาจากการทำการอินทิเกรตโดยตรงนั้นช่วยให้การคำนวณนั้นมีความรวดเร็วมากยิ่งขึ้น หรือใช้ระยะเวลาในการคำนวณ (computational time) น้อยลง โดยสังเกตได้จากการเปรียบเทียบการใช้เวลาในการประดิษฐ์โหนดเวกเตอร์ดังกล่าวด้วยการอินทิเกรตเชิงตัวเลขและการอินทิเกรตโดยตรงที่ปริมาณจำนวนรอบในการประดิษฐ์โหนดเวกเตอร์เป็น 100,000 รอบ, 500,000 รอบ และ 1,000,000 รอบ ดังแสดงในตารางที่ 3.1 และตารางที่ 3.2 โดยใช้คอมพิวเตอร์ที่ใช้ CPU Intel Core i7-5600U 2.60 GHz ซึ่งจะเห็นได้ว่าเวลาที่ใช้ในการประดิษฐ์โหนดเวกเตอร์เนื่องจากแรงภายนอกที่ได้มาจากการทำการอินทิเกรตโดยตรง ( $T_{\text{exact}}$ ) นั้นเร็วกว่ากรณีที่ได้มาจากการอินทิเกรตเชิงตัวเลข ( $T_{\text{num}}$ ) ถึง 12 เท่า และเวลาที่ใช้ในการประดิษฐ์โหนดเวกเตอร์เนื่องจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปตลอดความหนาที่ได้มาจากการทำการอินทิเกรตโดยตรง ( $T_{\text{exact}}$ ) นั้นเร็วกว่ากรณีที่ได้มาจากการอินทิเกรตเชิงตัวเลข ( $T_{\text{num}}$ ) มากถึง 50 เท่าเลยทีเดียว ดังนั้นรูปแบบปิดของ  $\{F_p\}$  และ  $\{F_T\}$  ที่ได้มาจากการทำการอินทิเกรตโดยตรงที่ประดิษฐ์ขึ้นในนี้จึงมีประโยชน์อย่างมากในการที่จะช่วยลดเวลาที่ใช้ในการวิเคราะห์หลังได้

ตารางที่ 3.1 การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการประดิษฐ์โหนดเวกเตอร์เนื่องจากแรงภายนอกที่จำนวนรอบในการประดิษฐ์โหนดเวกเตอร์ต่าง ๆ

จำนวนรอบ	$T_{\text{num}}$ (s)	$T_{\text{exact}}$ (s)	อัตราส่วน ( $T_{\text{num}}/ T_{\text{exact}}$ )
100,000	0.2964	0.0256	11.58
500,000	1.4664	0.1248	11.75
1,000,000	2.9484	0.2496	11.81

ตารางที่ 3.2 การเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการประดิษฐ์โพลเวกเตอร์เนื่องจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปตลอดความหนาที่จำนวนรอบในการประดิษฐ์โพลเวกเตอร์ต่าง ๆ

จำนวนรอบ	$T_{\text{num}}$ (s)	$T_{\text{exact}}$ (s)	อัตราส่วน ( $T_{\text{num}}/ T_{\text{exact}}$ )
100,000	1.0920	0.0220	49.63
500,000	5.4288	0.1092	49.71
1,000,000	10.8578	0.2184	49.72

### 3.5 บทสรุป

ในบทนี้เราได้ทำความเข้าใจถึงลักษณะทางกายภาพและสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาการโค้งของแผ่นบาง รวมไปถึงการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์อันเนื่องมาจากสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาการโค้งของแผ่นบาง และการประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์จากเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดีเคคิว แล้วนำหลักการเดียวกันนี้มาพัฒนาและประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอดีเคคิว อีกทั้งยังได้ประดิษฐ์โพลเวกเตอร์เนื่องจากแรงภายนอกและโพลเวกเตอร์เนื่องจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปตลอดความหนาให้อยู่ในรูปแบบปิดด้วยการอินทิเกรตโดยตรงโดยใช้โปรแกรมแมทมาทิกาเข้าช่วย ซึ่งช่วยให้การคำนวณนั้นมีความรวดเร็วมากยิ่งขึ้นกว่าโพลเวกเตอร์ซึ่งเดิมประดิษฐ์ขึ้นโดยการอินทิเกรตเชิงตัวเลข และโพลเวกเตอร์นี้สามารถนำไปประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรงอีกด้วย ซึ่งเราจะได้นำเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอดีเคคิวนี้ไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ต่อไปเพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการโค้งของแผ่นบางซึ่งจะกล่าวไว้ในบทถัดไป

## บทที่ 4

### ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบาง

จากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควิที่ได้ ถูกประดิษฐ์ขึ้นในบทที่ 3 นั้นจะถูกนำมาประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบาง โปรแกรมดังกล่าวนี้ถูกประดิษฐ์ขึ้นโดยใช้ภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) โดยโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นนี้มีชื่อว่า PLATEIDKQ รายละเอียดต่าง ๆ ของโปรแกรมดังกล่าวมีดังนี้

#### 4.1 ขั้นตอนการคำนวณ

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ PLATEIDKQ ประกอบไปด้วยโปรแกรมหลัก (main program) และโปรแกรมย่อย (subroutine) ต่าง ๆ โดยมีรายละเอียดและขั้นตอนการคำนวณดังนี้

4.1.1 เริ่มต้นทำงานภายในโปรแกรมหลักโดยการอ่านไฟล์ข้อมูลนำเข้า (input file) ของปัญหาโดยการเรียกโปรแกรมย่อย [READ\_INPUT] ซึ่งประกอบด้วยการอ่านข้อมูลต่าง ๆ ของปัญหาที่ทำการวิเคราะห์ เช่น จำนวนจุดต่อและจำนวนเอลิเมนต์ของปัญหา ค่าคุณสมบัติต่าง ๆ ของแผ่นบาง ตำแหน่งของจุดต่อต่าง ๆ อุณหภูมิที่ผิวบนและผิวล่างของแผ่นบาง แรงที่กระทำที่จุดต่อต่าง ๆ เป็นต้น

4.1.2 ทำการคำนวณแบบทำซ้ำโดยการเรียกโปรแกรมย่อย [IDKQ1] เพื่อทำการสร้างเอลิเมนต์เมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์การโก่งของแผ่นบาง และโปรแกรมย่อย [ASSEMBLE] เพื่อทำการรวมสมการของเอลิเมนต์ย่อยเข้าด้วยกันก่อให้เกิดระบบสมการรวม

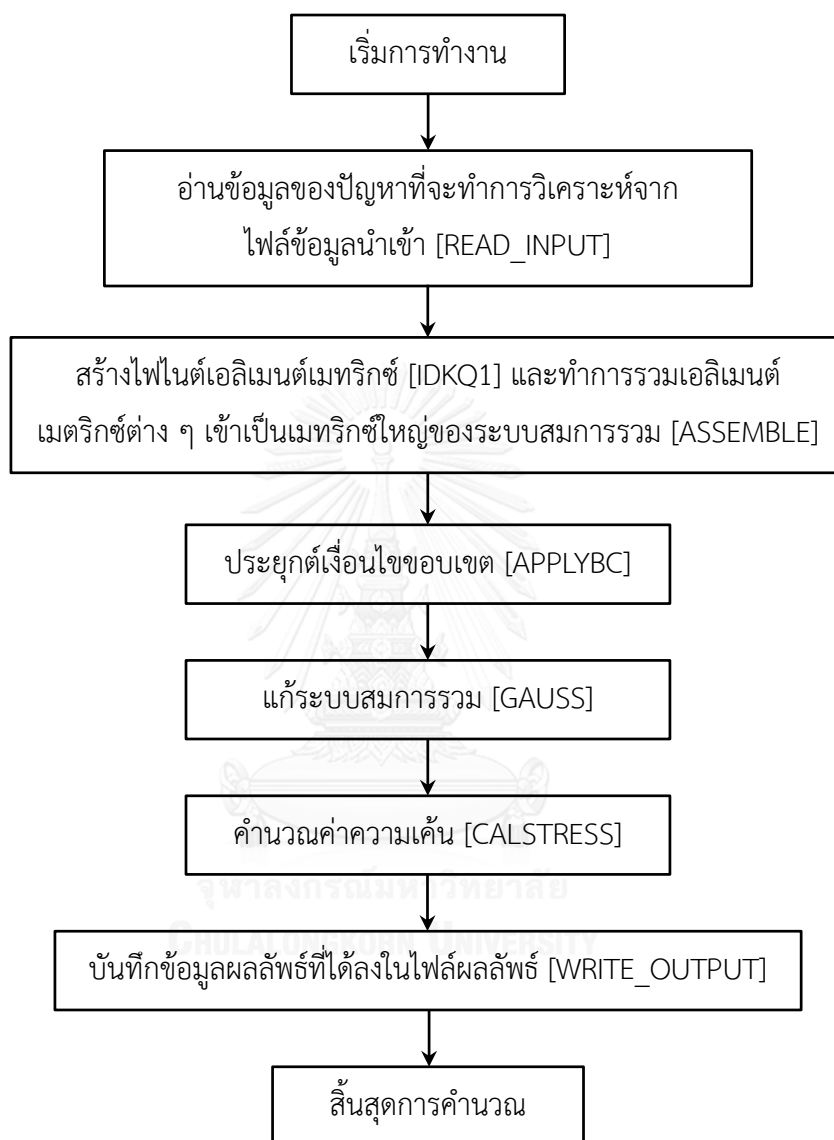
4.1.3 หลังจากที่ได้ระบบสมการรวมแล้ว ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตเข้ากับระบบสมการรวมโดยการเรียกโปรแกรมย่อย [APPLYBC]

4.1.4 จากนั้นจึงเรียกโปรแกรมย่อย [GAUSS] เพื่อทำการแก้ระบบสมการรวมเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ต่าง ๆ ได้แก่ ค่าระยะการเสียรูปในแนวแกนตั้ง  $w$  และค่ามุมบิดรอบแกน  $x$  และ  $y$  ( $\theta_x$  และ  $\theta_y$ ) ที่จุดต่อต่าง ๆ

4.1.5 คำนวณหาค่าความเค้นต่าง ๆ โดยการเรียกโปรแกรมย่อย [CALSTRESS]

4.1.6 ทำการเขียนผลลัพธ์ที่คำนวณได้โดยการเรียกโปรแกรมย่อย [WRITE\_OUTPUT] ซึ่งได้แก่ ค่าระยะการเสียรูปในแนวแกนตั้ง  $w$  ค่ามุมบิดรอบแกน  $x$  และ  $y$  ( $\theta_x$  และ  $\theta_y$ ) และค่าความเค้นในแนวแกน  $x$  และ  $y$  ค่าความเค้นเฉือน และค่าความเค้นวอนมิเชสลงไปในไฟล์ผลลัพธ์ที่กำหนดไว้เพื่อนำไปใช้แสดงผลต่อไป

ลำดับขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมสามารถสรุปได้โดยใช้แผนภูมิการทำงาน (flow chart) ดังแสดงในรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 ลักษณะขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม PLATEIDKQ

#### 4.2 รายละเอียดของโปรแกรม

รายละเอียดของโปรแกรม PLATEIDKQ ได้แสดงไว้ในภาคผนวก จ



### 4.3 รายละเอียดของไฟล์ข้อมูลนำเข้า

รายละเอียดของไฟล์ข้อมูลนำเข้าที่ใช้กับโปรแกรม PLATEIDKQ ประกอบไปด้วย 6 ส่วนย่อย ดังนี้

#### ส่วนที่ 1 ประโยคอธิบายกำกับลักษณะของไฟล์

บรรทัดแรก: ตัวเลขระบุจำนวนบรรทัดที่เป็นตัวอักษร

บรรทัดต่อไป: ประโยคต่าง ๆ ที่อธิบายลักษณะของไฟล์ที่มีจำนวนบรรทัดตามที่ระบุไว้

ตัวอย่างเช่น:

2

square plate with linear temperature distribution through its thickness  
(element4x4)

#### ส่วนที่ 2 จำนวนจุดต่อและจำนวนเอลิเมนต์ของปัญหา

บรรทัดแรก: คำระบุจำนวนจุดต่อและจำนวนเอลิเมนต์

บรรทัดต่อไป: จำนวนจุดต่อและจำนวนเอลิเมนต์

ตัวอย่างเช่น:

NPOI	NELE
25	16

#### ส่วนที่ 3 คุณสมบัติต่าง ๆ ของแผ่นบาง

บรรทัดแรก: คำระบุคุณสมบัติต่าง ๆ

บรรทัดต่อไป: ตัวเลขแสดงค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น ค่าอัตราส่วนของปัวส์ซง ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิ ค่าอุณหภูมิผิวบนของแผ่นบาง ค่าอุณหภูมิผิวล่างของแผ่นบาง และค่าอุณหภูมิอ้างอิงที่วัสดุไม่เกิดความเค้น ตามลำดับ

ตัวอย่างเช่น:

E	Pr	Thickness	Alpha	Ttop	Tbottom	Tref
190.E+9	0.3	0.01	16.E-6	60.	0.	0.

#### ส่วนที่ 4 ลักษณะของจุดต่อ

บรรทัดแรก: คำระบุลักษณะของจุดต่อ

บรรทัดต่อไป: ตัวเลขแสดงหมายเลขของจุดต่อ เงื่อนไขขอบเขตของค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้ง  
เงื่อนไขขอบเขตของค่ามุมบิดรอบแกน  $x$  และ  $y$  ค่าระบุตำแหน่งของจุดต่อบนแกน  $x$  และ  $y$  และ  
ค่าแรงเดี่ยวที่กระทำในแนวตั้งที่จุดต่อนั้น ตามลำดับ

ตัวอย่างเช่น:

Node	Iuz	Irx	Iry	x	y	Fz
1	0	1	1	0.0	0.0	0.0
2	0	1	0	0.25	0.0	0.0
3	0	1	0	0.5	0.0	0.0
4	0	1	0	0.75	0.0	0.0
5	1	1	0	1.0	0.0	0.0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
25	0	0	0	0.75	0.75	0.0

หมายเหตุ: ค่าเงื่อนไขขอบเขตใน Iuz, Irx, Iry คือค่าเงื่อนไขขอบเขตของ  $w$ ,  $\theta_x$  และ  $\theta_y$  ที่จุดต่อซึ่งมีความหมายดังนี้

1 คือ ค่าที่จุดต่อนั้นถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 0

0 คือ ให้ทำการคำนวณหาค่าที่จุดต่อดังกล่าว

- โดยในกรณีนี้
- 1.) ขอบรองรับด้วยลิ้ม (simply supported) ค่า Iuz = 1 ค่า Irx, Iry = 0
  - 2.) ขอบถูกยึดแน่น (clamped) ค่า Iuz, Irx, Iry = 1
  - 3.) ขอบถูกปล่อยอิสระ (free supported) ค่า Iuz, Irx, Iry = 0

และในกรณีแก้ปัญหาแผ่นบางที่ขอบสมมาตรในแนวแกน  $x$  ค่า Irx = 1 และในกรณีที่ขอบสมมาตรในแนวแกน  $y$  ค่า Iry = 1

## ส่วนที่ 5 ลักษณะของเอลิเมนต์

บรรทัดแรก: ค่าระบุลักษณะของเอลิเมนต์

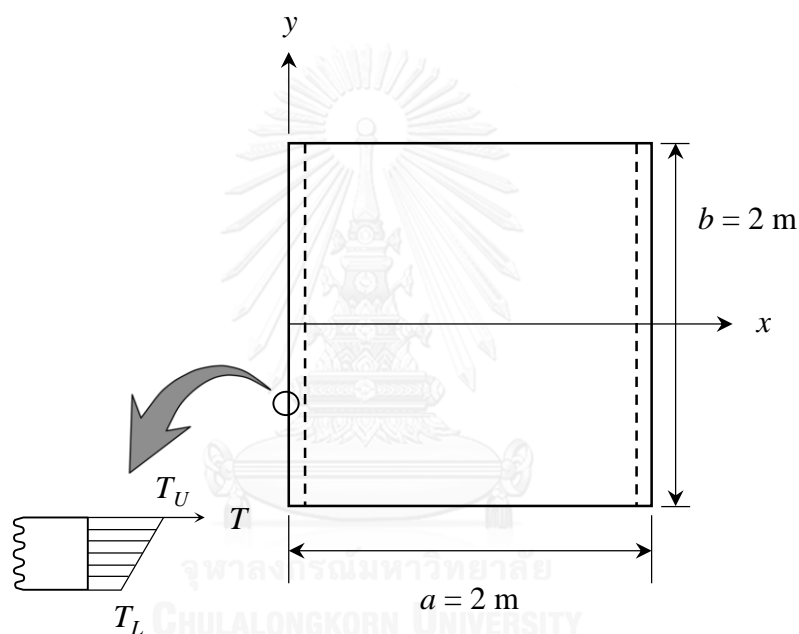
บรรทัดต่อไป: ตัวเลขแสดงหมายเลขของเอลิเมนต์ หมายเลขจุดต่อทั้งสี่บนเอลิเมนต์ในทิศทวนเข็มนาฬิกา และแรงกระจายที่กระทำในแนวตั้งบนเอลิเมนต์ ตามลำดับ

ตัวอย่างเช่น:

ELEMENT	NODAL	CONNECTIONS	AND	DISTRIBUTED	LOADS (FORCE/AREA)
1	1	2	17	16	0.
2	2	3	18	17	0.
3	3	4	19	18	0.
4	4	5	6	19	0.
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
16	25	8	9	10	0.

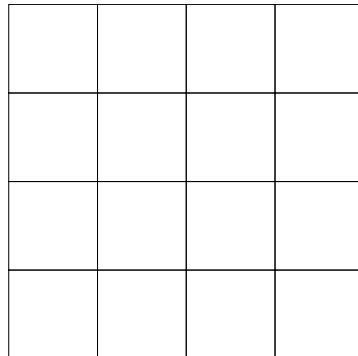
#### 4.4 ตัวอย่างการใช้โปรแกรม PLATEIDKQ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงตัวอย่างการใช้โปรแกรม PLATEIDKQ ในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้นโดยอุณหภูมิตลอดผิวด้านบน ( $T_U$ ) เป็น  $60\text{ }^{\circ}\text{C}$  และอุณหภูมิตลอดผิวด้านล่าง ( $T_L$ ) เป็น  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  ดังแสดงในรูปที่ 4.2 โดยที่แผ่นบางนี้มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น  $E$  เป็น  $190\text{ GPa}$  อัตราส่วนปัวซองส์  $\nu$  เป็น  $0.3$  และมีค่าสัมประสิทธิ์การกระจายความร้อน (the coefficient of thermal expansion,  $\alpha$ ) เป็น  $16 \times 10^{-6} / ^{\circ}\text{C}$  แผ่นบางนี้รองรับด้วยลิ่มตลอดขอบสองด้านซ้ายขวาที่  $x = 0$  และ  $x = 2$  และถูกปล่อยอิสระตลอดขอบบนและล่างที่  $y = 1$  และ  $y = -1$



รูปที่ 4.2 แผ่นบางสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่รองรับด้วยลิ่มตลอดขอบสองด้านและมีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาแบบเชิงเส้น

เนื่องจากลักษณะของปัญหามีความสมมาตร จึงนำเพียงหนึ่งในสี่ของแผ่นบางด้านบนขวา มาทำการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ PLATEIDKQ โดยเริ่มจากการสร้างรูปแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 4.3 ซึ่งประกอบไปด้วย 25 จุดต่อ 16 เอลิเมนต์ซึ่งลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้าที่มีชื่อว่า 'TEST1.DAT' มีรายละเอียดดังแสดงไว้ในรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.3 แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาตัวอย่าง

```

2
square plate with linear temperature distribution through thickness
(element4x4)
NPOI      NELE
  25      16
E          Pr      Thickness      Alpha      Ttop      Tbottom      Tref
190.E+9    0.3      0.01      16.E-6      60.      0.      0.
Node      Iuz      Irx      Iry      x      y      Fz
  1        0        1        1      0.0      0.0      0.0
  2        0        1        0      0.25     0.0      0.0
  3        0        1        0      0.5      0.0      0.0
  4        0        1        0      0.75     0.0      0.0
  5        1        1        0      1.0      0.0      0.0
  6        1        0        0      1.0      0.25     0.0
  7        1        0        0      1.0      0.5      0.0
  8        1        0        0      1.0      0.75     0.0
  9        1        0        0      1.0      1.0      0.0
 10       0        0        0      0.75     1.0      0.0
 11       0        0        0      0.5      1.0      0.0
 12       0        0        0      0.25     1.0      0.0
 13       0        0        1      0.0      1.0      0.0
 14       0        0        1      0.0      0.75     0.0
 15       0        0        1      0.0      0.5      0.0
 16       0        0        1      0.0      0.25     0.0
 17       0        0        0      0.25     0.25     0.0
 18       0        0        0      0.5      0.25     0.0
 19       0        0        0      0.75     0.25     0.0
 20       0        0        0      0.25     0.5      0.0
 21       0        0        0      0.5      0.5      0.0
 22       0        0        0      0.75     0.5      0.0
 23       0        0        0      0.25     0.75     0.0
 24       0        0        0      0.5      0.75     0.0
 25       0        0        0      0.75     0.75     0.0

```

## ELEMENT NODAL CONNECTIONS AND DISTRIBUTED LOADS (FORCE/AREA)

1	1	2	17	16	0.
2	2	3	18	17	0.
3	3	4	19	18	0.
4	4	5	6	19	0.
5	16	17	20	15	0.
6	17	18	21	20	0.
7	18	19	22	21	0.
8	19	6	7	22	0.
9	15	20	23	14	0.
10	20	21	24	23	0.
11	21	22	25	24	0.
12	22	7	8	25	0.
13	14	23	12	13	0.
14	23	24	11	12	0.
15	24	25	10	11	0.
16	25	8	9	10	0.

รูปที่ 4.4 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้า 'TEST1.DAT'

เมื่อผู้ใช้เริ่มทำการคำนวณโดยใช้โปรแกรม PLATEIDKQ โปรแกรมจะทำการคำนวณไปตามขั้นตอนดังที่ได้อธิบายในหัวข้อ 4.1 โดยเมื่อการคำนวณเสร็จสิ้น ผลลัพธ์ที่ได้จะถูกบรรจุอยู่ในไฟล์ 'TEST1.OUT' ดังแสดงในรูปที่ 4.5 ซึ่งประกอบด้วย ค่าระยะการเสียรูปในแนวแกนตั้ง  $w$  ค่ามุมบิดรอบแกน  $\theta_x$  และ  $\theta_y$  ค่าความเค้นในแนวแกน  $x$  และ  $y$  ค่าความเค้นเฉือน และค่าความเค้นวอนมิเชส

Node	W	thetaX	thetaY
1	6.1660E-02	0.0000E+00	0.0000E+00
2	5.7829E-02	0.0000E+00	3.0729E-02
3	4.6312E-02	0.0000E+00	6.1644E-02
4	2.7050E-02	0.0000E+00	9.2771E-02
5	0.0000E+00	0.0000E+00	1.2396E-01
6	0.0000E+00	3.6735E-05	1.2249E-01
7	0.0000E+00	-1.0773E-04	1.1748E-01
8	0.0000E+00	1.5856E-03	1.0813E-01
9	0.0000E+00	-8.4089E-03	8.0988E-02
10	1.7513E-02	-3.2011E-02	6.0417E-02
11	3.0102E-02	-4.5654E-02	4.0476E-02
12	3.7706E-02	-5.2732E-02	2.0350E-02
13	4.0251E-02	-5.4973E-02	0.0000E+00
14	5.1102E-02	-3.3513E-02	0.0000E+00
15	5.7443E-02	-1.8533E-02	0.0000E+00
16	6.0676E-02	-8.1249E-03	0.0000E+00
17	5.6923E-02	-7.4898E-03	3.0123E-02
18	4.5625E-02	-5.6796E-03	6.0543E-02

19	2.6682E-02	-3.0469E-03	9.1360E-02	
20	5.3935E-02	-1.7194E-02	2.8193E-02	
21	4.3341E-02	-1.3232E-02	5.6968E-02	
22	2.5451E-02	-7.1678E-03	8.6875E-02	
23	4.8014E-02	-3.1529E-02	2.4788E-02	
24	3.8693E-02	-2.5375E-02	5.0116E-02	
25	2.2911E-02	-1.4405E-02	7.7007E-02	
	StXX	StYY	StXY	V-M stress
	6.5421E+06	-5.9560E+07	-9.0754E+05	6.3105E+07
	6.4805E+06	-6.2988E+07	-2.0568E+06	6.6561E+07
	4.7878E+06	-7.1310E+07	-3.0165E+06	7.4006E+07
	1.9406E+06	-8.2643E+07	-3.4980E+06	8.3849E+07
	-1.4152E+06	-9.0702E+07	-1.7942E+06	9.0056E+07
	5.4606E+05	-8.6566E+07	-6.7151E+06	8.7615E+07
	-2.5329E+06	-8.7589E+07	-1.6861E+07	9.1155E+07
	6.4326E+06	-6.8858E+07	-4.2693E+07	1.0341E+08
	-2.6855E+06	-3.9910E+07	-6.2373E+07	1.1473E+08
	-1.3466E+07	-2.5736E+07	-4.3805E+07	7.9080E+07
	-1.3832E+07	-1.7830E+07	-2.4012E+07	4.4635E+07
	-1.3287E+07	-1.4690E+07	-9.2541E+06	2.1309E+07
	-2.0203E+07	-1.6437E+07	-1.6388E+06	1.8823E+07
	-9.2500E+06	-2.1205E+07	-4.7967E+06	2.0201E+07
	-9.0678E+05	-4.1296E+07	-3.7152E+06	4.1354E+07
	4.5874E+06	-5.4118E+07	-2.1635E+06	5.6676E+07
	6.0042E+06	-5.7677E+07	-4.3764E+06	6.1372E+07
	5.3165E+06	-6.5417E+07	-7.2590E+06	6.9379E+07
	3.1220E+06	-7.7414E+07	-8.9156E+06	8.0516E+07
	2.5574E+06	-4.5709E+07	-8.6459E+06	4.9366E+07
	3.2095E+06	-5.4453E+07	-1.6124E+07	6.2691E+07
	2.5758E+06	-7.1939E+07	-2.0971E+07	8.1771E+07
	-4.4014E+06	-2.5306E+07	-1.2321E+07	3.1683E+07
	-2.9105E+06	-3.1029E+07	-2.5803E+07	5.3650E+07
	2.1270E+06	-4.5268E+07	-4.2501E+07	8.7000E+07

รูปที่ 4.5 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ 'TEST1.OUT'

#### 4.5 บทสรุป

ในบทนี้ เราได้กล่าวถึงขั้นตอนการทำงาน และรายละเอียดไฟล์ข้อมูลนำเข้าของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ PLATEIDKQ สำหรับนำไปใช้วิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบาง อีกทั้งยังได้ยกตัวอย่างประกอบเพื่อให้สามารถใช้งานโปรแกรมได้อย่างถูกต้อง ซึ่งในบทต่อไปเราจะนำโปรแกรม PLATEIDKQ นี้มาใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางที่เราทราบผลเฉลยแน่นอนตรงเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมต่อไป

## บทที่ 5

### การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

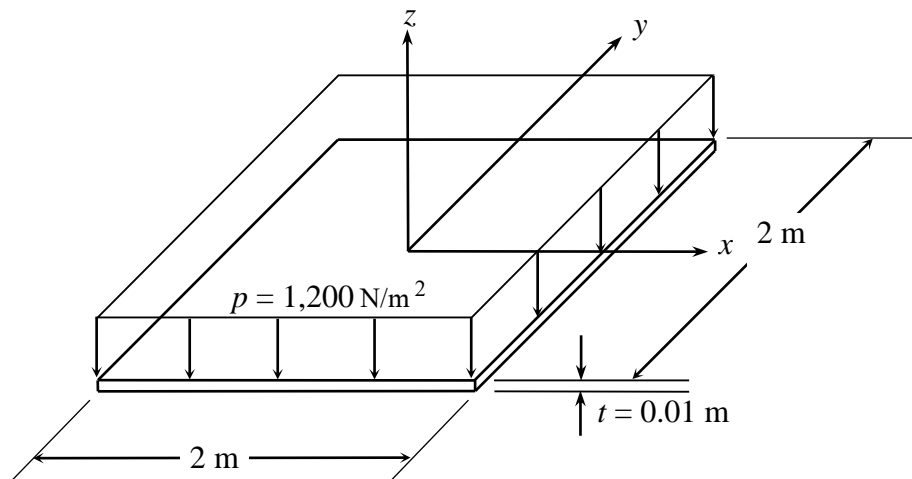
ในบทนี้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ PLATEIDKQ ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควินั้นจะถูกนำมาตรวจสอบความถูกต้องกับปัญหาที่เราทราบผลเฉลยแน่นอนตรง รวมไปถึงเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากการใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมติเคที เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าสี่จุดต่อ และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมติเคควในการวิเคราะห์ปัญหา โดยมีทั้งปัญหาการโก่งของแผ่นบางอันเนื่องมาจากแรงกระทำตั้งฉากทางกล (mechanical loading) และภาระทางความร้อน (thermal loading) ดังรายละเอียดต่อไปนี้

#### 5.1 ปัญหาการโก่งของแผ่นบางเนื่องจากแรงกระทำทางกล

ปัญหาการโก่งของแผ่นบางเนื่องจากแรงกระทำทางกลเป็นปัญหาแผ่นบางที่มีแรงมากระทำในทิศทางที่ตั้งฉากกับระนาบของแผ่นบาง ซึ่งอาจเป็นได้ทั้งแรงเดียวและแรงกระจาย โดยปัญหาที่นำมาวิเคราะห์มีดังต่อไปนี้

##### 5.1.1 ปัญหาแผ่นบางถูกแรงกระจายกระทำตลอดทั้งแผ่น

แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางขนาด  $2 \times 2 \text{ m}^2$  หนา  $0.01 \text{ m}$  ดังแสดงในรูปที่ 5.1 ซึ่งตลอดขอบทั้งสี่ด้านถูกยึดแน่น (clamped) ภายใต้แรงกระทำแบบกระจาย (distributed load) ในแนวตั้งขนาดคงที่  $p = 1,200 \text{ N/m}^2$  กระทำตลอดทั้งแผ่น โดยที่แผ่นบางนี้มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น (Modulus of Elasticity,  $E$ ) เป็น  $72 \text{ GPa}$  และอัตราส่วนปัวซองส์ (Poisson's ratio,  $\nu$ ) เป็น  $0.3$



รูปที่ 5.1 แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางถูกแรงกระทำแบบกระจายตลอดทั้งแผ่น

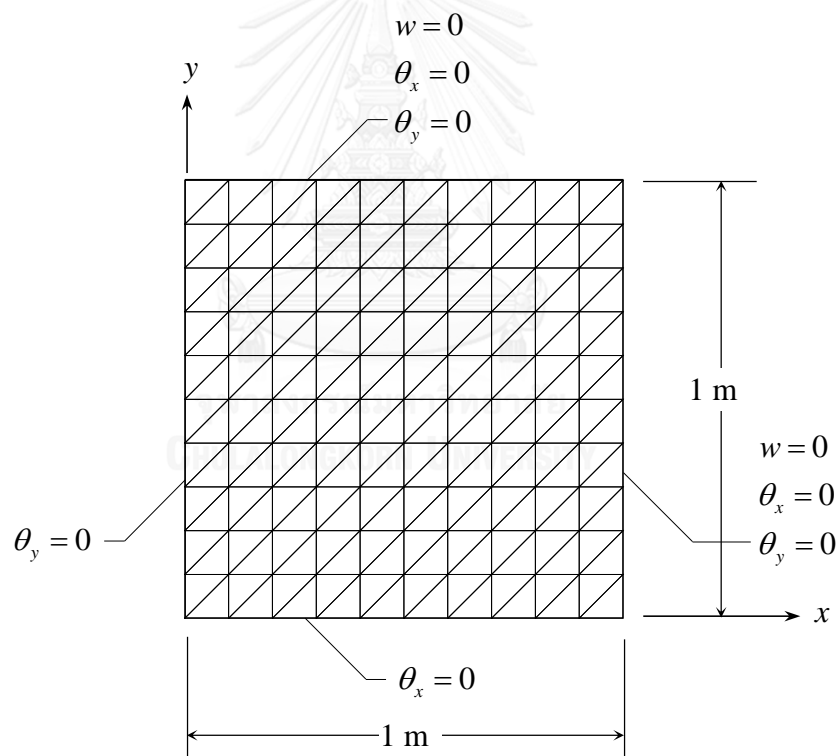
โดยผลเฉลยแม่นยำตรงของค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นบางนี้คือ [52]

$$w_{\max} = 0.00126 \frac{pa^4}{D} \quad (5.1)$$

โดยที่  $a$  คือ ความกว้างของแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบาง

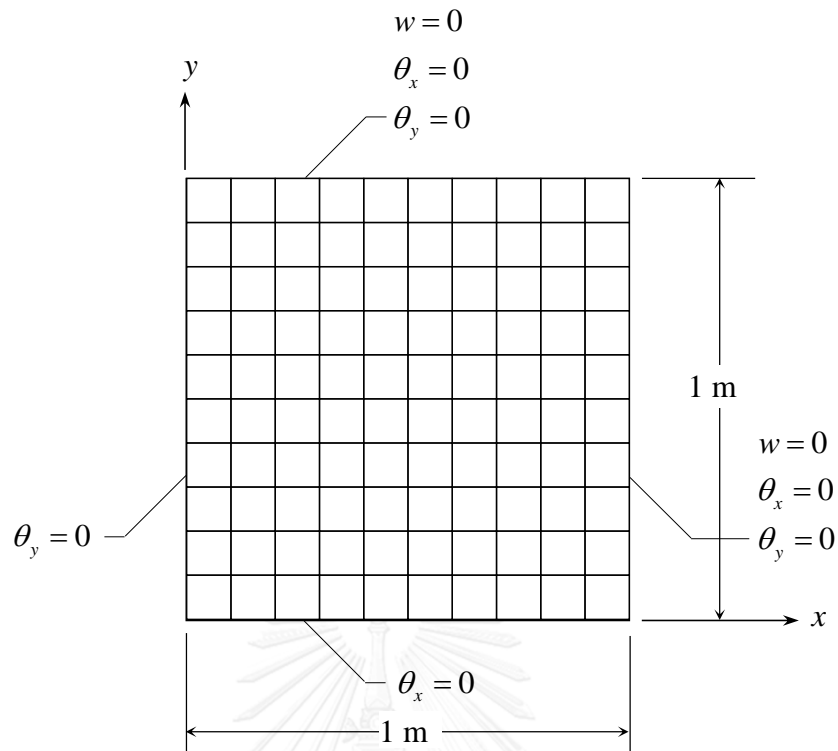
และ  $D$  คือ ค่าความแข็งเกร็งของการโก่ง (flexural rigidity) ดังแสดงในสมการ (3.5)

เนื่องจากปัญหานี้มีความสมมาตร ดังนั้นจึงนำเพียงพื้นที่หนึ่งในสี่ทางขวาบนของแผ่นบางในรูปที่ 5.1 มาใช้ในการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น จากนั้นจึงทำการวิเคราะห์ปัญหาโดยการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ รูปที่ 5.2 และ 5.3 แสดงถึงลักษณะการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม รวมถึงการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ ของปัญหาในการวิเคราะห์



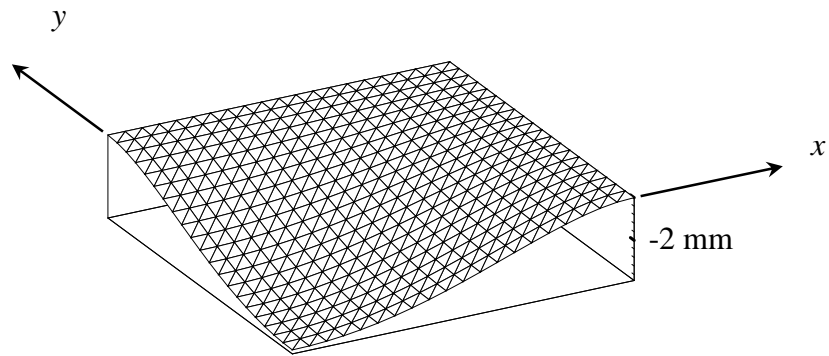
รูปที่ 5.2 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สามเหลี่ยมและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา



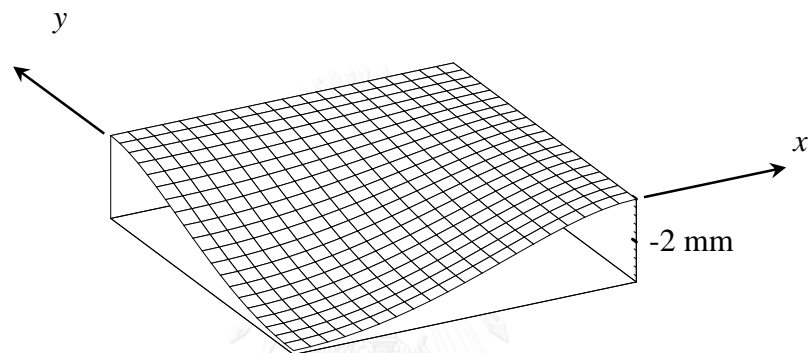


รูปที่ 5.3 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา

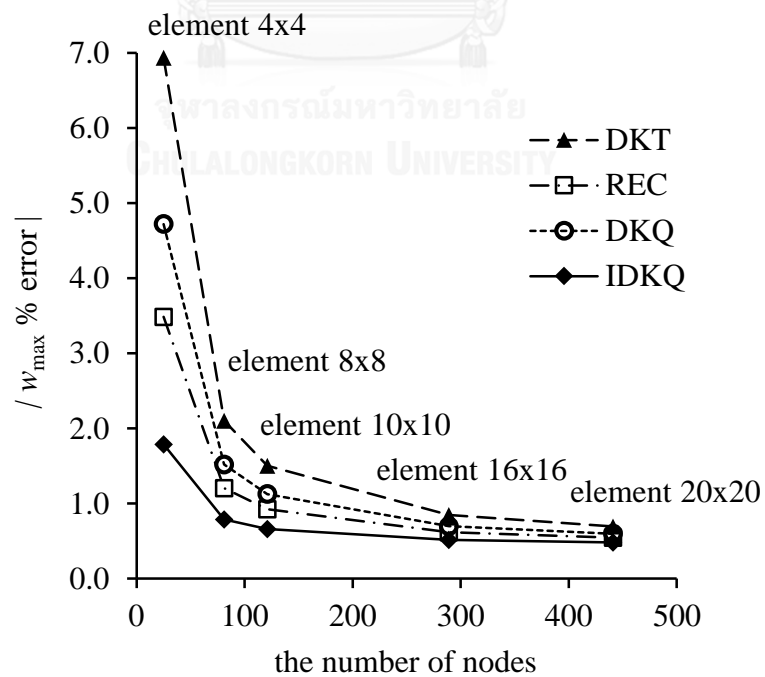
โดยรูปที่ 5.4 และ 5.5 แสดงลักษณะการเสียรูปของแผ่นบางที่คำนวณได้โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมติเคท และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควตามลำดับซึ่งมีค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่น รูปที่ 5.6 เปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของผลลัพธ์ที่ได้จากเอลิเมนต์สามเหลี่ยมติเคท เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าสี่จุดต่อ เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมติเคคว และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควที่ตำแหน่งจุดกึ่งกลางที่มีค่าการเสียรูปสูงสุดพบว่า การคำนวณโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควนั้นให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากกว่าเอลิเมนต์ชนิดอื่น ๆ ที่จำนวนจุดต่อที่เท่ากัน และด้วยจำนวนจุดต่อที่เพิ่มมากขึ้นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควจะให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงมากกว่าเอลิเมนต์ชนิดอื่น ๆ นั่นคือ ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควนั้นจะเข้าสู่คำตอบได้รวดเร็วกว่าเอลิเมนต์แบบอื่น ๆ เมื่อมีการแบ่งเอลิเมนต์ให้มีความละเอียดมากยิ่งขึ้น ตารางที่ 5.1 แสดงค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของการเสียรูปในแนวแกนตั้งสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นที่คำนวณได้จากเอลิเมนต์ทั้ง 4 แบบโดยใช้เอลิเมนต์ละเอียดยขนาด  $20 \times 20$  มีจำนวนจุดต่อ 441 จุดต่อ ซึ่งเห็นได้ชัดว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควนั้นให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากกว่าเอลิเมนต์ชนิดอื่น ๆ



รูปที่ 5.4 การเสียรูปของแผ่นบางโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมดีเคทีในการวิเคราะห์



รูปที่ 5.5 การเสียรูปของแผ่นบางใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอดีเคคิวในการวิเคราะห์



รูปที่ 5.6 การเปรียบเทียบค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของการเสียรูปในแนวแกนตั้งสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นที่คำนวณได้จากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสี่แบบ

ตารางที่ 5.1 การเปรียบเทียบค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นจากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสี่แบบ

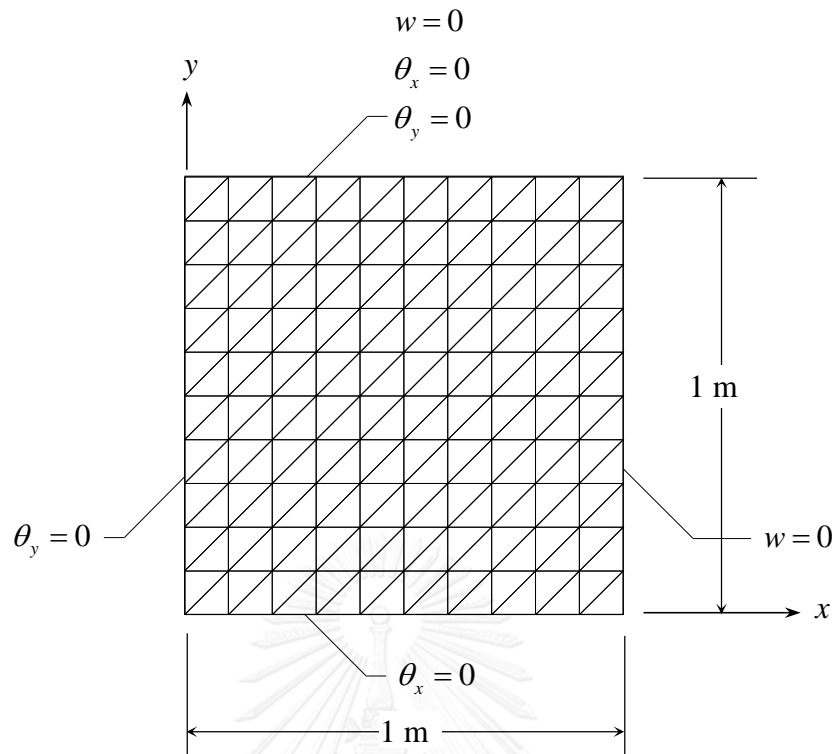
	ระยะการเสียรูปใน แนวตั้งสูงสุด (mm)	ค่าความคลาดเคลื่อน (%)
ผลเฉลยแม่นยำตรง	-3.6691	-
เอลิเมนต์สามเหลี่ยมดีเคที	-3.6946	0.69
เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าสี่จุดต่อ	-3.6892	0.55
เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดีเคคิว	-3.6911	0.60
เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอดีเคคิว	-3.6869	0.48

### 5.1.2 ปัญหาแผ่นบางที่มีการรองรับที่ขอบต่างกัน

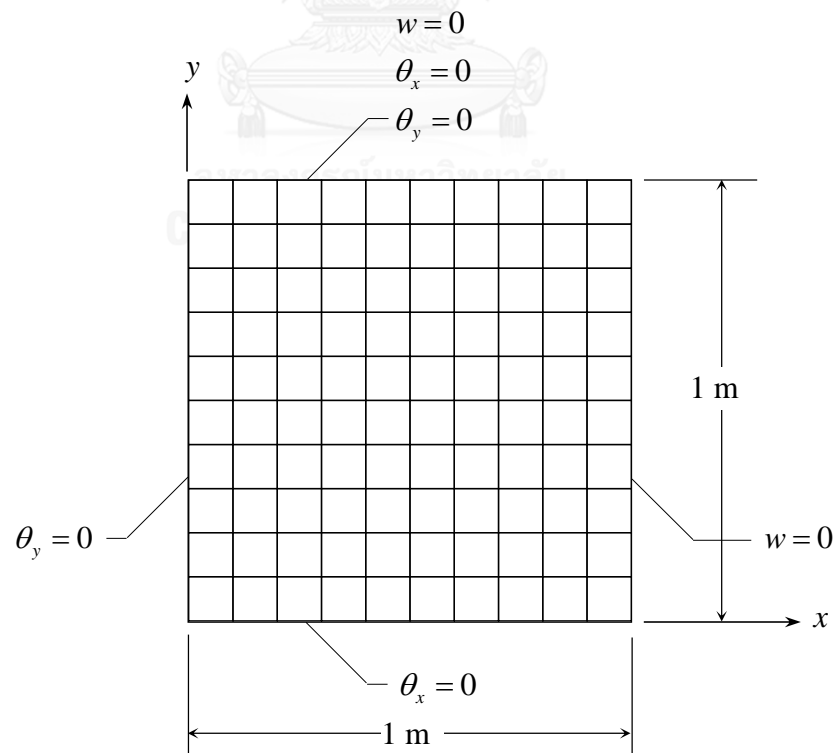
แผ่นบางสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด  $2 \times 2 \text{ m}^2$  หนา  $0.01 \text{ m}$  ภายใต้แรงกระทำแบบกระจายในแนวตั้งคงที่  $p = 1,200 \text{ N/m}^2$  กระทำตลอดทั้งแผ่นลักษณะเดียวกันกับปัญหา 5.1.1 ในรูปที่ 5.1 โดยที่แผ่นบางนี้มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น  $E$  เป็น  $72 \text{ GPa}$  และอัตราส่วนปัวซองส์  $\nu$  เป็น  $0.3$  แผ่นบางนี้รองรับด้วยลิ้ม (simply supported) ตลอดขอบสองด้านซ้ายขวา (ที่  $x = 1$  และ  $x = -1$ ) และถูกยึดตรึงแน่นตลอดขอบสองด้านบนและล่าง (ที่  $y = 1$  และ  $y = -1$ ) โดยผลเฉลยแม่นยำตรงของค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้ง  $w$  สูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นของปัญหานี้คือ [52]

$$w_{\max} = 0.00192 \frac{pa^4}{D} \quad (5.2)$$

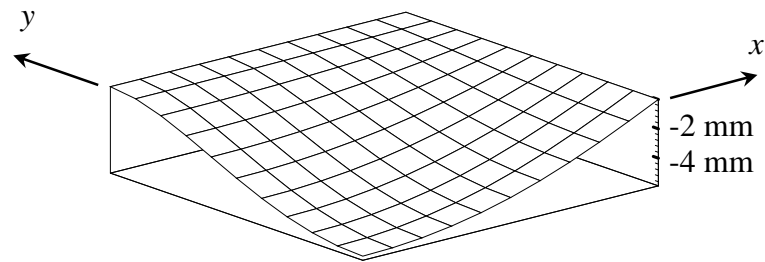
ทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมดีเคที เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าสี่จุดต่อ เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดีเคคิว และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอดีเคคิว โดยเนื่องจากความสมมาตรของลักษณะปัญหาจึงนำเพียงพื้นที่หนึ่งในสี่ทางด้านขวาบนของแผ่นบางในรูปที่ 5.1 มาใช้ในการวิเคราะห์ รูปที่ 5.7 และ 5.8 แสดงถึงลักษณะการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม รวมถึงการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ ของปัญหานี้ ลักษณะการเสียรูปของแผ่นบางที่คำนวณได้โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอดีเคคิวเป็นดังรูปที่ 5.9



รูปที่ 5.7 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สามเหลี่ยมและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา

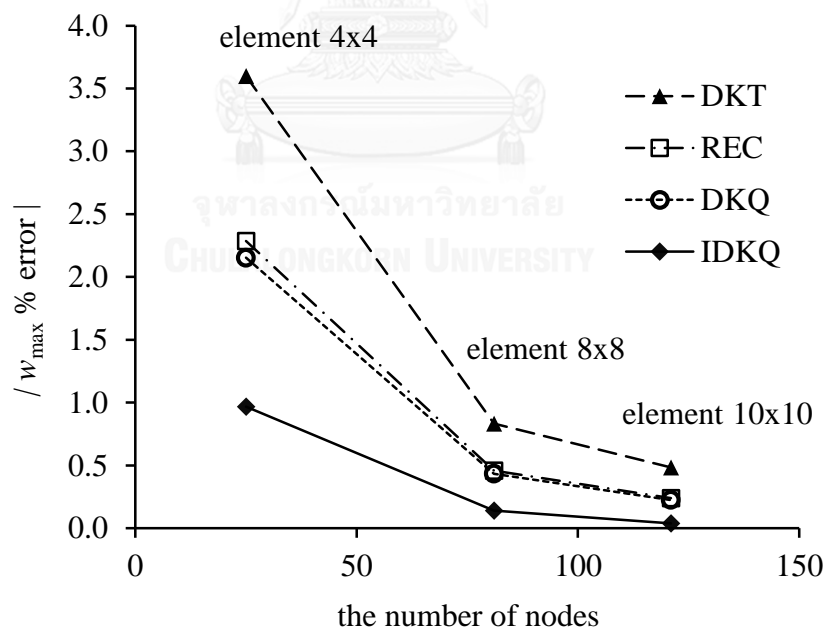


รูปที่ 5.8 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา



รูปที่ 5.9 การเสียรูปของแผ่นบางโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควในการวิเคราะห์

พิจารณาค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้เอลิเมนต์ทั้ง 4 แบบในการวิเคราะห์ที่ตำแหน่งจุดกึ่งกลางแผ่นเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงดังแสดงในรูปที่ 5.10 พบว่าด้วยจำนวนจุดต่อที่เพิ่มมากขึ้นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควนั้นให้ผลลัพธ์ที่มีการลู่อเข้าที่ตีและให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงมากกว่าเอลิเมนต์ชนิดอื่น และเมื่อพิจารณาจากตารางที่ 5.2 ซึ่งแสดงค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของการเสียรูปในแนวแกนตั้งที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นที่คำนวณได้จากเอลิเมนต์ทั้ง 4 แบบโดยใช้เอลิเมนต์ละเอียดขนาด  $10 \times 10$  มีจำนวนจุดต่อ 121 จุดต่อ จะเห็นได้ชัดว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควนั้นให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากกว่าเอลิเมนต์ชนิดอื่น ๆ



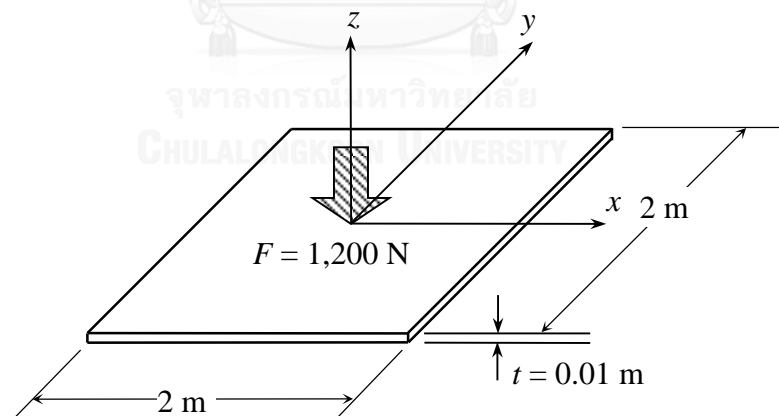
รูปที่ 5.10 การเปรียบเทียบค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของการเสียรูปในแนวแกนตั้งสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นที่คำนวณได้จากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสี่แบบ

ตารางที่ 5.2 การเปรียบเทียบค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นจากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสี่แบบ

	ระยะการเสียรูปใน แนวตั้งสูงสุด (mm)	ค่าความคลาดเคลื่อน (%)
ผลเฉลยแม่นยำตรง	- 5.5910	-
เอลิเมนต์สามเหลี่ยมดีเคที	- 5.6181	0.48
เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าสี่จุดต่อ	- 5.6045	0.24
เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดีเคคิว	- 5.6036	0.22
เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอดีเคคิว	- 5.5931	0.04

### 5.1.3 ปัญหาแผ่นบางถูกแรงเดียวกระทำที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่น

แผ่นบางสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด  $2 \times 2 \text{ m}^2$  หนา  $0.01 \text{ m}$  ถูกยึดตรึงแน่นตลอดขอบทั้งสี่ด้าน ภายใต้แรงเดียวกระทำที่จุดกึ่งกลางแผ่น  $F = 1,200 \text{ N}$  ดังแสดงในรูปที่ 5.11 โดยที่แผ่นบางนี้มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น  $E$  เป็น  $72 \text{ GPa}$  และอัตราส่วนปัวซองส์  $\nu$  เป็น  $0.3$



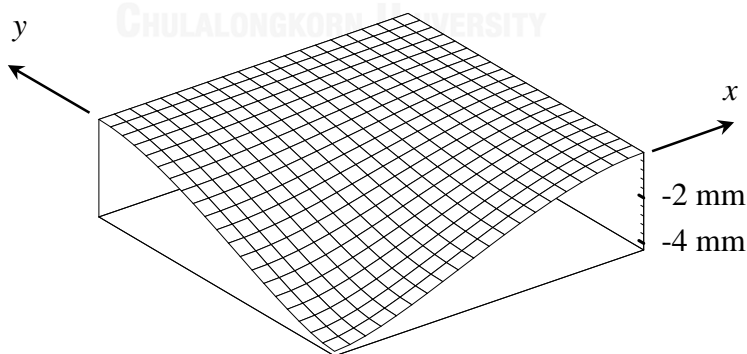
รูปที่ 5.11 แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางถูกแรงเดียวกระทำที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่น

ผลเฉลยแม่นยำตรงของค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนตั้ง  $w$  สูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางของแผ่นบางสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด  $a \times a$  ใดๆ ภายใต้แรงเดียวกระทำในแนวตั้ง  $F$  ที่ตำแหน่งกึ่งกลาง [52] คือ

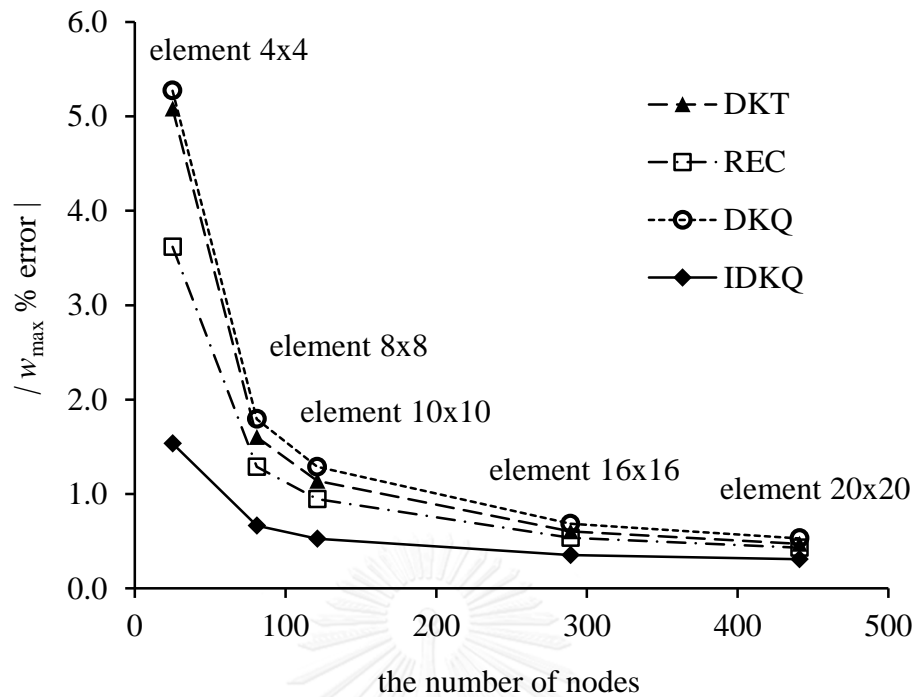
$$w_{\max} = 0.00560 \frac{Fa^4}{D} \quad (5.3)$$

เนื่องจากลักษณะของปัญหานี้มีความสมมาตรจึงนำเพียงพื้นที่หนึ่งในสี่ทางขวาบนของแผ่นบางในรูปที่ 5.11 มาใช้ในการคำนวณ จากนั้นจึงทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมติเคที เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าสี่จุดต่อ เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมติเคคิว และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคคิวโดยใช้จำนวนจุดต่อที่เท่ากัน ลักษณะการแบ่งโดเมนของปัญหาทั้งแบบเอลิเมนต์สามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมรวมไปถึงเงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ ของปัญหานี้มีลักษณะเช่นเดียวกันกับปัญหาแรกดังแสดงในรูปที่ 5.2 และ 5.3

รูปที่ 5.12 แสดงถึงลักษณะการเสียรูปของแผ่นบางนี้ที่คำนวณได้จากการใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคคิว ซึ่งจะเห็นได้ว่าแผ่นบางมีการเสียรูปในแนวแกนตั้งสูงสุดที่ตำแหน่งจุดกึ่งกลางแผ่น รูปที่ 5.13 แสดงเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสี่แบบในการวิเคราะห์ที่ตำแหน่งจุดกึ่งกลางแผ่นที่มีค่าการเสียรูปสูงสุดโดยพบว่า การคำนวณโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคคิวนั้นให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากกว่าเอลิเมนต์ชนิดอื่นที่จำนวนจุดต่อที่เท่ากัน และเมื่อเพิ่มจำนวนจุดต่อให้มากขึ้นพบว่า เอลิเมนต์สามเหลี่ยมไอติเคคิวนั้นให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงมากกว่าเอลิเมนต์ชนิดอื่น ๆ กล่าวคือ การคำนวณโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคคิวนั้นจะให้ผลลัพธ์ที่ลู่เข้าสู่คำตอบได้รวดเร็วกว่าเอลิเมนต์ชนิดอื่น ๆ เมื่อมีการแบ่งเอลิเมนต์ให้มีความละเอียดมากขึ้น และเมื่อพิจารณาจากตารางที่ 5.3 ซึ่งแสดงค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของการเสียรูปในแนวแกนตั้งที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นที่คำนวณได้จากเอลิเมนต์ทั้งสี่แบบโดยใช้เอลิเมนต์ละเอียดขนาด  $20 \times 20$  มีจำนวนจุดต่อ 441 จุดต่อ จะเห็นได้ว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคคิวนั้นให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากกว่าเอลิเมนต์ชนิดอื่น ๆ



รูปที่ 5.12 การเสียรูปของแผ่นบางโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคคิวในการวิเคราะห์



รูปที่ 5.13 การเปรียบเทียบค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของการเสียรูปในแนวแกนตั้งสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นที่คำนวณได้จากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสี่แบบ

ตารางที่ 5.3 การเปรียบเทียบค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นจากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสี่แบบ

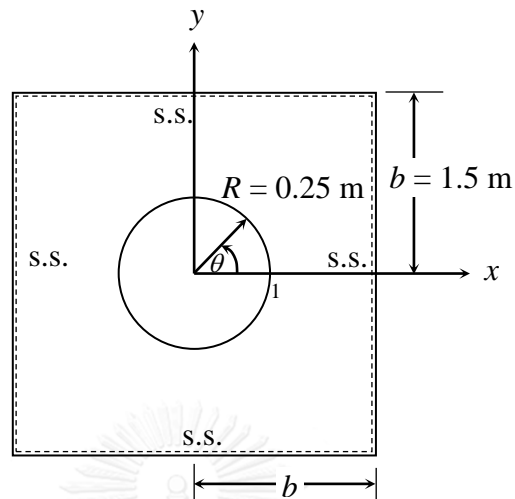
	ระยะการเสียรูปในแนวตั้งสูงสุด (mm)	ค่าความคลาดเคลื่อน (%)
ผลเฉลยแม่นยำตรง	- 4.0768	-
เอลิเมนต์สามเหลี่ยมดีเคที	- 4.0961	0.47
เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าสี่จุดต่อ	- 4.0944	0.43
เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดีเคคิว	- 4.0984	0.53
เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอดีเคคิว	- 4.0894	0.31

#### 5.1.4 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลาง

แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางขนาด  $3 \times 3 \text{ m}^2$ หนา  $0.01 \text{ m}$  มีรูกลมตรงกลางรัศมี  $R = 0.25 \text{ m}$  ภายใต้แรงกระทำแบบกระจายในแนวตั้งคองที่  $p = 1,000 \text{ N/m}^2$  กระทำตลอดทั้งแผ่น โดยที่แผ่นบาง



นี้มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น  $E$  เป็น 190 GPa และอัตราส่วนปัวซองส์  $\nu$  เป็น 0.3 โดยแผ่นบางนี้มีการรองรับด้วยลิ้มตลอดขอบทั้งสี่ด้านและขอบรูปกลมด้านในถูกปล่อยอย่างอิสระดังรูปที่ 5.14

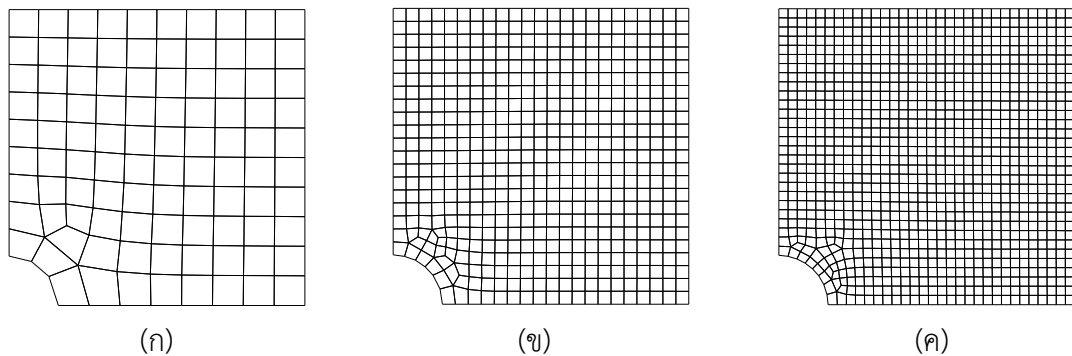


รูปที่ 5.14 แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสบางที่มีรูกลมตรงกลางภายใต้แรงกระจาย

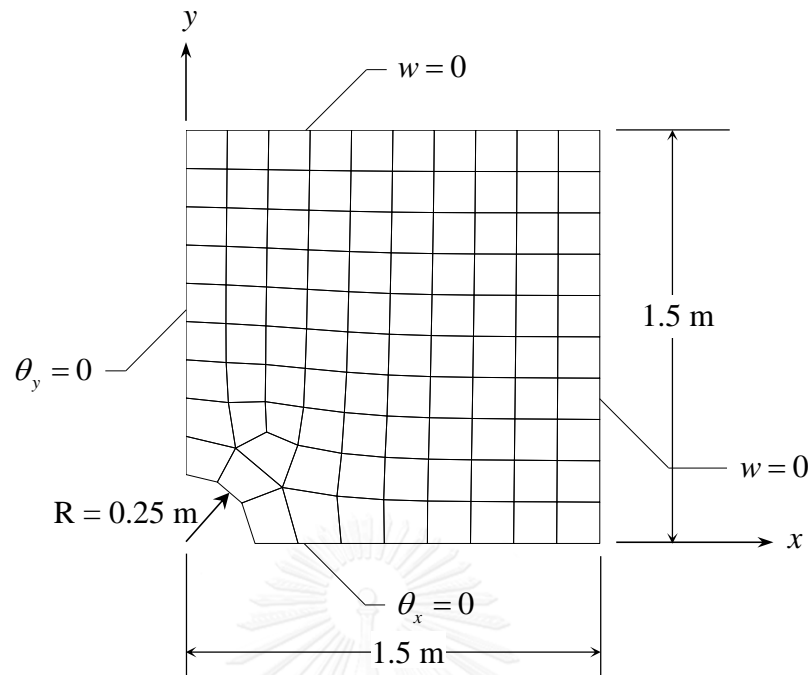
ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนตั้งที่ตำแหน่ง 1 (ที่ขอบรูปกลมบนแกน  $x$ ) [53] คือ

$$w_1 = 0.004492 \frac{pa^4}{D} \quad (5.4)$$

เนื่องจากลักษณะของปัญหาที่มีความสมมาตร เราจึงนำพื้นที่เพียงหนึ่งในสี่ทางขวาบนของแผ่นบางในรูปที่ 5.14 มาใช้ในการคำนวณ ทำการวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสี่เหลี่ยมและไอเคเคิวขนาดสม่ำเสมอตลอดทั้งโดเมนที่ประกอบไปด้วย (ก) 119 จุดต่อ 98 เอลิเมนต์ (ข) 565 จุดต่อ 519 เอลิเมนต์ (ค) 1,071 จุดต่อ 1,007 เอลิเมนต์ โดยลักษณะการแบ่งโดเมนแสดงไว้ในรูปที่ 5.15 และการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตแสดงไว้ในรูปที่ 5.16

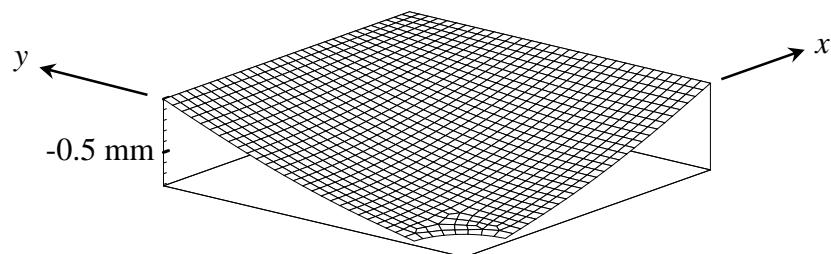


รูปที่ 5.15 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลางโดยใช้เอลิเมนต์ขนาดสม่ำเสมอตลอดทั้งโดเมน

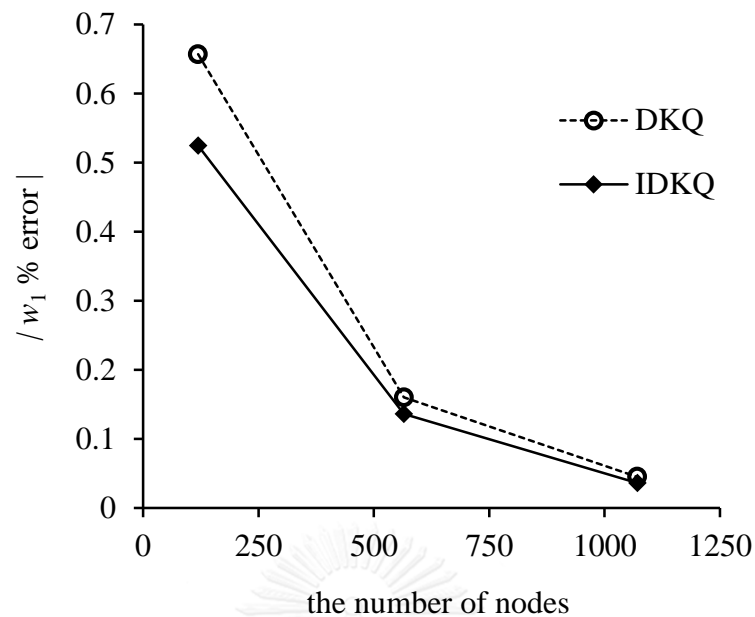


รูปที่ 5.16 รูปแบบโดเมนของปัญหาและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา

ลักษณะการเสียรูปของแผ่นบางนี้ที่คำนวณได้จากการใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควแสดงไว้ในรูปที่ 5.17 พิจารณาค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งที่ตำแหน่งที่ 1 พบว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควนั้นให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากกว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควอยู่เล็กน้อยดังแสดงในรูปที่ 5.18 และตารางที่ 5.4 ซึ่งแสดงค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของการเสียรูปในแนวแกนตั้งที่ตำแหน่งที่ 1 ที่คำนวณโดยใช้เอลิเมนต์จำนวน 1,007 เอลิเมนต์ จำนวนจุดต่อ 1,071 จุดต่อ



รูปที่ 5.17 การเสียรูปของแผ่นบางโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควในการวิเคราะห์



รูปที่ 5.18 การเปรียบเทียบค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของการเสีรูปร่างในแนวแกนตั้งที่ตำแหน่งที่ 1 ที่คำนวณได้จากการใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดีเคคิวและไอดีเคคิว

ตารางที่ 5.4 การเปรียบเทียบค่าการเสีรูปร่างในแนวแกนตั้งที่ตำแหน่งที่ 1 จากการใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดีเคคิวและไอดีเคคิว

	ระยะการเสีรูปร่างใน แนวตั้งที่ตำแหน่งที่ 1 (mm)	
	ค่าความคลาดเคลื่อน (%)	
ผลเฉลยแม่นยำตรง	- 0.77452	-
เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดีเคคิว	- 0.77417	0.045
เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอดีเคคิว	- 0.77424	0.036

## 5.2 ปัญหาการโค้งของแผ่นบางเนื่องจากภาวะทางความร้อน

นอกจากปัญหาการการโค้งของแผ่นบางอันเนื่องมาจากแรงกระทำทางกลแล้ว ยังมีปัญหาการโค้งของแผ่นบางอีกแบบหนึ่ง นั่นคือ ปัญหาการโค้งของแผ่นบางเนื่องจากภาวะทางความร้อนสืบเนื่องจากการที่แผ่นบางมีอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปตลอดความหนาของแผ่นบาง โดยปัญหาที่นำมาวิเคราะห์มีดังต่อไปนี้

### 5.2.1 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่รองรับด้วยลิ่มตลอดขอบสองด้าน

แผ่นบางสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด  $2 \times 2 \text{ m}^2$  หนา  $0.01 \text{ m}$  มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้นโดยอุณหภูมิตลอดผิวด้านบน ( $T_U$ ) เป็น  $60 \text{ }^\circ\text{C}$  และอุณหภูมิตลอดผิวด้านล่าง ( $T_L$ ) เป็น  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  ดังแสดงในรูปที่ 5.19 โดยที่แผ่นบางนี้มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น  $E$  เป็น  $190 \text{ GPa}$  อัตราส่วนปัวซองส์  $\nu$  เป็น  $0.3$  และมีค่าสัมประสิทธิ์การกระจายความร้อน (the coefficient of thermal expansion,  $\alpha$ ) เป็น  $16 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$  แผ่นบางนี้รองรับด้วยลิ่มตลอดขอบสองด้านซ้ายขวา (ที่  $x = 0$  และ  $x = 2$ ) และถูกปล่อยอิสระตลอดขอบสองด้านบนและล่าง (ที่  $y = 1$  และ  $y = -1$ ) โดยผลเฉลยแม่นยำตรงของค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้ง  $w$  ของปัญหานี้คือ [54]

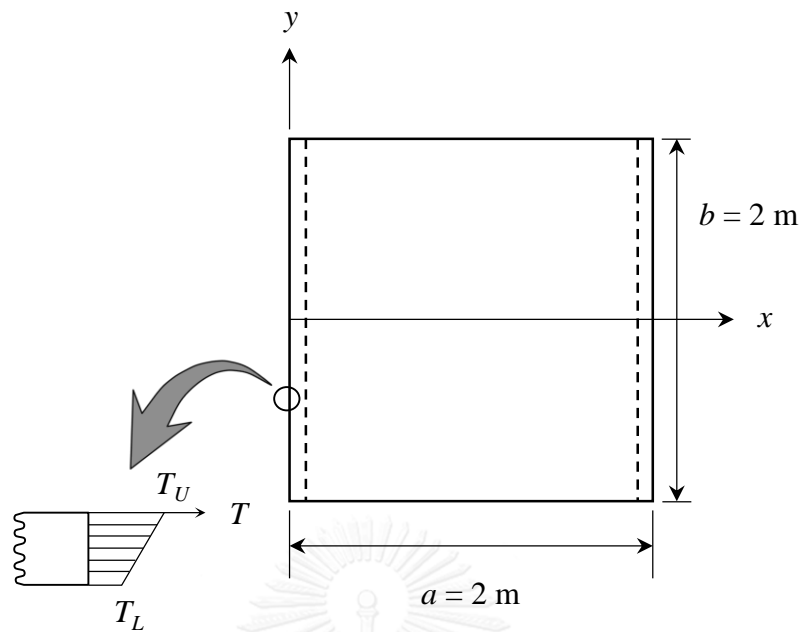
$$w(x, y) = (1+\nu) \frac{\alpha \Delta T}{t} \frac{4a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin \alpha_n x}{n^3} (1 + A_n \cosh \alpha_n y + B_n \alpha_n y \sinh \alpha_n y) \quad (5.5)$$

โดยที่  $\alpha_n = \frac{n\pi}{a}$

$$\beta_n = \frac{n\pi b}{a}$$

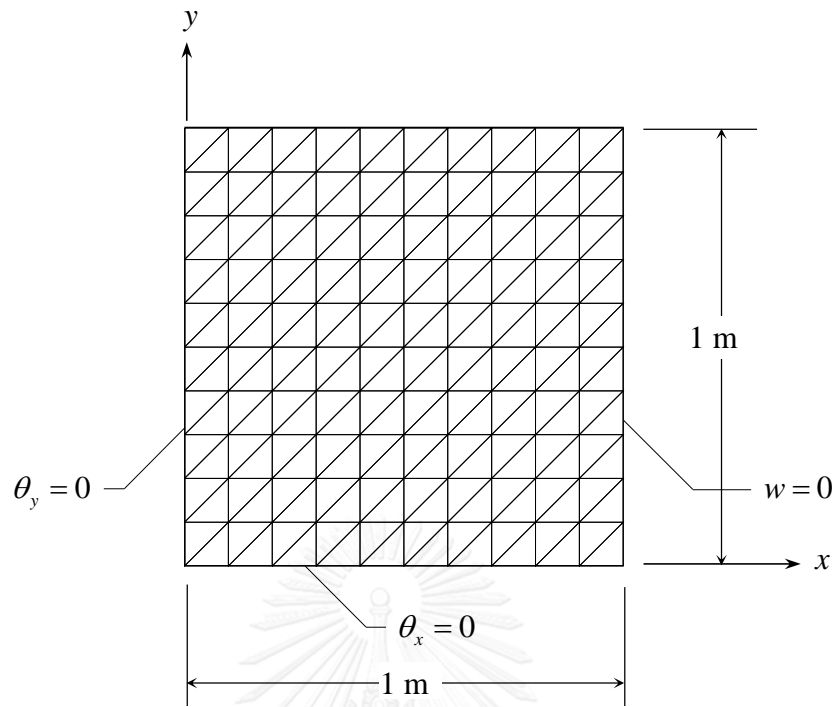
$$A_n = \frac{(1-\nu) \frac{\beta_n}{2} \coth \frac{\beta_n}{2} - (1+\nu)}{(3+\nu) \cosh \frac{\beta_n}{2} - \frac{(1-\nu) \frac{\beta_n}{2}}{\sinh \frac{\beta_n}{2}}}$$

$$B_n = \frac{1-\nu}{(3+\nu) \cosh \frac{\beta_n}{2} - \frac{(1-\nu) \frac{\beta_n}{2}}{\sinh \frac{\beta_n}{2}}}$$

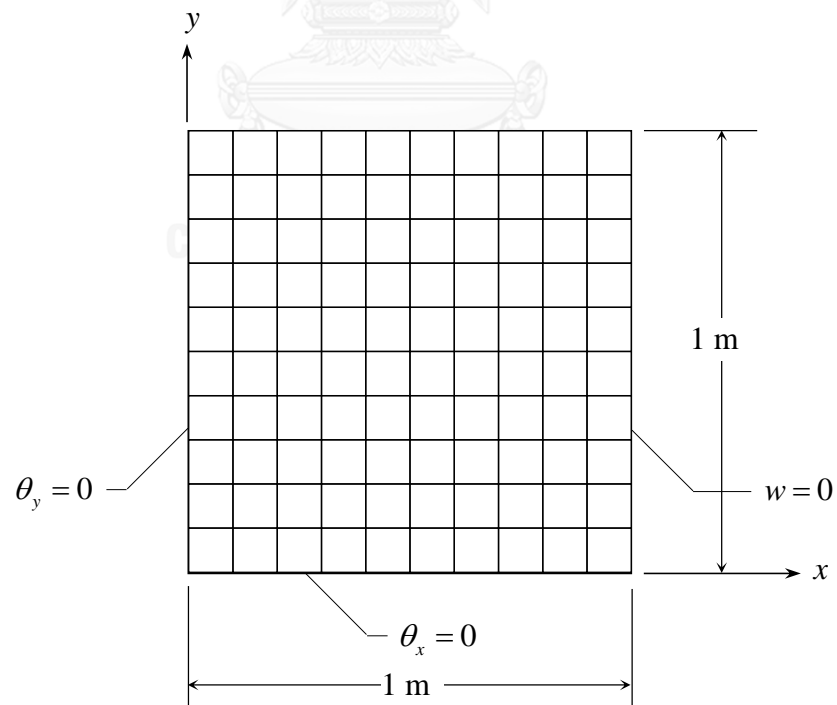


รูปที่ 5.19 แผ่นบางสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่รองรับด้วยลิมิตลอดขอบสองด้านและมีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาแบบเชิงเส้น

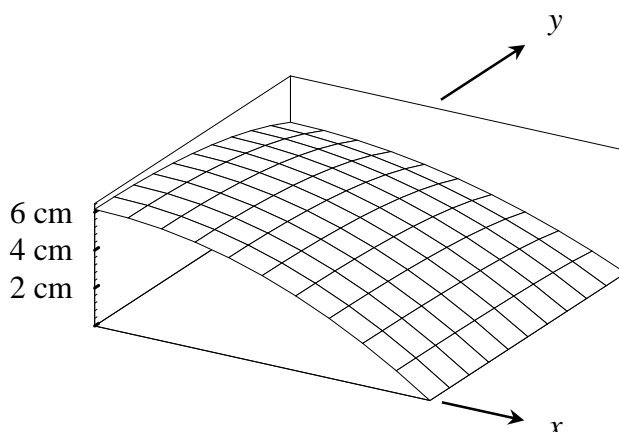
จากนั้นทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมติเคที เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่จูดต่อ เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมติเคคิว และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคคิว โดยเนื่องจากปัญหานี้มีความสมมาตร ดังนั้นจึงนำเพียงพื้นที่หนึ่งในสี่ทางด้านขวาบนของแผ่นบางในรูปที่ 5.19 มาใช้ในการวิเคราะห์ รูปที่ 5.20 และ 5.21 แสดงถึงลักษณะการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม รวมถึงการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ ของปัญหานี้ ลักษณะการเสียรูปของแผ่นบางที่คำนวณได้โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคคิวเป็นดังรูปที่ 5.22



รูปที่ 5.20 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สามเหลี่ยมและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา



รูปที่ 5.21 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา

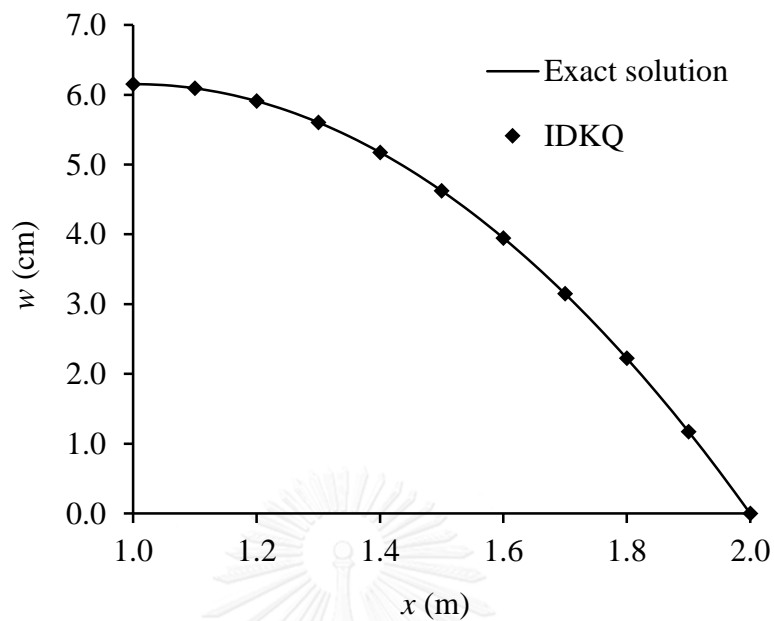


รูปที่ 5.22 การเสียรูปของแผ่นบางโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควในการวิเคราะห์

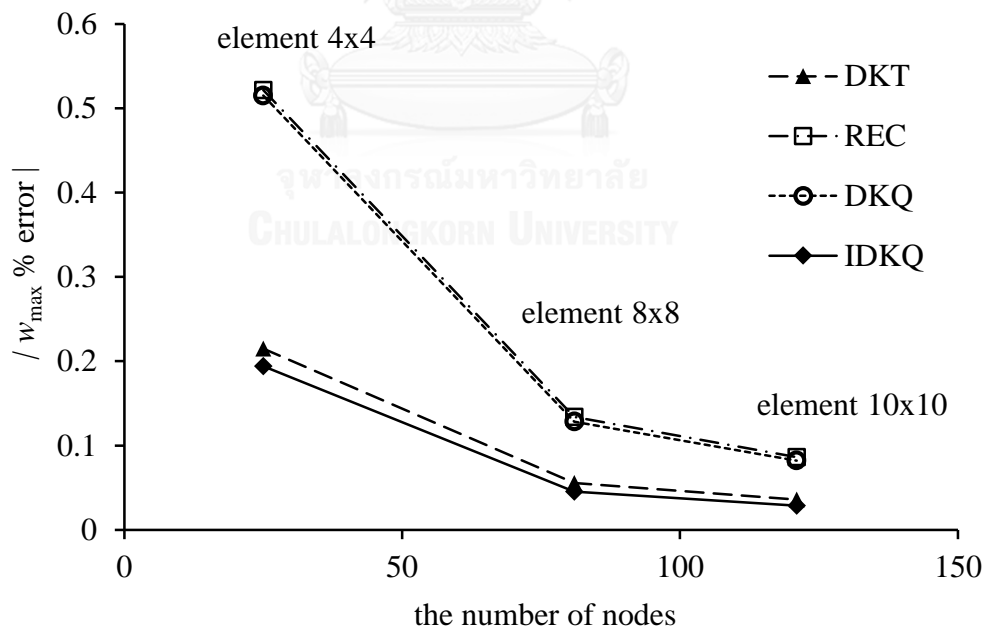
พิจารณาค่าระยะการเสียรูปในแนวแกนตั้ง  $w$  ตลอดแนวแกน  $x$  ด้วยเอลิเมนต์ขนาด  $10 \times 10$  พบว่าค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งที่ได้จากเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำตรงดังแสดงในรูปที่ 5.23 เมื่อพิจารณาค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้เอลิเมนต์ทั้ง 4 แบบในการวิเคราะห์ที่ตำแหน่งจุดกึ่งกลางแผ่นเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงดังแสดงในรูปที่ 5.24 พบว่าด้วยจำนวนจุดต่อที่เพิ่มมากขึ้นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควนั้นให้ผลลัพธ์ที่มีการลู่เข้าที่ดีและให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงมากกว่าเอลิเมนต์ชนิดอื่น และเมื่อพิจารณาจากตารางที่ 5.5 ซึ่งแสดงค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของการเสียรูปในแนวแกนตั้งที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นที่คำนวณได้จากเอลิเมนต์ทั้ง 4 แบบโดยใช้เอลิเมนต์ละเอียดขนาด  $10 \times 10$  มีจำนวนจุดต่อ 121 จุดต่อ จะเห็นได้ชัดว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควนั้นให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากกว่าเอลิเมนต์ชนิดอื่น ๆ

ตารางที่ 5.5 การเปรียบเทียบค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นจากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสี่แบบ

	ระยะการเสียรูปใน แนวตั้งสูงสุด (cm)	ค่าความคลาดเคลื่อน (%)
ผลเฉลยแม่นยำตรง	6.1540	-
เอลิเมนต์สามเหลี่ยมติเคที	6.1562	0.036
เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าสี่จุดต่อ	6.1593	0.086
เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมติเคคว	6.1591	0.082
เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคคว	6.1558	0.029



รูปที่ 5.23 การเสียรูปของแผ่นบางในแกนแนวดิ่ง  $w$  ตลอดแนวแกน  $x$  โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอดีเค  
 คิวเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง



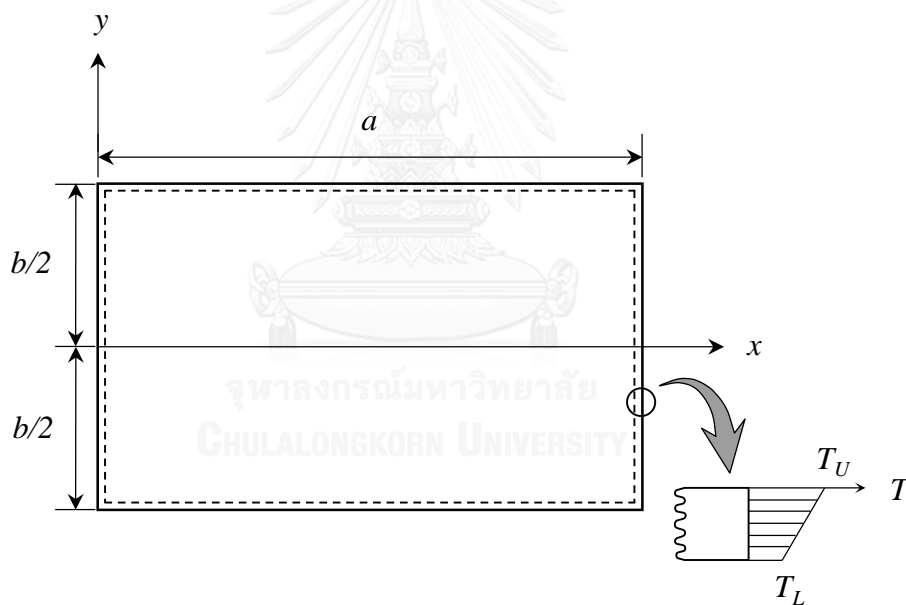
รูปที่ 5.24 การเปรียบเทียบค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของการเสียรูปในแนวแกนตั้งสูงสุดที่ตำแหน่ง  
 กึ่งกลางแผ่นที่คำนวณได้จากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสี่แบบ



### 5.2.2 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่รองรับด้วยลิ้มตลอดขอบทั้งสี่ด้าน

แผ่นบางสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด  $4 \times 2 \text{ m}^2$  หนา  $0.01 \text{ m}$  มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้นโดยอุณหภูมิตลอดผิวด้านบน ( $T_U$ ) เป็น  $100 \text{ }^\circ\text{C}$  และอุณหภูมิตลอดผิวด้านล่าง ( $T_L$ ) เป็น  $25 \text{ }^\circ\text{C}$  ดังแสดงในรูปที่ 5.25 โดยที่แผ่นบางนี้มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น  $E$  เป็น  $72 \text{ GPa}$  อัตราส่วนปัวซองส์  $\nu$  เป็น  $0.33$  และมีค่าสัมประสิทธิ์การกระจายความร้อน  $\alpha$  เป็น  $2.3 \times 10^{-7} / ^\circ\text{C}$  แผ่นบางนี้รองรับด้วยลิ้มตลอดขอบทั้งสี่ด้านโดยผลเฉลยแม่นยำตรงของค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้ง  $w$  ของปัญหานี้คือ [55]

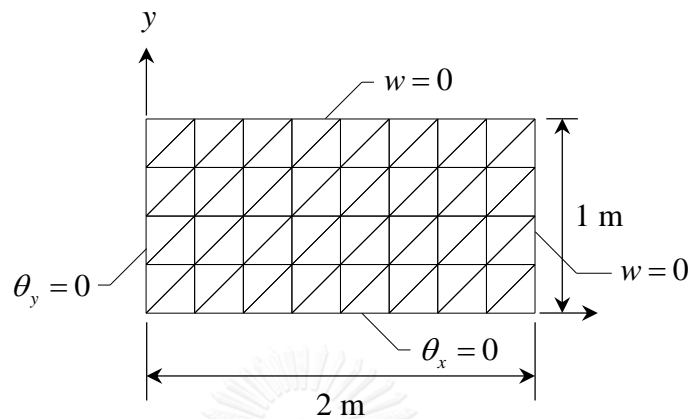
$$w(x, y) = \frac{4\alpha\Delta T(1+\nu)a^2}{\pi^3 t} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^3} \sin \frac{m\pi x}{a} \left[ 1 - \frac{\cosh\left(\frac{m\pi y}{a}\right)}{\cosh\left(\frac{m\pi b}{2a}\right)} \right] \quad (5.6)$$



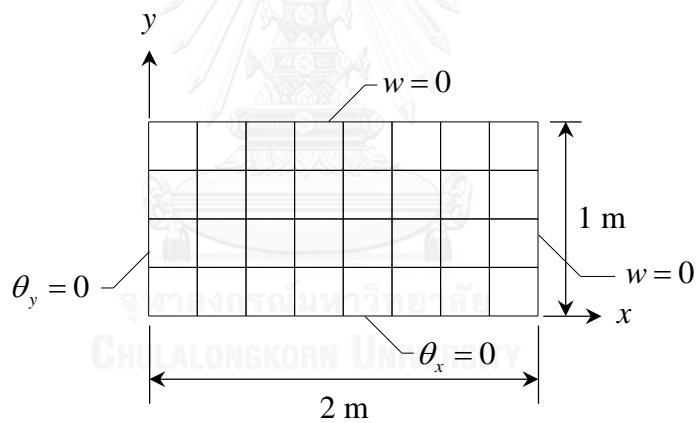
รูปที่ 5.25 แผ่นบางสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่รองรับด้วยลิ้มตลอดขอบทั้งสี่ด้านและมีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาแบบเชิงเส้น

ทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมดีเคที เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าสี่จุดต่อ เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดีเคคิว และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอดีเคคิว โดยเนื่องจากลักษณะของปัญหานี้มีความสมมาตร ดังนั้นจึงนำเพียงพื้นที่หนึ่งในสี่ทางด้านขวาบนของแผ่นบางในรูปที่ 5.25 มาใช้ในการวิเคราะห์ รูปที่ 5.26 และ 5.27 แสดงถึงลักษณะการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์

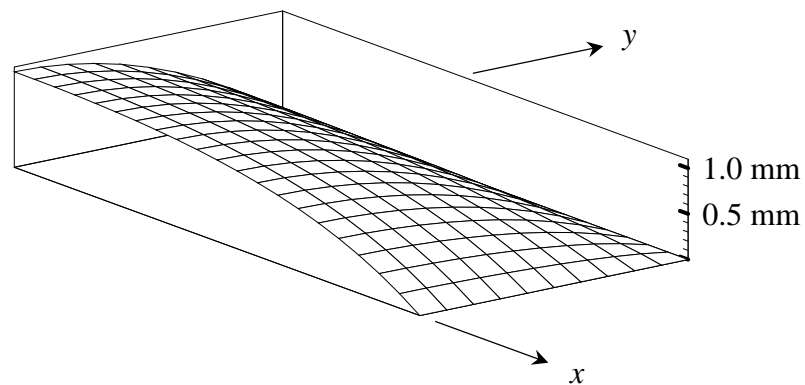
สามเหลี่ยม และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม รวมถึงการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ ของปัญหานี้ ลักษณะการเสียรูปของแผ่นบางที่คำนวณได้โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควเป็นดังรูปที่ 5.28



รูปที่ 5.26 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สามเหลี่ยมและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา

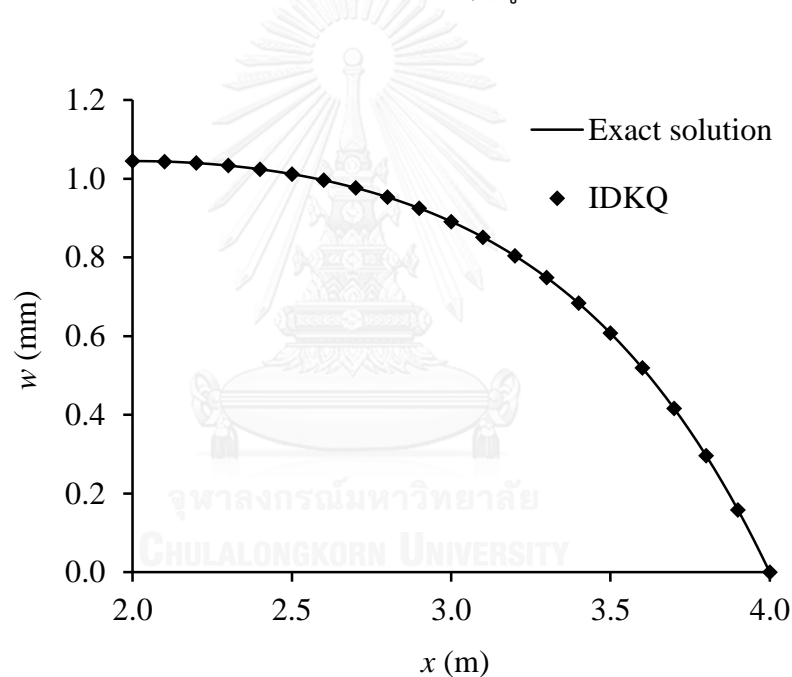


รูปที่ 5.27 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา

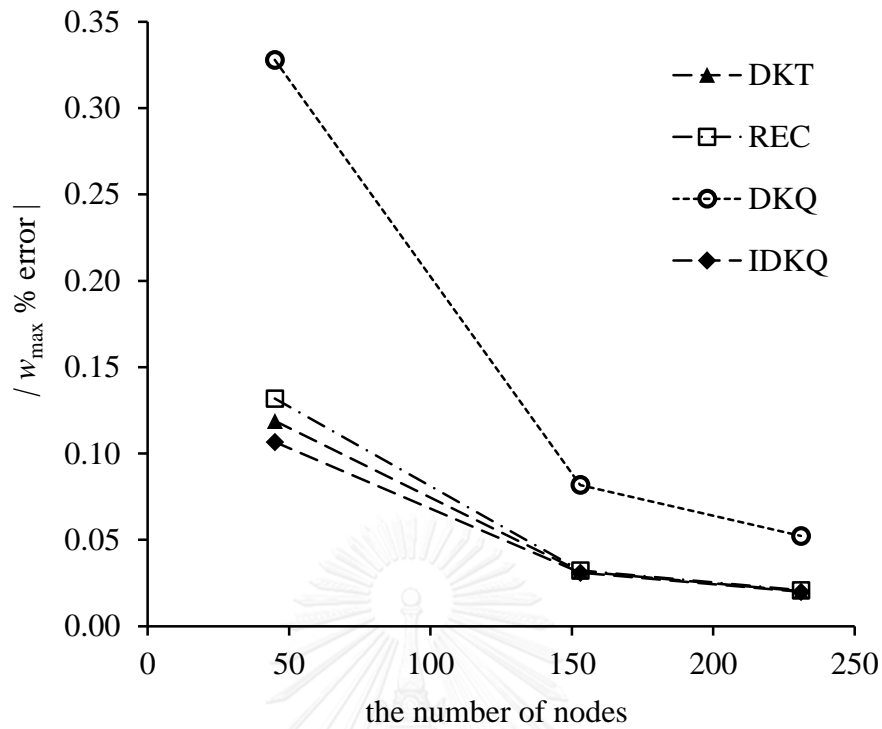


รูปที่ 5.28 การเสียรูปของแผ่นบางโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควในการวิเคราะห์

รูปที่ 5.29 แสดงค่าการเสียรูปในแนวตั้ง  $w$  ตลอดแนวแกน  $x$  ด้วยเอลิเมนต์ขนาด  $20 \times 10$  โดยพบว่าค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งที่ได้จากเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำตรง เมื่อพิจารณาค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้เอลิเมนต์ทั้ง 4 แบบในการวิเคราะห์ที่ตำแหน่งจุดกึ่งกลางแผ่นเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงดังแสดงในรูปที่ 5.30 พบว่าการคำนวณโดยใช้เอลิเมนต์ทั้ง 4 แบบนั้นให้ผลลัพธ์ที่ค่อนข้างแม่นยำ และด้วยจำนวนจุดต่อที่เพิ่มมากขึ้นจะให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงมากยิ่งขึ้น โดยจากตารางที่ 5.6 ซึ่งแสดงค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของการเสียรูปในแนวแกนตั้งที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นที่คำนวณได้จากเอลิเมนต์ทั้ง 4 แบบโดยใช้เอลิเมนต์ละเอียดยขนาด  $20 \times 10$  มีจำนวนจุดต่อ 231 จุดต่อ จะเห็นได้ว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควนั้นให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากกว่าเอลิเมนต์ชนิดอื่น ๆ อยู่เล็กน้อย



รูปที่ 5.29 การเสียรูปของแผ่นบางในแกนแนวตั้ง  $w$  ตลอดแนวแกน  $x$  โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง



รูปที่ 5.30 การเปรียบเทียบค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของการเสียรูปในแนวแกนดิ่งสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นที่คำนวณได้จากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสี่แบบ

ตารางที่ 5.6 การเปรียบเทียบค่าการเสียรูปในแนวแกนดิ่งสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นจากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสี่แบบ

	ระยะการเสียรูปใน แนวดิ่งสูงสุด (mm)	ค่าความคลาดเคลื่อน (%)
ผลเฉลยแม่นยำตรง	1.04500	-
เอลิเมนต์สามเหลี่ยมดีเคที	1.04479	0.0203
เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าสี่จุดต่อ	1.04522	0.0209
เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดีเคคิว	1.04555	0.0523
เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอดีเคคิว	1.04521	0.0198

### 5.2.3 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ขอบรองรับด้วยลิ้มและถูกยึดแน่น

แผ่นบางสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด  $2 \times 4 \text{ m}^2$  หนา  $0.01 \text{ m}$  มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้นโดยอุณหภูมิตลอดผิวด้านบน ( $T_U$ ) เป็น  $60 \text{ }^\circ\text{C}$  และอุณหภูมิตลอดผิวด้านล่าง ( $T_L$ ) เป็น  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  ดังแสดงในรูปที่ 5.31 โดยที่แผ่นบางนี้มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น  $E$  เป็น  $190 \text{ GPa}$  อัตราส่วนปัวซองส์  $\nu$  เป็น  $0.3$  และมีค่าสัมประสิทธิ์การกระจายความร้อน  $\alpha$  เป็น  $16 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$  แผ่นบางนี้รองรับด้วยลิ้มตลอดขอบสองด้านซ้ายขวา (ที่  $x = 0$  และ  $x = 2$ ) และถูกยึดแน่นตลอดขอบสองด้านบนและล่าง (ที่  $y = 2$  และ  $y = -2$ ) โดยผลเฉลยแม่นยำตรงของค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้ง  $w$  ของปัญหานี้คือ [56]

$$w(x, y) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} (A_m \cosh \alpha_m y + D_m y \sinh \alpha_m y + K_m) \sin \alpha_m x \quad (5.7)$$

$$\text{โดยที่ } \alpha_m = \frac{m\pi}{a}$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

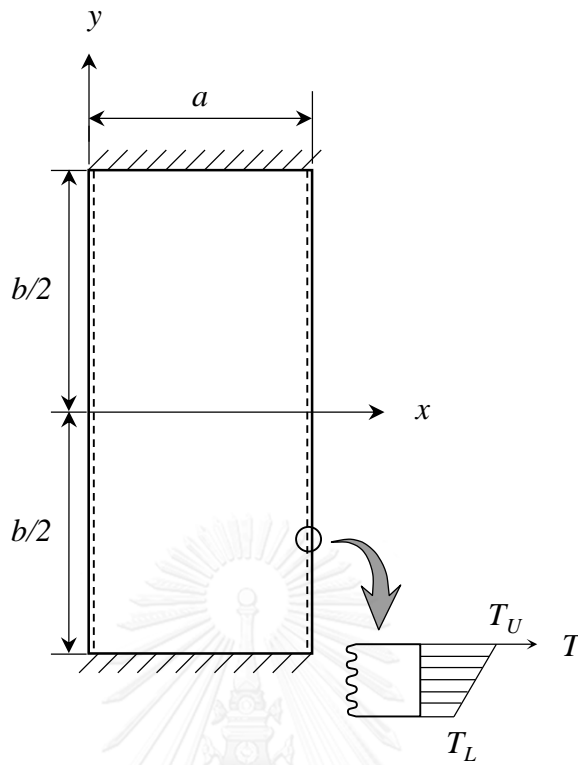
$$K_m = \frac{4M_T}{aD\alpha_m^3}$$

$$A_m = -K_m \left( \frac{1}{2} \alpha_m b \cosh \frac{1}{2} \alpha_m b + \sinh \frac{1}{2} \alpha_m b \right) / \Delta_m$$

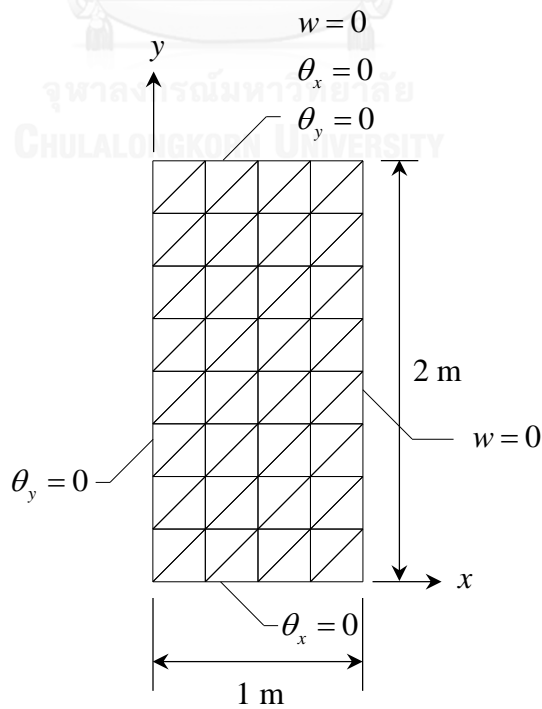
$$D_m = K_m \alpha_m \left( \sinh \frac{1}{2} \alpha_m b \right) / \Delta_m$$

$$\Delta_m = \frac{1}{2} \alpha_m b + \sinh \frac{1}{2} \alpha_m b \cosh \frac{1}{2} \alpha_m b$$

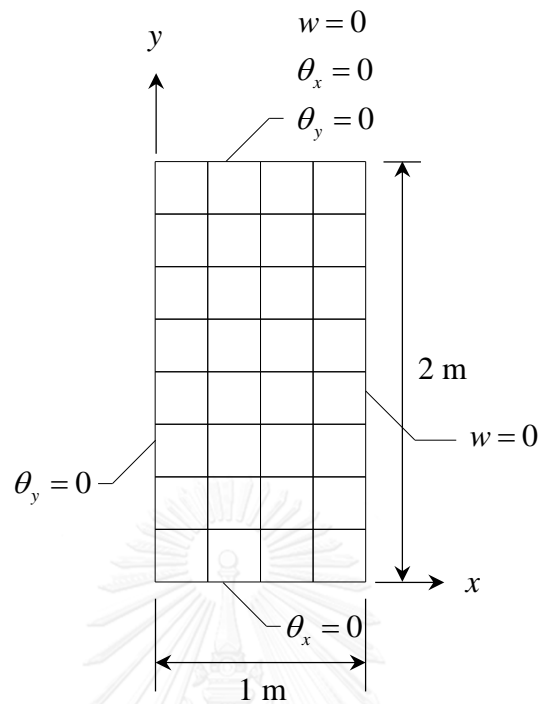
จากนั้นทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมติเคที เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าสี่จุดต่อ เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมติเคคิว และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคคิว โดยเนื่องจากปัญหานี้มีความสมมาตร ดังนั้นจึงนำเพียงพื้นที่หนึ่งในสี่ทางด้านขวาบนของแผ่นบางในรูปที่ 5.31 มาใช้ในการวิเคราะห์ รูปที่ 5.32 และ 5.33 แสดงถึงลักษณะการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม รวมถึงการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ ของปัญหานี้ ลักษณะการเสียรูปของแผ่นบางที่คำนวณได้โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคคิวเป็นดังรูปที่ 5.34



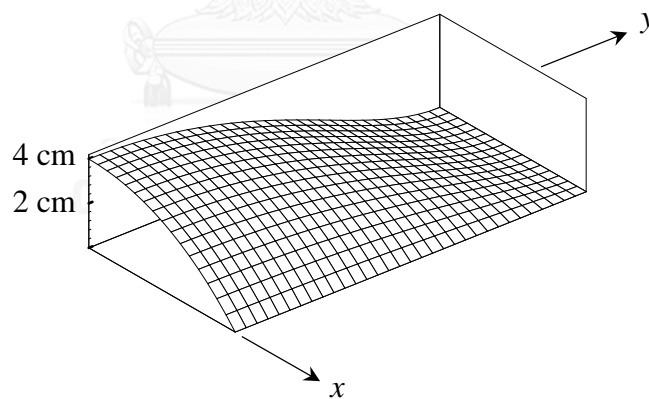
รูปที่ 5.31 แผ่นบางสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ขอบรองรับด้วยลิ้มและถูกยึดแน่นและมีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาแบบเชิงเส้น



รูปที่ 5.32 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สามเหลี่ยมและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา



รูปที่ 5.33 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา



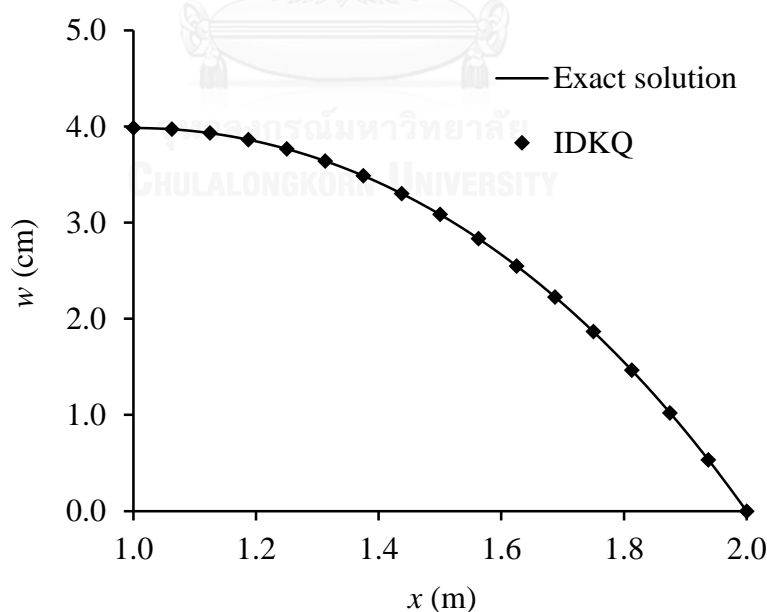
รูปที่ 5.34 การเสียรูปของแผ่นบางโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควในการวิเคราะห์

พิจารณาค่าระยะการเสียรูปในแนวตั้ง  $w$  ตลอดแนวแกน  $x$  ด้วยเอลิเมนต์ขนาด  $16 \times 32$  พบว่าค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งที่ได้จากเอลิเมนต์ทั้ง 4 แบบสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำตรงดังแสดงในรูปที่ 5.35 เมื่อพิจารณาค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้เอลิเมนต์ทั้ง 4 แบบในการวิเคราะห์ที่ตำแหน่งจุดกึ่งกลางแผ่นเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงดังแสดงในรูปที่ 5.36 พบว่าด้วยจำนวนจุดต่อที่เพิ่มมากขึ้นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควนั้นให้ผลลัพธ์ที่มีการลู่อเข้าที่ดีและให้ผลลัพธ์ที่

ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงมากกว่าเอลิเมนต์ชนิดอื่น และเมื่อพิจารณาจากตารางที่ 5.7 ซึ่งแสดงค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของการเสียรูปในแนวแกนดิ่งที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นที่คำนวณได้จากเอลิเมนต์ทั้ง 4 แบบโดยใช้เอลิเมนต์ละเอียดขนาด  $16 \times 32$  มีจำนวนจุดต่อ 561 จุดต่อ จะเห็นได้ชัดว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอดีเคควนั้นให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากกว่าเอลิเมนต์ชนิดอื่น ๆ

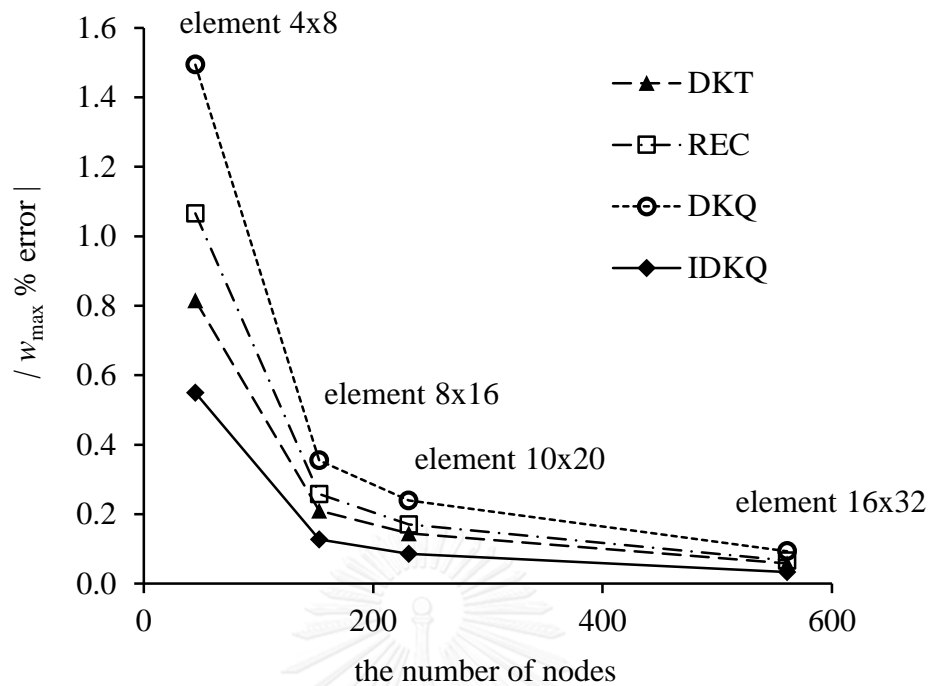
ตารางที่ 5.7 การเปรียบเทียบค่าการเสียรูปในแนวแกนดิ่งสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นจากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสี่แบบ

	ระยะการเสียรูปใน แนวดิ่งสูงสุด (cm)	ค่าความคลาดเคลื่อน (%)
ผลเฉลยแม่นยำตรง	3.9859	-
เอลิเมนต์สามเหลี่ยมดีเคที	3.9882	0.058
เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าสี่จุดต่อ	3.9885	0.067
เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดีเคคว	3.9896	0.093
เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอดีเคคว	3.9872	0.033



รูปที่ 5.35 การเสียรูปของแผ่นบางในแกนแนวดิ่ง  $w$  ตลอดแนวแกน  $x$  โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอดีเคควเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง



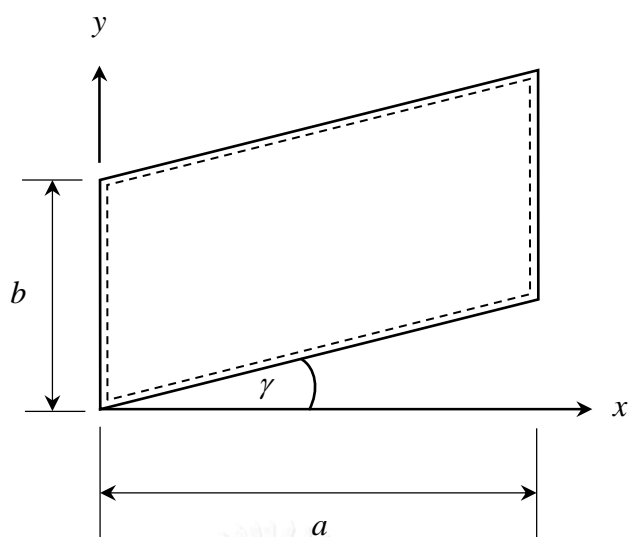


รูปที่ 5.36 การเปรียบเทียบค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของการเสี้ยวรูปในแนวแกนตั้งสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นที่คำนวณได้จากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสี่แบบ

#### 5.2.4 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ขอบรองรับด้วยลิ้ม

แผ่นบางสี่เหลี่ยมด้านขนานขนาดดังรูปที่ 5.37 มีขนาด  $a = 3$  m และ  $b = 2$  mหนา 0.01 m มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้นโดยอุณหภูมิตลอดผิวด้านบน ( $T_U$ ) เป็น  $60$  °C และอุณหภูมิตลอดผิวด้านล่าง ( $T_L$ ) เป็น  $0$  °C โดยที่แผ่นบางนี้มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น  $E$  เป็น 190 GPa อัตราส่วนปัวซองส์  $\nu$  เป็น 0.3 และมีค่าสัมประสิทธิ์การกระจายความร้อน  $\alpha$  เป็น  $16 \times 10^{-6}$  /°C แผ่นบางนี้รองรับด้วยลิ้มตลอดขอบทั้งสี่ด้าน โดยผลเฉลยแม่นยำตรงของค่าการเสี้ยวรูปในแนวแกนตั้ง  $w$  ที่ตำแหน่งกึ่งกลางของปัญหานี้คือ [57]

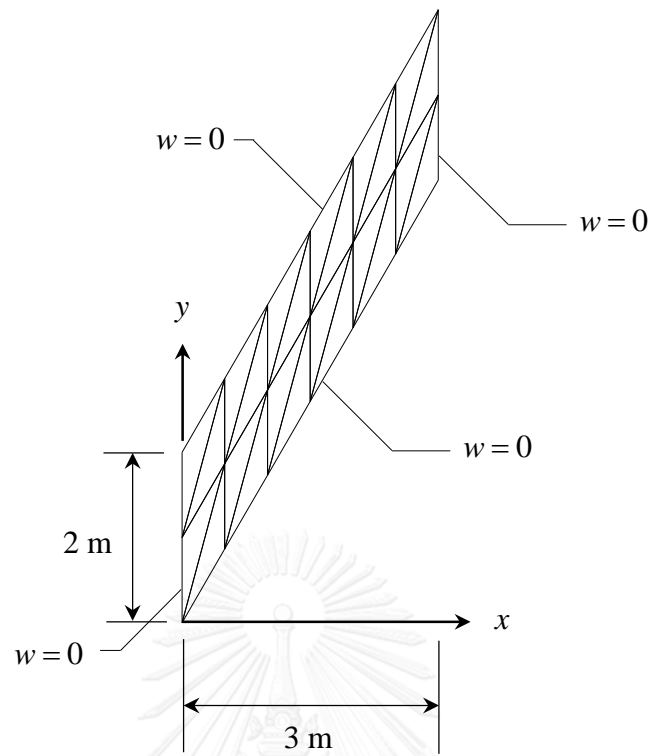
$$w_c = 0.31230 \frac{M_T b^2}{D} 10^{-1} \quad (5.8)$$



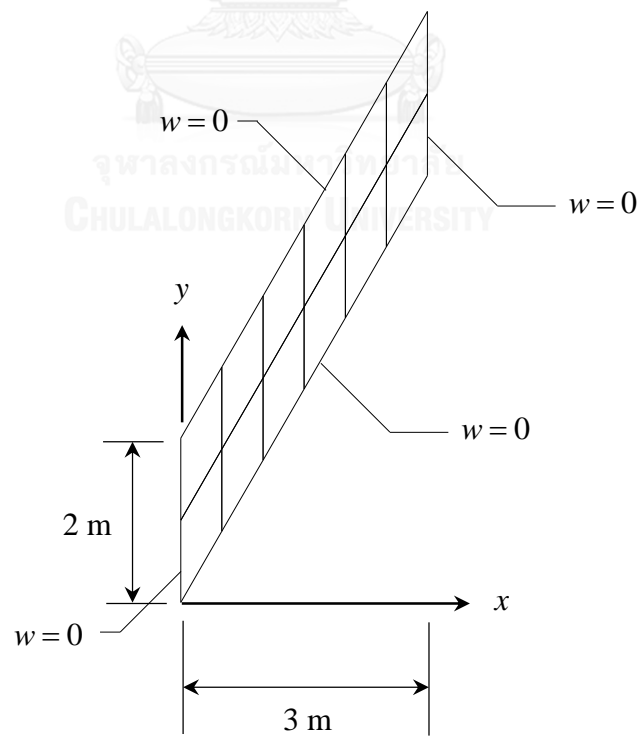
รูปที่ 5.37 แผ่นบางสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ขอบรองรับด้วยลิ้มและมีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาแบบเชิงเส้น

จากนั้นทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมติเคที เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมติเคคว และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบไอติเคคว โดยรูปที่ 5.38 และ 5.39 แสดงถึงลักษณะการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม รวมถึงการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ ของปัญหานี้ ลักษณะการเสียรูปของแผ่นบางที่คำนวณได้โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควเป็นดังรูปที่ 5.40

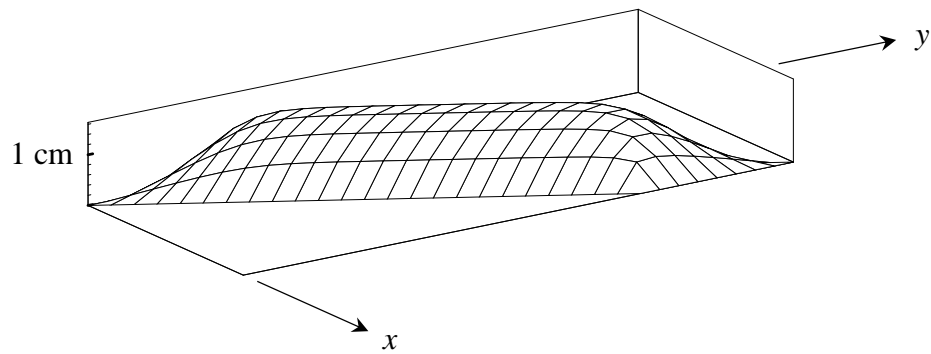
พิจารณาค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้เอลิเมนต์ทั้ง 3 แบบในการวิเคราะห์ที่ตำแหน่งจุดกึ่งกลางแผ่นเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงดังแสดงในรูปที่ 5.41 พบว่าด้วยจำนวนจุดต่อที่เพิ่มมากขึ้นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมติเคควและไอติเคควนั้นให้ผลลัพธ์ที่มีการลู่เข้าที่ดีและให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงมากกว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยมติเคที และเมื่อพิจารณาจากตารางที่ 5.8 ซึ่งแสดงค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของการเสียรูปในแนวแกนตั้งที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นที่คำนวณได้จากเอลิเมนต์ทั้ง 3 แบบโดยใช้เอลิเมนต์ละเอียดขนาด  $18 \times 6$  มีจำนวนจุดต่อ 133 จุดต่อ พบว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควนั้นให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากกว่าเอลิเมนต์ชนิดอื่น ๆ



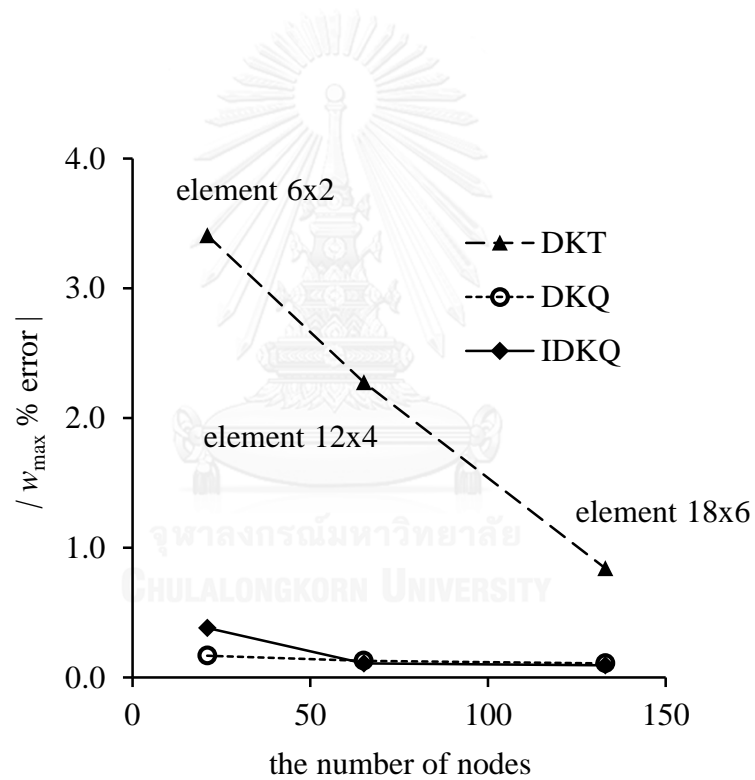
รูปที่ 5.38 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สามเหลี่ยมและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา



รูปที่ 5.39 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา



รูปที่ 5.40 การเสียรูปของแผ่นบางโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควในการวิเคราะห์



รูปที่ 5.41 การเปรียบเทียบค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของการเสียรูปในแนวแกนตั้งสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นที่คำนวณได้จากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสี่แบบ

ตารางที่ 5.8 การเปรียบเทียบค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นจากการใช้เอลิเมนต์ทั้งสามแบบ

	ระยะการเสียรูปใน แนวตั้งสูงสุด (cm)	ค่าความคลาดเคลื่อน (%)
ผลเฉลยแม่นยำตรง	1.5590	-
เอลิเมนต์สามเหลี่ยมดีเคที	1.5459	0.843
เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดีเคคิว	1.5607	0.109
เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอดีเคคิว	1.5605	0.095

### 5.3 บทสรุป

ในบทนี้ เราได้นำโปรแกรม PLATEIDKQ มาวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางที่เราทราบผลเฉลยทั้งปัญหาการโก่งของแผ่นบางอันเนื่องมาจากแรงกระทำตั้งฉากทางกล และภาระทางความร้อน โดยพบว่าโปรแกรมมีความถูกต้อง ผลลัพธ์ที่คำนวณได้สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำตรง อีกทั้งเมื่อนำผลลัพธ์ที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้จากเอลิเมนต์ชนิดอื่นพบว่า เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอดีเคคิว นั้นให้ผลลัพธ์ที่แม่นยำมากกว่าเอลิเมนต์ชนิดอื่น ๆ อีกด้วย โดยในบทต่อไปจะได้กล่าวถึงเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ซึ่งจะช่วยให้โปรแกรมสามารถนำมาวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น

## บทที่ 6

### เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์

ขั้นตอนแรกของการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คือการแบ่งพื้นที่ภายในโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ แล้วจึงทำการคำนวณหาค่าตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้น ๆ หากต้องการให้ได้ความแม่นยำของคำตอบที่มากขึ้น เราจะต้องแบ่งโดเมนของปัญหานั้นออกเป็นเอลิเมนต์ขนาดเล็กลงตลอดทั้งโดเมนของปัญหา ซึ่งทำให้ต้องใช้เวลาในการคำนวณและใช้หน่วยความจำเป็นจำนวนมาก ดังนั้นการเลือกใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กเฉพาะแค่ในบริเวณที่เหมาะสมเท่านั้นจะทำให้ลดจำนวนจุดต่อหรือตัวไม่รู้ค่าที่ต้องทำการคำนวณลงได้ แต่ในการวิเคราะห์ปัญหาโดยทั่วไปนั้นเราไม่สามารถที่จะทราบผลเฉลยแม่นยำตรงก่อนล่วงหน้าได้ จึงไม่อาจทราบได้ว่าในบริเวณใดบ้างที่ควรใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กลงและในบริเวณใดที่ใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ขึ้นได้ จึงต้องอาศัยเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ [12] ในการปรับขนาดของเอลิเมนต์ให้มีขนาดที่เหมาะสมเพื่อช่วยเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์และช่วยลดเวลาและหน่วยความจำในการคำนวณลง ซึ่งในบทนี้จะได้กล่าวถึงหลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ (adaptive meshing technique) และการนำไปประยุกต์ใช้กับไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบาง

#### 6.1 หลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์

หลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ คือ จะทำการปรับใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของค่าความชันของคำตอบสูงและปรับใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่ในบริเวณอื่น โดยหลักการหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่าง ๆ ดังกล่าวนั้นจะอาศัยหลักการของการหาค่าความเค้นในแนวแกนหลัก (principal stress) [58] ในวิชากลศาสตร์ของแข็ง (solid mechanics) คือ ทำการหาค่าอนุพันธ์อันดับที่สองของคำตอบที่ใช้เป็นตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมซึ่งประกอบไปด้วย  $\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2}$  และ  $\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y}$  ซึ่งค่าต่าง ๆ เหล่านี้จะนำมาคำนวณหาค่าในแนวแกนหลักดังแสดงในรูปที่ 6.1 โดยที่  $\phi$  แทนตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์และตัวห้อย  $i$  แทนจุดต่อที่  $i$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial Y^2} \end{bmatrix}$$

รูปที่ 6.1 รูปแสดงหลักการการหาค่าในแนวแกนหลักและหลักการการหาค่าอนุพันธ์อันดับที่สองของตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์

ในการหาค่าอนุพันธ์อันดับที่สองของตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์  $\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2}$  และ  $\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y}$  นั้นสามารถหาได้ตามลำดับขั้นตอนดังนี้

เริ่มต้นโดยการกำหนดลักษณะการกระจายของค่าตัวบ่งชี้บนเอลิเมนต์ดังสมการ

$$\phi^{(e)} = [N] \{\phi\} \quad (6.1)$$

ดังนั้นค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งบนเอลิเมนต์ใด ๆ เทียบกับ  $x$  หาได้จากสมการ

$$\frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial x} = \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] \{\phi\} \quad (6.2)$$

ซึ่งค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ได้นี้เป็นค่าคงที่บนเอลิเมนต์นั้น ในขณะที่เดียวกันหากสมมติค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของตัวบ่งชี้บนเอลิเมนต์เนื่องจากค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของตัวบ่งชี้ที่จุดต่อต่าง ๆ ของเอลิเมนต์ดังสมการ

$$\frac{\partial \hat{\phi}^{(e)}}{\partial x} = [N] \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} \quad (6.3)$$

ทำการลบสมการ (6.3) ด้วยสมการ (6.2) แล้วประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างจะ  
ได้

$$\int_A \{N\} \left( \frac{\partial \hat{\phi}^{(e)}}{\partial x} - \frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial x} \right) dA = 0 \quad (6.4)$$

แทนสมการ (6.2) และสมการ (6.3) ในสมการ (6.4) จะได้

$$\int_A \{N\} [N] dA \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} = \int_A \{N\} \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] dA \{\phi\} \quad (6.5)$$

หรือ

$$[M] \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} = \int_A \{N\} \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] dA \{\phi\} \quad (6.6)$$

โดยที่  $[M]$  คือ เมทริกซ์มวลแบบแน่นอนดังสมการ

$$[M] = \int_A \{N\} [N] dA \quad (6.7)$$

สมการ (6.7) นั้นเป็นสมการของแต่ละเอลิเมนต์ ดังนั้นจึงต้องทำการคำนวณสำหรับทุกเอลิเมนต์แล้วรวมขึ้นเป็นระบบสมการใหญ่ ซึ่งหลังจากทำการแก้สมการแล้วจะได้ค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของคำตอบเทียบกับ  $x$  ที่จุดต่อใด ๆ

การคำนวณหาค่าอนุพันธ์อันดับที่สองสามารถดำเนินไปในแนวทางเดียวกัน กล่าวคือ หลังจากทราบค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งที่จุดต่อแล้วสามารถคำนวณค่าอนุพันธ์อันดับที่สองโดยเริ่มจากกำหนดลักษณะการกระจายของค่าอนุพันธ์อันดับสองของตัวบ่งชี้บนเอลิเมนต์ดังสมการ

$$\frac{\partial^2 \phi^{(e)}}{\partial x^2} = \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} \quad (6.8)$$

และสมมติค่าอนุพันธ์อันดับสองของตัวบ่งชี้บนเอลิเมนต์เนื่องจากค่าอนุพันธ์อันดับสองที่จุดต่อบนเอลิเมนต์ดังสมการ

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}^{(e)}}{\partial x^2} = [N] \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right\} \quad (6.9)$$

จากนั้นทำการประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตักค้างจะได้

$$\int_A \{N\} [N] dA \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right\} = \int_A \{N\} \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] dA \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} \quad (6.10)$$

หรือ

$$[M] \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right\} = \int_A \{N\} \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] dA \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} \quad (6.11)$$

ทำการแก้สมการ (6.11) จะได้ค่าอนุพันธ์อันดับสองของตัวบ่งชี้  $\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2}$  ที่จุดต่อต่าง ๆ ออกมา และสามารถหาค่าอนุพันธ์อันดับสองของตัวบ่งชี้  $\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2}$  และ  $\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y}$  ที่จุดต่อต่าง ๆ ออกมาได้ในการทำงานเดียวกัน

เมื่อเราทราบค่าอนุพันธ์อันดับสองของตัวบ่งชี้เหล่านี้แล้วจึงนำค่าเหล่านี้มาหาค่าอนุพันธ์อันดับสองของตัวบ่งชี้ในแนวแกนหลัก (principal values) โดยอาศัยหลักการของการหาค่าความเค้นในแนวแกนหลักในวิชากลศาสตร์ของแข็งดังในสมการ

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial X^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \right) + \sqrt{\left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \right) \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} \right)^2} \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial X^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \right) - \sqrt{\left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \right) \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} \right)^2} \quad (6.13)$$



เมื่อได้ค่าอนุพันธ์อันดับสองของตัวบ่งชี้ในแนวแกนหลัก  $\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial X^2}$  และ  $\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial Y^2}$  ออกมา ค่าที่มากที่สุดของทั้งสองค่าดังกล่าวจะถูกเลือกออกมาโดย

$$\lambda_i = \max \left( \left| \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial X^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial Y^2} \right| \right) \quad (6.14)$$

ค่าที่ถูกเลือก  $\lambda_i$  จะถูกนำมาใช้ในการหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่าง ๆ ต่อไปโดยอาศัยความสัมพันธ์

$$h_i^2 \lambda_i = \text{ค่าคงที่} = h_{\min}^2 \lambda_{\max} \quad (6.15)$$

โดย ค่า  $h_{\min}$  แทนขนาดของเอลิเมนต์ที่เล็กที่สุดที่กำหนดโดยผู้ใช้ และค่า  $\lambda_{\max}$  แทนค่าในแนวแกนหลักที่มากที่สุดของทั้งปัญหา ส่วนค่า  $h_i$  ที่จุดต่อต่าง ๆ ที่คำนวณได้นั้นจะถูกนำมาใช้ในการปรับขนาดด้วยโปรแกรม AUTOMESH-2D [59] ในรูปของค่าความหนาแน่นสัมพัทธ์ต่อไป รายละเอียดการใช้โปรแกรม AUTOMESH-2D โดยละเอียดแสดงไว้ในเอกสารอ้างอิง [60]

ไฟล์ข้อมูลนำเข้าเพื่อปรับขนาดเอลิเมนต์ด้วยโปรแกรม AUTOMESH-2D นั้นจะมีนามสกุล “.DST” โดยบรรทัดแรกจะบอกจำนวนจุดต่อทั้งหมด (ตามแบบจำลองเริ่มต้น) ส่วนบรรทัดต่อ ๆ มา จะแสดงรายละเอียดของแต่ละจุดต่อ ได้แก่ ค่าระบุมุมของโดเมน (ถ้าเป็น 0 คือ เป็นจุดที่ขอบของโดเมน และถ้าเป็น 1 คือ จุดภายในโดเมน) ค่าพิกัดแกน x ค่าพิกัดแกน y และค่าความหนาแน่นสัมพัทธ์ดังเช่นที่แสดงในรูปที่ 6.2

565			
0	1.500000	1.500000	1.000000
0	1.500000	1.434783	1.000000
0	1.434783	1.500000	1.000000
1	1.434775	1.434783	1.000000
0	1.500000	1.369565	1.000000
1	1.434765	1.369567	1.000000
0	1.500000	1.304348	1.000000
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
0	0.000000	0.513158	3.000000
0	0.000000	0.447368	5.000000
0	0.000000	0.381579	5.000000
0	0.000000	0.315789	5.000000
0	0.000000	0.250000	5.000000

รูปที่ 6.2 ตัวอย่างไฟล์ข้อมูลนำเข้าเพื่อปรับขนาดเอลิเมนต์

อนึ่ง สำหรับปัญหาการโก่งของแผ่นบางนี้ ตัวบ่งชี้ที่ใช้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมคือค่าความเค้น ซึ่งค่าความเค้นที่งานในทางวิศวกรรมส่วนใหญ่นิยมใช้เป็นตัวชี้วัดคือค่าความเค้นวอนมิเชส (Von Mises stress) ซึ่งหาได้จากสมการ

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 6\tau_{xy}^2} \quad (6.16)$$

## 6.2 บทสรุป

ในบทนี้ เราได้กล่าวถึงเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ซึ่งจะช่วยทำให้เพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ อีกทั้งยังช่วยลดเวลาและหน่วยความจำในการคำนวณลงได้อีกด้วย ซึ่งในบทต่อไปเราจะนำเทคนิควิธีนี้มาใช้ร่วมกับการคำนวณโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอตีกะฉิวในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางที่มีความซับซ้อน



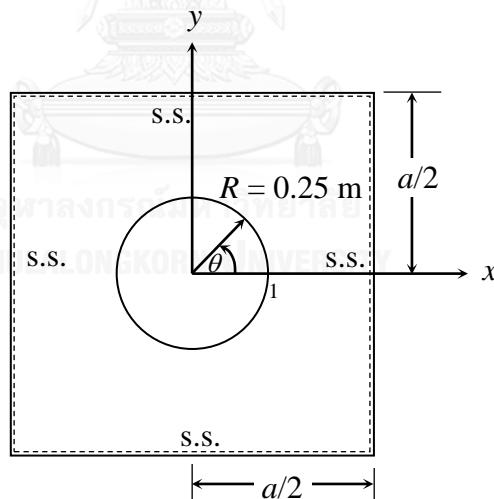
## บทที่ 7

### การวิเคราะห์ปัญหาที่ใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์

ในบทนี้จะนำเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ที่ได้กล่าวไว้ในบทที่แล้วมาใช้ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคคิควเพื่อเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์รวมถึงลดเวลาและหน่วยความจำที่ใช้ในการคำนวณลงในการวิเคราะห์ปัญหาการโก่งของแผ่นบางที่มีความซับซ้อนโดยประสิทธิภาพของโปรแกรมคอมพิวเตอร์นั้นจะถูกนำมาทดสอบด้วยปัญหาต่าง ๆ ดังนี้

#### 7.1 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมที่มีรูกลมตรงกลาง

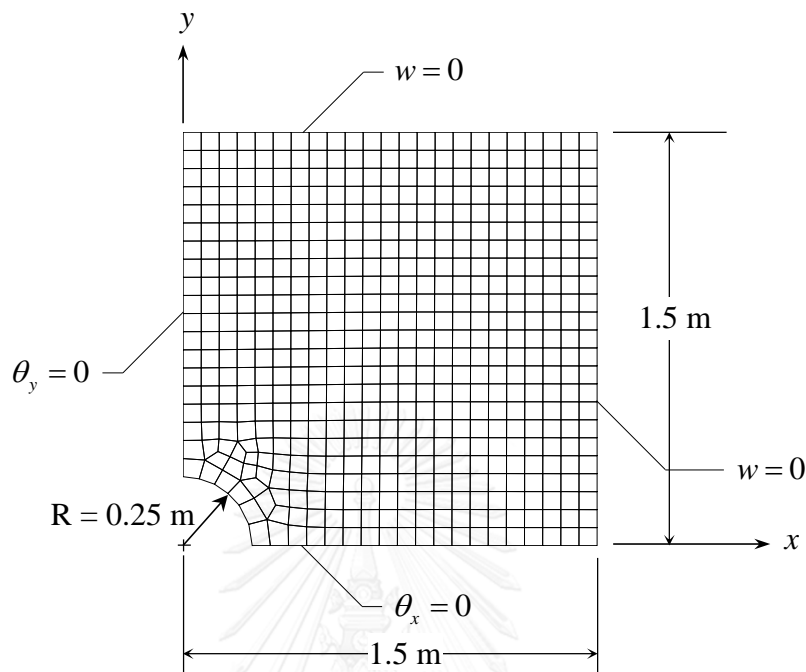
แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด  $3 \times 3 \text{ m}^2$  หนา  $0.03 \text{ m}$  มีรูกลมตรงกลางรัศมี  $R = 0.25 \text{ m}$  ภายใต้แรงกระทำแบบกระจายในแนวตั้งคงที่  $p = 1,000 \text{ N/m}^2$  กระทำตลอดทั้งแผ่น มีการรองรับด้วยลิ่มตลอดขอบทั้งสี่ด้าน โดยที่แผ่นบางนี้มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น  $E$  เป็น  $190 \text{ GPa}$  และอัตราส่วนปัวซองส์  $\nu$  เป็น  $0.3$  ดังแสดงในรูปที่ 7.1 ซึ่งเป็นปัญหาเดียวกันกับปัญหาในหัวข้อ 5.1.4 โดยผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของค่าการเคลื่อนตัวในแนวแกนตั้งที่ตำแหน่งที่ 1 ( $w_1$ ) แสดงไว้ในสมการ (5.4)



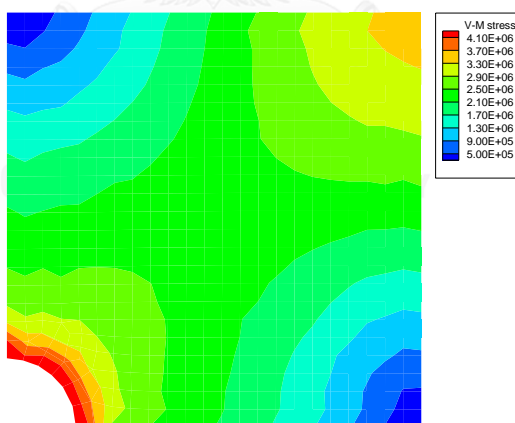
รูปที่ 7.1 แผ่นบางสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีรูกลมตรงกลางภายใต้แรงกระจาย

เช่นเดียวกับการวิเคราะห์ปัญหานี้ในตัวอย่างที่ 5.1.4 เนื่องจากลักษณะของปัญหานี้มีความสมมาตร เราจึงนำพื้นที่เพียงหนึ่งในสี่ทางขวาของแผ่นบางในรูปที่ 7.1 มาใช้ในการคำนวณ เริ่มต้นทำการวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคคิควขนาดสม่ำเสมอตลอดทั้งโดเมนประกอบด้วย 565 จุดต่อ 519 เอลิเมนต์ โดยลักษณะการแบ่งโดเมนและการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต

แสดงไว้ในรูปที่ 7.2 โดยลักษณะการกระจายของค่าความเค้นวอนมิเชสที่คำนวณได้จากการวิเคราะห์ด้วยเอลิเมนต์เริ่มต้นนี้แสดงไว้ดังรูปที่ 7.3

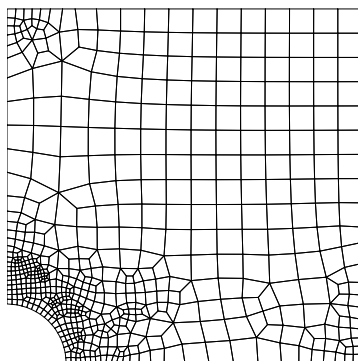


รูปที่ 7.2 รูปแบบโดเมนของปัญหาและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา



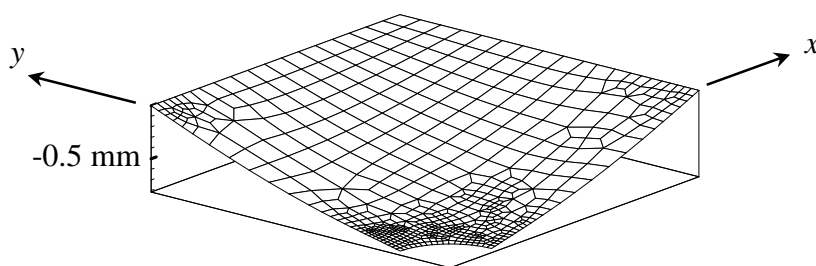
รูปที่ 7.3 ค่าความเค้นวอนมิเชสโดยใช้เอลิเมนต์เริ่มต้น

จากนั้นนำค่าความเค้นวอนมิเชสที่คำนวณได้จากการวิเคราะห์ด้วยเอลิเมนต์เริ่มต้นนี้ไปหาค่าขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมและทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ จะนำมาสู่ลักษณะของการแบ่งโดเมนดังรูปที่ 7.4 ที่ประกอบไปด้วย 640 จุดต่อ 583 เอลิเมนต์ โดยพบว่าเอลิเมนต์จะมีความละเอียดมากขึ้นในบริเวณขอบของรูกลมซึ่งเป็นบริเวณที่มีความเข้มของความเค้นสูง

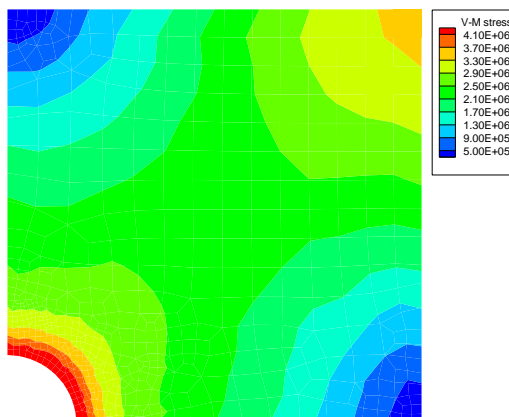


รูปที่ 7.4 รูปแบบโดเมนของปัญหาที่ปรับขนาดเอลิเมนต์แล้ว

ภายหลังการวิเคราะห์ด้วยเอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้ว ลักษณะการเสียรูปของแผ่นบางโดยใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์นั้นแสดงไว้ดังรูปที่ 7.5 และลักษณะการกระจายของความเค้นวอนมิเชสแสดงไว้ในรูปที่ 7.6 ซึ่งจะเห็นได้ว่าแผ่นบางมีการเสียรูปในแนวแกนตั้ง  $w$  สูงที่บริเวณตลอดขอบของรูกลม และเมื่อพิจารณาที่ตำแหน่งที่มีค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งที่ตำแหน่งที่ 1 ( $w_1$ ) พบว่าผลลัพธ์ที่ได้จะมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์มากยิ่งขึ้นหรือลู่เข้าสู่คำตอบที่แสดงในตารางที่ 7.1 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าการใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์นั้นจะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้ลู่เข้าสู่คำตอบมากยิ่งขึ้น และเมื่อพิจารณาจำนวนจุดต่อจากการประยุกต์ใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เมื่อเทียบกับการวิเคราะห์โดยใช้เอลิเมนต์ละเอียด (1,007 เอลิเมนต์) ตลอดทั้งโดเมนดังในตัวอย่างที่ 5.1.4 จะเห็นได้ว่าใช้จำนวนจุดต่อน้อยกว่า และยังทำให้ได้ผลลัพธ์ที่แม่นยำกว่าอีกด้วย แสดงว่าด้วยเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์นี้จะทำให้ลดจำนวนจุดต่อหรือจำนวนตัวไม่ทราบค่าที่ใช้ในการคำนวณลงและให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยมากยิ่งขึ้นอีกด้วย



รูปที่ 7.5 การเสียรูปของแผ่นบางสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีรูกลมตรงกลางโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอเด็คิวที่ปรับขนาดแล้ว



รูปที่ 7.6 ค่าความเค้นวอนมิเชสโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้ว

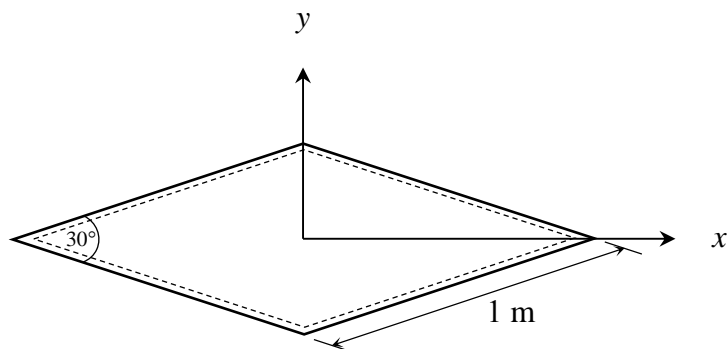
ตารางที่ 7.1 การเปรียบเทียบค่าการเสียรูปในแนวแกนดิ่งที่ตำแหน่งที่ 1 จากการใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม ไอติเคิวละเอียดยขนาดสม่ำเสมอ และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคิวที่ปรับขนาดแล้ว

	ระยะการเสียรูปใน	
	แนวดิ่งที่ตำแหน่งที่ 1 (mm)	ค่าความคลาดเคลื่อน (%)
ผลเฉลยแม่นยำตรง	- 0.77452	-
เอลิเมนต์ละเอียดสม่ำเสมอ (1,007 เอลิเมนต์)	- 0.77424	0.036
เอลิเมนต์เริ่มต้นเริ่มต้น (519 เอลิเมนต์)	- 0.77346	0.136
เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้ว (583 เอลิเมนต์)	- 0.77447	0.005

## 7.2 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนรองรับด้วยลิ้ม

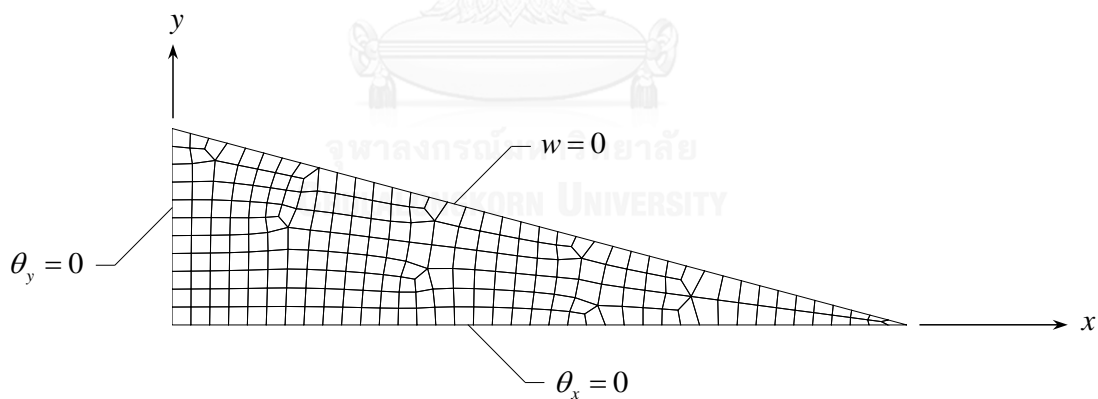
แผ่นสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนมีความยาวแต่ละด้านเป็น 1 m หนา 0.01 m มีมุมแหลมขนาด  $30^\circ$  มีแรงกระจายขนาดสม่ำเสมอในแนวดิ่ง  $p = 1 \text{ N/m}^2$  กระทำตลอดทั้งแผ่น และรองรับด้วยลิ้มตลอดขอบทั้งสี่ด้านดังแสดงในรูปที่ 7.7 โดยที่แผ่นบางนี้มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น  $E$  เป็น  $10^7 \text{ N/m}^2$  และอัตราส่วนปัวซองส์  $\nu$  เป็น 0.3 ซึ่งปัญหานี้ได้ถูกทำการวิเคราะห์ไว้ในเอกสารอ้างอิง [61] และ [62] ซึ่งมีผลเฉลยที่กึ่งกลางแผ่นบางสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนที่มีค่าการเสียรูปในแนวแกนดิ่งสูงสุดดังสมการ

$$w_c = 0.000408 \frac{pa^4}{D} \quad (7.1)$$

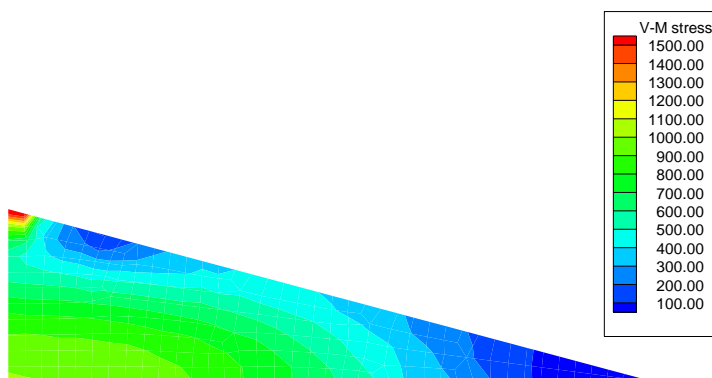


รูปที่ 7.7 แผ่นบางสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนรองรับด้วยลิ้ม

เนื่องจากลักษณะของปัญหามีความสมมาตร จึงนำพื้นที่เพียงหนึ่งในสี่ทางขวาบนของแผ่นบางในรูปที่ 7.7 มาใช้ในการวิเคราะห์ เริ่มต้นทำการวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคคิว ขนาดสม่ำเสมอตลอดทั้งโดเมนประกอบด้วย 261 จุดต่อ 215 เอลิเมนต์ โดยลักษณะการแบ่งโดเมน และการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตแสดงไว้ในรูปที่ 7.8 โดยลักษณะการกระจายของค่าความเค้นวอนมิเชสที่คำนวณได้จากการวิเคราะห์ด้วยเอลิเมนต์เริ่มต้นนี้แสดงไว้ดังรูปที่ 7.9



รูปที่ 7.8 รูปแบบโดเมนของปัญหาและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา



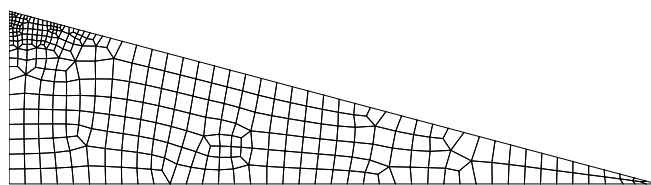
รูปที่ 7.9 ค่าความเค้นวอนมิเชสโดยใช้เอลิเมนต์เริ่มต้น

จากนั้นนำค่าความเค้นวอนมิเชสที่คำนวณได้จากการวิเคราะห์ด้วยเอลิเมนต์เริ่มต้นนี้ไปหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมและทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ จะได้ไฟไนต์เอลิเมนต์โดเมนใหม่ดังรูปที่ 7.10(ก) ที่ประกอบไปด้วย 395 จุดต่อ 333 เอลิเมนต์ โดยพบว่าเอลิเมนต์จะมีความละเอียดมากขึ้นในบริเวณมุมป้านของสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนซึ่งเป็นบริเวณที่มีความเข้มข้นของความเค้นสูง

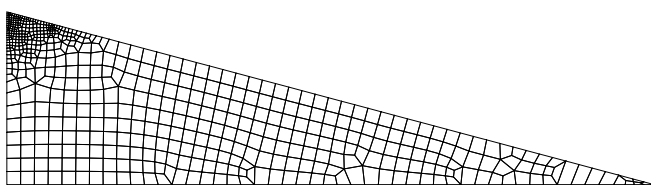
ทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 และ 3 ซึ่งประกอบไปด้วย 632 จุดต่อ 555 เอลิเมนต์ และ 1084 จุดต่อ 979 เอลิเมนต์ตามลำดับ โดยมีลักษณะของเอลิเมนต์ดังรูปที่ 7.10(ข) และ 7.10(ค) ลักษณะการเสียรูปของแผ่นบางโดยใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์นั้นแสดงไว้ดังรูปที่ 7.11 และลักษณะการกระจายของความเค้นวอนมิเชสแสดงไว้ในรูปที่ 7.12 ซึ่งจะเห็นได้ว่าแผ่นบางมีการเสียรูปในแนวแกนตั้ง  $w$  สูงสุดที่บริเวณจุดกึ่งกลางแผ่นบาง และมีความเค้นสูงสุดที่บริเวณมุมป้านของแผ่นบาง

จากนั้นทำการวิเคราะห์ปัญหานี้อีกครั้งโดยใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กสม่ำเสมอแสดงดังแสดงในรูปที่ 7.13 ซึ่งประกอบด้วย 2,268 จุดต่อ 2,122 เอลิเมนต์ และเปรียบเทียบผลลัพธ์ค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นบางกับผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์โดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้ว โดยพบว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้วนั้นจะมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์มากยิ่งขึ้นหรือลู่เข้าสู่ค่าตอบมากขึ้นในการปรับขนาดเอลิเมนต์ในแต่ละครั้ง ดังแสดงในรูปที่ 7.14 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าการใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์นั้นจะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้ลู่เข้าสู่ค่าตอบมากยิ่งขึ้น และเมื่อพิจารณาจำนวนจุดต่อจากการประยุกต์ใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เมื่อเทียบกับการวิเคราะห์โดยใช้เอลิเมนต์ละเอียดตลอดทั้งโดเมน จะเห็นได้ว่าใช้จำนวนจุดต่อที่น้อยกว่า และยังทำให้ได้ผลลัพธ์ที่แม่นยำกว่าอีกด้วยดังแสดงในตารางที่ 7.2 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์นี้จะช่วยให้ลดจำนวนตัวไม่ทราบค่าที่ใช้ในการคำนวณลง และให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยมากยิ่งขึ้นอีกด้วย

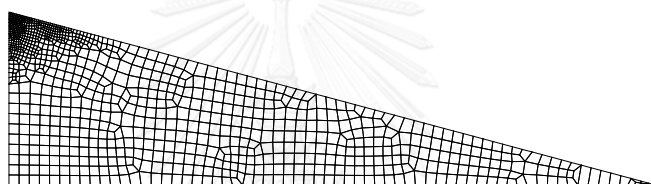




(ก)

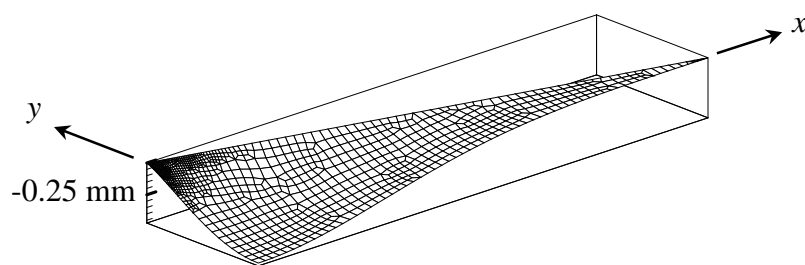


(ข)

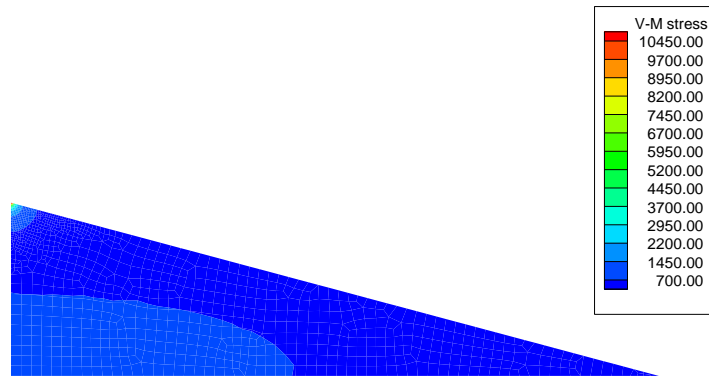


(ค)

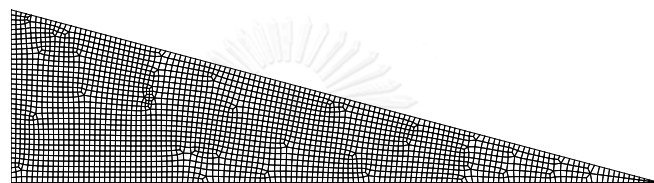
รูปที่ 7.10 รูปแบบโดเมนของปัญหาที่ปรับขนาดเอลิเมนต์แล้ว (ก) เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 1 (ข)  
เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 2 (ค) เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 3



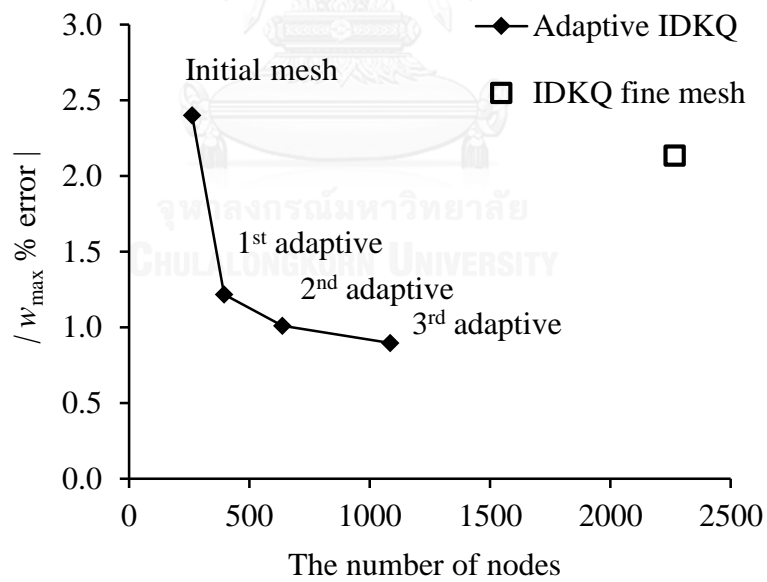
รูปที่ 7.11 การเสียรูปของแผ่นบางสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนรองรับด้วยลิ่มโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเค  
คิวที่ปรับขนาดครั้งที่ 3



รูปที่ 7.12 ค่าความเค้นวอนมิเชสโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 3



รูปที่ 7.13 รูปแบบโดเมนของปัญหาโดยใช้เอลิเมนต์ละเอียดตลอดทั้งโดเมน



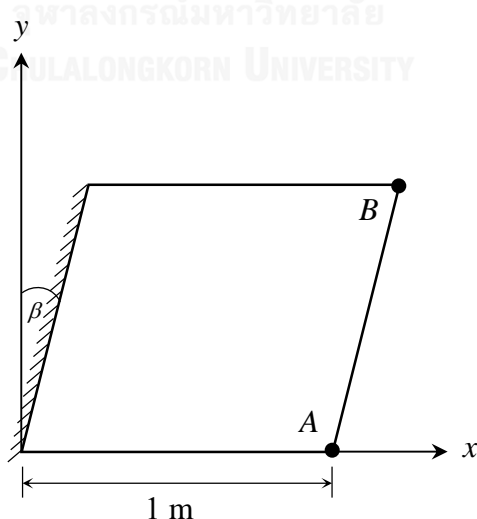
รูปที่ 7.14 การเปรียบเทียบค่าเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของการเสียรูปในแนวแกนตั้งสูงสุดที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นที่คำนวณได้จากการใช้เอลิเมนต์ละเอียดและเอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้ว

ตารางที่ 7.2 การเปรียบเทียบค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งที่ตำแหน่งกึ่งกลางแผ่นจากการใช้เอลิเมนต์ละเอียดขนาดสม่ำเสมอ และเอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้วครั้งที่ 3

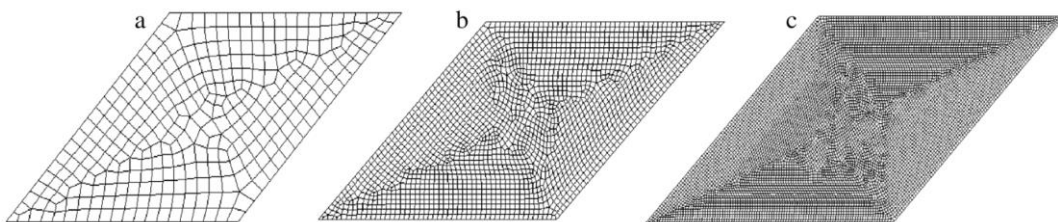
	ระยะการเสียรูปใน แนวตั้งที่ตำแหน่ง กึ่งกลาง (mm)	ค่าความคลาดเคลื่อน (%)
ผลเฉลยแม่นยำตรง	- 0.4455	-
เอลิเมนต์ละเอียดสม่ำเสมอ (2,122 เอลิเมนต์)	- 0.4520	2.13
เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 3 (979 เอลิเมนต์)	- 0.4495	0.90

### 7.3 ปัญหาแผ่นบางสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนขอบด้านหนึ่งถูกยึดแน่น

แผ่นสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนมีความยาวแต่ละด้านเป็น 1 m หนา 0.01 m เอียงทำมุม  $\beta$  ขนาด  $45^\circ$  กับแกน  $y$  มีแรงกระจายขนาดสม่ำเสมอในแนวตั้ง  $p = 1,000 \text{ N/m}^2$  กระทำตลอดทั้งแผ่น และขอบด้านหนึ่งถูกยึดแน่นดังแสดงในรูปที่ 7.15 โดยที่แผ่นบางนี้มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น  $E$  เป็น 1,092 GPa และอัตราส่วนปัวซองส์  $\nu$  เป็น 0.3 ซึ่งปัญหานี้ได้ถูกทำการวิเคราะห์ไว้โดย Ramesh และคณะ [63] โดยใช้โปรแกรม ABAQUS (เอลิเมนต์ S8R) ซึ่งได้แสดงผลลัพธ์ของค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งที่ตำแหน่ง  $A$  และ  $B$  ไว้ โดยใช้เอลิเมนต์ขนาดต่าง ๆ ดังรูปที่ 7.16

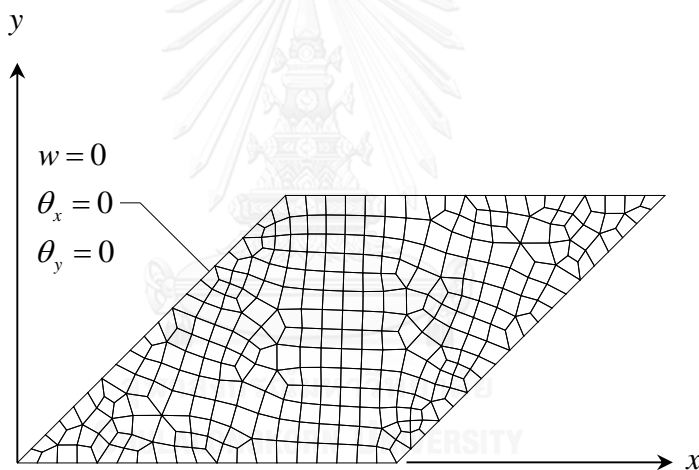


รูปที่ 7.15 แผ่นบางสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนขอบด้านหนึ่งถูกยึดแน่น

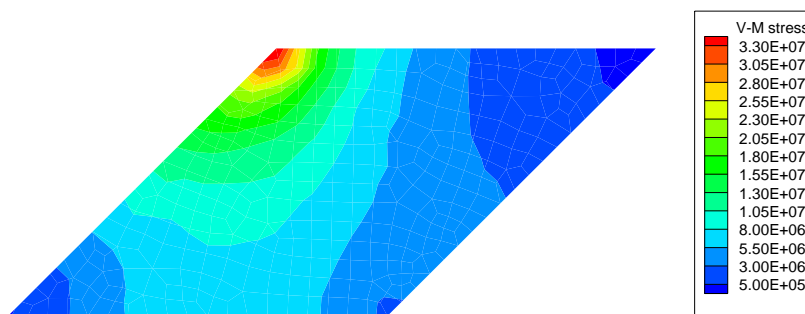


รูปที่ 7.16 ลักษณะของเอลิเมนต์โดยใช้โปรแกรม ABAQUS ในการวิเคราะห์ [63]

เริ่มต้นทำการวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคิควขนาดสม่ำเสมอตลอดทั้งโดเมนประกอบด้วย 343 จุดต่อ 304 เอลิเมนต์ โดยลักษณะการแบ่งโดเมนและการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตแสดงไว้ในรูปที่ 7.17 โดยลักษณะการกระจายของค่าความเค้นวอนมิเชสที่คำนวณได้จากการวิเคราะห์ด้วยเอลิเมนต์เริ่มต้นนี้แสดงไว้ดังรูปที่ 7.18

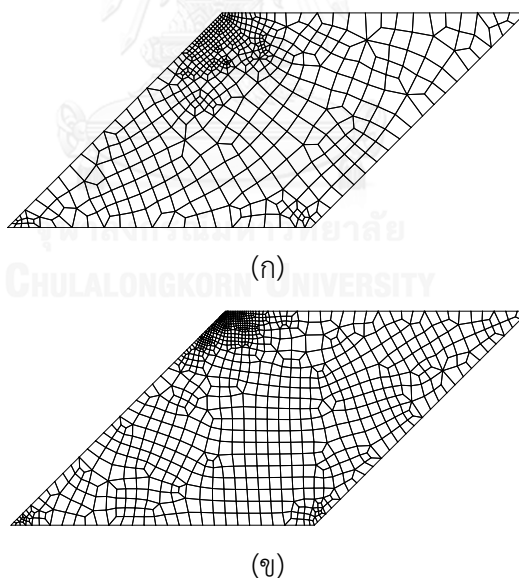


รูปที่ 7.17 รูปแบบโดเมนของปัญหาและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา

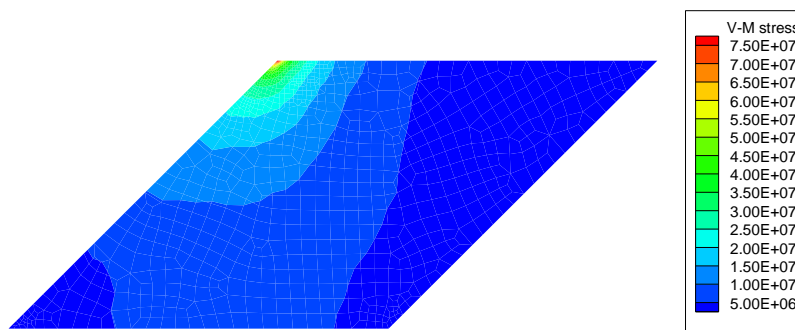


รูปที่ 7.18 ค่าความเค้นวอนมิเชสโดยใช้เอลิเมนต์เริ่มต้น

จากนั้นนำค่าความเค้นวอนมิเชสที่คำนวณได้จากการวิเคราะห์ด้วยเอลิเมนต์เริ่มต้นนี้ไปหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมและทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ จะได้ไฟไนต์เอลิเมนต์โดเมนใหม่ดังรูปที่ 7.19(ก) ที่ประกอบไปด้วย 618 จุดต่อ 564 เอลิเมนต์ โดยพบว่าเอลิเมนต์จะมีความละเอียดมากขึ้นในบริเวณมุมป้านของด้านขอบที่ถูกยึดแน่นของสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนซึ่งเป็นบริเวณที่มีความเข้มข้นของความเค้นสูง จากนั้นทำการปรับขนาดเอลิเมนต์อีกครั้ง ซึ่งประกอบไปด้วย 1,002 จุดต่อ 925 เอลิเมนต์ โดยมีลักษณะของเอลิเมนต์ดังรูปที่ 7.19(ข) ลักษณะการกระจายของความเค้นวอนมิเชสแสดงไว้ในรูปที่ 7.20 ซึ่งจะเห็นได้ว่าแผ่นบางมีความเค้นสูงสุดที่บริเวณมุมป้านของแผ่นที่ขอบถูกยึดแน่น เมื่อเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้วกับผลลัพธ์ที่วิเคราะห์ไว้โดย Ramesh และคณะ [63] โดยใช้โปรแกรม ABAQUS (เอลิเมนต์ S8R) ในลักษณะตัวแปรไร้มิติของค่าระยะการเสี้ยวรูปในแนวแกนตั้งที่ตำแหน่ง  $A$  และ  $B$  ( $\bar{w}_A = \frac{w_A D}{pa^4}$  และ  $\bar{w}_B = \frac{w_B D}{pa^4}$ ) ดังแสดงในตาราง 7.3 และ 7.4 ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดแล้วนั้นจะมีค่าใกล้เคียงกับผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรม ABAQUS แต่ใช้เอลิเมนต์ที่น้อยกว่ามาก ในขณะที่ยังสามารถแสดงการกระจายของความเค้นบริเวณที่มีความเค้นสูงได้อีกด้วย



รูปที่ 7.19 รูปแบบโดเมนของปัญหาที่ได้ปรับขนาดเอลิเมนต์แล้ว (ก) เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 1  
(ข) เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 2



รูปที่ 7.20 ค่าความเค้นวอนมิเชสโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 2

ตารางที่ 7.3 การเปรียบเทียบค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งในลักษณะตัวแปรไร้มิติที่ตำแหน่ง *A* จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรม ABAQUS และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไฮโดรคิกที่ปรับขนาดแล้ว

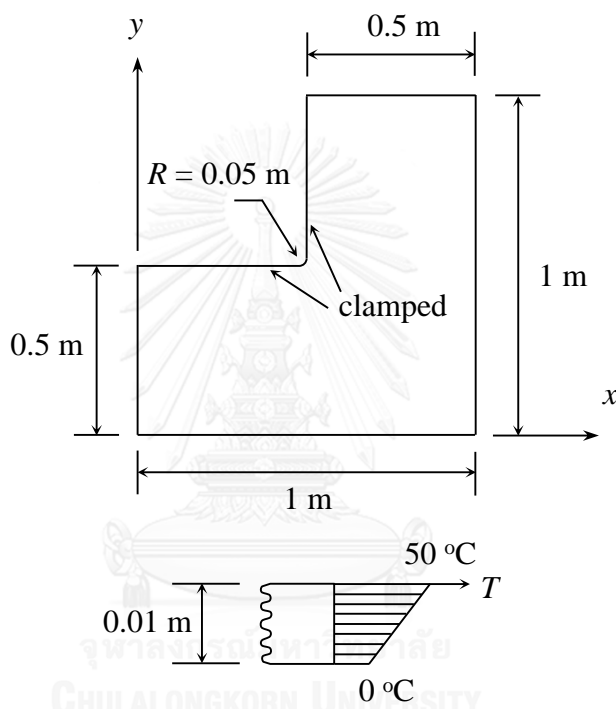
	$\bar{w}_A$	ค่าความคลาดเคลื่อน (%)
ABAQUS (8,247 เอลิเมนต์)	0.6269	-
เอลิเมนต์เริ่มต้นเริ่มต้น (304 เอลิเมนต์)	0.6237	0.50
เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 1 (564 เอลิเมนต์)	0.6238	0.50
เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 2 (925 เอลิเมนต์)	0.6239	0.49

ตารางที่ 7.4 การเปรียบเทียบค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้งในลักษณะตัวแปรไร้มิติที่ตำแหน่ง *B* จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรม ABAQUS และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไฮโดรคิกที่ปรับขนาดแล้ว

	$\bar{w}_B$	ค่าความคลาดเคลื่อน (%)
ABAQUS (8,247 เอลิเมนต์)	1.6064	-
เอลิเมนต์เริ่มต้นเริ่มต้น (304 เอลิเมนต์)	1.5917	0.91
เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 1 (564 เอลิเมนต์)	1.5989	0.46
เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 2 (925 เอลิเมนต์)	1.5994	0.43

#### 7.4 ปัญหาแผ่นบางรูปตัวแอล

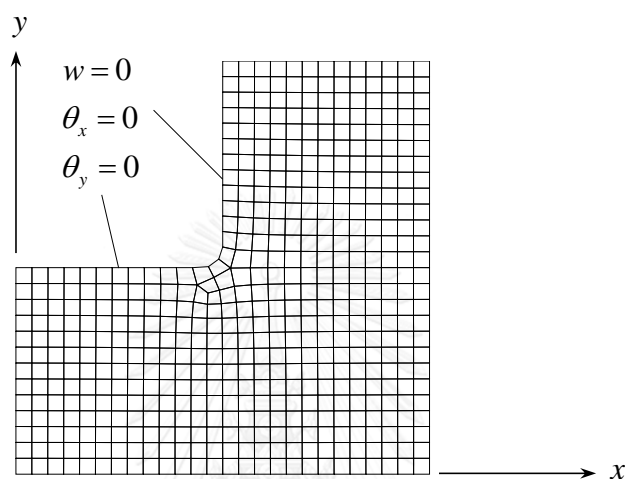
แผ่นบางรูปตัวแอล (L-shaped plate) ที่มุมด้านในเป็นส่วนโค้งรัศมี  $0.05 \text{ m}$  โดยแผ่นบางมีความหนา  $0.01 \text{ m}$  และถูกยึดแน่นกับผนังตลอดขอบด้านใน มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้นโดยมีอุณหภูมิตลอดผิวด้านบนเป็น  $50 \text{ }^{\circ}\text{C}$  และอุณหภูมิตลอดผิวด้านล่างเป็น  $0 \text{ }^{\circ}\text{C}$  โดยลักษณะของปัญหานี้แสดงไว้ดังรูปที่ 7.21 แผ่นบางนี้มีค่าโมดูลัสของความยืดหยุ่น  $E$  เป็น  $68 \text{ GPa}$  มีค่าอัตราส่วนปัวซองส์  $\nu$  เป็น  $0.33$  และมีค่าสัมประสิทธิ์การกระจายความร้อน  $\alpha$  เป็น  $22.6 \times 10^{-6} / ^{\circ}\text{C}$



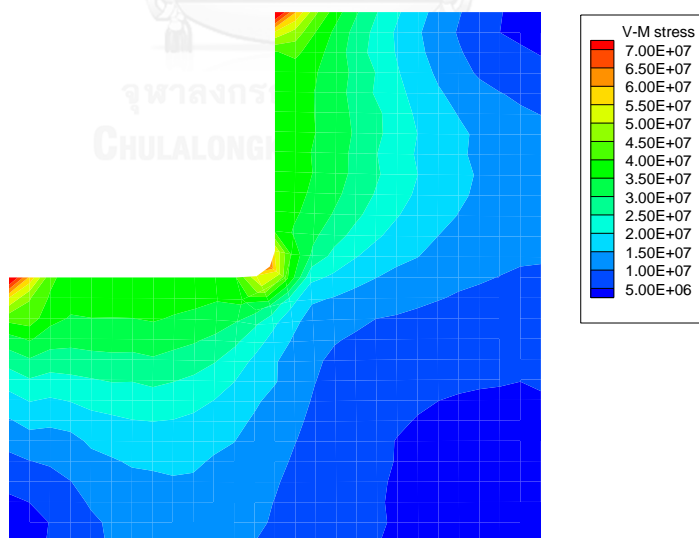
รูปที่ 7.21 แผ่นบางรูปตัวแอลที่มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้น

เริ่มต้นทำการวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคคิควขนาดสม่ำเสมอตลอดทั้งโดเมนประกอบด้วย 561 จุดต่อ 508 เอลิเมนต์ โดยลักษณะการแบ่งโดเมนและการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตแสดงไว้ในรูปที่ 7.22 โดยลักษณะการกระจายของค่าความเค้นวอนมิเชสที่คำนวณได้จากการวิเคราะห์ด้วยเอลิเมนต์เริ่มต้นนี้แสดงไว้ดังรูปที่ 7.23 จากนั้นจึงนำผลลัพธ์ของค่าความเค้นวอนมิเชสที่คำนวณได้มาทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสม โดยลักษณะของเอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งแรกแสดงไว้ดังรูปที่ 7.24(ก) ซึ่งประกอบไปด้วย 935 จุดต่อ 861 เอลิเมนต์ ซึ่งจะเห็นได้ว่า เอลิเมนต์จะมีขนาดเล็กลงที่บริเวณมุมโค้งด้านใน และที่มุมของแผ่นบางด้านที่ถูกยึดแน่น ซึ่งเป็นบริเวณที่มีค่าความชันของค่าความเค้นวอนมิเชสที่ใช้เป็นตัวชี้วัดในการปรับขนาดเอลิเมนต์สูง หลังจากนั้นจึงทำการปรับ

ขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2, ครั้งที่ 3 และครั้งที่ 4 ซึ่งจะเห็นได้ชัดว่า เอลิเมนต์จะมีขนาดเล็กลงมากที่บริเวณมุมโค้งด้านใน และที่มุมของแผ่นบางด้านที่ถูกยึดแน่นเพื่อที่จะเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ที่มีการเปลี่ยนแปลงมากในบริเวณดังกล่าว โดยลักษณะของเอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 2, ครั้งที่ 3 และครั้งที่ 4 นั้นแสดงไว้ดังรูปที่ 7.24(ข), 7.24(ค) และ 7.24(ง) ตามลำดับ ซึ่งประกอบไปด้วย 1,385 จุดต่อ 1,289 เอลิเมนต์, 1,741 จุดต่อ 1,633 เอลิเมนต์ และ 2,443 จุดต่อ 2,310 เอลิเมนต์ตามลำดับ

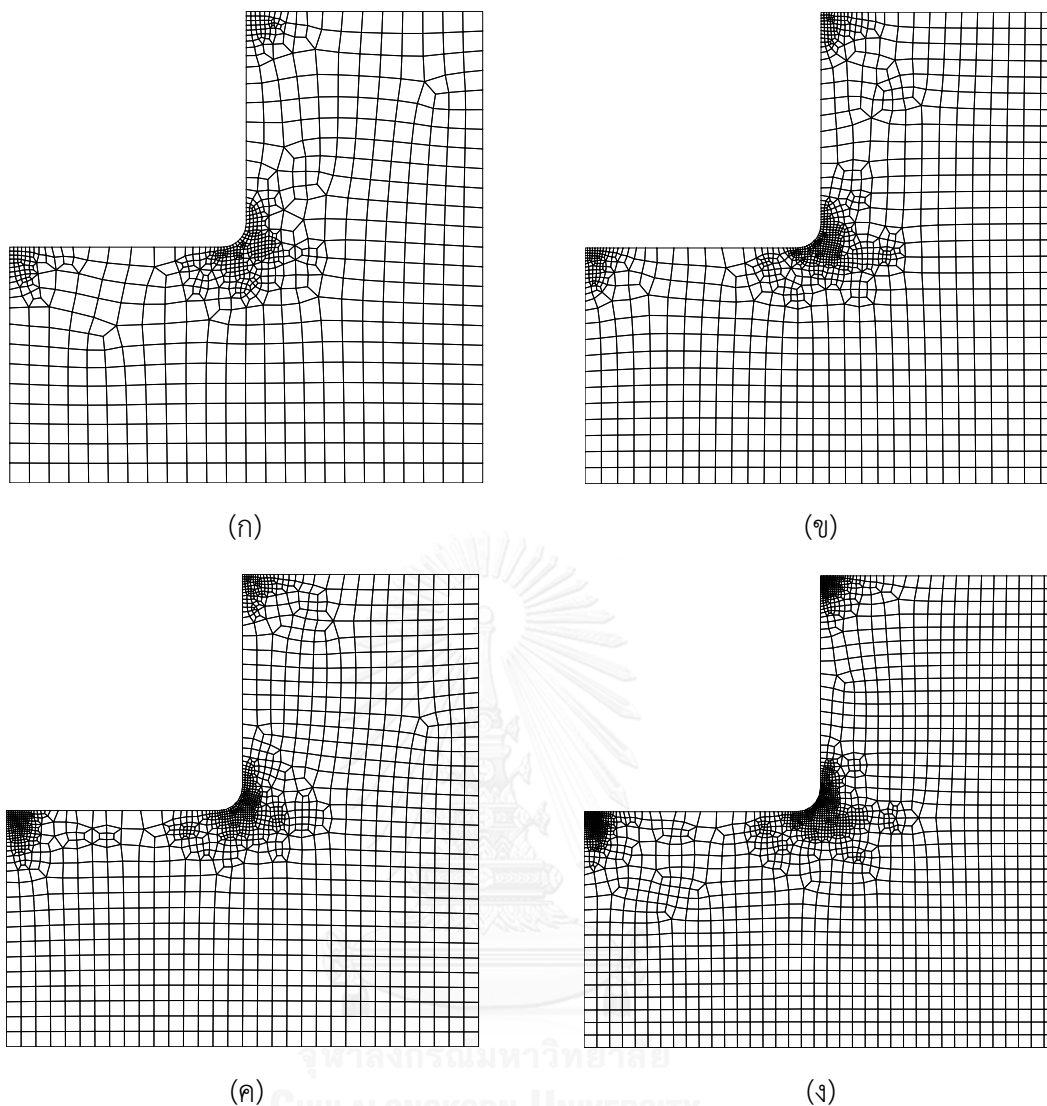


รูปที่ 7.22 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาแผ่นบางรูปตัวแอล



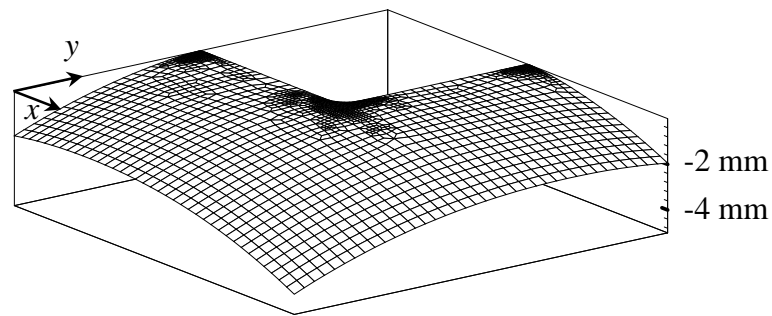
รูปที่ 7.23 ค่าความเค้นวอนมิเชสโดยใช้เอลิเมนต์เริ่มต้น



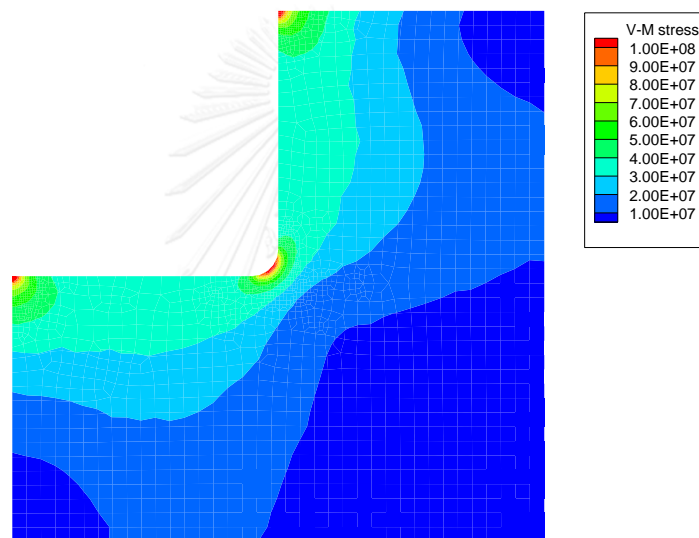


รูปที่ 7.24 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาแผ่นบางรูปตัวแอลที่มีการกระจายของอุณหภูมิตลอดความหนาเป็นแบบเชิงเส้นด้วยเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์

ลักษณะการเสียรูปของแผ่นบางโดยใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ที่ทำการปรับเอลิเมนต์ครั้งที่ 4 แสดงไว้ดังรูปที่ 7.25 ลักษณะการกระจายของค่าความเค้นวอนมิเชสแสดงไว้ดังรูปที่ 7.26 โดยจะเห็นได้ว่ามีความเข้มของค่าความเค้นสูงที่มุมโค้งด้านในบริเวณกึ่งกลางแผ่น และที่มุมของแผ่นบางของด้านที่ถูกยึดแน่น และเมื่อพิจารณาค่าความเค้นวอนมิเชสที่ตำแหน่งกึ่งกลางของส่วนโค้งในการวิเคราะห์แต่ละครั้งโดยเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีเคทีที่ปรับขนาดได้ในเอกสารอ้างอิง [13] พบว่า ค่าความเค้นวอนมิเชสจะลู่เข้าตามการปรับขนาดเอลิเมนต์ให้มีความละเอียดมากขึ้นในบริเวณดังกล่าวดังแสดงในรูปที่ 7.27

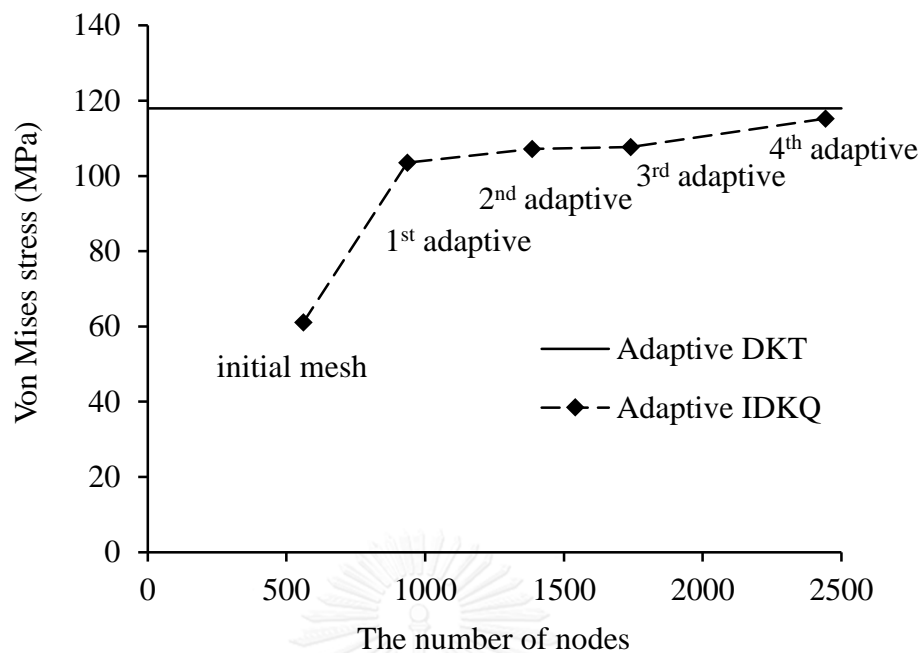


รูปที่ 7.25 การเสียรูปของแผ่นบางแผ่นบางรูปตัวแอลโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 4



CHULALONGKORN UNIVERSITY

รูปที่ 7.26 ค่าความเค้นวอนมิเชสของแผ่นบางรูปตัวแอลโดยใช้เอลิเมนต์ที่ปรับขนาดครั้งที่ 4



รูปที่ 7.27 การลู่เข้าของค่าความเค้นวอนมิเชสของแผ่นบางรูปตัวแอลที่ตำแหน่งกึ่งกลางของส่วนโค้ง ด้วยเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์

## 7.5 บทสรุป

ในบทนี้ได้นำเสนอการใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติร่วมกับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควโนโปรแกรมที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นในการวิเคราะห์ปัญหาหารโค้งของแผ่นบางที่มีความซับซ้อนมากขึ้น ซึ่งพบว่าสามารถให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำที่สูงขึ้นโดยไม่จำเป็นต้องใช้จำนวนเอลิเมนต์มากเกินไป และช่วยให้ลดเวลาและหน่วยความจำที่ใช้ในการคำนวณลงด้วย

## บทที่ 8

### บทสรุป ปัญหาที่พบ และข้อเสนอแนะ

ในบทนี้จะกล่าวถึงประเด็นสำคัญต่าง ๆ ของงานวิจัยนี้ โดยเรียงลำดับตามที่ได้นำเสนอในบทต่าง ๆ รวมไปถึงปัญหาที่พบในขณะทำวิทยานิพนธ์ และข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

#### 8.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้นำเสนอการวิเคราะห์ปัญหาการโค้งของแผ่นบางเนื่องจากแรงกระทำตั้งฉากทางกลและภาระทางความร้อนโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสคริตเคอร์ซอพฟ์แบบปรับปรุง หรือเรียกโดยย่อว่า เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควซึ่งเป็นเอลิเมนต์ที่ให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูง โดยได้ประยุกต์ร่วมกับเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากขึ้นโดยลดเวลาและหน่วยความจำที่ใช้ในการคำนวณลง

งานวิจัยนี้เริ่มต้นจากการสอบทวนวรรณกรรม ได้อธิบายถึงที่มาที่ไปและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการโค้งของแผ่นบางชนิดต่าง ๆ ซึ่งได้ถูกนำเสนอไว้ในบทที่ 2 และได้ทำความเข้าใจถึงลักษณะของปัญหาและสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาการโค้งของแผ่นบาง รวมไปถึงการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ และการประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์จากเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควในบทที่ 3 อีกทั้งยังได้ประดิษฐ์โหนดเวกเตอร์เนื่องจากแรงภายนอกและโหนดเวกเตอร์เนื่องจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปตลอดความหนาให้อยู่ในรูปแบบปิดด้วยการอินทิเกรตโดยตรงโดยใช้โปรแกรมแมทมาทิกาเข้าช่วย ซึ่งช่วยให้การคำนวณนั้นมีความรวดเร็วมากยิ่งขึ้นกว่าโหนดเวกเตอร์ซึ่งเดิมประดิษฐ์ขึ้นโดยการอินทิเกรตเชิงตัวเลข และโหนดเวกเตอร์นี้สามารถนำไปประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรงอีกด้วย ต่อมาในบทที่ 4 ได้นำเสนอขั้นตอนและรายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นโดยมีพื้นฐานจากไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ที่ได้จากบทที่ 3 และได้ถูกนำมาทดสอบกับปัญหาต่าง ๆ ในบทที่ 5 ที่เราทราบผลเฉลยแม่นยำตรงเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น อีกทั้งยังแสดงให้เห็นถึงศักยภาพของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควในการวิเคราะห์ปัญหาการโค้งของแผ่นบางอันเนื่องมาจากแรงกระทำตั้งฉากทางกลและภาระทางความร้อนอีกด้วย

เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากขึ้น เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์จึงถูกนำมาใช้ร่วมกับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมไอติเคควในการวิเคราะห์ปัญหาการโค้งของแผ่นบาง โดยในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของความชันของผลลัพธ์สูง เอลิเมนต์ในบริเวณนั้นจะถูกปรับให้มีขนาดเล็กเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูงขึ้น ส่วนในบริเวณอื่นจะถูกปรับให้มีขนาดใหญ่เพื่อลดจำนวนตัวไม่ทราบ

ค่าทำให้ช่วยลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณลง โดยหลักการเบื้องต้นของเทคนิคนี้ได้แสดงรายละเอียดไว้ในบทที่ 6 จากนั้นในบทที่ 7 จึงทำการทดสอบเทคนิคดังกล่าวด้วยการวิเคราะห์ปัญหาการโค้งงอของแผ่นบางที่มีความซับซ้อนมากขึ้นด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น ซึ่งพบว่าสามารถให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำที่สูงขึ้นโดยไม่จำเป็นต้องใช้จำนวนเอลิเมนต์มากเกินไป และช่วยลดเวลาและหน่วยความจำที่ใช้ในการคำนวณลง

## 8.2 ปัญหาที่พบในขณะทำวิทยานิพนธ์

เนื่องจากจำนวนตัวไม่ทราบค่าของปัญหามีปริมาณมาก การทำการวิเคราะห์ในบางครั้งที่มีการแบ่งเอลิเมนต์เป็นจำนวนมากอาจทำให้หน่วยความจำที่จะต้องใช้เกินกว่าที่คอมพิวเตอร์จะรับได้ นอกจากนี้ในการแก้ปัญหาระบบสมการขนาดใหญ่จำเป็นต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเข้ามาช่วยในการคำนวณระบบสมการดังกล่าว โดยงานวิจัยนี้ได้ใช้วิธีการกำจัดแบบเกาส์ซึ่งแม้จะให้ผลลัพธ์ที่เที่ยงตรงแต่ใช้เวลาในการคำนวณมาก ทำให้การวิเคราะห์ในบางครั้งกินระยะเวลานาน

การใช้โปรแกรม AUTOMESH-2D ในการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัตินั้น ผู้ใช้ต้องมีความเข้าใจในตัวโปรแกรมพอสมควร ในหลายครั้งตัวโปรแกรมไม่สามารถสร้างเอลิเมนต์ขึ้นมาได้จากการกำหนดค่าความหนาแน่นสัมพัทธ์ที่ไม่เหมาะสม ทำให้มีความยุ่งยากในการใช้โปรแกรมต้องลองผิดลองถูกในการประดิษฐ์เอลิเมนต์พอสมควร อีกทั้งในหลาย ๆ ครั้งโปรแกรมมักหยุดทำงานในขณะประดิษฐ์เอลิเมนต์อีกด้วย โดยรายละเอียดของตัวโปรแกรมนี้สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากเอกสารอ้างอิง [60], [64] และ [65]

## 8.3 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

ตัวโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นนั้นยังสามารถนำไปพัฒนาต่อได้ในส่วนของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการแก้ระบบสมการรวม โดยอาจเปลี่ยนเป็นระเบียบวิธีทำซ้ำแบบต่าง ๆ แทนการใช้วิธีการกำจัดแบบเกาส์ที่จะทำให้ลดระยะเวลาในการแก้ระบบสมการลง อีกทั้งตัวโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นนั้นอาจนำไปพัฒนาเพื่อทำการวิเคราะห์ปัญหาการโค้งงอของโครงสร้างแผ่นบางในสามมิติ รวมไปถึงการวิเคราะห์ปัญหาการโค้งงอของแผ่นบางในสภาวะชั่วคราว ซึ่งจะเป็นประโยชน์ต่องานวิจัยในอนาคตต่อไป

## รายการอ้างอิง

1. ปราโมทย์ เดชะอำไพ, ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 5. 2555, กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
2. Melosh, R.J., *A stiffness matrix for the analysis of thin plates in bending*. Journal of the Aerospace Sciences, 1961. **28**(1): p. 34-42.
3. Bogner, F.K., Fox, R.L., and Schmidt, L.A.Jr., *The generation of interelement, compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas*. in *Proc. Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics*. 1965. Air Force Institute of Technology , WPAFB, Dayton, Ohio.
4. De Veubeke, F., *A conforming finite element for plate bending*. International Journal for Solids and Structures, 1968. **4**(1): p. 95-108.
5. Clough, R.W. and Felippa, C.A., *A refined quadrilateral for the analysis of plate bending*. in *Proc. (second) Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics*. 1968. Air Force Institute of Technology , WPAFB, Dayton, Ohio.
6. McNeal, R.H., *A simple quadrilateral shell element*. Computers & Structures, 1978. **8**(2): p. 175-183.
7. Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E., and Witt, R.J., *Concept and Application of Finite Element Analysis*. 4 ed. 2002, United States: John Wiley & Sons, Inc.
8. Batoz, J.L. and Tahar, M.B., *Evaluation of a New Quadrilateral Thin Plate Bending Element*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1982. **18**(11): p. 1655-1677.
9. Batoz, J.L., Bathe, K.J., and Ho, L.W., *A Study of Three-Node Triangular Plate Bending Elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1980. **15**(12): p. 1771-1812.
10. Jeyachandrabose, C., Kirkhope, J., and Meekisho, L., *An Improved Discrete Kirchhoff Quadrilateral Thin-plate Bending Element*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1987. **24**(3): p. 635-654.
11. Dechaumphai, P., *Adaptive finite element technique for heat transfer problems*. Journal of Energy, Heat and Mass Transfer, 1995. **17**: p. 87-94.

12. Dechaumphai, P., *Improvement of Plane Stress Solutions Using Adaptive Finite Elements*. Journal of the Chinese Institute of Engineers, 1996. **19**(3): p. 375-380.
13. พิชเชนทร์ โพธิคุณ, การวิเคราะห์การโก่งของแผ่นบางด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบดีสครีตเคอร์ซอพฟ์ที่ปรับขนาดได้. 2552, วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต, ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
14. Radeş, M., *Finite Element Analysis*. 2006: Printech.
15. Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., *The finite element method: Solid mechanics*. 5 ed. Vol. 2. 2000: Butterworth-heinemann.
16. Wilson, E.L., *The static condensation algorithm*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1974. **8**(1): p. 198-203.
17. Hinton, E. and Pugh, E.D.L., *Some quadrilateral isoparametric finite elements based on Mindlin plate theory*. in *Proc. of the Symposium on Applications of Computer Methods in Engineering*. 1977. Los Angeles.
18. Pugh, E.D.L., Hinton, E., and Zienkiewicz, O.C., *A study of quadrilateral plate bending elements with 'reduced' integration*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1978. **12**(7): p. 1059-1079.
19. Hughes, T., Taylor, R.L., and Kanoknukulchai, W., *A simple and efficient finite element for plate bending*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1977. **11**(10): p. 1529-1543.
20. Hughes, T.J.R. and Tezduyar, T.E., *Finite elements based upon Mindlin plate theory with particular reference to the four-node bilinear isoparametric element*. Journal of applied mechanics, 1981. **48**(3): p. 587-596.
21. Averill, R.C. and Reddy, J.N., *Behaviour of plate elements based on the first-order shear deformation theory*. Engineering Computations, 1990. **7**(1): p. 57-74.
22. Zienkiewicz, O.C. and Hinton, E., *Reduced integration, function smoothing and non-conformity in finite element analysis (with special reference to thick plates)*. Journal of the Franklin Institute, 1976. **302**(5): p. 443-461.
23. Belytschko, T., Tsay, C.S., and Liu, W.K., *A stabilization matrix for the bilinear Mindlin plate element*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1981. **29**(3): p. 313-327.

24. Hughes, T.J.R., Cohen, M., and Haroun, M., *Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates*. Nuclear Engineering and Design, 1978. **46**(1): p. 203-222.
25. Malkus, D.S. and Hughes, T.J.R., *Mixed finite element methods—reduced and selective integration techniques: a unification of concepts*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1978. **15**(1): p. 63-81.
26. Bathe, K.J. and Dvorkin, E.N., *A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1985. **21**(2): p. 367–383.
27. Bathe, K.J. and Dvorkin, E.N., *A formulation of general shell elements—the use of mixed interpolation of tensorial components*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1986. **22**(3): p. 697-722.
28. Huang, H. and Hinton, E., *A nine node Lagrangian Mindlin plate element with enhanced shear interpolation*. Engineering Computations, 1984. **1**(4): p. 369-379.
29. Bucelem, M.L. and Bathe, K.J., *Finite element analysis of shell structures*. Archives of Computational Methods in Engineering, 1997. **4**(1): p. 3-61.
30. Wempner, G.A., *Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells*. International Journal of Solids and Structures, 1969. **5**(2): p. 117-153.
31. Wempner, G.A., Oden, J.T., and Kross, D.A., *Finite Element Analysis of Thin Shells*, in *Engineering Mechanics Division Proceedings of ASCE*. 1968. p. 1273-1294.
32. Stricklin, J.A., Haisler, W.E., Tisdale, P.R., and Gunderson, R., *A Rapidly Converging Triangular Plate Element*. AIAA Journal, 1969. **7**(1): p. 180-181.
33. Dhatt, G., *An efficient triangular shell element*. AIAA Journal, 1970. **8**(11): p. 2100-2102.
34. Batoz, J.L., *An Explicit Formulation for an Efficient Triangular Plate-Bending Element*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1982. **18**(7): p. 1077-1089.



35. Jeyachandrabose, C., Kirkhope, J., and Babu, C.R., *An Alternative Explicit Formulation for the DKT Plate-Bending Element*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1985. **21**(7): p. 1289-1293.
36. Dhatt, G., Marcotte, L., and Matte, Y., *A new triangular discrete Kirchhoff plate/shell element*. International journal for numerical methods in engineering, 1986. **23**(3): p. 453-470.
37. Dhatt, G., Marcotte, L., Matte, Y., and Talbot, M., *Two new discrete Kirchhoff plate shell elements*. Innovative numerical methods in engineering, 1986: p. 599-604.
38. Irons, B.M., *The semi-Loof shell element*, in *Finite Elements for Thin Shells and Curved Members*, D.G.e.a. Ashwell, Editor. 1976, Wiley: New York. p. 197-222.
39. Meek, J.L. and Tan, H.S., *A discrete Kirchhoff plate bending element with Loof nodes*. Computers & structures, 1985. **21**(6): p. 1197-1212.
40. Poulsen, P.N. and Damkilde, L., *A flat triangular shell element with loof nodes*. International journal for numerical methods in engineering, 1996. **39**(22): p. 3867-3887.
41. Hinton, E. and Campbell, J.S., *Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Squares Method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1974. **8**(3): p. 461-480.
42. Jeyachandrabose, C. and Kirkhope, J., *Least Squares Strain Smoothing for the Eight-node Serendipity Plane Stress Element*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1984. **20**(6): p. 1164-1166.
43. Jeyachandrabose, C. and Kirkhope, J., *Construction of new efficient three-node triangular thin plate bending elements*. Computers & Structures, 1986. **23**(5): p. 587-603.
44. Bathe, K.J. and Ho, L.W., *A simple and effective element for analysis of general shell structures*. Computers & Structures, 1981. **13**(5): p. 673-681.
45. Fafard, M., Dhatt, G., and Batoz, J.L., *A new discrete Kirchhoff plate/shell element with updated procedures*. Computers & structures, 1989. **31**(4): p. 591-606.

46. Talbot, M. and Dhatt, G., *Three discrete Kirchhoff elements for shell analysis with large geometrical non-linearities and bifurcations*. Engineering computations, 1987. **4**(1): p. 15-22.
47. Batoz, J.L., Hammadi, F., Zheng, C., and Zhong, W., *On the linear analysis of plates and shells using a new-16 degrees of freedom flat shell element*. Computers & Structures, 2000. **78**(1): p. 11-20.
48. Dawe, D.J., *Shell analysis using a simple facet element*. The Journal of Strain Analysis for Engineering Design, 1972. **7**(4): p. 266-270.
49. Carpenter, N., Stolarski, H., and Belytschko, T., *A flat triangular shell element with improved membrane interpolation*. Communications in applied numerical methods, 1985. **1**(4): p. 161-168.
50. Ugural, A.C. and Fenster, S.K., *Advanced Strength and Applied Elasticity*. 2 ed. 1977, New York: Elsevier.
51. Noda, S.K., Hetnarski, R.B., and Tanigawa, Y., *Thermal Stresses*. 2 ed. 2003, New York: Taylor & Francis.
52. Timoshenko, S. and Krieger, S.W., *Theory of Plates and Shells*. 3 ed. 1970, Singapore: McGraw-Hill.
53. Sai Ram, K.S. and Sinha, P.K., *Hygrothermal bending of laminated composite plates with a cutout*. Computers & Structures, 1992. **43**(6): p. 1105-1115.
54. Nowacki, W., *Thermoelasticity*. 1962, Oxford: Pergamon Press.
55. Boley, B.A. and Weiner, J.H., *Theory of Thermal Stresses*. 1997, New York: Dover Publications.
56. Hetnarski, R.B., *Encyclopedia of Thermal Stresses*. 2014, New York: Springer.
57. Kulakov, V.M., Uspenskii, A.A., and Frolov, A.N., *Thermal Deflection in a Parallelogram Plate*. Strength of Materials, 1975. **7**(11): p. 1362-1364.
58. Shames, I.H., *Introduction to Solid Mechanics*. 2 ed. 1989, New Jersey: Prentice-Hall.
59. Ma, X.W., Zhao, G.Q., and Sun, L., *Automesh-2D/3D: robust automatic mesh generator for metal forming simulation*. Materials Research Innovations, 2011. **15**(s1): p. s482-s486.

60. ณัฐชนนท์ ประสมสุข, การเพิ่มความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ปัญหาของแข็งด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบปรับขนาดได้ที่ใช้ฟังก์ชันเชิงเส้น. 2556, ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
61. Morley, L.S.D., *Skew Plates and Structures*. 1963, London: Pergamon Press.
62. Kim, J.H. and Yong, H.K., *Three-node macro triangular shell element based on the assumed natural strains*. Computational Mechanics, 2002. **29**(6): p. 441-458.
63. Ramesh, S.S., Wang, C.M., Reddy, J.N., and Ang, K.K., *Computation of stress resultants in plate bending problems using higher-order triangular elements*. Engineering Structures, 2008. **30**(10): p. 2687–2706.
64. ชัชวาล ศิริปฐ, เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบปรับขนาดได้ที่ใช้ฟังก์ชันเชิงเส้นสำหรับวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อน. 2556, วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต, ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
65. วิทยา สดับสาร, การวิเคราะห์การไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ไร้ความหนืดโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมและเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์. 2557, วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต, ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ภาคผนวก

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
CHULALONGKORN UNIVERSITY

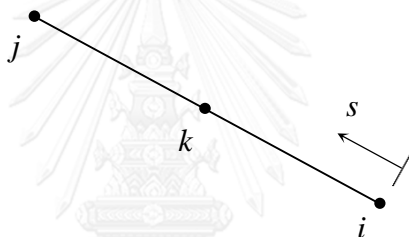
## ภาคผนวก ก

## การเสีรูปในแนวตั้งที่แปรผันในรูปกำลังสามตลอดขอบของเอลิเมนต์

จากในบทที่ 3 เงื่อนไขหนึ่งที่ใช้ในการประดิษฐ์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสครีตเคอร์ซอर्फคือการกำหนดให้ลักษณะการเสีรูปในแนวตั้ง  $w$  แปรผันในรูปกำลังสามตลอดด้านทั้งสี่ของเอลิเมนต์ ดังในสมการ (3.48) และ (3.127) หากสมมุติให้ด้านของเอลิเมนต์ที่เกิดจากจุดต่อ  $i$  และ  $j$  โดยแกนนอน  $s$  ที่ขนานกับด้านของเอลิเมนต์มีจุดเริ่มต้นที่จุด  $i$  ดังรูปที่ ก.1 จะได้

$$w = a_1 + a_2s + a_3s^2 + a_4s^3 \quad (\text{ก.1})$$

และ 
$$\frac{\partial w}{\partial s} = a_2 + 2a_3s + 3a_4s^2 \quad (\text{ก.2})$$

รูปที่ ก.1 ด้านของเอลิเมนต์ที่เกิดจากจุดต่อ  $i$  และ  $j$ 

แทนค่าที่จุดต่อ  $i$  และ  $j$  ในสมการ (ก.1) และ (ก.2) จะได้

$$w_i = a_1 + a_2s_i + a_3s_i^2 + a_4s_i^3 \quad (\text{ก.3})$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_i = a_2 + 2a_3s_i + 3a_4s_i^2 \quad (\text{ก.4})$$

$$w_j = a_1 + a_2s_j + a_3s_j^2 + a_4s_j^3 \quad (\text{ก.5})$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_j = a_2 + 2a_3s_j + 3a_4s_j^2 \quad (\text{ก.6})$$

เนื่องจากแกนนอน  $s$  มีจุดเริ่มต้นที่จุด  $i$  จะได้ว่า

$$s_i = 0 \quad (\text{ก.7})$$

และ

$$s_j = l_{ij} \quad (\text{ก.8})$$

โดยที่  $l_{ij}$  คือ ความยาวด้านของเอลิเมนต์ ซึ่ง 
$$l_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (\text{ก.9})$$

ดังนั้น สมการ (ก.3)-(ก.6) จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$w_i = a_1 \quad (\text{ก.10})$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_i = a_2 \quad (\text{ก.11})$$

$$w_j = w_i + \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_i l_{ij} + a_3 l_{ij}^2 + a_4 l_{ij}^3 \quad (\text{ก.12})$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_j = \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_i + 2a_3 l_{ij} + 3a_4 l_{ij}^2 \quad (\text{ก.13})$$

จากสมการ (ก.12) คูณด้วย  $\frac{3}{l_{ij}}$  ตลอดทั้งสมการจะได้

$$3 \frac{w_j}{l_{ij}} = 3 \frac{w_i}{l_{ij}} + 3 \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_i + 3a_3 l_{ij} + 3a_4 l_{ij}^2 \quad (\text{ก.14})$$

นำสมการ (ก.14) ลบด้วยสมการ (ก.13) จะได้

$$a_3 l_{ij} = 3 \left( \frac{w_j - w_i}{l_{ij}} \right) - 2 \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_i - \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_j$$

ดังนั้น

$$a_3 = \frac{1}{l_{ij}} \left[ 3 \left( \frac{w_j - w_i}{l_{ij}} \right) - 2 \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_i - \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_j \right] \quad (\text{ก.15})$$

แทนค่าสมการ (ก.15) ในสมการ (ก.12) จะได้

$$w_j = w_i + \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_i l_{ij} + \left[ 3 \left( \frac{w_j - w_i}{l_{ij}} \right) - 2 \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_i - \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_j \right] l_{ij} + a_4 l_{ij}^3$$

ดังนั้น

$$a_4 = \frac{1}{l_{ij}^2} \left[ -2 \left( \frac{w_j - w_i}{l_{ij}} \right) + \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_i + \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_j \right] \quad (\text{ก.16})$$

แทนค่า  $a_1$  ถึง  $a_4$  จากสมการ (ก.10), (ก.11), (ก.15) และ (ก.16) ลงในสมการ (ก.2) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial s} &= \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_i + 2 \left( \frac{1}{l_{ij}} \right) \left[ 3 \left( \frac{w_j - w_i}{l_{ij}} \right) - 2 \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_i - \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_j \right] s \\ &\quad + 3 \left( \frac{1}{l_{ij}^2} \right) \left[ -2 \left( \frac{w_j - w_i}{l_{ij}} \right) + \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_i + \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_j \right] s^2 \end{aligned} \quad (\text{ก.17})$$

ที่จุดต่อกึ่งกลางด้านที่จุด  $k$  ซึ่ง  $s = \frac{l_{ij}}{2}$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_k &= \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_i + \left[ 3 \left( \frac{w_j - w_i}{l_{ij}} \right) - 2 \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_i - \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_j \right] + \frac{3}{4} \left[ -2 \left( \frac{w_j - w_i}{l_{ij}} \right) + \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_i + \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_j \right] \\ \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_k &= \frac{3}{2} \left( \frac{w_j - w_i}{l_{ij}} \right) - \frac{1}{4} \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_i - \frac{1}{4} \left. \frac{\partial w}{\partial s} \right|_j \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ว่า 
$$\frac{\partial w}{\partial s} \Big|_k = -\frac{3}{2l_{ij}}(w_i - w_j) - \frac{1}{4}(w_{,si} - w_{,sj}) \quad (\text{ก.18})$$

ดังแสดงไว้ในสมการ (3.48) และ (3.127)



## ภาคผนวก ข

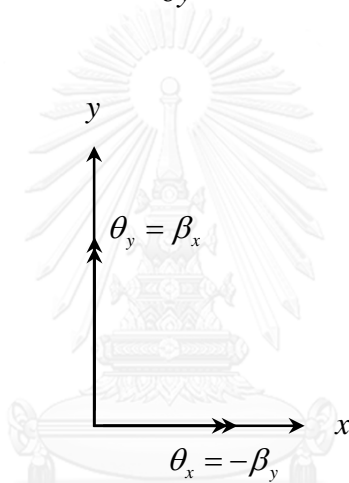
## สมการความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องสำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสครีตเคอร์ซอพฟ์

จากในบทที่ 3 ในสมการ (3.50-3.60) สมการความสัมพันธ์ต่าง ๆ มีดังนี้

1.) ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\beta_x$  และ  $\beta_y$  กับ  $\theta_x$  และ  $\theta_y$  ภายใต้สมมติฐานของเคอร์ซอพฟ์  
เป็นดังสมการ (ข.1) และ (ข.2) ดังรูปที่ ข.1

$$\beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} = \theta_y \quad (\text{ข.1})$$

$$\beta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} = -\theta_x \quad (\text{ข.2})$$



รูปที่ ข.1 รูปแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $\beta_x$  และ  $\beta_y$  กับ  $\theta_x$  และ  $\theta_y$

CHULALONGKORN UNIVERSITY

2.) ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\beta_x$  และ  $\beta_y$  กับ  $\beta_n$  และ  $\beta_s$  ดังรูปที่ ข.2 เป็นดังสมการ

$$\beta_x = \beta_n \cos \gamma - \beta_s \sin \gamma \quad (\text{ข.3})$$

และ

$$-\beta_y = -\beta_n \sin \gamma - \beta_s \cos \gamma$$

ดังนั้น

$$\beta_y = \beta_n \sin \gamma + \beta_s \cos \gamma \quad (\text{ข.4})$$

ดังนั้น

$$\beta_n = \beta_x \cos \gamma - (-\beta_y) \sin \gamma$$

$$\beta_n = \beta_x \cos \gamma + \beta_y \sin \gamma \quad (\text{ข.5})$$

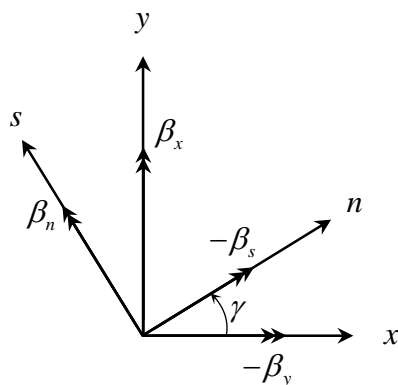
และ

$$-\beta_s = \beta_x \sin \gamma + (-\beta_y) \cos \gamma$$

ดังนั้น

$$\beta_s = -\beta_x \sin \gamma + \beta_y \cos \gamma \quad (\text{ข.6})$$





รูปที่ ข.2 รูปแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $\beta_x$  และ  $\beta_y$  กับ  $\beta_n$  และ  $\beta_s$

3.) ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\frac{\partial w}{\partial n}$  และ  $\frac{\partial w}{\partial s}$  กับ  $\theta_x$  และ  $\theta_y$  ดังรูปที่ ข.3 เป็นดังสมการ

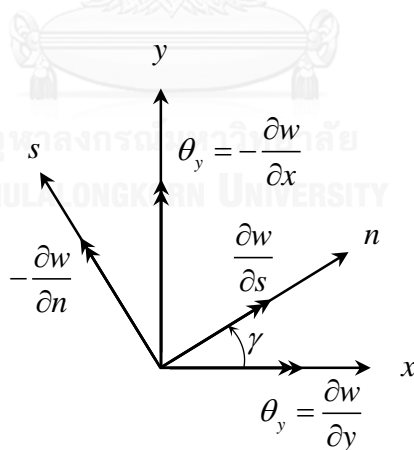
$$-\frac{\partial w}{\partial n} = -\theta_x \sin \gamma + \theta_y \cos \gamma$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \theta_x \sin \gamma - \theta_y \cos \gamma \quad (\text{ข.7})$$

และ

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \theta_x \cos \gamma + \theta_y \sin \gamma \quad (\text{ข.8})$$



รูปที่ ข.3 รูปแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $\frac{\partial w}{\partial n}$  และ  $\frac{\partial w}{\partial s}$  กับ  $\theta_x$  และ  $\theta_y$

## ภาคผนวก ค

## ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ใหม่โดยวิธีกำลังสองน้อยสุด

จากในบทที่ 3 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบ 9 จุดต่อดังแสดงในรูปที่ 3.7 มีฟังก์ชันการประมาณภายในอยู่ในรูปของพิกัดธรรมชาติ  $\xi - \eta$  ดังในสมการ (3.115) นั่นคือ

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}\xi\eta(\xi-1)(\eta-1) = \frac{1}{4}\xi^2\eta^2 - \frac{1}{4}\xi^2\eta - \frac{1}{4}\xi\eta^2 + \frac{1}{4}\xi\eta \\
 N_2 &= \frac{1}{4}\xi\eta(\xi+1)(\eta-1) = \frac{1}{4}\xi^2\eta^2 - \frac{1}{4}\xi^2\eta + \frac{1}{4}\xi\eta^2 - \frac{1}{4}\xi\eta \\
 N_3 &= \frac{1}{4}\xi\eta(\xi+1)(\eta+1) = \frac{1}{4}\xi^2\eta^2 + \frac{1}{4}\xi^2\eta + \frac{1}{4}\xi\eta^2 + \frac{1}{4}\xi\eta \\
 N_4 &= \frac{1}{4}\xi\eta(\xi-1)(\eta+1) = \frac{1}{4}\xi^2\eta^2 + \frac{1}{4}\xi^2\eta - \frac{1}{4}\xi\eta^2 - \frac{1}{4}\xi\eta \\
 N_5 &= -\frac{1}{2}\eta(\eta-1)(\xi^2-1) = -\frac{1}{2}\xi^2\eta^2 + \frac{1}{2}\xi^2\eta + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}\eta \\
 N_6 &= -\frac{1}{2}\xi(\xi+1)(\eta^2-1) = -\frac{1}{2}\xi^2\eta^2 - \frac{1}{2}\xi\eta^2 + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi \\
 N_7 &= -\frac{1}{2}\eta(\eta+1)(\xi^2-1) = -\frac{1}{2}\xi^2\eta^2 - \frac{1}{2}\xi^2\eta + \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}\eta \\
 N_8 &= -\frac{1}{2}\xi(\xi-1)(\eta^2-1) = -\frac{1}{2}\xi^2\eta^2 + \frac{1}{2}\xi\eta^2 + \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi \\
 N_9 &= (1-\xi^2)(1-\eta^2) = \xi^2\eta^2 - \xi^2 - \eta^2 + 1
 \end{aligned} \tag{3.115}$$

โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยสุด ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ดังสมการ (3.115) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้เป็น

$$N_i = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\xi\eta + a_6\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi\eta^2 + a_9\xi^2\eta^2 \tag{ค.1}$$

$$\text{หรือ } N_i = \sum_{j=1}^9 a_j \xi^{m_j} \eta^{n_j} \tag{ค.2}$$

สมมติฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ใหม่โดยละเทอม  $\xi^2\eta^2$  (ซึ่งจะเห็นได้ว่าฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ใหม่นั้นอยู่ในรูปแบบเดียวกันกับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแปดจุดต่อ) จะได้ว่า

$$\bar{N}_i = b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi^2 + b_5\xi\eta + b_6\eta^2 + b_7\xi^2\eta + b_8\xi\eta^2 \tag{ค.3}$$

$$\text{หรือ } \bar{N}_i = \sum_{j=1}^8 b_j \xi^{m_j} \eta^{n_j} \tag{ค.4}$$

ค่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า  $b_i$  สามารถหาให้อยู่ในรูปของสัมประสิทธิ์ที่ทราบค่า  $a_i$  โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดโดยกำหนดฟังก์ชันกำลังสอง

$$\Pi = \int_A (N_i - \bar{N}_i)^2 d\xi d\eta \tag{ค.5}$$

และทำการหาค่าน้อยสุด

$$\frac{d\Pi}{db_j} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, 8 \quad (\text{ค.6})$$

ทำให้ได้ออกมา 8 สมการ ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{db_1} &= \frac{4}{225}(-450a_1 - 150a_4 - 150a_6 - 50a_9 + 450b_1 + 150b_4 + 150b_6) = 0 \\ \frac{d\Pi}{db_2} &= \frac{4}{225}(-150a_2 - 50a_8 + 150b_2 + 50b_8) = 0 \\ \frac{d\Pi}{db_3} &= \frac{4}{225}(-150a_3 - 50a_7 + 150b_3 + 50b_7) = 0 \\ \frac{d\Pi}{db_4} &= \frac{4}{225}(-150a_1 - 90a_4 - 50a_6 - 30a_9 + 150b_1 + 90b_4 + 50b_6) = 0 \quad (\text{ค.7}) \\ \frac{d\Pi}{db_5} &= \frac{4}{225}(-50a_5 + 50b_5) = 0 \\ \frac{d\Pi}{db_6} &= \frac{4}{225}(-150a_1 - 50a_4 - 90a_6 - 30a_9 + 150b_1 + 50b_4 + 90b_6) = 0 \\ \frac{d\Pi}{db_7} &= \frac{4}{225}(-50a_3 - 30a_7 + 50b_3 + 30b_7) = 0 \\ \frac{d\Pi}{db_8} &= \frac{4}{225}(-50a_2 - 30a_8 + 50b_2 + 30b_8) = 0 \end{aligned}$$

ทำการจัดรูปใหม่จะได้

$$\begin{aligned} 9b_1 + 3b_4 + 3b_6 &= 9a_1 + 3a_4 + 3a_6 + a_9 \\ 3b_2 + b_8 &= 3a_2 + a_8 \\ 3b_3 + b_7 &= 3a_3 + a_7 \\ 15b_1 + 9b_4 + 5b_6 &= 15a_1 + 9a_4 + 5a_6 + 3a_9 \\ b_5 &= a_5 \\ 15b_1 + 5b_4 + 9b_6 &= 15a_1 + 5a_4 + 9a_6 + 3a_9 \\ 5b_3 + 3b_7 &= 5a_3 + 3a_7 \\ 5b_2 + 3b_8 &= 5a_2 + 3a_8 \end{aligned} \quad (\text{ค.8})$$

หรือเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & 9 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & 5 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9a_1 + 3a_4 + 3a_6 + a_9 \\ 3a_2 + a_8 \\ 3a_3 + a_7 \\ 15a_1 + 9a_4 + 5a_6 + 3a_9 \\ a_5 \\ 15a_1 + 5a_4 + 9a_6 + 3a_9 \\ 5a_3 + 3a_7 \\ 5a_2 + 3a_8 \end{bmatrix} \quad (\text{ค.9})$$

แก้ระบบสมการจะได้

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - \frac{a_9}{9} \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 + \frac{a_9}{3} \\ a_5 \\ a_6 + \frac{a_9}{3} \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix} \quad (\text{ค.10})$$

ดังนั้นจากสมการ (ค.3) แทนค่าสัมประสิทธิ์  $b_i$  ด้วยสัมประสิทธิ์ที่ทราบค่า  $a_i$  จะกลายเป็น

$$\begin{aligned} \bar{N}_i = & \left( a_1 - \frac{a_9}{9} \right) + (a_2)\xi + (a_3)\eta + \left( a_4 + \frac{a_9}{3} \right) \xi^2 + (a_5)\xi\eta \\ & + \left( a_6 + \frac{a_9}{3} \right) \eta^2 + (a_7)\xi^2\eta + (a_8)\xi\eta^2 \end{aligned} \quad (\text{ค.11})$$

จากนั้นแทนค่า  $a_1$  ถึง  $a_8$  ของในแต่ละ  $N_i$  จะได้ค่าฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ใหม่  $\bar{N}_i$  เป็นดังสมการ

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= -\frac{1}{36} + \frac{1}{12}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi\eta + \frac{1}{12}\eta^2 - \frac{1}{4}\xi^2\eta - \frac{1}{4}\xi\eta^2 \\ \bar{N}_2 &= -\frac{1}{36} + \frac{1}{12}\xi^2 - \frac{1}{4}\xi\eta + \frac{1}{12}\eta^2 - \frac{1}{4}\xi^2\eta + \frac{1}{4}\xi\eta^2 \\ \bar{N}_3 &= -\frac{1}{36} + \frac{1}{12}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi\eta + \frac{1}{12}\eta^2 + \frac{1}{4}\xi^2\eta + \frac{1}{4}\xi\eta^2 \\ \bar{N}_4 &= -\frac{1}{36} + \frac{1}{12}\xi^2 - \frac{1}{4}\xi\eta + \frac{1}{12}\eta^2 + \frac{1}{4}\xi^2\eta - \frac{1}{4}\xi\eta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{N}_5 &= \frac{1}{18} - \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{6}\xi^2 + \frac{1}{3}\eta^2 + \frac{1}{2}\xi^2\eta & (ค.12) \\
\bar{N}_6 &= \frac{1}{18} + \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{3}\xi^2 - \frac{1}{6}\eta^2 - \frac{1}{2}\xi\eta^2 \\
\bar{N}_7 &= \frac{1}{18} + \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{6}\xi^2 + \frac{1}{3}\eta^2 - \frac{1}{2}\xi^2\eta \\
\bar{N}_8 &= \frac{1}{18} - \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{3}\xi^2 - \frac{1}{6}\eta^2 + \frac{1}{2}\xi\eta^2 \\
\bar{N}_9 &= \frac{8}{9} - \frac{2}{3}\xi^2 - \frac{2}{3}\eta^2
\end{aligned}$$

ดังในสมการ (3.122) โดยจะสังเกตได้ว่าฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ใหม่  $\bar{N}_i$  นี้พจน์  $\xi^2\eta^2$  จะถูกละทิ้งไป



## ภาคผนวก ง

## ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ในรูปแบบของกำลังสามคู่

จากสมการ (3.171) ในบทที่ 3 สมมติลักษณะการกระจายตัวของค่าการเสียรูปในแนวตั้ง  $w$  ของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสี่จุดต่อดังรูปที่ ง.1 ให้อยู่ในรูปแบบของกำลังสามคู่ (bicubic) ดังนี้

$$w = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\xi\eta + a_6\eta^2 + a_7\xi^3 + a_8\xi^2\eta + a_9\xi\eta^2 + a_{10}\eta^3 + a_{11}\xi^3\eta + a_{12}\xi\eta^3 \quad (\text{ง.1})$$

หรือ  $w = [L]\{a\}$  (ง.2)

โดยที่

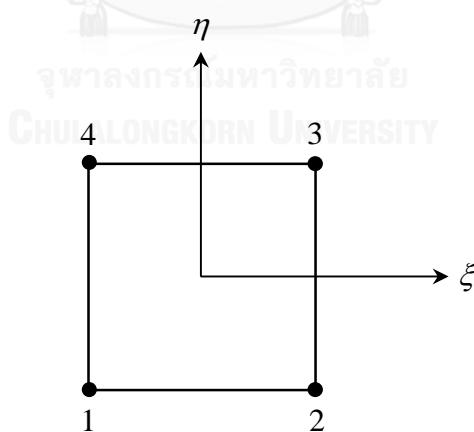
$$[L] = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \xi^3 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \quad \eta^3 \quad \xi^3\eta \quad \xi\eta^3] \quad (\text{ง.3})$$

$$\{a\}^T = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad a_9 \quad a_{10} \quad a_{11} \quad a_{12}] \quad (\text{ง.4})$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = a_2 + 2a_4\xi + a_5\eta + 3a_7\xi^2 + 2a_8\xi\eta + a_9\eta^2 + 3a_{11}\xi^2\eta + a_{12}\eta^3 \quad (\text{ง.5})$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = a_3 + a_5\xi + 2a_6\eta + a_8\xi^2 + 2a_9\xi\eta + 3a_{10}\eta^2 + a_{11}\xi^3 + 3a_{12}\xi\eta^2 \quad (\text{ง.6})$$



รูปที่ ง.1 รูปเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสี่จุดต่อที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันสามมิติ

ที่จุดต่อ 1  $\xi = -1, \eta = -1$  จะได้ว่า

$$w_1 = a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 + a_6 - a_7 - a_8 - a_9 - a_{10} + a_{11} + a_{12} \quad (\text{ง.7})$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_1 = a_2 - 2a_4 - a_5 + 3a_7 + 2a_8 + a_9 - 3a_{11} - a_{12} \quad (\text{ง.8})$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_1 = a_3 - a_5 - 2a_6 + a_8 + 2a_9 + 3a_{10} - a_{11} - 3a_{12} \quad (\text{ง.9})$$

ที่จุดต่อ 2  $\xi = 1, \eta = -1$  จะได้ว่า

$$w_2 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 + a_7 - a_8 + a_9 - a_{10} - a_{11} - a_{12} \quad (\text{ง.10})$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_2 = a_2 + 2a_4 - a_5 + 3a_7 - 2a_8 + a_9 - 3a_{11} - a_{12} \quad (\text{ง.11})$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_2 = a_3 + a_5 - 2a_6 + a_8 - 2a_9 + 3a_{10} + a_{11} + 3a_{12} \quad (\text{ง.12})$$

ที่จุดต่อ 3  $\xi = 1, \eta = 1$  จะได้ว่า

$$w_3 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} \quad (\text{ง.13})$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_3 = a_2 + 2a_4 + a_5 + 3a_7 + 2a_8 + a_9 + 3a_{11} + a_{12} \quad (\text{ง.14})$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_3 = a_3 + a_5 + 2a_6 + a_8 + 2a_9 + 3a_{10} + a_{11} + 3a_{12} \quad (\text{ง.15})$$

ที่จุดต่อ 4  $\xi = -1, \eta = 1$  จะได้ว่า

$$w_4 = a_1 - a_2 + a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8 - a_9 + a_{10} - a_{11} - a_{12} \quad (\text{ง.16})$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_4 = a_2 - 2a_4 + a_5 + 3a_7 - 2a_8 + a_9 + 3a_{11} + a_{12} \quad (\text{ง.17})$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_4 = a_3 - a_5 + 2a_6 + a_8 - 2a_9 + 3a_{10} - a_{11} - 3a_{12} \quad (\text{ง.18})$$

ซึ่งสมการ (ง.7-ง.18) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้เป็น

$$\{d\} = [A]\{a\} \quad (\text{ง.19})$$

โดยที่

$$\{d\}^T = \left[ w_1 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_1 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_1 \quad \dots \quad w_4 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_4 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_4 \right] \quad (\text{ง.20})$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad (ง.21)$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\{a\} = [A]^{-1}\{d\} \quad (ง.22)$$

แทนค่าเวกเตอร์  $\{a\}$  ในสมการ (ง.2) จะได้ว่า

$$w = [L][A]^{-1}\{d\} \quad (ง.23)$$

หรือ

$$w = [N]\{d\} \quad (ง.24)$$

โดยที่

$$[N] = [L][A]^{-1} \quad (ง.25)$$

$$\text{และ } [N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8 \ N_9 \ N_{10} \ N_{11} \ N_{12}] \quad (ง.26)$$

ดังนั้นค่าแต่ละเทอมของฟังก์ชันสัมฐาน  $[N]$  จากการคูณเมทริกซ์ในสมการ (ง.25) และทำการจัดรูปจะได้

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(2-\xi^2-\eta^2-\xi-\eta) \\ N_2 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\xi^2) \\ N_3 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\eta^2) \\ N_4 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(2-\xi^2-\eta^2+\xi-\eta) \\ N_5 &= -\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi^2) \\ N_6 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\eta^2) \\ N_7 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(2-\xi^2-\eta^2+\xi+\eta) \end{aligned} \quad (ง.27)$$



$$\begin{aligned}
N_8 &= -\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi^2) \\
N_9 &= -\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\eta^2) \\
N_{10} &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(2-\xi^2-\eta^2-\xi+\eta) \\
N_{11} &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\xi^2) \\
N_{12} &= -\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\eta^2)
\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned}
w &= N_1 w_1 + N_2 \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_1 + N_3 \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)_1 + N_4 w_2 + N_5 \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_2 + N_6 \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)_2 \\
&\quad + N_7 w_3 + N_8 \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_3 + N_9 \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)_3 + N_{10} w_4 + N_{11} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_4 + N_{12} \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)_4 \quad (ง.28)
\end{aligned}$$

ทำการเปลี่ยน  $\frac{\partial w}{\partial \xi}$  และ  $\frac{\partial w}{\partial \eta}$  ให้อยู่ในรูป  $\frac{\partial w}{\partial x}$  และ  $\frac{\partial w}{\partial y}$  จากความสัมพันธ์กฎลูกโซ่เช่นเดียวกับสมการ (3.187) และ (3.188) นั่นคือ

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (ง.29)$$

โดยที่

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (ง.30)$$

เมทริกซ์  $[J]$  คือเมทริกซ์จาโคเบียน (Jacobian matrix)

จะได้

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = J_{11} \frac{\partial w}{\partial x} + J_{12} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (ง.31)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = J_{21} \frac{\partial w}{\partial x} + J_{22} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (ง.32)$$

โดยค่าของ  $J_{11}, J_{12}, J_{21}, J_{22}$  เป็นดังสมการ (3.193)

ดังนั้นสมการ (ง.28) จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$w = N_1 w_1 + N_2 \left( (J_{11})_1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_1 + (J_{12})_1 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_1 \right) + N_3 \left( (J_{21})_1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_1 + (J_{22})_1 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_1 \right)$$

$$\begin{aligned}
& +N_4 w_2 + N_5 \left( (J_{11})_2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_2 + (J_{12})_2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_2 \right) + N_6 \left( (J_{21})_2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_2 + (J_{22})_2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_2 \right) \\
& +N_7 w_3 + N_8 \left( (J_{11})_3 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_3 + (J_{12})_3 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_3 \right) + N_9 \left( (J_{21})_3 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_3 + (J_{22})_3 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_3 \right) \\
& +N_{10} w_4 + N_{11} \left( (J_{11})_4 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_4 + (J_{12})_4 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_4 \right) + N_{12} \left( (J_{21})_4 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_4 + (J_{22})_4 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_4 \right) \quad (จ.33)
\end{aligned}$$

ที่จุดต่อ 1 แทนค่า  $\xi = -1, \eta = -1$  ในสมการ (3.193) จะได้ว่า

$$(J_{11})_1 = \frac{1}{4} [x_{21} + x_{34} - (x_{12} + x_{34})] = \frac{1}{2} x_{21} \quad (จ.34)$$

$$(J_{12})_1 = \frac{1}{4} [y_{21} + y_{34} - (y_{12} + y_{34})] = \frac{1}{2} y_{21} \quad (จ.35)$$

$$(J_{21})_1 = \frac{1}{4} [x_{32} + x_{41} - (x_{12} + x_{34})] = \frac{1}{2} x_{41} \quad (จ.36)$$

$$(J_{22})_1 = \frac{1}{4} [y_{32} + y_{41} - (y_{12} + y_{34})] = \frac{1}{2} y_{41} \quad (จ.37)$$

ที่จุดต่อ 2 แทนค่า  $\xi = 1, \eta = -1$  ในสมการ (3.193) จะได้ว่า

$$(J_{11})_2 = \frac{1}{4} [x_{21} + x_{34} - (x_{12} + x_{34})] = \frac{1}{2} x_{21} \quad (จ.38)$$

$$(J_{12})_2 = \frac{1}{4} [y_{21} + y_{34} - (y_{12} + y_{34})] = \frac{1}{2} y_{21} \quad (จ.39)$$

$$(J_{21})_2 = \frac{1}{4} [x_{32} + x_{41} + (x_{12} + x_{34})] = \frac{1}{2} x_{32} \quad (จ.40)$$

$$(J_{22})_2 = \frac{1}{4} [y_{32} + y_{41} + (y_{12} + y_{34})] = \frac{1}{2} y_{32} \quad (จ.41)$$

ที่จุดต่อ 3 แทนค่า  $\xi = 1, \eta = 1$  ในสมการ (3.193) จะได้ว่า

$$(J_{11})_3 = \frac{1}{4} [x_{21} + x_{34} + (x_{12} + x_{34})] = \frac{1}{2} x_{34} \quad (จ.42)$$

$$(J_{12})_3 = \frac{1}{4} [y_{21} + y_{34} + (y_{12} + y_{34})] = \frac{1}{2} y_{34} \quad (จ.43)$$

$$(J_{21})_3 = \frac{1}{4} [x_{32} + x_{41} + (x_{12} + x_{34})] = \frac{1}{2} x_{32} \quad (จ.44)$$

$$(J_{22})_3 = \frac{1}{4} [y_{32} + y_{41} + (y_{12} + y_{34})] = \frac{1}{2} y_{32} \quad (จ.45)$$

ที่จุดต่อ 4 แทนค่า  $\xi = -1, \eta = 1$  ในสมการ (3.193) จะได้ว่า

$$(J_{11})_4 = \frac{1}{4} [x_{21} + x_{34} + (x_{12} + x_{34})] = \frac{1}{2} x_{34} \quad (จ.46)$$

$$(J_{12})_4 = \frac{1}{4} [y_{21} + y_{34} + (y_{12} + y_{34})] = \frac{1}{2} y_{34} \quad (จ.47)$$

$$(J_{21})_4 = \frac{1}{4} [x_{32} + x_{41} - (x_{12} + x_{34})] = \frac{1}{2} x_{41} \quad (ง.48)$$

$$(J_{22})_4 = \frac{1}{4} [y_{32} + y_{41} - (y_{12} + y_{34})] = \frac{1}{2} y_{41} \quad (ง.49)$$

จากสมการ (ง.34-ง.49) และเปลี่ยน  $\frac{\partial w}{\partial x}$  และ  $\frac{\partial w}{\partial y}$  เป็น  $\theta_x$  และ  $\theta_y$  สมการ (ง.33) จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} w = & N_1 w_1 + N_2 \left( -\frac{1}{2} x_{21} \theta_{y1} + \frac{1}{2} y_{21} \theta_{x1} \right) + N_3 \left( -\frac{1}{2} x_{41} \theta_{y1} + \frac{1}{2} y_{41} \theta_{x1} \right) \\ & + N_4 w_2 + N_5 \left( -\frac{1}{2} x_{21} \theta_{y2} + \frac{1}{2} y_{21} \theta_{x2} \right) + N_6 \left( -\frac{1}{2} x_{32} \theta_{y2} + \frac{1}{2} y_{32} \theta_{x2} \right) \\ & + N_7 w_3 + N_8 \left( -\frac{1}{2} x_{34} \theta_{y3} + \frac{1}{2} y_{34} \theta_{x3} \right) + N_9 \left( -\frac{1}{2} x_{32} \theta_{y3} + \frac{1}{2} y_{32} \theta_{x3} \right) \\ & + N_{10} w_4 + N_{11} \left( -\frac{1}{2} x_{34} \theta_{y4} + \frac{1}{2} y_{34} \theta_{x4} \right) + N_{12} \left( -\frac{1}{2} x_{41} \theta_{y4} + \frac{1}{2} y_{41} \theta_{x4} \right) \end{aligned} \quad (ง.50)$$

จัดรูปให้อยู่ในรูปตัวไม่ทราบค่า  $w$ ,  $\theta_x$  และ  $\theta_y$  จะได้

$$\begin{aligned} w = & N'_1 w_1 + N'_2 \theta_{x1} + N'_3 \theta_{y1} + N'_4 w_2 + N'_5 \theta_{x2} + N'_6 \theta_{y2} \\ & + N'_7 w_3 + N'_8 \theta_{x3} + N'_9 \theta_{y3} + N'_{10} w_4 + N'_{11} \theta_{x4} + N'_{12} \theta_{y4} \end{aligned} \quad (ง.51)$$

หรือ

$$w = [N'] \{\delta\} \quad (ง.52)$$

โดยที่  $[N']$  คือฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ของค่าการเสียรูปในแนวแกนตั้ง  $w$  ของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่สมมุติการกระจายตัวเป็นแบบกำลังสามคู่ตั้งในสมการ (ง.1) ซึ่งแสดงไว้ดังสมการ (3.207) นั่นคือ

$$\begin{aligned} N'_1 &= \frac{1}{8} (1-\xi)(1-\eta)(2-\xi^2-\eta^2-\xi-\eta) \\ N'_2 &= \frac{1}{16} [y_{21}(1-\xi)(1-\eta)(1-\xi^2) + y_{41}(1-\xi)(1-\eta)(1-\eta^2)] \\ N'_3 &= -\frac{1}{16} [x_{21}(1-\xi)(1-\eta)(1-\xi^2) + x_{41}(1-\xi)(1-\eta)(1-\eta^2)] \\ N'_4 &= \frac{1}{8} (1+\xi)(1-\eta)(2-\xi^2-\eta^2+\xi-\eta) \\ N'_5 &= \frac{1}{16} [-y_{21}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi^2) + y_{32}(1+\xi)(1-\eta)(1-\eta^2)] \\ N'_6 &= -\frac{1}{16} [-x_{21}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi^2) + x_{32}(1+\xi)(1-\eta)(1-\eta^2)] \\ N'_7 &= \frac{1}{8} (1+\xi)(1+\eta)(2-\xi^2-\eta^2+\xi+\eta) \\ N'_8 &= -\frac{1}{16} [y_{34}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi^2) + y_{32}(1+\xi)(1+\eta)(1-\eta^2)] \end{aligned} \quad (ง.53)$$

$$N'_9 = \frac{1}{16} [x_{34}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi^2) + x_{32}(1+\xi)(1+\eta)(1-\eta^2)]$$

$$N'_{10} = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(2-\xi^2-\eta^2-\xi+\eta)$$

$$N'_{11} = \frac{1}{16} [y_{34}(1-\xi)(1+\eta)(1-\xi^2) - y_{41}(1-\xi)(1+\eta)(1-\eta^2)]$$

$$N'_{12} = -\frac{1}{16} [x_{34}(1-\xi)(1+\eta)(1-\xi^2) - x_{41}(1-\xi)(1+\eta)(1-\eta^2)]$$

ในการหาค่า  $\frac{\partial w}{\partial x}$  และ  $\frac{\partial w}{\partial y}$  ที่จุดต่อ 9 ของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม 9 จุดต่อดังแสดงในรูปที่ ๓.2

ที่ใช้ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมดิสครีตเคอร์เซอร์ซอฟต์แวร์แบบปรับปรุงนั้น สามารถทำได้โดยเริ่มต้นจากกฎลูกโซ่

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (๓.54)$$

หรือ

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11}^* & j_{12}^* \\ j_{21}^* & j_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_{11}^* \left[ \frac{\partial N'}{\partial \xi} \right] + j_{12}^* \left[ \frac{\partial N'}{\partial \eta} \right] \\ j_{21}^* \left[ \frac{\partial N'}{\partial \xi} \right] + j_{22}^* \left[ \frac{\partial N'}{\partial \eta} \right] \end{Bmatrix} \{\delta\} \quad (๓.55)$$

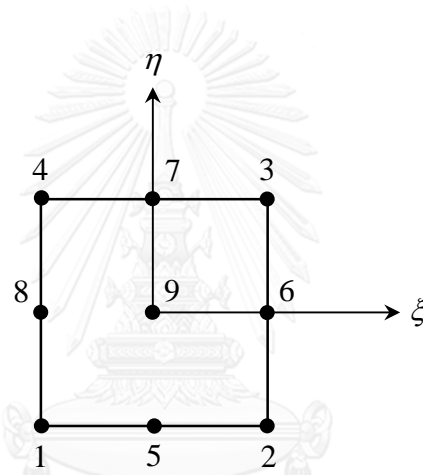
โดยค่าของ  $j_{11}^*$ ,  $j_{12}^*$ ,  $j_{21}^*$ ,  $j_{22}^*$  แสดงไว้ดังสมการ (3.192)

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} = & \left[ j_{11}^* \left( \frac{\partial N'_1}{\partial \xi} \right) + j_{12}^* \left( \frac{\partial N'_1}{\partial \eta} \right) \right] w_1 + \left[ j_{11}^* \left( \frac{\partial N'_2}{\partial \xi} \right) + j_{12}^* \left( \frac{\partial N'_2}{\partial \eta} \right) \right] \theta_{x1} \\ & + \left[ j_{11}^* \left( \frac{\partial N'_3}{\partial \xi} \right) + j_{12}^* \left( \frac{\partial N'_3}{\partial \eta} \right) \right] \theta_{y1} + \left[ j_{11}^* \left( \frac{\partial N'_4}{\partial \xi} \right) + j_{12}^* \left( \frac{\partial N'_4}{\partial \eta} \right) \right] w_2 \\ & + \left[ j_{11}^* \left( \frac{\partial N'_5}{\partial \xi} \right) + j_{12}^* \left( \frac{\partial N'_5}{\partial \eta} \right) \right] \theta_{x2} + \left[ j_{11}^* \left( \frac{\partial N'_6}{\partial \xi} \right) + j_{12}^* \left( \frac{\partial N'_6}{\partial \eta} \right) \right] \theta_{y2} \\ & + \left[ j_{11}^* \left( \frac{\partial N'_7}{\partial \xi} \right) + j_{12}^* \left( \frac{\partial N'_7}{\partial \eta} \right) \right] w_3 + \left[ j_{11}^* \left( \frac{\partial N'_8}{\partial \xi} \right) + j_{12}^* \left( \frac{\partial N'_8}{\partial \eta} \right) \right] \theta_{x3} \\ & + \left[ j_{11}^* \left( \frac{\partial N'_9}{\partial \xi} \right) + j_{12}^* \left( \frac{\partial N'_9}{\partial \eta} \right) \right] \theta_{y3} + \left[ j_{11}^* \left( \frac{\partial N'_{10}}{\partial \xi} \right) + j_{12}^* \left( \frac{\partial N'_{10}}{\partial \eta} \right) \right] w_4 \\ & + \left[ j_{11}^* \left( \frac{\partial N'_{11}}{\partial \xi} \right) + j_{12}^* \left( \frac{\partial N'_{11}}{\partial \eta} \right) \right] \theta_{x4} + \left[ j_{11}^* \left( \frac{\partial N'_{12}}{\partial \xi} \right) + j_{12}^* \left( \frac{\partial N'_{12}}{\partial \eta} \right) \right] \theta_{y4} \end{aligned} \quad (๓.56)$$

$$\text{และ } \frac{\partial w}{\partial y} = \left[ j_{21}^* \left( \frac{\partial N'_1}{\partial \xi} \right) + j_{22}^* \left( \frac{\partial N'_1}{\partial \eta} \right) \right] w_1 + \left[ j_{21}^* \left( \frac{\partial N'_2}{\partial \xi} \right) + j_{22}^* \left( \frac{\partial N'_2}{\partial \eta} \right) \right] \theta_{x1}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ j_{21}^* \left( \frac{\partial N'_3}{\partial \xi} \right) + j_{22}^* \left( \frac{\partial N'_3}{\partial \eta} \right) \right] \theta_{y1} + \left[ j_{21}^* \left( \frac{\partial N'_4}{\partial \xi} \right) + j_{22}^* \left( \frac{\partial N'_4}{\partial \eta} \right) \right] w_2 \\
& + \left[ j_{21}^* \left( \frac{\partial N'_5}{\partial \xi} \right) + j_{22}^* \left( \frac{\partial N'_5}{\partial \eta} \right) \right] \theta_{x2} + \left[ j_{21}^* \left( \frac{\partial N'_6}{\partial \xi} \right) + j_{22}^* \left( \frac{\partial N'_6}{\partial \eta} \right) \right] \theta_{y2} \\
& + \left[ j_{21}^* \left( \frac{\partial N'_7}{\partial \xi} \right) + j_{22}^* \left( \frac{\partial N'_7}{\partial \eta} \right) \right] w_3 + \left[ j_{21}^* \left( \frac{\partial N'_8}{\partial \xi} \right) + j_{22}^* \left( \frac{\partial N'_8}{\partial \eta} \right) \right] \theta_{x3} \\
& + \left[ j_{21}^* \left( \frac{\partial N'_9}{\partial \xi} \right) + j_{22}^* \left( \frac{\partial N'_9}{\partial \eta} \right) \right] \theta_{y3} + \left[ j_{21}^* \left( \frac{\partial N'_{10}}{\partial \xi} \right) + j_{22}^* \left( \frac{\partial N'_{10}}{\partial \eta} \right) \right] w_4 \\
& + \left[ j_{21}^* \left( \frac{\partial N'_{11}}{\partial \xi} \right) + j_{22}^* \left( \frac{\partial N'_{11}}{\partial \eta} \right) \right] \theta_{x4} + \left[ j_{21}^* \left( \frac{\partial N'_{12}}{\partial \xi} \right) + j_{22}^* \left( \frac{\partial N'_{12}}{\partial \eta} \right) \right] \theta_{y4} \tag{ง.57}
\end{aligned}$$



รูปที่ ง.2 รูปเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม 9 จุดต่อที่อยู่ในรูปของพิกัดธรรมชาติ

ในการหาค่า  $\frac{\partial w}{\partial x}$  ที่จุดต่อ 9 เริ่มต้นจากสมการ (ง.56) ตั้งสมการ

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_9 & = \left[ (j_{11}^*)_9 \left( \frac{\partial N'_1}{\partial \xi} \right)_9 + (j_{12}^*)_9 \left( \frac{\partial N'_1}{\partial \eta} \right)_9 \right] w_1 + \left[ (j_{11}^*)_9 \left( \frac{\partial N'_2}{\partial \xi} \right)_9 + (j_{12}^*)_9 \left( \frac{\partial N'_2}{\partial \eta} \right)_9 \right] \theta_{x1} \\
& + \left[ (j_{11}^*)_9 \left( \frac{\partial N'_3}{\partial \xi} \right)_9 + (j_{12}^*)_9 \left( \frac{\partial N'_3}{\partial \eta} \right)_9 \right] \theta_{y1} + \left[ (j_{11}^*)_9 \left( \frac{\partial N'_4}{\partial \xi} \right)_9 + (j_{12}^*)_9 \left( \frac{\partial N'_4}{\partial \eta} \right)_9 \right] w_2 \\
& + \left[ (j_{11}^*)_9 \left( \frac{\partial N'_5}{\partial \xi} \right)_9 + (j_{12}^*)_9 \left( \frac{\partial N'_5}{\partial \eta} \right)_9 \right] \theta_{x2} + \left[ (j_{11}^*)_9 \left( \frac{\partial N'_6}{\partial \xi} \right)_9 + (j_{12}^*)_9 \left( \frac{\partial N'_6}{\partial \eta} \right)_9 \right] \theta_{y2} \\
& + \left[ (j_{11}^*)_9 \left( \frac{\partial N'_7}{\partial \xi} \right)_9 + (j_{12}^*)_9 \left( \frac{\partial N'_7}{\partial \eta} \right)_9 \right] w_3 + \left[ (j_{11}^*)_9 \left( \frac{\partial N'_8}{\partial \xi} \right)_9 + (j_{12}^*)_9 \left( \frac{\partial N'_8}{\partial \eta} \right)_9 \right] \theta_{x3} \\
& + \left[ (j_{11}^*)_9 \left( \frac{\partial N'_9}{\partial \xi} \right)_9 + (j_{12}^*)_9 \left( \frac{\partial N'_9}{\partial \eta} \right)_9 \right] \theta_{y3} + \left[ (j_{11}^*)_9 \left( \frac{\partial N'_{10}}{\partial \xi} \right)_9 + (j_{12}^*)_9 \left( \frac{\partial N'_{10}}{\partial \eta} \right)_9 \right] w_4
\end{aligned}$$

$$+ \left[ (J_{11}^*)_9 \left( \frac{\partial N'_{11}}{\partial \xi} \right)_9 + (J_{12}^*)_9 \left( \frac{\partial N'_{11}}{\partial \eta} \right)_9 \right] \theta_{x^4} + \left[ (J_{11}^*)_9 \left( \frac{\partial N'_{12}}{\partial \xi} \right)_9 + (J_{12}^*)_9 \left( \frac{\partial N'_{12}}{\partial \eta} \right)_9 \right] \theta_{y^4} \quad (จ.58)$$

ที่จุดต่อ 9 ค่า  $\xi = 0$  และ  $\eta = 0$  แทนค่าในสมการ (จ.58) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_9 &= \left[ \frac{2}{\Delta} (y_{32} + y_{41}) \left( -\frac{3}{8} \right) - \frac{2}{\Delta} (y_{21} + y_{34}) \left( -\frac{3}{8} \right) \right] w_1 \\ &+ \left[ \frac{2}{\Delta} (y_{32} + y_{41}) \left( \frac{1}{2} \right) \left( y_{21} \left( -\frac{1}{8} \right) + y_{41} \left( -\frac{1}{8} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\Delta} (y_{21} + y_{34}) \left( \frac{1}{2} \right) \left( y_{21} \left( -\frac{1}{8} \right) + y_{41} \left( -\frac{1}{8} \right) \right) \right] \theta_{x1} \\ &+ \left[ \frac{2}{\Delta} (y_{32} + y_{41}) \left( -\frac{1}{2} \right) \left( x_{21} \left( -\frac{1}{8} \right) + x_{41} \left( -\frac{1}{8} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\Delta} (y_{21} + y_{34}) \left( -\frac{1}{2} \right) \left( x_{21} \left( -\frac{1}{8} \right) + x_{41} \left( -\frac{1}{8} \right) \right) \right] \theta_{y1} \\ &+ \left[ \frac{2}{\Delta} (y_{32} + y_{41}) \left( \frac{3}{8} \right) - \frac{2}{\Delta} (y_{21} + y_{34}) \left( -\frac{3}{8} \right) \right] w_2 \\ &+ \left[ \frac{2}{\Delta} (y_{32} + y_{41}) \left( \frac{1}{2} \right) \left( y_{21} \left( -\frac{1}{8} \right) + y_{32} \left( \frac{1}{8} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\Delta} (y_{21} + y_{34}) \left( \frac{1}{2} \right) \left( y_{21} \left( \frac{1}{8} \right) + y_{32} \left( -\frac{1}{8} \right) \right) \right] \theta_{x2} \\ &+ \left[ \frac{2}{\Delta} (y_{32} + y_{41}) \left( -\frac{1}{2} \right) \left( x_{21} \left( -\frac{1}{8} \right) + x_{32} \left( \frac{1}{8} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\Delta} (y_{21} + y_{34}) \left( -\frac{1}{2} \right) \left( x_{21} \left( \frac{1}{8} \right) + x_{32} \left( -\frac{1}{8} \right) \right) \right] \theta_{y2} \\ &+ \left[ \frac{2}{\Delta} (y_{32} + y_{41}) \left( \frac{3}{8} \right) - \frac{2}{\Delta} (y_{21} + y_{34}) \left( \frac{3}{8} \right) \right] w_3 \\ &+ \left[ \frac{2}{\Delta} (y_{32} + y_{41}) \left( \frac{1}{2} \right) \left( y_{34} \left( -\frac{1}{8} \right) + y_{32} \left( -\frac{1}{8} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\Delta} (y_{21} + y_{34}) \left( \frac{1}{2} \right) \left( y_{34} \left( -\frac{1}{8} \right) + y_{32} \left( -\frac{1}{8} \right) \right) \right] \theta_{x3} \\ &+ \left[ \frac{2}{\Delta} (y_{32} + y_{41}) \left( -\frac{1}{2} \right) \left( x_{34} \left( -\frac{1}{8} \right) + x_{32} \left( -\frac{1}{8} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\Delta} (y_{21} + y_{34}) \left( -\frac{1}{2} \right) \left( x_{34} \left( -\frac{1}{8} \right) + x_{32} \left( -\frac{1}{8} \right) \right) \right] \theta_{y3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{2}{\Delta} (y_{32} + y_{41}) \left( -\frac{3}{8} \right) - \frac{2}{\Delta} (y_{21} + y_{34}) \left( \frac{3}{8} \right) \right] w_4 \\
& + \left[ \frac{2}{\Delta} (y_{32} + y_{41}) \left( \frac{1}{2} \right) \left( y_{34} \left( -\frac{1}{8} \right) + y_{41} \left( \frac{1}{8} \right) \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{2}{\Delta} (y_{21} + y_{34}) \left( \frac{1}{2} \right) \left( y_{34} \left( \frac{1}{8} \right) + y_{41} \left( -\frac{1}{8} \right) \right) \right] \theta_{x4} \\
& + \left[ \frac{2}{\Delta} (y_{32} + y_{41}) \left( -\frac{1}{2} \right) \left( x_{34} \left( -\frac{1}{8} \right) + x_{41} \left( \frac{1}{8} \right) \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{2}{\Delta} (y_{21} + y_{34}) \left( -\frac{1}{2} \right) \left( x_{34} \left( \frac{1}{8} \right) + x_{41} \left( -\frac{1}{8} \right) \right) \right] \theta_{y4}
\end{aligned} \tag{๓.59}$$

จัดรูปใหม่จะได้

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_9 &= \left( \frac{3}{2\Delta} y_{24} \right) w_1 + \left( \frac{1}{4\Delta} y_{24} (y_{21} + y_{41}) \right) \theta_{x1} + \left( \frac{1}{4\Delta} y_{42} (x_{21} + x_{41}) \right) \theta_{y1} \\
&+ \left( \frac{3}{2\Delta} y_{31} \right) w_2 + \left( \frac{1}{4\Delta} y_{31} (y_{12} + y_{32}) \right) \theta_{x2} + \left( \frac{1}{4\Delta} y_{13} (x_{12} + x_{32}) \right) \theta_{y2} \\
&+ \left( \frac{3}{2\Delta} y_{42} \right) w_3 + \left( \frac{1}{4\Delta} y_{42} (y_{23} + y_{43}) \right) \theta_{x3} + \left( \frac{1}{4\Delta} y_{24} (x_{23} + x_{43}) \right) \theta_{y3} \\
&+ \left( \frac{3}{2\Delta} y_{13} \right) w_4 + \left( \frac{1}{4\Delta} y_{13} (y_{14} + y_{34}) \right) \theta_{x4} + \left( \frac{1}{4\Delta} y_{31} (x_{14} + x_{34}) \right) \theta_{y4}
\end{aligned} \tag{๓.60}$$

$$\text{โดยที่ } \Delta = x_1 y_{24} + x_2 y_{31} + x_3 y_{42} + x_4 y_{13} \tag{๓.61}$$

ในการทำงานเดียวกัน จะสามารถหาค่า  $\frac{\partial w}{\partial y}$  ที่จุดต่อ 9 ออกมาได้ดังสมการ

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_9 &= \left( \frac{3}{2\Delta} x_{42} \right) w_1 + \left( \frac{1}{4\Delta} x_{42} (y_{21} + y_{41}) \right) \theta_{x1} + \left( \frac{1}{4\Delta} x_{24} (x_{21} + x_{41}) \right) \theta_{y1} \\
&+ \left( \frac{3}{2\Delta} x_{13} \right) w_2 + \left( \frac{1}{4\Delta} x_{13} (y_{12} + y_{32}) \right) \theta_{x2} + \left( \frac{1}{4\Delta} x_{31} (x_{12} + x_{32}) \right) \theta_{y2} \\
&+ \left( \frac{3}{2\Delta} x_{24} \right) w_3 + \left( \frac{1}{4\Delta} x_{24} (y_{23} + y_{43}) \right) \theta_{x3} + \left( \frac{1}{4\Delta} x_{42} (x_{23} + x_{43}) \right) \theta_{y3} \\
&+ \left( \frac{3}{2\Delta} x_{31} \right) w_4 + \left( \frac{1}{4\Delta} x_{31} (y_{14} + y_{34}) \right) \theta_{x4} + \left( \frac{1}{4\Delta} x_{13} (x_{14} + x_{34}) \right) \theta_{y4}
\end{aligned} \tag{๓.62}$$

**ภาคผนวก จ**  
**รายละเอียดโปรแกรม PLATEIDKQ**

```

!   Program plateIDKQ
!   For solving plate bending problem by IDKQ element
!   Department of Mechanical Engineering
!   Chulalongkorn University
!
!           Pichayen Bhothikhun
!
PROGRAM plateIDKQ
use IDKQ
implicit none
call Main()
END PROGRAM plateIDKQ
!

Module IDKQ
implicit none

!   Declare constants
integer, parameter :: SPR = selected_real_kind(p=6,r=37)
integer, parameter :: DPR = selected_real_kind(p=13)
integer, parameter :: DPI = selected_int_kind(9)

!   Declare variables
character(len=20)  :: name1
character(len=80)  :: err_msg
integer(kind=DPI), allocatable, dimension(:, :) :: intmat
integer(kind=DPI), allocatable, dimension(:, :) :: ibc
integer(kind=DPI), allocatable, dimension(:)  :: icheck
integer(kind=DPI), allocatable, dimension(:)  :: ccount
integer(kind=DPI), dimension(20)             :: text
real(kind=DPR), allocatable, dimension(:, :)  :: coord
real(kind=DPR), allocatable, dimension(:)     :: sysf, conload, disload
real(kind=DPR), allocatable, dimension(:)     :: xx, xy
integer(kind=DPI) :: nnode, ndf, ndfele
integer(kind=DPI) :: neqn, npoi, nele
integer(kind=DPI) :: i, j, k, n, ie, ip, inf, isf, ieq, id, in, im, is, ib, ij, ic,
ih, ihh, ijk, jk, ik, ia, na, nna, ikk, iik, iia, ina, nb, nnb, jp, IRW, IRY
integer(kind=DPI) :: nm, m
integer(kind=DPI) :: nn, nr, ns, iq, ir, rx, ry
integer(kind=DPI), dimension(12) :: rk, ck
integer(kind=DPI) :: ii, jj, kk, ll
integer(kind=DPI) :: ierror, istat
real(kind=DPR) :: E, pr, th, alpha, TT1, TT2, TREF
real(kind=DPR) :: TAVG
real(kind=DPR) :: RATIO, SUM, SYSKMAX, BIG, DUMYK, DUMYF
real(kind=DPR) :: area, pload
real(kind=DPR), allocatable, dimension(:, :) :: sysk
real(kind=DPR), allocatable, dimension(:)  :: stxx, styy, stxy, vmstress
real(kind=DPR), dimension(3,3) :: D, CM
real(kind=DPR) :: cons1
real(kind=DPR), dimension(12,12) :: kele, kele1
real(kind=DPR), dimension(12,3)  :: BTD
real(kind=DPR), dimension(3,12)  :: B

```



```

real(kind=DPR), dimension(12,3)  :: BT
real(kind=DPR), dimension(12)    :: fT, fT1, ff, NL
real(kind=DPR), dimension(9,9)   :: AIN
real(kind=DPR), dimension(3,9)   :: H, EM
real(kind=DPR), dimension(9)     :: S
real(kind=DPR), dimension(3)     :: AL
real(kind=DPR) :: concm, conf
real(kind=DPR) :: XG1, XG2, XG3, YG1, YG2, YG3, X, Y, GL1, GL2, GL3
real(kind=DPR) :: DD1, DD2, DD3, BB1, BB2, BB3, AA1, AA2, AA3
real(kind=DPR) :: ZSTXXE, ZSTYYE, ZSTXYE, XST, YST, XYS, DDS
real(kind=DPR) :: SRXXE, SRYYE, SRXYE
real(kind=DPR) :: p1, p2, p3, p4
real(kind=DPR) :: q1, q2, q3, q4
real(kind=DPR) :: r1, r2, r3, r4
real(kind=DPR) :: s1, s2, s3, s4
real(kind=DPR) :: t1, t2, t3, t4
real(kind=DPR) :: x1, x2, x3, x4
real(kind=DPR) :: y1, y2, y3, y4
real(kind=DPR) :: x12, x23, x34, x41, x21, x32, x31, x42, x43, x14, x24, x13
real(kind=DPR) :: y12, y23, y34, y41, y21, y32, y31, y42, y43, y14, y24, y13
real(kind=DPR) :: J11, J12, J21, J22, detJ
real(kind=DPR) :: j11s, j12s, j21s, j22s
real(kind=DPR), dimension(9)    :: dNxn, dNyn
real(kind=DPR), dimension(12)  :: dHxx, dHxy, dHyx, dHyy
real(kind=DPR), dimension(2)   :: xn, yn, w

```

Contains

!=====

```

Subroutine Main()
implicit none

call Read_input()
call IDKQ1
call Write_output()
read*
End Subroutine Main

```

!=====

```

Subroutine Read_input()
implicit none
integer(kind=DPI)      :: iline, nlines      ! looping integer for text

write(6,10)
10 format(/, ' PLEASE ENTER INPUT FILE NAME:',/)
read(5, '(A)') name1
open(unit=7, file=name1, status='old', action='read', iostat=ierror)
read(7,*) nlines      ! read problem title
do iline = 1,nlines
  read(7,1) text
  1 format(20A4)
enddo

read(7,1) text
read(7,*) npoi, nele      ! read the number of nodes, elements
read(7,1) text

```

```

read(7,*) E, pr, th, alpha, TT2, TT1, TREF ! read material properties
ndf = 3
nnode = 4
neqn = npoi*ndf ! the number of equations for solving
ndfele = nnode*ndf ! the number of equations in each element

allocate( intmat(nele,nnode), STAT=istat, ERRMSG=err_msg)
allocate( coord(npoi,2), STAT=istat, ERRMSG=err_msg)
allocate( conload(npoi), STAT=istat, ERRMSG=err_msg)
allocate( disload(nele), STAT=istat, ERRMSG=err_msg)
allocate( sysf(neqn), STAT=istat, ERRMSG=err_msg)
allocate( ibc(npoi,3), STAT=istat, ERRMSG=err_msg)
allocate( ccount(npoi), STAT=istat, ERRMSG=err_msg)
allocate( icheck(neqn), STAT=istat, ERRMSG=err_msg)
allocate( xx(neqn), STAT=istat, ERRMSG=err_msg)
allocate( XY(neqn), STAT=istat, ERRMSG=err_msg)
allocate( sysk(neqn,neqn), STAT=istat, ERRMSG=err_msg)
allocate( stxx(npoi), STAT=istat, ERRMSG=err_msg)
allocate( styy(npoi), STAT=istat, ERRMSG=err_msg)
allocate( stxy(npoi), STAT=istat, ERRMSG=err_msg)
allocate( vmstress(npoi), STAT=istat, ERRMSG=err_msg)

read(7,1) text ! read data in each node
do ip = 1, npoi
  read(7,*) i, (ibc(i,k), k=1,3), (coord(i,k), k=1,2), conload(i)
  if(i /= ip) write(6,40) ip
  40 format(/, ' NODE NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
  if(i /= ip) stop
enddo
!      ibc = 0 --> FREE
!      ibc = 1 --> FIXED
read(7,1) text ! read data in each element
do ie = 1, nele
  read(7,*) i, (intmat(i,j), j=1,4), disload(i)
  if(i /= ie) write(6,50) ie
  50 format(/, ' ELEMENT NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
  if(i /= ie) stop
enddo

close(unit=7, status='keep')

write(6,90) npoi, nele
90 format(/, ' THE FINITE ELEMENT MODEL CONSISTS OF :', /, &
'      NUMBER OF NODES          =', I6, /, &
'      NUMBER OF ELEMENTS       =', I6, /)
End Subroutine Read_input

!=====

Subroutine IDKQ1()
implicit none

write(6,100)
100 format(/, ' start computing', /)

sysk = 0.
sysf = 0.
xx = 0.
XY = 0.

```

```

! compute matrix [D]
D = 0.
cons1 = E*th*th*th/(12.*(1.-pr*pr))
D(1,1) = 1.
D(1,2) = pr
D(2,1) = D(1,2)
D(2,2) = D(1,1)
D(3,3) = (1.-pr)/2.
D = cons1*D

! for 2 Gauss point
xn(1) = -1./sqrt(3.)
xn(2) = 1./sqrt(3.)
yn(1) = -1./sqrt(3.)
yn(2) = 1./sqrt(3.)
w(1) = 1.
w(2) = 1.

! loop over element
do 1000 ie=1,nele
  ii = intmat(ie,1)
  jj = intmat(ie,2)
  kk = intmat(ie,3)
  ll = intmat(ie,4)

! Get coordinate
  x1 = coord(ii,1)
  x2 = coord(jj,1)
  x3 = coord(kk,1)
  x4 = coord(ll,1)
  y1 = coord(ii,2)
  y2 = coord(jj,2)
  y3 = coord(kk,2)
  y4 = coord(ll,2)

! constant
  x12 = x1 - x2
  x23 = x2 - x3
  x34 = x3 - x4
  x41 = x4 - x1
  x21 = -x12
  x32 = -x23
  x31 = x3 - x1
  x42 = x4 - x2
  x43 = -x34
  x14 = -x41
  x24 = -x42
  x13 = -x31

  y12 = y1 - y2
  y23 = y2 - y3
  y34 = y3 - y4
  y41 = y4 - y1
  y21 = -y12
  y32 = -y23
  y31 = y3 - y1
  y42 = y4 - y2
  y13 = -y31

```



จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
CHULALONGKORN UNIVERSITY

```

y24 = -y42
y43 = -y34
y14 = -y41

p1 = 6.*x21/(y12*y12+x21*x21)
p2 = 6.*x32/(y23*y23+x32*x32)
p3 = 6.*x43/(y34*y34+x43*x43)
p4 = 6.*x14/(y41*y41+x14*x14)

q1 = 3.*x21*y12/(y12*y12+x21*x21)
q2 = 3.*x32*y23/(y23*y23+x32*x32)
q3 = 3.*x43*y34/(y34*y34+x43*x43)
q4 = 3.*x14*y41/(y41*y41+x14*x14)

r1 = 3.*y12*y12/(y12*y12+x21*x21)
r2 = 3.*y23*y23/(y23*y23+x32*x32)
r3 = 3.*y34*y34/(y34*y34+x43*x43)
r4 = 3.*y41*y41/(y41*y41+x14*x14)

s1 = 3.*x21*x21/(y12*y12+x21*x21)
s2 = 3.*x32*x32/(y23*y23+x32*x32)
s3 = 3.*x43*x43/(y34*y34+x43*x43)
s4 = 3.*x14*x14/(y41*y41+x14*x14)

t1 = 6.*y12/(y12*y12+x21*x21)
t2 = 6.*y23/(y23*y23+x32*x32)
t3 = 6.*y34/(y34*y34+x43*x43)
t4 = 6.*y41/(y41*y41+x14*x14)

! apply distributed load

area = 0.5*(x1*y2-x2*y1+x2*y3-x3*y2+x3*y4-x4*y3+x4*y1-x1*y4)

kele = 0.
fT = 0.

do 1100 i=1,2
do 1100 j=1,2

dNxn = 0.
dNyn = 0.
dHxx = 0.
dHxy = 0.
dHyx = 0.
dHyy = 0.
kele1 = 0.
ff = 0.
fT1 = 0.
B = 0.
BT = 0.
BTD = 0.
J11 = 0.25*(x21+x34+yn(j))*(x12+x34)
J12 = 0.25*(y21+y34+yn(j))*(y12+y34)
J21 = 0.25*(x32+x41+xn(i))*(x12+x34)
J22 = 0.25*(y32+y41+xn(i))*(y12+y34)

detJ = 0.125*((x31*y42-x42*y31)+xn(i)*(x21*y34-x34*y21)+yn(j)*(x32*y41-x41*y32))

```

```

j11s = J22/detJ
j12s = -J12/detJ
j21s = -J21/detJ
j22s = J11/detJ

```

! dN/dxn dN/dyn

```

dNxn(1) = 1./6.*xn(i)+0.25*yn(j)-0.5*xn(i)*yn(j)-0.25*yn(j)*yn(j)
dNxn(2) = 1./6.*xn(i)-0.25*yn(j)-0.5*xn(i)*yn(j)+0.25*yn(j)*yn(j)
dNxn(3) = 1./6.*xn(i)+0.25*yn(j)+0.5*xn(i)*yn(j)+0.25*yn(j)*yn(j)
dNxn(4) = 1./6.*xn(i)-0.25*yn(j)+0.5*xn(i)*yn(j)-0.25*yn(j)*yn(j)
dNxn(5) = -1./3.*xn(i)+xn(i)*yn(j)
dNxn(6) = 0.5+2./3.*xn(i)-0.5*yn(j)*yn(j)
dNxn(7) = -1./3.*xn(i)-xn(i)*yn(j)
dNxn(8) = -0.5+2./3.*xn(i)+0.5*yn(j)*yn(j)
dNxn(9) = -4./3.*xn(i)

```

```

dNyn(1) = 0.25*xn(i)+1./6.*yn(j)-0.25*xn(i)*xn(i)-0.5*xn(i)*yn(j)
dNyn(2) = -0.25*xn(i)+1./6.*yn(j)-0.25*xn(i)*xn(i)+0.5*xn(i)*yn(j)
dNyn(3) = 0.25*xn(i)+1./6.*yn(j)+0.25*xn(i)*xn(i)+0.5*xn(i)*yn(j)
dNyn(4) = -0.25*xn(i)+1./6.*yn(j)+0.25*xn(i)*xn(i)-0.5*xn(i)*yn(j)
dNyn(5) = -0.5+2./3.*yn(j)+0.5*xn(i)*xn(i)
dNyn(6) = -1./3.*yn(j)-xn(i)*yn(j)
dNyn(7) = 0.5+2./3.*yn(j)-0.5*xn(i)*xn(i)
dNyn(8) = -1./3.*yn(j)+xn(i)*yn(j)
dNyn(9) = -4./3.*yn(j)

```

```

dHxx(1) = p1/4.*dNxn(5)-p4/4.*dNxn(8)+3./(4.*area)*y42*dNxn(9)
dHxx(2) = -q1/4.*dNxn(5)-q4/4.*dNxn(8)+y42/(8.*area)*(y21+y41)*dNxn(9)
dHxx(3) = -1.*(-dNxn(1)+(s1-2.)/4.*dNxn(5)+(s4-
2.)/4.*dNxn(8)+y42/(8.*area)*(x21+x41)*dNxn(9))
dHxx(4) = -p1/4.*dNxn(5)+p2/4.*dNxn(6)+3./(4.*area)*y13*dNxn(9)
dHxx(5) = -q1/4.*dNxn(5)-q2/4.*dNxn(6)+y13/(8.*area)*(y12+y32)*dNxn(9)
dHxx(6) = -1.*(-dNxn(2)+(s1-2.)/4.*dNxn(5)+(s2-
2.)/4.*dNxn(6)+y13/(8.*area)*(x12+x32)*dNxn(9))
dHxx(7) = -p2/4.*dNxn(6)+p3/4.*dNxn(7)+3./(4.*area)*y24*dNxn(9)
dHxx(8) = -q2/4.*dNxn(6)-q3/4.*dNxn(7)+y24/(8.*area)*(y23+y43)*dNxn(9)
dHxx(9) = -1.*(-dNxn(3)+(s2-2.)/4.*dNxn(6)+(s3-
2.)/4.*dNxn(7)+y24/(8.*area)*(x23+x43)*dNxn(9))
dHxx(10) = -p3/4.*dNxn(7)+p4/4.*dNxn(8)+3./(4.*area)*y31*dNxn(9)
dHxx(11) = -q3/4.*dNxn(7)-q4/4.*dNxn(8)+y31/(8.*area)*(y14+y34)*dNxn(9)
dHxx(12) = -1.*(-dNxn(4)+(s3-2.)/4.*dNxn(7)+(s4-
2.)/4.*dNxn(8)+y31/(8.*area)*(x14+x34)*dNxn(9))

```

```

dHxy(1) = p1/4.*dNyn(5)-p4/4.*dNyn(8)+3./(4.*area)*y42*dNyn(9)
dHxy(2) = -q1/4.*dNyn(5)-q4/4.*dNyn(8)+y42/(8.*area)*(y21+y41)*dNyn(9)
dHxy(3) = -1.*(-dNyn(1)+(s1-2.)/4.*dNyn(5)+(s4-
2.)/4.*dNyn(8)+y42/(8.*area)*(x21+x41)*dNyn(9))
dHxy(4) = -p1/4.*dNyn(5)+p2/4.*dNyn(6)+3./(4.*area)*y13*dNyn(9)
dHxy(5) = -q1/4.*dNyn(5)-q2/4.*dNyn(6)+y13/(8.*area)*(y12+y32)*dNyn(9)
dHxy(6) = -1.*(-dNyn(2)+(s1-2.)/4.*dNyn(5)+(s2-
2.)/4.*dNyn(6)+y13/(8.*area)*(x12+x32)*dNyn(9))
dHxy(7) = -p2/4.*dNyn(6)+p3/4.*dNyn(7)+3./(4.*area)*y24*dNyn(9)
dHxy(8) = -q2/4.*dNyn(6)-q3/4.*dNyn(7)+y24/(8.*area)*(y23+y43)*dNyn(9)
dHxy(9) = -1.*(-dNyn(3)+(s2-2.)/4.*dNyn(6)+(s3-
2.)/4.*dNyn(7)+y24/(8.*area)*(x23+x43)*dNyn(9))
dHxy(10) = -p3/4.*dNyn(7)+p4/4.*dNyn(8)+3./(4.*area)*y31*dNyn(9)
dHxy(11) = -q3/4.*dNyn(7)-q4/4.*dNyn(8)+y31/(8.*area)*(y14+y34)*dNyn(9)
dHxy(12) = -1.*(-dNyn(4)+(s3-2.)/4.*dNyn(7)+(s4-
2.)/4.*dNyn(8)+y31/(8.*area)*(x14+x34)*dNyn(9))

```

```

dHyx(1) = -t1/4.*dNxn(5)+t4/4.*dNxn(8)+3./(4.*area)*x24*dNxn(9)
dHyx(2) = -dNxn(1)+(r1-2.)/4.*dNxn(5)+(r4-
2.)/4.*dNxn(8)+x24/(8.*area)*(y21+y41)*dNxn(9)
dHyx(3) = -1.*(-q1/4.*dNxn(5)-q4/4.*dNxn(8)+x24/(8.*area)*(x21+x41)*dNxn(9))
dHyx(4) = t1/4.*dNxn(5)-t2/4.*dNxn(6)+3./(4.*area)*x31*dNxn(9)
dHyx(5) = -dNxn(2)+(r1-2.)/4.*dNxn(5)+(r2-
2.)/4.*dNxn(6)+x31/(8.*area)*(y12+y32)*dNxn(9)
dHyx(6) = -1.*(-q1/4.*dNxn(5)-q2/4.*dNxn(6)+x31/(8.*area)*(x12+x32)*dNxn(9))
dHyx(7) = t2/4.*dNxn(6)-t3/4.*dNxn(7)+3./(4.*area)*x42*dNxn(9)
dHyx(8) = -dNxn(3)+(r2-2.)/4.*dNxn(6)+(r3-
2.)/4.*dNxn(7)+x42/(8.*area)*(y23+y43)*dNxn(9)
dHyx(9) = -1.*(-q2/4.*dNxn(6)-q3/4.*dNxn(7)+x42/(8.*area)*(x23+x43)*dNxn(9))
dHyx(10) = t3/4.*dNxn(7)-t4/4.*dNxn(8)+3./(4.*area)*x13*dNxn(9)
dHyx(11) = -dNxn(4)+(r3-2.)/4.*dNxn(7)+(r4-
2.)/4.*dNxn(8)+x13/(8.*area)*(y14+y34)*dNxn(9)
dHyx(12) = -1.*(-q3/4.*dNxn(7)-q4/4.*dNxn(8)+x13/(8.*area)*(x14+x34)*dNxn(9))

dHyy(1) = -t1/4.*dNyn(5)+t4/4.*dNyn(8)+3./(4.*area)*x24*dNyn(9)
dHyy(2) = -dNyn(1)+(r1-2.)/4.*dNyn(5)+(r4-
2.)/4.*dNyn(8)+x24/(8.*area)*(y21+y41)*dNyn(9)
dHyy(3) = -1.*(-q1/4.*dNyn(5)-q4/4.*dNyn(8)+x24/(8.*area)*(x21+x41)*dNyn(9))
dHyy(4) = t1/4.*dNyn(5)-t2/4.*dNyn(6)+3./(4.*area)*x31*dNyn(9)
dHyy(5) = -dNyn(2)+(r1-2.)/4.*dNyn(5)+(r2-
2.)/4.*dNyn(6)+x31/(8.*area)*(y12+y32)*dNyn(9)
dHyy(6) = -1.*(-q1/4.*dNyn(5)-q2/4.*dNyn(6)+x31/(8.*area)*(x12+x32)*dNyn(9))
dHyy(7) = t2/4.*dNyn(6)-t3/4.*dNyn(7)+3./(4.*area)*x42*dNyn(9)
dHyy(8) = -dNyn(3)+(r2-2.)/4.*dNyn(6)+(r3-
2.)/4.*dNyn(7)+x42/(8.*area)*(y23+y43)*dNyn(9)
dHyy(9) = -1.*(-q2/4.*dNyn(6)-q3/4.*dNyn(7)+x42/(8.*area)*(x23+x43)*dNyn(9))
dHyy(10) = t3/4.*dNyn(7)-t4/4.*dNyn(8)+3./(4.*area)*x13*dNyn(9)
dHyy(11) = -dNyn(4)+(r3-2.)/4.*dNyn(7)+(r4-
2.)/4.*dNyn(8)+x13/(8.*area)*(y14+y34)*dNyn(9)
dHyy(12) = -1.*(-q3/4.*dNyn(7)-q4/4.*dNyn(8)+x13/(8.*area)*(x14+x34)*dNyn(9))

! create matrix [B]
do 1200 im=1,12
  B(1,im) = j11s*dHxx(im)+j12s*dHxy(im)
  B(2,im) = j21s*dHyx(im)+j22s*dHyy(im)
  B(3,im) = j21s*dHxx(im)+j22s*dHxy(im)+j11s*dHyx(im)+j12s*dHyy(im)
1200 continue

BT = transpose(B)
BTD = matmul(BT,D)
kele1 = matmul(BTD,B)*detJ*w(i)*w(j)
kele = kele1+kele

1100 continue

! exact thermal load

conf = E*th*th*alpha*(TT2-TT1)/(72.*(1.-pr))
fT1(1) = t1*x21 + t4*x41 + p1*y21 + p4*y41
fT1(2) = 3.*x24 + r1*x12 + r4*x41 + q1*y12 + q4*y41
fT1(3) = 3.*y24 + q1*x12 + q4*x41 + s1*y12 + s4*y41
fT1(4) = t2*x32 + t1*x12 + p2*y32 + p1*y12
fT1(5) = 3.*x31 + r2*x23 + r1*x12 + q2*y23 + q1*y12
fT1(6) = 3.*y31 + q2*x23 + q1*x12 + s2*y23 + s1*y12
fT1(7) = t3*x43 + t2*x23 + p3*y43 + p2*y23

```

```

fT1(8) = 3.*x42 + r3*x34 + r2*x23 + q3*y34 + q2*y23
fT1(9) = 3.*y42 + q3*x34 + q2*x23 + s3*y34 + s2*y23
fT1(10) = t4*x14 + t3*x34 + p4*y14 + p3*y34
fT1(11) = 3.*x13 + r4*x41 + r3*x34 + q4*y41 + q3*y34
fT1(12) = 3.*y13 + q4*x41 + q3*x34 + s4*y41 + s3*y34
fT1 = conf*fT1

! exact mechanical load

ff(1) = 36.*(x34*y21-x21*y34)+36.*(x41*y32-x32*y41)+90.*(x31*y42-x42*y31)
ff(2) = (x41*y32-x32*y41)*(5.*y21+3.*y41)+(x34*y21-
x21*y34)*(3.*y21+5.*y41)+15.*(x31*y42-x42*y31)*(y21+y41)
ff(3) = (x32*y41-x41*y32)*(5.*x21+3.*x41)+(x21*y34-
x34*y21)*(3.*x21+5.*x41)+15.*(x42*y31-x31*y42)*(x21+x41)
ff(4) = 36.*(x41*y32-x32*y41)+36.*(x21*y34-x34*y21)+90.*(x31*y42-x42*y31)
ff(5) = (x32*y41-x41*y32)*(5.*y21-3.*y32)+(x34*y21-x21*y34)*(3.*y21-
5.*y32)+15.*(x42*y31-x31*y42)*(y21-y32)
ff(6) = (x41*y32-x32*y41)*(5.*x21-3.*x32)+(x21*y34-x34*y21)*(3.*x21-
5.*x32)+15.*(x31*y42-x42*y31)*(x21-x32)
ff(7) = 36.*(x21*y34-x34*y21)+36.*(x32*y41-x41*y32)+90.*(x31*y42-x42*y31)
ff(8) = (x34*y21-x21*y34)*(5.*y32+3.*y34)+(x41*y32-
x32*y41)*(3.*y32+5.*y34)+15.*(x42*y31-x31*y42)*(y32+y34)
ff(9) = (x21*y34-x34*y21)*(5.*x32+3.*x34)+(x32*y41-
x41*y32)*(3.*x32+5.*x34)+15.*(x31*y42-x42*y31)*(x32+x34)
ff(10) = 36.*(x32*y41-x41*y32)+36.*(x34*y21-x21*y34)+90.*(x31*y42-x42*y31)
ff(11) = (x32*y41-x41*y32)*(5.*y34-3.*y41)+(x34*y21-x21*y34)*(3.*y34-
5.*y41)+15.*(x31*y42-x42*y31)*(y34-y41)
ff(12) = (x41*y32-x32*y41)*(5.*x34-3.*x41)+(x21*y34-x34*y21)*(3.*x34-
5.*x41)+15.*(x42*y31-x31*y42)*(x34-x41)
ff = disload(ie)/720.*ff
fT = fT1 + ff

! assemble
call assemble

1000 continue

!apply concentrated load
do ip=1,npoi
    ieq = (ip-1)*ndf+1
    sysf(ieq) = sysf(ieq) + conload(ip)
enddo

!apply boundary condition
call applybc

!solve systematic equations
call gauss

!calculate stress
call calstress

write(6,105)
105 format(/, ' finish computing',/)

End Subroutine IDKQ1

!=====

Subroutine assemble()

```

```

implicit none

do ip=1,nnode
  nn = intmat(ie,ip)
  nr = (nn-1)*ndf+1
  ns = (ip-1)*ndf+1
  rk(ns) = nr
  rk(ns+1) = nr+1
  rk(ns+2) = nr+2
enddo

ck = rk

do 85 iq=1,ndfele
do 85 ir=1,ndfele
  rx = rk(iq)
  ry = ck(ir)
  sysk(rx,ry) = sysk(rx,ry) + kele(iq,ir)

85 continue

do 90 ir=1,ndfele
  rx = rk(ir)
  sysf(rx) = sysf(rx) + fT(ir)
90 continue

End Subroutine assemble

!=====

Subroutine applybc()

implicit none

      DO 152 i=1,npoi
        ir = (i*ndf) - 2
        DO 102 j=1,ndf
          ij = j - 1
          ii = ir+ij
          icheck(ii) = ibc(i,j)
102          CONTINUE
152        CONTINUE

      DO 402 ieq=1,neqn
        IF (icheck(ieq).NE.1) GOTO 402
        DO 202 ir=1,neqn
          IF (ir.EQ.ieq) GOTO 202
          sysk(ir,ieq) = 0.
202        CONTINUE
        DO 302 ic=1,neqn
          IF (ic.EQ.ieq) GOTO 302
          sysk(ieq,ic) = 0.
302        CONTINUE
          sysk(ieq,ieq) = 1.
          sysf(ieq) = 0.
402        CONTINUE

End Subroutine applybc
!=====

```



```

Subroutine gauss()
implicit none

!.....DO SCALING

      CALL scalee

!.....FORWARD ELIMINATION

      DO 4000 ip=1,neqn-1

!.....DO PARTIAL PIVOTING

      CALL pivot

      DO 3500 ie=ip+1,neqn
        RATIO = SYSK(ie,ip)/SYSK(ip,ip)
        DO 3200 ic=ip+1,neqn
          SYSK(ie,ic) = SYSK(ie,ic) - RATIO*SYSK(ip,ic)
3200      CONTINUE
        SYSF(ie) = SYSF(ie) - RATIO*SYSF(ip)
3500      CONTINUE

!.....LET COEFF. ON LOWER LEFT PORTION TO ZERO

      DO 3600 ie=ip+1,neqn
        SYSK(ie,ip) = 0.
3600      CONTINUE
4000      CONTINUE

!.....BACK SUBSTITUTION , GET XY

      XY(neqn) = SYSF(neqn)/SYSK(neqn,neqn)

!.....COMPUTE FROM EQUATION NEQ-1 TO 1

      DO 6000 ie=neqn-1,1,-1
        SUM=0.
        DO 5000 ic=ie+1,neqn
          SUM = SUM + SYSK(ie,ic)*XY(ic)
5000      CONTINUE
        XY(ie) = (SYSF(ie)-SUM)/SYSK(ie,ie)
6000      CONTINUE

End Subroutine gauss

!=====

Subroutine scalee()

implicit none

!.....PERFORM SCALING:

      DO 550 IR=1,neqn
        BIG = ABS(SYSK(IR,1))
        DO 520 IC=2,neqn
          SYSKMAX = ABS(SYSK(IR,IC))
          IF(SYSKMAX.GT.BIG) BIG = SYSKMAX

```

```

520         CONTINUE
           DO 530 IC=1,neqn
               SYSK(IR,IC) = SYSK(IR,IC)/BIG
530         CONTINUE
           SYSF(IR) = SYSF(IR)/BIG
550     CONTINUE

End Subroutine scalee

!=====

Subroutine pivot()

implicit none

!.....PERFORM PARTIAL PIVOTING

        JP = IP
        BIG = ABS(SYSK(IP,IP))
        DO 610 I=IP+1,neqn
            SYSKMAX = ABS(SYSK(I,IP))
            IF (SYSKMAX.GT.BIG) THEN
                BIG = SYSKMAX
                JP = I
            ENDIF
610     CONTINUE
        IF (JP.NE.IP) THEN
            DO 620 J=IP,neqn
                DUMYK = SYSK(JP,J)
                SYSK(JP,J) = SYSK(IP,J)
                SYSK(IP,J) = DUMYK
620     CONTINUE
            DUMYF = SYSF(JP)
            SYSF(JP) = SYSF(IP)
            SYSF(IP) = DUMYF
        ENDIF

End Subroutine pivot

!=====

Subroutine Write_output()

implicit none

integer(kind=DPI)          :: leng

leng = len_trim(name1) - 4

open(unit=8,file=name1(1:leng)//'.out',status='unknown',iostat=ierror)
write(8,7500)
7500 format(1x,' Node          W          thetaX          thetaY' &
           '          StXX          StYY          StXY' &
           '          V-M stress')
do i = 1,npoi
    IRW = (i*3) - 2
    IRY = i*3
    write(8,7600) i, (XY(k),k=IRW,IRY), stxx(i), styy(i), stxy(i), vmstress(i)
7600 format(1x,i6,7es16.6)

```

```

        enddo
    close(unit=8, status='keep')

    open(unit=9,file=name1(1:leng)//'.plt',status='unknown',iostat=ierror)
    write(9,7700) npoi, nele
    7700 format(1x,'Variables = "X-coor","Y-coor",' &
        ' "w","thetaX","thetaY","StXX","StYY","StXY","V-M stress" ', &
        /,'ZONE N=',I6,',E=',I6,',F=FEPOINT,ET=QUADRILATERAL')
    do ip = 1, npoi
        IRW = (ip*3) - 2
        IRY = ip*3
        write(9,7800) (coord(ip,k),k=1,2), (XY(k),k=IRW,IRY), stxx(ip), styy(ip) &
            ,stxy(ip), vmstress(ip)
        7800 format(1x,2f12.6,7es16.6)
    enddo
    do ie = 1, nele
        write(9,7900) (intmat(ie,j),j=1,4)
        7900 format(1x,4i6)
    enddo
    close(unit=9, status='keep')

End Subroutine Write_output

!=====
SUBROUTINE calstress

implicit none

stxx = 0.
styy = 0.
stxy = 0.
vmstress = 0.
ccount = 0.

!      COMPUTE ELASTICITY MATRIX [CM]
CONCM = E/(1. - pr*pr)
CM(1,1) = 1.
CM(1,2) = pr
CM(1,3) = 0.
CM(2,1) = pr
CM(2,2) = 1.
CM(2,3) = 0.
CM(3,1) = 0.
CM(3,2) = 0.
CM(3,3) = (1. - pr)/2.

CM = CONCM*CM

DO 2000 IE=1,NELE

!          FOR AREA COORDINATES
!          GET DD,BB,AA,AREA,L1,L1,L3 FOR EACH ELEMENT

DO 1999 n=1,2
    if (n == 1) then
        II = INTMAT(IE,1)
        IJ = INTMAT(IE,2)

```

```

IK = INTMAT(IE,3)
endif
if (n == 2) then
II = INTMAT(IE,1)
IJ = INTMAT(IE,3)
IK = INTMAT(IE,4)
endif

XG1 = COORD(II,1)
XG2 = COORD(IJ,1)
XG3 = COORD(IK,1)
YG1 = COORD(II,2)
YG2 = COORD(IJ,2)
YG3 = COORD(IK,2)
AREA = 0.5*(XG2*(YG3-YG1)+XG1*(YG2-YG3)+XG3*(YG1-YG2))
DD1 = XG2*YG3 - XG3*YG2
DD2 = XG3*YG1 - XG1*YG3
DD3 = XG1*YG2 - XG2*YG1
BB1 = YG2 - YG3
BB2 = YG3 - YG1
BB3 = YG1 - YG2
AA1 = XG3 - XG2
AA2 = XG1 - XG3
AA3 = XG2 - XG1

!      (X,Y) IS AT CENTROID OF TRIANGULAR ELEMENT

X = (XG1+XG2+XG3)/3.
Y = (YG1+YG2+YG3)/3.

GL1 = (DD1+BB1*X+AA1*Y)/(2.*AREA)
GL2 = (DD2+BB2*X+AA2*Y)/(2.*AREA)
GL3 = (DD3+BB3*X+AA3*Y)/(2.*AREA)

!      COMPUTE [AIN]

AIN(1,1) = 1.
AIN(1,2) = 0.
AIN(1,3) = 0.
AIN(1,4) = 0.
AIN(1,5) = 0.
AIN(1,6) = 0.
AIN(1,7) = 0.
AIN(1,8) = 0.
AIN(1,9) = 0.
AIN(2,1) = 0.
AIN(2,2) = 0.
AIN(2,3) = 0.
AIN(2,4) = 1.
AIN(2,5) = 0.
AIN(2,6) = 0.
AIN(2,7) = 0.
AIN(2,8) = 0.
AIN(2,9) = 0.
AIN(3,1) = 0.
AIN(3,2) = 0.
AIN(3,3) = 0.
AIN(3,4) = 0.
AIN(3,5) = 0.

```

$AIN(3,6) = 0.$   
 $AIN(3,7) = 1.$   
 $AIN(3,8) = 0.$   
 $AIN(3,9) = 0.$   
 $AIN(4,1) = -1.$   
 $AIN(4,2) = 0.$   
 $AIN(4,3) = 0.$   
 $AIN(4,4) = -1. * (AA3*BB2-BB3*AA2) / (AA3*BB1-AA1*BB3)$   
 $AIN(4,5) = -2. * BB3*AREA / (AA3*BB1-AA1*BB3)$   
 $AIN(4,6) = -2. * AA3*AREA / (AA3*BB1-AA1*BB3)$   
 $AIN(4,7) = 0.$   
 $AIN(4,8) = 0.$   
 $AIN(4,9) = 0.$   
 $AIN(5,1) = 0.$   
 $AIN(5,2) = 0.$   
 $AIN(5,3) = 0.$   
 $AIN(5,4) = -1.$   
 $AIN(5,5) = 0.$   
 $AIN(5,6) = 0.$   
 $AIN(5,7) = -1. * (AA3*BB1-BB3*AA1) / (AA2*BB1-AA1*BB2)$   
 $AIN(5,8) = 2. * BB1*AREA / (AA2*BB1-AA1*BB2)$   
 $AIN(5,9) = 2. * AA1*AREA / (AA2*BB1-AA1*BB2)$   
 $AIN(6,1) = (AA2*BB1-BB2*AA1) / (AA3*BB2-AA2*BB3)$   
 $AIN(6,2) = 2. * BB2*AREA / (AA3*BB2-AA2*BB3)$   
 $AIN(6,3) = 2. * AA2*AREA / (AA3*BB2-AA2*BB3)$   
 $AIN(6,4) = 0.$   
 $AIN(6,5) = 0.$   
 $AIN(6,6) = 0.$   
 $AIN(6,7) = -1.$   
 $AIN(6,8) = 0.$   
 $AIN(6,9) = 0.$   
 $AIN(7,1) = -1. * (AA3*BB1-BB3*AA1) / (AA3*BB2-AA2*BB3)$   
 $AIN(7,2) = -2. * BB3*AREA / (AA3*BB2-AA2*BB3)$   
 $AIN(7,3) = -2. * AA3*AREA / (AA3*BB2-AA2*BB3)$   
 $AIN(7,4) = -1.$   
 $AIN(7,5) = 0.$   
 $AIN(7,6) = 0.$   
 $AIN(7,7) = 0.$   
 $AIN(7,8) = 0.$   
 $AIN(7,9) = 0.$   
 $AIN(8,1) = 0.$   
 $AIN(8,2) = 0.$   
 $AIN(8,3) = 0.$   
 $AIN(8,4) = -1. * (AA2*BB1-BB2*AA1) / (AA3*BB1-AA1*BB3)$   
 $AIN(8,5) = 2. * BB1*AREA / (AA3*BB1-AA1*BB3)$   
 $AIN(8,6) = 2. * AA1*AREA / (AA3*BB1-AA1*BB3)$   
 $AIN(8,7) = -1.$   
 $AIN(8,8) = 0.$   
 $AIN(8,9) = 0.$   
 $AIN(9,1) = -1.$   
 $AIN(9,2) = 0.$   
 $AIN(9,3) = 0.$   
 $AIN(9,4) = 0.$   
 $AIN(9,5) = 0.$   
 $AIN(9,6) = 0.$   
 $AIN(9,7) = (AA3*BB2-BB3*AA2) / (AA2*BB1-AA1*BB2)$   
 $AIN(9,8) = -2. * BB2*AREA / (AA2*BB1-AA1*BB2)$   
 $AIN(9,9) = -2. * AA2*AREA / (AA2*BB1-AA1*BB2)$

```

!          COMPUTE {S} (THE DEFLECTION AND ROTATION VECTOR)

S(1) = XY(II*3-2)
S(2) = XY(II*3-1)
S(3) = XY(II*3)
S(4) = XY(IJ*3-2)
S(5) = XY(IJ*3-1)
S(6) = XY(IJ*3)
S(7) = XY(IK*3-2)
S(8) = XY(IK*3-1)
S(9) = XY(IK*3)

!          COMPUTE [H]

H(1,1) = 0.
H(1,2) = 0.
H(1,3) = 0.
H(1,4) = GL1*(2.*BB2*BB2+BB2*BB3)+GL2*(4.*BB1*BB2+BB1*BB3)+GL3*(BB1*BB2)
H(1,5) = GL1*(BB2*BB3)+GL2*(2.*BB3*BB3+BB1*BB3)+GL3*(BB1*BB2+4.*BB2*BB3)
H(1,6) = GL1*(4.*BB1*BB3+BB2*BB3)+GL2*(BB1*BB3)+GL3*(2.*BB1*BB1+BB1*BB2)
H(1,7) = GL1*(4.*BB1*BB2+BB2*BB3)+GL2*(2.*BB1*BB1+BB1*BB3)+GL3*(BB1*BB2)
H(1,8) = GL1*(BB2*BB3)+GL2*(BB1*BB3+4.*BB2*BB3)+GL3*(2.*BB2*BB2+BB1*BB2)
H(1,9) = GL1*(2.*BB3*BB3+BB2*BB3)+GL2*(BB1*BB3)+GL3*(BB1*BB2+4.*BB1*BB3)
H(2,1) = 0.
H(2,2) = 0.
H(2,3) = 0.
H(2,4) = GL1*(2.*AA2*AA2+AA2*AA3)+GL2*(4.*AA1*AA2+AA1*AA3)+GL3*(AA1*AA2)
H(2,5) = GL1*(AA2*AA3)+GL2*(2.*AA3*AA3+AA1*AA3)+GL3*(AA1*AA2+4.*AA2*AA3)
H(2,6) = GL1*(4.*AA1*AA3+AA2*AA3)+GL2*(AA1*AA3)+GL3*(2.*AA1*AA1+AA1*AA2)
H(2,7) = GL1*(4.*AA1*AA2+AA2*AA3)+GL2*(2.*AA1*AA1+AA1*AA3)+GL3*(AA1*AA2)
H(2,8) = GL1*(AA2*AA3)+GL2*(AA1*AA3+4.*AA2*AA3)+GL3*(2.*AA2*AA2+AA1*AA2)
H(2,9) = GL1*(2.*AA3*AA3+AA2*AA3)+GL2*(AA1*AA3)+GL3*(AA1*AA2+4.*AA1*AA3)
H(3,1) = 0.
H(3,2) = 0.
H(3,3) = 0.
H(3,4) = GL1*(AA2*BB3+AA3*BB2+4.*AA2*BB2)
+GL2*(AA1*BB3+AA3*BB1+4.*AA1*BB2+4.*AA2*BB1)+GL3*(AA1*BB2+AA2*BB1)
H(3,5) = GL1*(AA2*BB3+AA3*BB2)+GL2*(AA1*BB3+AA3*BB1+4.*AA3*BB3)
+GL3*(AA1*BB2+AA2*BB1+4.*AA2*BB3+4.*AA3*BB2)
H(3,6) = GL1*(AA2*BB3+AA3*BB2+4.*AA1*BB3+4.*AA3*BB1)+GL2*(AA1*BB3+AA3*BB1)
+GL3*(AA1*BB2+AA2*BB1+4.*AA1*BB1)
H(3,7) = GL1*(AA2*BB3+AA3*BB2+4.*AA1*BB2+4.*AA2*BB1)
+GL2*(AA1*BB3+AA3*BB1+4.*AA1*BB1)+GL3*(AA1*BB2+AA2*BB1)
H(3,8) = GL1*(AA2*BB3+AA3*BB2)+GL2*(AA1*BB3+AA3*BB1+4.*AA2*BB3+4.*AA3*BB2)
+GL3*(AA1*BB2+AA2*BB1+4.*AA2*BB2)
H(3,9) = GL1*(AA2*BB3+AA3*BB2+4.*AA3*BB3)+GL2*(AA1*BB3+AA3*BB1)
+GL3*(AA1*BB2+AA2*BB1+4.*AA1*BB3+4.*AA3*BB1)

H = -th/(2.*4.*AREA*AREA)*H

!          RECALL {STRAIN,SR} = [H] [AIN] {S}
!          {STRAIN,SR} = [BM] {S}

BM = 0.
BM = matmul(H,AIN)

srxxe = 0.
sryye = 0.
srxye = 0.

```

```

ZSTXXE = 0.
ZSTYYE = 0.
ZSTXYE = 0.

!           GET {STRAIN,SR} FOR EACH ELEMENT

DO 600 IC=1,9

           SRXXE = SRXXE + BM(1,IC)*S(IC)
           SRYYE = SRYYE + BM(2,IC)*S(IC)
           SRXYE = SRXYE + BM(3,IC)*S(IC)
600      CONTINUE

!           INCLUDE THE THERMAL STRAINS (BASED ON AVG NODAL TEMP):

TAVG = (TT1 + TT2)/2.

SRXXE = SRXXE - ALPHA*(TAVG - TREF)
SRYYE = SRYYE - ALPHA*(TAVG - TREF)

!           CALCULATE STRESSES IN EACH ELEMENT

ZSTXXE = CM(1,1)*SRXXE+CM(1,2)*SRYYE+CM(1,3)*SRXYE
ZSTYYE = CM(2,1)*SRXXE+CM(2,2)*SRYYE+CM(2,3)*SRXYE
ZSTXYE = CM(3,1)*SRXXE+CM(3,2)*SRYYE+CM(3,3)*SRXYE

!           RECORD STRESS TO EACH NODE TO MATRIX {STRESS,ST}

! node II IJ IK

           CCOUNT(II) = CCOUNT(II) + 1.
           STXX(II) = STXX(II) + ZSTXXE
           STYY(II) = STYY(II) + ZSTYYE
           STXY(II) = STXY(II) + ZSTXYE
           CCOUNT(IJ) = CCOUNT(IJ) + 1.
           STXX(IJ) = STXX(IJ) + ZSTXXE
           STYY(IJ) = STYY(IJ) + ZSTYYE
           STXY(IJ) = STXY(IJ) + ZSTXYE
           CCOUNT(IK) = CCOUNT(IK) + 1.
           STXX(IK) = STXX(IK) + ZSTXXE
           STYY(IK) = STYY(IK) + ZSTYYE
           STXY(IK) = STXY(IK) + ZSTXYE

1999 CONTINUE
2000 CONTINUE

!           AVERAGE THE STRESS IN EACH NODE FROM ALL CALCULATION
!           AND FIND OUT VON MISES STRESS IN EACH NODE

DO 3000 IP=1,npoi
           STXX(IP) = STXX(IP)/CCOUNT(IP)
           STYY(IP) = STYY(IP)/CCOUNT(IP)
           STXY(IP) = STXY(IP)/CCOUNT(IP)
           XST = STXX(IP)
           YST = STYY(IP)
           XYS = STXY(IP)
           DDS = SQRT((XST-YST)*(XST-YST)+XST*XST+YST*YST+6.*XYS*XYS)
           VMSTRESS(IP) = 1./SQRT(2.)*DDS
3000 CONTINUE

```

End Subroutine calstress

!=====

End Module IDKQ





### ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายพิชเชนทร์ โปธิคุณ เกิดเมื่อวันที่ 3 เดือนมิถุนายน พุทธศักราช 2526 จังหวัด กรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิตจากภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2547 และสำเร็จการศึกษาระดับ วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์ มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2552 เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์ มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2553

