บทที่ ๔

การใช้ประโยชน์ของ Order Statistics

๔.๑ คำนำ

ในระเบียบวิธีทางสถิติที่พบกันอยู่นั้น ส่วนใหญ่จะต้องกล่าวถึงสิ่งอันถือว่าสำคัญยิ่งสองประการ คือหนึ่งเราสมมติว่าเราทราบถึงฟังก์ชั่นของการกระจายของความน่าจะเป็นว่าเป็นลักษณะใด เช่น เป็นการกระจายแบบปกติเป็นต้น และประการที่สองเป็นการแก้ปัญหาทางสถิติซึ่งอาจจะเป็นด้านการประมาณค่าหรือเป็นการทดสอบข้อสมมติฐานของพารามิเตอร์ของฟังก์ชั่นนั้น ๆ แต่ยังมีวิธีทางสถิติอีกประเภทหนึ่งซึ่งแม้ว่าเราไม่ทราบถึงฟังก์ชั่นของการกระจายหรือพารามิเตอร์แต่เราก็ยังสามารถแก้ปัญหาดังกล่าวได้ เช่น วิธีทางสถิติทั่วไป วิธีทางสถิติดังกล่าวเราเรียกว่า "วิธีที่ไม่ต้องอาศัยพารามิเตอร์" หรือ "ระเบียบวิธีที่เป็นอิสระกับรูปของการกระจายของตัวแปร" (Nonparametric methods หรือ distribution -free methods)

Order Statistics เป็นสถิติชนิดหนึ่งที่ไม่ต้องอาศัยพารามิเตอร์ในการแก้ปัญหาทางสถิติ เช่น ระเบียบวิธีทางสถิติทั่วไป ฉะนั้นการใช้ประโยชน์ของ Order Statistics ในการแก้ปัญหาดังกล่าวจึงนับได้ว่าเป็นการใช้ประโยชน์จากวิธีสถิติที่ไม่ต้องอาศัยพารามิเตอร์นั่นเอง อย่างไรก็ดีสถิติที่ไม่ต้องอาศัยพารามิเตอร์ที่นิยมใช้อยู่มีมากมาย สำหรับที่จะนำเสนอในที่นี้จะได้เลือกเฉพาะที่เกี่ยวข้องกับ Order Statistics เท่านั้น และยิ่งกว่านั้นจะได้เลือกเสนอแต่เพียงบางวิธีที่จะได้ใช้เปรียบเทียบกับวิธีทางสถิติทั่วไปทั้งทางด้านการแก้ปัญหา ด้านการประมาณค่า และปัญหาด้านการทดสอบสมมติฐานในด้านต่าง ๆ รวมทั้งเปรียบเทียบทางด้านประสิทธิภาพด้วยซึ่งคำว่า "<u>ประสิทธิภาพ</u>" ที่กล่าวถึงนี้ เราจะได้ดูจาก<u>ค่าของความแปรปรวนของตัวประมาณค่า</u> คือ ถ้าตัวประมาณค่าตัวใดมีความแปรปรวนน้อยกว่า เราเรียกว่าเป็นตัวประมาณค่าที่มี

ประสิทธิภาพดีกว่า เช่น จากตัวอย่างที่ ๒.๕.๑ การใช้ (๒.๕.๓) เป็นตัวประมาณค่า $\tilde{X}$ ให้ความแปรปรวนน้อยกว่าการใช้ (๒.๕.๑) เราก็กล่าวว่า (๒.๕.๓) เป็นตัวประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพดีกว่าเป็นต้น

๔.๒ การใช้ประโยชน์ในการแก้ปัญหาด้านการประมาณค่า

ในการนำระเบียบวิธีทางสถิติไปใช้แก้ปัญหาในบางกรณี การคำนวณตัวเลขที่ซ้ำซากและจำเจย่อมเป็นงานที่น่าเบื่อหน่าย อาทิเช่น ในการควบคุมคุณภาพสินค้าในโรงงานอุตสาหกรรมหรือการเก็บข้อมูลของกรมอุตุนิยมวิทยาเป็นต้นที่จะต้องทำอยู่เป็นงานประจำวัน ถ้าเราสามารถที่จะหลีกเลี่ยงในการคำนวณจากระเบียบวิธีทางสถิติทั่วไปมาใช้วิธีที่สะดวกรวดเร็วและง่ายในการกระทำการก็ย่อมเป็นที่น่ายินดีเพื่อที่จะหลีกเลี่ยงวิธีการอันน่าเบื่อดังกล่าวจะได้เสนอวิธีที่สามารถใช้แทนดังต่อไปนี้

ก. <u>การประมาณค่าตัวกลาง</u> ในระเบียบวิธีทางสถิติทั่วไปเราอาจประมาณค่าของตัวกลางจากค่าเฉลี่ยของข้อมูลทุก ๆ ตัวจากข้อมูลตัวอย่างทั้งหมด นั่นคือถ้า μ เป็นค่าตัวกลางของประชากรเมื่อ $\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$ เราประมาณค่าของ μ ด้วย $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ หมายความว่า เราจะต้องหาค่ารวมของข้อมูลทุก ๆ ตัวจากตัวอย่างเพื่อที่จะหาค่าเฉลี่ยออกมา ถ้าขนาดของตัวอย่างนั้นใหญ่ก็จะเสียเวลาในการคำนวณมาก แต่ถ้าเราไม่ทำด้วยวิธีการดังกล่าว แต่เราใช้ค่าเฉลี่ยของค่าคะแนนสูงสุดกับค่าคะแนนต่ำสุด (กึ่งพิสัย) แทน เราก็จะได้ค่าของตัวกลางอย่างรวดเร็วกว่ามากจริงอยู่ที่ว่า สำหรับขนาดของข้อมูลที่ใหญ่ค่าเฉลี่ยของค่าคะแนนสูงสุดกับค่าคะแนนต่ำสุดจะต่างกันบ้าง แต่ถ้าคำนึงถึงความสะดวกในการคำนวณแล้วสิ่งที่จะต้องใช้วิจารณญาณก็คืออะไรเป็นสิ่งสำคัญที่ผู้ทำสถิติจะต้องวินิจฉัยดูระหว่างความรวดเร็วกับความแม่นยำในการได้มาซึ่งค่าตัวกลางของข้อมูลนั้น แต่สำหรับกรณีที่ขนาดของข้อมูลตัวอย่างเป็นตัวอย่างขนาดเล็กแล้วการใช้ค่าเฉลี่ยของค่าคะแนนสูงสุดกับคะแนนต่ำสุดจะไม่ด้อยกว่าวิธีทั่วไปในด้านความแม่นยำเลย แต่วิธีนี้จะยังคงไว้ซึ่งความเหนือกว่าทางด้านความรวดเร็วอยู่ดังเดิม

<u>ตัวอย่างที่ ๔.๒.๑</u> บริษัทลิเวอร์บราเดอร์ จำกัด มีนโยบายในการควบคุมคุณภาพสินค้าที่ตนผลิตทุกประเภทให้อยู่ในมาตรฐาน ต่อไปนี้เป็นตัวเลขจากการบันทึกการตรวจสอบคุณภาพในการบรรจุซองของผงซักฟอกชนิดหนึ่งด้วยการสุ่มตัวอย่างครั้งละ ๕ ซองจากไลน์ทุก ๆ ๓ นาทีเมื่อ ๑ สิงหาคม ๒๕๑๑

ตัวอย่างชุดที่	ค่าจากตัวอย่างหน่วยที่ ๑	๒	๓	๔	๕	ค่าเฉลี่ย	ค่าสูงสุด	ค่าต่ำสุด	กึ่งพิสัย
๑	๕๔๕	๕๔๕	๕๔๕	๕๔๐	๕๕๐	๕๔๕	๕๕๐	๕๔๐	๕๔๕
๒	๕๔๕	๕๕๐	๕๓๕	๕๓๕	๕๕๐	๕๔๓	๕๕๐	๕๓๕	๕๔๒.๕
๓	๕๕๕	๕๕๐	๕๖๐	๕๔๐	๕๔๕	๕๕๐	๕๖๐	๕๔๐	๕๕๐
๔	๕๕๐	๕๖๐	๕๖๕	๕๖๕	๕๖๐	๕๖๐	๕๖๕	๕๕๐	๕๕๗.๕
.	..	..	..	..	..	..	..	..	..

จากตัวอย่างที่ ๔.๒.๑ จะเห็นได้ว่า ค่าของตัวกลางที่ได้จากค่าเฉลี่ยกับที่ได้จากกึ่งพิสัยในตัวอย่างขนาดเล็กนั้นนับว่าใกล้เคียงกันมาก แต่ถ้าจะหันมาพิจารณาในวิธีการหาค่าทั้งสองแล้วจะเห็นว่า ด้วยวิธีหาค่ากึ่งพิสัยย่อมจะทำได้รวดเร็วกว่า จึงเห็นว่าวิธีการประมาณค่าของตัวกลางด้วยกึ่งพิสัยน่าจะได้ถูกนำมาใช้ในการแก้ปัญหาทางสถิติได้เป็นอย่างดีเช่นเดียวกับวิธีหาด้วยค่าเฉลี่ย

นอกจากกึ่งพิสัยที่สามารถใช้ประมาณค่าของตัวกลางแล้ว ยังมีสถิติอื่น ๆ ที่สามารถใช้ในลักษณะเดียวกันนี้ได้อีก อาทิเช่น มัธยฐาน, $X_{(\frac{n}{2})}$ ซึ่งแสดงถึงค่าของคะแนนที่อยู่ในตำแหน่งที่อยู่ตรงกลางของข้อมูลเช่น จากตัวอย่างที่ ๔.๒.๑ ถ้าเราจัดเรียงค่าของน้ำหนักในข้อมูลแต่ละชุดแล้ว น้ำหนักในตำแหน่งที่อยู่ตรงกลาง $X_{(\frac{n}{2})}$ ของข้อมูลแต่ละชุดจะเป็น ๕๔๕,๕๔๕,๕๕๐,๕๖๐,... ซึ่งก็นับว่าเป็นค่าที่ใกล้เคียงกับค่าเฉลี่ยเช่นเดียวกัน

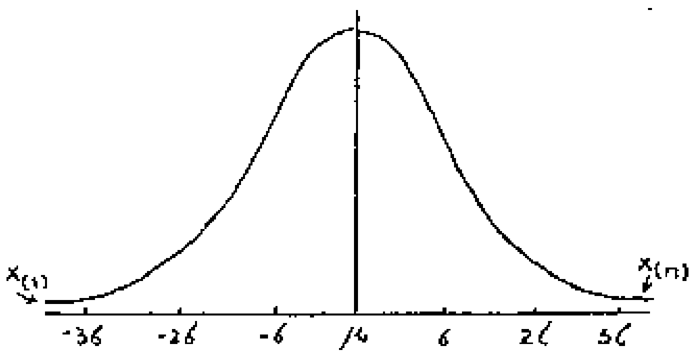
จากค่าของมัธยฐานเราสามารถที่จะหาค่าของควอไตล์ที่หนึ่งและควอไตล์ที่สามอันจะทำให้เราสามารถหาค่าของกึ่งควอไตล์ได้ และค่าของกึ่งควอไตล์นี้ก็เป็นสถิติตัวหนึ่งที่สามารถจะใช้เป็นตัวประมาณค่าของตัวกลางได้ด้วย

เช่นเดียวกับกึ่งพิสัยและมัธยฐานที่ได้กล่าวถึงไปแล้วนั้น

ข. <u>การประมาณค่าของการกระจาย</u> ในวิธีทางสถิติทั่วไปเรานิยมที่จะใช้ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ_x เป็นตัวประมาณค่าของการกระจายโดยที่ $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N}\Sigma(x_i-\mu)^2}$ และเราจะประมาณค่าของ σ_x ด้วย $\hat{\sigma}_x = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$ ซึ่งเราจะต้องทำการคำนวณอย่างที่จะต้องใช้เวลามากพอสมควรแต่ในกรณีของสถิติที่ไม่ใช้ค่าพารามิเตอร์ได้เสนอให้ใช้<u>พิสัย</u>คือ ค่าแตกต่างระหว่างค่าคะแนนสูงสุดกับค่าคะแนนต่ำสุด เป็นตัววัดการกระจายแทนค่าที่ได้จากส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานพิสัยเป็นตัววัดการกระจายที่ดีมากตัวหนึ่งเพราะไม่เพียงแต่ว่า จะง่ายในการคำนวณเท่านั้น แต่ยังง่ายในการที่จะอธิบายให้ผู้ที่ไม่มีความรู้ทางสถิติได้เข้าใจว่าเราสามารถที่จะวัดการกระจายของข้อมูลได้อย่างไรด้วย ถ้าเราจะมองถึงความสัมพันธ์ระหว่างพิสัยกับค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานจากภาพประกอบที่ ๔.๒.๑

<u>ภาพประกอบที่ ๔.๒.๑</u>

แสดงคุณสมบัติการกระจายแบบปกติ



เนื่องจากพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งจาก -๓σ ถึง $+๓\sigma$ เป็น .๙๙๘ ซึ่งหมายความว่าโอกาสที่ค่าของ xi จะอยู่ระหว่าง $\mu-๓\sigma$ กับ $\mu+๓\sigma$ จะเป็น ๙๙.๘ % ดังนั้นถ้าเราไม่คำนึงถึงค่าที่สูงหรือต่ำจนเกินปกติ (extreme values) แล้ว โอกาสที่ค่าสูงสุด, $x_{(n)}$ และค่าต่ำสุด, $x_{(1)}$ จะอยู่ในช่วงดังกล่าวย่อมเป็น ๙๙.๘ % ด้วย

ด้วยคุณสมบัติของการกระจายแบบปกติข้างต้นนี้ ถ้าการกระจายของข้อมูลเป็นแบบปกติแล้วเราอาจประมาณค่าของ σ อย่างคร่าว ๆ ได้จากพิสัยที่ว่า

$X_{(n)} - X_{(1)} = 6\sigma$ หรือ $\sigma = \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{6}$

นอกจากการอาศัยคุณสมบัติของการกระจายแบบปกติแล้วในลักษณะการกระจายที่กล่าวนี้ George W. Snedecor[1] ได้ทำการทดลองหาค่าของพิสัยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานและได้คำนวณหาค่าความแปรปรวนของตัวประมาณค่าการกระจายทั้งสองนั้น อันเป็นสิ่งที่แสดงถึงประสิทธิภาพในขนาดตัวอย่างต่าง ๆ กันได้ผลเป็นตามตารางที่ ๔.๒.๑ ดังนี้

<u>ตารางที่ ๔.๒.๑</u>

แสดงอัตราส่วนระหว่างค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานต่อพิสัยในขนาดของตัวอย่างต่าง ๆ กันจากการกระจายปกติและแสดงประสิทธิภาพในการใช้พิสัยในการประมาณค่าของการกระจาย

ขนาดตัวอย่าง	ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน พิสัย	ประสิทธิภาพ เปรียบเทียบ
๒	.๘๘๖	๑.๐๐๐
๓	.๕๙๑	.๙๙๒
๔	.๔๘๖	.๙๗๕
๕	.๔๓๐	.๙๕๕
๖	.๓๙๕	.๙๓๓
๗	.๓๗๐	.๙๑๒
๘	.๓๕๑	.๘๙๐
๙	.๓๓๗	.๘๖๙
๑๐	.๓๒๕	.๘๕๐
๑๒	.๓๐๗	.๘๑๕
๑๔	.๒๙๔	.๗๘๓
๑๖	.๒๘๓	.๗๕๓
๑๘	.๒๗๕	.๗๒๖
๒๐	.๒๖๘	.๗๐๐
๓๐	.๒๔๕	.๖๐๔
๔๐	.๒๓๑	.๕๓๖
๕๐	.๒๒๒	.๔๙๐

[1] George W. Snedecor, <u>Statistical Methods</u> (5th ed.; Iowa: The Iowa State University Press, 1956), p.38.

ในช่องประสิทธิภาพเปรียบเทียบคือการเปรียบเทียบความแปรปรวนที่ใช้ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานต่อความแปรปรวนที่ใช้พิสัย ในการประมาณค่าของการกระจาย เช่น ในขนาดตัวอย่าง ๒ หน่วยความแปรปรวนของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน/ความแปรปรวนของพิสัย เป็น ๑.๐๐๐ เป็นต้น

จากตาราง ๔.๒.๑ จะเห็นว่าสำหรับตัวอย่างขนาดเล็กแล้วพิสัยจะมีประสิทธิภาพเกือบเท่าเทียบค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานในการใช้ประมาณค่าของการกระจายและทุกขณะที่ขนาดของตัวอย่างใหญ่ขึ้นประสิทธิภาพดังกล่าวก็จะค่อย ๆ ลดลง ดังนั้นเมื่อเราทราบค่าอัตราส่วนระหว่างค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานต่อพิสัยเช่นนี้ประกอบกับความสำคัญในด้านการต้องการค่าประมาณที่รวดเร็ว เราสามารถที่จะทำการปรับปรุงค่าของพิสัยให้ใช้ในการประมาณค่าของการกระจายได้ดังนี้

<u>ตารางที่ ๔.๒.๒</u>

แสดงการประมาณค่าของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานด้วยพิสัย

ถ้าขนาดตัวอย่างใกล้เคียงค่าต่อไปนี้	เราสามารถประมาณค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานอย่างรวดเร็วโดยการหารค่าของพิสัยด้วยจำนวนต่อไปนี้
๕	๒
๑๐	๓
๒๕	๔
๑๐๐	๕

ตารางที่ ๔.๒.๒ แสดงให้เห็นว่า ในขนาดตัวอย่างที่ใกล้เคียงกับค่าหนึ่งๆ นั้น ค่าของพิสัยจะมีค่าโดยประมาณ(approximate) เป็นกี่เท่าของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน เช่น ในขนาดตัวอย่าง ๑๐ หน่วย ค่าพิสัยจะเป็น(โดยประมาณ) สามเท่าของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ดังนั้นถ้าเราทราบค่าพิสัยซึ่งโดยปกติจะหาได้เร็วมาก เราก็หาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานอย่างคร่าว ๆ ได้ทันที แต่เนื่องจากตารางที่ ๔.๒.๒ เป็นผลมาจากตารางที่ ๔.๒.๑ จึงจะใช้อย่างได้ผลอย่างถูกต้องสำหรับในกรณีที่ข้อมูลมีการกระจายแบบปกติ

<u>ตัวอย่างที่ ๔.๒.๒</u> ในการตรวจสินค้าที่ผลิตแล้วผิดขนาดจากมาตรฐานที่ตั้งขึ้นไว้ การตรวจสอบทำโดยการสุ่มสินค้าตัวอย่างวันละ ๑๐๐ ชิ้นเป็นเวลา ๑๗ วันได้ข้อมูลดังนี้

วันที่	จำนวนของผิดขนาด	ส่วนเบี่ยงเบนจากตัวกลาง	ส่วนเบี่ยงเบนกำลังสอง
๑	๑๖	−๔	๑๖
๒	๒๒	๒	๔
๓	๒๑	๑	๑
๔	๒๐	๐	๐
๕	๒๓	๓	๙
๖	๒๑	๑	๑
๗	๑๙	−๑	๑
๘	๑๕	−๕	๒๕
๙	๑๓	−๗	๔๙
๑๐	๒๓	๓	๙
๑๑	๑๗	−๓	๙
๑๒	๒๐	๐	๐
๑๓	๒๙	๙	๘๑
๑๔	๑๘	−๒	๔
๑๕	๒๒	๒	๔
๑๖	๑๖	−๔	๑๖
๑๗	๒๕	๕	๒๕
ยอดรวม	๓๔๐	๐	๒๕๔

ค่าเฉลี่ยเป็น ๓๔๐/๑๗ = ๒๐

ถ้าเราหาค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานด้วยวิธีสถิติทั่วไปเราจะได้

$\hat{\sigma}_x^2 = \Sigma d^2/(n-1) = 254/16, \therefore \hat{\sigma}_x = 3.98, \ d = (x - \bar{x})$

ในที่นี้พิสัยคือ ๒๙ − ๑๓ = ๑๖

ถ้าเราประมาณค่าของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานด้วยตารางที่ ๔.๒.๑ จะได้

$\hat{\sigma}_x$ = (๐.๒๗๙)(๑๖) = ๔.๔๖

หรือถ้าจะประมาณด้วยการหาค่าของพิสัยด้วยตารางที่ ๔.๒.๒ เราจะได้

$\hat{\sigma}_x$ = (๑๖) / (๓.๕) = ๔.๖

ตัวหารคือ ๓.๕ ได้จากค่าเฉลี่ยของ ๓ กับ ๔ ซึ่งเป็นตัวที่ใช้ปรับปรุงให้พิสัยใช้แทนส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานได้อย่างคร่าว ๆ เช่น ในขนาดตัวอย่าง ๑๐ หน่วยเราหารพิสัยด้วย ๓ ถ้าขนาดตัวอย่างเราหารพิสัยด้วย ๔ ก็จะได้ค่า

คร่าว ๆ ของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน แต่จากตัวอย่างที่ ๔.๒.๒ ขนาดของตัวอย่างเป็น ๑๗ อันไม่อาจจัดเข้าอยู่ในขนาดตัวอย่างที่ใกล้เคียงตามที่ตารางที่ ๔.๒.๒ ได้เตรียมไว้เราจึงใช้ค่าเฉลี่ยดังกล่าวเป็นตัวปรับปรุง

๔.๓ การใช้ประโยชน์ในการแก้ปัญหาด้านการทดสอบข้อสมมติฐาน

ในกรณีของสถิติทั่วไปที่เราทราบค่าของพารามิเตอร์ เราอาจสนใจที่จะทำการทดสอบข้อสมมติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ที่เรามีอยู่หรือที่เราเชื่อถือกันมา หรืออาจทดสอบในแง่ที่ว่าได้เกิดการเปลี่ยนแปลงในค่าของพารามิเตอร์ สำหรับในกรณีของสถิติที่ได้จากข้อมูลที่ได้รับการจัดเรียงตามขนาดของความสำคัญที่เรากำลังสนใจอยู่นี้ เป็นสถิติในลักษณะที่ไม่ใช้ค่าของพารามิเตอร์ แต่เราก็สามารถที่จะทำการทดสอบข้อสมมติฐานได้เช่นเดียวกับสถิติทั่วไปดังต่อไปนี้

ก. <u>การทดสอบมัธยฐาน</u> ในสถิติทั่วไปเราอาจจะทดสอบพารามิเตอร์ตัวกลาง แต่ในสภาวะของสถิติที่ไม่ต้องอาศัยพารามิเตอร์เราสนใจที่จะทดสอบมัธยฐานแทน วิธีการทดสอบเราจะใช้ "<u>วิธีการทดสอบโดยใช้เครื่องหมาย</u>" (Signs Test) ซึ่งมักใช้กับการเปรียบเทียบของสองสิ่ง มีการเก็บตัวเลขเป็นคู่ ๆ แล้วดูเครื่องหมายของผลต่างของแต่ละคู่เป็นสำคัญว่าจะเป็นบวกเท่าใดเป็นลบเท่าใดแล้วก็อาศัยตารางเปรียบเทียบว่าผลที่ได้เป็นอย่างไร

มีนัยสำคัญหรือไม่ วิธีทดสอบชนิดนี้นับว่าง่ายมาก เพราะมีอยู่บ่อยครั้งที่ทดสอบเครื่องหมายแล้วไม่ต้องมีการคำนวณใด ๆ เลย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่ ๔.๓.๑</u> เป็นที่ทราบกันว่าชายไทยจะแต่งงานเมื่ออายุได้ ๒๕ ปี เพื่อที่จะทดสอบคำกล่าวข้างต้นจึงได้นำอายุของเจ้าบ่าว ๑๕ คนที่มาทำการจดทะเบียนสมรส ณ ที่ว่าการอำเภอแห่งหนึ่งมาเป็นตัวอย่างเพื่อทำการทดสอบสมมติฐานซึ่งอายุที่จดบันทึกไว้เป็นดังนี้ ๒๐ ๔๒ ๑๘ ๒๑ ๒๗ ๓๕ ๑๙ ๑๘ ๒๖ ๒๐ ๒๑ ๓๒ ๒๖ ๒๐ ๒๔

ถ้าให้ ษ เป็นมัธยฐานของการกระจายของประชากร

ดังนั้น H_0 : ษ = 25

เอามัธยฐานหักค่าทุกค่าในข้อมูลตัวอย่างแล้วพิจารณาเฉพาะเครื่องหมาย เราจะได้เครื่องหมายทั้งหมดเป็น − + − − − + − − + − − + − − −

ถ้า p เป็นอัตราส่วนระหว่างจำนวนเครื่องหมายบวกต่อจำนวนเครื่องหมายทั้งหมดของประชากร ดังนั้น p จะมีค่าเป็น ๑/๒ เพราะมัธยฐานเป็นค่าคะแนนที่แสดงว่ามีคะแนนที่สูงกว่าค่ามัธยฐานอยู่ ๕๐ %

ให้ x เป็นจำนวนเครื่องหมายบวกทั้งหมดที่เกิดในตัวอย่าง ดังนั้นการกระจายของ x จะเป็นการกระจายแบบไบนอเมียลที่มี $p = 1/2$

จากค่าของ n เมื่อเราทราบระดับความเชื่อมั่น เราก็สามารถที่จะกล่าวว่าเราจะยอมปฏิเสธข้อสมมติฐานเมื่อเครื่องหมายบวกจากตัวอย่างเป็นเท่าใด โดยเทียบจาก<u>ตารางการแจกแจงการทดสอบเครื่องหมาย</u> เช่น จากตารางดังกล่าว $P(x \leq 4) = .059$, $n = 15$ ซึ่งสรุปได้ว่าด้วยระดับความเชื่อมั่น ๙๔.๑ % เราจะปฏิเสธข้อสมมติฐานที่ว่าชายไทยจะแต่งงานเมื่ออายุ ๒๕ ปีถ้าเครื่องหมายบวกที่เกิดจากผลต่างของข้อมูลตัวอย่างกับมัธยฐานสมมติไม่เกิน ๔ เครื่องหมาย

ข. <u>การทดสอบความแตกต่างของมัธยฐานสองตัว</u> เป็นลักษณะการทดสอบที่จะแสดงว่า ถ้าตัวกลางจากตัวอย่าง ๒ ชุดเท่ากันหรืออาจกล่าวว่าตัวอย่างทั้งสองชุดนั้นมาจากประชากรชุดเดียวกัน ในวิธีการสถิติทั่วไปเราอาจ

สนใจจะทดสอบว่าตัวกลางของตัวอย่างสองชุดเท่ากันด้วยอาศัย Likelyhood Ratio Test ซึ่งจะสามารถนำไปสู่การใช้ตารางทดสอบแบบ t ต่อไป แต่สำหรับในกรณีของมัธยฐานอันเป็นสถิติที่ไม่ต้องอาศัยพารามิเตอร์ เราสามารถที่จะทดสอบมัธยฐานของตัวอย่างสองชุดได้เช่นเดียวกันจะต่างกันก็ตรงที่เราใช้วิธีการทดสอบแตกต่างกันไป คือ เราจะต้องใช้ "วิธีการทดสอบโดยใช้ผลรวมอันดับที่" (Rank-Sum Test) แทน วิธีดังกล่าวนี้ทำได้โดยนำข้อมูลตัวอย่างของทั้งสองชุดมารวมกันแล้วจัดลำดับตามขนาดความสำคัญซึ่งในการนี้จะต้องทำสัญลักษณ์พิเศษเพื่อแสดงให้เห็นว่า ข้อมูลตัวใดเป็นของตัวอย่างชุดเดียวกันด้วย จากอันดับที่ได้จัดเรียงแล้วนั้นให้หาผลรวมของตำแหน่งที่ทั้งหลายของข้อมูลที่มาจากตัวอย่างชุดที่เล็กกว่าว่าเป็นเท่าใด (ถ้าขนาดของตัวอย่างของทั้งสองชุดเท่ากันเราจะหาผลรวมของตำแหน่งของข้อมูลชุดใดชุดหนึ่งก็ได้) ด้วยค่าที่มีอยู่เพียงสามค่าคือ ขนาดของข้อมูลตัวอย่างทั้งสองชุดกับค่าผลรวมของตำแหน่งของข้อมูลตัวอย่างชุดที่เล็กกว่าและเราสามารถที่จะหาค่า critical values ได้จากตารางการแจกแจงของผลรวมของอันดับที่เพื่อการเปรียบเทียบ

ตัวอย่างที่ ๔.๓.๖ เรามีข้อมูลตัวอย่างอยู่สองชุด ชุดหนึ่งมีขนาด ๘ หน่วย ชุดที่สองมีขนาด ๑๐ หน่วย เราต้องการทดสอบว่า มัธยฐานของข้อมูลทั้งสองชุดเท่ากัน (หรือกล่าวว่ามาจากประชากรชุดเดียวกัน) ข้อมูลทั้งสองชุดเป็นดังนี้ ชุดที่หนึ่ง ๒๘ ๒๔ ๑๕ ๔๗ ๒๓ ๒๕ ๕๓ ๒๐

ชุดที่สอง ๒๒ ๑๒ ๓๐ ๑๖ ๒๖ ๑๔ ๑๘ ๒๑ ๑๖ ๑๘

ก่อนอื่นเรานำข้อมูลทั้งสองชุดรวมกันแล้วจัดลำดับที่โดยที่ให้ข้อมูลที่มาจากตัวอย่างชุดแรก (ซึ่งเป็นตัวอย่างที่มีขนาดเล็กกว่า) มีสัญลักษณ์ด้วยการขีดเส้นใต้ดังนี้

๑๒ ๑๔ <u>๑๕</u> ๑๖ ๑๖ ๑๘ ๑๘ <u>๒๐</u> ๒๑ ๒๒ <u>๒๓</u> <u>๒๔</u> <u>๒๕</u> ๒๖ <u>๒๘</u> ๓๐ <u>๔๗</u> <u>๕๓</u>

จากนั้นเราเขียนด้วยลำดับที่แทนตัวเลขข้อมูลที่แท้จริงดังนี้

๑ ๒ <u>๓</u> ๔ ๕ ๖ ๗ <u>๘</u> ๙ ๑๐ <u>๑๑</u> <u>๑๒</u> <u>๑๓</u> ๑๔ <u>๑๕</u> ๑๖ <u>๑๗</u> <u>๑๘</u>

ดังนั้นผลรวมของตำแหน่งที่ของข้อมูลชุดที่มีขนาดเล็ก (ตำแหน่งที่ที่ถูกขีดเส้นใต้) จะเป็น ๙๗ ให้ = T^1 จากตารางแจกแจงของผลรวมอันดับที่เราได้ $P(T^1 \geq 95)$ = .051 ซึ่งสรุปได้ว่าด้วยระดับความเชื่อมั่น ๙๔.๙ % ถ้าผลรวมของอันดับที่คือ T^1=95เราจะปฏิเสธข้อสมมติฐานที่ตั้งไว้หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือข้อมูลจากตัวอย่างทั้งสองชุดนี้ไม่ได้มาจากประชากรชุดเดียวกัน(มีมัธยฐานไม่เท่ากัน) นั่นเอง

เป็นที่น่าสังเกตว่าในตารางแจกแจงผลรวมอันดับที่นั้นจะแสดงถึงค่าของขนาดของข้อมูลทั้งสอง ตั้งแต่ ๑ ไปจนถึง ๑๐ เท่านั้น โดยที่มีการเปรียบเทียบเรื่อยไปกับขนาดของผลรวมของอันดับที่ T^1 สำหรับค่าซึ่งเกินไปกว่านั้นได้แนะนำให้ใช้ความสัมพันธ์ที่การแจกแจงผลรวมอันดับที่มีต่อการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานก็จะทำให้สามารถที่จะแก้ปัญหาได้ในทุกขนาดของตัวอย่างและทุกขนาดของผลรวมอันดับที่เสนอไป

ค. <u>การทดสอบส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจากตัวอย่างชุดเดียว</u>
สมมติว่าเรามีข้อสมมติฐานว่า $H_0: \sigma = \sigma_0$ และในการทดสอบนี้เราจะใช้พิสัยแทนการใช้ σ ในแบบทั่ว ๆ ไป ถ้า n เป็นตัวอย่างชุดหนึ่งสำหรับการทดสอบ Grubbs และ Weaver[2] ได้แนะนำให้แบ่งตัวอย่างชุดนั้นออกเป็นกลุ่มเล็ก ๆ กลุ่มละ n^1_t โดยที่ $\Sigma n^1_t = n$ ซึ่งในการนี้เขาได้สร้างตารางค่า A_t

---

[2] F.E. Grubbs and C.L. Weaver, "The best unbiased estimate of population standard deviation based on group ranges," Journal American Statistical Association, Vol. 42(1947), PP. 224 - 241.

เพื่อจะทำให้ $\Sigma A_t W_{n_t^1}$ [3] ของตัวอย่างกลุ่มเล็ก ๆ ทั้งหมดเป็นตัวประมาณของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานที่ไม่มีการเอียงเฉ และในการนี้เขาได้สร้างตาราง percentage points ของ $\Sigma A_t W_{n_t^1}/\sigma$ เพื่อใช้เป็นตารางเทียบค่า critical values ในการจะตอบรับหรือตอบปฏิเสธข้อสมมติฐานข้างต้นนั้น

นอกจากวิธีของ Grubbs และ Weaver แล้วเรายังอาจใช้วิธีของ Patnaik[4] ซึ่งเขาได้แสดงไว้ว่า $\bar{W}/\sigma = c\chi_v/\sqrt{v}$ เมื่อ $\bar{W}$ เป็นค่าเฉลี่ยของพิสัยในแต่ละกลุ่มตัวอย่างเล็ก ๆ χ คือการกระจายแบบไคแสควร์ด้วย v degree of freedom เขาได้สร้างตารางที่จะใช้คูณกับค่าเฉลี่ยของพิสัยเพื่อจะได้ค่าช่วงของความเชื่อมั่น เพื่อใช้เป็น critical values ในการตอบรับหรือตอบปฏิเสธข้อสมมติฐานที่มีอยู่ต่อไป

ง. <u>การทดสอบส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจากตัวอย่างสองชุด</u> สมมุติว่าเรามีข้อสมมติฐานว่า Ho: $\sigma_1 = \sigma_2$ ในการทดสอบเราสามารถใช้พิสัยมาทำการทดสอบแทนการใช้ σ ในแบบทั่ว ๆ ไปได้ ในการนี้ Link[5] ได้ทำตารางไว้หลายตารางเกี่ยวกับชั้นบนของ percentage points ของ W_{n_1}/W_{n_2} สำหรับกรณีที่ขนาดของตัวอย่างของทั้งสองชุดเป็น ๑๐ แล้วจะได้นำเอาอัตราส่วน $W_{n_2}/1\bar{W}/c$ ไปเทียบกับตาราง

---

[3] $W_{n_t^1}$ เป็นพิสัยของตัวอย่างกลุ่มเล็ก ๆ กลุ่มที่มีขนาดตัวอย่าง N_t^1

[4] P.B. Patnaik, "The use of mean range as an estimator of variance in statistical tests", <u>Biometrika</u>, Vol. 37(1950), PP.78 - 87.

[5] R.F. Link, "The sampling distribution of the ratio of two ranges from independent samples", <u>Annual Mathematical Statistics</u>, Vol. 21(1950), PP. 112 - 116.

studentized range ต่อไป หรือถ้าขนาดของตัวอย่างในทั้งสองชุดนั้นใหญ่กว่า ๑๐ เราก็อาศัยตารางการกระจายแบบ F เพราะว่า $({}_1\bar{U}C_2/{}_2\bar{U}C_1)^2$ มีการกระจายใกล้กับการกระจายแบบ F ด้วย v_1 และ v_2 degree of freedom

จ. <u>การทดสอบส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจากตัวอย่างหลายชุด</u> สมมติว่าเรามีข้อสมมติฐาน $H_0: \sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_k$ และเราสนใจที่จะใช้พิสัยมาทำการทดสอบ ให้ s_t^2 เป็น mean square estimator ของ σ_t^2 โดยที่ $t = 1, 2, \ldots, k.$ เราทดสอบข้อสมมติฐานด้วยการนำอัตราส่วน s^2_{max}/s^2_{min} ไปเทียบกับตารางสำเร็จต่อไป ที่เราสามารถใช้ตารางสำเร็จดังกล่าวได้ก็เพราะความสัมพันธ์ที่ว่า $(s^2_{max}/s^2_{min}) = \text{range}(\log s_t^2)$ ยิ่งในกรณีที่ขนาดของตัวอย่างแต่ละชุดไม่เกินกว่า ๑๐ เราจะใช้อัตราส่วน W_{max}/W_{min} เลยก็ได้

---

[6] Ahmed E. Sarhan and Bernard G. Greenberg, <u>Contributions to Order Statistics</u> (New York: John Wiley and Sons, Inc., 1962), p. 117

๔.๔ การใช้ประโยชน์ทางด้านอื่น ๆ

นอกจากสถิติที่ได้จากข้อมูลที่ได้รับจากเรียงลำดับค่าตามขนาดความสำคัญ จะสามารถแก้ปัญหาทางด้านการประมาณค่าและการทดสอบข้อสมมติฐานแล้ว สถิติดังกล่าวยังสามารถใช้ประโยชน์ด้านอื่น ๆ ได้อีก อาทิเช่น ใช้สำหรับหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่ (Rank Correlation Coefficient) เพื่อใช้ทดสอบข้อสมมติฐานด้านความเป็นอิสระต่อกันของตัวแปรสองชุด หรืออาจใช้ในการทดสอบว่าตัวอย่างชุดหนึ่งชุดใดที่ได้รับมานั้นจะได้มาจากประชากรอย่างสุ่มหรือไม่ (Runs Test) เป็นต้น

ก. สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับที่ ในกรณีของสถิติทั่วไปการหาสหสัมพันธ์ก็คือการจะดูว่า ข้อมูลตัวแปรสองชุดจะมีความสัมพันธ์กันหรือไม่ เช่น ความสัมพันธ์ของการสูบบุหรี่กับโรคมะเร็ง คะแนนสอบคณิตศาสตร์กับภาษาอังกฤษ เป็นต้น วิธีหาความสัมพันธ์อาจทำได้ดังนี้

ตัวอย่างที่ ๔.๔.๑ นักเรียนชั้นหนึ่งมี ๑๐ คน สอบได้คะแนนดังต่อไปนี้

	นักเรียน									
	ก	ข	ค	ง	จ	ฉ	ช	ซ	ญ	ฎ
คณิตศาสตร์	๒๑	๓๐	๒๗	๒๐	๓๘	๑๕	๓๙	๑๖	๒๒	๓๖
ภาษาอังกฤษ	๑๘	๑๒	๑๖	๑๗	๒๐	๗	๑๕	๑๔	๙	๑๑

ถ้าเราต้องการทราบว่านักเรียนที่เรียนคณิตศาสตร์ได้คะแนนสูงจะเรียนภาษาอังกฤษได้คะแนนสูงด้วยหรือไม่ เราจะสามารถทราบความสัมพันธ์ดังกล่าวได้ด้วยสูตร

$$r = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X})\ (Y_i - \overline{Y})}{(n-1)S_x S_y} \qquad (4.4.1)$$

โดยที่ให้ X_i เป็นค่าคะแนนคณิตศาสตร์ของเด็กนักเรียนคนที่หนึ่งถึงคนที่สิบ

$$\overline{X} = \sum^{n} \frac{X_i}{n}$$

Y_i เป็นค่าคะแนนภาษาอังกฤษของเด็กนักเรียนคนที่หนึ่งถึงคนที่สิบด้วย

$$\overline{Y} = \sum^{n} \frac{Y_i}{n}$$

n เป็นจำนวนนักเรียนทั้งหมด s_x และ s_y เป็นค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของ X_i และ Y_i ตามลำดับ

เป็นที่น่าสังเกตว่าด้วยวิธีสถิติทั่วไปนี้เราจำเป็นต้องสมมุติว่าเราทราบฟังก์ชันของการกระจายของประชากรเพื่อที่จะประมาณค่าของ<u>ตัวกลาง</u>และค่าของ<u>การกระจาย</u>ได้

สำหรับในกรณีของสถิติที่เราไม่ทราบว่าการกระจายของประชากรจะเป็นแบบใด เช่น กรณีของสถิติที่ได้จากข้อมูลที่ได้รับการเรียงลำดับค่าตามขนาดความสำคัญแล้ว เราก็สามารถที่จะหาค่าความสัมพันธ์ดังกล่าวได้โดยเราหันมาสนใจในความสัมพันธ์ของลำดับค่าแทนค่าที่แท้จริงด้วยสูตรต่อไปนี้คือ

$$r = 1-6\sum_{i=1}^{n} d_i^2 / n(n^2-1) \qquad (4.4.2)$$

เมื่อ d_i คือความแตกต่างในตำแหน่งที่ที่เด็กแต่ละคนได้รับจากการสอบในวิชาทั้งสอง ฉะนั้นถ้าเราให้ตำแหน่งที่แก่นักเรียนในการสอบทั้งสองวิชาเราจะได้ข้อมูลที่แสดงตำแหน่งที่ตามคะแนนที่สอบได้ดังต่อไปนี้

นักเรียน

	ก	ข	ค	ง	จ	ฉ	ช	ซ	ญ	ฎ
คณิตศาสตร์	๗	๔	๕	๘	๒	๑๐	๑	๙	๖	๓
ภาษาอังกฤษ	๒	๗	๔	๓	๑	๑๐	๕	๖	๙	๘
d_i	๕	−๓	๑	๕	๑	๐	−๔	๓	−๓	−๕

เมื่อเราคำนวณค่าของ r ได้เราก็เทียบค่าจากตารางว่าเราจะตอบรับหรือปฏิเสธข้อสมมติของเราด้านที่ว่าการสอบของเด็กนักเรียนในสองวิชานั้นมีสหสัมพันธ์ต่อกันหรือไม่ ซึ่งอันนี้ย่อมขึ้นอยู่กับการตั้งสมมติฐานของเราเอง เช่น เราตั้งสมมติฐานไว้ว่า การสอบของเด็กนักเรียนในวิชาทั้งสองไม่มีสหสัมพันธ์ต่อกันเมื่อตรวจสอบจาก<u>ตารางสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์อันดับ</u> ขนาดตัวอย่าง ๑๐ ระดับความเชื่อมั่น ๙๕ % เราจะต้องตอบปฏิเสธข้อสมมติฐานถ้าค่าของ r ที่คำนวณได้จากสูตรเกินกว่า ๐.๕๖๔ ถ้าต่ำกว่านั้นก็จะต้อง

ตอบรับข้อสมมติฐานเป็นต้น จะเห็นได้ว่า การดูสหสัมพันธ์โดยการจัดลำดับนี้ จะสะดวกและรวดเร็วในการคำนวณกว่าวิธีแรกเป็นอย่างมาก

ข. <u>Runs Test</u> นับว่าเป็นการทดสอบที่มีประโยชน์มากวิธีหนึ่ง ใช้สำหรับทดสอบว่าตัวอย่างชุดหนึ่งชุดใดที่<u>ได้จากประชากรนั้นได้มาอย่างสุ่ม</u> หรือไม่ หรือใช้ทดสอบตัวอย่างแบบสุ่มสองชุดว่ามาจากประชากรที่มีการแจกแจงความถี่เดียวกันหรือไม่ เหตุที่ต้องมีการทดสอบดังกล่าวก็เพราะในการแก้ปัญหาทางสถิติใด ๆ ก็ตามเรามักจะสมมติว่า ตัวอย่างของเรานั้นได้มาอย่างสุ่ม แต่มีบางกรณีที่ตัวอย่างของเรามิได้อยู่ภายใต้สภาวะเดียวตลอดไป เช่น ราคาของสต็อคในตลาดหุ้นในช่วงระยะเวลาแตกต่างกันย่อมไม่คงที่ ถ้าราคาสต็อคเป็นตัวอย่างที่เราสนใจ การที่จะเลือกเอาราคาสต็อคในระยะเวลาหนึ่งเวลาใดขึ้นมาเราก็จะเกิดความไม่แน่ใจว่า ตัวอย่างของเราจะถูกเลือกอย่างสุ่มหรือไม่ สำหรับกรณีมีข้อข้องใจในเรื่องการสุ่มจึงได้มีการทดสอบ<u>ความสุ่ม</u>เกิดขึ้นด้วย

วิธีการในการทดสอบดังกล่าวนี้จะคล้ายกับการทดสอบโดยใช้เครื่องหมายตรงที่เราสนใจเครื่องหมายเช่นเดียวกันแต่จะต่างกันก็ตรงที่ว่าแทนที่เราจะสนใจในจำนวนเครื่องหมายเรากลับหันมาสนใจในการกระจายของเครื่องหมายเป็นสำคัญ คือหลังจากที่เราได้ตัวอย่างมาชุดหนึ่ง เราก็หาค่ามัธยฐานแล้วนำค่ามัธยฐานนี้ไปหักออกจากข้อมูลแต่ละตัวในข้อมูลตัวอย่างชุดนั้น ถ้าเกิดมีเครื่องหมายบวกหรือลบมากเกินไปเราก็ปฏิเสธสมมติฐานที่ว่าข้อมูลตัวอย่างนั้นได้มาอย่างสุ่มดังนี้

<u>ตัวอย่างที่ ๔.๔.๒</u> ในการเก็บข้อมูลปริมาณน้ำฝนที่ตกเฉลี่ยเป็นนิ้ว ณ หน่วยอุตุนิยมวิทยา จังหวัดชลบุรี ในช่วงระยะเวลา ๔๐ ปีที่ผ่านมาเป็นดังนี้

๒๐ ๑๑ ๑๖ ๘ ๙ ๓๓ ๑๔ ๑๗ ๑๒ ๑๖ ๒๓ ๑๙ ๑๒ ๑๘ ๒๑ ๑๙ ๑๑ ๙ ๑๕

๑๗ ๑๕ ๑๗ ๒๖ ๑๗ ๓๘ ๒๐ ๑๔ ๒๑ ๑๖ ๑[illegible] ๕ ๑๗ ๒๐ ๑๕ ๒๓ ๒๔ ๑๔ ๑๙

๑๓ ๑๖

มัธยฐานคือ $\frac{๑๖ + ๑๗}{๒}$ หรือ ๑๖.๕ เมื่อเอาไปหักจากข้อมูลแต่ละตัว จะได้เครื่องหมายดังนี้

\+ − − − − + − + − − + + − + + + − − − + − − + + + + − +
− − + + + − + + − + − −

จากเครื่องหมายที่ปรากฏในแต่ละกลุ่มที่เครื่องหมายเหมือนกันเราเรียกว่า "Runs" สิ่งที่เราให้ความสนใจมากก็คือ ความยาวของแต่ละช่วง Run ซึ่งจัดออกมาได้ดังนี้

๑ ๔ ๑ ๑ ๑ ๒ ๒ ๑ ๓ ๓ ๑ ๒ ๔ ๑ ๑ ๒ ๓ ๑ ๒ ๑ ๑ ๒

ถ้า u เป็นจำนวน Runs, u คือสิ่งที่เราสนใจที่จะทำการทดสอบต่อไป ให้ n_1 และ n_2 เป็นจำนวนเครื่องหมายบวกและลบตามลำดับ

เมื่อเราทราบค่าของ Runs หรือ u ค่าของเครื่องหมายบวกและเครื่องหมายลบเราก็สามารถที่จะหาค่า Critical values ได้จากตาราง Critical values for Total Runs เช่นจากตารางที่กล่าวถึงข้างต้นเมื่อ $n_1 = n_2 = 20$ ด้วยระดับความเชื่อมั่น ๙๕ % เราจะปฏิเสธข้อสมมติฐานที่ว่าการตกของฝนในช่วงระยะเวลา ๔๐ ปีที่ผ่านมาได้เกิดอย่างสุ่มเมื่อ u มีค่าน้อยกว่า ๑๔ หรือสูงกว่า ๒๘ เป็นต้น