บทที่ ๔

ข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

จากผลในบทที่ 2 และบทที่ 3 สรุปได้ว่า transformations ที่ใช้ในเรขาคณิตแบบยูคลิดบนพื้นราบแบ่งออกเป็น 3 แบบ แต่ละแบบแสดงได้ด้วยแมทริกซ์ที่อ้างอิงกับ Rectangular Cartesian Coordinate axes ที่คงที่ คือ

1. แบบ **Translation** ทั่วไป

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อจุด (x, y) ถูกส่งไปยังจุด (x, y) บนพื้นราบอันเดียวกันโดย transforming matrix

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

a และ b เป็นค่าทางแกน x และแกน y ที่จุดนั้นเคลื่อนที่ไป

2. แบบ Rotation ทั่วไป

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_0(1-\cos\theta) + y_0\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -x_0\sin\theta + y_0(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อจุด (x, y) ถูกส่งไปยังจุด (x', y') บนพื้นราบอันเดียวกัน โดย Transforming matrix

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_0(1-\cos\theta) + y_0\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -x_0\sin\theta + y_0(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(x_0, y_0) เป็นจุดหมุน และ θ เป็นมุมที่หมุนไป**ทวน**เข็มนาฬิกา วัดเป็นเรเดียน

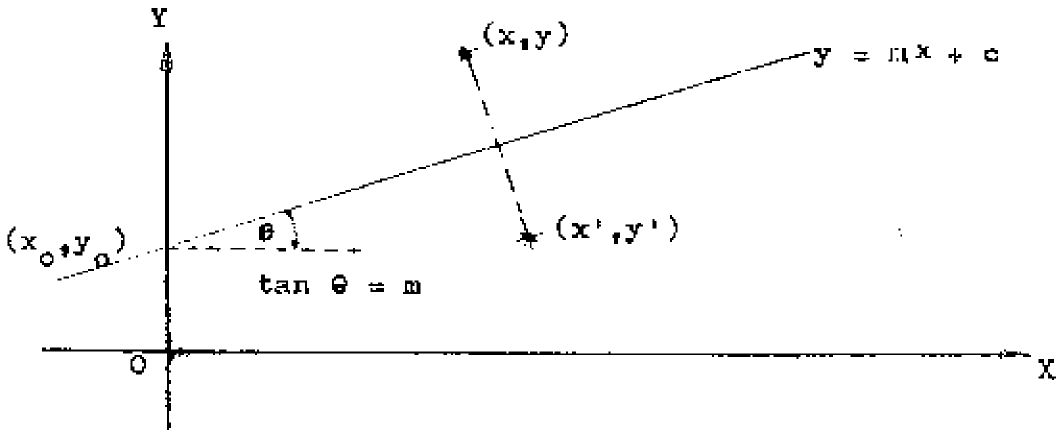
3. แบบ Reflection บนเส้นตรง $y = mx + c$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & x_0(1 - \cos 2\theta) - y_0 \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta & -x_0 \sin 2\theta + y_0(1 + \cos 2\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อจุด (x, y) ถูกส่งไปยังจุด (x', y') บนพื้นราบอันเดียวกัน โดย transforming

$$\text{matrix} \quad \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta & x_0(1 - \cos 2\theta) - y_0 \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta & -x_0 \sin 2\theta + y_0(1 + \cos 2\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

x_0 และ y_0 หาได้จากค่า c $\sin 2\theta$ และ $\cos 2\theta$ หาได้จากค่า m (ดูรูป)



นอกจากนี้ก็เป็นผสมระหว่างแบบที่ 1, 2 และ 3 เช่น แบบ Translation ทั่วไป ตามด้วยแบบ Rotation ทั่วไป

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & a\cos\theta - b\sin\theta + x_0(1 - \cos\theta) + y_0 \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & a\sin\theta + b\cos\theta - x_0 \sin\theta + y_0(1 - \cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

แบบ Translation ทั่วไป ตามด้วยแบบ Rotation ทั่วไป และแบบ Reflection บนเส้นตรง $y = mx + c$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & x_0(1-\cos\theta) - y_0\sin\theta + a\cos\theta + b\sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta & -x_0\sin\theta + y_0(1+\cos\theta) + a\sin\theta - b\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

เป็นต้น

set of translations, set of Rotations และ set of Reflection ดังกล่าว ต่างก็เป็นกรุป

เซทที่ประกอบด้วย element จาก Translation Group, Rotation Group, และ element ที่เกิดจากผลคูณของ element ในกรุปดังกล่าว จะประกอบกันเป็นกรุปใหญ่ ซึ่งเรียกว่า "Euclidean Group " element แต่ละตัวจะอยู่ในรูปแมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ -fc_{12} & fc_{11} & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ เมื่อ $c_{11}^2 + c_{12}^2 = 1$ และ $f^2 = 1$

Euclidean transformations มีคุณสมบัติที่เด่น คือเมื่อ transform แล้วไม่เปลี่ยนรูปและขนาด ของภาพเดิม จึงนำไปใช้ในบทพิสูจน์ทฤษฎีบท 4 บทของยูคลิด ที่กล่าวถึงกรณีที่ทำให้สามเหลี่ยม 2 รูปเท่ากันทุกประการ

สามเหลี่ยม 2 รูป ที่กำหนดจุดยอดทั้งสามของแต่ละรูปมาให้จะเท่ากันทุกประการ ถ้ามี transforming matrix (ซึ่งอยู่ใน Euclidean Group) ที่ส่งจุดยอดทั้งสามของสามเหลี่ยมรูปแรกไปยังจุดยอดทั้งสามของสามเหลี่ยมรูปที่สองได้พร้อมกันอย่างสมนัย หนึ่งต่อหนึ่ง ดังตัวอย่างที่ 1, 2 และ 3 ในบทที่ 3

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้คำนวณแต่แมทริกซ์ที่เป็นแบบ Translations แบบ Translation ตามด้วย Rotation แบบ Translation ตามด้วย Rotation และ Reflection จึงน่าจะมีการคำนวณต่อไปว่า แมทริกซ์แบบ Translation ตามด้วย Reflection แบบ Rotation ตามด้วย Translation และ Reflection ฯ ล ฯ จะมีลักษณะอย่างไรและเกี่ยวข้องกับแมทริกซ์ที่ได้คำนวณไว้แล้วอย่างไร ซึ่งเราอาจจะศึกษาถึงเรื่อง

Commutator ของแมทริกซ์ทั้งหลายในเรื่องนี้ได้วิทยานิพนธ์นี้ได้นำวิชาพีชคณิตสมัยใหม่มาใช้ในเรขาคณิตของยูคลิดบางส่วนเท่านั้น จึงน่าจะนำวิชานี้ไปใช้ในเรขาคณิตของยูคลิด ส่วนอื่น ๆ บ้าง