

การวิเคราะห์การไหลของโลหะที่เกิดจากการอัดรีดโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์



นายชัยฤทธิ์ อู่พิชิต

สถาบันวิทยบริการ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2543

ISBN 974-346-454-9

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ANALYSIS OF METAL FLOW UNDER EXTRUSION BY THE FINITE ELEMENT METHOD



Mr. Chaiyarit Oupichit

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Master of Engineering in Mechanical Engineering

Department of Mechanical Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2000

ISBN 974-346-454-9

หัวข้อวิทยานิพนธ์

การวิเคราะห์การไหลของโลหะที่เกิดจากการอัดรีดโดยระเบียบวิธี  
ไฟไนต์เอลิเมนต์

โดย

นายชัยฤทธิ์ อุพิชิต

ภาควิชา

วิศวกรรมเครื่องกล

อาจารย์ที่ปรึกษา

ศาสตราจารย์ ดร. ปราโมทย์ เดชะอำไพ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้รับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วน  
หนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาโท

..... คณะบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์  
(ศาสตราจารย์ ดร. สมศักดิ์ ปัญญาแก้ว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

..... ประธานกรรมการ  
(รองศาสตราจารย์ ดร. สมศักดิ์ ไชยะภินันท์)

..... อาจารย์ที่ปรึกษา  
(ศาสตราจารย์ ดร. ปราโมทย์ เดชะอำไพ)

..... กรรมการ  
(รองศาสตราจารย์ ดร. วิทยา ขงเจริญ)

..... กรรมการ  
(อาจารย์ ดร. สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์)

นายชัยฤทธิ์ อุ่พิชิต : การวิเคราะห์การไหลของโลหะที่เกิดจากการอัดรีดโดยระเบียบวิธีไฟไนต์  
เอลิเมนต์. (ANALYSIS OF METAL FLOW UNDER EXTRUSION BY THE FINITE  
ELEMENT METHOD) อ. ที่ปรึกษา : ศาสตราจารย์ ดร. ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 196 หน้า.  
ISBN 974-346-454-9.

วิทยานิพนธ์นี้ได้แสดงขั้นตอนการแก้ปัญหาการไหลของโลหะที่เกิดจากการอัดรีดใน 2 มิติ ซึ่ง  
เป็นการไหลแบบนอนนิวโทเนียน โดยการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และพิจารณารวมถึงผล  
การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในระบบที่เกิดจากการเปลี่ยนรูปโลหะ สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่  
สอดคล้องกับปัญหาได้ถูกประดิษฐ์ขึ้นจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่เกี่ยวข้อง โดยการประยุกต์ระเบียบ  
วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตค้ำแบบกาลอร์คิน สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้นได้นำมาใช้ประดิษฐ์  
โปรแกรมคอมพิวเตอร์ไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สามารถใช้ได้บนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลทั่วไป และได้  
ทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมโดยเปรียบเทียบกับผลจากทฤษฎีการวิเคราะห์การเปลี่ยน  
รูปของโลหะรวมทั้งข้อมูลการทดลอง

โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นได้นำมาใช้วิเคราะห์ปัญหาการอัดรีดในลักษณะต่างๆ เพื่อศึกษา  
พฤติกรรมการไหลของโลหะผ่านแม่พิมพ์ รวมทั้งสามารถนำไปใช้วิเคราะห์ปัญหาการรีดโลหะแผ่น  
โดยได้ทำการตรวจสอบผลโดยการเปรียบเทียบกับผลจากทฤษฎีการวิเคราะห์การรีดโลหะแผ่นรวมทั้ง  
เปรียบเทียบกับข้อมูลการทดลองก่อนที่จะนำมาใช้ศึกษาความสัมพันธ์ของความเร็ว ความดันและ  
อุณหภูมิที่มีต่อพฤติกรรมการไหลในปัญหาการรีดโลหะแผ่น แรงรีดและแรงบิดรีดสามารถคำนวณได้  
จากโปรแกรมย่อยที่ประดิษฐ์ขึ้น เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติได้ถูกนำมาใช้เพื่อที่จะ  
ปรับปรุงคุณภาพของผลเฉลยและประสิทธิภาพในการคำนวณให้ดีที่สุด

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล  
สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล  
ปีการศึกษา 2543

ลายมือชื่อนิสิต .....  
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา .....  
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม .....

##4170282321 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING

KEY WORD : FINITE ELEMENT, METAL FLOW, EXTRUSION

CHAIYARIT OUPICHIT : ANALYSIS OF METAL FLOW UNDER EXTRUSION  
BY THE FINITE ELEMENT METHOD. THESIS ADVISOR: PROF. PRAMOTE  
DECHAUMPHAI, Ph.D., 196 pp. ISBN 974-346-454-9.

This thesis presents a finite element computational method for two-dimensional metal flow under extrusion in which metal flow has the non-Newtonian fluid behavior condition. The thermal effect from metal deformation and internal heat flow is coupled in the system. Finite element equations corresponding to the problem were derived from the related governing differential equations using the Galerkin weighted residuals method. These derived finite element equations were then used in the development of the computer program that can be executed on the standard personal computers. The program was verified by comparison with the results from the metal deformation analysis theory and experimental data.

Various extrusion problems were carried out using the developed programs for predicting detailed flow behavior. The program was also used in the analysis of sheet metal rolling problems. Results were verified with solutions from theory of metal rolling as well as experimental data. The rolling force and rolling torque were computed and the flow phenomena consisting of velocity, pressure and temperature were presented. The adaptive remeshing technique was also applied for improving result and effective computation.

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Department Mechanical Engineering

Field of study Mechanical Engineering

Academic year 2000

Student's signature .....

Advisor's signature .....

Co-advisor's signature .....

## กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงลงได้ด้วยความช่วยเหลืออย่างค้ำจุนของ ศาสตราจารย์ ดร. ปราโมทย์ เฉชะอำไพ อาจารย์ที่ปรึกษาของผู้วิจัย ท่านได้อุทิศเวลาในการอบรมสั่งสอนทั้งในด้านของความรู้ทางวิชาการที่เกี่ยวข้องในการดำเนินงานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้รวมถึงปรัชญาในการดำเนินชีวิต ซึ่งเป็นเหมือนกระจกเงาสะท้อนให้ผู้วิจัยได้ปรับปรุงตัวในส่วนที่ยังบกพร่อง อีกทั้งทำให้ผู้วิจัยได้เปิดโลกทัศน์ในศาสตร์ของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งเป็นประโยชน์อย่างมากในการประกอบวิชาชีพในอนาคต ผู้วิจัยจึงใคร่ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ปราโมทย์เป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์คณะกรรมการทุกท่าน ซึ่งประกอบด้วย รองศาสตราจารย์ ดร. สมศักดิ์ ไชยะภินันท์ รองศาสตราจารย์ ดร.วิทยา ยงเจริญ และ อาจารย์ ดร.สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์ สำหรับคำแนะนำในแนวทางการดำเนินงานวิทยานิพนธ์ ซึ่งก่อให้เกิดประโยชน์อย่างมากในการพัฒนางานวิจัยให้ดียิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณ คุณชาญชัย สมสุวรรณชัย ผู้จัดการทั่วไปบริษัทแฮมเปียนแมชชีนทูลส์ (ไทยแลนด์) จำกัด และ Dr. Steve Hsieh ผู้จัดการทั่วไปบริษัท MSC Software ประเทศไต้หวัน ที่เปิดโอกาสให้ผู้วิจัยได้สัมผัสกับเทคโนโลยีไฟไนต์เอลิเมนต์ทั้งในและต่างประเทศ ซึ่งเป็นประสบการณ์ที่สามารถนำมาใช้ในการดำเนินงานวิทยานิพนธ์ได้โดยตรง อีกทั้งเข้าใจในความมุ่งมั่นและตั้งใจของผู้วิจัยและได้ให้การสนับสนุนด้วยดีตลอดมา

ขอขอบพระคุณ พี่วีโรจน์ ลิ่มตระการ คุณสุพัฒน์พงศ์ ลิกขาบัณฑิต ตลอดจนสมาชิกในห้องวิจัยกลศาสตร์การคำนวณทุกท่าน สำหรับกำลังใจและคำแนะนำที่เป็นประโยชน์ตลอดระยะเวลาดำเนินงานวิทยานิพนธ์

ท้ายสุดนี้ ประโยชน์และคุณค่าอันใดที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ขอมอบเป็นกตัญญูตราบเท่าที่บิดามารดา ครูอาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

ชัยฤทธิ์ อุพิชิต

# สารบัญ

|   | หน้า      |
|---|-----------|
| บทคัดย่อภาษาไทย .....   | ง         |
| บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....   | จ         |
| กิตติกรรมประกาศ .....   | ฉ         |
| สารบัญ.....   | ช         |
| สารบัญตาราง.....  | ฅ         |
| สารบัญภาพ.....  | ฉ         |
| คำอธิบายสัญลักษณ์.....  | ณ         |
| <br>  |           |
| <b>บทที่ 1 บทนำ.....</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1 ความสำคัญและความเป็นมาของวิทยานิพนธ์.....                     | 1         |
| 1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์.....                               | 4         |
| 1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์.....                                     | 5         |
| 1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน.....                                      | 5         |
| 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....                                | 6         |
| <br>  |           |
| <b>บทที่ 2 สมการเชิงอนุพันธ์การไหลของโลหะ .....</b>               | <b>7</b>  |
| 2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล.....                       | 7         |
| 2.2 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม.....                  | 9         |
| 2.3 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงาน.....                   | 12        |
| <br>  |           |
| <b>บทที่ 3 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลของโลหะ.....</b> | <b>22</b> |
| 3.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลของโลหะ.....             | 25        |
| 3.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาในรูปแบบเทนเซอร์.....              | 25        |
| 3.1.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม.....        | 26        |
| 3.1.3 การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์.....                           | 28        |
| 3.2 การสร้างเอลิเมนต์เมตริกซ์.....                                | 32        |
| 3.3 กระบวนการวิธีในการคำนวณหาคำตอบ.....                           | 41        |
| 3.3.1 กรณีที่ไม่คำนึงถึงความร้อนในระบบ.....                       | 42        |



|                |   |           |
|----------------|---|-----------|
| 3.3.2          | กรณีที่กำลังถึงความร้อนในระบบ .....                                     | 43        |
| <b>บทที่ 4</b> | <b>โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลของโลหะ .....</b>             | <b>46</b> |
| 4.1            | โปรแกรม MTFlow(v1) .....  | 46        |
| 4.1.1          | ขั้นตอนการคำนวณ .....   | 46        |
| 4.1.2          | รายละเอียดของโปรแกรม .....  | 48        |
| 4.1.3          | รายละเอียดไฟล์ข้อมูลนำเข้า .....  | 49        |
| 4.1.4          | ไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ .....   | 51        |
| 4.2            | โปรแกรม MTFlow(v2) .....  | 52        |
| 4.2.1          | ขั้นตอนการคำนวณ .....   | 52        |
| 4.2.2          | รายละเอียดของโปรแกรม .....  | 53        |
| 4.2.3          | รายละเอียดไฟล์ข้อมูลนำเข้า .....  | 53        |
| 4.2.4          | ไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ .....   | 56        |
| <b>บทที่ 5</b> | <b>การวิเคราะห์การอัดรีด 2 มิติ .....</b>                               | <b>58</b> |
| 5.1            | การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม .....                                   | 61        |
| 5.1.1          | เปรียบเทียบกับทฤษฎีสลิปไลน์ .....                                       | 61        |
| 5.1.2          | เปรียบเทียบกับผลการทดลอง .....  | 65        |
| 5.2            | การวิเคราะห์ผลจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในโดยโปรแกรม MTFlow(v2) ..... | 67        |
| 5.2.1          | ผลการอัดรีดผ่านแม่พิมพ์ $R = 0.5$ โดยโปรแกรม MTFlow(v2) .....           | 67        |
| 5.2.2          | ผลของความเร็วต่อการกระจายอุณหภูมิสัมพัทธ์และแรงดันอัดรีด .....          | 69        |
| 5.2.3          | ผลของอัตราส่วนการลดขนาดต่อการกระจายอุณหภูมิและแรงดันอัดรีด .....        | 71        |
| 5.3            | ผลของแรงเสียดทานที่มีต่อการอัดรีด .....                                 | 76        |
| 5.4            | การอัดรีดแบบลดระดับ .....   | 79        |
| 5.5            | การอัดรีดแบบทางออกหลายทาง .....   | 81        |
| <b>บทที่ 6</b> | <b>การรีดโลหะแผ่น (Sheet Rolling) .....</b>                             | <b>84</b> |
| 6.1            | ลักษณะทางกายภาพของปัญหาการรีดโลหะแผ่น .....                             | 85        |
| 6.2            | การหาแรงรีดและแรงบิดรีด (Rolling Force and Torque) .....                | 87        |
| 6.3            | การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมในกรณีการรีดโลหะแผ่น .....               | 88        |



|  |            |
|--|------------|
| 6.3.1 การตรวจสอบความถูกต้องกับทฤษฎีของ Alexander และ Ford.....                                       | 89         |
| 6.3.2 การตรวจสอบความถูกต้องกับผลการทดลอง.....  | 91         |
| 6.3.3 การตรวจสอบความถูกต้องของผลอุณหภูมิ.....  | 95         |
| 6.4 ผลของความเร็วลูกรีดที่มีต่อการกระจายอุณหภูมิ.....  | 98         |
| <b>บทที่ 7 การปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ.....</b>   | <b>100</b> |
| 7.1 หลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ.....  | 102        |
| 7.2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับประยุกต์การปรับขนาดเอลิเมนต์.....  | 109        |
| 7.3 ขั้นตอนในการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ.....                                  | 109        |
| 7.4 ตัวอย่างการวิเคราะห์การอัดรีดที่มี $R=0.5$ โดยใช้เทคนิคการปรับขนาด<br>เอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ..... | 110        |
| 7.5 การวิเคราะห์การรีดโลหะแผ่น โดยใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ.....                     | 120        |
| <b>บทที่ 8 บทสรุป ปัญหาที่พบและข้อเสนอแนะ.....</b>   | <b>123</b> |
| 8.1 บทสรุป.....  | 123        |
| 8.2 ปัญหาที่พบ.....  | 125        |
| 8.3 ข้อเสนอแนะ.....  | 125        |
| <b>รายการอ้างอิง.....</b>  | <b>127</b> |
| <b>ภาคผนวก ก โปรแกรมคอมพิวเตอร์ MTFlow(v1).....</b>  | <b>131</b> |
| ก.1 รายละเอียดโปรแกรมคอมพิวเตอร์.....  | 131        |
| ก.2 ตัวอย่างปัญหา.....   | 145        |
| <b>ภาคผนวก ข โปรแกรมคอมพิวเตอร์ MTFlow(v2).....</b>  | <b>154</b> |
| ข.1 รายละเอียดโปรแกรมคอมพิวเตอร์.....  | 154        |
| ข.2 ตัวอย่างปัญหา.....   | 174        |
| <b>ภาคผนวก ค โปรแกรมย่อยสำหรับคำนวณแรงรีดและแรงบิดรีด.....</b>                                       | <b>183</b> |
| <b>ภาคผนวก ง ทฤษฎีสถิติปัลไลน์สำหรับปัญหาความเครียดในระนาบ.....</b>                                  | <b>186</b> |

|   |     |
|---|-----|
| ง.1 ทฤษฎีพื้นฐานในการสร้างสนามสลิปไลน์.....   | 188 |
| ง.2 การสร้างเส้นสลิปไลน์.....   | 191 |
| ง.3 ตัวอย่างเส้นสลิปไลน์และการหาแรงดันอัดรีดของปัญหาการอัดรีดที่มี<br>อัตราส่วนการลดขนาดมากกว่า 0.5 ผนังไม่มีความเสียดทาน | 193 |
| ประวัติผู้วิจัย.....  | 196 |



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## สารบัญตาราง

|  | หน้า |
|--|------|
| ตารางที่ 5.1 ผลของแรงดันอัดรีดที่ความเร็วต่างๆ   | 64   |
| ตารางที่ 5.2 ผลของแรงดันอัดรีดที่อัตราส่วนการลดขนาดต่างๆ   | 64   |
| ตารางที่ 5.3 ผลที่ได้จากโปรแกรม MTFlow(v1) เปรียบเทียบกับผลการทดลอง                                      | 66   |
| ตารางที่ 5.4 ผลของแรงดันอัดรีดที่ความเร็วต่างๆ   | 71   |
| ตารางที่ 5.5 ผลการเปรียบเทียบแรงดันอัดรีดของโปรแกรม MTFlow(v1) และ MTFlow(v2) ที่อัตราส่วนการลดขนาดต่างๆ | 76   |
| ตารางที่ 5.6 ผลแรงดันอัดรีดที่สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานต่างๆ   | 78   |
| ตารางที่ 6.1 ผลการเปรียบเทียบแรงรีดและแรงบิดรีดโดยโปรแกรม MTFlow(v1)                                     | 90   |
| ตารางที่ 6.2 แสดงผลการคำนวณแรงรีดและแรงบิดรีดที่อัตราส่วนการลดขนาดต่างๆ                                  | 94   |
| ตารางที่ 6.3 แสดงผลการเปรียบเทียบแรงรีดและแรงบิดรีดที่อุณหภูมิเริ่มต้น 400 K และ 700 K                   | 97   |



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## สารบัญภาพ

|             | หน้า  |    |
|-------------|---|----|
| รูปที่ 1.1  | ภาพจำลองการอัดรีดโลหะผ่านแม่พิมพ์ลดขนาด   | 1  |
| รูปที่ 2.1  | พลั๊กซ์ของมวลที่เกิดขึ้นกับอนุภาคขนาดเล็กบนโดเมนการไหล  | 8  |
| รูปที่ 2.2  | ส่วนประกอบของแรงตามแนวแกน $x$ ที่เกิดขึ้นกับอนุภาคขนาดเล็กบนโดเมนการไหล                         | 9  |
| รูปที่ 2.3  | งานที่เกิดขึ้นและปริมาณพลั๊กซ์ความร้อนตามแนวแกน $x$ ที่เกิดขึ้นกับอนุภาคขนาดเล็กบนโดเมนการไหล   | 13 |
| รูปที่ 3.1  | การแบ่งขอบเขตของปัญหาให้เป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ  | 22 |
| รูปที่ 3.2  | เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 3 จุดต่อ   | 23 |
| รูปที่ 3.3  | เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อสำหรับตัวแปรความเร็วและอุณหภูมิและสามจุดต่อมุมสำหรับตัวแปรความดัน | 26 |
| รูปที่ 3.4  | เงื่อนไขขอบเขตของโดเมนปัญหา   | 29 |
| รูปที่ 3.5  | แรงดันกระทำที่ขอบของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม   | 38 |
| รูปที่ 4.1  | แผนภูมิการทำงานของโปรแกรม MTFlow(v1)  | 48 |
| รูปที่ 4.2  | ลักษณะการจัดเรียงหมายเลขจุดต่อบนเอลิเมนต์   | 51 |
| รูปที่ 4.3  | แผนภูมิการทำงานของโปรแกรม MTFlow(v2)  | 54 |
| รูปที่ 5.1  | ภาพถ่ายโลหะอัดรีดที่ระยะต่างๆของการเคลื่อนตัวผ่านแม่พิมพ์                                       | 59 |
| รูปที่ 5.2  | เส้นโค้งแสดงความสัมพันธ์ของแรงดันอัดรีดและระยะการเคลื่อนที่ของแท่งอัด                           | 60 |
| รูปที่ 5.3  | อัตราส่วนการลดขนาดของปัญหาการอัดรีด   | 61 |
| รูปที่ 5.4  | แบบจำลองของปัญหาสำหรับเปรียบเทียบผลการคำนวณ   | 61 |
| รูปที่ 5.5  | แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของการอัดรีดที่มี $R = 0.5$  | 62 |
| รูปที่ 5.6  | กราฟแสดงการลู่เข้าในแต่ละรอบของผลความเร็วและความดัน   | 62 |
| รูปที่ 5.7  | ผลการกระจายและผลเวกเตอร์คำตอบของปัญหาการอัดรีดที่มี $R = 0.5$                                   | 63 |
| รูปที่ 5.8  | กราฟเปรียบเทียบผลระหว่างโปรแกรม MTFlow(v1) กับทฤษฎีสลิปไลน์                                     | 65 |
| รูปที่ 5.9  | กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลจากโปรแกรม MTFlow(v1) และผลการทดลอง                                     | 66 |
| รูปที่ 5.10 | ผลการกระจายของคำตอบในการอัดรีด $R = 0.5$ โดยโปรแกรม MTFlow(v2)                                  | 68 |
| รูปที่ 5.11 | ผลการกระจายอุณหภูมิสัมพัทธ์ที่ความเร็วอัดรีดต่างๆโดยโปรแกรม MTFlow(v2)                          | 70 |
| รูปที่ 5.12 | การกระจายอุณหภูมิสัมพัทธ์ตามแนวแกนตัด A-A ที่ความเร็วต่างๆ                                      | 70 |

|             |  |    |
|-------------|--|----|
| รูปที่ 5.13 | ผลการวิเคราะห์การอัดรีดที่มีอัตราส่วนการลดขนาด 0.3<br>โดยโปรแกรม MTFflow(v2) | 72 |
| รูปที่ 5.14 | ผลการวิเคราะห์การอัดรีดที่มีอัตราส่วนการลดขนาด 0.7<br>โดยโปรแกรม MTFflow(v2) | 73 |
| รูปที่ 5.15 | ผลการวิเคราะห์การอัดรีดที่มีอัตราส่วนการลดขนาด 0.8<br>โดยโปรแกรม MTFflow(v2) | 74 |
| รูปที่ 5.16 | ผลการวิเคราะห์การอัดรีดที่มีอัตราส่วนการลดขนาด 0.9<br>โดยโปรแกรม MTFflow(v2) | 75 |
| รูปที่ 5.17 | แรงเสียดทานที่เกิดบนขอบของเอลิเมนต์  | 77 |
| รูปที่ 5.18 | ความเค้นเฉือนสูงสุดที่เกิดบนผิวในกรณีที่เกิดแรงเสียดทานสูงที่สุด             | 77 |
| รูปที่ 5.19 | กราฟแสดงการกระจายความเร็วตามแนว B-B ที่สัมพันธ์กับแรงเสียดทานต่างๆ           | 78 |
| รูปที่ 5.20 | แบบจำลองการอัดรีดลดระดับ   | 79 |
| รูปที่ 5.21 | แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของการอัดรีดลดระดับ                                   | 80 |
| รูปที่ 5.22 | ผลการคำนวณปัญหาการอัดรีดลดระดับโดยโปรแกรม MTFflow(v2)                        | 81 |
| รูปที่ 5.23 | แบบจำลองการอัดรีดแบบทางออกหลายทาง  | 82 |
| รูปที่ 5.24 | แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของการอัดรีดแบบทางออกหลายทาง                          | 82 |
| รูปที่ 5.25 | ผลการคำนวณปัญหาการอัดรีดแบบทางออกหลายทางโดยโปรแกรม MTFflow(v2)               | 83 |
| รูปที่ 6.1  | ลักษณะแบบจำลองการรีดโลหะแผ่น   | 85 |
| รูปที่ 6.2  | การกระจายของแรงดันรีดและแรงรีด   | 87 |
| รูปที่ 6.3  | แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของตัวอย่างการรีดโลหะแผ่น                             | 89 |
| รูปที่ 6.4  | ผลการคำนวณตัวอย่างการรีดโลหะแผ่นโดยโปรแกรม MTFflow(v1)                       | 90 |
| รูปที่ 6.5  | แบบจำลองและผลการวิเคราะห์การรีดที่อัตราส่วนการลดขนาด 0.1                     | 91 |
| รูปที่ 6.6  | แบบจำลองและผลการวิเคราะห์การรีดที่อัตราส่วนการลดขนาด 0.2                     | 92 |
| รูปที่ 6.7  | แบบจำลองและผลการวิเคราะห์การรีดที่อัตราส่วนการลดขนาด 0.3                     | 92 |
| รูปที่ 6.8  | แบบจำลองและผลการวิเคราะห์การรีดที่อัตราส่วนการลดขนาด 0.4                     | 93 |
| รูปที่ 6.9  | แบบจำลองและผลการวิเคราะห์การรีดที่อัตราส่วนการลดขนาด 0.5                     | 93 |
| รูปที่ 6.10 | กราฟเปรียบเทียบผลแรงรีดและแรงบิดรีดจากโปรแกรม MTFflow(v1)<br>และผลการทดลอง   | 94 |
| รูปที่ 6.11 | แบบจำลองของปัญหาการรีดโลหะ $R = 0.254$                                       | 95 |
| รูปที่ 6.12 | แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการรีดโลหะ $R = 0.254$                        | 95 |

|             |   |     |
|-------------|---|-----|
| รูปที่ 6.13 | ผลการกระจายอุณหภูมิจากรายการอ้างอิง [17]  | 96  |
| รูปที่ 6.14 | ผลการกระจายอุณหภูมิโดยโปรแกรม MTFflow(v2)                                       | 97  |
| รูปที่ 6.15 | ผลการกระจายความดันโดยโปรแกรม MTFflow(v2)  | 97  |
| รูปที่ 6.16 | ผลการกระจายอุณหภูมิที่ความเร็ววัดต่างๆ  | 99  |
| รูปที่ 7.1  | การกำหนดขนาดเอลิเมนต์แบบต่างๆ   | 101 |
| รูปที่ 7.2  | ความเค้นที่ตำแหน่งใดๆเปรียบเทียบกับความเค้นที่แนวแกนหลัก                        | 103 |
| รูปที่ 7.3  | การเรียงตัวของเอลิเมนต์รอบจุดต่อ i  | 104 |
| รูปที่ 7.4  | แบบจำลองการอัดรีดที่มีอัตราส่วนการลดขนาด 0.5                                    | 110 |
| รูปที่ 7.5  | แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น   | 113 |
| รูปที่ 7.6  | ผลการกระจายความเร็วของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น                           | 114 |
| รูปที่ 7.7  | แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ในการปรับเปลี่ยนขนาดครั้งที่ 1                           | 117 |
| รูปที่ 7.8  | ผลการกระจายความเร็วที่แบบจำลองการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1                    | 117 |
| รูปที่ 7.9  | แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ในการปรับเปลี่ยนขนาดครั้งที่ 2                           | 118 |
| รูปที่ 7.10 | ผลการกระจายความเร็วที่แบบจำลองการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2                    | 118 |
| รูปที่ 7.11 | แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ในการปรับเปลี่ยนขนาดครั้งที่ 3                           | 119 |
| รูปที่ 7.12 | ผลการกระจายความเร็วที่แบบจำลองการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 3                    | 119 |
| รูปที่ 7.13 | ผลการกระจายความเร็วของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ในรูปที่ 5.5                       | 120 |
| รูปที่ 7.14 | ผลการกระจายความเร็วและแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่การปรับขนาดครั้งที่ต่างๆ        | 121 |
| รูปที่ 7.15 | ผลการกระจายความเร็วและแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์แบบสมมาตร                          | 121 |
| รูปที่ ก.1  | แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตสำหรับตัวอย่างการใช้โปรแกรม MTFflow(v1) | 145 |
| รูปที่ ข.1  | แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขตสำหรับตัวอย่างการใช้โปรแกรม MTFflow(v2) | 174 |
| รูปที่ ง.1  | สนามสลิปไลน์สำหรับปัญหาการกดอัดโลหะแผ่น   | 186 |
| รูปที่ ง.2  | วงกลมของมอห์ร์สำหรับความเค้นในบริเวณเส้นสลิปไลน์ของปัญหาการกดอัดโลหะแผ่น        | 187 |
| รูปที่ ง.3  | วงกลมของมอห์ร์แสดงส่วนประกอบของความเค้นในทิศทางต่างๆ                            | 188 |
| รูปที่ ง.4  | ทิศทางของความเค้นและแนวแกนต่างๆบนระนาบ  | 189 |
| รูปที่ ง.5  | ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นสลิปไลน์สองชุดที่ตัดกัน                                  | 191 |
| รูปที่ ง.6  | ทิศทางของความเค้นหลักและเส้นสลิปไลน์บริเวณพื้นผิวลื่น                           | 191 |

|            |  |     |
|------------|--|-----|
| รูปที่ ง.7 | ตัวอย่างสนามของเส้นสลิปไลน์ที่เกิดในลักษณะศูนย์กลางรูปใบพัด                | 192 |
| รูปที่ ง.8 | เส้นสลิปไลน์ของปัญหาการอัดรีดแบบผนังถื่นและมีอัตราส่วนการลดขนาดมากกว่า 0.5 | 194 |
| รูปที่ ง.9 | เส้นสลิปไลน์ของปัญหาการอัดรีดแบบผนังถื่นและมีอัตราส่วนการลดขนาดเท่ากับ 0.5 | 194 |



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



## คำอธิบายสัญลักษณ์

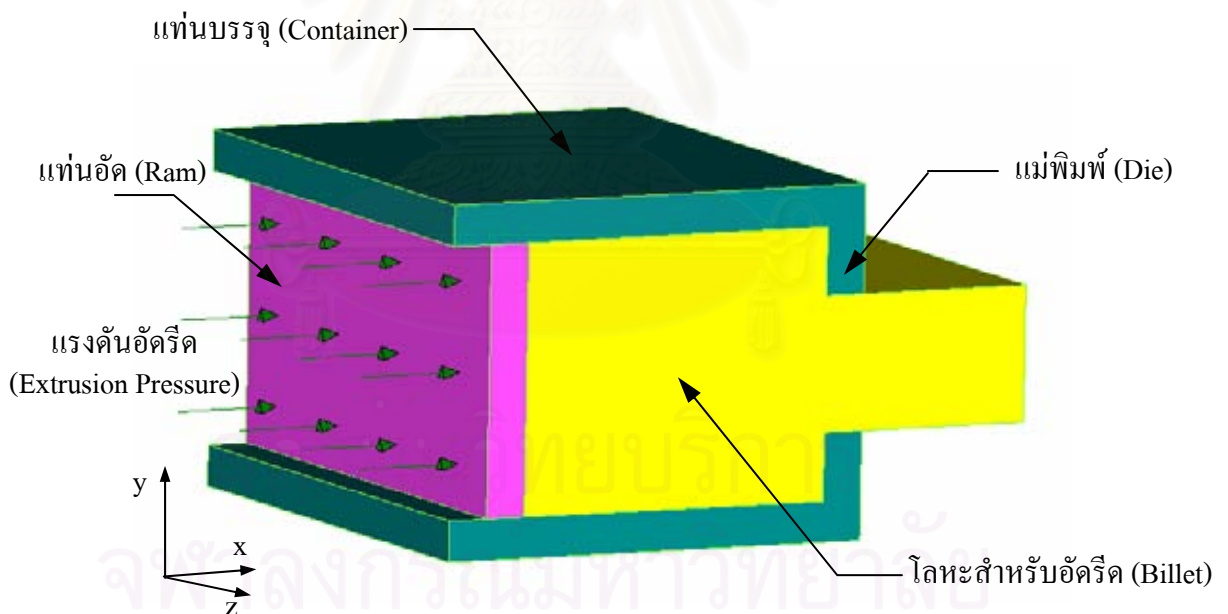
|                       |  |
|-----------------------|--|
| [A]                   | เมตริกซ์คงที่เชิงความเร็ว  |
| [B]                   | เมตริกซ์คงที่เชิงอนุพันธ์ x                                      |
| [C]                   | เมตริกซ์คงที่เชิงอนุพันธ์ y                                      |
| c                     | ความจุความร้อนจำเพาะ   |
| D/Dt                  | ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์  |
| [H]                   | เมตริกซ์ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สำหรับความดัน             |
| $h_o$                 | ความหนาโลหะทางเข้าลูกกรีด  |
| $h_f$                 | ความหนาโลหะทางออกลูกกรีด   |
| k                     | สัมประสิทธิ์การนำความร้อน  |
| $L_p$                 | ความยาวฉายของส่วนโค้งสัมผัสของลูกกรีดบนแกน x                     |
| $M_t$                 | แรงบิดรีด  |
| [N]                   | เมตริกซ์ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สำหรับความเร็วและอุณหภูมิ |
| P                     | แรงดันอัดรีด(ปัญหาการอัดรีด) , แรงรีด(ปัญหาการรีด)               |
| p                     | ความดัน  |
| Q                     | พลังงานความร้อนที่ก่อกำเนิดขึ้นเอง                               |
| q                     | ปริมาตรฟลักซ์ความร้อน  |
| R                     | อัตราส่วนการลดขนาด   |
| T                     | อุณหภูมิ   |
| u                     | ความเร็วตามแนวแกน x  |
| v                     | ความเร็วตามแนวแกน y  |
| $W_i$                 | ฟังก์ชันน้ำหนัก  |
| $\dot{\epsilon}_{ij}$ | อัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียด                                    |
| $\dot{\epsilon}$      | อัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดประสิทธิผล                          |
| $\eta$                | สัมประสิทธิ์ความเสียดทาน   |
| $\rho$                | ความหนาแน่น  |
| $\sigma$              | ความเค้นตั้งฉาก  |
| $\sigma_{yield}$      | ความเค้นคราก   |
| $\mu$                 | ความหนืด   |
| $\tau$                | ความเค้นเฉือน  |
| $\tau_{yield}$        | ความเค้นเฉือนคราก  |

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความสำคัญและความเป็นมาของวิทยานิพนธ์

การขึ้นรูปโลหะ (Metal Forming) ถือเป็นขั้นตอนที่สำคัญในกระบวนการผลิตผลิตภัณฑ์ต่างๆที่มีโลหะเป็นส่วนประกอบ การขึ้นรูปมีวัตถุประสงค์เพื่อที่จะเปลี่ยนรูปของโลหะต้นแบบให้มีรูปร่างลักษณะตามที่ต้องการเพื่อที่จะนำไปประกอบเป็นส่วนหนึ่งของผลิตภัณฑ์ หรือนำไปใช้งานในรูปแบบอื่นๆตามแต่ที่ต้องการ การขึ้นรูปโลหะมีอยู่หลากหลายวิธี เช่น การปั๊มขึ้นรูป (Stamping) การอัดขึ้นรูป (Forging) การรีดขึ้นรูป (Rolling) เป็นต้น การอัดรีด (Extrusion) ก็เป็นอีกวิธีหนึ่งในการเปลี่ยนรูปโลหะซึ่งการอัดรีดนี้ก็สามารถแยกออกได้หลายลักษณะตามแต่ลักษณะของผลิตภัณฑ์ที่ต้องการจากการอัดรีด ตัวอย่างผลิตภัณฑ์ที่เห็นได้ชัดของการขึ้นรูปวิธีนี้ก็คือคานที่มีหน้าตัดต่างๆ



รูปที่ 1.1 ภาพจำลองการอัดรีดโลหะผ่านแม่พิมพ์ลดขนาด

การอัดรีดเพื่อลดขนาดความหนาของโลหะก็เป็นอีกลักษณะหนึ่ง มีวัตถุประสงค์เพื่อที่จะลดขนาดความหนาของโลหะก่อนที่จะนำเข้าไปสู่กระบวนการผลิตอื่นๆต่อไป ในการอัดรีดเพื่อลดขนาดความหนานี้ทำได้โดยการออกแรงอัดผ่านแท่นอัด (Ram) เพื่อที่จะให้โลหะสำหรับอัดรีด (Billet) ที่บรรจุอยู่ในแท่นบรรจุ (Container) ไหลผ่านแม่พิมพ์ (Die) ที่ทำจากวัสดุที่มีความแข็งแรง

เป็นพิเศษ เพื่อให้ได้ผลิตภัณฑ์ที่มีขนาดความหนาที่ลดลงตามขนาดที่ต้องการดังรูปที่ 1.1 ในกระบวนการนี้มีหลายสิ่งหลายอย่างเกิดขึ้นกับระบบ กล่าวคือโลหะอัดรีดจะถูกอัดจนกระทั่งเปลี่ยนรูปในเชิงพลาสติก (Plastic Deformation) โดยการเปลี่ยนรูปของโลหะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ อีกทั้งที่ผิวสัมผัสของโลหะอัดรีดจะมีแรงดันเกิดขึ้นซึ่งผลที่ตามมาคือจะเกิดแรงเสียดทานในทิศทางตรงข้ามกับทิศทางการไหลของโลหะ

คำถามที่สำคัญที่สุดที่เกิดขึ้นกับวิศวกรผู้ออกแบบก็คือ ต้องใช้แรงดันเท่าไรจึงเพียงพอที่จะทำให้โลหะไหลผ่านแม่พิมพ์ด้วยความเร็วที่ต้องการ ซึ่งในการที่จะตอบคำถามข้อนี้จะต้องทำความเข้าใจอย่างถ่องแท้ถึงพฤติกรรมโดยธรรมชาติของโลหะจึงจะทำให้ทราบว่าสาเหตุใดบ้างที่จะทำให้แรงดันที่ใช้เปลี่ยนแปลงไป คุณสมบัติของวัสดุเป็นปัจจัยหลักปัจจัยหนึ่งที่ส่งผลให้แรงดันอัดรีดที่ใช้เปลี่ยนแปลงไป ซึ่งคุณสมบัติของวัสดุที่สำคัญสำหรับปัญหานี้ก็คือค่าความเค้นครากของวัสดุ ดังนั้นหากค่าความเค้นครากเปลี่ยนแปลงไปจะส่งผลโดยตรงต่อแรงดันอัดรีด และหากพิจารณาปัจจัยที่ทำให้ค่าความเค้นครากเปลี่ยนแปลงไป จะพบว่ามียูสามปัจจัยด้วยกันก็คือ อุณหภูมิ ความเครียด (Strain) และอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียด (Strain Rate)

ลักษณะทางกายภาพสำหรับการอัดรีดเป็นสิ่งที่จะต้องศึกษาเพื่อที่จะเข้าใจพฤติกรรมของโลหะเมื่อเกิดการเปลี่ยนรูป ซึ่งสามารถศึกษารายละเอียดได้จากหนังสืออ้างอิง [7-14] ลักษณะทางกายภาพที่สำคัญมีอยู่หลายประการด้วยกันคือ

1. เนื่องจากในกระบวนการอัดรีดโลหะ โลหะสำหรับอัดรีด (Billet) จะถูกแรงดันที่เพียงพอจนกระทั่งความเค้นในอนุภาคมีค่ามากกว่าความเค้นที่จุดคราก โลหะจึงจะเคลื่อนตัวผ่านแม่พิมพ์ ซึ่งเป็นการเปลี่ยนรูปในเชิงพลาสติก (Plastic Deformation) ซึ่งมีขนาดของความเครียดอยู่ในระดับสูงและความเครียดในช่วงพลาสติกจะมีค่ามากกว่าความเครียดที่เกิดขึ้นในช่วงอีลาสติกมากทำให้การวิเคราะห์ปัญหานี้จึงสามารถละทิ้งค่าความเครียดในช่วงอีลาสติกได้

2 จากเหตุผลในข้อแรกโลหะที่อยู่ในช่วงพลาสติกจะมีลักษณะเหมือนของไหลโดยทั่วไป ดังนั้นปัญหาจึงอยู่ในรูปแบบของการไหลแบบหนืด (Viscous Flow) แต่มีความแตกต่างระหว่างของไหลโดยทั่วไปและของไหลที่เป็นโลหะ คือคุณสมบัติของของไหลโดยทั่วไปจะอยู่ในรูปแบบของนิวโตเนียน (Newtonian) ซึ่งความหนืดจะมีค่าคงที่ แต่โลหะไหลจะมีพฤติกรรมในลักษณะของนอนนิวโตเนียน (Non-Newtonian) จะมีค่าความหนืดที่ไม่ใช่ค่าคงที่ แต่จะเปลี่ยนแปลงเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงความเร็วในระบบ ด้วยเหตุผลนี้เองจึงทำให้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานี้จะเป็นแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear)

3. ลักษณะที่สำคัญอีกประการหนึ่งของวัสดุที่อยู่ในช่วงพลาสติกคือคุณสมบัติการอัดตัวไม่ได้ (Incompressible) กล่าวคือการเปลี่ยนรูปของวัสดุจะมีเฉพาะการเปลี่ยนรูปในลักษณะของการเสียรูป (Distortion) แต่ไม่มีการเปลี่ยนปริมาตร (Dilatation) คุณสมบัตินี้สามารถเรียกได้อีกอย่างว่าคุณสมบัติการอนุรักษ์มวลแสดงได้โดยสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับการอนุรักษ์มวลดังที่จะได้แสดงในบทที่ 2
4. เนื่องจากปัญหาการอัดรีดเพื่อลดขนาดความหนาของโลหะ โลหะสำหรับอัดรีด (Billet) จะมีขนาดความยาวในแนวตั้งฉากกับระนาบการไหล  $x$ - $y$  มากเมื่อเทียบกับความหนา ดังนั้นจึงสามารถวิเคราะห์ปัญหาได้ในรูปแบบของความเครียดในระนาบ (Plane Strain) กล่าวคือการเปลี่ยนรูปจะอยู่ในระนาบการไหลไม่ส่งผลต่อแนวที่ตั้งฉากกับระนาบการไหล
5. อุณหภูมิเป็นอีกปัจจัยหนึ่งที่ส่งผลอย่างมากต่อการเปลี่ยนแปลงของระบบ เนื่องจากการเปลี่ยนรูปของโลหะจะส่งผลให้อุณหภูมิในระบบเพิ่มขึ้น และการเพิ่มขึ้นนี้จะส่งผลต่อค่าความเค้นครากของวัสดุ ซึ่งเมื่อความเค้นครากที่ตำแหน่งใดๆบนโดเมนการไหลเปลี่ยนแปลงไป จะส่งผลต่อแรงดันอัดรีดซึ่งเป็นคำตอบของปัญหาที่สำคัญที่สุด
6. แรงเสียดทานที่ผิวสัมผัสระหว่างแท่นบรรจุกับโลหะสำหรับอัดรีด และแม่พิมพ์กับโลหะสำหรับอัดรีด ถือว่าเป็นส่วนสำคัญส่วนหนึ่งที่จะส่งผลต่อแรงดันอัดรีด เนื่องจากว่าหากสัมประสิทธิ์ความเสียดทานระหว่างผิวสัมผัสสูงย่อมส่งผลให้แรงดันอัดรีดที่ต้องใช้สูงตามไปด้วย
7. ความจริงอีกประการหนึ่งก็คือระบบการอัดรีดจะเริ่มเข้าสู่ภาวะอยู่ตัวเมื่อโลหะสำหรับอัดรีดได้ผ่านผ่านแม่พิมพ์ไปช่วงหนึ่ง และก่อนที่จะออกจากแม่พิมพ์อีกช่วงหนึ่ง ซึ่งในระหว่างช่วงทั้งสองหากพื้นผิวไม่มีแรงเสียดทานแรงดันอัดรีดที่ใช้จะคงที่ และสภาวะภายในโลหะอัดรีดแทบจะไม่เปลี่ยนแปลง

วิทยานิพนธ์ที่น่าเสนอนี้จะทำการศึกษาการอัดรีดเพื่อลดขนาดความหนาของโลหะในสองมิติ โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) โดยจะทำการศึกษาถึงลักษณะการไหลของโลหะในสภาวะที่เป็นพลาสติก (Plastic) ที่เป็นการไหลแบบนอนนิวโทเนียน ผ่านแม่พิมพ์ลดขนาด โดยจะจำลองแบบให้อยู่ในรูปของความเครียดในระนาบ (Plane Strain) และมีวัสดุเป็นแบบพลาสติกอุดมคติ (Ideal Plastic) เพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบ ก็คือความเร็วของการไหล ความดันและอุณหภูมิในตำแหน่งต่างๆบนระนาบการไหลของโลหะขณะไหลผ่านแม่พิมพ์ที่สภาวะอยู่ตัว

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะถูกทำการประยุกต์เข้ากับสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้อง โดยใช้เอลิเมนต์สองมิติแบบสามเหลี่ยมในลักษณะของความเครียดในระนาบ (Plane Strain) ประกอบกับการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of Weighted

Residuals) [1] ก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สามารถนำไปประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถใช้ได้บนคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลโดยทั่วไป โดยโปรแกรมที่ถูกประดิษฐ์ขึ้นนี้จะใช้พื้นฐานของสมการอนุพันธ์โมเมนต์ สมการอนุพันธ์มวล และสมการอนุพันธ์พลังงาน [3] ประกอบกับเทคนิคการคำนวณเชิงตัวเลขสำหรับการแก้ปัญหาที่เป็นแบบไม่เชิงเส้น การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องกับความเป็นจริง ทำให้ได้คำตอบโดยประมาณที่สถานะอยู่ตัว (Steady State) ของระบบ โดยผลของการคำนวณจะอยู่ในรูป ความเร็ว ความดัน และอุณหภูมิที่จุดต่อของเอลิเมนต์ คำตอบที่ได้จะถูกเปรียบเทียบกับทฤษฎีสลิปไลน์ [7-11] และผลการทดลองเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้น ก่อนที่จะนำไปวิเคราะห์ผลการอัศจรรย์ในรูปแบบอื่นๆ

วิทยานิพนธ์นี้จะทำการศึกษาและวิเคราะห์ปัญหาการรีดโลหะ (Metal Rolling) สำหรับโลหะแผ่นบางซึ่งเป็นอีกรูปแบบหนึ่งของการขึ้นรูปโลหะ โดยใช้โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับวิเคราะห์ปัญหาการอัศจรรย์ เนื่องจากว่าปัญหาทั้งสองประเภทจะมีพฤติกรรมของวัสดุที่เหมือนกัน สามารถวิเคราะห์ที่ภาวะอยู่ตัวได้เช่นเดียวกัน แต่จะมีข้อแตกต่างตรงแบบจำลองและเงื่อนไขขอบเขตที่ไม่เหมือนกัน คำตอบที่สำคัญของปัญหาการรีดก็คือ แรงรีด (Rolling Force) และแรงบิดรีด (Rolling Torque) สามารถคำนวณได้โดยใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลข [2] ที่ประยุกต์กับโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้น โดยคำตอบจะถูกเปรียบเทียบกับผลจากทฤษฎีอื่นรวมทั้งการทดลองเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมสำหรับวิเคราะห์ปัญหาการรีด ก่อนที่จะนำไปวิเคราะห์ปัญหาในรูปแบบอื่นๆ

เพื่อให้ได้คำตอบที่ได้มีความถูกต้องมากที่สุด และเกิดประสิทธิภาพในการคำนวณสูงสุดของการวิเคราะห์ปัญหาโดยโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้น จึงได้ทำการประยุกต์เอาวิธีการปรับขนาดของเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ โดยอิงกับพื้นฐานความเข้าใจในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ว่า บริเวณที่มีขนาดอัตราการเปลี่ยนแปลงความชันของคำตอบ (Solution Gradient) สูง บริเวณนั้นควรที่จะมีความถี่ของเอลิเมนต์มากกว่าบริเวณที่มีอัตราการเปลี่ยนแปลงความชันของคำตอบน้อย [5] ซึ่งวิธีดังกล่าวจะช่วยจัดการขนาดและความถี่ของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมกับปัญหา ทำให้ลดความสิ้นเปลืองที่เกิดจากเวลาในการคำนวณและหน่วยความจำที่ใช้บนคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลทั่วไป

## 1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

1. ประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาการอัศจรรย์ขึ้นรูป
2. ประดิษฐ์โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้น โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN)



3. นำโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นมาวิเคราะห์ปัญหาและความสัมพันธ์ของตัวแปรต่างๆ คือความเร็ว ความดัน และอุณหภูมิ ในปัญหาการอัดรีด
4. ปรับปรุงผลที่ได้จากการคำนวณ โดยใช้เทคนิคการปรับเปลี่ยนขนาดของเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ เพื่อให้เกิดประสิทธิภาพในการคำนวณสูงสุด

### 1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

1. ประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหา
2. ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาสองมิติแบบความเครียด ในระนาบ โดยโปรแกรมจะใช้คำนวณหาความเร็ว ความดัน และอุณหภูมิที่จุดต่อ โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อเพื่อที่จะคำนวณหาความเร็วและอุณหภูมิ เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อสำหรับคำนวณหาความดัน
3. นำโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นมาทำการวิเคราะห์ปัญหาการอัดรีดที่มีอัตราการเปลี่ยนแปลงพื้นที่ของโลหะที่ทางเข้าต่อทางออกแตกต่างกันไปเพื่อคำนวณหาแรงดันที่ใช้ในการอัดรีด
4. นำโปรแกรมที่ประดิษฐ์มาวิเคราะห์ปัญหาของการอัดรีด สำหรับปัญหาที่มีรูปแบบของแม่พิมพ์ที่แตกต่างกัน
5. ศึกษาถึงผลของการอัดรีดที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ และผลของการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่มีต่อคุณสมบัติของวัสดุ
6. ทำการวิเคราะห์ผลของความเร็วในการอัดรีดที่มีต่อการกระจายของอุณหภูมิที่ส่วนต่างๆบนขอบเขตของปัญหา
7. ประยุกต์วิธีการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับปัญหาที่ทำการวิเคราะห์

### 1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. เก็บรวบรวมข้อมูลเอกสารและองค์ความรู้ที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีทางด้านการไหลของโลหะ โดยเฉพาะในด้านของการอัดรีดขึ้นรูป
2. ศึกษาการประยุกต์โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์กับการอัดรีดขึ้นรูป
3. ประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์

4. เริ่มประดิษฐ์โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาที่ยังไม่มีการถ่ายเทความร้อนเข้ามาเกี่ยวข้อง
5. ทดสอบโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นกับปัญหาที่สามารถหาผลเฉลยโดยทฤษฎีสลิปไลน์ (Slip Line Theory) เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม
6. ประยุกต์สมการอนุรักษ์พลังงานเข้าสู่ระบบเดิม
7. นำโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นมาวิเคราะห์การอัดรีดขนาดในรูแบบต่างๆ
8. ประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ
9. เขียนวิทยานิพนธ์
10. สอบวิทยานิพนธ์

### 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. สามารถนำโปรแกรมไปใช้แก้ปัญหาการอัดรีดขึ้นรูปเพื่อลดขนาดความหนาของโลหะที่มีลักษณะแม่พิมพ์ และสภาวะแวดล้อมของระบบแตกต่างกันไป
2. ผลของแรงดันและความร้อนที่ได้จากการวิเคราะห์ จะเป็นประโยชน์อย่างมากในการนำไปออกแบบแม่พิมพ์อัดรีด
3. ผลของความดันโดยรวมทำให้ทราบถึงขนาดของแรงดันที่ต้องใช้ในการดันโลหะให้ไหลผ่านแม่พิมพ์ลดขนาด ซึ่งเป็นประโยชน์ต่อผู้ออกแบบเครื่องจักรทำให้ลดเวลาในการออกแบบและการลองผิดลองถูก
4. เพื่อเป็นจุดเริ่มต้นในการพัฒนาโปรแกรมสำหรับงานขึ้นรูปโลหะ ให้เกิดความหลากหลายและครอบคลุมปัญหาที่มีอยู่ในอุตสาหกรรมขึ้นรูปโลหะให้มากที่สุด ซึ่งเกือบทั้งหมดได้ยื่นอยู่บนพื้นฐานที่วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้นำเสนอ เพียงแต่มีรายละเอียดที่แตกต่างกันไป เช่น ลักษณะของเอลิเมนต์ที่ใช้ และกระบวนการวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขที่แตกต่างกันไป เป็นต้น
5. สามารถนำโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นไปประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์ปัญหาการรีดโลหะ (Sheet Metal Rolling) สำหรับลดขนาดความหนาของโลหะแผ่นบาง
6. โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น ประกอบกับการประยุกต์การปรับเปลี่ยนขนาดของเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ทำให้โปรแกรมสามารถใช้กับคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลทั่วไปที่มีขนาดของหน่วยความจำ (RAM) ที่จำกัด และขนาดของปัญหาที่มีขนาดใหญ่



## บทที่ 2

### สมการเชิงอนุพันธ์การไหลของโลหะ

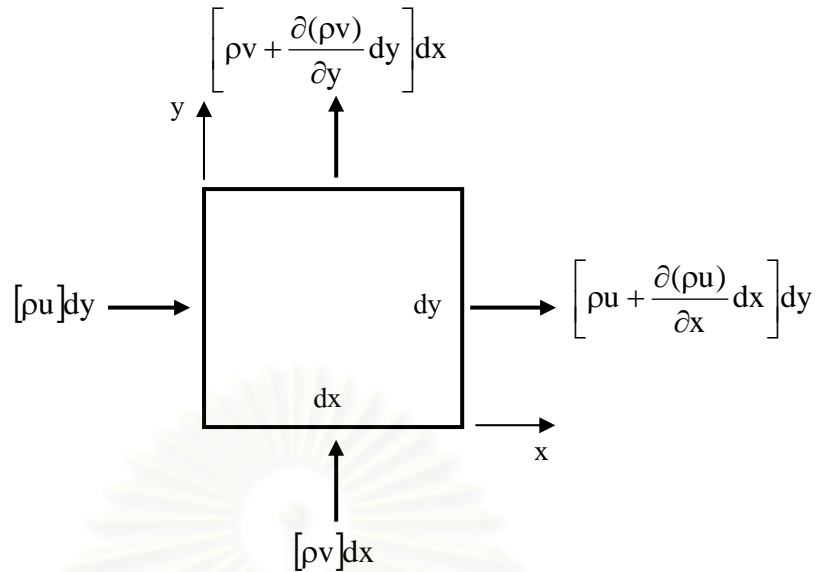
ในการวิเคราะห์การไหลของโลหะที่เกิดจากการอัดรีดจะอยู่ภายใต้ความเป็นจริงที่ว่าหากโลหะถูกแรงกระทำจนกระทั่งความเค้นมากกว่าความเค้นคราก โลหะจะมีพฤติกรรมเหมือนของไหล โดยทั่วไปแต่เป็นของไหลแบบนอนนิวโทเนียน (Non-Newtonian) [13] กล่าวคือค่าความหนืดจะไม่ใช่ค่าคงที่ แต่จะเป็นฟังก์ชันที่เกี่ยวเนื่องกับการเปลี่ยนแปลงความเร็วในระบบ ดังนั้นนิยามนิพจน์ฉบับนี้จะทำการวิเคราะห์การไหลของโลหะโดยใช้ทฤษฎีของการไหลแบบหนืดที่อัดตัวไม่ได้ โดยของไหลจะเป็นแบบเป็นแบบนอนนิวโทเนียน สมการเชิงอนุพันธ์ถือเป็นหัวใจสำคัญของการวิเคราะห์ปัญหา เนื่องจากสมการเชิงอนุพันธ์เหล่านี้จะอธิบายความเป็นจริงของปัญหา ซึ่งปัญหาการไหลของโลหะนี้จะอาศัยความจริงในเรื่องของการอนุรักษ์มวล โมเมนตัม และพลังงาน เช่นเดียวกับ การวิเคราะห์การไหลของของไหลโดยทั่วไป

ในบทนี้จะอธิบายสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาการไหลของโลหะใน 2 มิติ จะประกอบไปด้วย 4 สมการด้วยกัน คือ สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล 1 สมการ สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม จำนวน 2 สมการ และสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงาน 1 สมการ โดยจะสอดคล้องกับสมมุติฐานต่างๆที่สอดคล้องกับความเป็นจริงเพื่อลดความซับซ้อนของระบบสมการ

#### 2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล

จากความเป็นจริงที่ว่ามวลของของไหลจะไม่สูญหายตลอดโดเมนการไหล จะก่อให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวลนี้ขึ้น โดยหากพิจารณาถึงอนุภาคสี่เหลี่ยมที่ตำแหน่งใดๆบนโดเมนการไหล มีขนาดความกว้าง  $dx$  และ  $dy$  มีความลึก 1 หน่วย ดังแสดงในรูปที่ 2.1 [3] แล้วที่ตลอดขอบด้านซ้ายของอนุภาคมีความกว้าง  $dy$  จะมีปริมาณฟลักซ์ของมวลที่ไหลเข้ามีค่าเท่ากับ  $[\rho u]dy$  โดย  $\rho$  คือความหนาแน่นของของไหล และ  $u$  คือความเร็วตามแนวแกน  $x$  และจะมีการเปลี่ยนแปลงตลอดในทิศทางแกน  $x$  ก่อให้เกิดปริมาณฟลักซ์ของมวลที่ไหลออกทางด้านขวาของอนุภาคคือ  $(\rho u + (\partial(\rho u)/\partial x)dx)dy$  ดังนั้นปริมาณฟลักซ์ที่เพิ่มขึ้นในทิศทางแกน  $x$  คือ

$$\left[ \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right] dy - [\rho u] dy = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy \quad (2.1)$$



รูปที่ 2.1 ฟลักซ์ของมวลที่เกิดขึ้นกับอนุภาคขนาดเล็กบนโดเมนการไหล

ปริมาณฟลักซ์ของมวลที่เพิ่มขึ้นในทิศทางแกน  $y$  ก็สามารหหาได้ในลักษณะเดียวกัน โดยให้  $v$  คือความเร็วตามแนวแกน  $y$

$$\left[ \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \right] dx - [\rho v] dx = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy \quad (2.2)$$

ปริมาณมวลในกรอบสี่เหลี่ยมนี้คือ  $\rho dx dy$  ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณฟลักซ์ของมวลที่ลดลงก็คือ

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy \quad (2.3)$$

จากกฎของการอนุรักษ์มวล มวลที่เปลี่ยนแปลงในอนุภาคสี่เหลี่ยมนี้จะต้องไม่สูญหาย ดังนั้นปริมาณฟลักซ์ของมวลที่เพิ่มขึ้นเนื่องจากการไหลผ่านขอบตามแนวแกน  $x$  และ  $y$  จะต้องเท่ากับปริมาณฟลักซ์ของมวลที่ลดลงไป นั่นคือ

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy \quad (2.4)$$

หารตลอดสมการ (2.4) ด้วย  $dx dy$  แล้วจัดรูปจะได้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (2.5)$$

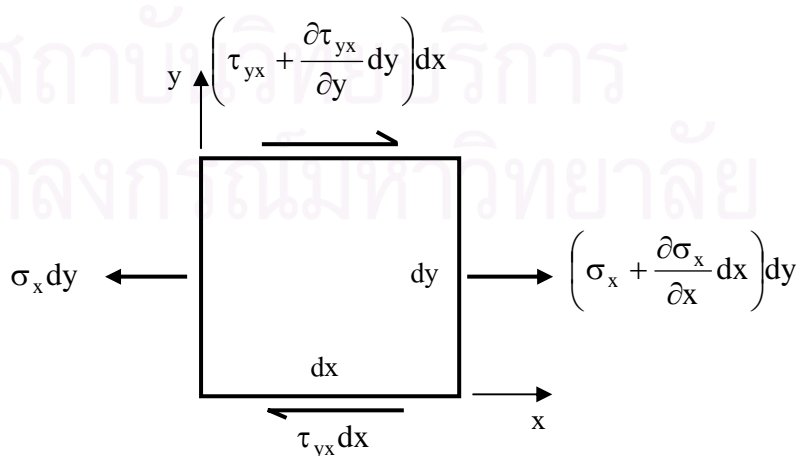
และเนื่องจากการไหลของโลหะจะสมมุติให้ค่าความหนาแน่นเป็นค่าคงที่และไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา ดังนั้นสมการที่ (2.5) จะลดรูปลงเหลือ

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.6)$$

สมการที่ (2.6) นี้ก็คือสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวลสำหรับปัญหาที่มีค่าความหนาแน่นคงที่และไม่แปรผันตามเวลา สมการนี้เองจะสอดคล้องกับทฤษฎีการเปลี่ยนรูปของโลหะที่ว่า อนุภาคของโลหะที่เปลี่ยนรูปจะมีลักษณะที่อัดตัวไม่ได้ (Incompressible) [14] ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดตามแนวแกน x ( $\dot{\epsilon}_x$ ) ซึ่งมีค่าเท่ากับ  $\partial u / \partial x$  จะมีค่าเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดตามแนวแกน y ( $\dot{\epsilon}_y$ ) ซึ่งมีค่าเท่ากับ  $\partial v / \partial y$  ในทิศทางตรงกันข้าม

## 2.2 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมนี้เกิดจากความเป็นจริงตามกฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's second law) ที่ว่า แรงมีค่าเท่ากับมวลคูณด้วยอัตราเร่ง หากพิจารณาผลของแรงที่เกิดขึ้นกับอนุภาคเล็กๆบนโดเมนการไหลจะประกอบไปด้วย สามส่วนหลักๆ คือแรงเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงความเค้นในทิศทางต่างๆ แรงเนื่องจากน้ำหนักของตัวมันเอง แรงเนื่องจากการเฉื่อยในเรื่องการไหลของโลหะที่เกิดจากการอัดรีดนี้ จะเป็นการไหลที่ช้าดังนั้นจึงสามารถละแรงเนื่องจากการเฉื่อยไว้ได้ อีกทั้งแรงเนื่องจากน้ำหนักของตัวมันเองน้อยมากเมื่อเทียบกับแรงจากการเปลี่ยน



รูปที่ 2.2 ส่วนประกอบของแรงตามแนวแกน x ที่เกิดขึ้นกับอนุภาคขนาดเล็กบนโดเมนการไหล

แปลงความเค้น แรงในส่วนนี้จึงสามารถละทิ้งได้เช่นเดียวกัน ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์นี้จะพิจารณาเฉพาะแรงที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงความเค้นในทิศทางต่างๆ หากพิจารณาอนุภาคสี่เหลี่ยมที่มีขนาดความกว้าง  $dx$  และ  $dy$  มีความลึกหนึ่งหน่วยจะมีส่วนประกอบของแรงตามแนวแกน  $x$  ดังแสดงในรูปที่ 2.2 [3]

ผลรวมของแรงตามแนวแกน  $x$  จะมีค่าดังนี้

$$\left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy - \sigma_x dy + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx - \tau_{yx} dx = 0 \quad (2.7)$$

ผลรวมของแรงที่เกิดขึ้นตามแนวแกน  $y$  ก็สามารถหาได้ในลักษณะเดียวกันมีค่าดังนี้

$$\left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - \tau_{xy} dy + \left( \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx - \sigma_y dx = 0 \quad (2.8)$$

ในที่นี้  $\sigma_x$  คือความเค้นตั้งฉาก (Normal Stress) ตามแนวแกน  $x$ ;  $\sigma_y$  คือความเค้นตั้งฉาก (Normal Stress) ตามแนวแกน  $y$ ;  $\tau_{xy}, \tau_{yx}$  คือความเค้นเฉือน (Shear Stress) ทำการหารทั้ง 2 ข้างของสมการทั้งสองด้วย  $dx dy$  แล้วทำการจัดรูป จะได้

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (2.9a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (2.9b)$$

ในทฤษฎีกลศาสตร์ของแข็ง สมการทั้งสองนี้คือสมการสมดุล (Equilibrium Equation) [7] โดยส่วนประกอบของความเค้นจะมีอยู่สองส่วนด้วยกัน [14] ก็คือความเค้นเฉลี่ย (Mean Stress,  $\sigma_m$ ) ซึ่งมีลักษณะทางกายภาพเหมือนกับความดัน ( $p$ ) แต่มีทิศทางตรงกันข้าม และจะมีทิศทางตั้งฉากกับขอบอนุภาคโดยมีขนาดเท่ากันทุกทิศทาง อีกส่วนหนึ่งก็คือความเค้นเบี่ยงเบน (Deviatoric Stress,  $\sigma'$ ) ซึ่งเป็นส่วนที่ทำให้โลหะเกิดการเสียรูปในเชิงพลาสติก (Plastic Deformation) เนื่องจากมีส่วนประกอบของความเค้นเฉือนอยู่ด้วย ดังนั้นความเค้นในสองมิติสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเทนเซอร์ (Tensor) โดยสัญลักษณ์ตัวห้อยตัวแรกจะหมายถึงทิศทางตั้งฉาก (Normal Direction) ของระนาบที่ความเค้นนั้นกระทำอยู่ ส่วนตัวห้อยตัวหลังคือทิศทางของความเค้นนั้นๆ ดังนี้ [14]

$$\sigma_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} + \sigma'_{ij} \quad (2.10)$$

หรือ

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \sigma'_{ij} \quad (2.11)$$

โดย  $\delta_{ij}$  คือ Kronecker delta ซึ่ง  $\delta_{ij} = 1$  เมื่อ  $i = j$  ;  $\delta_{ij} = 0$  เมื่อ  $i \neq j$

ความสัมพันธ์ของเทนเซอร์ความเค้นเบี่ยงเบนและอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียด (Strain rate,  $\dot{\epsilon}$ ) สามารถเขียนได้ในรูป [7]

$$\sigma'_{ij} = 2\mu\dot{\epsilon}_{ij} \quad (2.12)$$

โดย 
$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.13)$$

ในที่นี้  $\mu$  แทนค่าความหนืด และ  $u$  คือค่าความเร็วตามแนวแกนต่างๆ แทนค่าสมการ (2.13) ลงใน (2.12) จะได้ และแทนค่า (2.12) ลงใน (2.11) จะได้

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.14)$$

ซึ่งสามารถเขียนในรูปแบบทั่วไปของความเค้นใน 2 มิติได้คือ

$$\sigma_x = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.15a)$$

$$\sigma_y = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.15b)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.15c)$$

โดย  $u$  คือความเร็วในทิศทางแกน  $x$ ;  $v$  คือความเร็วในทิศทางแกน  $y$ ;  $p$  คือความดัน

หากแทนค่าสมการ (2.15 a-c) ลงในสมการ (2.9 a,b) จะก่อให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมสำหรับปัญหาการไหลแบบเชิงซ้ำ โดยของไหลสมมุติให้มีความหนาแน่นคงที่ไม่คำนึงถึงแรงเนื่องจากน้ำหนักตัวของมันเอง เป็นการไหลที่สภาวะสมดุล และหากสมมุติให้ค่าความหนืดมีค่าคงที่ดังเช่นกรณีของไหลแบบนิวโทเนียน สมการจะมีรูปแบบดังนี้

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.16a)$$

$$\mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.16b)$$

สำหรับกรณีการไหลของโลหะซึ่งเป็นของไหลแบบอนนิวโทเนียน ค่าของความหนืดจะถูกกำหนดจากความสัมพันธ์ของความเค้นและอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดสำหรับวัสดุที่อยู่ในช่วงพลาสติก โดยเพอร์เซียนา (Perzyna) [21] ได้นำเสนอทฤษฎีความสัมพันธ์ดังกล่าวโดยใช้หลักการของการหาพลังงานศักย์เชิงพลาสติก (Plastic Potential) โดยความสัมพันธ์นี้ได้ถูกนำมาใช้ประกอบในการวิเคราะห์ปัญหาการขึ้นรูปโลหะโดยได้ถูกนำเสนอในบทความและหนังสือทางด้านนี้หลายฉบับด้วยกันดังเช่นเอกสารอ้างอิง [16] [31] ค่าความหนืดที่ถูกนำเสนอ ใช้สำหรับวัสดุที่เป็นพลาสติกอุดมคติ (Ideal Plastic) โดยจะเป็นฟังก์ชันของค่าความเค้นครากและอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดประสิทธิผล (Effective Strain Rate) ดังแสดงในรูป

$$\mu = \frac{\sigma_{\text{yield}}}{\sqrt{3}\dot{\epsilon}} \quad (2.17)$$

โดย  $\dot{\epsilon}$  คืออัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดประสิทธิผล (Effective Strain Rate) มีค่าเท่ากับ  $\sqrt{2\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}}$  [31]

ส่วนค่าของ ความเค้นคราก  $\sigma_{\text{yield}}$  สามารถกำหนดให้เป็นค่าคงที่ หรือฟังก์ชันกับอุณหภูมิในรูปแบบใดๆตามแต่ทฤษฎีและสมมุติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์ แต่โดยส่วนใหญ่ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้หากวิเคราะห์ปัญหาที่มีอุณหภูมิมาเกี่ยวข้อง จะใช้ความสัมพันธ์แบบเชิงเส้นและกำหนดอุณหภูมิในลักษณะอุณหภูมิสัมพัทธ์กับอุณหภูมิเริ่มต้นดังความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\sigma'_{\text{yield}} = \sigma_{\text{yield}}(1 - \beta T) \quad (2.18)$$

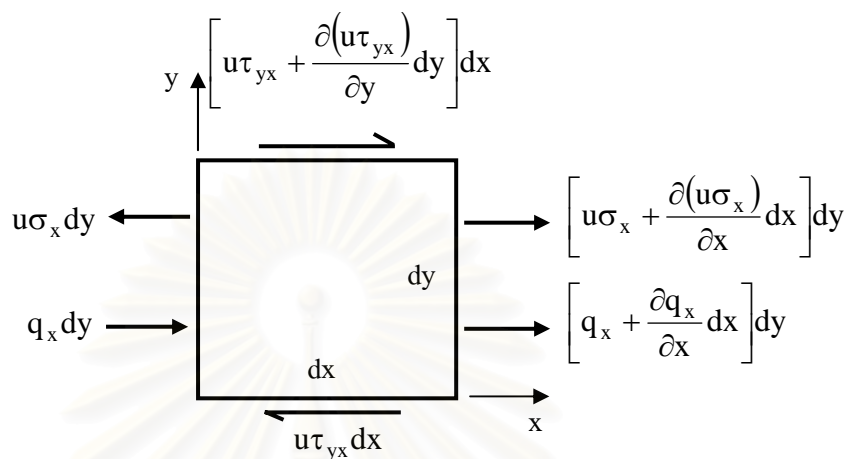
โดย  $\beta$  คือค่าคงที่ที่ขึ้นอยู่กับการคุณสมบัติของวัสดุ และ  $T$  คืออุณหภูมิ

### 2.3 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงาน

เนื่องจากการขึ้นรูปของโลหะโดยทั่วไปมีขนาดของการเปลี่ยนรูปสูง ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ ไม่ว่าจะเกิดจากแหล่งความร้อนภายนอก หรือว่าความร้อนที่เกิดจากการเปลี่ยนรูปตามธรรมชาติของโลหะ ย่อมส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของวัสดุ นั่นคือความเค้นการไหล หรือความเค้นที่จุดคราก ( $\sigma_{\text{yield}}$ ) นั่นเอง ในกรณีเช่นนี้การเปลี่ยนรูปของโลหะจะส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ และการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิจะส่งผลต่อค่าคุณสมบัติของวัสดุทำให้ส่งผลถึงแรงดันที่ใช้ในการอัดรีด ดังนั้นการคำนวณสมการอนุรักษ์พลังงานควบคู่ไปกับสมการเชิงอนุพันธ์ทั้งสองที่ได้กล่าวไปแล้ว จึงมีความจำเป็นอย่างยิ่ง



ในการประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงานนี้จะอาศัยกฎของความเป็นจริงที่ว่า พลังงานจะไม่สูญหายไปไหน สามารถนำเสนอโดยการใช้อุณหภาคสี่เหลี่ยมที่มีพลั๊กซ์ความร้อนในลักษณะต่างๆไหลผ่านดังแสดงในรูปที่ 2.3 [3]



รูปที่ 2.3 งานที่เกิดขึ้นและปริมาณพลั๊กซ์ความร้อนตามแนวแกน x ที่เกิดขึ้นกับ  
อนุภาคขนาดเล็กบนโดเมนการไหล

จากกฎข้อแรกของเทอร์โมไดนามิกส์ ซึ่งกล่าวว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวลจะเท่ากับปริมาณพลั๊กซ์ความร้อนที่ให้แก่ก้อนมวลบวกกับอัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่างๆที่กระทำบนก้อนมวลนั้น สามารถเขียนในรูปแบบของสัญลักษณ์คือ

$$A = B + C \quad (2.19)$$

- โดย A แทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานภายในก้อนมวล  
B แทนปริมาณพลั๊กซ์ความร้อนที่ให้แก่ก้อนมวล  
C แทนอัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่างๆบนก้อนมวล

จะเริ่มต้นพิจารณาหาค่า C ซึ่งคืออัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่างๆที่กระทำบนก้อนมวล ซึ่งหากไม่พิจารณาถึงงานเนื่องจากแรงของน้ำหนักตัวมันเอง (Body Force) จะคงเหลือเฉพาะงานที่เกิดจากความเค้นตามแนวแกนต่างๆดังนี้

อัตราของงานที่เกิดจากความเค้นตั้งฉาก  $\sigma_x$  ตามแนวแกน x คือ

$$\left[ u\sigma_x + \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} dx \right] dy - u\sigma_x dy = \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} dx dy \quad (2.20a)$$



อัตราของงานที่เกิดขึ้นจากความเค้นเฉือน  $\tau_{yx}$  ตามแนวแกน x คือ

$$\left[ u\tau_{yx} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} dy \right] dx - u\tau_{yx} dx = \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} dx dy \quad (2.20b)$$

อัตราของงานที่เกิดจากความเค้นในทิศทางแกน y ก็สามารหหาได้ในทำนองเดียวกัน ดังนั้นงานทั้งหมดที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่างๆ คือ

$$C = \left( \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.21)$$

สำหรับปริมาณพลักซ์ความร้อนที่ให้แก่มวลซึ่งแสดงโดยสัญลักษณ์ B นั้น ประกอบไปด้วยสองส่วน ส่วนแรกคือปริมาณพลักซ์ความร้อนที่เกิดขึ้นเองบนก้อนมวล ดังเช่นความร้อนที่เกิดจากการเปลี่ยนรูปของโลหะนั่นเอง หาก  $\bar{Q}$  แทนปริมาณพลักซ์ความร้อนที่เกิดขึ้นต่อหนึ่งหน่วยมวล ดังนั้นปริมาณพลักซ์ความร้อนที่เกิดขึ้นต่อมวลทั้งหมดคือ

$$\rho \bar{Q} dx dy$$

อีกส่วนหนึ่งก็คือพลักซ์ความร้อนสุทธิที่เกิดจากการถ่ายเทความร้อน ในรูปที่ 2.3 จะแสดงในทิศทางแกน x คือ

$$\left[ q_x - \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) \right] dy = - \frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy \quad (2.22a)$$

พลักซ์ความร้อนสุทธิที่เกิดจากการถ่ายเทความร้อนในแนวแกน y ก็สามารหหาได้ในทำนองเดียวกัน คือ

$$\left[ q_y - \left( q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) \right] dx = - \frac{\partial q_y}{\partial y} dx dy \quad (2.22b)$$

ดังนั้นปริมาณพลักซ์ความร้อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นบนอนุภาคสี่เหลี่ยมนี้คือ

$$B = \left[ \rho \bar{Q} - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} \right] dx dy \quad (2.23)$$

ตามกฎของฟูริเยร์ (Fourier's law) ปริมาณฟลักซ์ความร้อน  $q_x$  และ  $q_y$  จะแปรผันกับความชันของอุณหภูมิ (Temperature Gradient) ดังนี้

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{และ} \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.24)$$

โดย  $k$  คือสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (Thermal Conductivity) ของของไหล ดังนั้นสามารถเขียนพจน์ B ได้คือ

$$B = \left[ \rho \bar{Q} - \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (2.25)$$

ส่วนพจน์ A ซึ่งแทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนมวล จะประกอบไปด้วยสองส่วนด้วยกัน คือพลังงานภายใน (Internal Energy) ซึ่งเกิดจากการเคลื่อนที่ของโมเลกุลภายในของไหล ใช้สัญลักษณ์  $e$  และพลังงานจลน์ (Kinetic Energy) ซึ่งเกิดจากการไหลของของไหลมีค่าเท่ากับ  $V^2/2$  โดย  $V$  คือความเร็วของมวล พลังงานทั้งคู่มีหน่วยเท่ากับหนึ่งหน่วยมวล ดังนั้นพลังงานทั้งหมดที่เกิดกับปริมาณมวลทั้งก้อนซึ่งเท่ากับ  $\rho dx dy$  คือ

$$A = \rho \frac{D}{Dt} \left( e + \frac{V^2}{2} \right) dx dy \quad (2.26)$$

ค่าของ  $D/Dt$  คือค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ (Substantial Derivative) ซึ่งหมายความถึงการเปลี่ยนแปลงสัมบูรณ์ของอนุภาคใดๆที่ถูกเฝ้ามองบนโดเมนปัญหา ซึ่งการเปลี่ยนแปลงเหล่านี้จะประกอบไปด้วยการเปลี่ยนแปลงเมื่อเทียบกับเวลา และการเปลี่ยนแปลงตามแนวแกนต่างๆของอนุภาคที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วตามแนวแกน  $x$  และ  $y$  มีค่าเท่ากับ  $u$  และ  $v$  ตามลำดับ หรือเรียกได้อีกอย่างหนึ่งว่าการพา (Convection) ดังนั้นสามารถเขียนความสัมพันธ์ในระบบ 2 มิติได้ดังนี้

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.27)$$

หรือ

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \quad (2.28)$$

โดย

$$\vec{V} \equiv u \hat{i} + v \hat{j} \quad (2.29)$$

$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} \quad (2.30)$$

ทำการแทนพจน์ A B และ C กลับลงในสมการ (2.19) แล้วหารตลอดด้วย dx dy จะได้

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( e + \frac{V^2}{2} \right) = \left[ \rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] + \left[ \frac{\partial (u \sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial (u \tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial (v \tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (v \sigma_y)}{\partial y} \right] \quad (2.31)$$

ขั้นตอนต่อไปจะทำการแปลงค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ให้อยู่ในรูปของค่าอนุพันธ์ปกติ เพื่อจะใช้ในการคำนวณร่วมกับสมการเชิงอนุพันธ์ทั้งสองสมการที่ได้ประดิษฐ์ไปแล้ว โดยเริ่มจากการพิจารณาแรงที่กระทำตามแนวแกน x ของอนุภาคสี่เหลี่ยมใดๆ ที่เคลื่อนที่ด้วยความเร่ง  $a_x$  ดังนั้นสมการ (2.9a) สามารถเขียนในรูปแบบที่รวมแรงเฉื่อย คือ

$$m a_x = \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.32)$$

โดย  $m = \rho dx dy$  (2.33)

$$a_x = \frac{Du}{Dt} \quad (2.34)$$

แทนค่าสมการที่ (2.32) แล้วหารตลอดด้วย dx dy จะได้

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (2.35)$$

แรงตามแนวแกน y ในรูปแบบที่รวมความเฉื่อยก็สามารถหาได้ในทำนองเดียวกันคือ

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \quad (2.36)$$

คูณตลอดสมการ (2.35) และ (2.36) ด้วยความเร็ว u และ v ตามลำดับ

$$\rho \frac{D(u^2/2)}{Dt} = u \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + u \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (2.37a)$$

$$\rho \frac{D(v^2/2)}{Dt} = v \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + v \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \quad (2.37b)$$

รวมสองสมการนี้เข้าด้วยกัน และอาศัยความสัมพันธ์  $u^2 + v^2 = V^2$  จะได้

$$\rho \frac{D(V^2/2)}{Dt} = u \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) + v \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) \quad (2.38)$$

นำสมการ (2.38) ลบออกจากสมการ (2.31) จะได้

$$\rho \frac{De}{Dt} = \left[ \rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] + \left[ \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad (2.39)$$

เนื่องจาก  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  ดังนั้น

$$\rho \frac{De}{Dt} = \left[ \rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] + \left[ \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (2.40)$$

พจน์ของค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ทางด้านซ้ายของสมการ (2.40) สามารถทำการเปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบของอนุพันธ์ธรรมดา โดยการนำสมการ (2.28) ประยุกต์กับค่า  $e$  แล้วคูณตลอดด้วยค่า  $\rho$

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \vec{\nabla} e \quad (2.41)$$

เนื่องจากพิจารณากรณีที่สภาวะสมดุล ดังนั้นพจน์แรกทางด้านขวาจะมีค่าเท่ากับ 0

ทำการประยุกต์ความสัมพันธ์ไดเวอร์เจนซ์ (Divergence) ลงบนผลคูณของปริมาณสเกลาร์ (Scalar) และเวกเตอร์ (Vector) ที่พจน์หลังทางด้านขวา

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{V}) = e \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) + (\rho \vec{V}) \cdot \vec{\nabla} e$$

ดังนั้น

$$(\rho \vec{V}) \cdot \vec{\nabla} e = \vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{V}) - e \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \quad (2.42)$$

แทนค่าสมการ (2.42) ในสมการ (2.41) จะได้

$$\rho \frac{De}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{V}) - e \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \quad (2.43)$$

เนื่องจากความหนาแน่นคงที่ และจากสมการอนุรักษ์มวล ทำให้พจน์หลังทางด้านขวาของสมการ (2.43) มีค่าเป็น 0 ดังนั้น

$$\rho \frac{De}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{V}) \quad (2.44)$$

แทนค่าในสมการ (2.40) จะได้

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\rho e \vec{V}) &= \left[ \rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \\ &+ \left[ \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]\end{aligned}\quad (2.45)$$

สมการที่ (2.45) อยู่ในรูปของเฉพาะพลังงาน  $e$  แต่การเปลี่ยนแปลงพลังงานทั้งหมดจะประกอบไปด้วยทั้งพลังงานภายในและพลังงานจลน์ ดังนั้นพจน์ทางด้านซ้ายของสมการ (2.31) สามารถเขียนในรูปของอนุพันธ์ธรรมดาได้เช่นกัน ด้วยการเปลี่ยนพจน์พลังงานภายใน  $e$  ไปเป็นพลังงานรวม  $e + V^2/2$  ในสมการ(2.44) จะได้

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( e + \frac{V^2}{2} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left[ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \right]\quad (2.46)$$

แทนค่าในสมการ (2.31) จะได้

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \left[ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \right] &= \left[ \rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \\ &+ \left[ \frac{\partial (u \sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial (u \tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial (v \tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (v \sigma_y)}{\partial y} \right]\end{aligned}\quad (2.47)$$

สมการ (2.47) นี้เป็นรูปแบบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงานที่ภาวะสมดุล และหากความหนาแน่นเป็นค่าคงที่ สามารถเขียนสมการของการอนุรักษ์พลังงานที่ภาวะสมดุลได้ในรูป

$$\begin{aligned}\rho \left[ u \frac{\partial}{\partial x} \left( e + \frac{V^2}{2} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \right] &= \left[ \rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \\ &+ \left[ \frac{\partial (u \sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial (u \tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial (v \tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (v \sigma_y)}{\partial y} \right]\end{aligned}\quad (2.48)$$

ซึ่งหากกระจายเทอมทางด้านซ้าย และเทอมทางด้านขวาจะได้

$$\begin{aligned}\rho \left( u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} \right) + \rho u \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho v \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ = \rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + u \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) + v \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) \\ + \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (2.49)$$

หากพิจารณาให้เป็นการไหลแบบเชิงซ้ำ พจน์ที่ 2 และ 3 ทางด้านซ้ายของสมการจะเป็น 0 และจากสมการอนุรักษ์โมเมนตัม พจน์ที่ 4 และ 5 ทางด้านขวาของสมการจะเป็น 0 เช่นกัน ดังนั้นสมการที่ (2.49) นี้จะลดรูปลงเหลือ

$$\rho \left( u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} \right) = \rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.50)$$

แทนค่าความเค้นจากสมการ (2.15 a-c) ลงในสมการ (2.50) จะได้

$$\rho \left( u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} \right) = \rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \Phi \quad (2.51)$$

โดย  $\Phi$  คือพลังงานของการกระจายความหนืด (Viscous Energy Dissipation) [3] โดย

$$\Phi = 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (2.52)$$

พลังงานของการกระจายความหนืดนี้ก็คืออัตราการสูญเสียพลังงานทางกล (Mechanical Energy) ในการแปรรูปเป็นพลังงานความร้อน (Thermal Energy) [6] เนื่องจากในสมมุติฐานของวิชานี้พจน์ที่เป็นการไหลแบบเชิงซ้ำ ดังนั้นการสูญเสียพลังงานจึงมีค่าน้อย เทอมนี้จึงสามารถละได้ สมการ (2.51) จึงลดรูปลงเหลือ

$$\rho \left( u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} \right) = \rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (2.53)$$

กำหนดให้ค่าพลังงานภายในมีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้นกับอุณหภูมิในรูปแบบ

$$e = e_0 + c(T - T_0) \quad (2.54)$$

โดย  $e_0$  คือพลังงานภายในของของไหลที่อุณหภูมิเฉลี่ย เป็นค่าคงที่

$T_0$  คืออุณหภูมิเฉลี่ยของของไหล เป็นค่าคงที่

$c$  คือค่าความจุความร้อนจำเพาะของของไหล ซึ่งมักจะแปรผันขึ้นอยู่กับ ความดัน(p) และ อุณหภูมิ (T)

หากกำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆที่เป็นคุณสมบัติของวัสดุ คือค่าความจุความร้อนจำเพาะ (c) ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (k) และความหนาแน่น ( $\rho$ ) เป็นค่าคงที่ แล้วแทนค่าสมการ (2.54) ลงในสมการ (2.53) จะได้

$$\rho c \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \rho \bar{Q} + k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.55)$$

ฟลักซ์ความร้อนที่ก่อกำเนิดขึ้นเอง ( $\rho \bar{Q}$ ) ในกรณีของการไหลของโลหะนี้คือความร้อนเนื่องจากการเปลี่ยนรูปของโลหะต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร ใช้สัญลักษณ์  $Q$  ดังนั้นสมการ (2.55) เขียนใหม่ได้คือ

$$\rho c \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = Q + k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.56)$$

ค่าของความร้อนที่ก่อกำเนิดขึ้นเอง ( $Q$ ) นี้ก็คืออัตราของงานที่เกิดจากการเปลี่ยนรูปเชิงพลาสติก (Plastic work-rate) ภายใต้สมมุติฐานที่ว่าอัตราของงานทางกลทั้งหมดถูกเปลี่ยนรูปเป็นพลังงานความร้อนโดยไม่มีการสูญเสีย อัตราของงานทางกล เขียนได้ในรูป [16]

$$W_p = \sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (2.57)$$

จากสมการ (2.12)

$$W_p = (2\mu \dot{\epsilon}_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij} \quad (2.58)$$

เนื่องจากอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดประสิทธิผล (Effective Strain Rate,  $\dot{\epsilon}$ ) มีค่าเท่ากับ  $\sqrt{2\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}}$  [31] ดังนั้น

$$W_p = \mu (\dot{\epsilon})^2 \quad (2.59)$$

ดังนั้นฟลักซ์ความร้อนที่ก่อกำเนิดขึ้นเองเนื่องจากการเปลี่ยนรูปเชิงพลาสติกต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรสามารถหาได้จากการหารด้วยค่าคงที่ที่ใช้เปลี่ยนแปลงหน่วยจากงานให้เป็นพลังงาน คือ

$$Q = \frac{\mu (\dot{\epsilon})^2}{J} \quad (2.60)$$

โดย  $J$  คือค่าคงที่สำหรับแปลงงานทางกล (Mechanical Equivalent of Heat) มีค่าเท่ากับ 42.65 kg.cm/cal แทนค่าสมการ (2.60) ใน (2.56) จะได้

$$\rho c \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\mu (\dot{\epsilon})^2}{J} + k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.61)$$



สมการนี้จะเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงานที่นำมาใช้ในการวิเคราะห์การไหลของ  
โลหะที่เกิดจากการอัดรีด ร่วมกับสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวลและโมเมนตัม ดังที่ได้กล่าว  
ไว้แล้วข้างต้น



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

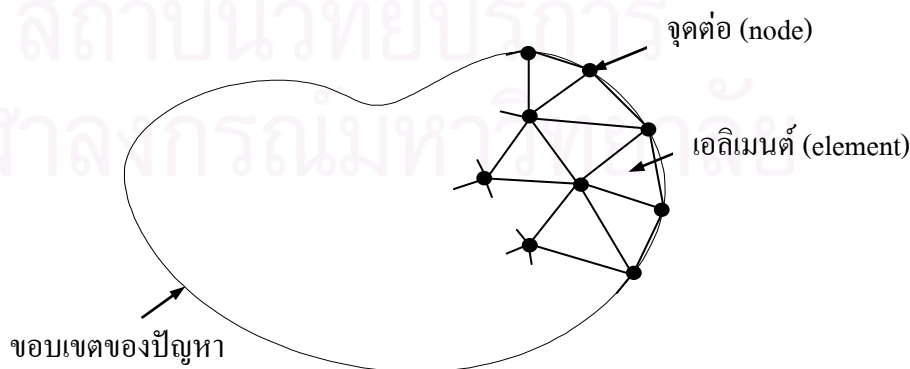
### บทที่ 3

## ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลของโลหะ

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) มีบทบาทอย่างมากในการวิเคราะห์ปัญหาทางวิศวกรรมในด้านต่างๆรวมทั้งการไหลของโลหะภายใต้ภาวะการอัดรีด หลักการทั่วไปของทฤษฎีไฟไนต์เอลิเมนต์คือจะทำการแบ่งปัญหาซึ่งมีลักษณะของความต่อเนื่องทั่วทั้งบนโดเมนให้เป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ โดยแต่ละเอลิเมนต์จะใช้เป็นตัวแทนของปัญหาจริงซึ่งจะมีพฤติกรรมอยู่ภายใต้สมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาต่างๆ โดยการกระจายของคำตอบบนเอลิเมนต์นั้นๆจะถูกกำหนดโดยฟังก์ชันการประมาณภายใน (Interpolation Function) ซึ่งมีรูปแบบต่างๆ เช่น แบบเชิงเส้น หรือแบบฟังก์ชันกำลังสอง เป็นต้น แต่ละเอลิเมนต์ที่ติดกันอยู่จะต้องมีความต่อเนื่องซึ่งกันและกัน ดังนั้นเมื่อเอลิเมนต์เล็กๆเหล่านี้มาต่อกันเป็นระบบขนาดใหญ่ซึ่งมีรูปร่างเสมือนปัญหาจริง เอลิเมนต์ขนาดเล็กก็คือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของปัญหาที่อยู่ในรูปเมตริกซ์ที่มีขนาดไม่ใหญ่นัก และเมื่อเอลิเมนต์เล็กๆมาต่อกันเป็นระบบขนาดใหญ่ก็คือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่มีขนาดใหญ่ที่อยู่ในรูปแบบที่สามารถคำนวณหาคำตอบได้โดยการแก้ระบบสมการขนาดใหญ่ขึ้น โดยอาศัยการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการคำนวณ ทำให้ได้คำตอบที่จุดต่อ (Nodes) ต่างๆบนเอลิเมนต์ต่อเนื่องกันทั้งระบบ รายละเอียดและเทคนิคต่างๆในระเบียบวิธีนี้สามารถศึกษาได้จากหนังสืออ้างอิง [1][16][17]

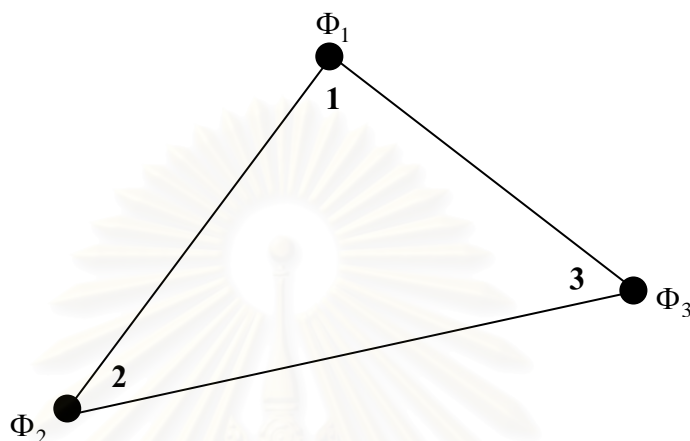
ขั้นตอนต่างๆในการวิเคราะห์โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สามารถจำแนกได้เป็น 6 ขั้นตอนหลักๆ [1] ดังนี้

**ขั้นตอนที่ 1** ทำการแบ่งขอบเขตของปัญหาที่ต้องการจะหาผลเฉลยออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆดังแสดงในรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 การแบ่งขอบเขตของปัญหาให้เป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ

**ขั้นตอนที่ 2** เลือกฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์ (Element Interpolation Function) ซึ่งเป็นรูปแบบการประมาณของผลเฉลยเหนือขอบเขตที่ทำการแบ่งในขั้นตอนที่ 1 ซึ่งการประมาณนี้จะมีอยู่หลายรูปแบบด้วยกัน แต่ที่จะยกตัวอย่างเป็นการประมาณแบบเชิงเส้น โดยใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมที่ประกอบด้วย 3 จุดต่อ ดังแสดงในรูป 3.2



รูปที่ 3.2 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 3 จุดต่อ

โดยจุดต่อแต่ละจุดจะเป็นตำแหน่งของตัวไม่รู้ค่า (Nodal Unknown) สมมุติให้คือ  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  ดังนั้นลักษณะการกระจายของคำตอบบนเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมนี้สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\Phi(x, y) = N_1(x, y)\Phi_1 + N_2(x, y)\Phi_2 + N_3(x, y)\Phi_3 \quad (3.1)$$

โดย  $N_i(x, y); i = 1, 2, 3$  คือฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ สามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} \\ &= [N]_{1 \times 3} \{\Phi\}_{3 \times 1} \end{aligned} \quad (3.2)$$

โดย  $[N]$  คือเมตริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์  $\{\Phi\}$  คือ เวกเตอร์เมตริกซ์ที่ประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้น

**ขั้นตอนที่ 3** สร้างสมการของเอลิเมนต์ (Element Equations) จากสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหารูปแบบสุดท้ายของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถเขียนได้ในรูปของเมตริกซ์ที่มีขนาดเท่ากับจำนวนตัวไม่รู้ค่าบนเอลิเมนต์นั้น ดังเช่นเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมที่มี 3 ตัวไม่รู้ค่าสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}_e \quad (3.3)$$

สามารถเขียนได้โดยย่อเป็น

$$[K]_e \{\Phi\}_e = \{F\}_e \quad (3.4)$$

ในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการเชิงอนุพันธ์จะมีอยู่ 3 วิธีหลักด้วยกันคือ

1. วิธีการโดยตรง (Direct Approach)
2. วิธีการแปรผัน (Variational Approach)
3. วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of Weighted Residuals)

ทั้งสามวิธีนี้ วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมมากที่สุด เพราะสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาได้อย่างกว้างขวางมากกว่าสองวิธีแรกที่มีข้อจำกัดอย่างมาก ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ก็เช่นกัน ได้ใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างมาใช้ในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์

**ขั้นตอนที่ 4** นำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่ได้ในขั้นตอนที่ 3 มาประกอบกันเป็นเมตริกซ์ขนาดใหญ่ ซึ่งแสดงความสัมพันธ์แบบต่อเนื่องของแต่ละเอลิเมนต์ในระบบ โดยมีจุดต่อ (Nodes) เป็นจุดที่มีความต่อเนื่องของเอลิเมนต์ที่เชื่อมต่อกัน สามารถเขียนระบบสมการในรูปแบบดังนี้

$$\sum (\text{Element Equations}) \Rightarrow [K]_{\text{sys}} \{\Phi\}_{\text{sys}} = \{F\}_{\text{sys}} \quad (3.5)$$

**ขั้นตอนที่ 5** ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ลงในสมการที่ (3.5) แล้วทำการแก้ระบบสมการนั้น เพื่อหาเวกเตอร์คำตอบ  $\{\Phi\}_{\text{sys}}$  อันประกอบไปด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ ดังเช่น ความเร็ว ความดัน และอุณหภูมิ สำหรับปัญหาการไหล เป็นต้น

**ขั้นตอนที่ 6** เมื่อได้คำตอบที่จุดต่อต่างๆในขั้นตอนที่ 5 แล้ว สามารถนำคำตอบนั้นมาคำนวณหาค่าอื่นๆที่เกี่ยวข้อง ดังเช่น เมื่อรู้ความเร็วของการไหล ก็สามารถนำมาคำนวณหาอัตราการไหลได้

ในบทนี้จะกล่าวถึงรายละเอียดการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ตลอดจนเอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆอย่างละเอียดเพื่อที่จะนำเอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆที่ได้ไปใช้ในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อวิเคราะห์ปัญหา

### 3.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลของโลหะ

#### 3.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาในรูปแบบเทนเซอร์

การไหลของโลหะภายใต้ภาวะการอัดรีดสำหรับปัญหาความเครียดในระนาบสามารถอธิบายได้โดยสมการเชิงอนุพันธ์ 4 สมการด้วยกันคือ สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมจำนวน 2 สมการ ดังแสดงในสมการ (2.9 a,b) ประกอบกับสมการ (2.15 a-c) สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล สมการ (2.6) และสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงาน สมการ (2.61) สามารถเขียนสมการได้ในรูปแบบของเทนเซอร์โดยใช้เครื่องหมายจุดภาค (Comma) แทนการหาค่าอนุพันธ์ของพจน์นั้นๆ เช่น  $\partial\sigma_x/\partial x$  สามารถเขียนในรูปแบบของเทนเซอร์คือ  $\sigma_{x,x}$  เป็นต้น สมการทั้งหมดสามารถเขียนได้ตามลำดับดังนี้

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} = 0 \quad (3.6a)$$

$$\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} = 0 \quad (3.6b)$$

โดย  $\sigma_x = -p + 2\mu u_{,x} \quad (3.7a)$

$$\sigma_y = -p + 2\mu v_{,y} \quad (3.7b)$$

$$\tau_{xy} = \mu(u_{,y} + v_{,x}) \quad (3.7c)$$

และจากสมการ (2.17)  $\mu = \frac{\sigma_{yield}}{\sqrt{3\dot{\epsilon}}}$

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล

$$u_{,x} + v_{,y} = 0 \quad (3.8)$$

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงาน

$$k((T_{,x})_{,x} + (T_{,y})_{,y}) + Q = \rho c(uT_{,x} + vT_{,y}) \quad (3.9)$$

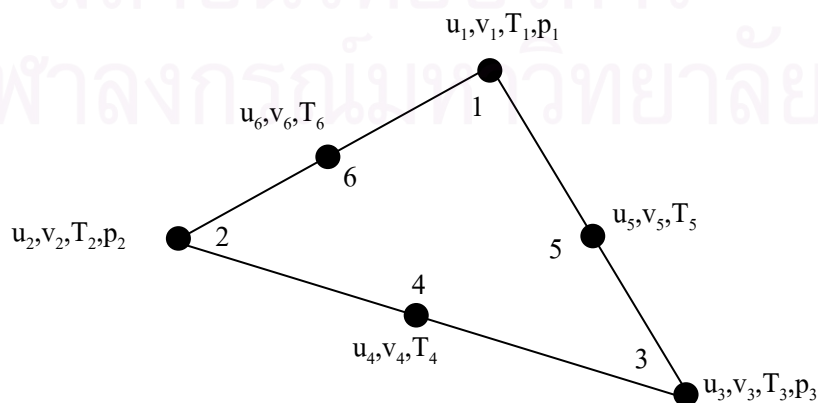
จากสมการ(2.60)  $Q = \frac{\mu(\dot{\epsilon})^2}{J}$

สัญลักษณ์ทั้งหมดในสมการข้างต้นมีความหมายดังนี้

|                  |   |
|------------------|---|
| $\sigma_x$       | คือความเค้นตั้งฉาก (Normal Stress) ตามแนวแกน x    |
| $\sigma_y$       | คือความเค้นตั้งฉาก (Normal Stress) ตามแนวแกน y    |
| $\tau_{xy}$      | คือความเค้นเฉือน (Shear Stress)                   |
| $\mu$            | คือค่าความหนืด                                    |
| $u$              | คือความเร็วตามแนวแกน x                            |
| $v$              | คือความเร็วตามแนวแกน y                            |
| $p$              | คือค่าความดัน                                     |
| $k$              | คือค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน                   |
| $c$              | คือค่าความจุความร้อนจำเพาะ                        |
| $\rho$           | คือค่าความหนาแน่น                                 |
| $Q$              | คือค่าความร้อนที่ก่อกำเนิดขึ้นเอง                 |
| $\sigma_{yield}$ | คือค่าความเค้นคราก                                |
| $\dot{\epsilon}$ | คือค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดประสิทธิผล     |
| $J$              | คือค่าคงที่สำหรับแปลงงานทางกล (= 42.65 kg.cm/cal) |

### 3.1.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลือกใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมมาประยุกต์ใช้ โดยเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมนี้มีฟังก์ชันการประมาณภายใน (Interpolation Function) อยู่ 2 ลักษณะคือ เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อ [6] จะมีลักษณะการประมาณภายในแบบควอดราติก (Quadratic Interpolation) สำหรับคำนวณตัวแปร ความเร็วและอุณหภูมิ อีกลักษณะคือเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 3 จุดต่อซึ่งมีลักษณะการประมาณภายในเป็นแบบเชิงเส้น (Linear Interpolation) สำหรับคำนวณตัวแปรความดันดังรูป 3.3



รูปที่ 3.3 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อสำหรับตัวแปรความเร็วและอุณหภูมิ และสามจุดต่อมุม สำหรับตัวแปรความดัน



สามารถเขียนฟังก์ชันการประมาณภายในให้อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \underset{1 \times 6}{[N]} \underset{6 \times 1}{\{u\}} = \sum N_i(x, y) u_i \\ v(x, y) &= \underset{1 \times 6}{[N]} \underset{6 \times 1}{\{v\}} = \sum N_i(x, y) v_i \\ p(x, y) &= \underset{1 \times 3}{[H]} \underset{3 \times 1}{\{p\}} = \sum H_i(x, y) p_i \\ T(x, y) &= \underset{1 \times 6}{[N]} \underset{6 \times 1}{\{T\}} = \sum N_i(x, y) T_i \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

โดย  $[N]$  แทนเมตริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์แบบควอดราติก

$[H]$  แทนเมตริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์แบบเชิงเส้น

ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ทั้งสองแบบของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อ มีความสัมพันธ์กับฟังก์ชันพิกัดของพื้นที่ในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$N_1 = L_1^2 - L_1(L_2 + L_3) \quad (3.11a)$$

$$N_2 = L_2^2 - L_2(L_3 + L_1) \quad (3.11b)$$

$$N_3 = L_3^2 - L_3(L_1 + L_2) \quad (3.11c)$$

$$N_4 = 4L_2L_3 \quad (3.11d)$$

$$N_5 = 4L_3L_1 \quad (3.11e)$$

$$N_6 = 4L_1L_2 \quad (3.11f)$$

$$H_i = L_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.12)$$

โดย  $L_i$  แทนฟังก์ชันพิกัดของพื้นที่ ซึ่งหาได้จากสมการ

$$L_i = a_i + b_i x + c_i y \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{2A} & b_1 &= \frac{y_2 - y_3}{2A} & c_1 &= \frac{x_3 - x_2}{2A} \\ a_2 &= \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{2A} & b_2 &= \frac{y_3 - y_1}{2A} & c_2 &= \frac{x_1 - x_3}{2A} \\ a_3 &= \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2A} & b_3 &= \frac{y_1 - y_2}{2A} & c_3 &= \frac{x_2 - x_1}{2A} \end{aligned} \quad (3.14)$$

A แทนพื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม คำนวณได้จาก

$$A = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \quad (3.15)$$

### 3.1.3 การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์

หลังจากได้สมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาประกอบด้วยลักษณะการประมาณภายในของเอลิเมนต์ จึงสามารถทำการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of Weighted Residuals) โดยเริ่มจาก [1]

$$\int_{\Omega} W_i R \, d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (3.16)$$

โดย  $W_i$  คือฟังก์ชันน้ำหนัก (Weighted Function)

$R$  คือเศษตกค้าง (Residual)

$m$  คือจำนวนตัวไม่รู้ค่าในเอลิเมนต์

และโดยปกติเราจะเลือก  $W_i = N_i$  ซึ่งเรียกว่าบับโนฟ-กาลอร์คิน (Bubnov-Galerkin)

ทำการประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์ทั้ง 4 สมการ คือสมการ (3.6a,b), (3.8), (3.9) ตามลำดับ โดยใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างสมการ (3.16)

$$\int_A N_i (\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y}) \, dA = 0 \quad (3.17a)$$

$$\int_A N_i (\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y}) \, dA = 0 \quad (3.17b)$$

$$\int_A H_i (u_{,x} + v_{,y}) \, dA = 0 \quad (3.17c)$$

$$\rho c \int_A N_i [(uT_{,x} + vT_{,y}) - k(T_{,x})_{,x} - k(T_{,y})_{,y} - Q] \, dA = 0 \quad (3.17d)$$

ประยุกต์ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's Theorem) เข้ากับสมการ (3.17a-d) เพื่อก่อให้เกิดค่าอินทิกรัลบนขอบเขตของเอลิเมนต์ได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \int_A N_i \sigma_{x,x} \, dA &= \int_A (N_i \sigma_x)_{,x} \, dA - \int_A N_{i,x} \sigma_x \, dA \\ &= \int_{S_0} N_i \sigma_x \, ldS_0 - \int_A N_{i,x} \sigma_x \, dA \end{aligned} \quad (3.18a)$$

$$\begin{aligned} \int_A N_i \tau_{xy,y} \, dA &= \int_A (N_i \tau_{xy})_{,y} \, dA - \int_A N_{i,y} \tau_{xy} \, dA \\ &= \int_{S_0} N_i \tau_{xy} \, mdS_0 - \int_A N_{i,y} \tau_{xy} \, dA \end{aligned} \quad (3.18b)$$

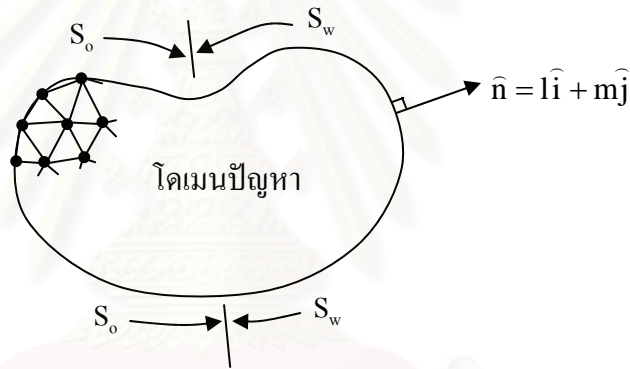
$$\begin{aligned} \int_A N_i \tau_{xy,x} \, dA &= \int_A (N_i \tau_{xy})_{,x} \, dA - \int_A N_{i,x} \tau_{xy} \, dA \\ &= \int_{S_0} N_i \tau_{xy} \, ldS_0 - \int_A N_{i,x} \tau_{xy} \, dA \end{aligned} \quad (3.19a)$$

$$\begin{aligned}\int_A N_i \sigma_{y,y} dA &= \int_A (N_i \sigma_y)_{,y} dA - \int_A N_{i,y} \sigma_y dA \\ &= \int_{S_0} N_i \sigma_y m dS_0 - \int_A N_{i,y} \sigma_y dA\end{aligned}\quad (3.19b)$$

$$\begin{aligned}\int_A N_i (T_{,x})_{,x} dA &= \int_A (N_i T_{,x})_{,x} dA - \int_A N_{i,x} T_{,x} dA \\ &= \int_{S_w} N_i T_{,x} l dS_w - \int_A N_{i,x} T_{,x} dA\end{aligned}\quad (3.20a)$$

$$\begin{aligned}\int_A N_i (T_{,y})_{,y} dA &= \int_A (N_i T_{,y})_{,y} dA - \int_A N_{i,y} T_{,y} dA \\ &= \int_{S_w} N_i T_{,y} m dS_w - \int_A N_{i,y} T_{,y} dA\end{aligned}\quad (3.20b)$$

โดยแสดงดังรูปที่ 3.4 1 และ m คือทิศทางโคไซน์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย  $\hat{n}$  ที่ตั้งฉากกับขอบของปัญหานั้นๆ  $S_0$  คือขอบที่รับภาระทางกล  $S_w$  คือขอบที่รับภาระความร้อน A คือพื้นที่ของเอลิเมนต์



รูปที่ 3.4 เงื่อนไขขอบเขตของโดเมนปัญหา

แทนค่าอินทิกรัลในสมการ (3.18) ถึง (3.20) ลงในสมการ (3.17 a,b,d)

$$\int_A N_{i,x} \sigma_x dA + \int_A N_{i,y} \tau_{xy} dA = \int_{S_0} N_i (\sigma_x l + \tau_{xy} m) dS_0 \quad (3.21a)$$

$$\int_A N_{i,x} \tau_{xy} dA + \int_A N_{i,y} \sigma_y dA = \int_{S_0} N_i (\tau_{xy} l + \sigma_y m) dS_0 \quad (3.21b)$$

$$\begin{aligned}\rho c \int_A N_i (u T_{,x} + v T_{,y}) dA + k \int_A N_{i,x} T_{,x} dA + k \int_A N_{i,y} T_{,y} dA \\ = k \int_{S_w} N_i (T_{,x} l + T_{,y} m) dS_w + \int_A N_i Q dA\end{aligned}\quad (3.21c)$$

ทำการแทนค่าความเค้นจากสมการ (3.7) เข้าไปในสมการ (3.21a) และ (3.21b) แล้วทำการจัดรูปใหม่ และหารสมการ (3.21c) ตลอดด้วย  $\rho c$  โดยค่าของ  $\mu$  ถูกกำหนดให้คงที่ตลอดพื้นที่เอลิเมนต์ จะได้ชุดสมการดังนี้

$$-\int_A N_{i,x} p dA + 2\mu \int_A N_{i,x} u_{,x} dA + \mu \int_A N_{i,y} (u_{,y} + v_{,x}) dA = \int_{S_0} N_i P_x dS_0 \quad (3.22a)$$

$$\mu \int_A N_{i,x} (u_{,y} + v_{,x}) dA - \int_A N_{i,y} p dA + 2\mu \int_A N_{i,y} v_{,y} dA = \int_{S_0} N_i P_y dS_0 \quad (3.22b)$$

$$\begin{aligned} \int_A N_i (u T_{,x} + v T_{,y}) dA + \frac{k}{\rho c} \int_A N_{i,x} T_{,x} dA + \frac{k}{\rho c} \int_A N_{i,y} T_{,y} dA \\ = \frac{1}{\rho c} \int_{S_w} N_i q_w dS_w + \frac{1}{\rho c} \int_A N_i Q dA \end{aligned} \quad (3.22c)$$

โดย  $P_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m \quad (3.23a)$

$$P_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m \quad (3.23b)$$

$$q_w = k T_{,x} l + k T_{,y} m \quad (3.24)$$

ในที่นี้  $P_x, P_y$  คือแรงทางกลกระทำที่ขอบของโดเมนปัญหา  $q_w$  คือปริมาณความร้อนที่ไหลผ่านขอบของโดเมนปัญหา

สมการ (3.22a,b) สมการ (3.17c) และสมการ (3.22c) สามารถเขียนและจัดรูปให้อยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์ตามลำดับได้ดังนี้

$$\int_A \left[ \left( 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - p \right) \frac{\partial N_i}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] dA = \int_{S_0} N_i P_x dS_0 \quad (3.25 a)$$

$$\int_A \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial N_i}{\partial x} + \left( 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - p \right) \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] dA = \int_{S_0} N_i P_y dS_0 \quad (3.25 b)$$

$$\int_A \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) H_i dA = 0 \quad (3.25 c)$$

$$\begin{aligned} \int_A N_i \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) dA + \frac{k}{\rho c} \int_A \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} dA + \frac{k}{\rho c} \int_A \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} dA \\ = \frac{1}{\rho c} \int_{S_w} N_i q_w dS_w + \frac{1}{\rho c} \int_A N_i Q dA \end{aligned} \quad (3.25 d)$$

ฟังก์ชันการประมาณภายในของความเร็วและอุณหภูมิตั้งสมการที่ (3.10) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ตามแนวแกน  $x$  และ  $y$  ได้ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] \{u\} & ; & \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right] \{u\} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] \{v\} & ; & \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right] \{v\} \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] \{T\} & ; & \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right] \{T\} \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

แทนค่าสมการ (3.10) และ (3.26) ลงใน (3.25 a-d) จะได้

$$2\mu \int_A \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] dA \{u\} + \mu \int_A \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right] dA \{u\} + \mu \int_A \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] dA \{v\} - \int_A \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} [H] dA \{p\}$$

$$= \int_{S_o} \{N\} P_x dS_o \quad (3.27a)$$

$$\mu \int_A \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right] dA \{u\} + 2\mu \int_A \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right] dA \{v\} + \mu \int_A \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right] dA \{v\} - \int_A \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} [H] dA \{p\}$$

$$= \int_{S_o} \{N\} P_y dS_o \quad (3.27b)$$

$$\int_A \{H\} \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] dA \{u\} + \int_A \{H\} \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right] dA \{v\} = \{0\} \quad (3.27c)$$

$$u \int_A \{N\} \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] dA \{T\} + v \int_A \{N\} \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right] dA \{T\} + \frac{k}{\rho c} \int_A \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] dA \{T\} + \frac{k}{\rho c} \int_A \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right] dA \{T\}$$

$$= \frac{1}{\rho c} \int_{S_w} \{N\} q_w dS_w + \frac{1}{\rho c} \int_A \{N\} Q dA \quad (3.27d)$$

สมการ (3.27 a-d) สามารถเขียนได้ในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$2\mu [M_{xx}] \{u\} + \mu [M_{yy}] \{u\} + \mu [M_{xy}] \{v\} - [H_x] \{p\} = \{R_u\} \quad (3.28a)$$

$$\mu [M_{yx}] \{u\} + \mu [M_{xx}] \{v\} + 2\mu [M_{yy}] \{v\} - [H_y] \{p\} = \{R_v\} \quad (3.28b)$$

$$[H_x]^T \{u\} + [H_y]^T \{v\} = \{0\} \quad (3.28c)$$

$$u [K_x] \{T\} + v [K_y] \{T\} + \frac{k}{\rho c} [M_{xx}] \{T\} + \frac{k}{\rho c} [M_{yy}] \{T\} = \{D\} + \{Q\} \quad (3.28d)$$

โดย  $[M_{xx}] = \int_A \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] dA \quad (3.29a)$

$$[M_{yy}] = \int_A \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right] dA \quad (3.29b)$$

$$[M_{xy}] = [M_{yx}]^T = \int_A \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] dA \quad (3.29c)$$

$$[H_x] = \int_A \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} [H] dA \quad (3.29d)$$

$$[H_y] = \int_A \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} [H] dA \quad (3.29e)$$

$$[K_x] = \int_A \{N\} \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] dA \quad (3.29f)$$

$$[K_y] = \int_A \{N\} \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right] dA \quad (3.29g)$$

$$\{R_u\} = \int_{S_o} \{N\} P_x dS_o \quad (3.29h)$$

$$\{R_v\} = \int_{S_o} \{N\} P_y dS_o \quad (3.29i)$$

$$\{D\} = \frac{1}{\rho c} \int_{S_w} \{N\} q_w dS_w \quad (3.29j)$$

$$\{Q\} = \frac{Q}{\rho c} \int_A \{N\} dA \quad (3.29k)$$

หมายเหตุ :

1. เนื่องจากในกระบวนการคำนวณจะแยกแยะระหว่างสมการ (3.28a-c) กับ (3.29d) ดังนั้นตัวแปร  $u$  และ  $v$  ในสมการ (3.28d) จะถือว่าเป็นค่าคงที่ที่ได้จากการคำนวณสมการ (3.28a-c) นั่นเอง ดังจะกล่าวโดยละเอียดในหัวข้อ 3.3

2. เมตริกซ์  $\{D\}$  สมการที่ (3.29j) คือเมตริกซ์ที่เกิดจากการถ่ายเทความร้อนผ่านขอบของโดเมนปัญหา เนื่องจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ไม่พิจารณาถึงกรณีดังกล่าว จึงสามารถกำหนดให้เป็น 0

เมตริกซ์ที่อยู่ในรูปของค่าอินทิกรัลบนพื้นที่ของเอลิเมนต์ดังแสดงในสมการ (3.29a-k) จะอยู่ในรูปของเอลิเมนต์เมตริกซ์ที่สามารถแปลงรูปให้อยู่ในลักษณะที่สามารถนำไปใช้ในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ไฟไนต์เอลิเมนต์ดังที่จะแสดงในหัวข้อถัดไป

### 3.2 การสร้างเอลิเมนต์เมตริกซ์

ในการประดิษฐ์โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์จะต้องทำการสร้างเอลิเมนต์เมตริกซ์จากเดิมที่อยู่ในรูปของการอินทิเกรตบนพื้นที่ หรือการอินทิเกรตบนขอบ ให้อยู่ในรูปที่สามารถใช้ในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ สำหรับเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม จะมีสูตรสำเร็จในการหาค่าอินทิเกรตดังกล่าว โดยจะเริ่มจากการเขียนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์จากสมการ(3.11) และ (3.12) ในรูปแบบดังนี้ [4]



$$\underset{1 \times 6}{[N]} = \underset{1 \times 6}{[R]} \underset{6 \times 6}{[A]} \quad (3.30)$$

หรือ

$$\underset{6 \times 1}{\{N\}} = \left[ \underset{1 \times 6}{[R]} \underset{6 \times 6}{[A]} \right]^T = \underset{6 \times 6}{[A]^T} \underset{1 \times 6}{[R]^T} \quad (3.31)$$

$$\{H\} = \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

โดย

$$\underset{6 \times 6}{[A]^T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\underset{6 \times 1}{\{R\}} = \begin{Bmatrix} L_1^2 \\ L_2^2 \\ L_3^2 \\ L_2 L_3 \\ L_3 L_1 \\ L_1 L_2 \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

ทำการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเมื่อเทียบกับแกน x และ y

$$\underset{6 \times 1}{\left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\}} = \underset{6 \times 6}{[A]^T} \underset{6 \times 1}{\frac{\partial}{\partial x} \{R\}} \quad (3.35a)$$

$$\underset{6 \times 1}{\left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\}} = \underset{6 \times 6}{[A]^T} \underset{6 \times 1}{\frac{\partial}{\partial y} \{R\}} \quad (3.35b)$$

หาอนุพันธ์ของเวกเตอร์  $\{R\}$  จากสมการ (3.30) โดยค่าต่างๆในเวกเตอร์นี้จะอยู่ในรูปแบบต่างๆของฟังก์ชันพิกัดของพื้นที่ดังแสดงในสมการ (3.13) ซึ่งจะอยู่ในรูปของตัวแปร x และ y ทำให้สามารถหาค่าอนุพันธ์ได้โดยง่ายคือ

$$\frac{\partial}{\partial x} \{R\} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} L_1^2 \\ L_2^2 \\ L_3^2 \\ L_2 L_3 \\ L_3 L_1 \\ L_1 L_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2b_3 \\ 0 & b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

$$= [B]^T \{H\} \quad (3.37)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{\partial}{\partial y} \{R\} = \frac{\partial}{\partial y} \begin{Bmatrix} L_1^2 \\ L_2^2 \\ L_3^2 \\ L_2 L_3 \\ L_3 L_1 \\ L_1 L_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_3 \\ 0 & c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & c_1 \\ c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

$$= [C]^T \{H\} \quad (3.39)$$

ดังนั้นสามารถเขียนสมการ (3.35) ใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} [A]^T & [B]^T \\ [A]^T & [C]^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [H] \\ [H] \end{Bmatrix}_{3 \times 1} \quad (3.40a)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} [A]^T & [B]^T \\ [A]^T & [C]^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [H] \\ [H] \end{Bmatrix}_{3 \times 1} \quad (3.40b)$$

โดย

$$[B]^T = \begin{bmatrix} 2b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2b_3 \\ 0 & b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$[C]^T = \begin{bmatrix} 2c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_3 \\ 0 & c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & c_1 \\ c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

จะพบว่าเมตริกซ์  $[A]^T$   $[B]^T$  และ  $[C]^T$  เป็นค่าคงที่ ในขณะที่  $\{R\}$  และ  $\{H\}$  จะอยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชันพิกัดของพื้นที่ โดยในการหาเอลิเมนต์เมตริกซ์มีความจำเป็นต้องทำการอินทิเกรตค่าต่างๆเหล่านี้ ซึ่งสามารถหาได้โดยใช้สูตรสำเร็จดังนี้ [4]

$$\int_A L_1^\alpha L_2^\beta L_3^\gamma dA = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} 2A \quad (3.43)$$

โดย  $A$  คือพื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆในสมการ (3.29 a-k) สามารถหาได้โดยตรงจากการแทนค่าเมตริกซ์ที่สร้างขึ้นในสมการที่ (3.30-3.42) ประกอบกับการอินทิเกรตดังสมการที่ (3.43) ดังต่อไปนี้

การหาเมตริกซ์  $[M_{xx}]$ ,  $[M_{yy}]$ ,  $[M_{xy}]$

ในการหา  $[M_{xx}]$  ดังสมการที่ (3.29 a)

$$[M_{xx}] = \int_A \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] dA$$

จะเริ่มจากการแทนค่าโดยสมการ (3.40a)

$$[M_{xx}] = [A]^T [B]^T \int_A \{H\} [H] dA [B][A]$$

$$= [A]^T [B]^T \int_A \begin{bmatrix} L_1^2 & L_1 L_2 & L_1 L_3 \\ L_1 L_2 & L_2^2 & L_2 L_3 \\ L_1 L_3 & L_2 L_3 & L_3^2 \end{bmatrix} dA [B][A]$$

$$= [A]^T [B]^T \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} [B][A] \quad (3.44)$$

$$[M_{xx}] = [A]^T [B]^T [G][B][A] \quad (3.45)$$

โดย 
$$[G] = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

เมตริกซ์  $[M_{yy}]$  และ  $[M_{xy}]$  ก็สามารถหาได้ในลักษณะเดียวกันโดย

$$[M_{yy}] = [A]^T [C]^T [G] [C] [A] \quad (3.47)$$

$$[M_{xy}] = [M_{yx}]^T = [A]^T [C]^T [G] [B] [A] \quad (3.48)$$

การหาเมตริกซ์  $[H_x]$ ,  $[H_y]$

เมตริกซ์  $[H_x]$  และ  $[H_y]$  สามารถหาได้ในทำนองเดียวกันคือ

$$\begin{aligned} [H_x] &= \int_A \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} [H] dA \\ &= \int_A [A]^T [B]^T \{H\} [H] dA \\ &= [A]^T [B]^T \int_A \{H\} [H] dA \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$[H_x] = [A]^T [B]^T [G] \quad (3.50)$$

สามารถหา  $[H_y]$  ได้ในลักษณะเดียวกัน

$$[H_y] = [A]^T [C]^T [G] \quad (3.51)$$

การหาเมตริกซ์  $[K_x]$ ,  $[K_y]$

เมตริกซ์  $[K_x]$  และ  $[K_y]$  ก็สามารถหาได้เช่นเดียวกับกรณีข้างต้น คือจากสมการ (3.29f)

$$[K_x] = \int_A \{N\} \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] dA$$

แทนค่าด้วยสมการ (3.31) และ (3.40 a) จะได้

$$\begin{aligned} [K_x] &= \int_A [A]^T [R]^T [H] [B] [A] dA \\ &= [A]^T \int_A \{R\} [H] dA [B] [A] \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$[K_x] = [A]^T [F] [B] [A] \quad (3.53)$$

เช่นเดียวกัน เมตริกซ์  $[K_y]$  จะมีค่าเท่ากับ

$$[K_y] = [A]^T [F][C][A] \quad (3.54)$$

โดย

$$[F] = \int_A \{R\} [H] dA \quad (3.55)$$

$$= \int_A \begin{Bmatrix} L_1^2 \\ L_2^2 \\ L_3^2 \\ L_2L_3 \\ L_3L_1 \\ L_1L_2 \end{Bmatrix} [L_1 \quad L_2 \quad L_3] dA$$

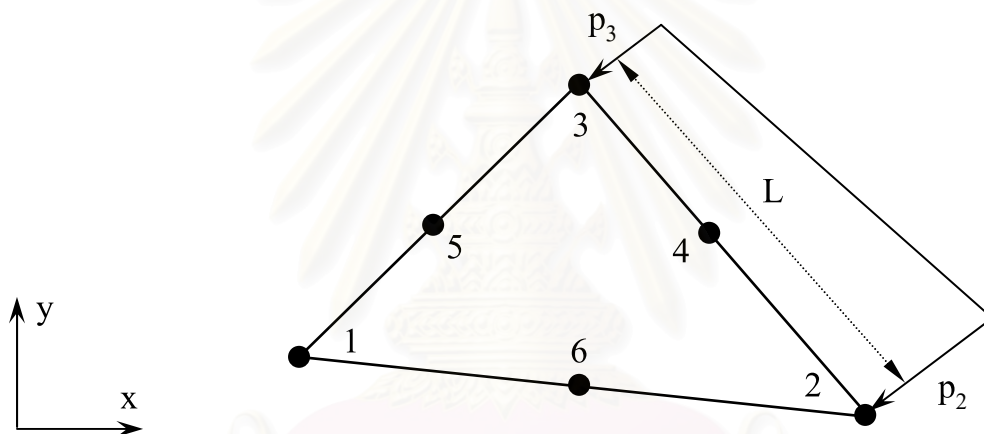
$$= \int_A \begin{bmatrix} L_1^3 & L_1^2L_2 & L_1^2L_3 \\ L_2^2L_1 & L_2^3 & L_2^2L_3 \\ L_3^2L_1 & L_3^2L_2 & L_3^3 \\ L_1L_2L_3 & L_2^2L_3 & L_2L_3^2 \\ L_3L_1^2 & L_1L_2L_3 & L_3^2L_1 \\ L_1^2L_2 & L_1L_2^2 & L_1L_2L_3 \end{bmatrix} dA$$

จากสูตรอินทิเกรต สมการ (3.43) จะได้

$$[F] = \frac{A}{60} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

### การหาเมตริกซ์ $\{R_u\}$ , $\{R_v\}$

ลักษณะทางกายภาพของเวกเตอร์เมตริกซ์  $\{R_u\}$  และ  $\{R_v\}$  ก็คือแรงดันที่กระทำที่ขอบของเอลิเมนต์ เนื่องจากลักษณะของอินทิกรัลจะอยู่ในลักษณะอินทิกรัลตลอดขอบของเอลิเมนต์ หากขอบเหล่านี้เป็นของเอลิเมนต์ที่อยู่ภายในโดเมนปัญหา แรงดังกล่าวจะสมดุล กล่าวคือค่าจะเป็นศูนย์ แต่หากขอบของเหล่านี้เป็นของเอลิเมนต์ที่เป็นขอบของโดเมนปัญหาจะเกิดได้สองกรณี คือหากไม่มีแรงที่เกิดจากภายนอกมากระทำกับโดเมนของปัญหา ค่าจะเป็นศูนย์ แต่ถ้าหากมีแรงจากภายนอกมากระทำ ค่าจะไม่เป็นศูนย์ ดังเช่นปัญหาการอัดรีด หากที่ผิวของโลหะที่ใช้อัดรีดมีความเสียดทานกับผิวของแท่นบรรจุ (Container) ค่าจะไม่เป็นศูนย์ เป็นต้น ซึ่งเรื่องของความเสียดทานที่มีผลต่อระบบนี้จะได้กล่าวถึงในบทถัดไป ตัวอย่างของแรงดันที่ขอบเอลิเมนต์แสดงโดยรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 แรงดันกระทำที่ขอบของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

ตัวอย่างนี้จะมีแรงดันกระทำที่ขอบของเอลิเมนต์ด้านจุดต่อ 3-4-2 ที่มีความยาว  $L$  สามารถเขียนเวกเตอร์เมตริกซ์  $\{R_u\}$  และ  $\{R_v\}$  ได้ดังนี้

$$\{R_u\} = -\frac{p_2 L_y}{6} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \frac{p_3 L_y}{6} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.57a)$$



$$\{R_v\} = -\frac{p_2 L_x}{6} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \frac{p_3 L_x}{6} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.57b)$$

โดย  $p_2$  คือความดันที่จุดต่อหมายเลข 2

$p_3$  คือความดันที่จุดต่อหมายเลข 3

$L_x$  คือความยาวภาพฉายของด้าน 2-3 ของเอลิเมนต์บนแกน x

$L_y$  คือความยาวภาพฉายของด้าน 2-3 ของเอลิเมนต์บนแกน y

เครื่องหมายของเวกเตอร์เมตริกซ์จะขึ้นอยู่กับทิศทางของแรงลัพธ์ ในทิศทางแกน x และแกน y หากมีทิศทางเดียวกับแกนก็จะมีค่าเป็นบวก หากสวนทิศทางกัน ก็จะมีค่าเป็นลบ

การหาเมตริกซ์  $\{Q\}$

เมตริกซ์นี้จะหมายถึงค่าความร้อนที่ก่อกำเนิดขึ้นเองภายในเอลิเมนต์เนื่องจากการเปลี่ยนรูปของโลหะ ดังสมการ (3.29k)

$$\{Q\} = \frac{Q}{\rho c} \int_A \{N\} dA$$

โดยการแทนสมการ (3.31) ลงในสมการ (3.29k) จะได้

$$\{Q\} = \frac{Q}{\rho c} [A]^T \int_A \{R\} dA \quad (3.58)$$

$$\{Q\} = \frac{Q}{\rho c} [A]^T \{E\} \quad (3.59)$$

โดย

$$\{E\} = \int_A \{R\} dA = \frac{A}{12} \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.60)$$

การหาค่า  $\mu$  และ  $Q$

เนื่องจากค่าความหนืด ( $\mu$ ) และค่าความร้อนที่ก่อกำเนิดขึ้นเองภายใน ( $Q$ ) แสดงโดยสมการ (2.17) และสมการ (2.60) ตามลำดับ คือ

$$\mu = \frac{\sigma_{yield}}{\sqrt{3\dot{\epsilon}}}$$

$$Q = \frac{\mu(\dot{\epsilon})^2}{J}$$

จะเห็นว่าค่าดังกล่าวขึ้นอยู่กับอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดประสิทธิผล ( $\dot{\epsilon}$ ) ซึ่งเปลี่ยนแปลงไปตามเอลิเมนต์ ดังนั้นค่าความหนืดและค่าความร้อนที่ก่อกำเนิดขึ้นเองภายใน ก็จะเปลี่ยนแปลงไปตามเอลิเมนต์เช่นเดียวกัน ค่าของความเครียดประสิทธิผลคือ [31]

$$\dot{\epsilon} = \sqrt{2\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}}$$

$$= \sqrt{2(\dot{\epsilon}_x\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y\dot{\epsilon}_y + 2\dot{\epsilon}_{xy}\dot{\epsilon}_{xy})} \quad (3.61)$$

โดยค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดแสดงโดยสมการ (2.13)

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.62a)$$

$$\dot{\epsilon}_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.62b)$$

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (3.62c)$$

ในการหาค่า  $\dot{x}$  สามารถใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์แบบเชิงเส้น โดยใช้ความเร็วจุดต่อที่มูมาคำนวณหาค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดต่างๆ ฟังก์ชันการประมาณภายในแบบเชิงเส้นแสดงโดยสมการ (3.12) สามารถเขียนในรูปเมตริกซ์คือ

$$[H] = [L_1 \quad L_2 \quad L_3]$$

โดยค่าของ  $L_i$  แสดงโดยสมการ (3.13)

$$L_i = a_i + b_i x + c_i y ; i = 1, 2, 3$$

ค่า  $a_i, b_i, c_i$  แสดงโดยสมการ (3.14)

ดังนั้นค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดสามารถเขียนได้ในรูป

$$\dot{\epsilon}_x = \left[ \frac{\partial H}{\partial x} \right] \{u\} = b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 \quad (3.63)$$

$$\dot{\epsilon}_y = \left[ \frac{\partial H}{\partial y} \right] \{v\} = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 \quad (3.64)$$

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial H}{\partial y} \right] \{u\} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial H}{\partial x} \right] \{v\} = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 \quad (3.65)$$

ค่าต่างๆสามารถนำไปประดิษฐ์โปรแกรมเพื่อคำนวณหาค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดประสิทธิผล และจะนำไปสู่ค่าความหนืดและค่าความร้อนที่ก่อกำเนิดขึ้นเองภายใน

### 3.3 กระบวนการวิธีในการคำนวณหาคำตอบ

หลังจากที่ได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และเอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆของปัญหาการไหลของโลหะภายใต้ภาวะการอัดรีด ก็จะนำเอลิเมนต์เมตริกซ์ที่ได้นี้ไปประดิษฐ์โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อคำนวณหาคำตอบที่จุดต่อต่างๆก็คือความเร็ว ความดัน และอุณหภูมิ ในหัวข้อนี้จะนำเสนอกระบวนการที่จะใช้ในการแก้ปัญหาเพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบจากสมการเชิงอนุพันธ์ทั้ง 4 สมการซึ่งสอดคล้องซึ่งกันและกัน โดยลักษณะของปัญหาที่เกิดจากสมการเชิงอนุพันธ์ดังกล่าวจะอยู่ในรูปแบบของสมการไม่เชิงเส้น (Nonlinear Equations) ดังนั้นจึงต้องอาศัยการทำซ้ำ (Iteration) เพื่อให้ได้มาซึ่งผลเฉลยที่ลู่อู่เข้าสู่คำตอบที่ถูกต้อง โดยจะทำการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สองโปรแกรมแยก

ตามกรณีศึกษาของปัญหา โปรแกรมแรกจะเป็นปัญหาที่ไม่คำนึงถึงความร้อนที่เกิดขึ้นในระบบ ดังนั้นจะทำการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมพร้อมไปกับสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวลเพื่อให้ได้มาซึ่งตัวไม่รู้ค่าคือความเร็วและความดัน โปรแกรมที่สองจะเป็นกรณีที่คำนึงถึงความร้อนที่เกิดขึ้นในระบบ โดยจะทำการคำนวณสมการอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวลและโมเมนตัมควบคู่ไปกับสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงาน โดยรายละเอียดของการคำนวณของทั้งสองโปรแกรมได้อธิบายโดยละเอียดในหัวข้อย่อต่อไปนี้

### 3.3.1 กรณีที่ไม่คำนึงถึงความร้อนในระบบ

จากสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม สมการ(3.6a,b) จะเห็นว่ารูปแบบของสมการจะเป็นแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear) เนื่องจากค่าความหนืดจะไม่ใช่ค่าคงที่ แต่จะเป็นฟังก์ชันของความเร็วซึ่งเป็นตัวไม่รู้ค่า ดังนั้นการคำนวณจึงต้องมีกระบวนการทำซ้ำจนกระทั่งคำตอบเข้าสู่คำตอบที่ถูกต้องโดยถือเกณฑ์กำหนดค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้เป็นมาตรฐานตรวจสอบการลู่เข้า ดังจะกล่าวถึงในหมายเหตุข้อ 2 โดยกระบวนการทำซ้ำจะมีลำดับขั้นตอนดังนี้

1. ทำการสมมุติค่าความหนืดในรอบแรกของการคำนวณ
2. หาค่าเอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆในสมการ(3.28a-c) ซึ่งสามารถเขียนในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} 2\mu[M_{xx}] + \mu[M_{yy}] & \mu[M_{xy}] & -[H_x] \\ \mu[M_{yx}] & \mu[M_{xx}] + 2\mu[M_{yy}] & -[H_y] \\ [H_x]^T & [H_y]^T & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{R_u\} \\ \{R_v\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (3.66)$$

จะเห็นว่าสมการด้านบนจะอยู่ในรูปแบบของระบบสมการเชิงเส้น เนื่องจากค่าความหนืดในแต่ละรอบจะเป็นค่าคงที่และจะถูกเปลี่ยนแปลงเป็นค่าที่เหมาะสมในแต่ละรอบ

3. ทำการประกอบเอลิเมนต์เมตริกซ์แต่ละเอลิเมนต์เข้าสู่ระบบสมการรวม แล้วทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ก่อนที่จะแก้ระบบสมการเพื่อให้ได้ค่าตัวไม่รู้ค่า  $u$ ,  $v$  และ  $p$  ที่จุดต่อต่างๆ
4. ตรวจสอบค่าความคลาดเคลื่อนของค่าที่คำนวณได้จากข้อ 3 โดยเปรียบเทียบกับค่าที่คำนวณได้จากรอบก่อนหน้า ขั้นตอนนี้สามารถข้ามไปได้ในรอบแรกของการคำนวณ
5. หากผลความคลาดเคลื่อนยังไม่น้อยกว่าเกณฑ์ที่กำหนดไว้ ก็จะทำการคำนวณหาค่าความหนืดค่าใหม่โดยใช้สมการ(2.17) และใช้ความเร็วที่คำนวณได้จากข้อ 3 โดยในแต่ละเอลิเมนต์จะมีค่าความหนืดไม่เท่ากันขึ้นอยู่กับผลของความเร็วที่เอลิเมนต์นั้นๆ

6. กลับไปข้อ 2 เพื่อสร้างเอลิเมนต์เมตริกซ์ใหม่โดยใช้ค่าความหนาแน่นค่าใหม่ของเอลิเมนต์นั้นๆ เป็นเช่นนี้เรื่อยไปจนกระทั่งผลเฉลยคู่เข้าสู่คำตอบที่ถูกต้อง

### 3.3.2 กรณีที่คำนึงถึงความร้อนที่เกิดขึ้นในระบบ

ในกรณีนี้จะทำการคำนวณสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงานควบคู่ไปกับสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมและมวล ซึ่งได้ทำการประดิษฐ์โปรแกรมตามกระบวนการในหัวข้อ 3.3.1 โดยจะทำการประดิษฐ์โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์เพิ่มเติมขึ้นโดยใช้สมการ (3.28d) ซึ่งมีตัวแปรความเร็ว  $u$  และ  $v$  ปรากฏอยู่ในสมการ สืบเนื่องจากพลังงานความร้อนที่เกิดขึ้นจากการเปลี่ยนรูปจะมากหรือน้อยจะขึ้นอยู่กับความเร็วดังแสดงในสมการ (2.60) ซึ่งตัวแปร  $u$  และ  $v$  นี้หาได้จากการแก้ระบบสมการในหัวข้อย่อยที่ 3 ในหัวข้อ 3.3.1 นั่นเอง นอกจากสมการอนุรักษ์โมเมนตัมและมวลจะส่งผลโดยตรงต่อสมการอนุรักษ์พลังงานแล้ว ในทางกลับกันสมการอนุรักษ์พลังงานก็ส่งผลต่อสมการอนุรักษ์โมเมนตัมและมวล เนื่องจากค่าความหนาแน่นซึ่งเป็นตัวแปรสำคัญจะขึ้นอยู่กับค่าความเค้นคราก ซึ่งถูกสมมุติให้คงที่ในหัวข้อย่อยที่แล้ว แต่ตามความเป็นจริงจะไม่คงที่แต่จะขึ้นอยู่กับอุณหภูมิที่จุดต่อต่างๆซึ่งได้จากการคำนวณสมการอนุรักษ์พลังงาน ดังนั้นจะเห็นว่าสมการเหล่านี้มีความจำเป็นต้องทำการคำนวณควบคู่กันไป และทำการปรับปรุงค่าจนกระทั่งผลเฉลยคู่เข้าสู่คำตอบที่ถูกต้อง ในการคำนวณจะแยกกันชัดเจนระหว่างสมการอนุรักษ์โมเมนตัมและมวลเพื่อคำนวณหาความเร็ว ความดัน และสมการอนุรักษ์พลังงานเพื่อคำนวณหาอุณหภูมิ ขั้นตอนในการคำนวณสามารถอธิบายเป็นข้อๆได้ดังนี้

1. ในช่วงแรกจะเหมือนกับหัวข้อย่อยที่แล้วคือเริ่มต้นด้วยการสมมุติค่าความหนาแน่นให้เท่ากันทุกเอลิเมนต์
2. หาค่าเอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆในสมการ (3.28a-c) ซึ่งสามารถเขียนในรูปแบบสมการ (3.66) โดยในรอบแรกจะใช้ค่าความหนาแน่นในแต่ละเอลิเมนต์ที่สมมุติขึ้นจากข้อ 1 ในรอบต่อไปก็จะเปลี่ยนแปลงให้ค่าโดยใช้ค่าความหนาแน่นที่คำนวณจากความเร็วและอุณหภูมิในรอบนั้นๆ หรือจากขั้นตอนที่ 4 นั่นเอง
3. ทำการประกอบเอลิเมนต์เมตริกซ์ให้เป็นเมตริกซ์ในระบบใหญ่ แล้วกำหนดเงื่อนไขขอบเขตสุดท้ายแก่ระบบสมการเพื่อให้ได้ค่าความเร็วและความดัน
4. คำนวณค่าความหนาแน่นของแต่ละเอลิเมนต์ ดังที่กล่าวไว้แล้วค่าความหนาแน่นจะขึ้นอยู่กับความเร็วและอุณหภูมิ ความเร็วได้จากการคำนวณในขั้นตอนที่ 3 ส่วนอุณหภูมิในรอบแรกของการคำนวณให้สมมุติให้เท่ากันทุกเอลิเมนต์ ส่วนรอบถัดไปให้ใช้อุณหภูมิที่คำนวณได้จากขั้นตอนที่ 7

5. ทำการคำนวณค่าของความร้อนที่เกิดขึ้นจากการเปลี่ยนรูปของแต่ละเอลิเมนต์ซึ่งเป็นฟังก์ชันของค่าความหนืดและความเร็วโดยใช้ค่าความหนืดที่คำนวณได้จากขั้นตอนที่ 4 และความเร็วที่คำนวณได้ในขั้นตอนที่ 3
6. ทำการสร้างเอลิเมนต์เมตริกซ์สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงาน สมการ (3.28d) ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูปแบบดังนี้

$$\left[ u[K_x] + v[K_y] + \frac{k}{\rho c} [M_{xx}] + \frac{k}{\rho c} [M_{yy}] \right] \{T\} = \{Q\} \quad (3.67)$$

7. ทำการประกอบเอลิเมนต์เมตริกซ์ของสมการอนุรักษ์พลังงานเข้าสู่ระบบรวม แล้วทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตก่อนที่จะแก้ระบบสมการเพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบก็คืออุณหภูมิที่จุดต่อ
8. ทำการตรวจสอบการลู่เข้าของคำตอบของตัวไม่รู้ค่า ก็คือความเร็วความดันและอุณหภูมิ โดยทำการเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากรอบการคำนวณก่อนหน้านี้ หากค่าความคลาดเคลื่อนที่คำนวณได้น้อยกว่าเกณฑ์ที่ตั้งไว้ก็จะเสร็จสิ้นการคำนวณ แต่ถ้าหากยังไม่ถึงเกณฑ์ก็จะกลับไปเริ่มทำการคำนวณในรอบที่ 2 ใหม่ จนกระทั่งได้คำตอบที่มีความคลาดเคลื่อนตามเกณฑ์ที่กำหนด

#### หมายเหตุ :

1. เนื่องจากค่าของความหนืดจากสมการ (2.17) หากว่าค่าความเครียดประสิทธิผลมีค่าน้อยมากจนเข้าใกล้ 0 นั้นหมายถึงบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของความเร็วเมื่อเทียบกับเกณฑ์ต่าง ๆ น้อยมาก จะทำให้ค่าของความหนืดมีค่าเข้าสู่อินฟินิตี้ ซึ่งจะทำให้คำตอบลู่ออกจากคำตอบที่ถูกต้อง ดังนั้นจึงต้องทำการจำกัดค่าที่มากที่สุดของความหนืดไว้ที่ค่ามากที่สุดค่าหนึ่ง
2. เกณฑ์กำหนดค่าความคลาดเคลื่อน เป็นเกณฑ์ที่ใช้พิจารณาความแตกต่างของผลการคำนวณของรอบปัจจุบัน เมื่อเทียบกับรอบที่ผ่านมา หากค่าน้อยกว่าเกณฑ์ที่กำหนด ซึ่งโดยทั่วไปจะใช้ประมาณ 1% ของคำตอบในรอบที่ผ่านมา ก็จะหยุดทำการคำนวณ เกณฑ์ที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีอยู่สองลักษณะ เกณฑ์แรกจะใช้กับความเร็ว และอุณหภูมิ เกณฑ์ที่สองจะใช้กับความดัน

- สำหรับความเร็วและอุณหภูมิ

$$E_{\Psi} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (\Psi_i^n - \Psi_i^{n-1})^2}{\sum_{i=1}^m (\Psi_i^n)^2}} \quad (3.69)$$



- สำหรับความดัน

$$E_p = \frac{\sum_{i=1}^m P_i^n - \sum_{i=1}^m P_i^{n-1}}{\sum_{i=1}^m P_i^n} \quad (3.70)$$

โดย  $\Psi$  คือความเร็วหรืออุณหภูมิ

$m$  คือจำนวนจุดต่อของความเร็ว ความดัน หรืออุณหภูมิ

$n$  คือรอบที่ทำการคำนวณ



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บทที่ 4

### โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับ

### ปัญหาการไหลของโลหะ

หลังจากที่ได้ศึกษาถึงการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และเอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆแล้ว สามารถนำความรู้เหล่านี้มาประดิษฐ์โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้ภาษามาตรฐานใดๆตามแต่ผู้ประดิษฐ์จะถนัด ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลือกใช้โปรแกรมภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) ซึ่งเป็นที่นิยมใช้ในการประดิษฐ์โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์โดยทั่วไป ในเรื่องของการไหลของโลหะที่เกิดจากการอัดรีดนี้จะแบ่งการเขียนโปรแกรมเป็น 2 โปรแกรมด้วยกันเพื่อเป็นกรณีศึกษาสำหรับการอัดรีด 2 สภาวะ โดยโปรแกรมแรกจะใช้ในการคำนวณการอัดรีดในกรณีที่ไม่มีความร้อนมาเกี่ยวข้อง ใช้ชื่อโปรแกรมว่า MTFlow(v1) ส่วนโปรแกรมที่สองจะคำนึงถึงการเปลี่ยนแปลงความร้อนภายในระบบ ใช้ชื่อโปรแกรมว่า MTFlow(v2) ในบทนี้จะอธิบายถึงขั้นตอนรายละเอียดในการเขียนโปรแกรม ตลอดจนลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่ให้กับโปรแกรมทั้งสองและไฟล์ผลลัพธ์ที่เป็นคำตอบจากการคำนวณ

#### 4.1 โปรแกรม MTFlow(v1)

เป็นโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อที่จะใช้คำนวณปัญหาการอัดรีดแบบ 2 มิติในลักษณะความเครียดในระนาบ (Plane Strain) สำหรับกรณีที่ไม่มีความร้อนมาเกี่ยวข้องในระบบโดยจะทำการคำนวณจากระบบสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมและมวล เพื่อให้ได้มาซึ่งผลลัพธ์ก็คือความเร็วและความดันที่จุดต่อต่างๆในภาวะสมดุลของการอัดรีด รายละเอียดต่างๆของโปรแกรมรวมทั้งการเตรียมไฟล์ข้อมูลมีดังนี้

##### 4.1.1 ขั้นตอนการคำนวณ

ลำดับขั้นตอนในการเขียนโปรแกรมจะอิงกับกระบวนการวิธีการคำนวณดังที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 3.3.1 โดยโปรแกรมนี้จะประกอบไปด้วย 1 โปรแกรมหลัก (Main Program) และ 9 โปรแกรมย่อย (Subroutine) โดยมีรายละเอียดขั้นตอนการเขียนโปรแกรมและคำอธิบายโปรแกรมต่าง ๆ ดังนี้

1. การทำงานของโปรแกรมจะเริ่มจากการอ่านไฟล์ข้อมูลที่โปรแกรมหลัก โดยโปรแกรมจะถามให้ผู้ใช้บ่งชี้ชื่อไฟล์ของข้อมูล และต่อจะให้ใส่ชื่อไฟล์ที่จะใช้เก็บคำตอบผลลัพธ์ รายละเอียดของ

ไฟล์ข้อมูลนำเข้าได้แสดงโดยละเอียดในหัวข้อ 4.1.3 และตัวอย่างไฟล์ข้อมูล และไฟล์ผลลัพธ์ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ก

2. เริ่มสร้างเอลิเมนต์เมตริกซ์โดยเรียกโปรแกรมย่อย TRI โดยภายในโปรแกรมย่อยนี้จะทำการสร้างเอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆซึ่งอยู่ในรูปการคูณกันของเมตริกซ์ ในการคูณกันของเมตริกซ์นี้จะเรียกใช้โปรแกรมย่อย MULMAT สุดท้ายในขั้นตอนนี้จะทำการประกอบเอลิเมนต์เมตริกซ์นี้เข้าสู่ระบบเมตริกซ์รวมโดยใช้โปรแกรมย่อย ASSMBLE เมตริกซ์รวมนี้จะเป็นเมตริกซ์จัตุรัสที่มีความสมมาตร มีขนาดเท่ากับจำนวนตัวไม่รู้ค่าของระบบ นั่นคือจำนวนตัวไม่รู้ค่าของ  $u$   $v$  และ  $p$  รวมกัน ซึ่งจะเท่ากับสองเท่าของจำนวนจุดต่อทั้งหมดรวมกับจำนวนจุดต่อที่มุม ลักษณะอีกประการหนึ่งของเมตริกซ์นี้คือในแนวแกนเฉียง (Diagonal Term) จะมีค่าบางค่าเป็นศูนย์ สำหรับในรอบแรกของการคำนวณจะต้องสมมุติค่าความเหนียวของแต่ละเอลิเมนต์ โดยค่าที่สมมุติผู้ใช้สามารถกำหนดได้ในไฟล์ข้อมูลนำเข้า

3. กำหนดเงื่อนไขขอบเขตเข้าสู่ระบบเมตริกซ์รวมโดยเรียกโปรแกรมย่อย APPLYBC

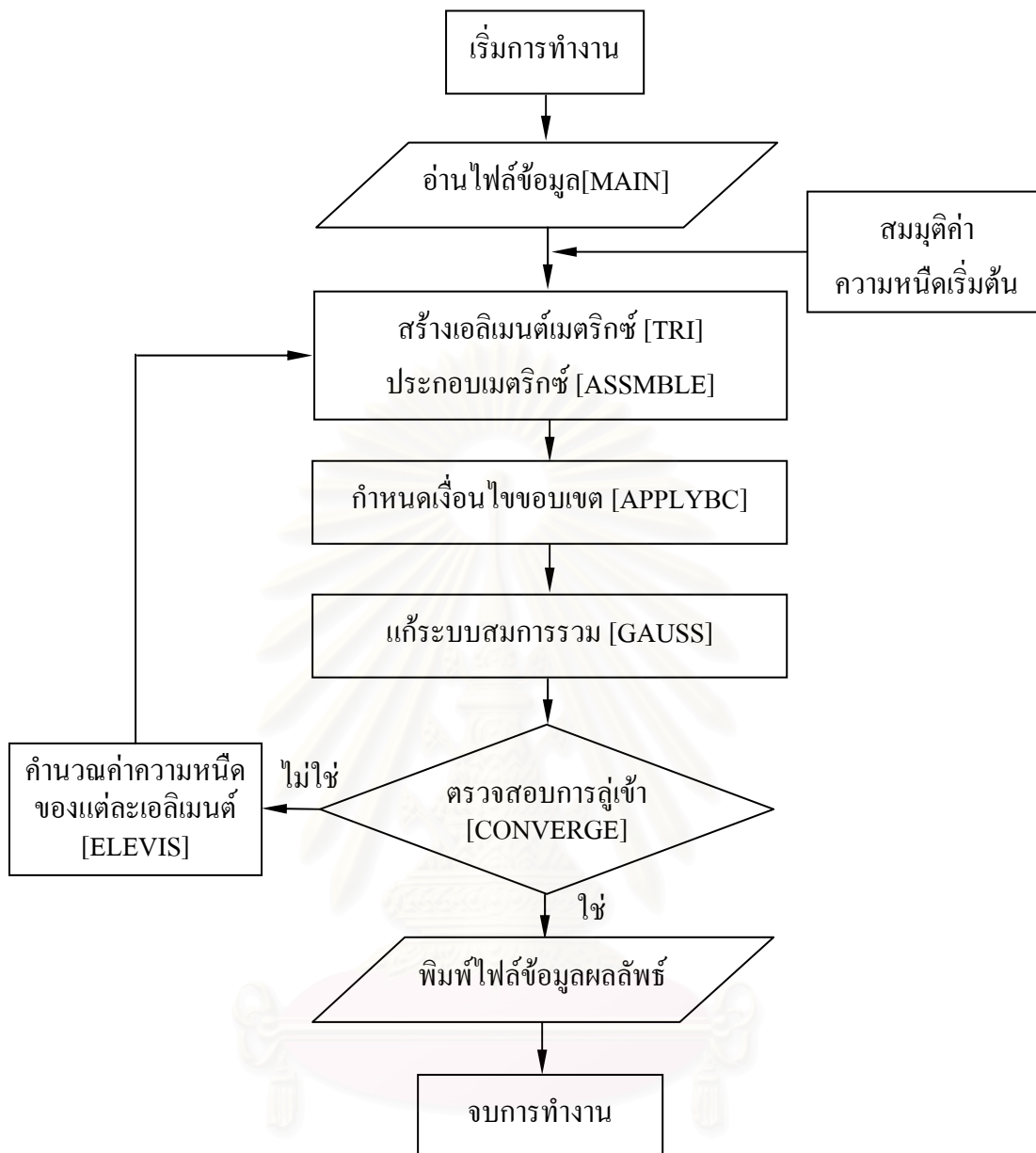
4. ทำการแก้ระบบสมการขนาดใหญ่โดยในระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ (Gauss Elimination) โดยเรียกโปรแกรมย่อย GAUSS และในโปรแกรมย่อยนี้จะมีการเรียกใช้โปรแกรมย่อย PIVOT และ SCALE เพื่อปรับปรุงแก้ไขความผิดพลาดเชิงตัวเลขอันอาจเกิดขึ้นได้จากวิธีการกำจัดแบบเกาส์ ดังเช่นการปรับปรุงลักษณะของข้อมูลเมตริกซ์ที่มีค่าเป็นศูนย์ตามแนวทะแยงให้สามารถคำนวณได้เป็นต้น

5. ตรวจสอบค่าความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ในรอบปัจจุบัน เมื่อเทียบกับผลลัพธ์ในรอบก่อน โดยใช้สูตรการคำนวณดังสมการ (3.69) และ (3.70) โดยเรียกโปรแกรมย่อย CONVERGE หากค่าความคลาดเคลื่อนเท่ากับหรือน้อยกว่าเกณฑ์ที่กำหนด คือ 1% ก็ให้ข้ามไปขั้นตอนการแสดงผล

6. หากค่าความคลาดเคลื่อนยังมากกว่าเกณฑ์ที่กำหนดให้ทำการคำนวณค่าความเหนียวของแต่ละเอลิเมนต์ โดยเรียกใช้โปรแกรมย่อย ELEVIS โดยใช้ความเร็วที่ได้จากขั้นตอนที่ 4 หลังจากนั้นจะกลับไปคำนวณข้อ 2-6 ใหม่ตามลำดับจนกระทั่งค่าความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์น้อยกว่าเกณฑ์ที่กำหนด

8. ไฟล์ผลลัพธ์จะเก็บไว้ในชื่อที่ได้กำหนดไว้ในข้อ 1. นอกจากนี้โปรแกรมจะบันทึกค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในแต่ละรอบไว้ในไฟล์ที่ชื่อ conv.out เพื่อเป็นข้อมูลในการตรวจสอบ

ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมสามารถสรุปได้โดยแผนภูมิการทำงาน (Flow Chart) ดังแสดงในรูป 4.1



รูปที่ 4.1 แผนภูมิการทำงานของโปรแกรมMTFlow(v1)

4.1.2 รายละเอียดของโปรแกรม

รายละเอียดของโปรแกรม MTFLOW(v1) ได้แสดงโดยละเอียดในภาคผนวก ก ท้ายวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

### 4.1.3 รายละเอียดไฟล์ข้อมูลนำเข้า

ลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่ป้อนให้กับโปรแกรม MTFlow(v1) ประกอบด้วยส่วนต่างๆจำนวน 5 ส่วนด้วยกัน ตัวอย่างที่ยกประกอบในส่วนต่างๆเป็นเพียงบางบรรทัดของตัวอย่างปัญหาในภาคผนวก ก คำอธิบายของข้อมูลนำเข้าแต่ละส่วนมีรายละเอียดดังนี้

**ส่วนที่ 1** เป็นข้อความที่ใช้อธิบายรายละเอียดของปัญหา

ตัวอย่าง

```
2
DIRECT EXTRUSION R=0.6 WITHOUT THERMAL EFFECT
MESH WITH 183 NODES AND 76 ELEMENTS
```

บรรทัดแรก ระบุจำนวนบรรทัดของรายละเอียด

บรรทัดต่อมา อธิบายรายละเอียดของข้อมูลที่มีจำนวนบรรทัดเท่ากับที่ระบุ

**ส่วนที่ 2** ข้อมูลขนาดของปัญหา

ตัวอย่าง

```
NPOIV  NPOIP  NELEM
183      54      76
```

บรรทัดแรก อธิบายลักษณะข้อมูล จำนวนจุดต่อและจำนวนเอลิเมนต์

บรรทัดต่อมา จำนวนจุดต่อของความเร็วและความดัน และจำนวนเอลิเมนต์

**ส่วนที่ 3** ข้อมูลค่าคุณสมบัติต่างๆ

ตัวอย่าง

```
YIELD STRESS  INITIAL VISCOSITY  MAX ITERATION
1500.00        1000.00                20
```

บรรทัดแรก อธิบายลักษณะข้อมูล ของความเค้นคราก ความหนืดเริ่มต้น และจำนวนรอบสูงสุดที่ใช้ในการคำนวณ

บรรทัดต่อมา ระบุขนาดความเค้นคราก ค่าความหนืดเริ่มต้น และจำนวนรอบสูงสุดในการคำนวณ

**ส่วนที่ 4** ข้อมูลจุดต่อ

ตัวอย่าง

| NODE | IBCU | IBCV | IBCP | X-COOR | Y-COOR | V-VEL | U-VEL | PRESSURE |
|------|------|------|------|--------|--------|-------|-------|----------|
| 1    | 0    | 1    | 0    | 14.000 | .000   | .0000 | .0000 | .0000    |
| 2    | 0    | 1    | 0    | 16.000 | .000   | .0000 | .0000 | .0000    |
| ⋮    | ⋮    | ⋮    | ⋮    | ⋮      | ⋮      | ⋮     | ⋮     | ⋮        |
| 183  | 0    | 1    | -1   | 11.000 | 10.000 | .0000 | .0000 | .0000    |

บรรทัดแรก อธิบายข้อมูลของจุดต่อ

บรรทัดต่อมา หมายเลขตัวแรกคือหมายเลขจุดต่อ สามตัวถัดมาก็คือรหัสเงื่อนไขขอบเขต สำหรับความเร็ว  $u$ ,  $v$  และความดัน  $p$  โดย 0 หมายถึงตัวแปรนั้นเป็นตัวแปรอิสระ ดังนั้นโปรแกรมจะทำการคำนวณค่าที่จุดต่อนั้นๆ 1 หมายถึงค่าของตัวแปรนั้นเป็นค่าของเงื่อนไขขอบเขตที่ถูกระบุโดยผู้ใช้ ดังนั้นจะไม่มีการคำนวณค่าดังกล่าว ตัวเลขสองตัวถัดมาก็คือค่าระยะพิกัด  $x$  และ  $y$  เมื่อเทียบกับระบบแกนใหญ่ (Global Coordinate) สามค่าถัดมาก็คือค่าของความเร็ว  $u$ ,  $v$  และความดัน  $p$  หากเงื่อนไขขอบเขตของค่าตัวแปรใดเป็น 1 โปรแกรมจะอ่านค่าตัวแปรดังกล่าวไปใช้คำนวณ หากเป็นตัวแปรอิสระให้ใส่ค่า 0.0 ที่ค่าตัวแปรนั้น

### ส่วนที่ 5 ข้อมูลการจัดเรียงจุดต่อภายในเอลิเมนต์

ตัวอย่าง

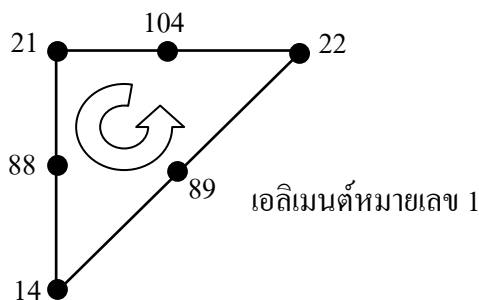
| ELEMENT | NODAL CONNECTIONS [ 76 ] : |    |    |     |     |     |
|---------|----------------------------|----|----|-----|-----|-----|
| 1       | 14                         | 22 | 21 | 104 | 88  | 89  |
| 2       | 21                         | 28 | 27 | 121 | 105 | 106 |
| 3       | 27                         | 35 | 34 | 140 | 122 | 123 |
| ⋮       | ⋮                          | ⋮  | ⋮  | ⋮   | ⋮   | ⋮   |
| 76      | 8                          | 9  | 13 | 82  | 81  | 79  |

บรรทัดแรก อธิบายลักษณะข้อมูล

บรรทัดต่อมา ข้อมูลของเอลิเมนต์ โดยตัวเลขตัวแรกคือหมายเลขของเอลิเมนต์ หมายเลขตัวที่ 2-4 เป็นหมายเลขของจุดต่อที่มุมของเอลิเมนต์นั้นๆ ส่วนหมายเลขตัวที่ 5-7 เป็นหมายเลขจุดต่อตรงกึ่งกลางของเอลิเมนต์

หมายเหตุ : ลักษณะการเรียงหมายเลขของจุดต่อของเอลิเมนต์ทั้ง 6 มีรูปแบบที่แน่นอนคือ

- หมายเลข 3 ตัวแรกต้องเป็นหมายเลขจุดต่อที่มุม โดยเรียงทวนเข็มนาฬิกา ดังรูปที่ 4.2
- หมายเลข 3 ตัวถัดมาเป็นหมายเลขที่กึ่งกลางด้านของเอลิเมนต์ โดยตัวแรกจะอยู่ด้านตรงกันข้ามกับจุดต่อที่มุมตัวแรก อีกสองตัวถัดมาจะเรียงทวนเข็มนาฬิกา ดังรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 ลักษณะการจัดเรียงหมายเลขจุดต่อบนเอลิเมนต์

### 4.1.4 ไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์

หลังจากเสร็จสิ้นวงจรการทำงานซ้ำของการคำนวณและได้คำตอบที่ผู้เข้า โปรแกรมจะพิมพ์ข้อมูลไว้ในไฟล์ที่ระบุชื่อไว้เมื่อตอนเริ่มโปรแกรม โดยข้อมูลจะเป็นผลลัพธ์ของความเร็ว  $u$ ,  $v$  และความดัน  $p$  ที่จุดต่อ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

```

*****
*                               MTFLOW(v1)                               *
* NODAL VELOCITY AND PRESSURE SOLUTIONS *
*****

28-May-00  10:29:41

NUMBER OF VELOCITY NODES : 183
NUMBER OF PRESSURE NODES : 54

NODE      U-VELOCITY      V-VELOCITY      PRESSURE
1         .259984E+01      .000000E+00      .306955E+03
2         .259960E+01      .000000E+00      .227881E+02
3         .259949E+01      .000000E+00      -.374138E+02
.....
54        .000000E+00      .000000E+00      .395505E+04
.....
183       .156884E+00      .000000E+00
    
```

ข้อมูลผลลัพธ์ของตัวอย่างนี้ได้แสดงโดยเต็มรูปแบบในภาคผนวก ก นอกจากนี้ โปรแกรมยังบันทึกข้อมูลผลของความคลาดเคลื่อนซึ่งมีหน่วยเป็นเปอร์เซ็นต์ไว้ในไฟล์ที่ชื่อ conv.out มีลักษณะของข้อมูลดังนี้



```
*****
*                               MTFlow (v1)                               *
*                               VELOCITY AND PRESSURE TOLERANCE         *
*****
```

| LOOP | VELOCITY TOLERANCE | PRESSURE TOLERANCE |
|------|--------------------|--------------------|
| 2    | 8.0242             | 61.0737            |
| 3    | 2.7069             | 2.8837             |
| 4    | 1.7495             | .3972              |
| 5    | 1.3106             | .3028              |
| 6    | 1.0236             | .4713              |
| 7    | .8181              | .3888              |

## 4.2 โปรแกรม MTFlow(v2)

เป็นโปรแกรมที่ถูกพัฒนาขึ้นต่อจาก MTFlow(v1) เพื่อที่จะให้สามารถคำนวณปัญหาการอัดรีดสองมิติที่มีเปลี่ยนแปลงความร้อนเนื่องจากการไหลและการเปลี่ยนรูปของโลหะ โดยการเพิ่มการคำนวณสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงานควบคู่ไปกับสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมและมวล ในหัวข้อย่อจะอธิบายถึงรายละเอียดของตัวโปรแกรมหลัก (Main Program) และโปรแกรมย่อย (Subroutine) รวมทั้งลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้าและไฟล์ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

### 4.2.1 ขั้นตอนการคำนวณ

ในส่วนของโปรแกรมจะประกอบไปด้วยโปรแกรมหลัก 1 โปรแกรมและโปรแกรมย่อยอีก 13 โปรแกรม ขั้นตอนในการเขียนโปรแกรมมีรายละเอียดเป็นลำดับขั้นดังนี้

1. การทำงานของโปรแกรมจะเริ่มจากการอ่านไฟล์ข้อมูลนำเข้า และให้ผู้ใช้ระบุชื่อไฟล์ที่จะใช้ทำการเก็บข้อมูลผลลัพธ์
2. ทำการคำนวณหาความเร็วและความดัน โดยเริ่มจากการสร้างเอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆ โดยโปรแกรมย่อย TRI ซึ่งมี MULMAT ใช้คำนวณการคูณกันของเมตริกซ์ หลังจากนั้นก็จะประกอบเอลิเมนต์ต่างๆ เข้าสู่ระบบสมการรวมโดยโปรแกรมย่อย ASSMBLE และในรอบแรกของการคำนวณให้สมมุติค่าความหนืดคงที่ทุกเอลิเมนต์
3. กำหนดเงื่อนไขขอบเขตโดยเรียกโปรแกรมย่อย APPLYBC
4. แก่ระบบสมการโดยระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ โดยเรียกโปรแกรมย่อย GAUSS วิธีนี้จะมีการเรียกใช้โปรแกรมย่อย PIVOT, SCALE เพื่อปรับปรุงแก้ไขความผิดพลาดที่อาจเกิดขึ้นจากการคำนวณเชิงตัวเลข ในขั้นตอนนี้จะได้คำตอบของความเร็ว  $u, v$  และความดัน  $p$

5. กำหนดค่าความหนืดของแต่ละเอลิเมนต์จากความเร็วที่คำนวณได้ในขั้นตอนที่ 4 โดยใช้โปรแกรมย่อย ELEVIS และเนื่องจากค่าความเค้นการไหล (Flow Stress) จะเป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ ดังนั้นในรอบแรกของการคำนวณซึ่งยังไม่มีผลของอุณหภูมิ จะใช้สมมติเริ่มต้นที่เท่ากันทุกเอลิเมนต์
6. ทำการคำนวณหาอุณหภูมิที่แต่ละจุดต่อโดยเรียกโปรแกรมย่อย THERMAL ภายในโปรแกรมย่อยก็จะมีโปรแกรมย่อยที่ใช้ในการสร้างเอลิเมนต์เมตริกซ์ (TRI\_T) ประกอบเอลิเมนต์สู่ระบบรวม (ASSM\_T) กำหนดเงื่อนไขขอบเขต (APPLYBC\_T) และคำนวณระบบสมการโดยวิธีการกำจัดแบบเกาส์ (GAUSS) ในขั้นตอนนี้จะได้ค่าของอุณหภูมิที่จุดต่อ
7. ทำการตรวจสอบค่าความคลาดเคลื่อนโดยเรียกโปรแกรมย่อย CONVERGE หากค่าความคลาดเคลื่อนของทั้งความเร็ว ความดัน และอุณหภูมิสูงกว่าที่กำหนดคือ 1 เปอร์เซ็นต์ ก็จะกลับไปคำนวณขั้นตอนที่ 2-6 ใหม่ ทำซ้ำเช่นนี้เรื่อยไปจนกระทั่งค่าความคลาดเคลื่อนต่ำกว่าที่กำหนด
8. ในขั้นตอนสุดท้ายหากโปรแกรมลู่ออก ก็จะพิมพ์ข้อมูลผลลัพธ์คือ ความเร็ว u,v ความดัน p และ อุณหภูมิ T ไว้ในไฟล์ที่ระบุในข้อ 1 และจะสร้างไฟล์ conv.out สำหรับเก็บข้อมูลความคลาดเคลื่อนในแต่ละรอบของการคำนวณ

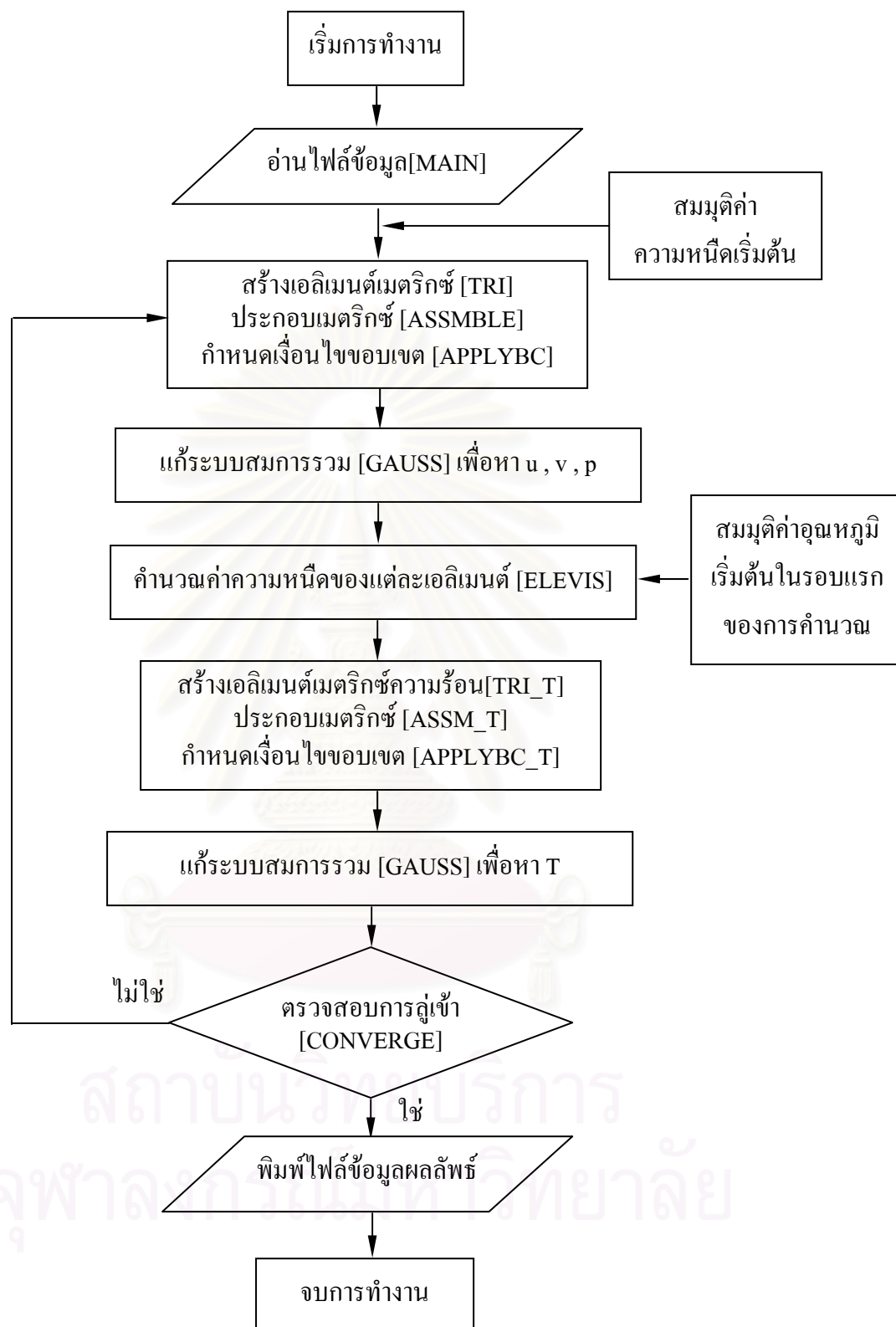
จากขั้นตอนทั้งหมดสามารถเขียนในรูปของแผนภูมิการทำงาน (Flow Chart) ได้ดังรูปที่ 4.3

#### 4.2.2 รายละเอียดของโปรแกรม

รายละเอียดของโปรแกรม MTFlow(v2) ได้แสดงโดยละเอียดในภาคผนวก ข ที่มหาวิทยาลัยพนธ์ฉบับนี้

#### 4.2.3 รายละเอียดไฟล์ข้อมูลนำเข้า

ลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่ใช้จะคล้ายกับ MTFlow(v1) คือแบ่งออกได้เป็น 5 ส่วนดังที่ได้อธิบายไว้ในหัวข้อที่ 4.1.3 แต่จะแตกต่างกันในส่วนที่ 3 และส่วนที่ 4 รายละเอียดของไฟล์ข้อมูลตัวอย่างทั้งหมดได้แสดงไว้ในภาคผนวก ข โดยมีคำอธิบายรายละเอียดของส่วนต่างๆพอเป็นสังเขปดังนี้



รูปที่ 4.3 แผนภูมิการทำงานของโปรแกรมMTFlow(v2)

### ส่วนที่ 1 เป็นข้อความที่ใช้อธิบายรายละเอียดของปัญหา

ตัวอย่าง

```
2
DIRECT EXTRUSION R=0.6 WITH THERMAL COUPLING
MESH WITH 183 NODES AND 76 ELEMENTS
```

บรรทัดแรก ระบุจำนวนบรรทัดของรายละเอียด

บรรทัดต่อมา อธิบายรายละเอียดของข้อมูลที่มีจำนวนบรรทัดเท่ากับที่ระบุ

### ส่วนที่ 2 ข้อมูลขนาดของปัญหา

ตัวอย่าง

```
NPOIV  NPOIP  NELEM
183    54     76
```

บรรทัดแรก อธิบายลักษณะข้อมูล จำนวนจุดต่อและจำนวนเอลิเมนต์

บรรทัดต่อมา จำนวนจุดต่อของความเร็วและความดัน และจำนวนเอลิเมนต์

### ส่วนที่ 3 ข้อมูลค่าคุณสมบัติต่างๆ

ตัวอย่าง

```
YIELD  INI VIS  INI TEMP MAX ITER DENSITY  k  c  J
1500.00 1000.00 100.00 20 .01 1.00 100.00 42.65
```

บรรทัดแรก อธิบายลักษณะความหมายของข้อมูล

บรรทัดต่อมา ระบุขนาดความเค้นคราก ค่าความหนืดเริ่มต้น อุณหภูมิเริ่มต้น จำนวนรอบสูงสุดในการคำนวณ ความหนาแน่น ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน ค่าความจุความร้อนจำเพาะ และค่าคงที่สำหรับแปลงความร้อนทางกล

### ส่วนที่ 4 ข้อมูลจุดต่อ

ตัวอย่าง

```
NODE  IBCU  IBCV  IBCT  IBCT  X-COOR  Y-COOR  U-VEL  V-VEL  TEMP  PRESSURE
1     0    1    0    0    14.000  .000    .000  .000  .000  .000
2     0    1    0    0    16.000  .000    .000  .000  .000  .000
3     0    1    0    0    18.000  .000    .000  .000  .000  .000
.....
183   0    1    0   -1    11.000  10.000  .000  .000  .000  .000
```

บรรทัดแรก อธิบายข้อมูลของจุดต่อ

บรรทัดต่อมา หมายเลขตัวแรกคือหมายเลขจุดต่อ      สี่ตัวถัดมาคือรหัสเงื่อนไขขอบเขต

สำหรับความเร็ว  $u$ ,  $v$  อุณหภูมิ  $T$  และ ความดัน  $p$  โดย 0 หมายถึงตัวแปรนั้นเป็นตัวแปรอิสระ ดังนั้นโปรแกรมจะทำการคำนวณค่าที่จุดต่ออื่นๆ 1 หมายถึงค่าของตัวแปรนั้นเป็นค่าของเงื่อนไขขอบเขตที่ถูกระบุโดยผู้ใช้ ดังนั้นจะไม่มีค่าคำนวณค่าดังกล่าว ตัวเลขสองตัวถัดมาก็คือค่าระยะพิกัด  $x$  และ  $y$  เมื่อเทียบกับระบบแกนใหญ่ (Global Coordinate) ค่าถัดมาก็คือค่าของความเร็ว  $u$ ,  $v$  อุณหภูมิ  $T$  และความดัน  $p$  หากเงื่อนไขขอบเขตของค่าตัวแปรใดเป็น 1 โปรแกรมจะอ่านค่าตัวแปรดังกล่าวไปใช้คำนวณ หากเป็นตัวแปรอิสระให้ใส่ค่า 0.0 ที่ค่าตัวแปรนั้น

### ส่วนที่ 5 ข้อมูลการจัดเรียงจุดต่อภายในเอลิเมนต์

ตัวอย่าง

| ELEMENT | NODAL | CONNECTIONS | [  | 76] | :   |     |
|---------|-------|-------------|----|-----|-----|-----|
| 1       | 14    | 22          | 21 | 104 | 88  | 89  |
| 2       | 21    | 28          | 27 | 121 | 105 | 106 |
| 3       | 27    | 35          | 34 | 140 | 122 | 123 |
| ⋮       | ⋮     | ⋮           | ⋮  | ⋮   | ⋮   | ⋮   |
| 76      | 8     | 9           | 13 | 82  | 81  | 79  |

บรรทัดแรก อธิบายลักษณะข้อมูล

บรรทัดต่อมา ข้อมูลของเอลิเมนต์ โดยตัวเลขตัวแรกคือหมายเลขของเอลิเมนต์ หมายเลขตัวที่ 2-4 เป็นหมายเลขของจุดต่อที่มุมของเอลิเมนต์นั้นๆ ส่วนหมายเลขตัวที่ 5-7 เป็นหมายเลขจุดต่อตรงกึ่งกลางของเอลิเมนต์

#### 4.2.4 ไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์

ไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์หลังจากคำตอบถูกเข้าเป็นที่เรียบร้อยแล้วจะมีอยู่ 2 ไฟล์ ก็คือไฟล์คำตอบของความเร็ว ความดัน และอุณหภูมิ ไฟล์นี้จะเก็บในชื่อที่ระบุไว้ในตอนต้นของโปรแกรม อีกไฟล์หนึ่งก็คือไฟล์ที่เก็บค่าความคลาดเคลื่อนในแต่ละรอบของการคำนวณ ตัวอย่างไฟล์ทั้งสองอย่างเต็มรูปแบบได้แสดงไว้ในภาคผนวก ข แต่ได้นำมาแสดงเป็นบางส่วนเพื่อเป็นสังเขปตามลำดับดังนี้

```

*****
*                               MTFlow(v2)                               *
* NODAL VELOCITY TEMPERATURE AND PRESSURE SOLUTIONS *
*****

```

28-May-00 11:31:58

```

NUMBER OF VELOCITY NODES : 183
NUMBER OF TEMPERATURE NODES : 183
NUMBER OF PRESSURE NODES : 54

```

| NODE  | U-VELOCITY  | V-VELOCITY  | TEMPERATURE | PRESSURE    |
|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1     | .260285E+01 | .000000E+00 | .539073E+02 | .510018E+03 |
| 2     | .260285E+01 | .000000E+00 | .588143E+02 | .331173E+03 |
| 3     | .260285E+01 | .000000E+00 | .623881E+02 | .143078E+03 |
| ..... | .....       | .....       | .....       | .....       |
| 54    | .000000E+00 | .000000E+00 | .651590E+02 | .384544E+04 |
| ..... | .....       | .....       | .....       | .....       |
| 183   | .188905E+00 | .000000E+00 | .615959E+02 |             |

```

*****
*                               MTFlow(v2)                               *
* VELOCITY PRESSURE AND TEMPERATURE TOLERANCE *
*****

```

| LOOP | VELOCITY TOLERANCE | PRESSURE TOLERANCE | TEMPERATURE TOLERANCE |
|------|--------------------|--------------------|-----------------------|
| 2    | 8.0242             | 49.7986            | 6.3705                |
| 3    | 2.9109             | 6.7565             | 4.8393                |
| 4    | 1.8713             | .6359              | 3.1494                |
| 5    | 1.3954             | .1203              | 2.3055                |
| 6    | 1.0866             | .3393              | 1.7679                |
| 7    | .8660              | .3453              | 1.3945                |
| 8    | .7027              | .3047              | 1.1240                |
| 9    | .5791              | .2613              | .9224                 |

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



## บทที่ 5

### การวิเคราะห์การอัดรีด 2 มิติ

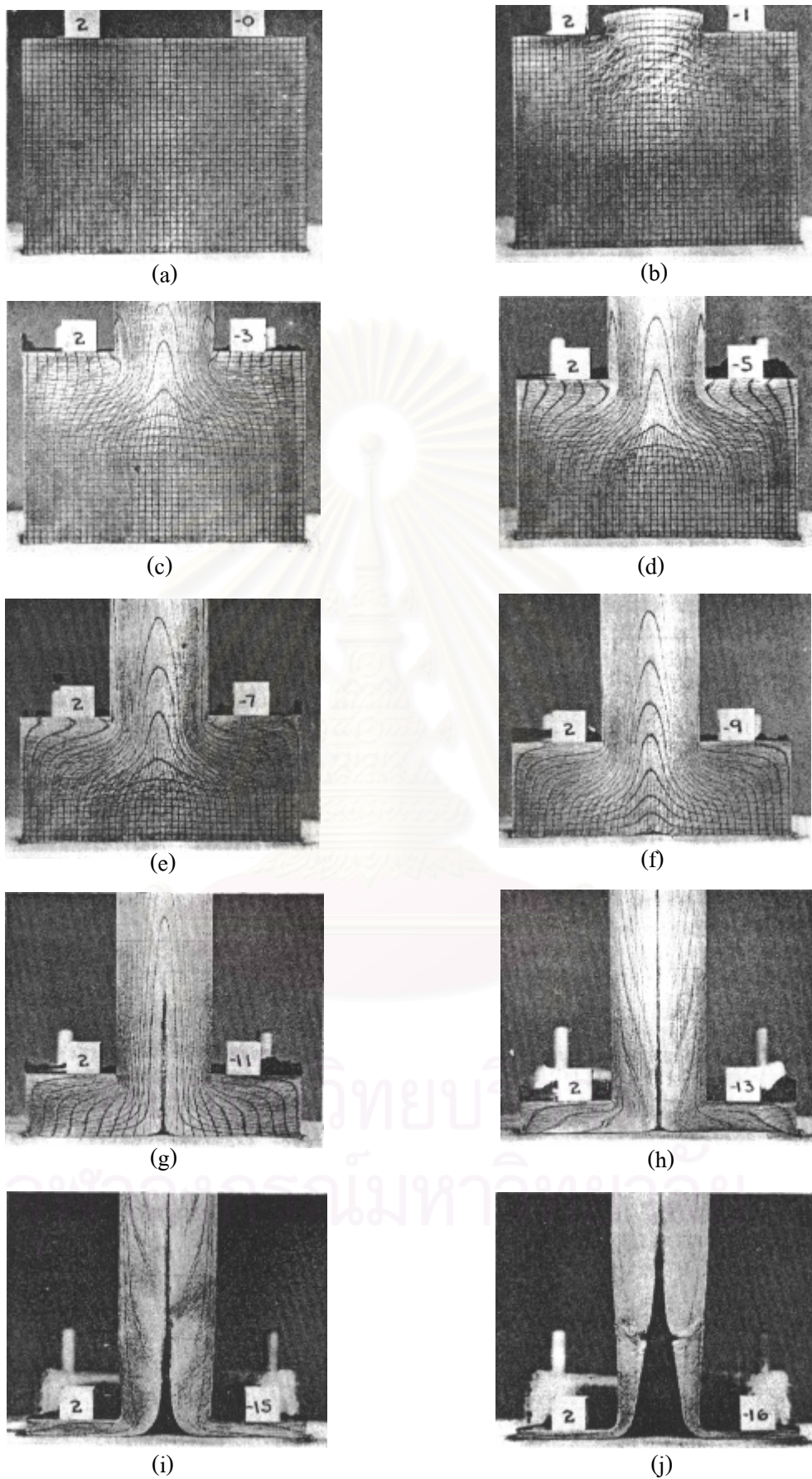
ในบทนี้จะทำการวิเคราะห์การอัดรีด 2 มิติในลักษณะของความเครียดในระนาบในแง่มุมต่างๆทั้งทางด้านการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของโดเมนปัญหา รวมทั้งการเปลี่ยนแปลงค่าคุณลักษณะเฉพาะของวัสดุที่มีผลต่อภาวะการอัดรีดโดยใช้โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้น โดยคำตอบที่สำคัญที่สุดที่ผู้ออกแบบระบบการอัดรีดต้องหาคำตอบก็คือแรงดันที่ใช้ดันโลหะสำหรับอัดรีด (Billet) ให้ไหลผ่านแม่พิมพ์ เรียกแรงดันนี้ว่าแรงดันอัดรีด (Extrusion Pressure)

มีทฤษฎีไม่มากนักที่เป็นที่ยอมรับในการอธิบายพฤติกรรมการไหลของโลหะผ่านแม่พิมพ์ หรือที่เรียกว่าการอัดรีด ทฤษฎีทั้งหมดเป็นทฤษฎีที่หาคำตอบในเชิงการประมาณทั้งสิ้น สืบเนื่องจากปัญหานี้เป็นปัญหาที่ต้องแก้ระบบสมการแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear Equations) ซึ่งไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรงได้ วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ใช้ทฤษฎีสลิปไลน์ (Slip-Line Theory) ทฤษฎีที่นิยมและเป็นที่ยอมรับกันอย่างกว้างขวางในการวิเคราะห์การไหลของโลหะที่ถูกนำเสนอโดย Hill [8] ในปี 1948 มาใช้ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้น Hill ได้ใช้วิธีนี้คำนวณค่าแรงดันอัดรีดของปัญหาความเครียดในระนาบสำหรับวัสดุที่ไม่มีความเครียดแข็ง (Strain Hardening) ผ่านแม่พิมพ์จากโดยสมมุติว่าไม่มีความเสียดทานระหว่างโลหะอัดรีดและผนังของแท่นบรรจุ ต่อมาในปี 1955 Johnson ได้นำเสนอทฤษฎีเดียวกันนี้สำหรับปัญหาที่มีแรงเสียดทานที่ผิว

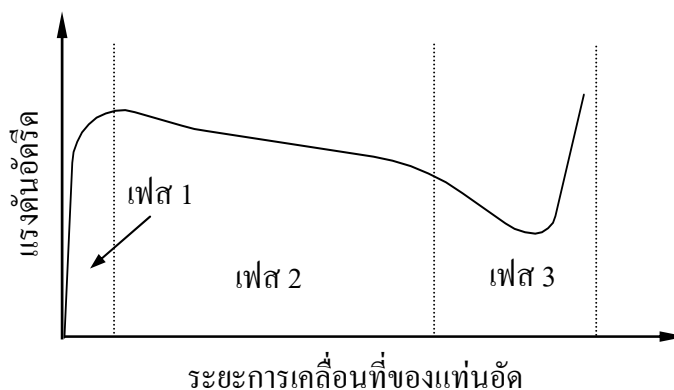
ทฤษฎีสลิปไลน์นี้เป็นทฤษฎีที่ใช้วิเคราะห์ปัญหาสำหรับกรณีที่วัสดุเป็นแบบพลาสติกอุดมคติ (Ideal Plastic) คือไม่มีความเครียดแข็งนั่นเอง และไม่พิจารณาถึงความเครียดที่เกิดขึ้นในช่วงอีลาสติกเพราะถือว่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความเครียดในช่วงพลาสติก วัสดุที่อยู่ในลักษณะดังกล่าวก็คือวัสดุที่อยู่ในสถานะที่มีอุณหภูมิสูง และอีกลักษณะหนึ่งก็คือวัสดุเนื้ออ่อนอย่างเช่นตะกั่วเป็นต้น ทฤษฎีนี้จะทำการสร้างสนามของเส้นทางไหลที่หาจากทิศทางของความเค้นเฉือนสูงสุด (Maximum Shear Stress) เรียกเส้นนี้ว่าสลิปไลน์หรือเส้นเฉือน (Shear Line) อีกทั้งสามารถสร้างความสัมพันธ์ของมุมและความดันในเส้นเฉือนแต่ละเส้นซึ่งจะนำไปสู่การหาแรงดันอัดรีด โดยรายละเอียดต่างๆของทฤษฎีนี้อยู่ในภาคผนวก ง หรือสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากหนังสืออ้างอิง [7-11][14] [18]

ในระยะต่างๆของการเคลื่อนที่ของโลหะอัดรีดผ่านแม่พิมพ์ตั้งแต่เริ่มต้นจนกระทั่งโลหะอัดรีดไหลผ่านแม่พิมพ์ทั้งหมดได้แสดงไว้ในรูปที่ 5.1 ซึ่งหากพล็อตความสัมพันธ์ระหว่างแรงดันอัดรีดและระยะทางการเคลื่อนที่ของก้านอัด (Ram) จะมีลักษณะดังแสดงในรูป 5.2 จากรูปจะเห็นว่า การอัด





รูปที่ 5.1 ภาพถ่ายโลหะอัดรีดที่ระยะต่างๆของการเคลื่อนตัวผ่านแม่พิมพ์ [18]



รูปที่ 5.2 เส้นโค้งแสดงความสัมพันธ์ของแรงดันออดริค และระยะการเคลื่อนที่ของแทนออด

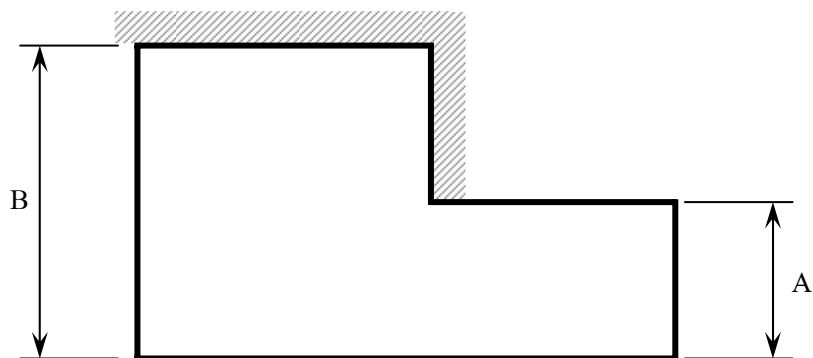
รีดตั้งแต่เริ่มต้นดันโลหิตออดริคผ่านแม่พิมพ์จนกระทั่งโลหะนั้นไหลผ่านแม่พิมพ์จนหมดสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 เฟสด้วยกัน โดยเฟสแรกแรงดันจะพุ่งขึ้นอย่างรวดเร็ว เนื่องจากแรงดันเริ่มที่จะดันให้โลหิตออดริคตัวเต็มแทนบรรจุและเริ่มที่จะไหลออกจากแม่พิมพ์ดังแสดงในรูปที่ 5.1 a และ b เฟสแรกจะสิ้นสุดตรงที่แรงดันขึ้นสู่ตำแหน่งสูงสุดและเริ่มเข้าสู่เฟสที่ 2 ที่เฟสนี้แรงดันจะค่อยๆ ลดลงอย่างช้าๆ เนื่องจากระยะทางของผิวสัมผัสระหว่างโลหิตออดริคและแทนบรรจุลดลงตลอดการเคลื่อนที่ที่ทำให้ผลของความเสียดทานที่มีต่อการออดริคลดน้อยลงไปด้วยทำให้แรงดันที่ใช้ลดลง ซึ่งหากผนังถูกหล่อลื่นเป็นอย่างดี ค่าของแรงดันในเฟสนี้จะคงที่ ที่เฟสที่ 2 นี้เองสามารถเรียกได้ว่าเป็นภาวะอยู่ตัว (Steady State) ซึ่งการวิเคราะห์โดยทฤษฎีต่างๆรวมทั้งโดยโปรแกรม MTFlow จะกระทำที่ภาวะอยู่ตัวนี้ ที่ภาวะนี้สามารถแสดงภาพถ่ายจากการทดลองในรูป 5.1 c-f โดยช่วง f ถือเป็นจุดสุดท้ายของภาวะสมดุลเพราะหลังจากนั้นด้านท้ายของโลหิตออดริคจะถูกดึงขึ้นไปตรงกึ่งกลางของแม่พิมพ์ออดริคดังแสดงในรูป 5.1 g-j ที่ภาวะนี้ถือเป็นเฟสที่ 3 ของการออดริค

สำหรับการออดริคเพื่อลดขนาดความหนาของโลหะนั้น สามารถจำลองแบบเพียงแค่ครั้งหนึ่ง เนื่องจากความสมมาตรตามแนวกึ่งกลางของความหนา และจะมีค่าหนึ่งที่ใช้เป็นค่าที่กำหนดขนาดความหนาของโลหิตที่ไหลออกจากแม่พิมพ์เมื่อเปรียบเทียบกับขนาดความหนาก่อนที่จะเข้าสู่แม่พิมพ์ เราเรียกค่านี้ว่า อัตราส่วนการลดขนาด ใช้สัญลักษณ์  $R$  สามารถหาได้จาก

$$R = 1 - \frac{A}{B} \quad (5.1)$$

โดย  $A$  คือครึ่งหนึ่งของความหนาของโลหิตที่ไหลออกจากแม่พิมพ์

$B$  คือครึ่งหนึ่งของความหนาของโลหิตที่ไหลเข้าแม่พิมพ์ ดังรูป 5.3



รูปที่ 5.3 อัตราส่วนการลดขนาดของปัญหาการอัดรีด

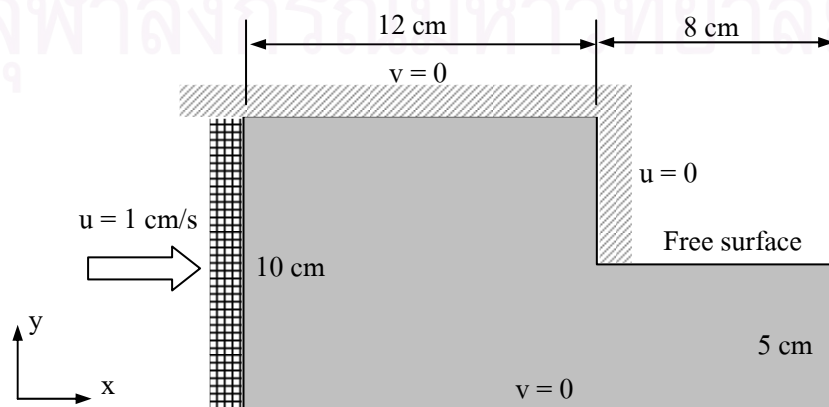
ในการวิเคราะห์ปัญหาการอัดรีดในบทนี้จะเริ่มจากการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม MTFlow ก่อนที่จะนำไปวิเคราะห์ปัญหาในแง่มุมต่างๆ

## 5.1 การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม

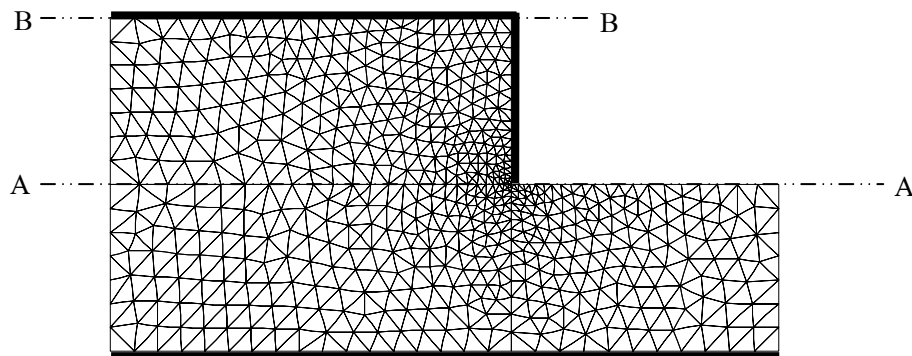
ในหัวข้อย่อยนี้จะทำการเปรียบเทียบผลการคำนวณโดยโปรแกรม MTFlow กับผลจากทฤษฎีสลิปไลน์และผลการทดลองเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้น

### 5.1.1 เปรียบเทียบกับทฤษฎีสลิปไลน์

แบบจำลองการอัดรีดที่นำมาเปรียบเทียบจะเป็นการอัดรีดแบบทางออกทางเดียวที่มีอัตราส่วนการลดขนาด 0.5 โลหะอัดรีดมีค่าความเค้นคราก  $1732 \text{ kg/cm}^2$  ความเร็วอัดรีด  $1 \text{ cm/s}$  ขนาดและรายละเอียดแสดงดังรูปที่ 5.4 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์แสดงดังรูปที่ 5.5 ซึ่งประกอบด้วยจุดต่อความเร็ว 2337 จุด จุดต่อความดัน 613 จุด และมีเอลิเมนต์จำนวน 1112 เอลิเมนต์

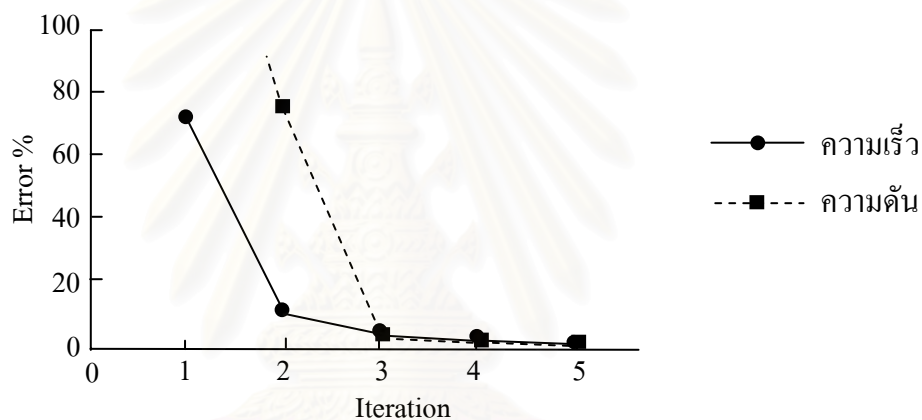


รูปที่ 5.4 แบบจำลองของปัญหาสำหรับเปรียบเทียบผลการคำนวณ



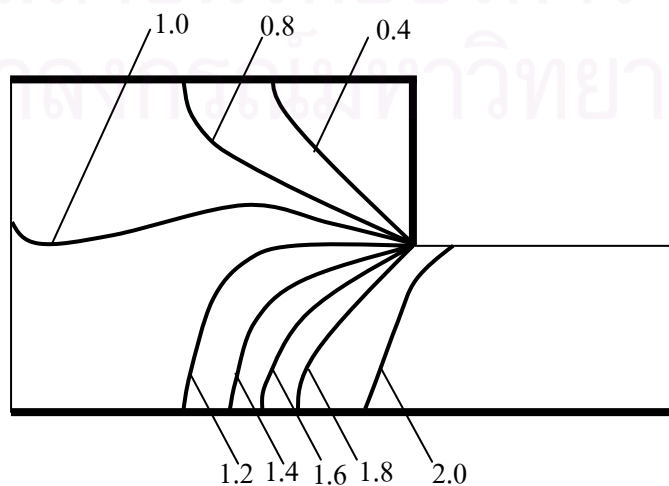
รูปที่ 5.5 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของการอัดรีดที่มี  $R = 0.5$

ในการคำนวณปัญหานี้ใช้จำนวนรอบในการคำนวณทั้งสิ้น 5 รอบจึงเข้าสู่เกณฑ์ที่กำหนดค่าความคลาดเคลื่อนในแต่ละรอบของความเร็วและอุณหภูมิแสดงในรูปที่ 5.6

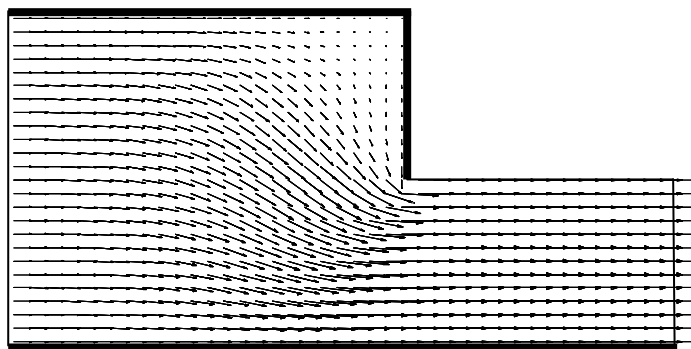


รูปที่ 5.6 กราฟแสดงการลู่เข้าในแต่ละรอบของผลความเร็วและความดัน

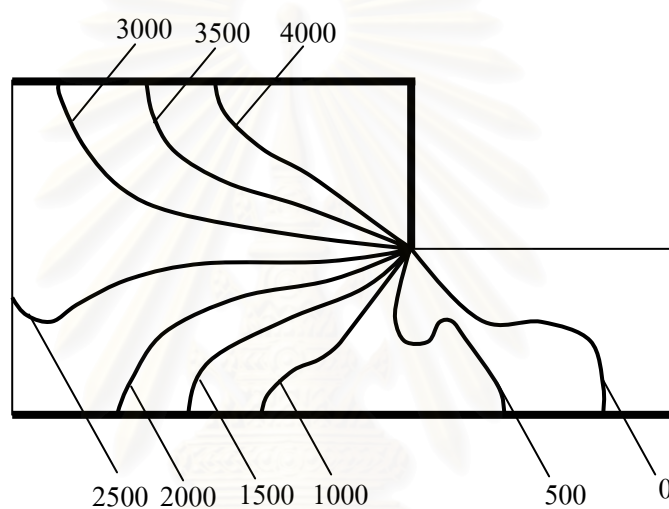
ผลการวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรม MTFLOW(v1) จะได้ผลลัพธ์ความเร็ว และความดันที่จุดต่อสามารถนำมาพล็อตลักษณะการกระจายของคำตอบได้ดังรูป 5.6 โดยรูป (a) เป็นผลการกระจายของความเร็ว รูป (b) เป็นผลเวกเตอร์ความเร็ว รูป (c) เป็นผลการกระจายของความดัน



(a) ผลการกระจายความเร็ว (cm/s)



(b) ผลเวกเตอร์ความเร็ว

(c) ผลการกระจายความดัน ( $\text{kg/cm}^2$ )

รูปที่ 5.7 ผลการกระจายและผลเวกเตอร์คำตอบของปัญหาการอัดรีดที่มี  $R = 0.5$

โดยใช้โปรแกรม MTFLOW(v1)

จากผลของความดันที่จุดต่อสามารถหาค่าแรงดันอัดรีด( $P$ )ได้จากค่าเฉลี่ยของความดันบริเวณทางเข้าของโลหะอัดรีด ซึ่งปัญหานี้จะมีค่าเท่ากับ  $2664.3 \text{ kg/cm}^2$  สามารถนำค่านี้มาใช้เปรียบเทียบกับผลการคำนวณจากทฤษฎีสลิปไลน์ในตอนท้ายของภาคผนวก ค ซึ่งได้ค่า  $P/(2\tau_{\text{yield}}) = 1.3$  โดยค่า  $\tau_{\text{yield}}$  คือค่าความเค้นเฉือนคราก (Shear Yield Stress) มีค่าเท่ากับ  $\sigma_{\text{yield}}/\sqrt{3}$  [31] ซึ่งในปัญหานี้มีค่าเท่ากับ  $1000 \text{ kg/cm}^2$  ดังนั้นสามารถคำนวณค่า  $P$  ได้คือ  $2600 \text{ kg/cm}^2$  ซึ่งผลของ MTFLOW และทฤษฎีสลิปไลน์แตกต่างกันประมาณ 2.5 เปอร์เซ็นต์

ต่อไปจะทำการเปรียบเทียบผลของความเร็วอัดรีดที่มีต่อแรงดันอัดรีด ทำการวิเคราะห์จากปัญหาเดิมโดยใช้ความเร็วที่แตกต่างกันไปคือ 0.1, 1, 2, 5, 10 cm/s ได้ผลของแรงดันอัดรีดดังแสดงในตารางที่ 5.1



ตารางที่ 5.1 ผลของแรงดันอัดรีดที่ความเร็วต่างๆ

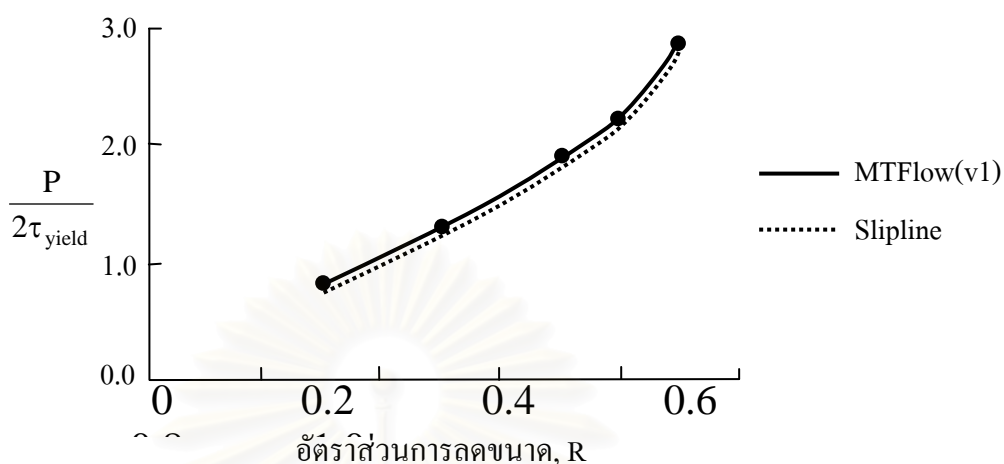
| ความเร็วอัดรีด<br>(cm/s) | แรงดันอัดรีด(P)<br>(kg/cm <sup>2</sup> ) | $P/2 \tau_{yield}$<br>( $\tau_{yield}=1000 \text{ kg/cm}^2$ ) |
|--------------------------|--|---|
| 0.1                      | 2663.8                                   | 1.33  |
| 1                        | 2664.3                                   | 1.33  |
| 2                        | 2664.1                                   | 1.33  |
| 5                        | 2663.9                                   | 1.33  |
| 10                       | 2664.0                                   | 1.33  |

จากตารางจะเห็นว่าความเร็วไม่มีผลต่อแรงดันที่ใช้ในการอัดรีดเนื่องจากค่าความเค้นครากเป็นค่าคงที่ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีสลิปไลน์ แต่ถ้าหากความเค้นครากไม่คงที่ แต่ขึ้นอยู่กับอุณหภูมิจะทำให้ค่าแรงดันอัดรีดไม่คงที่ที่ความเร็วต่างๆ ดังจะได้แสดงในหัวข้อย่อยถัดไป

ผลการเปรียบเทียบแรงดันอัดรีดที่อัตราส่วนการลดขนาดต่างๆ ได้แสดงไว้ในตารางที่ 5.2 พร้อมทั้งนำไปพล็อตเพื่อเปรียบเทียบกับทฤษฎีสลิปไลน์ดังรูปที่ 5.8

ตารางที่ 5.2 ผลของแรงดันอัดรีดที่อัตราส่วนการลดขนาดต่างๆ

| อัตราส่วนการลดขนาด<br>(R) | แรงดันอัดรีด (P)<br>(kg/cm <sup>2</sup> ) | $P/2 \tau_{yield}$<br>( $\tau_{yield}=1000 \text{ kg/cm}^2$ ) |
|---------------------------|---|---|
| 0.3                       | 1721.3                                    | 0.86  |
| 0.5                       | 2664.3                                    | 1.33  |
| 0.7                       | 3791.6                                    | 1.89  |
| 0.8                       | 4473.3                                    | 2.24  |
| 0.9                       | 5784.6                                    | 2.89  |



รูปที่ 5.8 กราฟเปรียบเทียบผลระหว่างโปรแกรม MTFlow(v1) กับ ทฤษฎีสลิปไลน์

### 5.1.2 เปรียบเทียบกับผลการทดลอง

ในการเปรียบเทียบกับผลการทดลองจะอ้างอิงผลการทดลองของ W.Johnson [23] การทดลองใช้ตะกั่วบริสุทธิ์ (Pure Lead) เป็นโลหะสำหรับอัดรีด (Billet) เนื่องจากตะกั่วเป็นโลหะที่มีเนื้ออ่อนและไม่มีความเครียดแข็ง (Strain Hardening) ที่อุณหภูมิห้อง จึงมีคุณสมบัติเหมือนกับโลหะเนื้อแข็งอื่นๆ ที่ภาวะอุณหภูมิสูง ซึ่งหากนำโลหะเนื้อแข็งเหล่านั้นมาทำการทดลองจะต้องเพิ่มอุณหภูมิโลหะและควบคุมอุณหภูมิให้คงที่ซึ่งเป็นเรื่องที่ยุ่งยาก และอาจส่งผลให้ค่าที่ได้จากการทดลองผิดพลาด ขนาดของโลหะอัดรีดจะมีขนาดความกว้างมากกว่าความหนา 2 เท่าเป็นอย่างน้อย เพื่อรักษาภาวะความเครียดในระนาบและเพื่อไม่ให้ความเสียหายส่งผลต่อผลการทดลองมากนัก

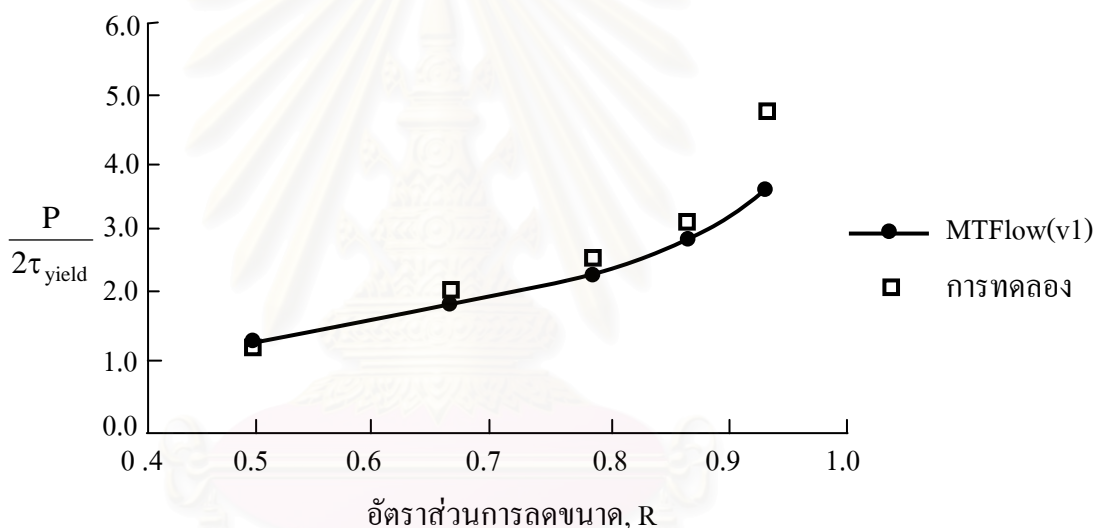
ในการทดลองจะใช้สารหล่อลื่นบริเวณพื้นผิวสัมผัสของตะกั่วกับแท่นบรรจุเพื่อลดความเสียหายให้ต่ำที่สุดแต่อย่างไรก็ตามไม่สามารถทำให้หมดไปได้ ค่าคุณสมบัติของตะกั่วได้มาจากการทดลองโดยมีค่าความเค้นครากประมาณ  $180 \text{ kg/cm}^2$  ( $\tau_{\text{yield}} = 104 \text{ kg/cm}^2$ ) สำหรับการเปรียบเทียบกับโปรแกรม MTFlow(v1) จะใช้แบบจำลองการอัดรีดที่มีอัตราส่วนการลดขนาด 0.5 0.667 0.8 0.88 และ 0.94 โดยใช้ความเร็วอัดรีด 1 cm/s

ผลจากการคำนวณโดยโปรแกรม MTFlow(v1) เมื่อเปรียบเทียบกับผลการทดลอง แสดงในตารางที่ 5.3 และสามารถแสดงในรูปแบบของกราฟได้ดังในรูปที่ 5.9



ตารางที่ 5.3 ผลที่ได้จากโปรแกรม MTFlow(v1) เปรียบเทียบกับผลการทดลอง

| อัตราส่วนการลดขนาด<br>(R) | MTFlow(v1)          |                   | ผลการทดลอง<br>( $P/2\tau_{yield}$ ) |
|---------------------------|---------------------|-------------------|-------------------------------------|
|                           | $P(\text{kg/cm}^2)$ | $P/2\tau_{yield}$ |                                     |
| 0.5                       | 276.8               | 1.33              | 1.3                                 |
| 0.667                     | 373.5               | 1.8               | 2.1                                 |
| 0.8                       | 465.2               | 2.24              | 2.5                                 |
| 0.88                      | 581.9               | 2.8               | 3.0                                 |
| 0.94                      | 735.0               | 3.53              | 4.8                                 |



รูปที่ 5.9 กราฟแสดงการเปรียบเทียบผลจากโปรแกรม MTFlow(v1) และผลการทดลอง

จากผลการเปรียบเทียบจะพบว่าผลที่คำนวณได้จากโปรแกรม MTFlow(v1) จะน้อยกว่าผลจากการทดลองเล็กน้อย สืบเนื่องจากแรงเสียดทานที่ไม่สามารถทำให้หมดไปโดยสิ้นเชิงในทางปฏิบัติ จากกราฟจะพบว่าผลจากโปรแกรม MTFlow(v1) จะแตกต่างจากผลการทดลองมากขึ้นตามขนาดของอัตราส่วนการลดขนาด เนื่องจากระยะเวลาการสัมผัสของแม่พิมพ์และโลหะจะมากขึ้นดังนั้นผลของความเสียดทานก็จะมากขึ้นด้วย เหตุผลอีกประการหนึ่งก็คือในการคำนวณจะสมมติให้ค่าความเค้นครากเป็นค่าคงที่แต่ในความเป็นจริงค่าความเค้นครากนี้จะสูงขึ้นเมื่อค่าความเครียดและอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดสูงขึ้น ดังนั้นที่อัตราส่วนการลดขนาดยิ่งสูงเท่าไรความเครียดและอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดก็จะสูงตามไปด้วยทำให้ในการทดลองจริงจะได้ค่าแรงดันอัดรีดสูงกว่าการคำนวณ

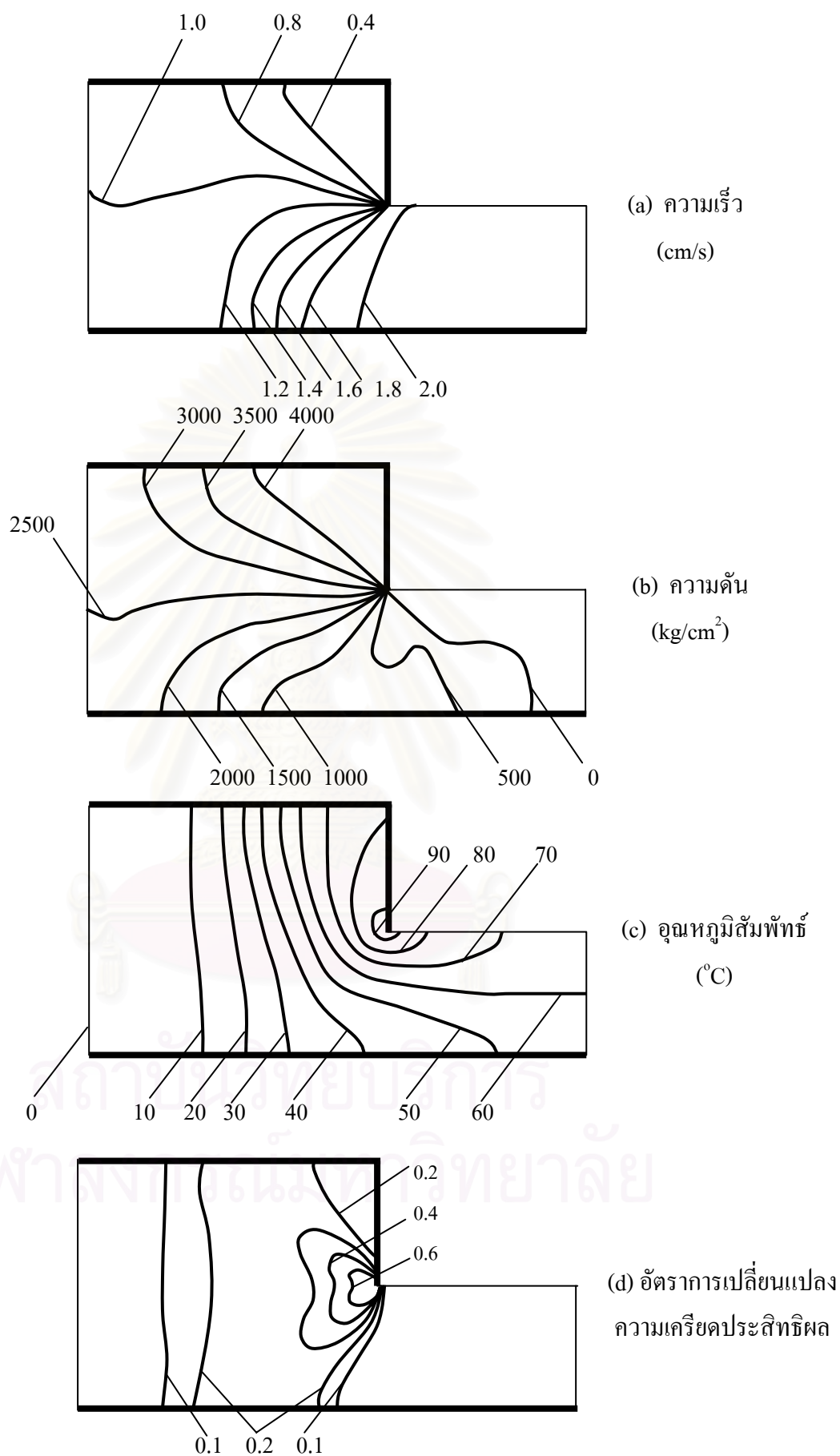
## 5.2 การวิเคราะห์ผลจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในโดยโปรแกรม MTFlow(v2)

เนื่องจากอุณหภูมิมีผลอย่างมากต่อการเปลี่ยนแปลงความเค้นคราก โดยวัสดุที่มีอุณหภูมิสูงจะมีค่าความเค้นครากต่ำกว่าวัสดุเดียวกันที่อยู่ในภาวะอุณหภูมิต่ำ นั้นหมายถึงการเปลี่ยนแปลงเพิ่มขึ้นของอุณหภูมิภายในเนื่องจากการเปลี่ยนรูปของวัสดุจะส่งผลให้ความเค้นครากเปลี่ยนแปลงและแรงดันอัดรีดก็จะเปลี่ยนตามไปด้วย หัวข้อย่อยนี้จะใช้โปรแกรม MTFlow(v2) เพื่อวิเคราะห์ปัญหาการอัดรีดเพื่อศึกษาผลของการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่มีต่อระบบในแง่มุมต่างๆ

### 5.2.1 ผลการอัดรีดผ่านแม่พิมพ์ R=0.5 โดยโปรแกรม MTFlow(v2)

หัวข้อย่อยนี้จะทำการวิเคราะห์หาคำตอบของการอัดรีดที่มีอัตราส่วนการลดขนาด 0.5 โดยมีสถานะเดียวกับปัญหาในรูป 5.4 เพื่อที่จะศึกษาการกระจายของความเร็ว ความดันและอุณหภูมิ โดยความเค้นครากจะไม่คงที่แต่จะเป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิดังแสดงในรูปแบบทั่วไปดังสมการ (2.18) กำหนดให้  $\beta$  มีค่าเท่ากับ 0.0007 ค่าคุณสมบัติของวัสดุต่างๆคือ มีค่าความเค้นคราก  $1732 \text{ kg/cm}^2$  ค่าความหนาแน่น  $0.01 \text{ kg/cm}^3$  สัมประสิทธิ์การนำความร้อน  $1.0 \text{ cal/(s.cm}^{\circ}\text{C)}$  ค่าความจุความร้อนจำเพาะ  $100.0 \text{ cal/(kg}^{\circ}\text{C)}$  และค่าคงที่สำหรับแปลงความร้อนทางกล (Mechanical Equivalent of Heat , J)  $42.65 \text{ kg.cm/cal}$  และกำหนดความหนืดเริ่มต้น  $1000.0 \text{ kg.s/cm}^2$  อุณหภูมิเริ่มต้นที่ใช้ในรอบแรกของการคำนวณ  $100.0 \text{ }^{\circ}\text{C}$  ความเร็วทางเข้า  $1.0 \text{ cm/s}$  ในการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตจะเพิ่มการกำหนดอุณหภูมิสัมพัทธ์ที่ด้านซ้ายสุดบนโดเมนปัญหาให้มีค่าเป็น 0 ดังนั้นค่าอุณหภูมิที่คำนวณได้จะหมายถึงอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้นจากเดิม แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์แสดงในรูป 5.5 ซึ่งประกอบด้วยจุดต่อความเร็วและอุณหภูมิ 2337 จุด จุดต่อความดัน 613 จุด และมีเอลิเมนต์จำนวน 1112 เอลิเมนต์ สมมุติฐานในการวิเคราะห์ปัญหานี้จะสมมุติว่าไม่มีการถ่ายเทความร้อนระหว่างโลหะอัดรีดและแท่นบรรจุหรือแม่พิมพ์ นั้นหมายถึงไม่มีการสูญเสียความร้อนออกจากพื้นผิวโลหะอัดรีด สมมุติฐานอีกประการหนึ่งคือ ค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆ เช่น ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน และค่าความจุความร้อนจำเพาะ ให้ถือว่าเป็นค่าคงที่ ไม่ขึ้นอยู่กับอุณหภูมิ

ผลจากการคำนวณโดยโปรแกรม MTFlow(v2) จะใช้จำนวนรอบในการคำนวณทั้งสิ้น 5 รอบ ค่าตัวแปรทั้งสามคือความเร็ว ความดัน และอุณหภูมิจะถูกรวบรวมเข้าสู่เกณฑ์ที่กำหนด ผลการกระจายของความเร็ว ความดัน อุณหภูมิสัมพัทธ์และอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดประสิทธิผล (Effective Strain Rate) ได้แสดงไว้ในรูปที่ 5.10. (a-d) ตามลำดับ

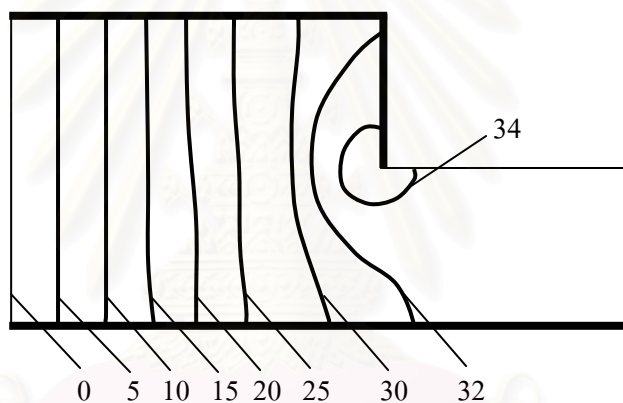


รูปที่ 5.10 ผลการกระจายของคำตอบในการอัดรีด  $R = 0.5$  โดยโปรแกรม MTFflow(v2)

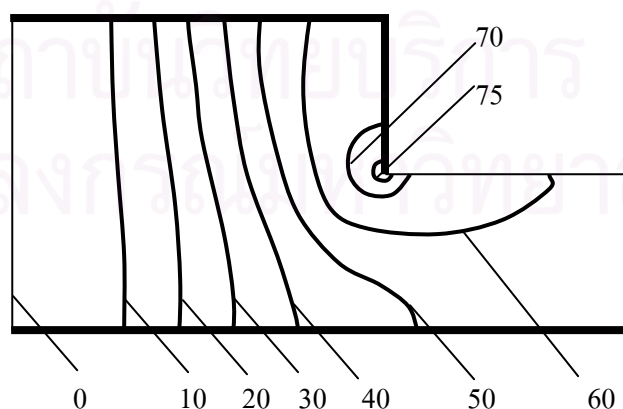
### 5.2.2 ผลของความเร็วต่อการกระจายอุณหภูมิสัมพัทธ์ และแรงดันอัดรีด

ในหัวข้อนี้จะทำการศึกษาผลของความเร็วอัดรีดที่มีต่อการเพิ่มขึ้นและการกระจายของอุณหภูมิสัมพัทธ์ภายในโดเมนของปัญหาโดยใช้แบบจำลองการอัดรีดที่มีอัตราส่วนการลดขนาด 0.5 โดยมีรายละเอียดต่างๆดังเช่นแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ ค่าคุณสมบัติของวัสดุ และสมมุติฐานเช่นเดียวกับหัวข้อ 5.2.1 แต่จะทำการเปลี่ยนแปลงค่าของความเร็วอัดรีดคือ 0.1 0.5 1 และ 5 cm/s นอกจากนี้ยังสามารถคำนวณหาค่าแรงดันอัดรีดที่ความเร็วต่างๆเพื่อศึกษาถึงผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงความเร็วที่มีต่อแรงดันอัดรีด

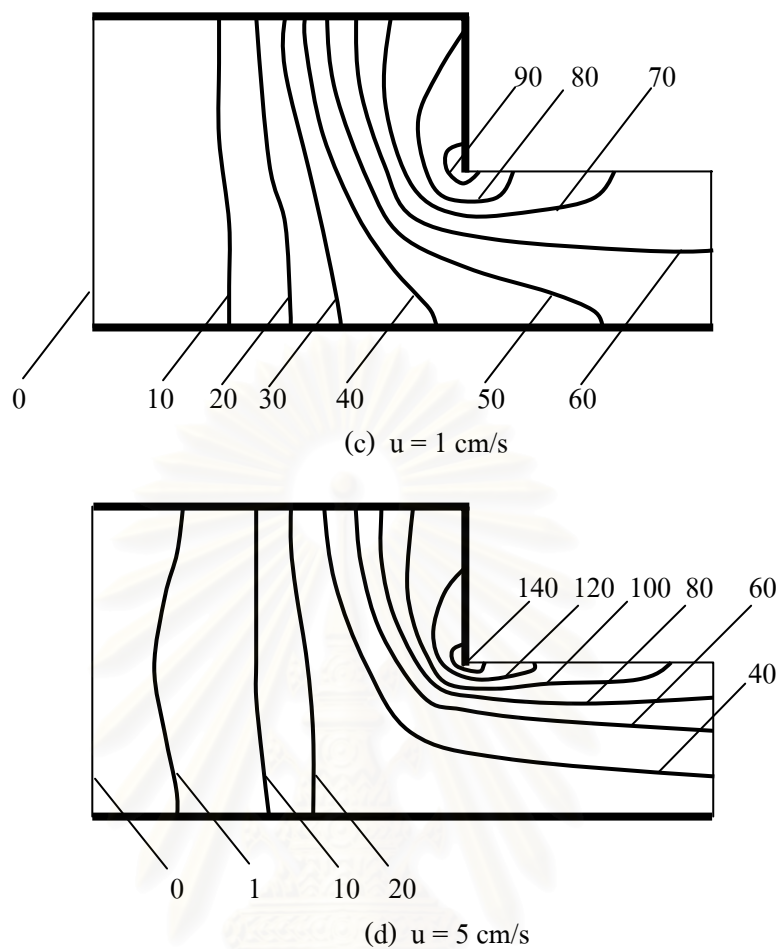
ผลการกระจายของอุณหภูมิสัมพัทธ์ที่ความเร็วอัดรีดต่างๆได้แสดงไว้ในรูปที่ 5.11 และสามารถเปรียบเทียบลักษณะการกระจายของความเร็วบนส่วนตัด A-A (จากรูปที่ 5.5) ที่ความเร็วต่างๆได้ดังรูปที่ 5.12



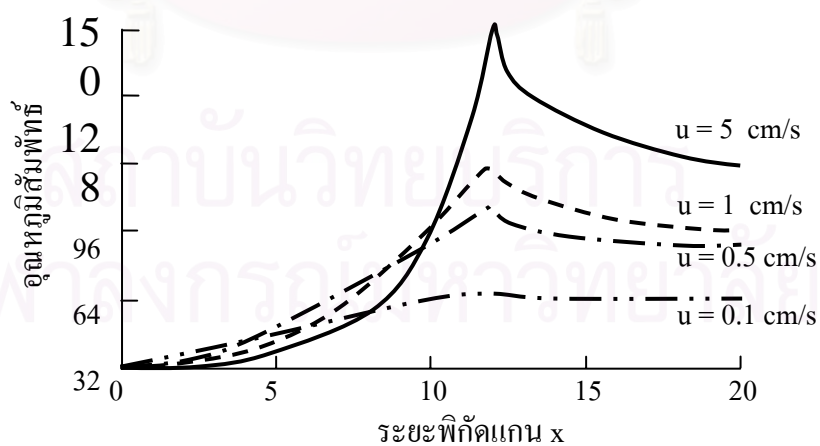
(a)  $u = 0.1 \text{ cm/s}$



(b)  $u = 0.5 \text{ cm/s}$



รูปที่ 5.11 ผลการกระจายอุณหภูมิสัมพัทธ์ที่ความเร็วอัดรีดต่างๆ โดยโปรแกรม MTFLOW(v2)



รูปที่ 5.12 การกระจายอุณหภูมิสัมพัทธ์ตามแนวแกนตัด A-A ที่ความเร็วต่างๆ

จากผลการกระจายของอุณหภูมิสัมพัทธ์ที่ความเร็วอัดรีดต่างๆ จะเห็นว่าบริเวณปลายของแม่พิมพ์จะเป็นบริเวณที่เกิดความร้อนสูงที่สุด เนื่องจากบริเวณดังกล่าวจะมีอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดประสิทธิผลสูงที่สุดทำให้เกิดความร้อนเนื่องจากงานของการเปลี่ยนรูปของโลหะสูงสุดด้วย และการอัดรีดที่ความเร็วสูงจะส่งผลให้เกิดความร้อนสูงกว่าการอัดรีดที่ความเร็วต่ำเนื่องจากความเร็วก็เป็นอีกตัวแปรหนึ่งในสมการสมดุลความร้อนที่ทำให้เกิดการเพิ่มขึ้นหรือลดลงของพลังงานความร้อนที่ตำแหน่งใดๆนอกจากนี้ความร้อนยังส่งผลให้ความเค้นครากเปลี่ยนแปลงและทำให้แรงดันอัดรีดเปลี่ยนแปลงไปด้วย จากผลการศึกษาแรงดันอัดรีดที่ความเร็วต่างๆโดยใช้โปรแกรม MTFlow(v1) ซึ่งความเค้นครากไม่ขึ้นอยู่กับอุณหภูมิดังตารางที่ 5.1 จะพบว่าความเร็วจะไม่ส่งผลต่อแรงดันอัดรีด ในขณะที่หากวิเคราะห์โดยโปรแกรม MTFlow(v2) โดยกำหนดความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่างความเค้นครากและอุณหภูมิ จะพบว่าแรงดันอัดรีดจะเปลี่ยนแปลงไปตามความเร็วดังตารางที่ 5.4 โดยแรงดันอัดรีดจะมีค่าลดลงเมื่อใช้ความเร็วในการอัดรีดสูงขึ้น

ตารางที่ 5.4 ผลของแรงดันอัดรีดที่ความเร็วต่างๆ

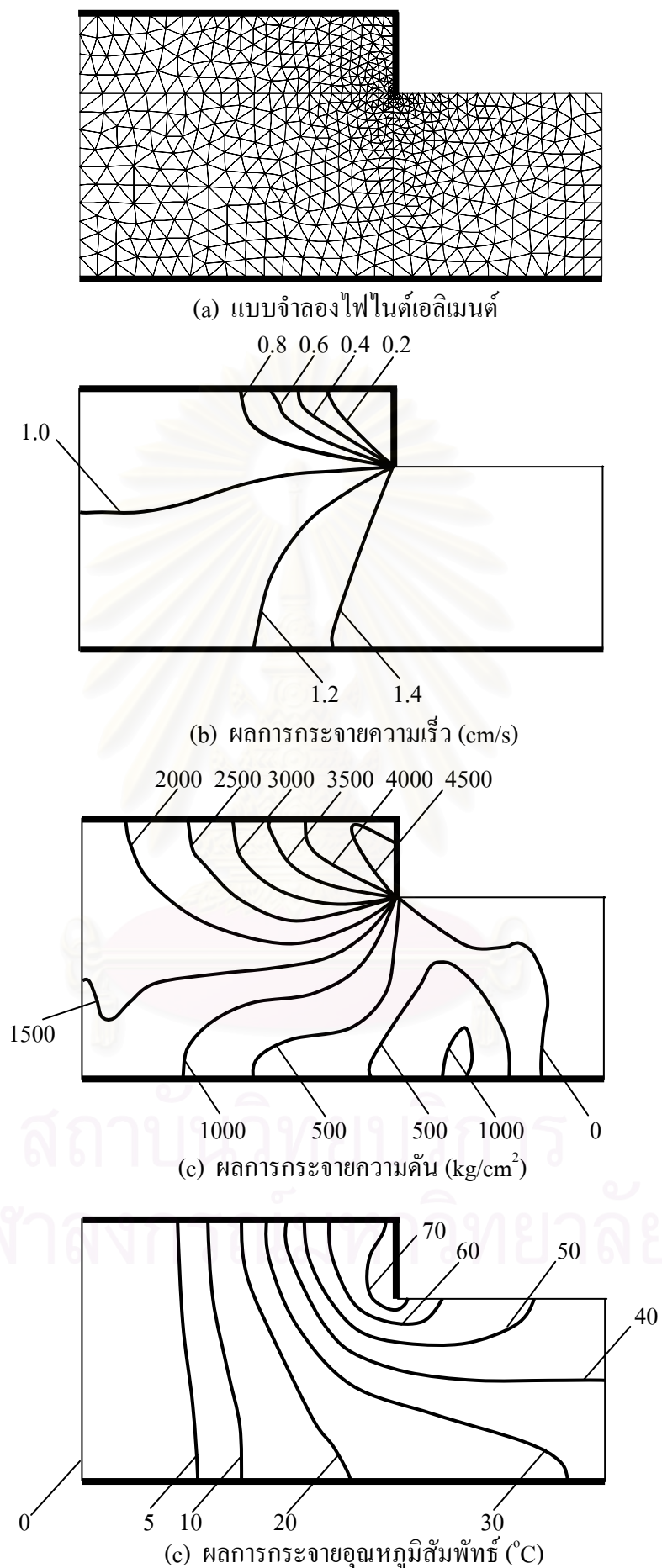
| ความเร็วอัดรีด (cm/s) | แรงดันอัดรีด(kg/cm <sup>2</sup> ) |
|-----------------------|-----------------------------------|
| 0.1                   | 2614.9                            |
| 0.5                   | 2580.4                            |
| 1                     | 2575.1                            |
| 5                     | 2552.5                            |

### 5.2.3 ผลของอัตราส่วนการลดขนาดต่อการกระจายอุณหภูมิและแรงดันอัดรีด

ในหัวข้อนี้จะทำการวิเคราะห์ผลของการเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนการลดขนาดที่มีต่อการเพิ่มขึ้นและการกระจายของอุณหภูมิโดยใช้โปรแกรม MTFlow(v2) และเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิทำให้แรงดันอัดรีดเปลี่ยนแปลงไปจึงทำการเปรียบเทียบแรงดันอัดรีดที่อัตราส่วนการอัดต่างๆที่คำนวณได้กับผลจากโปรแกรม MTFlow(v1) ดังแสดงในตาราง 5.2

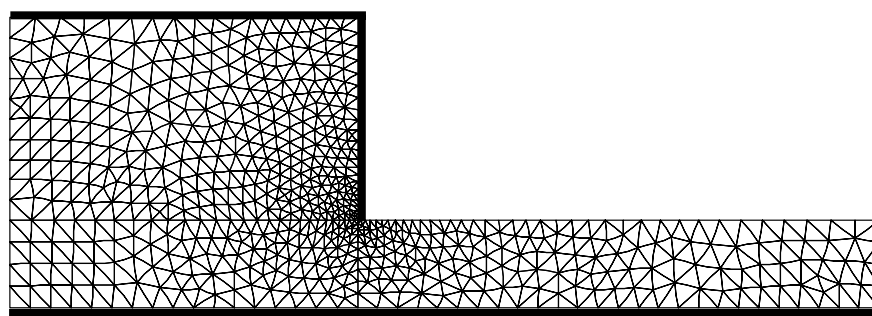
แบบจำลองที่ใช้จะมีอัตราส่วนการอัด 0.3, 0.5, 0.7, 0.8 และ 0.9 โดยกำหนดความหนาของโลหะอัดรีดเท่ากับ 10 cm ความเร็วอัดรีด 1 cm/s ค่าคุณสมบัติของวัสดุ และสมมุติฐานต่างๆถูกกำหนดเช่นเดียวกับในหัวข้อ 5.2.1 ในรูปที่ 5.13-5.16 ได้แสดงแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์และผลของการกระจายของคำตอบก็คือความเร็ว ความดัน และอุณหภูมิสัมพัทธ์ที่อัตราส่วนการลดขนาด 0.3, 0.7, 0.8 และ 0.9 ส่วนแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ และผลการกระจายของคำตอบสำหรับอัตราส่วนการลดขนาด 0.5 ได้แสดงไว้แล้วในรูปที่ 5.5 และ 5.10 ตามลำดับ



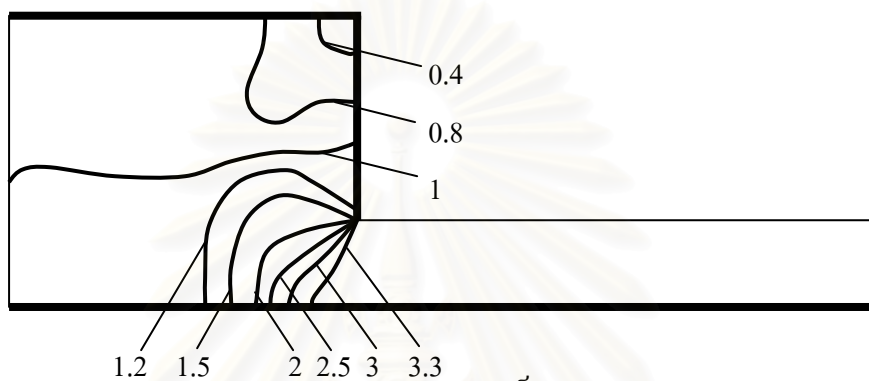


รูปที่ 5.13 ผลการวิเคราะห์การอัดรีดที่มีอัตราส่วนการลดขนาด 0.3 โดยโปรแกรม MTFLOW(v2)

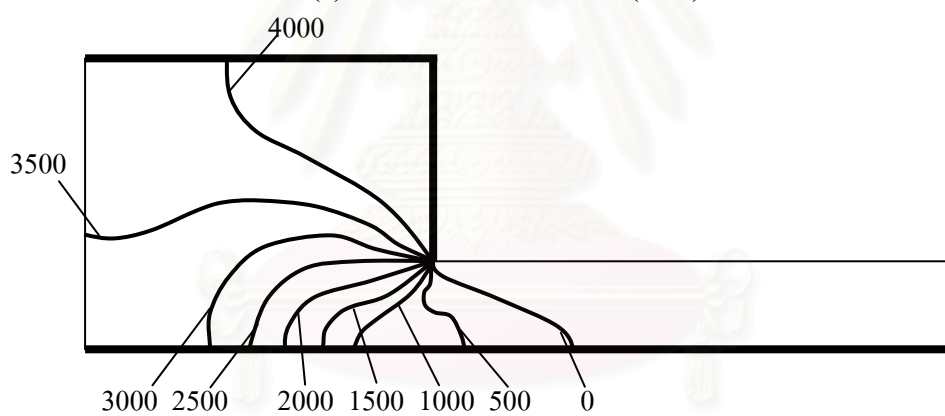
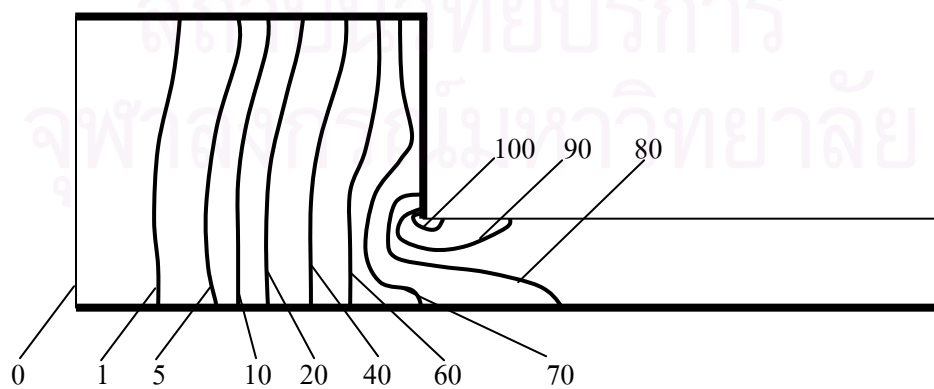




(a) แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์

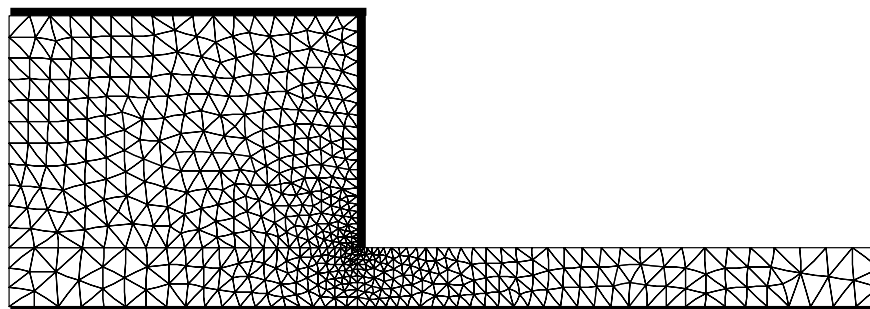


(b) ผลการกระจายความเร็ว (cm/s)

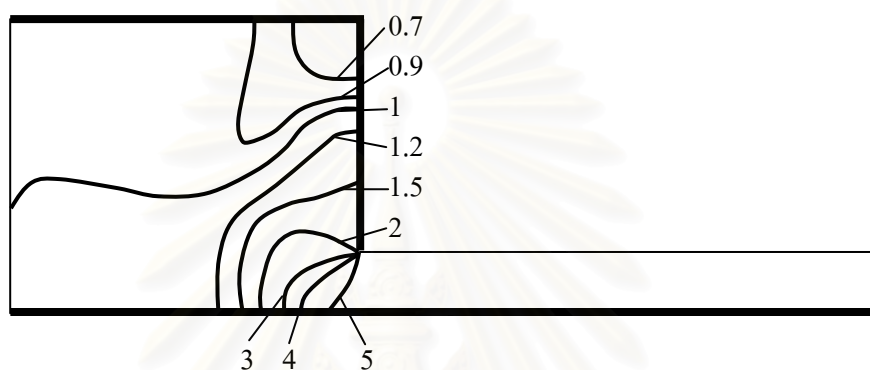
(c) ผลการกระจายความดัน (kg/cm<sup>2</sup>)

(d) ผลการกระจายอุณหภูมิสัมพัทธ์ (°C)

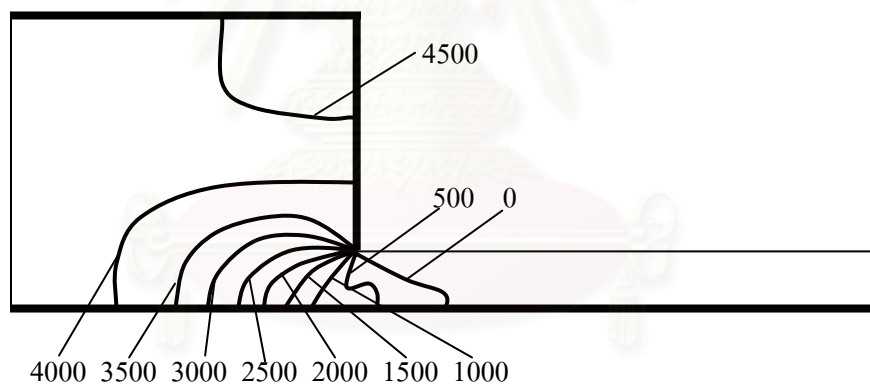
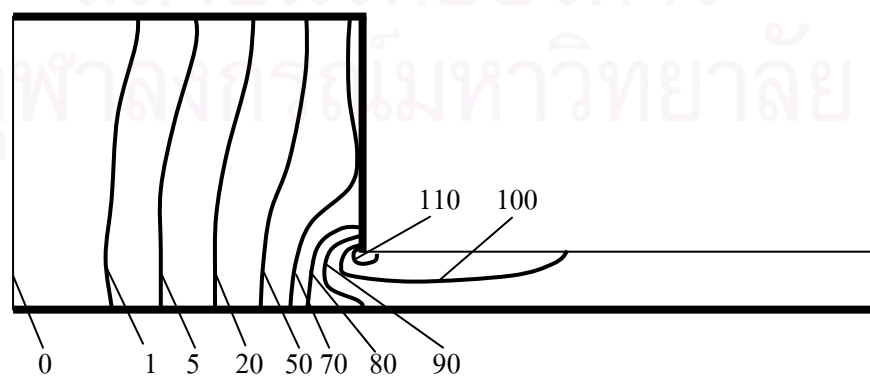
รูปที่ 5.14 ผลการวิเคราะห์การอัดรีดที่มีอัตราส่วนการลดขนาด 0.7 โดยโปรแกรม MTFLOW(v2)



(a) แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์

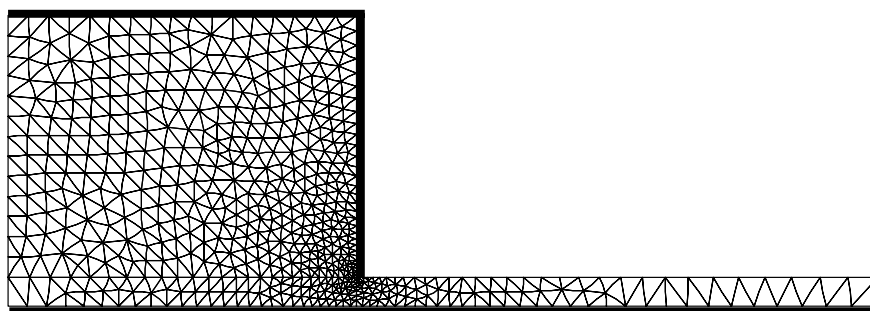


(b) ผลการกระจายความเร็ว (cm/s)

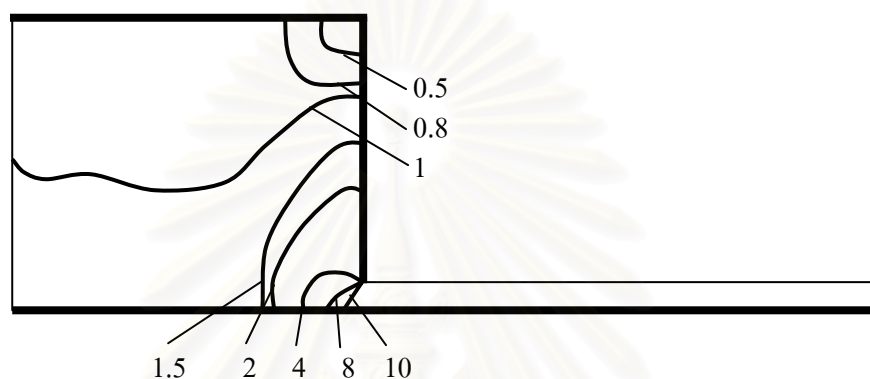
(c) ผลการกระจายความดัน (kg/cm<sup>2</sup>)

(d) ผลการกระจายอุณหภูมิสัมพัทธ์ (°C)

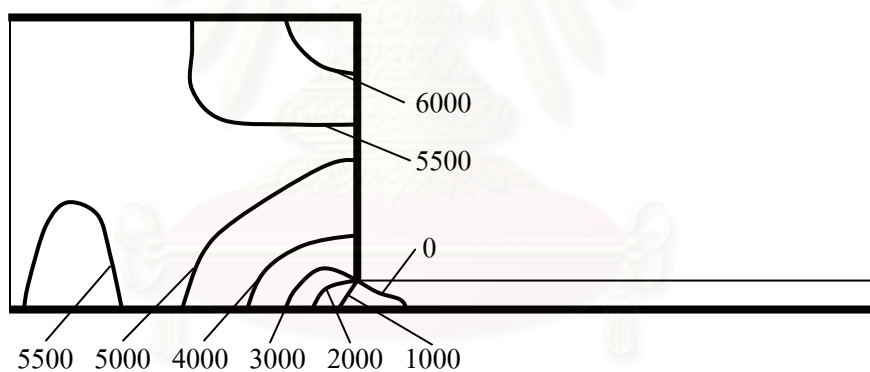
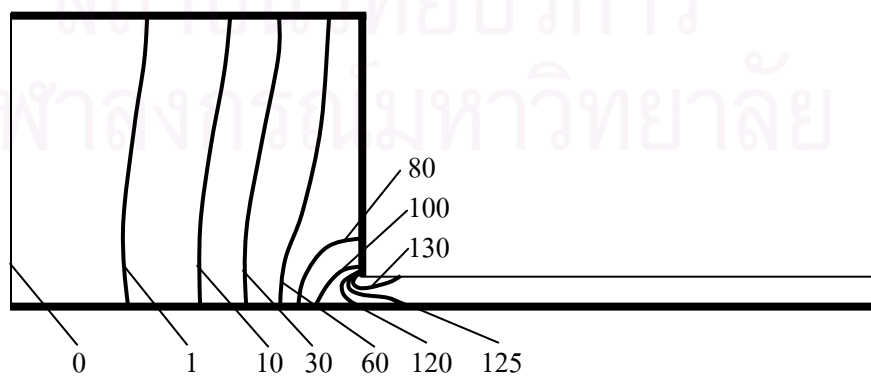
รูปที่ 5.15 ผลการวิเคราะห์การอัดรีดที่มีอัตราส่วนการลดขนาด 0.8 โดยโปรแกรม MTFflow(v2)



(a) แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์



(b) ผลการกระจายความเร็ว (cm/s)

(c) ผลการกระจายความดัน (kg/cm<sup>2</sup>)

(d) ผลการกระจายอุณหภูมิสัมพัทธ์ (°C)

รูปที่ 5.16 ผลการวิเคราะห์การอัดรีดที่มีอัตราส่วนการลดขนาด 0.9 โดยโปรแกรม MTFflow(v2)

จากผลการกระจายความเร็วความดันและอุณหภูมิสัมพัทธ์ที่อัตราส่วนการลดขนาดต่างๆ โดยกำหนดความเร็วอัดรีดคงที่ จะพบว่าผลของความเร็วของโลหะที่ไหลผ่านแม่พิมพ์จะเพิ่มขึ้นตามลำดับเนื่องจากคุณสมบัติการอัดตัวไม่ได้ของโลหะทำให้ปริมาตรคงที่ ดังนั้นสามารถคำนวณความเร็วของโลหะที่ทางออกได้โดยประมาณมีค่าเท่ากับ  $\frac{u}{1-R}$  โดย u คือความเร็วอัดรีด ผลความความดันก็เช่นกันจะเพิ่มขึ้นตามอัตราส่วนการลดขนาดเนื่องจากต้องใช้พลังงานในการอัดรีดมากขึ้นตามการเพิ่มของ R ซึ่งแรงดันอัดรีดได้แสดงไว้ในตารางที่ 5.5 โดยเปรียบเทียบกับผลการวิเคราะห์โดยโปรแกรม MTFflow(v1) ส่วนผลของการกระจายอุณหภูมิโดยรวมก็จะเพิ่มขึ้นตามอัตราส่วนการลดขนาดเช่นกันเนื่องจากความเร็วและค่าความเครียดประสิทธิผลเพิ่มขึ้นส่งผลให้ความร้อนที่ก่อกำเนิดจากการเปลี่ยนรูปของโลหะเพิ่มขึ้น

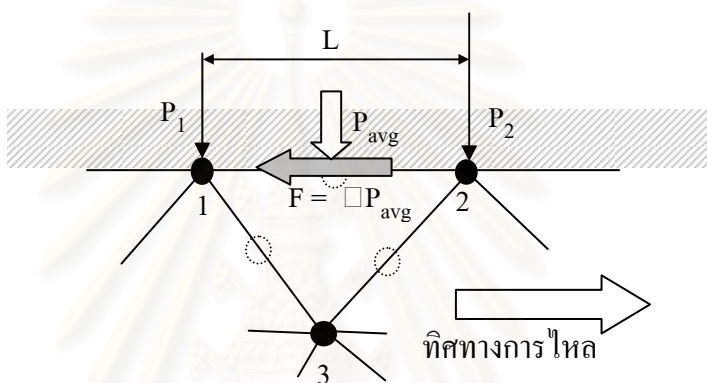
ตารางที่ 5.5 ผลการเปรียบเทียบแรงดันอัดรีดของโปรแกรม MTFflow(v1) และ MTFflow(v2) ที่อัตราส่วนการลดขนาดต่างๆ ( $\text{kg/cm}^2$ )

| R   | MTFlow(v1) | MTFlow(v2) |
|-----|------------|------------|
| 0.3 | 1721.3     | 1672.3     |
| 0.5 | 2664.3     | 2575.1     |
| 0.7 | 3791.6     | 3580.9     |
| 0.8 | 4473.3     | 4246.4     |
| 0.9 | 5784.6     | 5432.2     |

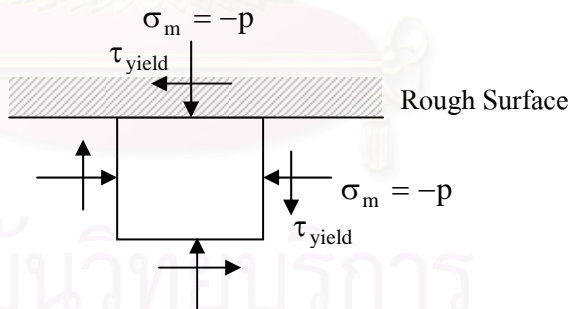
### 5.3 ผลของแรงเสียดทานที่มีต่อการอัดรีด

เนื่องจากการอัดรีดไม่สามารถหลีกเลี่ยงความเสียดทานที่เกิดขึ้นระหว่างผิวโลหะอัดรีดและแท่นบรรจุรวมทั้งแม่พิมพ์ ไม่ว่าจะมีการหล่อลื่นที่ดีเพียงไรก็ตามดังนั้นการศึกษาถึงผลกระทบของความเสียดทานต่อระบบจึงเป็นสิ่งจำเป็น แต่เนื่องจากการอัดรีดจริงๆ พื้นผิวสัมผัสที่เกิดแรงเสียดทานจะลดลงเรื่อยๆขณะที่โลหะถูกดันออกจากแม่พิมพ์ซึ่งเป็นการยากที่จะวิเคราะห์ผลที่ถูกต้องโดยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้นเป็นเพราะแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์จะต้องสมมติให้เกิดค่าความเสียดทานบนพื้นผิวที่ไม่แปรผันตามเวลา ดังนั้นผลที่ได้จึงไม่อยู่ในรูปแบบทั่วไปที่จะนำไปใช้ได้ แต่จะเกิดประโยชน์ในแง่ของการวิจัยและพัฒนาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อรองรับปัญหาดังกล่าว

ในการอัดรีดแรงเสียดทานจะเกิดขึ้นที่ผิวสัมผัสระหว่างโลหะกับแม่พิมพ์ในทิศทางตรงกันข้ามกับทิศทางการไหลของโลหะ โดยในแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ก็จะเกิดแรงที่ขอบของเอลิเมนต์ ดังรูปที่ 5.17 เอลิเมนต์มีความยาวขอบ  $L$  มีแรงดันเฉลี่ยที่เอลิเมนต์ต่อหนึ่งหน่วยความยาว  $P_{avg} = \frac{P_1 + P_2}{2}L$  โดย  $P_1$  และ  $P_2$  คือความดันปฏิกิริยาที่แท่นบรรจุกระทำต่อโลหะอัดรีด ดังนั้นจะเกิดแรงเสียดทานในทิศทางตรงกันข้ามกับทิศทางการไหลมีค่าเท่ากับ  $\eta P_{avg}$  โดย  $\eta$  คือสัมประสิทธิ์ของแรงเสียดทาน และแรงเสียดทานสูงสุดเกิดขึ้นได้ไม่เกินค่าความเค้นเฉือนคราก ( $\tau_{yield}$ ) เนื่องจากในกรณีที่เกิดแรงเสียดทานสูงสุดบนพื้นผิวหยาบกรณิเช่นนี้จะเกิดความเค้นเฉือนเพียงอย่างเดียว (Pure Shear) ในทิศทางตามแนวการเคลื่อนที่และจะมีค่าเท่ากับค่า  $\tau_{yield}$  ดังรูป 5.18



รูปที่ 5.17 แรงเสียดทานที่เกิดบนขอบของเอลิเมนต์



รูปที่ 5.18 ความเค้นเฉือนสูงสุดที่เกิดบนผิวในกรณีที่เกิดแรงเสียดทานสูงที่สุด

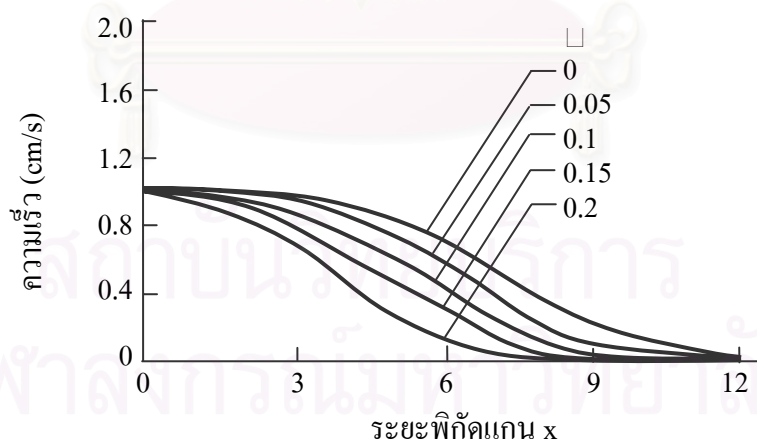
ในการคำนวณแรงที่เกิดขึ้นบนขอบของเอลิเมนต์ซึ่งถือเป็นแรงภายนอกจะต้องทำการสร้างเวกเตอร์เมตริกซ์  $\{R_u\}$  หรือ  $\{R_v\}$  ดังสมการ (3.57 a,b) ตามแต่ทิศทางของแรงเสียดทานนั้น จากสมการดังกล่าวจะเห็นว่าแรงเสียดทานของแต่ละเอลิเมนต์จะกระจายลงสู่จุดต่อแต่ละจุดก่อนที่จะสร้างระบบสมการขนาดใหญ่

ในการวิเคราะห์จะใช้โปรแกรม MTFlow(v1) แบบจำลองการอัดรีดที่มีอัตราส่วนการลดขนาด 0.5 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์และคุณสมบัติต่างๆจะเหมือนกับหัวข้อ 5.1 คือมีความเค้น

ครากคองที่เท่ากับ  $1732 \text{ kg/cm}^2$  และใช้ความเร็วอัดรีด  $1 \text{ cm/s}$  โดยจะทำการวิเคราะห์ผลของความเร็วและความดันที่ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงเสียดทาน 0.05 0.1 0.15 และ 0.2 พื้นผิวความเสียดทานจะเกิดขึ้นที่ทั้งผิวสัมผัสกับแท่นบรรจุและผิวสัมผัสแม่พิมพ์ โดยผลของแรงดันอัดรีดแสดงไว้ในตารางที่ 5.6 จะเห็นว่าที่สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานสูงขึ้นจะต้องใช้แรงดันอัดรีดสูงตามไปด้วยซึ่งสอดคล้องกับความเป็นจริง ส่วนผลการกระจายความเร็วตามแนวผิวสัมผัสกับแท่นบรรจุ (หน้าตัด B-B ในรูปที่ 5.5) ที่สัมประสิทธิ์ความเสียดทานต่างๆ ได้แสดงในรูปที่ 5.19 จะพบว่าผลของความเร็วที่ผิวสัมผัสที่มีสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานสูงจะต่ำกว่าที่มีสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานต่ำ

ตารางที่ 5.6 ผลแรงดันอัดรีดที่สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานต่างๆ

| สัมประสิทธิ์แรงเสียดทาน | แรงดันอัดรีด ( $\text{kg/cm}^2$ ) |
|-------------------------|-----------------------------------|
| 0                       | 2644.3                            |
| 0.05                    | 2798.8                            |
| 0.1                     | 2922.8                            |
| 0.15                    | 3046.0                            |
| 0.2                     | 3088.0                            |

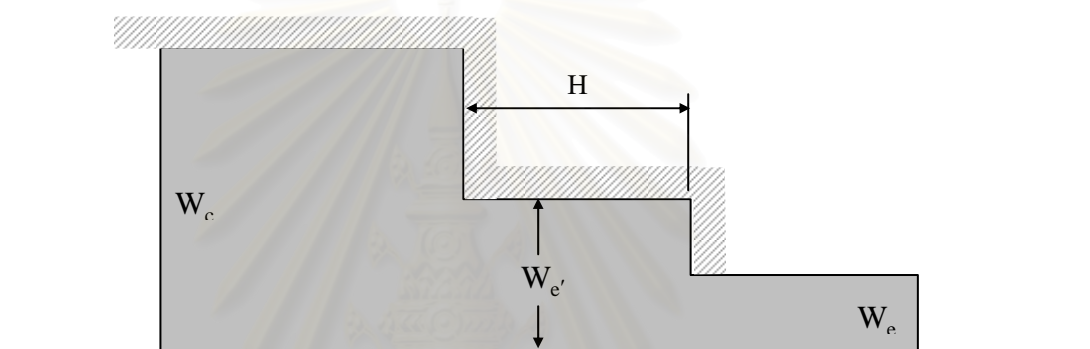


รูปที่ 5.19 กราฟแสดงการกระจายความเร็วตามแนว B-B ที่สัมประสิทธิ์แรงเสียดทานต่างๆ



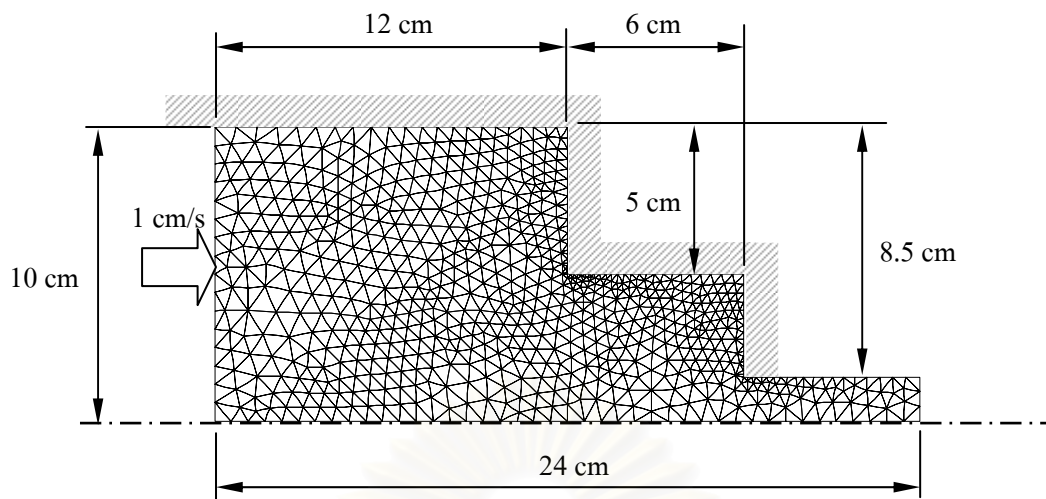
## 5.4 การอัดรีดแบบลดระดับ

เป็นอีกรูปแบบหนึ่งของการอัดรีดโดยการค่อยๆลดระดับขึ้นความหนาของแม่พิมพ์ดังรูปที่ 5.20 และถ้าหากค่า  $H$  มากเพียงพอเมื่อเทียบกับ  $W_c$  ค่าแรงดันที่ใช้จะมีค่าประมาณเท่ากับแรงดันอัดรีดของทั้งสองชั้นรวมกัน กล่าวคือเท่ากับแรงดันอัดรีดที่ใช้สำหรับอัดโลหะผ่านแม่พิมพ์ที่มีอัตราส่วนการลดขนาด  $1 - W_{c'}/W_c$  รวมกับการอัดรีดผ่านแม่พิมพ์ลดขนาดที่มีอัตราส่วนการลดขนาด  $1 - W_c/W_c$  เมื่อไม่มีการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของวัสดุเนื่องจากความร้อนมาเกี่ยวข้อง ซึ่งจะแสดงให้เห็นในตัวอย่างในหัวข้อย่อๆนี้



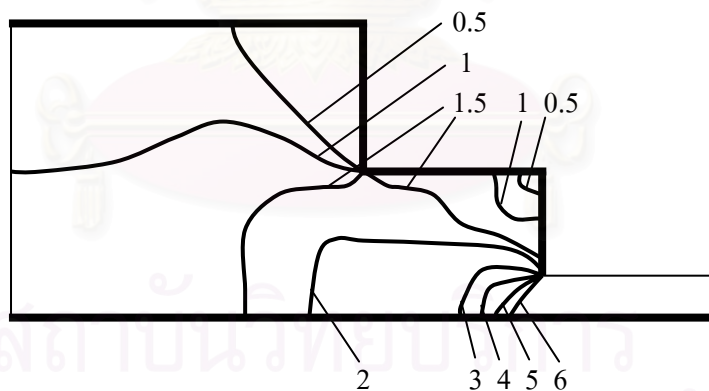
รูปที่ 5.20 แบบจำลองการอัดรีดลดระดับ

ตัวอย่างที่จะใช้วิเคราะห์ปัญหานี้จะใช้การอัดรีดผ่านแม่พิมพ์ 2 ระดับโดยระดับแรกและหลังจะมีอัตราส่วนการลดขนาด 0.5 และ 0.7 ตามลำดับ แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์จะแบ่งเอลิเมนต์แบบกระจายที่มีความละเอียดเพื่อที่จะได้คำตอบที่มีความเที่ยงตรงสูง โดยมีจำนวนจุดต่อความเร็ว 2943 จุดต่อ จุดต่อความดัน 778 จุดต่อ จำนวนเอลิเมนต์ 1388 เอลิเมนต์ วัสดุมีค่าความเค้นคราก  $1732 \text{ kg/cm}^2$  ค่าความหนาแน่น  $0.01 \text{ kg/cm}^3$  สัมประสิทธิ์การนำความร้อน  $1.0 \text{ cal/(s.cm.}^\circ\text{C)}$  ค่าความจุความร้อนจำเพาะ  $100.0 \text{ cal/(kg.}^\circ\text{C)}$  และค่าคงที่สำหรับแปลงความร้อนทางกล (Mechanical Equivalent of Heat, J)  $42.65 \text{ kg.cm/cal}$  ค่า  $\beta$  สำหรับสมการ (2.18) มีค่าเท่ากับ 0.0007 และกำหนดความหนืดเริ่มต้น  $1000.0 \text{ kg.s/cm}^2$  อุณหภูมิเริ่มต้นที่ใช้สำหรับรอบแรกของการคำนวณ  $100.0 \text{ }^\circ\text{C}$  ความเร็วทางเข้า  $1.0 \text{ cm/s}$  และพื้นผิวไม่มีความเสียดทาน ในการวิเคราะห์จะใช้โปรแกรม MTFflow(v1) เพื่อหาค่าความดันเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากแรงดันของ  $R = 0.5$  รวมกับ  $R = 0.7$  เนื่องจากความร้อนไม่ส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของวัสดุ ส่วนโปรแกรม MTFflow(v2) จะใช้เพื่อหาค่าของการกระจายอุณหภูมิบนโดเมนปัญหาอันเนื่องมาจากการเปลี่ยนรูปของโลหะ รายละเอียดต่างๆแสดงในรูปที่ 5.21

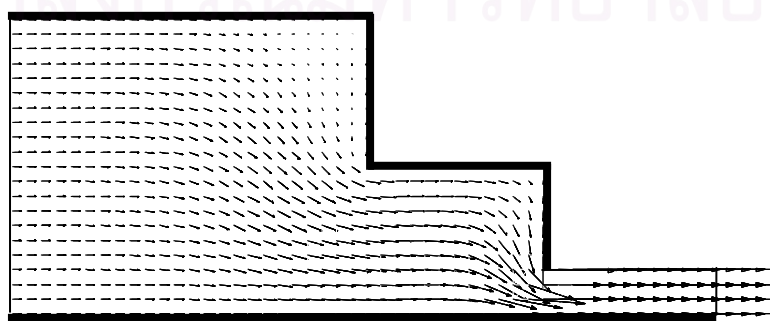


รูปที่ 5.21 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของการอัดรีดระดับ

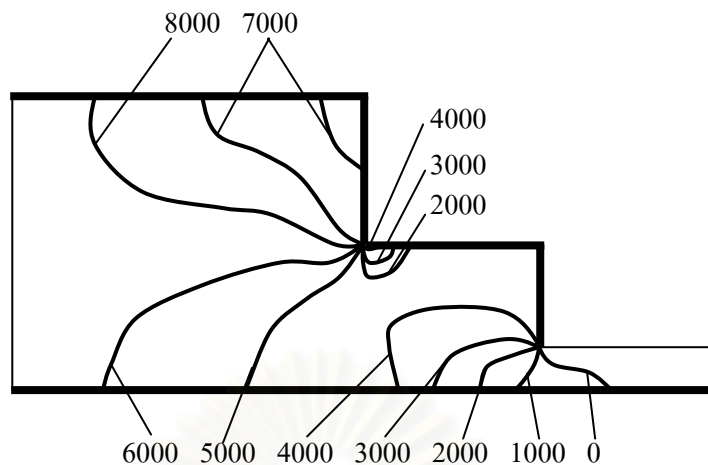
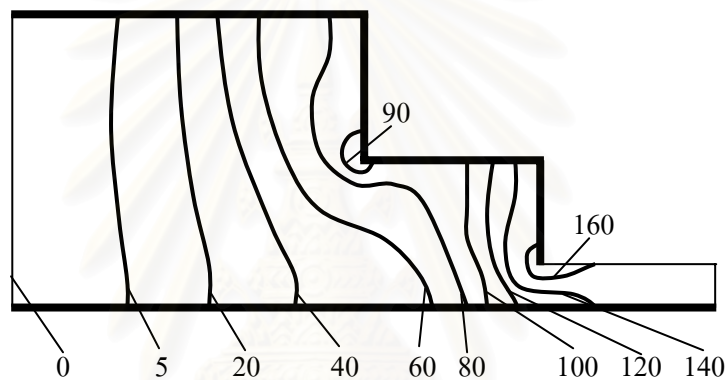
ผลการวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรม MTFLOW(v1) จะได้ผลแรงดันอัดรีดเท่ากับ  $6539 \text{ kg/cm}^2$  เมื่อเปรียบเทียบกับผลการวิเคราะห์โดยโปรแกรมเดียวกันกับปัญหา  $R=0.5$  รวมกับ  $R=0.7$  จากตาราง 5.2 จะได้ผลแรงดันอัดรีดเท่ากับ  $6459 \text{ kg/cm}^2$  จะเห็นว่าผลที่ใกล้เคียงกันสนับสนุนความสัมพันธ์ของทฤษฎีการคำนวณข้างต้น ผลการกระจายความเร็ว ความดันและอุณหภูมิ รวมทั้งผลเวกเตอร์ความเร็วที่ได้จากการใช้โปรแกรม MTFLOW(v2) แสดงในรูปที่ 5.22 (a-d)



(a) ผลการกระจายความเร็ว (cm/s)



(b) ผลเวกเตอร์ความเร็ว

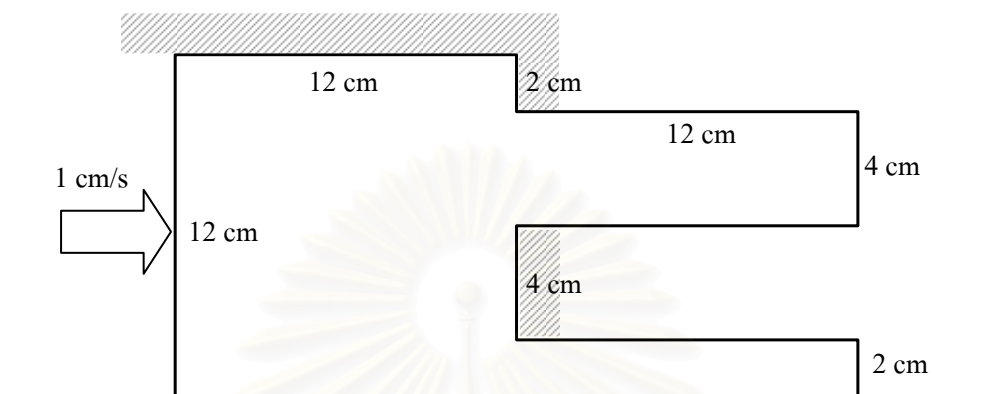
(c) ผลการกระจายความดัน ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ )(d) ผลการกระจายอุณหภูมิสัมพัทธ์ ( $^{\circ}\text{C}$ )

รูปที่ 5.22 ผลการคำนวณปัญหาการอัดรีดระดับโดยโปรแกรม MTFflow(v2)

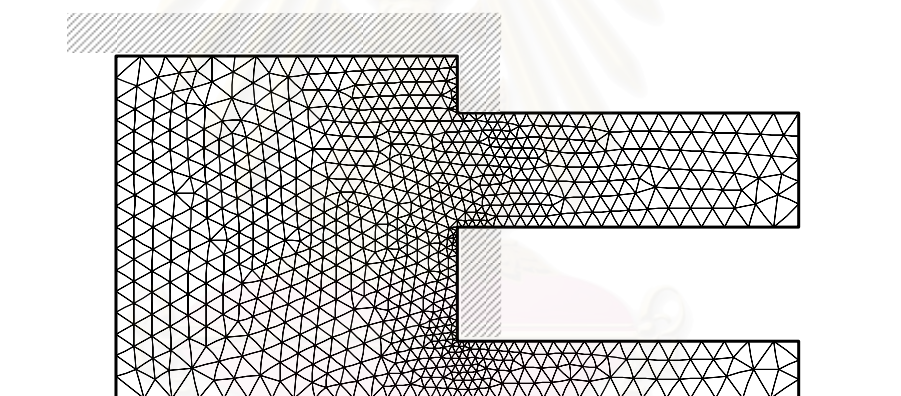
### 5.5 การอัดรีดแบบทางออกหลายทาง

เป็นการอัดรีดผ่านแม่พิมพ์ที่มีมากกว่าหนึ่งช่องทางออกดังแสดงตัวอย่างแบบจำลองในรูปที่ 5.23 ซึ่งมีอยู่สามช่องทางออกโดยสมมาตรตามแนวกึ่งกลาง ดังนั้นสามารถจำลองแบบครึ่งหนึ่งของปัญหา แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ได้แสดงไว้ในรูปที่ 5.24 ซึ่งเป็นเอลิเมนต์กระจายที่มีความละเอียดสูง ประกอบไปด้วย 3320 จุดต่อความเร็ว 850 จุดต่อความดัน และ 1531 เอลิเมนต์ วัสดุที่มีความหนาแน่น  $1732 \text{ kg}/\text{cm}^3$  ค่าความหนาแน่น  $0.01 \text{ kg}/\text{cm}^3$  สัมประสิทธิ์การนำความร้อน  $1.0 \text{ cal}/(\text{s}\cdot\text{cm}\cdot^{\circ}\text{C})$  ค่าความจุความร้อนจำเพาะ  $100.0 \text{ cal}/(\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C})$  และค่าคงที่สำหรับแปลงความร้อนทางกล (Mechanical Equivalent of Heat, J)  $42.65 \text{ kg}\cdot\text{cm}/\text{cal}$  ค่า  $\beta$  สำหรับสมการ (2.18) มีค่าเท่ากับ  $0.0007$  และกำหนดความหนืดเริ่มต้น  $1000.0 \text{ kg}\cdot\text{s}/\text{cm}^2$  อุณหภูมิเริ่มต้น  $100.0 \text{ }^{\circ}\text{C}$  ความเร็วทางเข้า

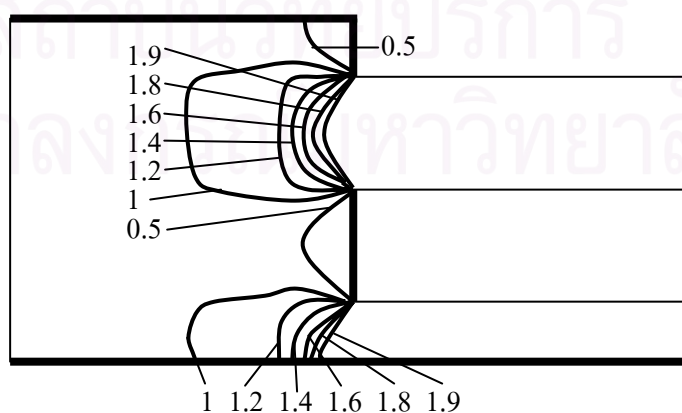
1.0 cm/s และพื้นผิวไม่มีความเสียดทาน วิเคราะห์โดยใช้โปรแกรม MTFLOW(v2) เพื่อหาผลลัพธ์การกระจายของความเร็ว ความดัน และอุณหภูมิ รวมทั้งผลของเวกเตอร์ความเร็วที่สภาวะดังกล่าว และผลลัพธ์ต่างๆได้แสดงไว้ในรูปที่ 5.25



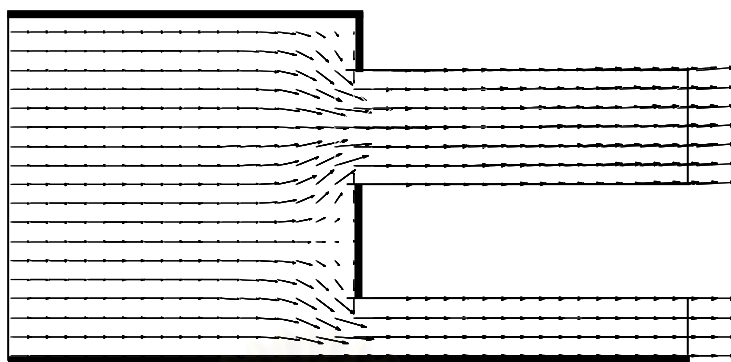
รูปที่ 5.23 แบบจำลองการอัดรีดแบบทางออกหลายทาง



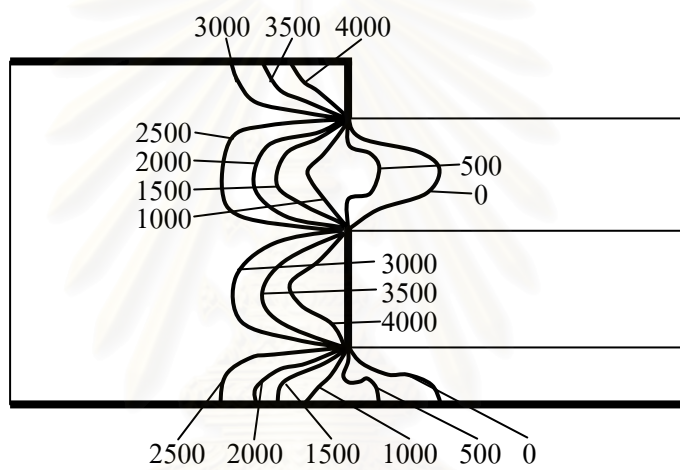
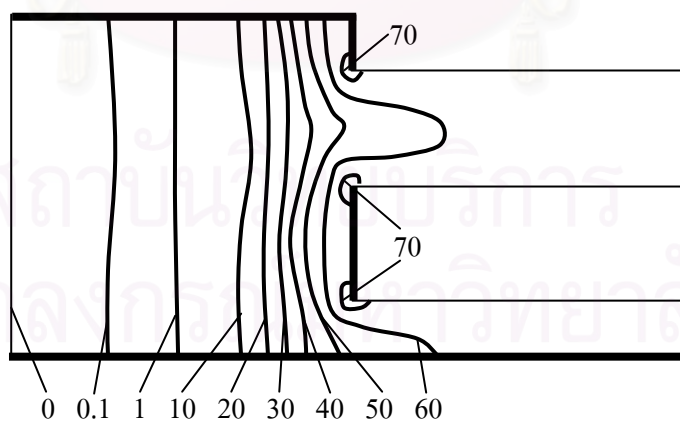
รูปที่ 5.24 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของการอัดรีดแบบหลายทางออก



(a) ผลการกระจายความเร็ว (cm/s)



(b) ผลเวกเตอร์ความเร็ว

(c) ผลการกระจายความดัน ( $\text{kg/cm}^2$ )(d) ผลการกระจายอุณหภูมิสัมพัทธ์ ( $^{\circ}\text{C}$ )

รูปที่ 5.25 ผลการคำนวณปัญหาการอัดรีดแบบทางออกหลายทางโดยโปรแกรม MTFflow(v2)

## บทที่ 6

### การรีดโลหะแผ่น (Sheet Rolling)

การรีดโลหะแผ่นเป็นอีกลักษณะหนึ่งของปัญหาการไหลเชิงพลาสติก (Plastic Flow) เช่นเดียวกับการอัดรีด การรีดโลหะแผ่นมีวัตถุประสงค์เพื่อที่จะลดขนาดความหนาของโลหะแผ่น เพื่อที่จะนำไปสู่ในกระบวนการผลิตอื่นๆ เช่นการขึ้นรูปตัวถังรถยนต์ เป็นต้น ขั้นตอนในการรีด โดยทั่วไปก็จะทำการผ่านโลหะแผ่นที่ถูกม้วนเป็นขดวงกลมเข้าสู่ลูกรีด (Rolling Mills) อย่างต่อเนื่อง ลูกรีดจะทำหน้าที่กดอัดให้โลหะแผ่นนั้นเกิดการเปลี่ยนรูปในเชิงพลาสติกในขณะที่เคลื่อนตัวผ่าน ดังนั้นจะเกิดความเค้นอัด (Compressive Stress) ที่หน้าตัดของโลหะแผ่นระหว่างลูกรีดทั้งสอง และที่ผิวสัมผัสจะเกิดความเค้นเฉือนอันเนื่องมาจากความเสียดทานระหว่างพื้นผิว และหากโลหะแผ่นถูกทำให้ร้อนก่อนเข้าสู่กระบวนการ จะเรียกว่าการรีดร้อน (Hot Rolling) และหากทำการรีดที่ อุณหภูมิห้องจะเรียกว่าการรีดเย็น (Cold Rolling) ซึ่งทั้งสองลักษณะจะมีข้อดีข้อเสียแตกต่างกันไป การรีดร้อนจะใช้พลังงานในการรีดน้อย แต่ผลิตภัณฑ์ที่ได้จะมีผิวที่ไม่เรียบอีกทั้งยังควบคุมขนาด ความหนาที่ทางออกได้ยากเนื่องจากการขยายตัวของโลหะอันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงความร้อนมาเกี่ยวข้อง ข้อเสียอีกประการหนึ่งก็คือความแข็งแรงของโลหะแผ่นจะต่ำกว่าการรีดเย็น ส่วน การรีดเย็นจะมีลักษณะตรงกันข้ามก็คือใช้พลังงานในการรีดสูง แต่จะได้ผลิตภัณฑ์ที่มีผิวเรียบ สามารถควบคุมความหนาได้อย่างแม่นยำ และโลหะแผ่นจะมีความแข็งแรงสูง

เนื่องจากลักษณะทางกายภาพของปัญหาการเปลี่ยนรูปของโลหะเนื่องจากการรีดเหมือนกับ การอัดรีด ดังนั้นจึงสามารถนำเอาโปรแกรม MTFlow ที่ประดิษฐ์ขึ้นมาใช้วิเคราะห์ปัญหาได้โดยไม่ต้องมีการปรับเปลี่ยนใดๆทั้งสิ้น เพียงแต่สร้างรูปร่างของแบบจำลองและเงื่อนไขขอบเขตให้ สอดคล้องกับปัญหา การอัดรีดจะส่งแรงผ่านแทนอัดเพื่อที่จะดันโลหะผ่านแม่พิมพ์ส่วนการรีดจะส่ง แรงผ่านลูกรีดเพื่อที่จะบีบอัดโลหะแผ่นให้มีขนาดความหนาที่ลดลง โดยแรงรีด (Rolling Force) หรือ แรงที่ลูกรีดใช้ในการกดให้โลหะแผ่นเปลี่ยนรูป และแรงบิดรีด (Rolling Torque) หรือแรงบิดที่ใช้ใน การหมุนลูกรีด จึงเป็นค่าที่จำเป็นที่จะต้องวิเคราะห์หาคำตอบเพื่อที่จะนำไปใช้ในการออกแบบ เครื่องจักรกลในการรีดโลหะ

ทฤษฎีที่ใช้วิเคราะห์หาแรงรีดและแรงบิดรีดนั้นมีอยู่หลายทฤษฎีด้วยกัน แต่ในวิทยานิพนธ์ ฉบับนี้จะยกตัวอย่างทฤษฎีของ Alexander และ Ford [22] เพื่อที่จะนำคำตอบที่ได้มาเปรียบเทียบกับ คำตอบที่คำนวณได้จากโปรแกรม MTFlow เพื่อยืนยันความถูกต้องของโปรแกรมสำหรับปัญหาการ รีดโลหะแผ่น หลังจากที่ยืนยันความถูกต้องสำหรับปัญหาการอัดรีดไปแล้วในบทที่ 5 และ

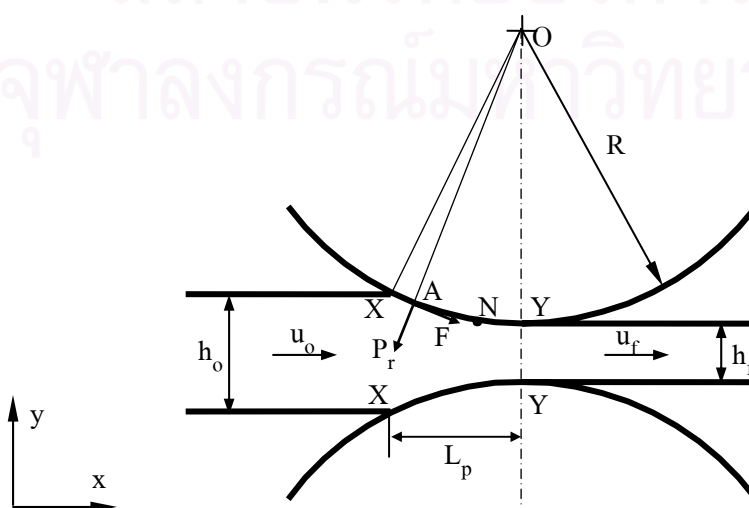


เช่นเดียวกับการอัดรีด ผลการคำนวณจากโปรแกรม MTFlow จะถูกเปรียบเทียบกับผลการทดลองเพื่อตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้งก่อนที่จะนำไปวิเคราะห์ปัญหาในรูปแบบต่างๆ โดยผลการทดลองที่นำมาอ้างอิงในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้ผลการทดลองของ Sims [24] และเนื่องจากว่าแบบจำลองของวัสดุที่ใช้ในโปรแกรมจะเป็นแบบวัสดุพลาสติกอุดมคติ (Ideal Plastic) หรือเป็นวัสดุที่ไม่มี ความเครียดแข็ง (Strain Hardening) โลหะที่มีคุณลักษณะใกล้เคียงก็คือโลหะที่มีเนื้ออ่อน หรือโลหะที่ถูกทำให้ร้อน ดังนั้นตัวอย่างปัญหาต่างๆรวมทั้งการวิเคราะห์จะอ้างอิงกับทฤษฎีการรีดร้อนทั้งสิ้น สมมุติฐานที่สำคัญอีกประการหนึ่งก็คือลูกรีดจะทำจากวัสดุแข็งเกร็ง กล่าวคือไม่มีการเปลี่ยนรูปใน ทุกกรณี

### 6.1 ลักษณะทางกายภาพของปัญหาการรีดโลหะแผ่น

จากรูปที่ 6.1 ได้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแบบจำลองการรีดโลหะแผ่นและแรงที่ลูกรีดกระทำต่อผิวของโลหะแผ่นที่ไหลผ่านลูกรีด โลหะแผ่นที่มีความกว้างตามแนวแกน  $z$  เท่ากับ  $b$  ความหนาตามแนวแกน  $y$  เท่ากับ  $h_0$  ไหลเข้าลูกรีดที่ระนาบตัด  $XX$  ด้วยความเร็ว  $u_0$  และไหลออกที่ระนาบตัด  $YY$  ด้วยความเร็ว  $u_f$  และมีความหนา  $h_f$  ระหว่างระนาบตัด  $XX$  และ  $YY$  โลหะแผ่นจะมีความหนาแปรผัน  $h$  และความเร็วแปรผัน  $u$  และเนื่องจากสมมุติฐานของความเครียดในระนาบที่ว่าไม่มีการเปลี่ยนรูปตามแนวด้านกว้างของโลหะแผ่น ดังนั้นส่วนประกอบของแรงตามแนวแกน  $y$  ทั้งหมดจะทำให้เกิดการเปลี่ยนรูปเฉพาะในระนาบ  $xy$  เท่านั้น และจากกฎการอนุรักษ์มวล ปริมาตรของโลหะที่ไหลผ่านลูกรีดต่อหนึ่งหน่วยเวลาที่ตำแหน่งใดๆบนแกน  $x$  ต้องเท่ากัน สามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$bh_0u_0 = bh_fu_f \quad (6.1)$$



รูปที่ 6.1 ลักษณะแบบจำลองการรีดโลหะแผ่น

ที่พื้นผิวสัมผัสระหว่างโลหะแผ่นและลูกกรีด จะมีจุดๆหนึ่งบนโลหะแผ่นที่มีความเร็วเท่ากับความเร็วลูกกรีด ( $u_r$ ) จุดนี้มีชื่อเรียกว่าจุดเป็นกลาง (Neutral Point) กล่าวคือจะไม่มี การเคลื่อนไถลระหว่างผิวลูกกรีดและผิวโลหะแสดงโดยจุด N ในรูปที่ 6.1 และที่ตำแหน่งต่างๆบนผิวสัมผัส เช่นจุด A จะมี ส่วนประกอบของแรงเกิดขึ้น 2 ส่วนด้วยกัน คือส่วนของแรงที่เกิดจากลูกกรีดกระทำต่อโลหะแผ่น  $P_r$  ทิศทางจะอยู่ในแนวรัศมีของลูกกรีด อีกส่วนหนึ่งก็คือแรงเสียดทานที่ผิวสัมผัส  $F$  โดยระหว่างจุดเริ่มต้นการสัมผัสจนถึงจุด N โลหะแผ่นจะเคลื่อนที่ช้ากว่าลูกกรีด ดังนั้นทิศทางของ  $F$  จะวิ่งเข้าหาจุด N ดังแสดงในรูปที่ 6.1 ในทางตรงกันข้าม ระหว่างจุด N จนถึงจุดที่โลหะไหลออกจากลูกกรีด ความเร็วของผิวสัมผัสโลหะแผ่นจะเคลื่อนที่เร็วกว่าลูกกรีดทำให้ทิศทางของ  $F$  จะอยู่ในทิศทางตรงกันข้ามกับที่แสดงในรูปที่ 6.1 แต่ยังพุ่งเข้าหาจุด N เช่นเดิม

ที่ส่วนประกอบของแรงตามแนวแกน  $y$  ของ  $P_r$  ก็คือแรงรีด (Rolling Force) ใช้สัญลักษณ์  $P$  แรงรีดนี้คือแรงที่ลูกกรีดกระทำต่อโลหะแผ่นให้เกิดการเปลี่ยนรูปซึ่งจะมีค่าเท่ากับแรงที่โลหะแผ่นกระทำต่อลูกกรีดแต่อยู่ในทิศทางตรงกันข้าม แรงนี้จะเรียกว่าแรงการแยก (Separating Force) ส่วนแรงดันรีดจำเพาะ (Specific Roll Pressure) ใช้สัญลักษณ์  $p$  จะหมายถึงค่าของแรงรีดหารด้วยพื้นที่ผิวสัมผัสฉาย (Projected Area) ซึ่งหาได้จากผลคูณของความกว้างโลหะแผ่น ( $b$ ) กับความยาวฉาย (Projected Length) ของส่วนโค้งบนแกน  $x$  ใช้สัญลักษณ์  $L_p$  โดย

$$L_p = \left[ R(h_o - h_f) - \frac{(h_o - h_f)^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.2)$$

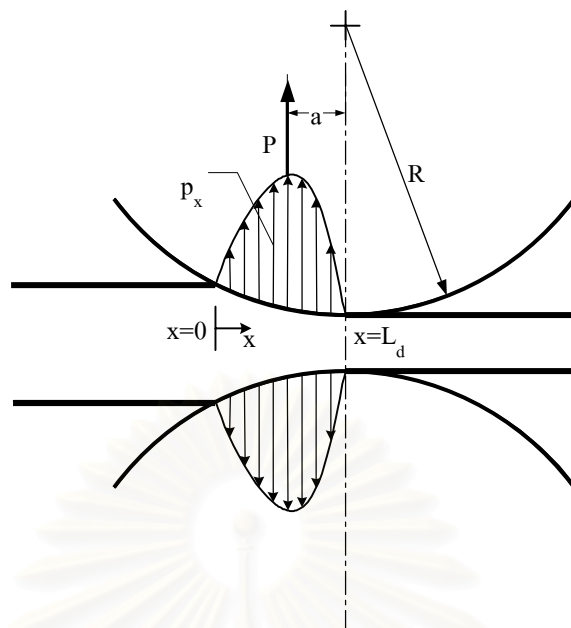
$$\approx \sqrt{R(h_o - h_f)}$$

ดังนั้นแรงดันรีดจำเพาะหาได้จาก

$$p = \frac{P}{bL_p} \quad (6.3)$$

การกระจายของแรงดันรีด ( $p_x$ ) บนส่วนโค้งของผิวสัมผัสเป็นแรงดันที่กระทำต่อลูกกรีดดังแสดงในรูปที่ 6.2 แรงดันจะเพิ่มสูงสุดที่ตำแหน่งจุดสมมูลก่อนที่จะลดลง โดยแรงรีด( $P$ ) จะหาได้จากพื้นที่ภายใต้ส่วนโค้งนี้ โดยแรงรีดจะกระทำที่จุดศูนย์กลางมวล (Center of Gravity) พื้นที่ใต้ส่วนโค้งสามารถคำนวณได้จากการอินทิเกรตค่าของแรงดันรีดตลอดแนวส่วนโค้งดังสมการต่อไปนี้

$$P = b \int_0^{L_d} p_x dx \quad (6.4)$$



รูปที่ 6.2 การกระจายของแรงดันรีด และแรงรีด

แรงบิดรีด( $M_t$ ) สามารถหาได้จาก

$$M_t = 2b \int_0^{L_d} p_x (L_d - x) dx \approx 2Pa \quad (6.5)$$

โดย  $a$  คือระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางมวลของพื้นที่ (Center of gravity) กับเส้นผ่าศูนย์กลางลูกรีด โดยประมาณจะมีค่าเท่ากับ 0.5 สำหรับการรีดร้อน 0.45 สำหรับการรีดเย็น [14] และแรงบิดรีดนี้จะคำนวณสำหรับลูกรีดทั้งสองลูก

## 6.2 การหาแรงรีดและแรงบิดรีด (Rolling Force and Torque)

จากสมการที่ (6.3) และ (6.4) จะเห็นว่าหาแรงรีดและแรงบิดรีดได้ต้องทราบการกระจายของความดันรีด  $p_x$  ซึ่งมีหลากหลายทฤษฎี [27] ในการประมาณค่าดังกล่าว รวมทั้งทฤษฎีของ Alexander และ Ford [22] พวกเขาได้นำเสนอสูตรทางคณิตศาสตร์ที่ใช้หาค่าแรงรีด ( $P$ ) และแรงบิดรีด ( $M_t$ ) ภายใต้สมมุติฐานหลักคือ เป็นปัญหาแบบความเครียดในระนาบ วัสดุเป็นแบบพลาสติกอุดมคติ (Ideal Plastic) โดยไม่คำนึงถึงความเครียดในช่วงอีลาสติก ลูกรีดไม่มีการเปลี่ยนรูป อีกประการหนึ่งคือความเค้นเฉือนคราก (Shear Yield Stress) จะเกิดขึ้นที่ผิวสัมผัสระหว่างลูกรีดและโลหะแผ่น

ซึ่งสมมติฐานเหล่านี้สอดคล้องกับโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้น สมการที่ใช้ในการคำนวณจะกำหนดค่าแรงดันรีดจำเพาะ ( $p$ ) อยู่ในรูป

$$p = 2k_g \tau_{\text{yield}} \quad (6.6)$$

โดย  $\tau_{\text{yield}}$  คือค่าความเค้นเฉือนคราก

$k_g$  คือค่าคงที่ของแบบจำลอง (Geometrical Coefficient) มีค่าเท่ากับ

$$k_g = 0.25(\pi + Z_a) \quad (6.7)$$

ในที่นี้  $Z_a$  คืออัตราส่วนเฉลี่ยทางคณิตศาสตร์ของบริเวณการเปลี่ยนรูป (Arithmetic Average Aspect Ratio of Deformation Zone) มีค่าเท่ากับ

$$Z_a = \frac{2L_p}{h_o + h_f} \quad (6.8)$$

แทนค่าสมการ (6.6) – (6.8) ลงในสมการ (6.3) แล้วจัดรูปโดยกำหนด  $b = 1$  จะได้

$$\frac{P}{\tau_{\text{yield}}} = L_p \left( \frac{\pi}{2} + \frac{L_p}{h_o + h_f} \right) \quad (6.9)$$

ส่วนแรงบิดรีดสามารถหาได้จากสมการ

$$\frac{M_t}{\tau_{\text{yield}}} = L_p^2 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{2L_p}{3} \frac{h_o + 2h_f}{(h_o + h_f)^2} \right) \quad (6.10)$$

สมการ (6.9) และ (6.10) สามารถใช้ในการคำนวณหาแรงรีดและแรงดันรีดได้โดยตรงหากรู้ค่าคงที่ต่างๆของแบบจำลอง ซึ่งในหัวข้อต่อไปจะใช้ในการเปรียบเทียบผลที่ได้กับผลที่คำนวณจากโปรแกรม MTFlow เพื่อตรวจสอบความถูกต้องต่อกรณีการรีดโลหะแผ่น

### 6.3 การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมในกรณีการรีดโลหะแผ่น

ในหัวข้อย่อยนี้จะยกตัวอย่างการรีดโลหะแผ่นเพื่อทำการตรวจสอบแรงรีดและแรงบิดรีด โดยสำหรับโปรแกรม MTFlow โดยโปรแกรมสามารถคำนวณหาแรงดันที่ตำแหน่งต่างๆบนผิวสัมผัสโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ดังนั้นจึงสามารถทำการอินทิเกรตเชิงตัวเลข (Numerical Integration) เพื่อหาค่าของแรงรีดและแรงบิดรีด ดังแสดงในสมการที่ (6.4) และ (6.5) ตามลำดับ เพื่อเปรียบเทียบกับ

แรงรีดและแรงบิดที่คำนวณได้จากสูตรของ Alexander และ Ford ดังสมการที่ (6.9) และ (6.10) ตามลำดับ นอกจากนี้ยังจะเปรียบเทียบผลกับการทดลองเพื่อยืนยันความถูกต้องอีกครั้ง

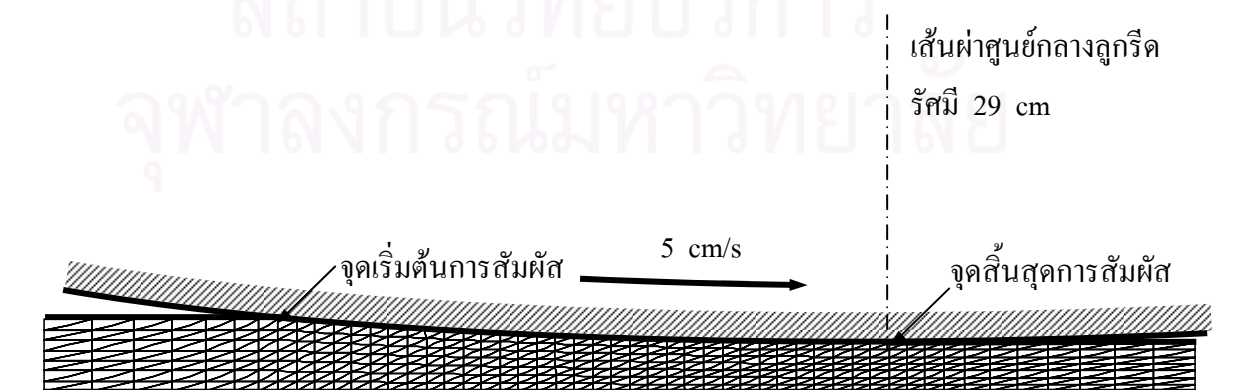
ข้อสมมุติฐานที่สำคัญของการวิเคราะห์การรีดโลหะแผ่นโดยใช้โปรแกรม MTFlow ก็คือจะไม่มีกลิ่นไถลที่ผิวสัมผัสระหว่างโลหะแผ่นและลูกรีด กล่าวคือความเร็วที่บริเวณผิวสัมผัสที่จำเป็นต้องกำหนดลงเป็นเงื่อนไขขอบเขตของโปรแกรมจะเท่ากับความเร็วที่ผิวลูกรีด อีกประการหนึ่งลูกรีดจะถือว่าเป็นวัตถุแข็งเกร็ง คือไม่มีการเปลี่ยนรูปไม่ว่ากรณีใดๆ

### 6.3.1 การตรวจสอบความถูกต้องกับทฤษฎีของ Alexander และ Ford

ตัวอย่างแบบจำลองที่ใช้มีรายละเอียดดังนี้

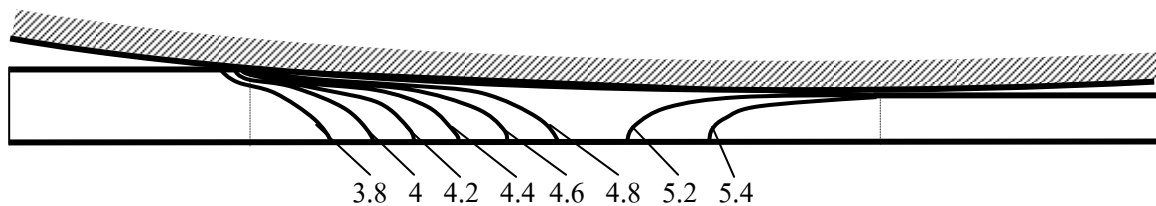
- ความหนาของโลหะแผ่นขาเข้า  $h_0 = 0.5 \text{ cm}$
- ความหนาของโลหะแผ่นขาออก  $h_f = 0.335 \text{ cm}$
- อัตราส่วนการลดขนาด  $R = 0.33$
- ลูกรีดรัศมี  $29 \text{ cm}$
- ความยาว  $L_d$  คำนวณจากสมการ (6.2)  $L_d = 2.187 \text{ cm}$
- ความเร็วลูกรีดที่ผิวสัมผัส  $5 \text{ cm/s}$
- ความเค้นเฉือนคราก  $= 1000 \text{ kg/cm}^2$

แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สร้างสำหรับปัญหานี้แสดงไว้ในรูปที่ 6.3 ซึ่งประกอบไปด้วยจุดต่อความเร็ว 1545 จุด จุดต่อความดัน 416 จุด เอลิเมนต์จำนวน 714 เอลิเมนต์ การวิเคราะห์จะใช้โปรแกรม MTFlow(v1) และเนื่องจากสมมาตรตามแนวกึ่งกลางความหนาของโลหะแผ่นจึงสร้างแบบจำลองเพียงครึ่งหนึ่ง

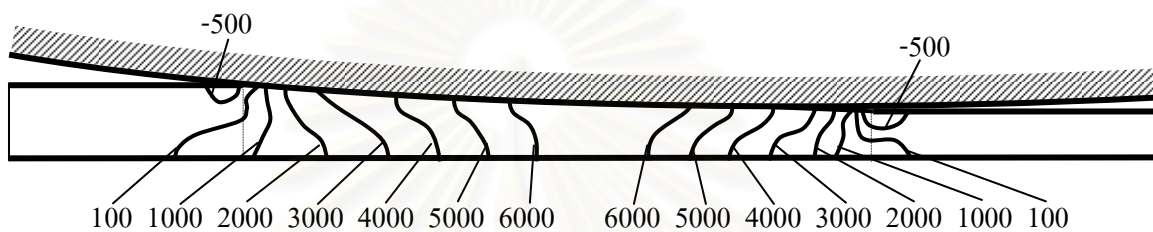


รูปที่ 6.3 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของตัวอย่างการรีดโลหะแผ่น

ผลของการกระจายความเร็วและความดัน รวมทั้งผลของเวกเตอร์ความเร็วแสดงในรูป 6.4 a-c



(a) ผลการกระจายความเร็ว



(b) ผลการกระจายความดัน



(c) ผลเวกเตอร์ความเร็ว

รูปที่ 6.4 ผลการคำนวณตัวอย่างการรีดโลหะแผ่นโดยโปรแกรม MTFLOW(v1)

หลังจากได้ค่าความดันที่จุดต่อต่างๆจะทำการคำนวณหาแรงรีดโดยการอินทิเกรตเชิงตัวเลข เพื่อที่จะหาค่าแรงรีดและแรงบิดรีดดังสมการที่ (6.4) และ (6.5) และเมื่อทำการเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการคำนวณ โดยทฤษฎีของAlexander และFord จะได้ผลดังตารางที่ 6.1

ตารางที่ 6.1 ผลการเปรียบเทียบแรงรีดและแรงบิดรีดโดยโปรแกรม MTFLOW(v1) และทฤษฎีของ Alexander และ Ford

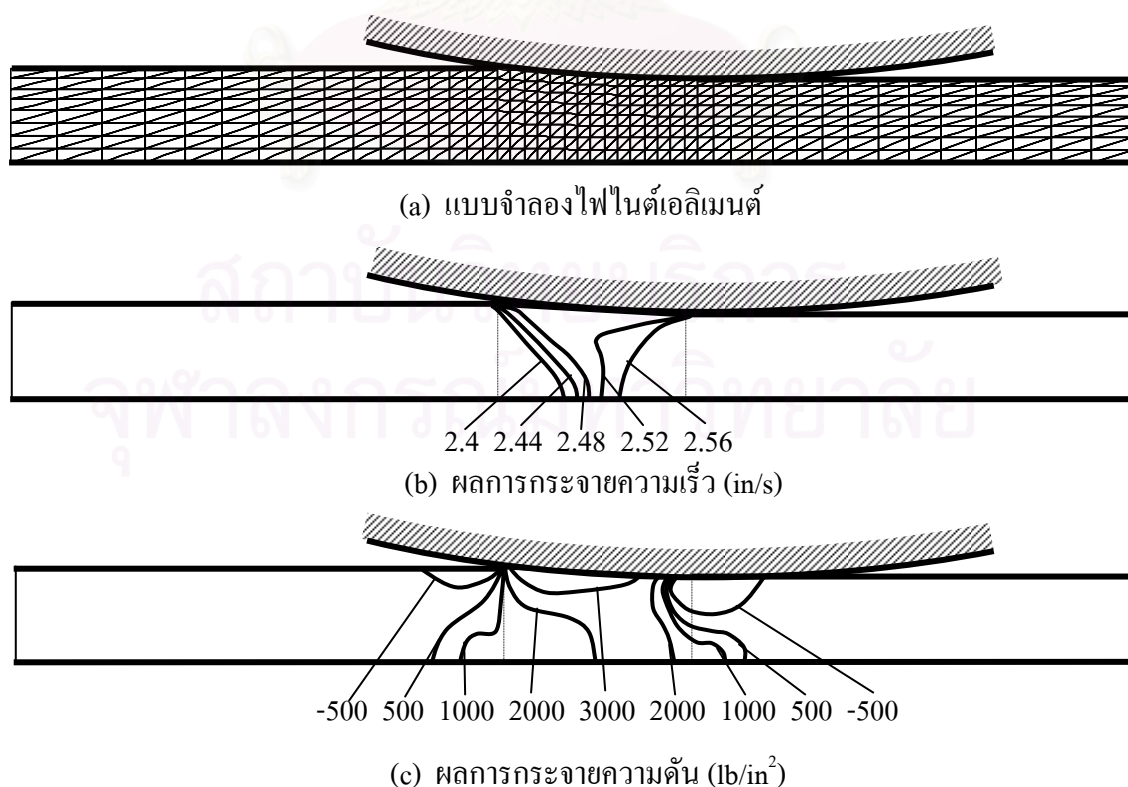
|  | MTFLOW(v1) | Alexander & Ford | แตกต่าง (%) |
|--|------------|------------------|-------------|
| แรงรีด ( $P / \tau_{yield}$ ), kg/cm       | 9.54       | 9.16             | +4.2        |
| แรงบิดรีด ( $M / \tau_{yield}$ ), kg.cm/cm | 19.88      | 19.05            | +4.4        |



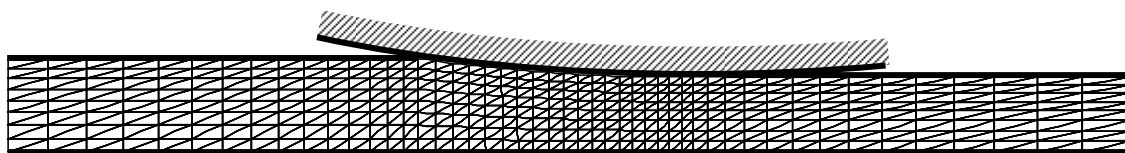
### 6.3.2 การตรวจสอบความถูกต้องกับผลการทดลอง

ในหัวข้อย่อยนี้จะนำผลการทดลองของ Sim [24] เพื่อมาใช้อ้างอิงกับผลที่คำนวณโดยโปรแกรม MTFlow ในการทดลองจะใช้วัสดุตะกั่ว ทำการทดลองที่อุณหภูมิห้องเนื่องจากตะกั่วที่อุณหภูมิห้องมีคุณสมบัติเหมือนโลหะอื่นๆที่มีอุณหภูมิสูง ทำให้การทดลองไม่จำเป็นต้องควบคุมอุณหภูมิให้เท่ากันตลอดการทดลองซึ่งเป็นเรื่องที่ยุ้งยาก ตะกั่วที่ใช้ในการทดลองตามที่เสนอในเอกสารอ้างอิงมีอยู่หลายขนาดตามแต่ขนาดความหนา แต่ที่นำมาเป็นตัวอย่างในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ จะใช้ตะกั่วที่มีความหนา 0.25 นิ้ว กว้าง 1 นิ้ว ทำการรีดผ่านลูกรีดที่มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 5 นิ้ว โดยใช้สารคาร์บอนเตตระคลอไรด์ (Carbon Tetrachloride) ที่บริเวณผิวสัมผัสเพื่อเพิ่มแรงเสียดทานระหว่างผิวเพื่อให้เกิดสภาพใกล้เคียงกับสภาวะที่ไม่มีการลื่นไหลให้มากที่สุด การทดลองจะทำการบันทึกค่าแรงรีดและแรงบิดรีดที่อัตราส่วนการลดขนาด 0.1 0.2 0.3 0.4 และ 0.5

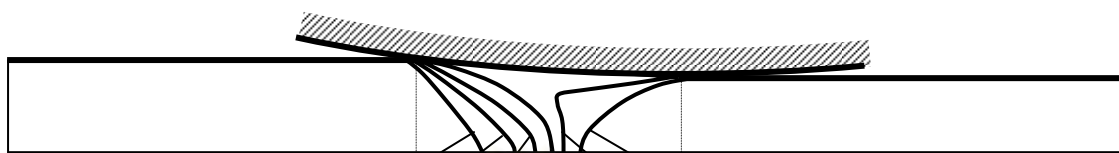
ค่าความเค้นครากที่ใช้ในการคำนวณได้มาจากการทดลองการกดอัดแผ่นระนาบ (Plane Compression) ที่อัตราส่วนต่างๆดังในเอกสารอ้างอิง [22] จะได้ค่าความเค้นครากโดยประมาณที่อัตราส่วนการลดขนาด 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 เท่ากับ 1.3 1.75 2.0 2.2 และ 2.3  $\text{ton/in}^2$  ตามลำดับ (1 ton = 2240 lb) ความเร็วลูกรีดที่ผิวสัมผัสเท่ากับ 2.5 in/s แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่จะใช้ในการคำนวณโดยโปรแกรม MTFlow(v1) รวมทั้งผลการกระจายของความเร็วและความดัน ที่อัตราส่วนการลดขนาด 0.1- 0.5 ได้แสดงไว้ในรูปที่ 6.5 - 6.9 ตามลำดับ



รูปที่ 6.5 แบบจำลองและผลการวิเคราะห์การรีดที่อัตราส่วนการลดขนาด 0.1



(a) แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์

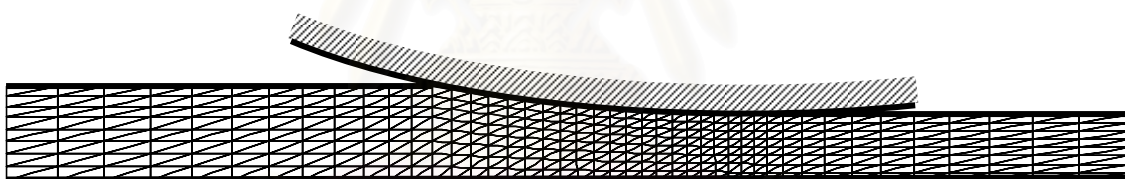


(b) ผลการกระจายความเร็ว (in/s)



(c) ผลการกระจายความดัน (lb/in<sup>2</sup>)

รูปที่ 6.6 แบบจำลองและผลการวิเคราะห์การรีดที่อัตราส่วนการลดขนาด 0.2



(a) แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์



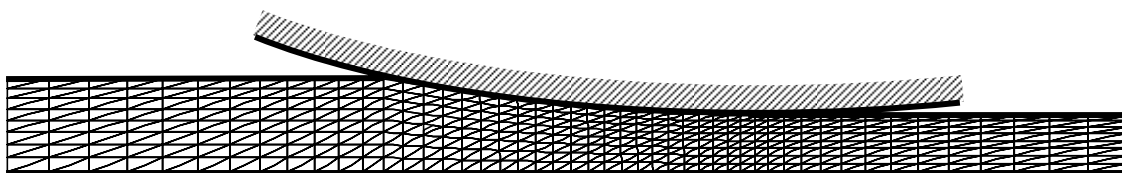
(b) ผลการกระจายความเร็ว (in/s)



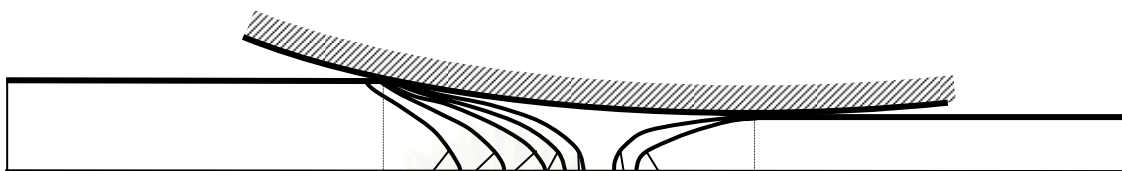
(c) ผลการกระจายความดัน (lb/in<sup>2</sup>)

(c) ผลการกระจายความดัน (lb/in<sup>2</sup>)

รูปที่ 6.7 แบบจำลองและผลการวิเคราะห์การรีดที่อัตราส่วนการลดขนาด 0.3

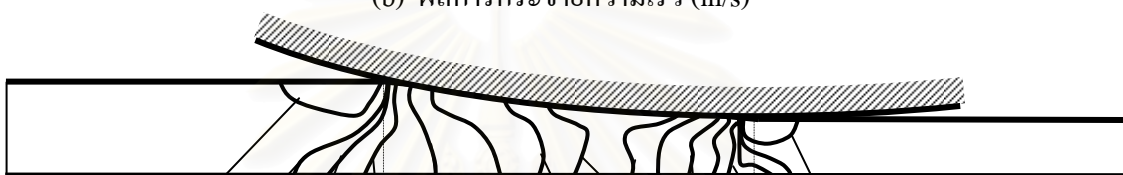


(a) แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์



1.8 2 2.2 2.3 2.4 2.6 2.7

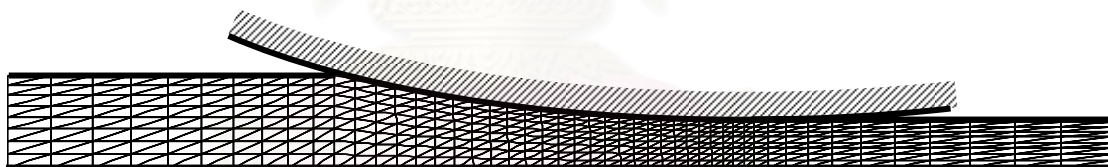
(b) ผลการกระจายความเร็ว (in/s)



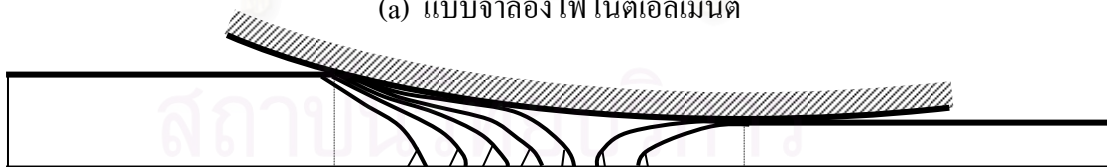
-500 500 1000 2000 4000 6000 8000 9500 6000 2000 -500

(c) ผลการกระจายความดัน (lb/in<sup>2</sup>)

รูปที่ 6.8 แบบจำลองและผลการวิเคราะห์การรีดที่อัตราส่วนการลดขนาด 0.4

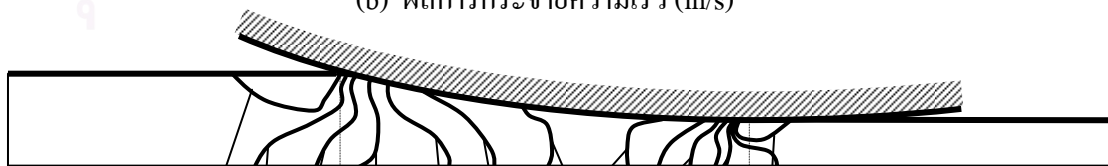


(a) แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์



1.6 1.8 2 2.2 2.4 2.6 2.8

(b) ผลการกระจายความเร็ว (in/s)



-500 500 2000 4000 6000 8000 11000 6000 2000 -500

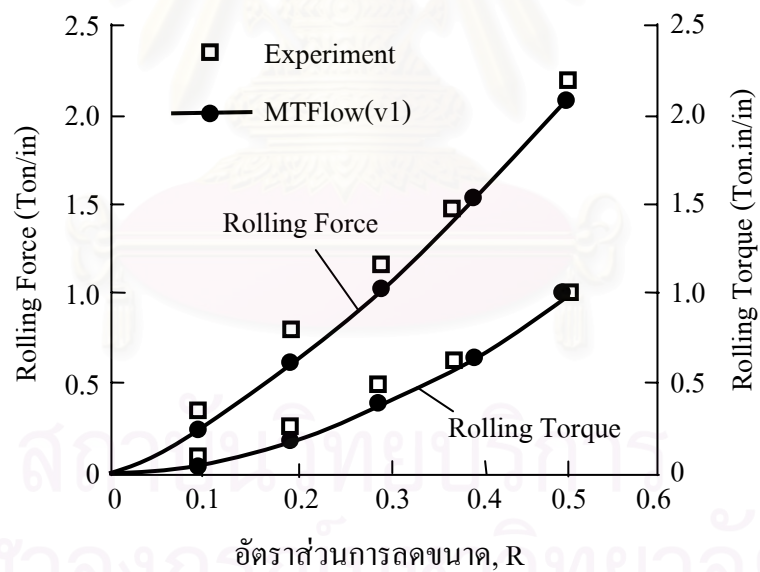
(c) ผลการกระจายความดัน (lb/in<sup>2</sup>)

รูปที่ 6.9 แบบจำลองและผลการวิเคราะห์การรีดที่อัตราส่วนการลดขนาด 0.5

ผลที่คำนวณได้โดยโปรแกรม MTFflow(v1) ได้แสดงไว้ในตารางที่ 6.2 ส่วนผลการเปรียบเทียบกับผลการทดลองแสดงด้วยกราฟในรูปที่ 6.10

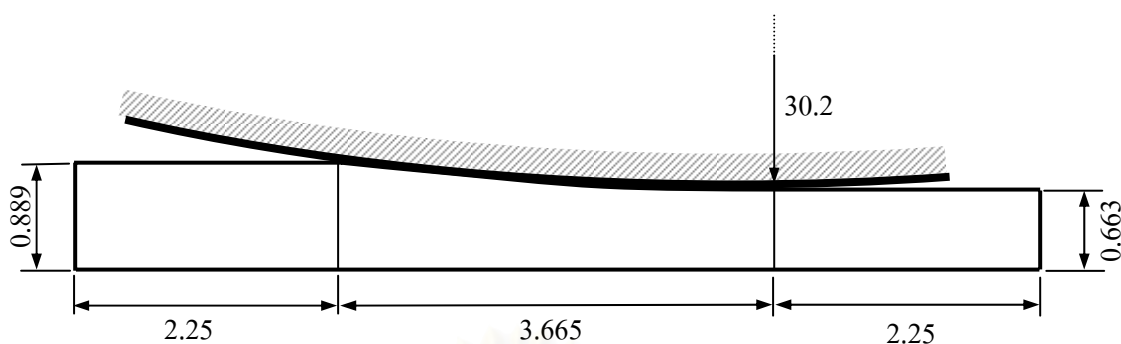
ตารางที่ 6.2 แสดงผลการคำนวณแรงรีดและแรงบิดรีดที่อัตราส่วนการลดขนาดต่างๆ

| r   | แรงรีด (P) , ton/in | แรงบิดรีด (M <sub>r</sub> ) ,ton.in/in |
|-----|---------------------|--|
| 0.1 | 0.24                | 0.06                                   |
| 0.2 | 0.58                | 0.16                                   |
| 0.3 | 1.03                | 0.40                                   |
| 0.4 | 1.55                | 0.70                                   |
| 0.5 | 2.09                | 1.02                                   |



รูปที่ 6.10 กราฟเปรียบเทียบผลแรงรีดและแรงบิดรีดจากโปรแกรม MTFflow(v1) และ ผลการทดลอง

### 6.3.3 การตรวจสอบความถูกต้องของผลอุณหภูมิ



รูปที่ 6.11 แบบจำลองของปัญหาการรีดโลหะ R = 0.254

ในหัวข้อย่อๆนี้จะทำการเปรียบเทียบผลการกระจายอุณหภูมิที่เกิดกับโลหะแผ่นที่ทำการคำนวณได้จากโปรแกรม MTFLOW(v2) กับผลของปัญหาเดียวกันจากรายการอ้างอิง [17] ซึ่งคำนวณโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เช่นเดียวกันแต่ใช้เอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยม โดยจะทำการวิเคราะห์การรีดโลหะแผ่นที่มีอัตราส่วนการลดขนาดประมาณ 0.254 แบบจำลองของปัญหาได้แสดงไว้ในรูปที่ 6.11 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ได้แสดงไว้ในรูปที่ 6.12 ปัญหาที่ค่าความเค้นครากจะขึ้นอยู่กับอุณหภูมิและอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียด โดยมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\sigma_{\text{yield}} = \frac{1}{C_1} \ln \left[ \left( \frac{z}{C_2} \right)^{\frac{1}{C_3}} + \sqrt{\left( \frac{z}{C_2} \right)^{\frac{2}{C_3}} + 1} \right] \quad (6.11)$$

โดย  $z = \frac{C_4}{\dot{\epsilon}} e^{\frac{C_4}{RT}} \quad \text{sec}^{-1} \quad (6.12)$

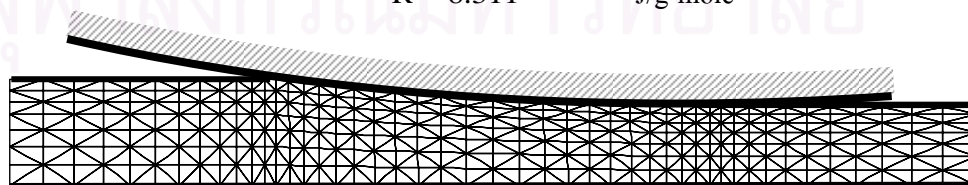
$$C_1 = 0.01901 \quad \text{m}^2/\text{MN}$$

$$C_2 = 7.92 \times 10^8 \quad \text{sec}^{-1}$$

$$C_3 = 5.0$$

$$C_4 = 1.39 \times 10^5 \quad \text{J/g-mole}$$

$$R = 8.311 \quad \text{J/g-mole}$$



รูปที่ 6.12 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาการรีดโลหะ R = 0.254

คุณสมบัติของวัสดุทางด้านความร้อนมีรายละเอียดดังนี้

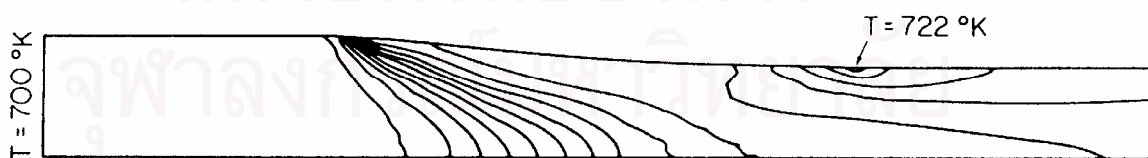
|                              |   |                  |                    |
|------------------------------|---|------------------|--------------------|
| ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน | : | $k = 0.4302$     | cal/cm K           |
| ค่าความหนาแน่น               | : | $\rho = 0.00275$ | kg/cm <sup>3</sup> |
| ค่าความจุความร้อนจำเพาะ      | : | $c = 239.01$     | cal/kg K           |
| ค่าคงที่สำหรับแปลงงานทางกล   | : | $J = 418.4$      | N.cm/cal           |

จะทำการศึกษาผลการกระจายอุณหภูมิจากปัญหาที่มีอุณหภูมิเริ่มต้น 400 K และ 700 K เพื่อการเปรียบเทียบกับรายการอ้างอิง [17] ซึ่งแสดงผลของเส้นชั้นอุณหภูมิของทั้งสองปัญหาในรูปที่ 6.13 ส่วนผลที่คำนวณโดยโปรแกรม MTFLOW(v2) ได้แสดงไว้ในรูปที่ 6.14 เมื่อเปรียบเทียบผลที่จากทั้งสองรูปจะพบว่าอยู่ในรูปแบบที่ใกล้เคียงกัน

นอกจากนี้ผลการกระจายความดันที่คำนวณจากโปรแกรม MTFLOW(v2) ของทั้งสองปัญหาได้แสดงไว้ในรูปที่ 6.15 ส่วนผลของแรงรีดและแรงบิดรีดได้แสดงไว้ในตารางที่ 6.3 จากตารางจะพบว่า การรีดโลหะที่อุณหภูมิสูงจะส่งผลให้ใช้แรงรีดและแรงบิดรีดน้อยกว่าการรีดที่อุณหภูมิต่ำกว่า ซึ่งปัญหานี้การรีดที่อุณหภูมิ 700 K จะใช้แรงรีดแรงบิดรีดน้อยกว่าการรีดที่ 400 K ถึงประมาณ 2.7 เท่า



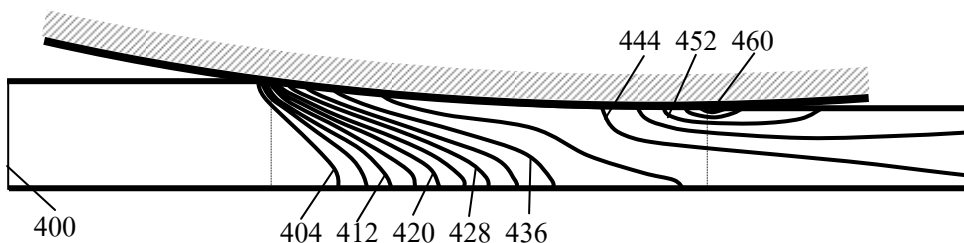
(a) อุณหภูมิเริ่มต้น 400 K



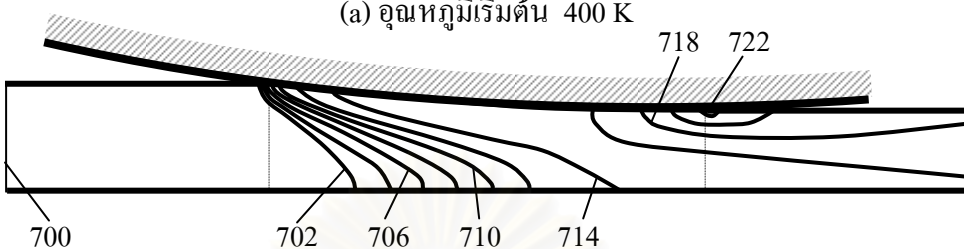
(b) อุณหภูมิเริ่มต้น 700 K

รูปที่ 6.13 ผลการกระจายอุณหภูมิจากรายการอ้างอิง [17]



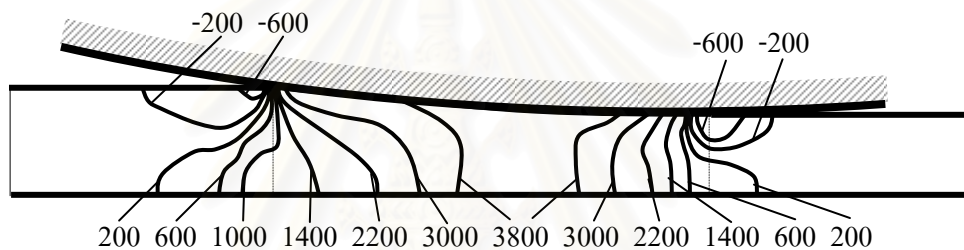


(a) อุณหภูมิเริ่มต้น 400 K

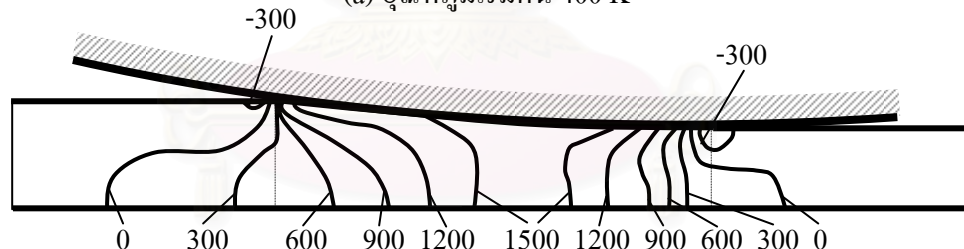


(b) อุณหภูมิเริ่มต้น 700 K

รูปที่ 6.14 ผลการกระจายอุณหภูมิโดยโปรแกรม MTFflow(v2)



(a) อุณหภูมิเริ่มต้น 400 K



(b) อุณหภูมิเริ่มต้น 700 K

รูปที่ 6.15 ผลการกระจายความดัน (kg/cm<sup>2</sup>) โดยโปรแกรม MTFflow(v2)

ตารางที่ 6.3 แสดงผลการเปรียบเทียบแรงรีดและแรงบิดรีดที่อุณหภูมิเริ่มต้น 400 และ 700 K

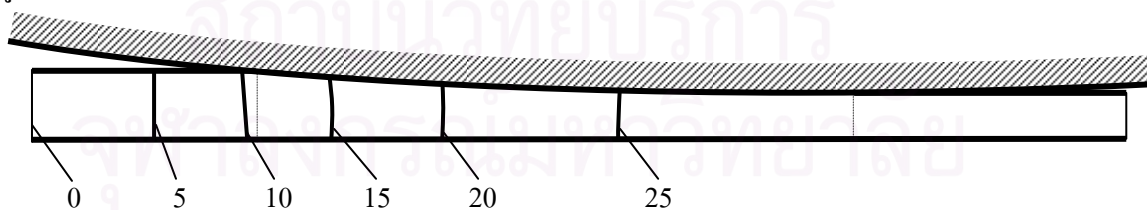
|                     | 400 K   | 700K    |
|---------------------|---------|---------|
| แรงรีด(kg/cm)       | 14047.9 | 5208    |
| แรงบิดรีด(kg.cm/cm) | 55168.4 | 20257.8 |

## 6.4 ผลของความเร็วลูกรีดที่มีต่อการกระจายอุณหภูมิ

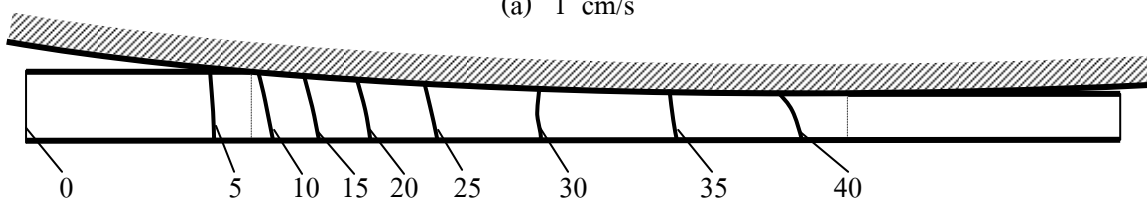
ในหัวข้อนี้จะทำการศึกษาถึงการกระจายของอุณหภูมิที่เกิดขึ้นบริเวณหน้าตัดของโลหะแผ่น ที่ความเร็วของลูกรีดต่างๆ โดยใช้โปรแกรม MTFLOW(v2) แบบจำลองที่ใช้จะมีรายละเอียด เช่นเดียวกับแบบจำลองในหัวข้อ 6.3.1 คือ

- ความหนาของโลหะแผ่นขาเข้า  $h_0 = 0.5$  cm
- ความหนาของโลหะแผ่นขาออก  $h_f = 0.335$  cm
- อัตราส่วนการลดขนาด = 0.33
- ลูกรีดรัศมี 29 cm
- ความยาว  $L_d$  คำนวณจากสมการ (6.2)  $L_d = 2.187$  cm
- ความเร็วลูกรีดที่ผิวสัมผัส 1, 5, 10, 20, 60 cm/s
- ความเค้นเฉือนคราก =  $1000$  kg/cm<sup>2</sup>
- ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน  $1.0$  cal/(s.cm.°C)
- ค่าความหนาแน่น  $0.01$  kg/cm<sup>3</sup>
- ค่าความจุความร้อนจำเพาะ  $100.0$  cal/(kg.°C)
- ค่าคงที่สำหรับแปลงความร้อนทางกล (Mechanical Equivalent of heat, J)  $42.65$  kg.cm/cal
- กำหนดให้  $\beta$  มีค่าเท่ากับ 0.0007

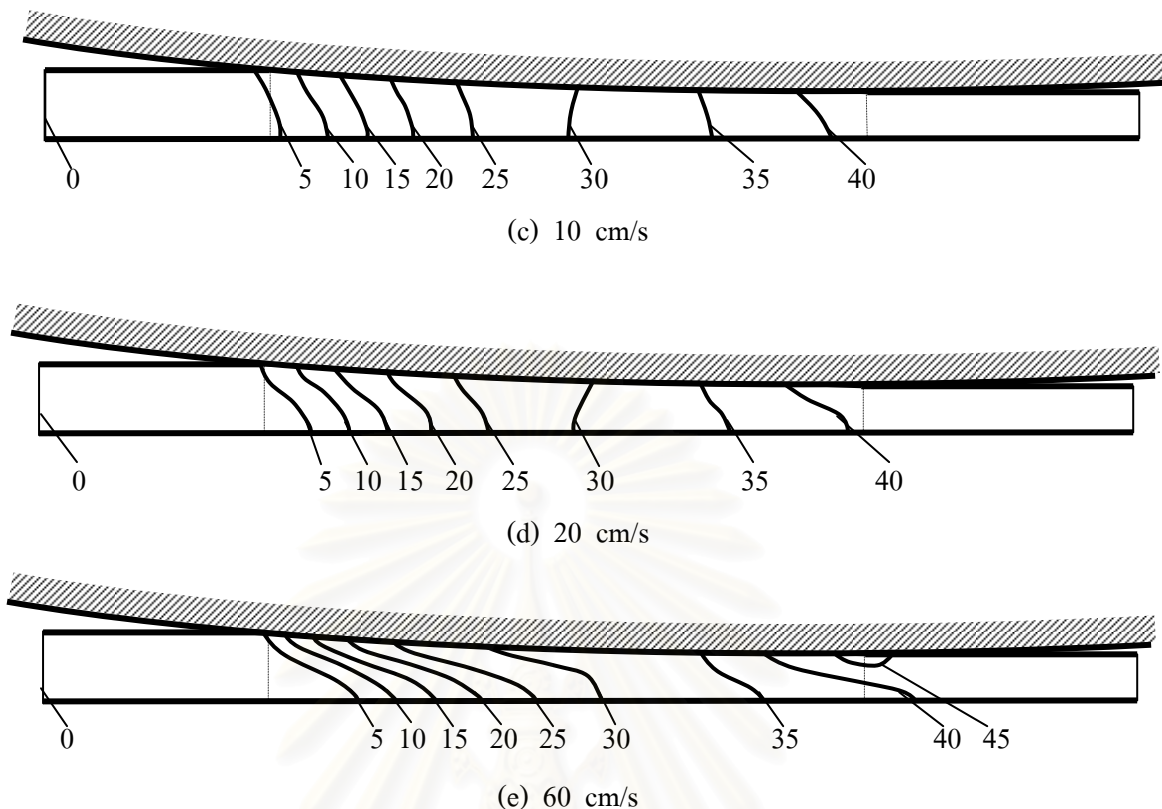
ผลการคำนวณโดยโปรแกรม MTFLOW(v2) ในรูปแบบของการกระจายอุณหภูมิตามพื้นที่ ความเร็วต่างๆ ได้แสดงไว้ในรูปที่ 6.16 ซึ่งจากผลการคำนวณจะพบว่าความเร็วที่ใช้ในการรีดโลหะแผ่นจะส่งผลต่อการเพิ่มขึ้นและการกระจายของอุณหภูมิ โดยการรีดที่ความเร็วสูงอุณหภูมิจะเพิ่มขึ้นสูงกว่าที่ความเร็วต่ำ



(a) 1 cm/s



(b) 5 cm/s



รูปที่ 6.16 ผลการกระจายอุณหภูมิสัมพัทธ์ที่ความเร็ววัดต่างๆ

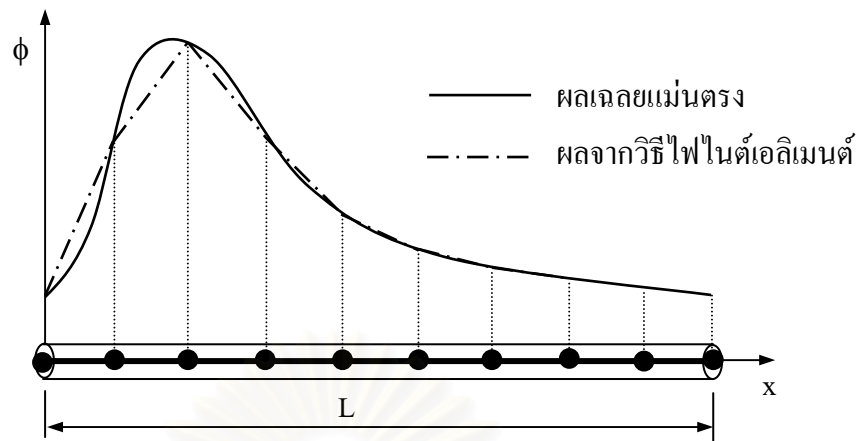
จากผลการเปรียบเทียบกับทฤษฎีของ Alexander และ Ford หรือว่าผลการทดลองของ Sim ตลอดจนผลจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้เอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยม จะเห็นว่าผลการคำนวณโดยโปรแกรม MTFLOW ที่สภาวะเดียวกันกับทฤษฎีดังกล่าวจะได้ค่าแรงรีดและแรงบิดที่ใกล้เคียงกับผลดังกล่าว เป็นการยืนยันถึงความถูกต้องของโปรแกรมต่อการรีดโลหะแผ่น อย่างไรก็ตามผลเหล่านี้จะขึ้นอยู่กับสมมุติฐานที่กล่าวไว้ข้างต้น ที่สำคัญคือวัสดุเป็นแบบพลาสติกอุดมคติ ซึ่งไม่มีความเครียดแข็ง ดังนั้นหากนำไปวิเคราะห์วัสดุประเภทเหล็ก หรือโลหะเนื้อแข็งอื่นๆจะได้ค่าที่ต่ำกว่าความเป็นจริง นอกจากนี้ยังสามารถใช้โปรแกรมในการประมาณผลของการกระจายอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงเนื่องจากการนำความร้อน การพาความร้อนเนื่องจากการไหลของโลหะและการเพิ่มขึ้นของอุณหภูมิเนื่องจากการเปลี่ยนรูปของโลหะ ซึ่งอุณหภูมิจะต้องสอดคล้องอย่างต่อเนื่องกับค่าความเค้นครากซึ่งจะส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงความเร็วและความดัน ซึ่งหากตัวไม่รู้ค่าทั้งหมดเข้าสู่คำตอบค่าใดค่าหนึ่งก็จะได้คำตอบที่สอดคล้องกันทั้งระบบซึ่งจะเป็นประโยชน์อย่างมากในการนำไปออกแบบเครื่องจักรกลในการรีดโลหะเพื่อลดค่าใช้จ่ายในการออกแบบได้อย่างมีประสิทธิภาพ

## บทที่ 7

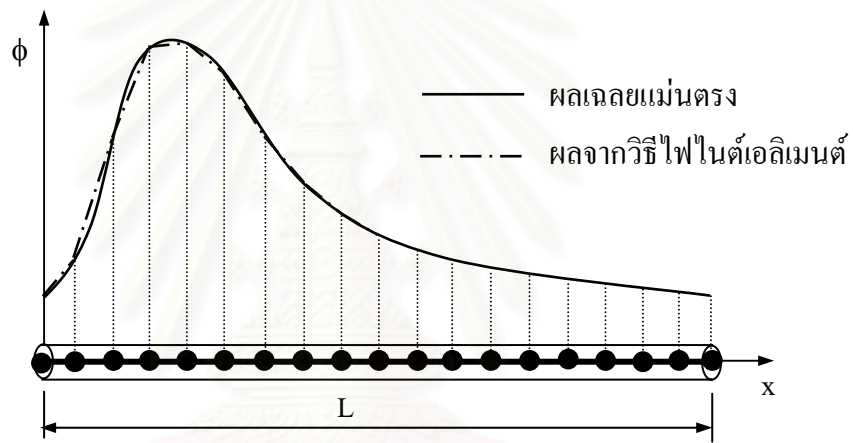
### การปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ในการวิเคราะห์โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ขนาดของเอลิเมนต์ถือเป็นสิ่งที่สำคัญที่สุดสิ่งหนึ่งเนื่องจากระเบียบวิธีนี้เป็นการหาผลเฉลยโดยประมาณ ขนาดของเอลิเมนต์ที่เล็กจะส่งผลให้ได้คำตอบที่ใกล้เคียงความเป็นจริงมากที่สุด หากแต่ถ้าเอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กหรือพุดอีกนัยหนึ่งก็คือมีความถี่สูงหรือมีปริมาณเอลิเมนต์บนโดเมนปัญหา มาก จะส่งผลให้ต้องใช้เวลาในการคำนวณมาก และต้องใช้หน่วยความจำ (RAM) ของคอมพิวเตอร์สูง ซึ่งปัญหาที่พบจากการใช้โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ก็คือขนาดของปัญหาหรือจำนวนสมการระบบสมการขนาดใหญ่ที่จะทำการแก้หาคำตอบนั้นมีปริมาณมากเกินไปกว่าเครื่องคอมพิวเตอร์ที่มีอยู่จะรับได้ จึงต้องทำการลดขนาดของปัญหาลงหรือหาเครื่องคอมพิวเตอร์ที่มีหน่วยความจำสูงเพื่อที่จะแก้ปัญหาเหล่านั้นๆ

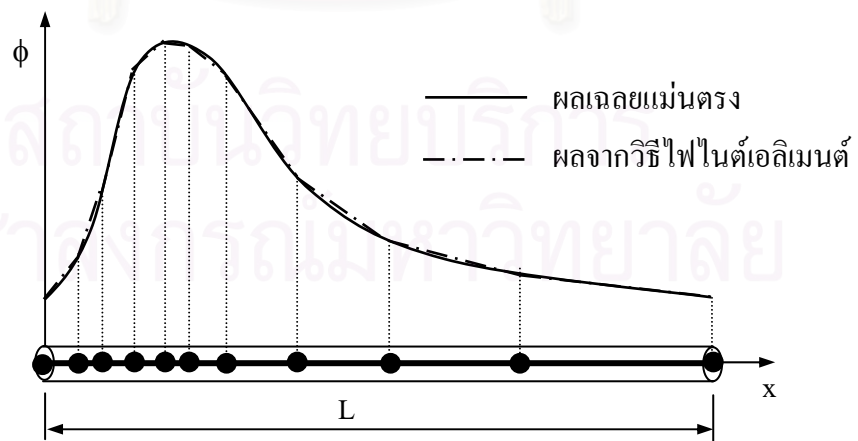
จากปัญหาข้างต้นจึงมีการนำเอาเทคนิคการปรับเปลี่ยนขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติมาใช้ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อที่จะทำการจัดการกำหนดขนาดของเอลิเมนต์บนโดเมนปัญหาให้มีความสัมพันธ์ที่เหมาะสม เนื่องจากว่าขนาดของเอลิเมนต์ที่ตำแหน่งใดๆบนโดเมนปัญหาไม่มีความจำเป็นที่ต้องเท่ากัน การกำหนดความสัมพันธ์ของขนาดเอลิเมนต์จะอาศัยหลักเกณฑ์ที่ว่าบริเวณใดที่มีการเปลี่ยนแปลงความชันของคำตอบ (Solution Gradient) สูง บริเวณนั้นควรที่จะมีขนาดของเอลิเมนต์เล็ก ในทางตรงกันข้ามบริเวณใดที่มีการเปลี่ยนแปลงความชันของคำตอบน้อย บริเวณนั้นสามารถมีเอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่ได้ ดังแสดงในรูปที่ 7.1 เป็นการสมมุติการกระจายของคำตอบ  $\phi$  ตลอดความยาว  $L$  ของเหล็กท่อน (Rod) ใน 1 มิติ โดยในช่วงแรกของการกระจายจะมีการเปลี่ยนแปลงความชันของคำตอบค่อนข้างมากโดยจะมากที่สุด บริเวณตำแหน่งสูงสุดของส่วนโค้ง โดยในช่วงท้ายจะมีการเปลี่ยนแปลงความชันของคำตอบน้อย เอลิเมนต์สมมุติให้เป็นแบบ 1 มิติที่มีการประมาณภายในเป็นแบบเชิงเส้น (Linear Interpolation Function) โดยในรูป (a) จะมีจำนวนเอลิเมนต์ทั้งสิ้น 9 เอลิเมนต์ จะพบว่าผลของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงความชันของคำตอบมากจะไม่ดีนัก แต่ในช่วงท้าย คำตอบจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ยังสามารถเป็นตัวแทนของผลเฉลยแม่นยำตรงได้ดี หลังจากนั้นจะทำการลดขนาดของเอลิเมนต์ให้มีขนาดที่เล็กลงดังรูป (b) โดยเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์เป็น 18 เอลิเมนต์ จะพบว่าผลจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะดีขึ้นกว่าในข้อ (a) แต่ต้องใช้เวลาในการคำนวณและใช้หน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์มากขึ้นเช่นกัน แต่หากใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ ดังรูป (c) บริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงความชันของคำตอบมากจะมีเอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็ก ในทางกลับกันบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงความชันของคำตอบน้อยจะมี เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ จากรูปจะเห็นว่าใช้เอลิเมนต์เพียง 10 เอลิเมนต์แต่ผลที่ได้กลับดีกว่ารูป (b) ที่ใช้



(a) เอลิเมนต์ขนาดใหญ่



(b) เอลิเมนต์ขนาดเล็ก



(c) ขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสม

รูปที่ 7.1 การกำหนดขนาดเอลิเมนต์แบบต่างๆ



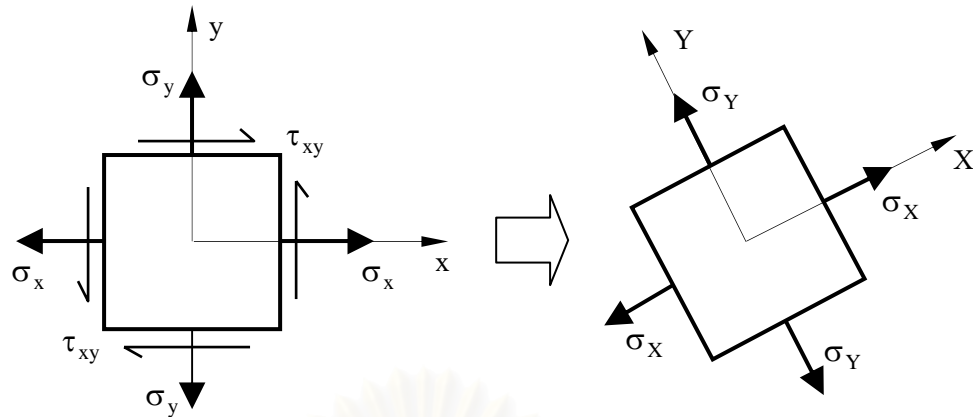
จำนวนเอลิเมนต์ถึง 18 เอลิเมนต์ ดังนั้นจะเห็นว่าหากมีการจัดการปรับเปลี่ยนขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมจะทำให้ได้คำตอบที่ใกล้เคียงผลเฉลยแม่นยำตรงโดยไม่จำเป็นที่จะต้องใช้อิเลเมนต์จำนวนมาก หากแต่ในปัญหาของไฟไนต์เอลิเมนต์โดยทั่วไปเราไม่สามารถทราบผลเฉลยแม่นยำตรงได้จึงไม่รู้ว่าบริเวณใดควรที่จะมีความถี่มาก บริเวณใดควรมีความถี่น้อย จึงต้องอาศัยโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับปรับเปลี่ยนขนาดของเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติร่วมกับโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ ทำการปรับเปลี่ยนขนาดหลายๆรอบจนมั่นใจว่าผลที่ได้เข้าสู่คำตอบที่ถูกต้อง

เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติได้ถูกนำมาใช้ร่วมกับโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับคำนวณปัญหาทางวิศวกรรมต่างๆ ดังเช่นปัญหาการถ่ายเทความร้อน [28] ปัญหาการไหลแบบหนืด [5] และปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ [29] ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะทำการประยุกต์เทคนิคนี้กับการไหลของโลหะที่เกิดจากการอัดรีด รวมทั้งการรีดโลหะแผ่น เพื่อให้ได้ผลเฉลยที่ดีที่สุดโดยใช้ความเร็วเป็นตัวกำหนดความสัมพันธ์ของขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสม เพื่อที่จะดูผลการเปรียบเทียบรูปแบบของการกระจายของคำตอบที่การเปลี่ยนแปลงขนาดของเอลิเมนต์ในระยะต่างๆ ที่เข้าสู่คำตอบที่ดีที่สุด

## 7.1 หลักการของเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ประเด็นที่สำคัญของเทคนิคการปรับเปลี่ยนขนาดของเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติก็คือการหาขนาดของแต่ละเอลิเมนต์ที่เหมาะสมและสัมพันธ์กันทั้งระบบ ในการหาขนาดที่เหมาะสมนั้นจะเริ่มจากอาศัยหลักการสำหรับหาความเค้นตามแนวแกนหลัก (Principal Stress) ของปัญหาทางด้านกลศาสตร์ของแข็ง [7] ดังรูปที่ 7.2 กล่าวคือที่ตำแหน่งใดๆบนระนาบของแกน x-y จะประกอบด้วยความเค้นอยู่สองประเภทคือความเค้นตั้งฉาก (Normal Stress) และความเค้นเฉือน (Shear Stress) และหากหมุนแกนที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่ตำแหน่งที่สนใจ ค่าของความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือนก็จะเปลี่ยนแปลงไปอย่างมีระบบ ถ้าหากหมุนแกนจนพบตำแหน่งที่มีเฉพาะความเค้นตั้งฉากโดยไม่มี ความเค้นเฉือน แกนนั้นจะเรียกว่าแกนหลัก ใช้สัญลักษณ์ X-Y ความเค้นตั้งฉากที่เกิดขึ้นจะเรียกว่าความเค้นตามแนวแกนหลัก จะมีอยู่ 2 ค่า และค่ามากในสองค่านี้จะเป็นค่าของความเค้นตั้งฉากที่มากที่สุด ที่เป็นไปได้ ณ ตำแหน่งนั้นๆ สามารถเขียนความสัมพันธ์ของความเค้นในรูปแบบ 2 มิติสำหรับแนวแกนทั่วไปเมื่อเปรียบเทียบกับแนวแกนหลักได้ดังสมการที่ (7.1)





รูปที่ 7.2 ความเค้นที่ตำแหน่งใดๆเปรียบเทียบกับความเค้นที่แนวแกนหลัก

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_X & 0 \\ 0 & \sigma_Y \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

ในลักษณะเดียวกัน เทคนิคการปรับเปลี่ยนขนาดเอลิเมนต์ที่อาศัยการเปลี่ยนแปลงความชันของคำตอบเป็นตัวกำหนดขนาดของเอลิเมนต์ โดยสามารถเขียนในรูปแบบของค่าอนุพันธ์ลำดับที่ 2 ได้ดังสมการที่ (7.2) และโดยอาศัยหลักการเดียวกับการหาความเค้นตามแนวแกนหลัก อัตราการเปลี่ยนแปลงความชันก็สามารถหาแนวแกนหลักได้เช่นกัน และจะเกิดค่ามากที่สุดของแต่ละเอลิเมนต์ที่จะนำไปเป็นตัวกำหนดความสัมพันธ์ของขนาดเอลิเมนต์บนโดเมนปัญหา

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial Y^2} \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

โดย  $\phi_i$  คือฟังก์ชันคำตอบของปัญหาที่ใช้เป็นตัวกำหนดความสัมพันธ์ของขนาดเอลิเมนต์

i คือจุดต่อหลักบนโดเมนปัญหา

เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อจะมีฟังก์ชันการประมาณภายในของคำตอบเป็นแบบเชิงเส้น (Linear) ซึ่งสามารถเขียนลักษณะการกระจายของคำตอบสำหรับเอลิเมนต์ได้ในรูป

$$\begin{aligned} \phi_e(x, y) &= [N_1(x, y) \quad N_2(x, y) \quad N_3(x, y)] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \\ &= [N] \{\phi_i\} \end{aligned} \quad (7.3)$$

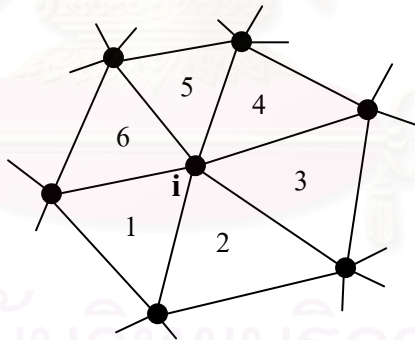
และเนื่องจากฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์เป็นแบบเชิงเส้นจึงไม่สามารถหาค่าอนุพันธ์อันดับที่สองได้โดยตรง ดังนั้นในการหาค่าต่างๆของสมการที่ (7.2) ซึ่งอยู่ในรูปอนุพันธ์อันดับที่สองนั้นสามารถกระทำได้โดยทางอ้อม [30] โดยเริ่มจากการหาค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของคำตอบเมื่อเทียบกับแกน  $x$  ของสมการ (7.3)

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial x} = \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] \{ \phi_i \} \quad (7.4)$$

ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ได้จะเป็นค่าหนึ่งที่เกิดขึ้นกับเอลิเมนต์ต่างๆทั่วทั้งโดเมน หลังจากนั้นจะทำการแปลงค่าผลเฉลยของเอลิเมนต์ต่างๆให้เป็นผลเฉลยที่จุดต่อ ก่อให้เกิดสนามของค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของคำตอบบนจุดต่อทั่วทั้งโดเมน วิธีในการแปลงดังกล่าวสามารถกระทำได้โดยหาค่าเฉลี่ยในรูปแบบทั่วไปดังนี้

$$u_i = \frac{\sum_m (u_e)_m}{m} \quad (7.5)$$

โดย  $u_i$  คือผลเฉลยใดๆบนจุดต่อ  $u_e$  คือผลเฉลยใดๆบนเอลิเมนต์  
 $i$  คือหมายเลขจุดต่อ  $m$  คือจำนวนเอลิเมนต์ที่ล้อมรอบจุดต่อ  $i$



รูปที่ 7.3 การเรียงตัวของเอลิเมนต์รอบจุดต่อ  $i$

ตัวอย่างเช่น ผลเฉลยของค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของจุดต่อ  $i$  ที่มีเอลิเมนต์ล้อมรอบอยู่ 6 เอลิเมนต์ดังรูปที่ 7.3 สามารถหาได้จาก

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \frac{\left( \frac{\partial \phi_e}{\partial x} \right)_1 + \left( \frac{\partial \phi_e}{\partial x} \right)_2 + \dots + \left( \frac{\partial \phi_e}{\partial x} \right)_6}{6} \quad (7.6)$$

หลังจากได้สนามของค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของคำตอบที่อยู่บนจุดต่อทั่วทั้งโดเมน ก็จะเริ่มทำการหาค่าอนุพันธ์อันดับที่สอง โดยสามารถเขียนฟังก์ชันการประมาณภายในแบบเชิงเส้นบนเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมของค่าอนุพันธ์ดังกล่าวได้ในรูป

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial x} = [N] \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right\} \quad (7.7)$$

ดังนั้นค่าอนุพันธ์อันดับที่สองของคำตอบเทียบกับแกน  $x$  และแกน  $y$  สามารถเขียนได้ตามลำดับดังนี้

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial x^2} = \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right\} \quad (7.8a)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial y \partial x} = \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right] \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right\} \quad (7.8b)$$

ในทำนองเดียวกันสามารถหาค่าอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของคำตอบเมื่อเทียบกับแกน  $y$  ซึ่งก่อให้เกิดค่าอนุพันธ์อันดับที่สองเมื่อเทียบกับแกน  $x$  และ  $y$  ตามลำดับดังนี้

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial x \partial y} = \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right\} \quad (7.9a)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_e}{\partial y^2} = \left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right] \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right\} \quad (7.9b)$$

สมการที่ (7.8 a,b) และ (7.9 a,b) จะเป็นค่าอนุพันธ์อันดับที่สองที่เกิดบนเอลิเมนต์ สามารถหาค่าเหล่านี้ที่กระจายบนจุดต่อต่างๆได้ในทำนองเดียวกับกรณีที่ผ่านมา โดยใช้สมการ (7.5) ซึ่งสุดท้ายก็จะได้ค่าทั้งสี่ของเมตริกซ์ทางด้านซ้ายของสมการที่ (7.2)

ในวิชานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้ความเร็วเป็นตัวกำหนดความสัมพันธ์ของขนาด กล่าวคือบริเวณใดมีอัตราการเปลี่ยนแปลงความชันของความเร็ว (Velocity Gradient) สูง บริเวณนั้นควรมีความถี่ของเอลิเมนต์มากกว่าบริเวณที่มีอัตราการเปลี่ยนแปลงความชันของความเร็วต่ำ สามารถเขียนสมการ (7.2) ให้อยู่ในรูปแบบของความเร็วได้คือ

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V_i}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 V_i}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V_i}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 V_i}{\partial Y^2} \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

โดย  $V_i$  คือฟังก์ชันการกระจายของความเร็วบนโดเมนปัญหา

$i$  คือจุดต่อหลักบนโดเมนปัญหา

เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติจะใช้ค่าของคำตอบที่จุดต่อหลัก (Main Node) ซึ่งก็คือจุดต่อที่มุมของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมนั่นเอง ดังนั้นเพื่อที่จะประยุกต์เข้ากับวิชานิพนธ์ฉบับนี้ที่ใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อ เพื่อคำนวณหาค่าความเร็ว จึงจะใช้เฉพาะค่าความเร็วที่จุดต่อมุมที่คำนวณได้มาใช้ในการประยุกต์หาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสม โดยสามารถเขียนฟังก์ชันการประมาณภายในของคำตอบความเร็วแบบเชิงเส้น (Linear Interpolation Function) บนเอลิเมนต์ได้ดังนี้

$$V_e(x, y) = N_1 V_1 + N_2 V_2 + N_3 V_3 \quad (7.11)$$

โดย  $N_i$   $i = 1, 2, 3$  คือฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

$V_i$   $i = 1, 2, 3$  คือผลของความเร็วลัพธ์ที่จุดต่อหลักบนเอลิเมนต์ที่คำนวณจากแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ก่อนทำการปรับขนาด

$$N_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y \quad i = 1, 2, 3 \quad (7.12)$$

โดย

$$\begin{aligned} a_1 &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) / 2A & b_1 &= (y_2 - y_3) / 2A & c_1 &= (x_3 - x_2) / 2A \\ a_2 &= (x_3 y_1 - x_1 y_3) / 2A & b_2 &= (y_3 - y_1) / 2A & c_2 &= (x_1 - x_3) / 2A \\ a_3 &= (x_1 y_2 - x_2 y_1) / 2A & b_3 &= (y_1 - y_2) / 2A & c_3 &= (x_2 - x_1) / 2A \end{aligned} \quad (7.13)$$

A คือพื้นที่ของเอลิเมนต์ที่พิจารณา

$$A = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \quad (7.14)$$

ในการหาค่าตัวแปรต่างๆทางด้านซ้ายของสมการ (7.10) ซึ่งก็คือ  $\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 V_i}{\partial x \partial y}$  และ

$\frac{\partial^2 V_i}{\partial y \partial x}$  จะเริ่มจากการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของเอลิเมนต์ใดๆ คือ  $\frac{\partial V_e}{\partial x}$  และ  $\frac{\partial V_e}{\partial y}$  ในลักษณะ

เดียวกับสมการ (7.4)

$$\frac{\partial V_e}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} V_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} V_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} V_3 \quad (7.15)$$

โดย  $\frac{\partial N_1}{\partial x} = b_1$ ,  $\frac{\partial N_2}{\partial x} = b_2$ ,  $\frac{\partial N_3}{\partial x} = b_3$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_e}{\partial x} &= b_1 V_1 + b_2 V_2 + b_3 V_3 \\ &= \frac{1}{2A} [(y_2 - y_3)V_1 + (y_3 - y_1)V_2 + (y_1 - y_2)V_3] \end{aligned} \quad (7.16a)$$

ในทำนองเดียวกัน 
$$\frac{\partial V_e}{\partial y} = c_1 V_1 + c_2 V_2 + c_3 V_3$$

$$= \frac{1}{2A} [(x_3 - x_2)V_1 + (x_1 - x_3)V_2 + (x_2 - x_1)V_3] \quad (7.16b)$$

ค่าของ  $\frac{\partial V_e}{\partial x}$  และ  $\frac{\partial V_e}{\partial y}$  คือค่าอนุพันธ์ของเอลิเมนต์ ดังนั้นในการหา  $\frac{\partial V_i}{\partial x}$  และ  $\frac{\partial V_i}{\partial y}$  ที่เป็นค่าอนุพันธ์ที่จุดต่อ จึงต้องทำการหาค่าเฉลี่ยโดยการกระจายค่าสู่จุดต่อต่างๆของเอลิเมนต์ที่วางตัวอยู่รอบจุดต่อนั้น สามารถเขียนในรูปทั่วไปหากจุดต่อ  $i$  มีเอลิเมนต์ล้อมรอบอยู่  $m$  เอลิเมนต์คือ

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = \frac{\frac{\partial V_{e1}}{\partial x} + \frac{\partial V_{e2}}{\partial x} + \dots + \frac{\partial V_{em}}{\partial x}}{m} \quad (7.17a)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial y} = \frac{\frac{\partial V_{e1}}{\partial y} + \frac{\partial V_{e2}}{\partial y} + \dots + \frac{\partial V_{em}}{\partial y}}{m} \quad (7.17b)$$

สำหรับค่าอนุพันธ์อันดับที่สองหาได้ในทำนองเดียวกับสมการ (7.8) และ (7.9)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_e}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V_e}{\partial x} \right) = \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial V_2}{\partial x} + \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ &= b_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} + b_2 \frac{\partial V_2}{\partial x} + b_3 \frac{\partial V_3}{\partial x} \end{aligned} \quad (7.18a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_e}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V_e}{\partial y} \right) = \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial V_3}{\partial y} \\ &= c_1 \frac{\partial V_1}{\partial y} + c_2 \frac{\partial V_2}{\partial y} + c_3 \frac{\partial V_3}{\partial y} \end{aligned} \quad (7.18b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_e}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V_e}{\partial y} \right) = \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial V_3}{\partial y} \\ &= b_1 \frac{\partial V_1}{\partial y} + b_2 \frac{\partial V_2}{\partial y} + b_3 \frac{\partial V_3}{\partial y} \end{aligned} \quad (7.18c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_e}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V_e}{\partial x} \right) = \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial V_2}{\partial x} + \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ &= c_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} + c_2 \frac{\partial V_2}{\partial x} + c_3 \frac{\partial V_3}{\partial x} \end{aligned} \quad (7.18d)$$

โดย 
$$\frac{\partial^2 V_e}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V_e}{\partial y \partial x}$$

หลังจากนั้นกระจายค่าอนุพันธ์ลำดับสองของเอลิเมนต์ไปสู่จุดต่อต่างๆของเอลิเมนต์

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial^2 V_{e1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_{e2}}{\partial x^2} + \dots + \frac{\partial^2 V_{em}}{\partial x^2}}{m} \quad (7.19a)$$

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} = \frac{\frac{\partial^2 V_{e1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_{e2}}{\partial y^2} + \dots + \frac{\partial^2 V_{em}}{\partial y^2}}{m} \quad (7.19b)$$

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x \partial y} = \frac{\frac{\partial^2 V_{e1}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_{e2}}{\partial x \partial y} + \dots + \frac{\partial^2 V_{em}}{\partial x \partial y}}{m} \quad (7.19c)$$

เมื่อจุดต่อที่  $i$  มีเอลิเมนต์ล้อมรอบอยู่  $m$  เอลิเมนต์

ค่าของ  $\frac{\partial^2 V_e}{\partial X^2}$  และ  $\frac{\partial^2 V_e}{\partial Y^2}$  สามารถหาได้จากสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองที่ประดิษฐ์ขึ้น โดยหลักการหาค่าที่แนวแกนหลักนี้จะเหมือนกับการหาค่าความเค้นตามแนวแกนหลัก คือจะทำการหาค่าเจาะจง (Eigen Value) ของเมตริกซ์ความเค้นที่แนวแกน  $x$ - $y$  ใดๆ ซึ่งสูตรสำเร็จจะอยู่ในรูปของการถอดค่ารากที่สอง ซึ่งสามารถเขียนในรูปอย่างง่ายคือ

$$\text{ค่าเจาะจง} = \frac{\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2}}{2} \pm \sqrt{\frac{\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2}}{2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial x \partial y}} \quad (7.20)$$

ค่ามากที่สุดของค่าเจาะจงทั้งสองจะถูกเลือกมาเป็นตัวที่ใช้กำหนดขนาดของเอลิเมนต์ของเอลิเมนต์นั้นๆ โดยกำหนดให้

$$\lambda = \max \left( \left| \frac{\partial^2 V_i}{\partial X^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 V_i}{\partial Y^2} \right| \right) \quad (7.21)$$

ในการกำหนดขนาดที่เหมาะสมของแต่ละเอลิเมนต์นั้นสามารถหาได้โดย

$$h^2 \lambda = \text{ค่าคงที่} = h_{\min}^2 \lambda_{\max} \quad (7.22)$$

โดย ค่าของ  $h_{\min}$  คือค่าขนาดเอลิเมนต์ที่เล็กที่สุดที่ยอมรับได้โดยผู้ใช้เป็นผู้กำหนด

ค่าของ  $\lambda_{\max}$  คือค่า  $\lambda$  ที่มากที่สุดบนโดเมนปัญหา

จะเห็นว่าพจน์ทางด้านขวาสุดของสมการ (7.22) จะก่อให้เกิดค่าคงที่ค่าหนึ่งบนโดเมนปัญหาใดๆ และค่าคงที่นั้นจะเป็นค่าที่ใช้กำหนดขนาดของ  $h$  ที่เอลิเมนต์ใดๆที่มีค่า  $\lambda$  เป็นคุณลักษณะเฉพาะ



## 7.2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับประยุกต์การปรับขนาดเอลิเมนต์

ในการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับการวิเคราะห์การไหลของโลหะที่เกิดจากการอัดรีดนั้นมีโปรแกรมที่เกี่ยวข้อง 3 โปรแกรมด้วยกันดังนี้

### 1. โปรแกรม BUILT

เป็นโปรแกรมที่ใช้สำหรับสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ ที่มีเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม 3 จุดต่อ โดยการรับข้อมูลที่กำหนดพื้นผิวของแบบจำลองจากผู้ใช้รวมทั้งขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมจากโปรแกรมในข้อที่ 2

### 2. โปรแกรม SPACE

เป็นโปรแกรมที่ใช้คำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมบนโดเมนปัญหาที่ตั้งใจอธิบายในหัวข้อ 7.1 โดยการรับข้อมูลทั้งจากผู้ใช้เป็นผู้กำหนดค่าตัวแปรต่างๆที่จำเป็น และข้อมูลที่คำนวณได้จากโปรแกรมในข้อ 3 โดยผลการคำนวณจะถูกใช้เป็นข้อมูลนำเข้าในโปรแกรม BUILT เพื่อสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์

### 3. โปรแกรม MTFLOW

ใช้สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการไหลของโลหะที่เกิดจากการอัดรีด โดยผลลัพธ์จะอยู่ในรูปของความเร็ว ความดัน และอุณหภูมิ ข้อมูลความเร็วที่คำนวณได้จะถูกใช้สำหรับการคำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมโดยโปรแกรม SPACE

รายละเอียดของโปรแกรม BUILT และ SPACE ที่อยู่ในรูปของภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) สามารถศึกษาได้จากหนังสืออ้างอิง [5]

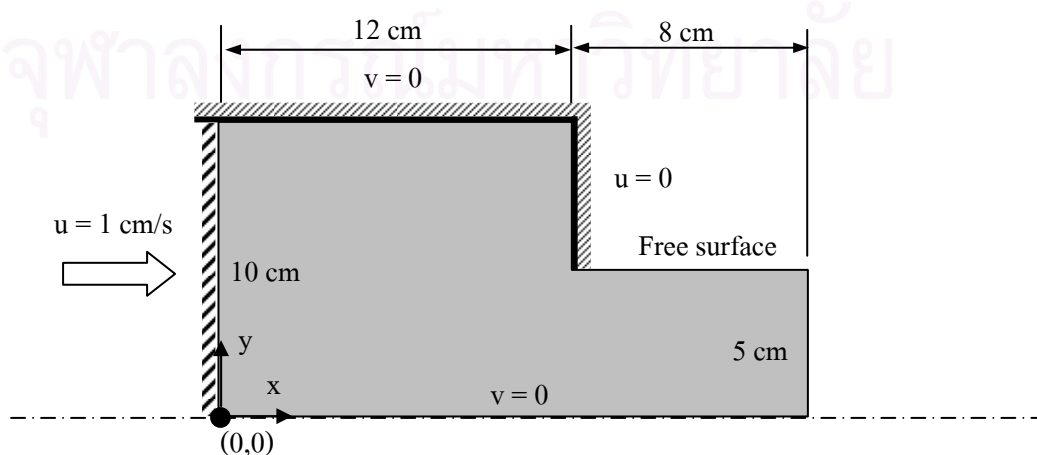
## 7.3 ขั้นตอนในการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ในหัวข้อนี้จะนำเสนอขั้นตอนการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับปัญหาการไหลของโลหะที่เกิดจากการอัดรีดโดยใช้โปรแกรมทั้ง 3 ที่นำเสนอในหัวข้อที่แล้ว ในการผนวกโปรแกรมทั้ง 3 มีลำดับขั้นตอนดังนี้

1. สร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีขนาดเอลิเมนต์เท่ากันและกระจายโดยสม่ำเสมอตลอดโดเมนปัญหา โดยใช้โปรแกรม BUILT
2. ใช้โปรแกรม MTFlow วิเคราะห์ผลการอัดรีดจากแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม BUILT ในขั้นตอนที่ 1
3. ใช้โปรแกรม SPACE เพื่อหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมโดยใช้ผลของความเร็วลัพธ์ที่ได้จากขั้นตอนที่ 2 เป็นตัวกำหนด
4. สร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์อีกครั้งโดยใช้ผลของขนาดเอลิเมนต์ที่คำนวณได้ในขั้นตอนที่ 3
5. วิเคราะห์การอัดรีดโดยโปรแกรม MTFlow โดยใช้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ผ่านการปรับขนาดครั้งแรกเรียบร้อยแล้ว
6. ตรวจสอบการเปลี่ยนแปลงของคำตอบเมื่อเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการวิเคราะห์ โดยใช้แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ในรอบก่อนหน้านี้ หากผลที่ได้ยังไม่เข้าสู่คำตอบที่ควรจะเป็นก็ให้กลับไปในขั้นตอนที่ 3 เพื่อคำนวณหาขนาดของเอลิเมนต์ใหม่ เป็นเช่นนี้เรื่อยไปจนผลความแตกต่างเข้าสู่คำตอบที่น่าพึงพอใจ

#### 7.4 ตัวอย่างการวิเคราะห์การอัดรีดที่มี $R = 0.5$ โดยใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ในหัวข้อนี้จะยกตัวอย่างการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติกับปัญหาการอัดรีด 2 มิติ โดยใช้ตัวอย่างปัญหาการอัดรีดที่มีอัตราส่วนลดขนาด 0.5 วัสดุมีค่าความเค้นคราก  $1732 \text{ kg/cm}^2$  วิเคราะห์โดยโปรแกรม MTFlow(v1) ร่วมกับโปรแกรม BUILT และ SPACE รายละเอียดของแบบจำลองมีลักษณะเดียวกับรูป 5.4 ขั้นตอนในการวิเคราะห์แยกเป็นลำดับขั้นได้ดังนี้



รูปที่ 7.4 แบบจำลองการอัดรีดที่มีอัตราส่วนการลดขนาด 0.5

## 1. ใช้โปรแกรม BUILT เพื่อสร้างแบบจำลองไฟในต์เอลิเมนต์ที่มีขนาดเอลิเมนต์สม่ำเสมอ

### 1.1 ลักษณะไฟล์ข้อมูลนำเข้า

ไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรม BUILT จะเป็นข้อมูลที่ใช้สร้างพื้นผิวของปัญหา เพื่อให้โปรแกรมทำการแบ่งเอลิเมนต์ภายในขอบเขตปัญหานั้น ข้อมูลนำเข้าสำหรับตัวอย่างนี้จะเก็บไว้ในไฟล์ชื่อ extrude.dat มีรายละเอียดดังนี้

```

nis  nsf
6    1
edge definition
1    2
0.   0.   0.
20.  0.   0.
2    2
20.  0.   0.
20.  5.   0.
3    2
20.  5.   0.
12.  5.   0.
4    2
12.  5.   0.
12.  10.  0.
5    2
12.  10.  0.
0.   10.  0.
6    2
0.   10.  0.
0.   0.   0.
surface support point
1    2    2
0.   0.   0.
20.  0.   0.
0.   10.  0.
20.  10.  0.
face boundary
1    6
1  2  3  4  5  6

```

รายละเอียดข้อมูลที่ปรากฏในไฟล์ข้อมูลนำเข้ามีดังนี้

- ข้อมูลแสดงจำนวนขอบและพื้นผิวของปัญหา

```

nis  nsf
6    1

```

บรรทัดที่ 1 คำอธิบายจำนวนขอบและจำนวนพื้นผิว

บรรทัดที่ 2 จำนวนขอบและพื้นผิวของโดเมนปัญหา ตัวอย่างนี้มี 6 ขอบและ 1 พื้นผิว -  
ข้อมูลองค์ประกอบของเส้นที่ขอบ

```
edge definition
1      2
0.    0.    0.
20.   0.    0.
```

บรรทัดที่ 1 คำอธิบายคำจำกัดความของขอบปัญหา

บรรทัดที่ 2 เลขตัวแรกคือหมายเลขเฉพาะของขอบ เลขตัวหลังคือจำนวนจุดที่ก่อให้เกิด  
ขอบ

บรรทัดที่ 3-4 ค่าระยะพิคคของจุดต่อทั้งสองที่ก่อให้เกิดเส้นขอบนั้นๆ

หมายเหตุ : กรณีตัวอย่างเป็นเส้นตรงดังนั้นจุดสองจุดก็เพียงพอสำหรับการสร้างเส้น แต่สำหรับกรณี  
เส้นโค้งจะต้องใช้จำนวนจุดพิคคมากกว่า แต่จะมากหรือน้อยขึ้นกับส่วนโค้งนั้นๆ

- ข้อมูลจุดต่อที่มุมที่รองรับพื้นผิวทั้งหมดของปัญหา

```
surface support point
1      2      2
0.    0.    0.
20.   0.    0.
0.    10.   0.
20.   10.   0.
```

บรรทัดที่ 1 คำอธิบายจุดต่อที่มุมที่รองรับพื้นผิวของปัญหา

บรรทัดที่ 2-5 เป็นระยะพิคคมุมทั้ง 4 ที่เพียงพอที่จะครอบคลุมโดเมนปัญหาทั้งหมด

- ข้อมูลการเรียงลำดับของขอบที่ล้อมรอบพื้นผิวของปัญหา

```
face boundary
1      6
1  2  3  4  5  6
```

บรรทัดที่ 1 คำอธิบายลำดับของขอบเพื่อให้เกิดเป็นพื้นผิว

บรรทัดที่ 2 หมายเลขตัวแรกระบุหมายเลขเฉพาะพื้นผิว หมายเลขตัวหลังระบุจำนวนเส้นที่  
ก่อให้เกิดพื้นผิวขอบเขต

บรรทัดที่ 3 ลำดับหมายเลขเฉพาะของขอบที่เรียงกันแล้วก่อให้เกิดพื้นผิวขอบเขต

## 1.2 การป้อนข้อมูลผ่านโปรแกรม BUILT

หลังจากที่ได้ข้อมูลของแบบจำลองเป็นที่เรียบร้อยแล้ว ก็จะเริ่มทำการใช้งานโปรแกรม  
BUILT ในการสื่อสารกับโปรแกรมผู้ใช้จะต้องเป็นผู้ป้อนข้อมูลบางส่วนให้กับโปรแกรม (ตัวเขียน  
หมา คือค่าที่ผู้ใช้กำหนด) โดยรายละเอียดที่สำคัญในการสื่อสารมีดังนี้

```

*****
***          B U I L T          ***
***    surface triangulator    ***
***    for plane structures    ***
*****

```

\*\*\* mesh generation \*\*\*

0.- initial mesh

1.- remeshing

Option ? : 0 (เลือก 0 สำหรับขนาดเอลิเมนต์สม่ำเสมอในครั้งแรกของสร้างแบบจำลอง)

Enter problem name: **extrude** (ชื่อไฟล์ของปัญหา จะต้องเป็นชื่อเดียวกันในทุกๆ การปรับเปลี่ยนขนาด)

Enter current version number: 0 (หมายเลขชุดที่จะให้ระบุในนามสกุลของไฟล์คำตอบ)

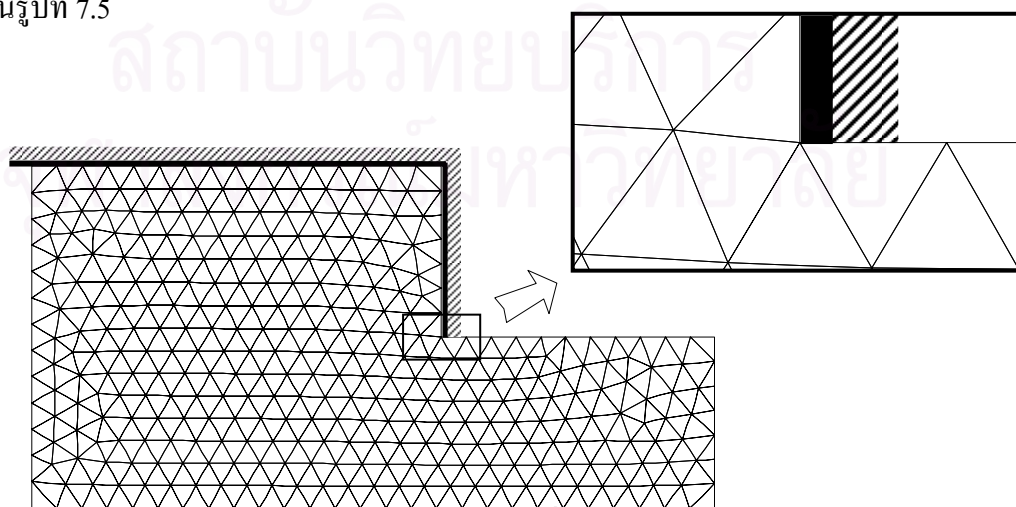
\*\*\* initial mesh \*\*\*

element size ? : 0.75 (ขนาดเอลิเมนต์เริ่มต้นที่กระจายโดยสม่ำเสมอ)

### 1.3 ไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์

ไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมมีอยู่หลายไฟล์ด้วยกัน แต่ส่วนใหญ่จะเป็นไฟล์ที่เก็บข้อมูลสำหรับใช้เป็นข้อมูลนำเข้าในรอบต่อไปของการปรับเปลี่ยนขนาดของเอลิเมนต์ ชื่อของไฟล์ผลลัพธ์นี้จะเหมือนกับชื่อไฟล์ที่ผู้ใช้ระบุให้โปรแกรมทำการอ่านข้อมูล นามสกุลของไฟล์ผลลัพธ์จะมีหมายเลขชุดที่ใช้เป็นผู้กำหนดเพื่อให้แยกกันชัดเจนสำหรับไฟล์คำตอบที่รอบการปรับเปลี่ยนขนาดของเอลิเมนต์ต่างๆ ข้อมูลที่สำคัญที่จะใช้เข้าไปเป็นข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรม MTFflow ก็คือข้อมูลที่เก็บระยะพิกัด x-y ของจุดต่อต่างๆ และการจัดเรียงเอลิเมนต์ โดยจะเก็บเอาไว้ในไฟล์ที่มีนามสกุล \*.ei โดย i คือหมายเลขชุดที่ระบุการปรับเปลี่ยนขนาดในขณะนั้น ในที่นี้คือ extrude.e0

แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ในขั้นตอนนี้มีจำนวนจุดต่อ 358 จุด จำนวนเอลิเมนต์ 633 เอลิเมนต์ หากนำข้อมูลที่ได้ในขั้นตอนนี้มาแสดงผลกราฟฟิก ก็จะได้ลักษณะของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นที่มีขนาดเอลิเมนต์เท่ากันทั้งระบบคือ 0.75 cm และมีการกระจายแบบสม่ำเสมอ ดังแสดงในรูปที่ 7.5



2. วิเคราะห์หาผลเฉลยจากแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น โดยใช้โปรแกรม MTFflow(v1)

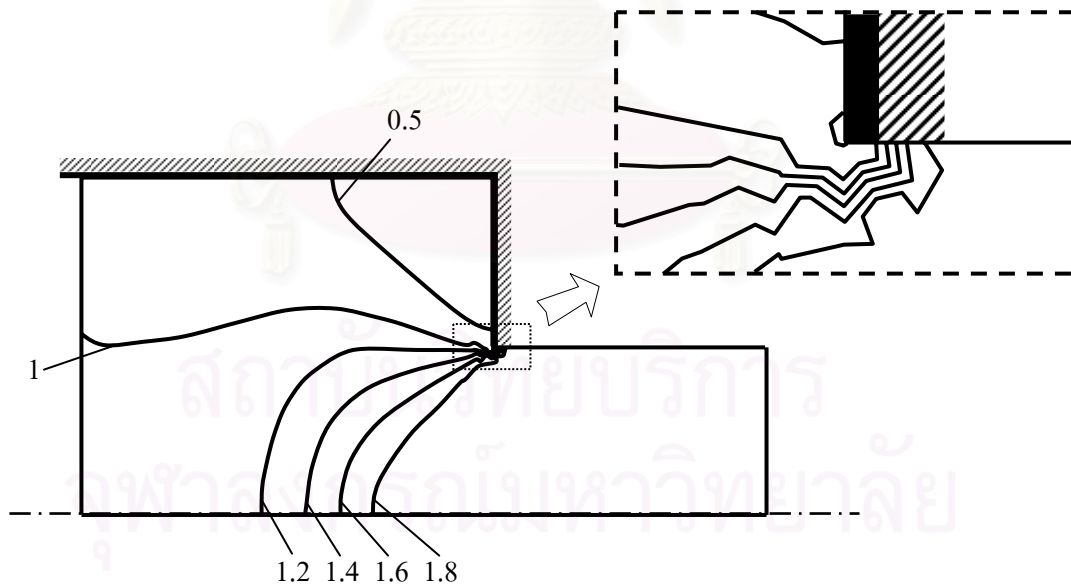
รูปที่ 7.5 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น

นำไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ที่ได้จากข้อ 1.3 มาสร้างไฟล์ข้อมูลนำเข้าพร้อมทั้งกำหนดเงื่อนไขขอบเขตสำหรับปัญหา ดังตัวอย่างที่ได้แสดงไว้ในบทที่ 5 และเนื่องจากเอลิเมนต์ที่สร้างในโปรแกรม BUILT เป็นแบบสามเหลี่ยมสามจุดต่อ ดังนั้นต้องทำการแปลงให้เป็นแบบสามเหลี่ยมหกจุดต่อ ผลลัพธ์ที่ได้จะอยู่ในรูปของความเร็ว (u,v) และความดัน (p) หลังจากนั้นจะนำความเร็ว (u,v) มาสร้างไฟล์ข้อมูลของความเร็วลัพธ์เพื่อใช้ในขั้นตอนการหาขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสมต่อไป โดยไฟล์ข้อมูลในตัวอย่างนี้จะเก็บในชื่อ extrude.v0 มีตัวอย่างรายละเอียดดังนี้

```

358
1      .100000000E+01
2      .203084279E+01
3      .203012667E+01
4      .421196248E+00
5      .000000000E+00
6      .100000000E+01
|
|
|
355    .100956001E+01
356    .892174456E-01
357    .203054335E+01
358    .203037821E+01
    
```

ผลการกระจายของความเร็วสำหรับแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นของปัญหานี้ ได้แสดงไว้ในรูปที่ 7.6



รูปที่ 7.6 ผลการกระจายความเร็วของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น



### 3. ใช้โปรแกรม SPACE เพื่อหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสม

#### 3.1 ไฟล์ข้อมูลนำเข้า

ไฟล์ข้อมูลที่ใช้สำหรับโปรแกรมนี้จะมี 4 ไฟล์ด้วยกัน จะอยู่ในรูปแบบของนามสกุล \*.Ni , \*.Li , \*.DIM , \*.Vi โดย i คือหมายเลขชุดที่ระบุการปรับเปลี่ยนขนาดขณะนั้น 3 ไฟล์แรกจะได้อมาจากโปรแกรม BUILT ส่วนไฟล์สุดท้ายได้จากขั้นตอนที่ 2

#### 3.2 การป้อนข้อมูลผ่านโปรแกรม SPACE

หลังจากแน่ใจว่ามีไฟล์ข้อมูลนำเข้าครบถ้วน ก็จะเริ่มทำการใช้งานโปรแกรม SPACE โดยมีรายละเอียดการสื่อสารระหว่างผู้ใช้และโปรแกรมดังนี้

```
CHECK INPUT FILES FOR  1. ?.N_
                       2. ?.L_
                       3. ?.DIM
                       4. ?.V_
```

ENTER PROBLEM NAME : **extrude** (ระบุชื่อไฟล์ของปัญหา)

ENTER CURRENT VERSION NUMBER : **0** (หมายเลขชุดของการปรับเปลี่ยนขนาด)

PLEASE INPUT THE MINIMUM & MAXIMUM SPACINGS

**0.375 1** (กำหนดขนาดเอลิเมนต์ที่เล็กที่สุด และใหญ่ที่สุดบนโดเมนปัญหา)

#### 3.3 ไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์

โปรแกรม SPACE จะเก็บข้อมูลขนาดของเอลิเมนต์ที่เหมาะสม ไว้ในไฟล์ที่มีนามสกุล \*.ri ในตัวอย่างนี้จะเก็บไว้ในไฟล์ชื่อ extrude.r0 มีรายละเอียดดังนี้

```
358
 1      .10000000E+01
 2      .10000000E+01
 3      .10000000E+01
 4      .43460648E+00
  |
  |
  |
```

### 4. ใช้โปรแกรม BUILT เพื่อการสร้างแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์อีกครั้ง

ในการจำลองแบบครั้งนี้ขนาดของเอลิเมนต์จะไม่สม่ำเสมอดังเช่นครั้งแรก แต่จะมีขนาดเท่ากันที่คำนวณได้ในขั้นตอนที่ 3 ขั้นตอนต่างๆมีดังนี้

#### 4.1 ไฟล์ข้อมูลนำเข้า

ไฟล์ข้อมูลนำเข้าที่ใช้ในขั้นตอนนี้จะถูกสร้างไว้แล้วในขั้นตอนที่ 1 ร่วมกับไฟล์ extrude.r0 ที่สร้างในขั้นตอนที่ 3

#### 4.2 การป้อนข้อมูลผ่านโปรแกรม BUILT

ในการสื่อสารกับโปรแกรม BUILT ในขั้นตอนนี้จะแตกต่างจากขั้นตอนที่ 1 เล็กน้อย เนื่องจากเป็นการเริ่มการปรับเปลี่ยนขนาดเอลิเมนต์ครั้งแรก รายละเอียดต่าง ๆ มีดังนี้

```
*****
***          B U I L T          ***
***      surface triangulator      ***
***      for plane structures      ***
*****
```

```
*** mesh generation ***
0.- initial mesh
1.- remeshing
```

Option ? : **1** (ระบุตัวเลือกสำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์)

Enter problem name: **extrude** (ระบุชื่อไฟล์ของปัญหา)

Enter current version number: **1** (หมายเลขชุดสำหรับปรับขนาดครั้งใหม่)

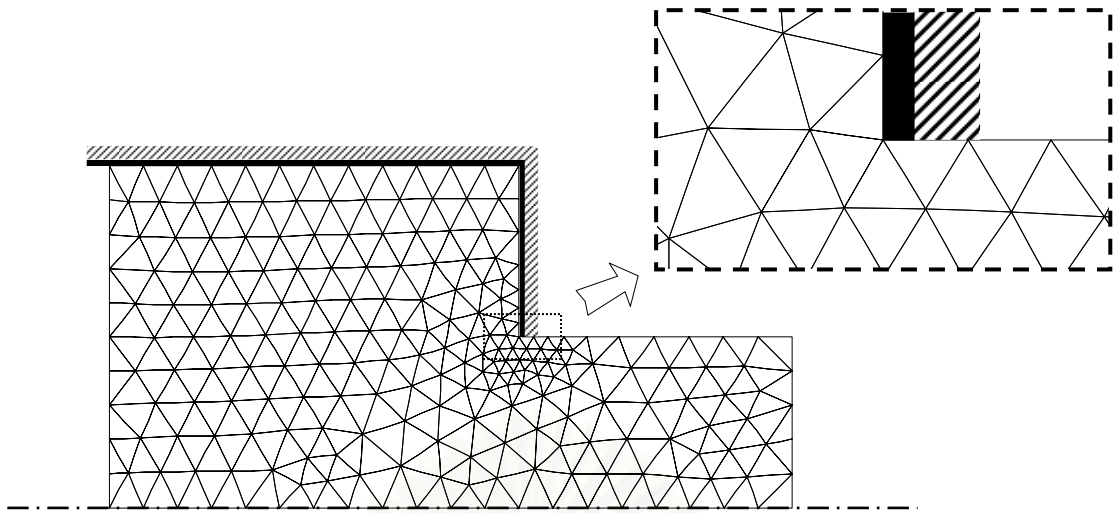
Enter previous version number: **0** (หมายเลขชุดข้อมูลครั้งก่อน)

#### 4.3 ไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์

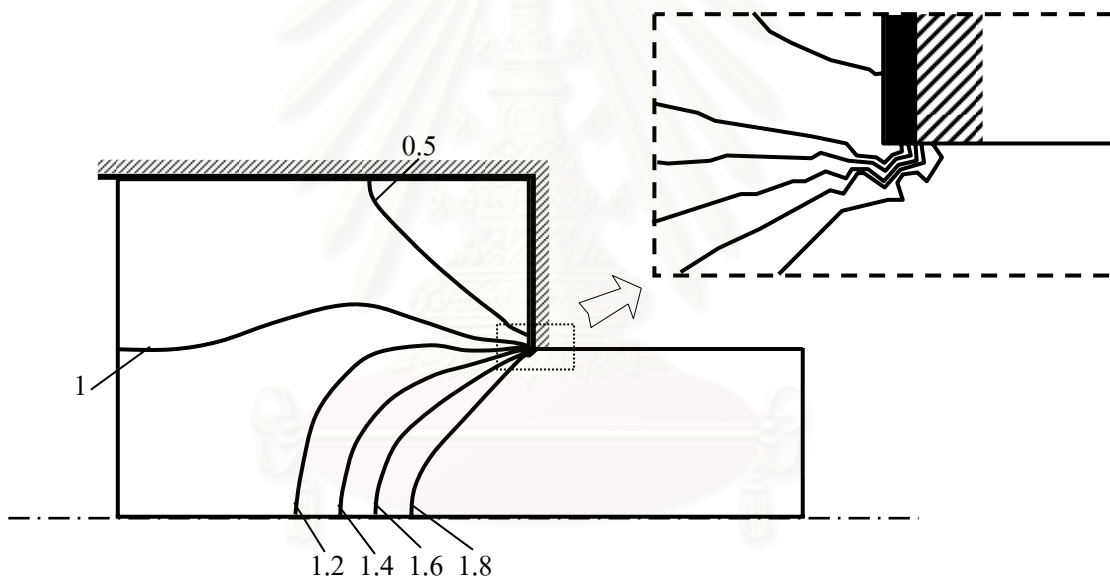
เช่นเดียวกับข้อ 1.3 ไฟล์ผลลัพธ์ที่สำคัญจะเป็นข้อมูลของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ กล่าวคือมีระยะพิทช์ของจุดต่อ และลักษณะการจัดเรียงเอลิเมนต์ โดยจะเก็บไว้ในไฟล์ชื่อ extrude.e1 แบบจำลองนี้มีจำนวนจุดต่อ 227 จุด จำนวนเอลิเมนต์ 388 เอลิเมนต์ สามารถนำมาแสดงผลกราฟฟิคได้ดังรูปที่ 7.7 ซึ่งจะพบว่าความถี่ของเอลิเมนต์บริเวณปลายแม่พิมพ์จะเพิ่มขึ้น เนื่องจากว่าบริเวณดังกล่าวจะมีการเปลี่ยนแปลงความชันของความเร็วลำพื่นมากนั่นเอง

#### 5. คำนวณหาผลเฉลยโดยใช้โปรแกรม MTFLOW(v1) อีกครั้ง

นำแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้จากการปรับเปลี่ยนขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 มาทำการคำนวณหาผลเฉลยความเร็วและความดันอีกครั้งโดยโปรแกรม MTFLOW(v1) จะได้ผลการกระจายความเร็วดังแสดงในรูปที่ 7.8



รูปที่ 7.7 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ในการปรับเปลี่ยนขนาดครั้งที่ 1



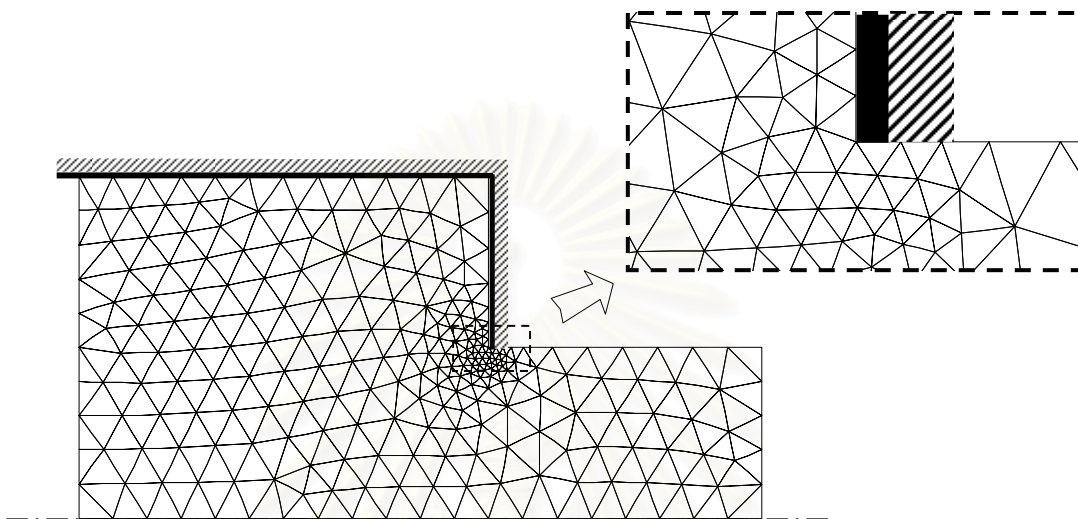
รูปที่ 7.8 ผลการกระจายความเร็วที่แบบจำลองการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1

จากผลการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 จะเห็นว่าผลการกระจายของความเร็วบริเวณปลายแม่พิมพ์จากเดิมที่ค่อนข้างกระจายห่างออกจากปลายแม่พิมพ์จะเริ่มเข้าสู่ปลายของแม่พิมพ์ หากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ต่อไปผลการกระจายก็จะขยับเข้าสู่ปลายแม่พิมพ์มากขึ้น

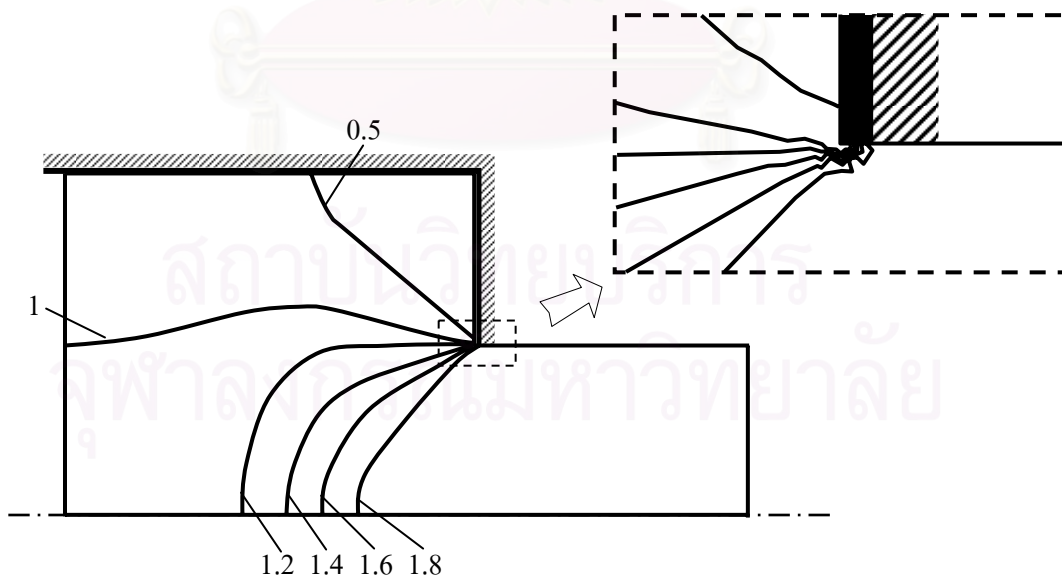
#### 6. ตรวจสอบผลที่ได้จากขั้นตอนที่ 5

ทำการตรวจสอบผลจากการวิเคราะห์ในขั้นตอนที่ 5 หากผลยังไม่ดีนักสามารถทำการปรับขนาดของเอลิเมนต์ครั้งต่อไปโดยการกลับไปขั้นตอนที่ 3 อีกครั้ง จนกว่าผลการเข้าสู่เป็นที่น่าพึง

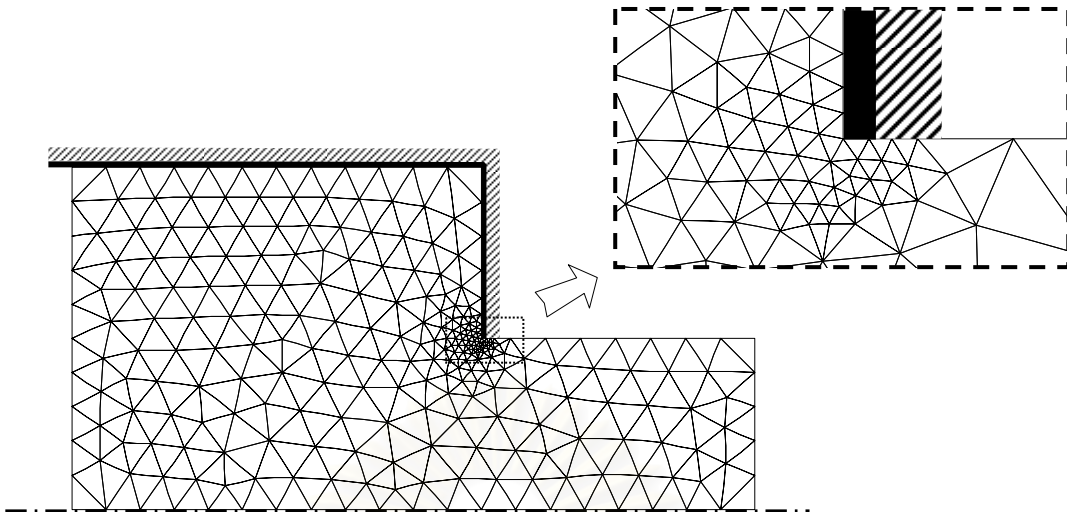
พอใจ ในตัวอย่างนี้จะทำการปรับขนาดเอลิเมนต์อีก 2 ครั้ง ลักษณะการเรียงตัวของเอลิเมนต์แสดงในรูปที่ 7.9 และ 7.11 ตามลำดับ โดยในรูปที่ 7.9 มีจำนวนจุดต่อ 987 จุด และจำนวนเอลิเมนต์ 460 เอลิเมนต์ ส่วนรูปที่ 7.11 มีจำนวนจุดต่อ 1034 จุด จำนวนเอลิเมนต์ 483 เอลิเมนต์ ส่วนผลการกระจายของความเร็วจากแบบจำลองทั้งสองแสดงในรูปที่ 7.10 และ 7.12 ตามลำดับ



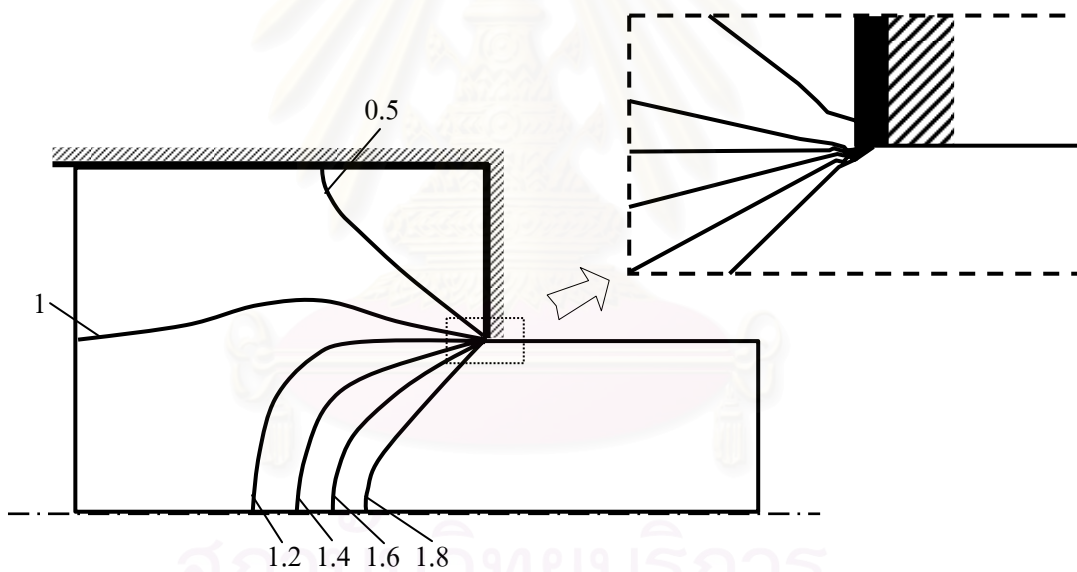
รูปที่ 7.9 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ในการปรับเปลี่ยนขนาดครั้งที่ 2



รูปที่ 7.10 ผลการกระจายความเร็วที่แบบจำลองการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2



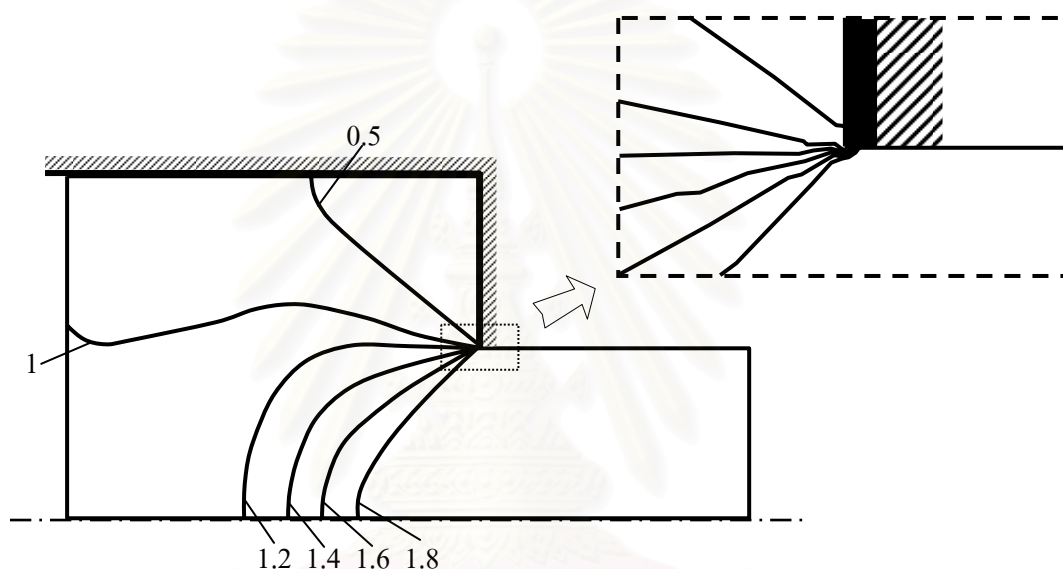
รูปที่ 7.11 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ในการปรับเปลี่ยนขนาดครั้งที่ 3



รูปที่ 7.12 ผลการกระจายความเร็วที่แบบจำลองการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 3

ผลการกระจายความเร็วจากการใช้โปรแกรม MTFLOW ของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ทั้ง 4 โดยรวมจะมีลักษณะไม่แตกต่างกัน แต่หากดูที่ภาพขยายตรงบริเวณปลายแม่พิมพ์จะพบว่าเส้นชั้นของความเร็วจะขยับเข้าสู่ตำแหน่งปลายแม่พิมพ์เมื่อขนาดเอลิเมนต์ตรงบริเวณนั้นมีขนาดเล็กลงเรื่อยๆตามการปรับขนาด และหากเปรียบเทียบผลของแบบจำลองการปรับขนาดครั้งสุดท้ายกับผลที่ไม่ได้ใช้เทคนิคการปรับขนาดของเอลิเมนต์ที่มีแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ดังรูปที่ 5.5 และผลในรูปที่ 5.7 โดยนำผลมาแสดงในลักษณะการเพิ่มภาพขยายอีกครั้งในรูปที่ 7.13 จะพบว่าผลของการกระจาย

ความเร็วมีลักษณะที่แทบจะไม่แตกต่างกัน แต่หากเปรียบเทียบจำนวนจุดต่อของแบบจำลองดังกล่าว จะมีจำนวนจุดต่อความเร็ว 2337 จุด จุดต่อความดัน 613 จุด ทำให้เกิดจำนวนสมการในระบบทั้งสิ้น 5287 สมการ ในขณะที่แบบจำลองที่ใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติจะมีจำนวนจุดต่อความเร็วเพียง 1034 จุด จุดต่อความดัน 276 จุด เกิดจำนวนสมการในระบบ 2344 สมการ ซึ่งแตกต่างกันมากกว่าสองเท่า ผลการเปรียบเทียบทำให้เห็นข้อดีของการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติได้อย่างชัดเจนในเรื่องของการช่วยให้เกิดการประหยัดเวลาในการคำนวณและหน่วยความจำมากที่สุดแต่ยังคงได้ผลการคำนวณที่ดีที่สุด

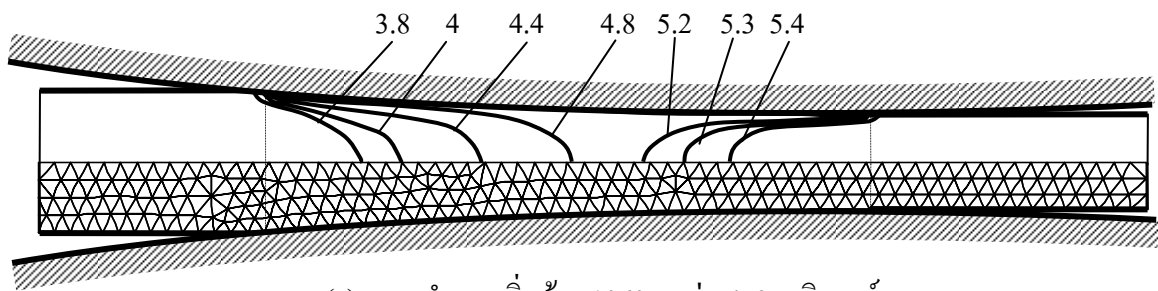


รูปที่ 7.13 ผลการกระจายความเร็วของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ในรูปที่ 5.5

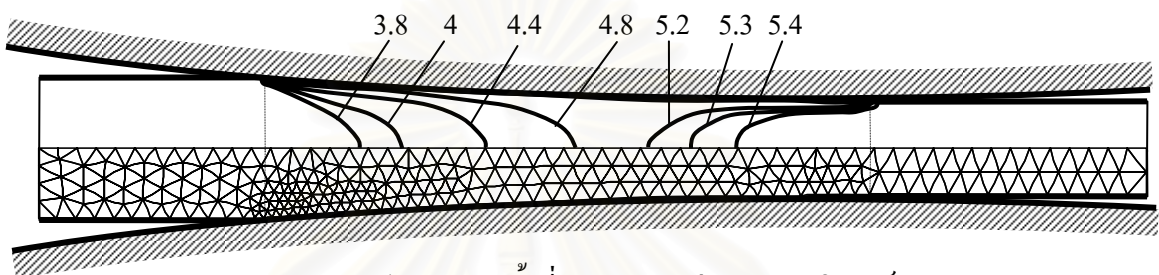
## 7.5 การวิเคราะห์การรีดโลหะแผ่นโดยใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

ในหัวข้อนี้จะทำการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเข้ากับปัญหาการรีดโลหะแผ่น โดยใช้แบบจำลองที่ได้คำนวณไว้แล้วในหัวข้อ 6.3.1 คือมีอัตราส่วนการลดขนาด 0.33 ความหนาของโลหะแผ่น 0.5 cm รัศมีลูกรีด 29 cm ค่าความเค้นเฉือนครากของโลหะเท่ากับ 1000 kg/cm<sup>2</sup> เพื่อทำการตรวจสอบผลการลู่เข้าของการกระจายความเร็ว เนื่องจากว่าจุดที่เริ่มสัมผัสระหว่างโลหะแผ่นและลูกรีดจะเป็นจุดเปลี่ยนที่มีการเปลี่ยนแปลงความชันของความเร็ว (Velocity Gradient) สูง ดังนั้นบริเวณนี้จึงสมควรที่จะมีความถี่ของเอลิเมนต์สูงเพื่อที่จะได้ผลเฉลยที่ดี สังเกตได้จากรูปที่ 7.14 จะพบว่าผลของการกระจายความเร็วจะค่อยๆลู่เข้าสู่บริเวณจุดเริ่มต้นสัมผัส

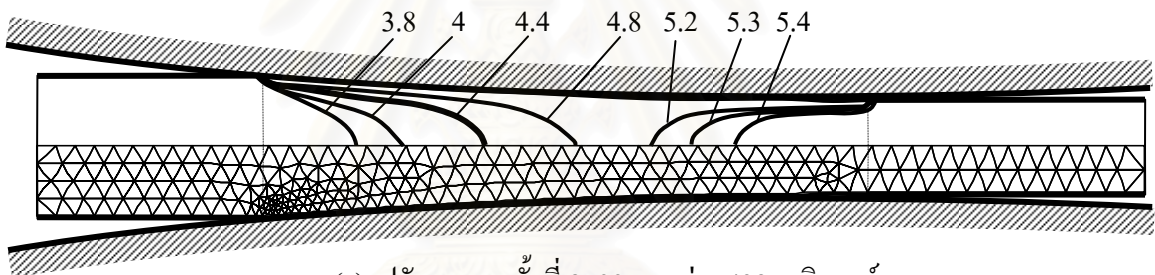




(a) แบบจำลองเริ่มต้น 1060 จุดต่อ 459 เอลิเมนต์

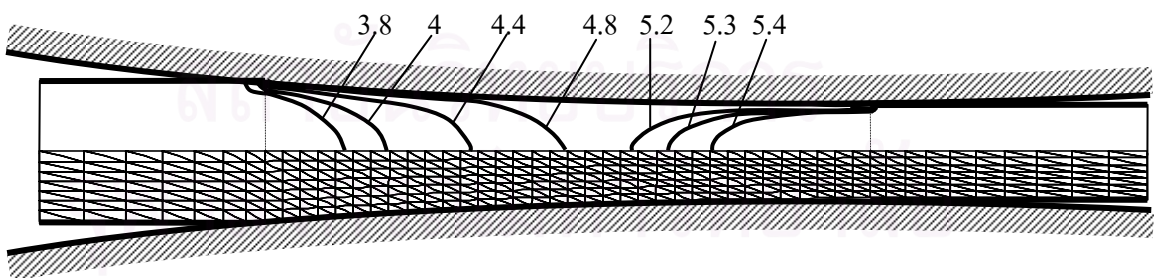


(b) ปรับขนาดครั้งที่ 1 1037 จุดต่อ 452 เอลิเมนต์



(c) ปรับขนาดครั้งที่ 2 995 จุดต่อ 432 เอลิเมนต์

รูปที่ 7.14 ผลการกระจายความเร็วและแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่การปรับขนาดครั้งต่างๆ



รูปที่ 7.15 ผลการกระจายความเร็วและแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์แบบสม่ำเสมอ

และหากเปรียบเทียบผลที่ได้จากเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ กับผลจากการสร้างแบบจำลองที่มีการแบ่งเอลิเมนต์แบบสม่ำเสมอซึ่งรูปที่ 7.15 จะพบว่าผลการกระจายความเร็วที่ตำแหน่งเริ่มต้นสัมผัสของแบบจำลองที่ทำการสร้างเอลิเมนต์ขึ้นเองจะไม่ค่อยดีนักเมื่อเปรียบเทียบกับแบบจำลองที่ได้จากเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ เนื่องจากเอลิเมนต์บริเวณดังกล่าวมีขนาดใหญ่เกินกว่าที่จะรองรับการเปลี่ยนแปลงของความชันที่มีมากได้ ส่วนผลการกระจายโดยรวมแล้วค่อนข้างใกล้เคียงกันมาก แต่หากเปรียบเทียบจำนวนเอลิเมนต์พบว่า แบบจำลองการปรับขนาดครั้งสุดท้ายมีจำนวนจุดต่อความเร็ว 995 จุด จุดต่อความดัน 282 จุด จำนวนเอลิเมนต์ 432 เอลิเมนต์ สามารถคำนวณจำนวนสมการในระบบได้เท่ากับ 2272 สมการ ส่วนแบบจำลองแบบสม่ำเสมอที่สร้างขึ้นเองมีจำนวนจุดต่อความเร็ว 1545 จุด จุดต่อความดัน 416 จุด จำนวนเอลิเมนต์ 714 เอลิเมนต์ จำนวนสมการในระบบ 3506 สมการ จะทำให้เห็นข้อได้เปรียบของการใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติในการลดจำนวนสมการในระบบ ทำให้ประหยัดเวลาในการคำนวณและหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ แต่ผลที่ได้โดยรวมกลับไม่แตกต่างกัน ผลที่ได้จากเทคนิคการปรับขนาดกลับดีกว่าในบริเวณจุดเริ่มสัมผัส ดังที่กล่าวไว้ข้างต้น



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บทที่ 8

### บทสรุป ปัญหาที่พบ และข้อเสนอแนะ

#### 8.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ทำการศึกษาถึงพฤติกรรมการไหลของโลหะที่เกิดจากการอัดรีด (Extrusion) ใน 2 มิติแบบความเครียดในระนาบ (Plane Strain) โดยการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการแก้ปัญหา โดยภาวะการอัดรีดนี้จะเกิดการเปลี่ยนรูปเชิงพลาสติก (Plastic Deformation) กับโลหะที่ใช้ในการอัดรีด (Billet) กล่าวคือโลหะจะมีพฤติกรรมเหมือนกับของไหล แต่เป็นของไหลแบบนอนนิวโทเนียน (Non Newtonian) ค่าความหนืดของของไหลประเภทนี้จะไม่คงที่ แต่จะเปลี่ยนแปลงขึ้นอยู่กับค่าความเค้นครากและความสัมพันธ์ของความเร็วในระบบ โดยธรรมชาติของโลหะ ความเค้นครากจะเปลี่ยนแปลงขึ้นอยู่กับปัจจัยหลักคือ อุณหภูมิ ความเครียด และอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียด ในการเปลี่ยนรูปของโลหะจะทำให้มีความร้อนเกิดขึ้นเองภายในระบบ ซึ่งก็คือความร้อนที่เกิดจากการเปลี่ยนรูปของโลหะนั่นเอง ผสมกับความร้อนที่เกิดจากการนำ (Conduction) และการพา (Convection) ที่เกิดจากการไหลของโลหะภายในระบบ และจะเป็นผลให้อุณหภูมิสูงขึ้นซึ่งจะไปกระทบต่อค่าความแข็งแรงของวัสดุอีกทางหนึ่ง ซึ่งพฤติกรรมต่างๆเหล่านี้จะขึ้นอยู่กับสมการเชิงอนุพันธ์จำนวนทั้งสิ้น 4 สมการ คือสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม 2 สมการ สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล 1 สมการ และสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงาน 1 สมการ ซึ่งจะเป็นระบบสมการแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear) ดังนั้นจึงต้องประยุกต์กระบวนการทำซ้ำเพื่อให้ได้มาซึ่งผลลัพธ์ที่เข้าสู่คำตอบที่ถูกต้องอีกทั้งการอัดรีดในลักษณะนี้สามารถทำการวิเคราะห์ได้ที่สภาวะอยู่ตัวของระบบ

ในการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ดังกล่าวได้ทำการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยการประยุกต์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับปัญหาโดยใช้เอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยม และได้ทำการประยุกต์โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้ภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) ใช้ชื่อโปรแกรมว่า MTFflow เพื่อทำการคำนวณหาตัวไม่รู้ค่าคือ ความเร็ว ความดัน และอุณหภูมิที่จุดต่อ (Nodes) ต่างๆภายในระบบ โปรแกรมที่ประยุกต์ขึ้นสามารถแบ่งได้เป็น 2 ลักษณะคือ MTFflow(v1) สำหรับกรณีที่ไม่คำนึงถึงความร้อนในระบบ และ MTFflow(v2) สำหรับกรณีที่คำนึงถึงความร้อนในระบบ ผลของแรงดันที่ใช้ในการอัดรีดที่คำนวณได้ ถูกใช้ในการเปรียบเทียบกับผลจากทฤษฎีสลิปไลน์และผลการทดลองเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม ซึ่งได้ผลเป็นที่น่าพึงพอใจ

โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นนี้ได้นำไปใช้วิเคราะห์การอัดรีดในลักษณะต่างๆคือการอัดรีดแบบทางออกทางเดียวแบบสมมาตร การอัดรีดแบบทางออกหลายทาง และการอัดรีดแบบลดระดับ เพื่อศึกษาถึงแรงดันอัดรีดที่ใช้ รวมทั้งผลการกระจายความเร็ว ความดัน และอุณหภูมิ รวมทั้งผลเวกเตอร์ความเร็วภายในโดเมนปัญหา นอกจากนี้โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นยังสามารถใช้ในการหาความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนการลดขนาดและแรงดันอัดรีดที่ใช้ อีกทั้งยังพบว่าความเร็วที่ใช้ในการอัดรีดจะไม่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงแรงดันอัดรีดหากกำหนดให้ค่าความเค้นครากคงที่ แต่หากความเค้นครากขึ้นอยู่กับอุณหภูมิเพียงอย่างเดียวจะพบว่าแรงดันอัดรีดที่ใช้จะยิ่งลดลงหากใช้ความเร็วมากขึ้นเนื่องจากการเพิ่มของอุณหภูมิภายในส่งผลให้ค่าความเค้นครากลดลงนั่นเอง นอกจากนี้ยังพบว่าความสัมพันธ์ระหว่างแรงดันอัดรีดและค่าความเค้นเฉือนคราก จะมีความสัมพันธ์กันในลักษณะเชิงเส้น กล่าวคือค่าของ  $P/\tau_{yield}$  จะเป็นค่าคงที่ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีสลิปไลน์ นอกจากนี้ยังได้ทำการศึกษาถึงผลกระทบของแรงเสียดทานที่ผิวสัมผัสระหว่างโลหะอัดรีดและแท่นบรรจุต่อการกระจายความเร็วและแรงดันอัดรีดที่ใช้ ซึ่งผลสอดคล้องกับความเป็นจริงที่ว่าหากแรงเสียดทานที่ผิวสัมผัสเพิ่มขึ้นจะส่งผลให้ต้องใช้แรงดันเพิ่มมากขึ้น

นอกจากการอัดรีดแล้ว ยังใช้โปรแกรมในการวิเคราะห์การรีดโลหะแผ่น (Sheet Metal Rolling) เพื่อหาแรงรีดและแรงบิดรีด (Rolling Force and Torque) โดยทำการตรวจสอบความถูกต้องโดยใช้ค่าทั้งสองเมื่อเปรียบเทียบกับทฤษฎีของ Alexander และ Ford ซึ่งผลที่ได้เป็นที่น่าพอใจ แล้วจึงนำไปวิเคราะห์หาแรงรีดและแรงบิดรีดที่อัตราส่วนการลดขนาดต่างๆเพื่อเปรียบเทียบกับผลการทดลองของ Sim [24] รวมทั้งเปรียบเทียบผลอุณหภูมิกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้เอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมของ O.C. Zienkiewicz [17] ซึ่งผลที่ได้แตกต่างกันในระดับที่ยอมรับได้ นอกจากนี้ยังได้ทำการศึกษาถึงผลของการความเร็วการรีดต่อการเพิ่มขึ้นและการกระจายอุณหภูมิภายใน

ในตอนสุดท้ายของวิทยานิพนธ์ได้ทำการประยุกต์เทคนิคการปรับเปลี่ยนขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเพื่อที่จะให้ได้ผลเฉลยที่ดีที่สุดอีกทั้งประหยัดเวลาในการคำนวณและประหยัดหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ให้มากที่สุด โดยอาศัยหลักการที่ว่าบริเวณใดมีอัตราการเปลี่ยนแปลงความชันสูงบริเวณนั้นควรมีความถี่ของเอลิเมนต์มากกว่าบริเวณที่มีอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันต่ำ ซึ่งได้ยกตัวอย่างการอัดรีดแบบอัตราส่วนการลดขนาด 0.5 และการรีดโลหะแผ่นที่มีอัตราส่วนการลดขนาด 0.33 ซึ่งทั้งสองปัญหาจะเห็นผลการลู่เข้าของการกระจายค่าตอบอย่างชัดเจน ซึ่งผลเฉลยที่ได้จะดีกว่ากรณีที่ไม่ได้ใช้เทคนิคการปรับเปลี่ยนขนาดของเอลิเมนต์ อีกทั้งจำนวนสมการของปัญหายังน้อยกว่าทำให้ประหยัดเวลาในการคำนวณและหน่วยความจำของเครื่องได้เป็นอย่างมาก

## 8.2 ปัญหาที่พบ

เนื่องจากว่าแนวความคิดของวิธานิพนธ์เป็นการประยุกต์เอาทฤษฎีทางด้านกลศาสตร์ของไหลมาใช้ในการแก้ปัญหาทางด้านกลศาสตร์ของแข็ง ผนวกกับการประยุกต์เอาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาใช้แก้ปัญหา ดังนั้นการทำความเข้าใจลักษณะทางกายภาพของปัญหาและความเข้าใจในการผสมผสานศาสตร์ทั้งหมดเข้าด้วยกันจึงเป็นสิ่งที่จำเป็น และเนื่องจากปัญหาเป็นแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear) จึงต้องมีกระบวนการทำซ้ำ (Iteration) เพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้อง ดังนั้นหากมีความผิดพลาดเพียงเล็กน้อยก็จะนำไปสู่การลู่ออกของคำตอบ โดยปัญหาที่พบส่วนใหญ่จะเป็นปัญหาที่มาจาก การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ไม่ถูกต้อง ซึ่งนำไปสู่การประดิษฐ์โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ไม่ถูกต้อง หรือหากว่าถูกต้องในทุกขั้นตอนแต่ขาดความเข้าใจในระเบียบวิธีเชิงตัวเลขก็จะนำไปสู่การลู่ออกของคำตอบเช่นเดียวกัน ดังเช่นค่าของความหนืดในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ จะเห็นว่าหากระบบมีอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียดประสิทธิผลต่ำมากจนเข้าใกล้ 0 จะนำไปสู่ค่าของความหนืดที่เข้าสู่อนันต์ ซึ่งเป็นผลทำให้เกิดการลู่ออกของคำตอบ เช่นนี้เป็นต้น ดังนั้นในการทำงานทุกขั้นตอนไม่ว่าจะเป็นการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ หรือการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ต้องกระทำอย่างระมัดระวัง และต้องมีการตรวจสอบในทุกขั้นตอนอย่างถี่ถ้วน

## 8.3 ข้อเสนอแนะ

เนื่องจากวิธานิพนธ์ฉบับนี้เป็นพื้นฐานสำคัญของการวิเคราะห์การไหลของโลหะ ดังนั้นสามารถอาศัยหลักการเดียวกันนี้ขยายผลในการวิเคราะห์การไหลของโลหะในด้านอื่นๆ รวมถึงการพัฒนาโปรแกรมที่มีอยู่ให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น ทั้งหมดสามารถกระทำได้ในหลายแนวทางด้วยกัน ดังเช่น

1. การเลือกใช้เอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยม (Quadrilateral Element) สี่จุดต่อ หรือสี่เหลี่ยมแปดจุดต่อ ก็เป็นอีกทางเลือกหนึ่งที่จะทำให้ประสิทธิภาพในการคำนวณสูงขึ้น เนื่องจากเอลิเมนต์ประเภทนี้จะให้ผลเฉลยที่ใกล้เคียงกันกับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบหกจุดต่อ แต่สิ้นเปลืองจำนวนสมการน้อยกว่า
2. สามารถใช้ทฤษฎีในลักษณะเดียวกันนี้สำหรับวิเคราะห์การอัดรีดทรงกระบอกโดยทำการเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ทั้ง 4 สมการให้อยู่ในรูปของระบบพิกัดแบบทรงกระบอก (Cylindrical Coordinate) และใช้เอลิเมนต์แบบสมมาตรรอบแกน (Axisymmetric Element)
3. สามารถประยุกต์เอลิเมนต์แบบสามมิติเพื่อใช้ในการคำนวณการอัดรีดในสามมิติ ซึ่งจะเกิดประโยชน์อย่างมากเนื่องจากการอัดรีดแบบสามมิตินี้อยู่มาหลายในอุตสาหกรรมการอัดรีด



4. สามารถพัฒนาโปรแกรมให้สามารถวิเคราะห์การอัดรีดในลักษณะของภาวะชั่วครู่ (Transient State) ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นของการวิเคราะห์ปัญหาการอัดขึ้นรูป (Forging) และการปั๊มขึ้นรูป (Stamping)
5. สามารถทำการประยุกต์การถ่ายเทความร้อนผ่านขอบของปัญหาไม่ว่าจะเป็นการอัดรีดหรือการรีดสู่อากาศ และสู่แท่นบรรจุ หรือสู่ลูกรีดสำหรับปัญหาการรีด เพื่อที่จะศึกษาการกระจายความร้อนทั้งในโลหะเองและแท่นบรรจุหรือลูกรีด ซึ่งจะเป็ประโยชน์ในการนำไปออกแบบแท่นบรรจุและแม่พิมพ์ รวมทั้งลูกรีดสำหรับการรีดโลหะแผ่น



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



## รายการอ้างอิง

1. ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร:สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2542.
2. ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2543.
3. ปราโมทย์ เดชะอำไพ. เอกสารประกอบการสอนวิชาการแก้ปัญหาพลศาสตร์การไหลโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2543.
4. จิตติน ตริพุทธรัตน์. การศึกษาการไหลผ่านวัตถุด้วยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์. วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2539.
5. สุพัฒน์พงษ์ สิกขาบัณฑิต. เทคนิคการปรับขนาดไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการวิเคราะห์การไหลแบบหนึ่ง. วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2541.
6. วรสิทธิ์ กาญจนกิจเกษม. ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลแบบไม่อัดตัวชนิดหนึ่ง ที่ สถานะอยู่ตัว. วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2541.
7. Oscar Hoffman and George Sachs. Introduction to The Theory of Plasticity for Engineers. New York: McGraw-Hill, 1953.
8. W. Johnson and P.B. Melor. Engineering Plasticity. New York: John Wiley & Sons, 1983.
9. Robert H. , Wagoner and Jean-Loop Chenot. Fundamentals of Metal Forming. New York: John Wiley & Sons, 1996.
10. Taylan Altan, Soo-ik Oh and Harold L. Gegel . Metal Forming Fundamentals and Applications. U.S.A.: American Society for Metals, 1986.
11. William F. Hosford and Robert M. Caddell. Metal Forming Mechanics and Metallurgy. U.S.A.: Prentice-Hall International, 1983.
12. Kurt Lange. Handbook of Metal Forming. New York: McGraw-Hill, 1985.
13. Norman E. Dowling. Mechanical Behavior of Materials. U.S.A.: Prentice-Hall , 1993.
14. George E. Dieter. Mechanical Metallurgy. New York: McGraw-Hill, 1988.
15. J.F.T. Pittman, O.C.Zienkiewicz, R.D. Wood, J.M.Alexander. Numerical Analysis of Forming Processes. New York: John Wiley & Sons, 1984.

16. Shiro Kobayashi, Soo-Ik Oh and Taylan Altan. Metal Forming and The Finite-Element Method. Oxford: Oxford University press, 1989.
17. O.C.Zienkiewicz and R.L.Taylor. The Finite Element Method. Forth edition. NewYork: McGraw-Hill, 1991.
18. W.Johnson and H.Kudo. The Mechanics of Metal Extrusion. Manchester: Manchester University Press, 1962.
19. A. Tselikov, Translated from the Russian by W.U.Sirk . Stress and Strain in Metal Rolling. Moscow: MIR Publishers, 1967.
20. Dechaumpai P. and Janphaisaeng P.. A Finite Element Method for Analysis of High Speed Compressible Flow. เสนอในการประชุมใหญ่ทางวิชาการและนิทรรศการทางวิศวกรรม ประจำปี 2540 ศูนย์ประชุมแห่งชาติสิริกิติ์ วันที่ 20-23 พฤศจิกายน 2540.
21. P.Perzyna. Fundamental Problems in Visco-Plasticity. Recent Advances in Applied Mechanics. Chap.9 pp.243-377 . New york: Academic Press, 1966.
22. Huge Ford and J.M.Alexander. Simplified Hot-Rolling Calculations. Journal of the Institute of Metals. Vol.92 (1964): pp.397-404.
23. W.Johnson. Experiments in Plane-Strain Extrusion. Journal of the Mechanics of Solids. Vol.4 (1956): pp.269-282.
24. R.B.Sims. The Calculation of Roll Force and Torque in Hot Rolling Mills. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Vol.168 (1954): pp.191-200.
25. O.C.Zienkiewicz and P.N.Godbole. Flow of Plastic and Visco-Plastic Solids with Special Reference to Extrusion and Forming Processes. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol.8 (1974): pp.3-16.
26. J.M. Alexander. On the Theory of Rolling. Proc.R.Soc.Lond.A. Vol. 326 (1972): pp.535-563
27. Ginzburg,Vladimir B.. Sheet-Rolling Technology. New York: Marcel Dekker, 1989.
28. Dechaumphai, P. Adaptive Finite Element Technique for Heat Transfer Problems. Energy,Heat and Mass Transfer. Vol.17(1995): pp.87-94.
29. Dechaumphai, P. and Janphaisaeng, P.. Adaptive Finite Element Technique for High-speed Compressible Flows. Thammasat International Journal of Science and Technology. Vol.3 No.1 (1998)
30. Kenneth H. Huebner, Earl A. Thornton and Ted G. Byrom. The Finite Element Method for Engineer. Third Edition. New York: John Wiley & Sons, 1995.

31. D.C. Zienkiewicz, E. Onate, J.C. Heinrich. Plastic Flow in Metal Forming. Applications of Numerical Method to Forming Processes. New York: ASME, 1978.



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ภาคผนวก

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ภาคผนวก ก

# โปรแกรมคอมพิวเตอร์ MTFLOW(v1)

### ก.1 รายละเอียดโปรแกรมคอมพิวเตอร์

```
PROGRAM MTFLOW_v1

C *****
C *
C * A FINITE ELEMENT COMPUTER PROGRAM FOR SOLVING THE METAL FLOW *
C * UNDER PLANE STRAIN EXTRUSION PROBLEM. *
C *
C *
C * CHAIYARIT OUPICHIT *
C *
C *****

C THE VALUES DECLARED IN THE PARAMETER STATEMENT BELOW SHOULD
C BE ADJUSTED ACCORDING TO THE SIZE OF THE PROBLEMS AND TYPES
C OF COMPUTERS:
C     MXPOIV = MAXIMUM NUMBER OF VELOCITY NODES IN THE MODEL
C     MXPOIP = MAXIMUM NUMBER OF PRESSURE NODES IN THE MODEL
C     MXELE  = MAXIMUM NUMBER OF ELEMENTS IN THE MODEL
C
C PARAMETER (MXPOIV=971, MXPOIP=264, MXELE=444)
C PARAMETER (MXNEQ=2*MXPOIV+MXPOIP)

C IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

C DIMENSION COORD(MXPOIV,2), TEXT(20)
C DIMENSION UVEL(MXPOIV), VVEL(MXPOIV), PRES(MXPOIV)
C DIMENSION SYSK(MXNEQ,MXNEQ), SYSR(MXNEQ), SOL(MXNEQ)
C DIMENSION VISCOUS(MXELE), SOL_O(MXNEQ), STRINV(MXELE)

C CHARACTER*20 NAME1, NAME2
C CHARACTER*10 ATIME,ADATE

C INTEGER INTMAT(MXELE,6)
C INTEGER IBCU(MXPOIV), IBCV(MXPOIV), IBCP(MXPOIV)

C *****
C READ INPUT FILE
C *****
C OPEN INPUT FILE
C
10 WRITE(6,20)
20 FORMAT(/,' PLEASE ENTER THE INPUT FILE NAME:', /)
   READ(5,'(A)',ERR=10) NAME1
   OPEN(UNIT=7, FILE=NAME1, STATUS='OLD', ERR=10)
C
```

```

C      OPEN OUTPUT FILES
C
11 WRITE (6,21)
21 FORMAT(/, ' PLEASE ENTER THE RESULT FILE NAME:',/)
   READ (5, ' (A)',ERR=11) NAME2
   OPEN (UNIT=8 ,FILE=NAME2, STATUS='NEW' ,ERR=11)
   OPEN (UNIT=9 ,FILE='CHECK.OUT',STATUS='UNKNOWN')
   OPEN (UNIT=10,FILE='CONV.OUT' ,STATUS='UNKNOWN')
C
C      READ TITLE OF COMPUTATION:
C
   READ (7,*) NLines
   DO 100 ILINE=1,NLines
   READ (7,1) TEXT
1   FORMAT (20A4)
100 CONTINUE
C
C      READ INPUT DATA:
C
   READ (7,1) TEXT
   WRITE (9,104)
104 FORMAT (' NPOIV NPOIP NELEM ')
   READ (7,*) NPOIV, NPOIP, NELEM
   WRITE (9,105) NPOIV, NPOIP, NELEM
105 FORMAT (4I8)
   IF (NPOIV.GT.MXPOIV) WRITE (6,110) NPOIV
110 FORMAT(/, ' PLEASE INCREASE THE PARAMETER MXPOIV TO',I5)
   IF (NPOIV.GT.MXPOIV) STOP
   IF (NPOIP.GT.MXPOIP) WRITE (6,120) NPOIP
120 FORMAT(/, ' PLEASE INCREASE THE PARAMETER MXPOIP TO',I5)
   IF (NPOIP.GT.MXPOIP) STOP
   IF (NELEM.GT.MXELE) WRITE (6,130) NELEM
130 FORMAT(/, ' PLEASE INCREASE THE PARAMETER MXELE TO',I5)
   IF (NELEM.GT.MXELE) STOP
C
C      READ MATERIAL PROPERTIES:
C
   READ (7,1) TEXT
   WRITE (9,134)
134 FORMAT (' YIELD STRESS INITIAL VISCOSITY MAX ITERATION')
   READ (7,*) YIELD , VIS ,MITER
   WRITE (9,135) YIELD , VIS ,MITER
135 FORMAT (2E12.4, I4)
C
C      READ NODAL COORDINATES, BOUNDARY CONDITIONS, THEIR VALUES:
C      REQUIREMENT: MAIN NODES MUST BE NUMBERED FIRST
C
   READ (7,1) TEXT
   WRITE (9,138) NPOIV
138 FORMAT (' NODAL INFORMATION (NODE NO., U-V-P BC, X-Y COORD,',
*          ' U-V-P VALUES): [' , I4, ']' )
   DO 150 IP=1,NPOIV
   READ (7,*) I, IBCU(I), IBCV(I), IBCP(I),
*          (COORD(I,K), K=1,2), UVEL(I), VVEL(I), PRES(I)
   WRITE (9,152) I, IBCU(I), IBCV(I), IBCP(I),
*          (COORD(I,K), K=1,2), UVEL(I), VVEL(I), PRES(I)
152 FORMAT (I6, 3I4, 5E12.4)
   IF (I.NE.IP) WRITE (6,155) IP
155 FORMAT(/, ' NODE NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
   IF (I.NE.IP) STOP
150 CONTINUE
C
C      READ ELEMENT NODAL CONNECTIONS:
C

```



```

READ(7,1) TEXT
WRITE(9,157) NELEM
157 FORMAT(' ELEMENT NODAL CONNECTIONS: [, I4, ']')
DO 160 IE=1,NELEM
  READ(7,*) I, (INTMAT(I,J), J=1,6)
  WRITE(9,162) I, (INTMAT(I,J), J=1,6)
162 FORMAT(7I8)
  IF(I.NE.IE) WRITE(6,165) IE
165 FORMAT(/, ' ELEMENT NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
  IF(I.NE.IE) STOP
160 CONTINUE

WRITE(6,220) NPOIV, NPOIP, NELEM
220 FORMAT(/, ' *** THE FINITE ELEMENT MODEL CONSISTS OF:', /,
*          '          NUMBER OF VELOCITY NODES      =', I6, /,
*          '          NUMBER OF PRESSURE NODES       =', I6, /,
*          '          NUMBER OF ELEMENTS             =', I6 )

C
C   BUILD UP THE ELEMENTS VISCOSITY FOR THE FIRST ITERATION
C
DO 226 IE = 1,NELEM
  VISCOUS(IE) = VIS
226 CONTINUE

C
C   ESTABLISH ALL ELEMENT MATRICES AND ASSEMBLE THEM TO FORM
C   FORM UP SYSTEM EQUATIONS
C
C   *****
C   MAIN ITERATION
C   *****

DO 1000 LOOP = 1,MITER

  WRITE(6,225) LOOP
225 FORMAT (/,10X,' *****',
*          /,10X,' ***** ITERATION NO.',I2,' *****',
*          /,10X,' *****')

  NEQ = 2*NPOIV + NPOIP
  DO 180 I=1,NEQ
    SYSR(I) = 0.
180 CONTINUE
  DO 190 I=1,NEQ
    DO 190 J=1,NEQ
      SYSK(I,J) = 0.
190 CONTINUE

  WRITE(6,230)
230 FORMAT(/, ' *** ESTABLISHING ELEMENT MATRICES AND',
*          ' ASSEMBLING ELEMENT EQUATIONS ***' )
  CALL TRI(NPOIV, NPOIP, NELEM , NEQ,
*        VISCOUS, COORD, INTMAT, INTMATF,
*        SYSK, SYSR, MXPOIV, MXELE , MXNEQ)

C
C   APPLY BOUNDARY CONDITIONS OF NODAL VELOCITIES AND PRESSURE
C
WRITE(6,240)
240 FORMAT(/, ' *** APPLYING BOUNDARY CONDITIONS OF NODAL',
*          ' VELOCITIES AND PRESSURES ***' )
  CALL APPLYBC(NPOIV, NPOIP, NEQ, IBCU, IBCV, IBCP,
*            SYSK, SYSR, UVEL, VVEL, PRES, MXPOIV,
*            MXPOIP, MXNEQ )

C
C   SOLVE A SET OF SIMULTANEOUS SYSTEM EQUATIONS FOR SOLUTIONS

```

```

C
  WRITE(6,250)
250 FORMAT(/,' *** SOLVING A SET OF SIMULTANEOUS EQS. FOR',
*         ' VELOCITY AND PRESSURE SOLUTIONS ***' )
  WRITE(6,260) NEQ
260 FORMAT(5X,'( TOTAL OF', I5,' EQUATIONS TO BE SOLVED )')
  CALL GAUSS(NEQ, SYSK, SYSR, SOL, MXNEQ)
C
C   CHECK CONVERGENCE
C
  IF (LOOP.EQ.1) GOTO 900
  WRITE(6,670)
670 FORMAT(/,'*** CHECKING CONVERGENCE ***')
  CALL CONVERGE (MXNEQ,MXPOIV,MXPOIP,SOL,SOL_O,TOLV,TOLP
*             ,NPOIV,NPOIP,NEQ)
C
C   PRINT OUT TOLERANCE
C
  IF(LOOP.EQ.2) THEN
  WRITE(10,500)
500 FORMAT (/,12X,'*****',/,
*         12X,'*           MTFLOW(v1)           *',/,
*         12X,'*           VELOCITY AND PRESSURE TOLERANCE *',/,
*         12X,'*****')
  WRITE(10,505)
505 FORMAT(/,5X,'LOOP',10X,'VELOCITY TOLERANCE',10X,
*         'PRESSURE TOLERANCE')
  ENDIF

  WRITE(10,510) LOOP,TOLV,TOLP
510 FORMAT(5X,I3,13X,F12.4,16X,F12.4)

  WRITE(6,370) TOLV,TOLP
370 FORMAT(/,' VELOCITY TOLERANCE =',F12.4,/,
*         ' PRESSURE TOLERANCE =',F12.4 )

  IF (TOLV.LE.1.0.AND.TOLP.LE.1.0) GOTO 1100

900 CONTINUE
C
C   SOLVE FOR NEW ELEMENT VISCOSITY
C
  WRITE(6,265)
265 FORMAT(/,'*** SOLVING FOR THE NEW SET OF VISCOSITY ***')
  CALL ELEVIS (NPOIV,NPOIP,NELEM,NEQ,COORD,INTMAT,SOL
*           ,VISCOUS,MXPOIV,YIELD,MXELE,STRINV)
C
C   SAVE THE RESULTS HISTORY
C
  DO 910 I=1,NEQ
  SOL_O(I)=SOL(I)
910 CONTINUE

1000 CONTINUE
C
C   WHEN THE MAIN ITERATION REACH THE MITER PARAMETER
C
  WRITE (6,1010)
1010 FORMAT (/,'***** SOLUTIONS DO NOT CONVERGE *****')
  STOP

1100 CONTINUE
C

```

```

C *****
C PRINT OUT SOLUTIONS
C *****
C ROUND-OFF SOLUTION VALUES FOR NEAT OUTPUT:
C
C ROFF = 1.E-6
C DO 890 IEQ=1,NEQ
C IF (ABS(SOL(IEQ)).LT.ROFF) SOL(IEQ) = 0.
890 CONTINUE
C
C WRITE OUTPUT FILE
C
C WRITE(8,850)
850 FORMAT(/,8X,'*****',/,
*      8X,'* MTFLOW(V1) *',/,
*      8X,'* NODAL VELOCITY AND PRESSURE SOLUTIONS *',/,
*      8X,'*****')
C
C DATE AND TIME RECORD
C
C CALL DATE(ADATE)
C CALL TIME(ATIME)
C WRITE(8,855)ADATE,ATIME
855 FORMAT(/,8X,A10,3X,A10 )
C
C WRITE(8,860) NPOIV,NPOIP
860 FORMAT(/,8X,'NUMBER OF VELOCITY NODES : ',I5,/,
*      8X,'NUMBER OF PRESSURE NODES : ',I5)
C
C WRITE(8,800)
800 FORMAT(/,' NODE U-VELOCITY V-VELOCITY PRESSURE',/)
C
C DO 810 I=1,NPOIP
C WRITE(8,820) I , SOL(I) , SOL(I+NPOIV) , SOL(I+2*NPOIV)
820 FORMAT(I6,3E16.6 )
810 CONTINUE
C
C DO 830 I=NPOIP+1,NPOIV
C WRITE(8,840) I , SOL(I) , SOL(I+NPOIV)
840 FORMAT(I6,2E16.6)
830 CONTINUE
C
C STOP
C END
C -----
C
C SUBROUTINE APPLYBC(NPOIV, NPOIP, NEQ, IBCU, IBCV, IBCP,
* SYSK, SYSR, UVEL, VVEL, PRES, MXPOIV,
* MXPOIP, MXNEQ)
C
C APPLY BOUNDARY CONDITIONS FOR NODAL VELOCITIES AND PRESSURES
C WITH CONDITION CODES OF:
C 0 = FREE TO CHANGE (TO BE COMPUTED)
C 1 = FIXED AS SPECIFIED
C
C IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C DIMENSION SYSK(MXNEQ,MXNEQ), SYSR(MXNEQ)
C DIMENSION UVEL(MXPOIV), VVEL(MXPOIV), PRES(MXPOIV)
C
C INTEGER IBCU(MXPOIV), IBCV(MXPOIV), IBCP(MXPOIV)
C
C APPLY BOUNDARY CONDITIONS FOR NODAL U-VELOCITIES:

```

```

C      IEQ1 = 1
      IEQ2 = NPOIV
      DO 100 IEQ=IEQ1,IEQ2
      IEQU = IEQ
      IF(IBCUI(IEQU).EQ.0) GO TO 100
C
      DO 110 IR=1,NEQ
      IF(IR.EQ.IEQ) GO TO 110
      SYSR(IR) = SYSR(IR) - SYSK(IR,IEQ)*UVEL(IEQU)
      SYSK(IR,IEQ) = 0.
110 CONTINUE
C
      DO 120 IC=1,NEQ
      SYSK(IEQ,IC) = 0.
120 CONTINUE
      SYSK(IEQ,IEQ) = 1.
      SYSR(IEQ) = UVEL(IEQU)
C
100 CONTINUE
C
C      APPLY BOUNDARY CONDITIONS FOR NODAL V-VELOCITIES:
C
      IEQ1 = NPOIV + 1
      IEQ2 = 2*NPOIV
      DO 200 IEQ=IEQ1,IEQ2
      IEQV = IEQ - NPOIV
      IF(IBCUI(IEQV).EQ.0) GO TO 200
C
      DO 210 IR=1,NEQ
      IF(IR.EQ.IEQ) GO TO 210
      SYSR(IR) = SYSR(IR) - SYSK(IR,IEQ)*VVEL(IEQV)
      SYSK(IR,IEQ) = 0.
210 CONTINUE
C
      DO 220 IC=1,NEQ
      SYSK(IEQ,IC) = 0.
220 CONTINUE
      SYSK(IEQ,IEQ) = 1.
      SYSR(IEQ) = VVEL(IEQV)
C
200 CONTINUE
C
C      APPLY BOUNDARY CONDITIONS FOR NODAL PRESSURES:
C
      IEQ1 = 2*NPOIV + 1
      IEQ2 = NEQ
      DO 300 IEQ=IEQ1,IEQ2
      IEQP = IEQ - 2*NPOIV
      IF(IBCPI(IEQP).EQ.0) GO TO 300
C
      DO 310 IR=1,NEQ
      IF(IR.EQ.IEQ) GO TO 310
      SYSR(IR) = SYSR(IR) - SYSK(IR,IEQ)*PRES(IEQP)
      SYSK(IR,IEQ) = 0.
310 CONTINUE
C
      DO 320 IC=1,NEQ
      SYSK(IEQ,IC) = 0.
320 CONTINUE
      SYSK(IEQ,IEQ) = 1.
      SYSR(IEQ) = PRES(IEQP)
C
300 CONTINUE

```

```

C      RETURN
C      END
C-----
C      SUBROUTINE ASSMBLE(IE, INTMAT, AKELE, RELE, SYSK, SYSR,
*              NPOIV, NEQ, NELEM, MXNEQ, MXELE )
C
C      ASSEMBLE ELEMENT EQUATIONS INTO SYSTEM EQUATIONS
C
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C      DIMENSION AKELE(15,15), RELE(15)
C      DIMENSION SYSK(MXNEQ,MXNEQ), SYSR(MXNEQ)
C
C      INTEGER INTMAT(MXELE,6)
C
C      ASSEMBLING SYSTEM STIFFNESS MATRIX
C
C      CONTRIBUTION OF COEFFICIENTS ASSOCIATED WITH U & V VELOCITIES:
C
C      DO 100 I=1,6
C      DO 100 J=1,6
C      II = INTMAT(IE,I)
C      JJ = INTMAT(IE,J)
C      K = I + 6
C      L = J + 6
C      KK = NPOIV + II
C      LL = NPOIV + JJ
C      SYSK(II, JJ) = SYSK(II, JJ) + AKELE(I, J)
C      SYSK(II, LL) = SYSK(II, LL) + AKELE(I, L)
C      SYSK(KK, JJ) = SYSK(KK, JJ) + AKELE(K, J)
C      SYSK(KK, LL) = SYSK(KK, LL) + AKELE(K, L)
100 CONTINUE
C
C      CONTRIBUTION OF COEFFICIENTS ASSOCIATED WITH PRESSURE:
C
C      DO 200 I=1,6
C      DO 200 J=1,3
C      II = INTMAT(IE,I)
C      JJ = INTMAT(IE,J)
C      K = I + 6
C      L = J + 12
C      KK = NPOIV + II
C      LL = 2*NPOIV + JJ
C      SYSK(II, LL) = SYSK(II, LL) + AKELE(I, L)
C      SYSK(KK, LL) = SYSK(KK, LL) + AKELE(K, L)
C      SYSK(LL, II) = SYSK(LL, II) + AKELE(L, I)
C      SYSK(LL, KK) = SYSK(LL, KK) + AKELE(L, K)
200 CONTINUE
C
C      ASSEMBLING SYSTEM LOAD VECTOR
C
C      CONTRIBUTION OF VALUES ASSOCIATED WITH U & V VELOCITIES:
C
C      DO 300 I=1,6
C      II = INTMAT(IE,I)
C      K = I + 6
C      KK = NPOIV + II
C      SYSR(II) = SYSR(II) + RELE(I)
C      SYSR(KK) = SYSR(KK) + RELE(K)
300 CONTINUE
C
C      CONTRIBUTION OS VALUES ASSOCIATED WITH PRESSURE:

```

```

C      DO 400 I=1,3
C      II = INTMAT(IE,I)
C      K  = I + 12
C      KK = 2*NPOIV + II
C      SYSR(KK) = SYSR(KK) + RELE(K)
400 CONTINUE
C
C      RETURN
C      END
C
C-----
C
C      SUBROUTINE GAUSS(N, A, B, X, MXNEQ)
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C      DIMENSION A(MXNEQ,MXNEQ), B(MXNEQ), X(MXNEQ)
C
C      PERFORM SCALING:
C
C      CALL SCALE(N, A, B, MXNEQ)
C
C      FORWARD ELIMINATION:
C
C      PERFORM ACCORDING TO ORDER OF 'PRIME' FROM 1 TO N-1:
C
C      DO 100 IP=1,N-1
C
C      PERFORM PARTIAL PIVOTING:
C
C      CALL PIVOT(N, A, B, MXNEQ, IP)
C
C      LOOP OVER EACH EQUATION STARTING FROM THE ONE THAT CORRESPONDS
C      WITH THE ORDER OF 'PRIME' PLUS ONE:
C
C      DO 200 IE=IP+1,N
C      RATIO = A(IE,IP)/A(IP,IP)
C
C      COMPUTE NEW COEFFICIENTS OF THE EQUATION CONSIDERED:
C
C      DO 300 IC=IP+1,N
C      A(IE,IC) = A(IE,IC) - RATIO*A(IP,IC)
300 CONTINUE
C      B(IE) = B(IE) - RATIO*B(IP)
200 CONTINUE
C
C      SET COEFFICIENTS ON LOWER LEFT PORTION TO ZERO:
C
C      DO 400 IE=IP+1,N
C      A(IE,IP) = 0.
400 CONTINUE
C      100 CONTINUE
C
C      BACK SUBSTITUTION:
C
C      COMPUTE SOLUTION OF THE LAST EQUATION:
C
C      X(N) = B(N)/A(N,N)
C
C      THEN COMPUTE SOLUTIONS FROM EQUATION N-1 TO 1:
C
C      DO 500 IE=N-1,1,-1
C      SUM = 0.
C      DO 600 IC=IE+1,N
C      SUM = SUM + A(IE,IC)*X(IC)

```



```

600 CONTINUE
X(IE) = (B(IE) - SUM)/A(IE,IE)
500 CONTINUE
RETURN
END
C
C-----
C
SUBROUTINE PIVOT(N, A, B, MXNEQ, IP)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION A(MXNEQ,MXNEQ), B(MXNEQ)
C
C PERFORM PARTIAL PIVOTING:
C
JP = IP
BIG = ABS(A(IP,IP))
DO 10 I=IP+1,N
AMAX = ABS(A(I,IP))
IF(AMAX.GT.BIG) THEN
BIG = AMAX
JP = I
ENDIF
10 CONTINUE
IF(JP.NE.IP) THEN
DO 20 J=IP,N
DUMY = A(JP,J)
A(JP,J) = A(IP,J)
A(IP,J) = DUMY
20 CONTINUE
DUMY = B(JP)
B(JP) = B(IP)
B(IP) = DUMY
ENDIF
RETURN
END
C
C-----
C
SUBROUTINE SCALE(N, A, B, MXNEQ)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION A(MXNEQ,MXNEQ), B(MXNEQ)
C
C PERFORM SCALING:
C
DO 10 IE=1,N
BIG = ABS(A(IE,1))
DO 20 IC=2,N
AMAX = ABS(A(IE,IC))
IF(AMAX.GT.BIG) BIG = AMAX
20 CONTINUE
DO 30 IC=1,N
A(IE,IC) = A(IE,IC)/BIG
30 CONTINUE
B(IE) = B(IE)/BIG
10 CONTINUE
RETURN
END
C
C-----
C
SUBROUTINE MULMAT(A, B, C, I, J, K)
C
C PERFORM MATRIX MULTIPLICATION: [C(I,K)] = [A(I,J)] [B(J,K)]
C

```

```

      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(I,J), B(J,K), C(I,K)
C
      DO 10 IR=1,I
      DO 10 IC=1,K
      C(IR,IC) = 0.
      DO 20 IS=1,J
      C(IR,IC) = C(IR,IC) + A(IR,IS)*B(IS,IC)
20 CONTINUE
10 CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
C-----
C
      SUBROUTINE TRI(NPOIV, NPOIP, NELEM, NEQ,
*                  VISCOUS, COORD, INTMAT, INTMATF,
*                  SYSK, SYSR, MXPOIV, MXELE, MXNEQ)
C
C      ESTABLISH ALL ELEMENT MATRICES AND ASSEMBLE THEM TO FORM
C      UP SYSTEM EQUATIONS
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION COORD(MXPOIV,2), SYSK(MXNEQ,MXNEQ), SYSR(MXNEQ)
      DIMENSION A(6,6), B(3,6), C(3,6), G(3,3)
      DIMENSION AT(6,6), BT(6,3), CT(6,3)
      DIMENSION P66(6,6), P36(3,6), Q36(3,6), P63(6,3)
      DIMENSION AK11(6,6), AK22(6,6), AK12(6,6), AK21(6,6)
      DIMENSION AL1(6,3), AL2(6,3), AL1T(3,6), AL2T(3,6)
      DIMENSION AKELE(15,15), RELE(15), VISCOUS(MXELE)
C
      INTEGER INTMAT(MXELE,6)
C
C      SET UP [A] MATRIX:
C
      DO 10 I=1,6
      DO 10 J=1,6
      A(I,J) = 0.
10 CONTINUE
      A(1,1) = 1.
      A(2,2) = 1.
      A(3,3) = 1.
      A(4,4) = 4.
      A(5,5) = 4.
      A(6,6) = 4.
      A(4,2) = -1.
      A(4,3) = -1.
      A(5,1) = -1.
      A(5,3) = -1.
      A(6,1) = -1.
      A(6,2) = -1.
C
C      ALSO COMPUTE [A] TRANSPOSE:
C
      DO 20 I=1,6
      DO 20 J=1,6
      AT(J,I) = A(I,J)
20 CONTINUE
C
C      LOOP OVER THE NUMBER OF ELEMENTS:
C
      DO 500 IE=1,NELEM
      VISC = VISCOUS(IE)

```

```

C
C   FIND ELEMENT LOCAL COORDINATES:
C
    II = INTMAT(IE,1)
    JJ = INTMAT(IE,2)
    KK = INTMAT(IE,3)
C
    XG1 = COORD(II,1)
    XG2 = COORD(JJ,1)
    XG3 = COORD(KK,1)
    YG1 = COORD(II,2)
    YG2 = COORD(JJ,2)
    YG3 = COORD(KK,2)
    AREA= 0.5*(XG2*(YG3-YG1) + XG1*(YG2-YG3) + XG3*(YG1-YG2))
    IF(AREA.LE.0.) WRITE(6,5) IE
5  FORMAT(/,'   !!! ERROR !!! ELEMENT NO.', I5,
*      ' HAS NEGATIVE OR ZERO AREA ', /,
*      ' --- CHECK F.E. MODEL FOR NODAL COORDINATES',
*      ' AND ELEMENT NODAL CONNECTIONS ---' )
    IF(AREA.LE.0.) STOP
C
    AREA2 = 2.*AREA
    B1 = (YG2 - YG3)/AREA2
    B2 = (YG3 - YG1)/AREA2
    B3 = (YG1 - YG2)/AREA2
    C1 = (XG3 - XG2)/AREA2
    C2 = (XG1 - XG3)/AREA2
    C3 = (XG2 - XG1)/AREA2
C
C   SET UP [B] AND [C] MATRICES:
C
    DO 30 I=1,3
    DO 30 J=1,6
    B(I,J) = 0.
    C(I,J) = 0.
30 CONTINUE
    B(1,1) = 2.*B1
    B(1,5) = B3
    B(1,6) = B2
    B(2,2) = 2.*B2
    B(2,4) = B3
    B(2,6) = B1
    B(3,3) = 2.*B3
    B(3,4) = B2
    B(3,5) = B1
    C(1,1) = 2.*C1
    C(1,5) = C3
    C(1,6) = C2
    C(2,2) = 2.*C2
    C(2,4) = C3
    C(2,6) = C1
    C(3,3) = 2.*C3
    C(3,4) = C2
    C(3,5) = C1
C
C   COMPUTE [B] AND [C] TRANSPOSE:
C
    DO 40 I=1,3
    DO 40 J=1,6
    BT(J,I) = B(I,J)
    CT(J,I) = C(I,J)
40 CONTINUE
C
C   SET UP [G] MATRIX:

```

```

C
FAC = AREA/12.
FAC2 = 2.*FAC
G(1,1) = FAC2
G(2,2) = FAC2
G(3,3) = FAC2
G(1,2) = FAC
G(1,3) = FAC
G(2,1) = FAC
G(2,3) = FAC
G(3,1) = FAC
G(3,2) = FAC

C
C
C
COMPUTE [K11] MATRIX (WITHOUT VIS):
CALL MULMAT( B, A, P36, 3, 6, 6)
CALL MULMAT( G, P36, Q36, 3, 3, 6)
CALL MULMAT(BT, Q36, P66, 6, 3, 6)
CALL MULMAT(AT, P66, AK11, 6, 6, 6)

C
C
C
COMPUTE [K22] MATRIX (WITHOUT VIS):
CALL MULMAT( C, A, P36, 3, 6, 6)
CALL MULMAT( G, P36, Q36, 3, 3, 6)
CALL MULMAT(CT, Q36, P66, 6, 3, 6)
CALL MULMAT(AT, P66, AK22, 6, 6, 6)

C
C
C
COMPUTE [K12] MATRIX (WITHOUT VIS):
CALL MULMAT( B, A, P36, 3, 6, 6)
CALL MULMAT( G, P36, Q36, 3, 3, 6)
CALL MULMAT(CT, Q36, P66, 6, 3, 6)
CALL MULMAT(AT, P66, AK12, 6, 6, 6)

C
C
C
COMPUTE ACTUAL [K11], [K22], [K12], AND [K21]:
DO 50 I=1,6
DO 50 J=1,6
AK11(I,J) = VISC*AK11(I,J)
AK22(I,J) = VISC*AK22(I,J)
AK12(I,J) = VISC*AK12(I,J)
AK21(J,I) = AK12(I,J)
50 CONTINUE

C
C
C
COMPUTE [L1] AND [L2] MATRICES:
CALL MULMAT(BT, G, P63, 6, 3, 3)
CALL MULMAT(AT, P63, AL1, 6, 6, 3)
CALL MULMAT(CT, G, P63, 6, 3, 3)
CALL MULMAT(AT, P63, AL2, 6, 6, 3)

C
DO 60 I=1,6
DO 60 J=1,3
AL1(I,J) = -AL1(I,J)
AL2(I,J) = -AL2(I,J)
AL1T(J,I) = AL1(I,J)
AL2T(J,I) = AL2(I,J)
60 CONTINUE

C
C
C
FORM UP ELEMENT STIFFNESS MATRIX AND LOAD VECTOR:
DO 100 I=1,15
RELE(I) = 0.
DO 100 J=1,15

```

```

AKELE(I,J) = 0.
100 CONTINUE
C
DO 110 I=1,6
DO 120 J=1,6
AKELE(I ,J ) = 2.*AK11(I,J) + AK22(I,J)
AKELE(I+6,J+6) = AK11(I,J) + 2.*AK22(I,J)
AKELE(I ,J+6) = AK12(I,J)
AKELE(I+6,J ) = AK21(I,J)
120 CONTINUE
DO 130 J=1,3
AKELE(I ,J+12) = AL1(I,J)
AKELE(I+6,J+12) = AL2(I,J)
130 CONTINUE
110 CONTINUE
DO 140 I=1,3
DO 140 J=1,6
AKELE(I+12,J ) = AL1T(I,J)
AKELE(I+12,J+6) = AL2T(I,J)
140 CONTINUE
C
C ASSEMBLE THESE ELEMENT MATRICES TO FORM SYSTEM EQUATIONS:
C
CALL ASSMBLE( IE, INTMAT, AKELE, RELE, SYSK, SYSR,
* NPOIV, NEQ, NELEM, MXNEQ, MXELE )
C
500 CONTINUE
C
RETURN
END
C
C-----
C
SUBROUTINE ELEVIS (NPOIV,NPOIP,NELEM,NEQ,COORD,INTMAT,SOL
* ,VISCOUS,MXPOIV,YIELD,MXELE,STRINV)
C
C SUBROUTINE FOR COMPUTE NONLINEAR VISCOSITY
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION COORD(MXPOIV,2) , VISCOUS(NELEM) , STRINV(NELEM)
* ,SOL(NEQ)
INTEGER INTMAT(MXELE,6)
DO 500 IE = 1,NELEM
II = INTMAT(IE,1)
JJ = INTMAT(IE,2)
KK = INTMAT(IE,3)
XG1 = COORD(II,1)
XG2 = COORD(JJ,1)
XG3 = COORD(KK,1)
YG1 = COORD(II,2)
YG2 = COORD(JJ,2)
YG3 = COORD(KK,2)
AREA= 0.5*(XG2*(YG3-YG1) + XG1*(YG2-YG3) + XG3*(YG1-YG2))
B1 = (YG2 - YG3)
B2 = (YG3 - YG1)
B3 = (YG1 - YG2)
C1 = (XG3 - XG2)
C2 = (XG1 - XG3)
C3 = (XG2 - XG1)
U1 = SOL(II)
U2 = SOL(JJ)
U3 = SOL(KK)
V1 = SOL(II+NPOIV)
V2 = SOL(JJ+NPOIV)

```

```

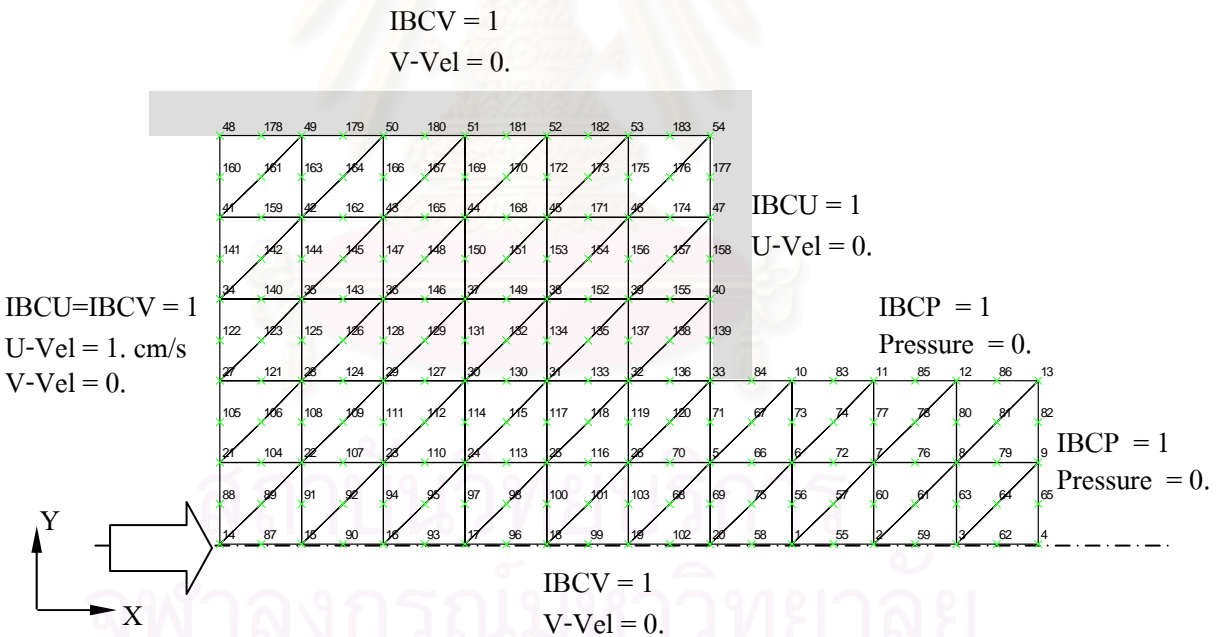
V3 = SOL(KK+NPOIV)
STR_X = (B1*U1+B2*U2+B3*U3) / (2.*AREA)
STR_Y = (C1*V1+C2*V2+C3*V3) / (2.*AREA)
STR_XY = (C1*U1+C2*U2+C3*U3+B1*V1+B2*V2+B3*V3) / (4.*AREA)
STRINV(IE) = SQRT(2.*(STR_X*STR_X+STR_Y*STR_Y+STR_XY*STR_XY*2.))
VISCOS(IE) = YIELD/(SQRT(3.)*STRINV(IE))
IF (VISCOS(IE).GT.1.E6) VISCOS(IE)=1.E6
500 CONTINUE
RETURN
END
C
C-----
C
SUBROUTINE CONVERGE (MXNEQ,MXPOIV,MXPOIP,SOL,SOL_O,TOLV,TOLP
*
,NPOIV,NPOIP,NEQ)
C
C SUBROUTINE FOR COMPUTE THE CONVERGENCE CRITERIA
C
C IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
C DIMENSION SOL(MXNEQ),SOL_V(MXPOIV),SOL_P(MXPOIP),SOL_O(MXNEQ)
C DIMENSION SOL_NV(MXPOIV),SOL_NP(MXPOIP)
C
C DO 100 IV = 1,NPOIV
C SOL_V(IV) = SQRT((SOL(IV)**2.+(SOL(IV+NPOIV)**2.))
C SOL_NV(IV) = SQRT((SOL_O(IV)**2.+(SOL_O(IV+NPOIV)**2.))
100 CONTINUE
C
C DO 200 IP = 1,NPOIP
C SOL_P(IP) = SOL(IP+(2.*NPOIV))
C SOL_NP(IP) = SOL_O(IP+(2.*NPOIV))
200 CONTINUE
C
C COMPUTE THE NECESSARY PARAMETERS
C
C AAA = 0.
C BBB = 0.
C CCC = 0.
C DDD = 0.
C
C DO 300 J = 1,NPOIV
C AA = (SOL_V(J)-SOL_NV(J))**2.
C AAA = AAA + AA
C BB = (SOL_NP(J))**2
C BBB = BBB + BB
300 CONTINUE
C
C DO 400 K = 1,NPOIP
C CC = SOL_P(K)
C CCC = CCC + CC
C DD = SOL_NP(K)
C DDD = DDD + DD
400 CONTINUE
C
C TOLV = SQRT(AAA/BBB)*100.
C TOLP = ABS((DDD-CCC)/DDD)*100.
C
500 CONTINUE
RETURN
END

```



ก.2 ตัวอย่างปัญหา

ในหัวข้อนี้จะยกตัวอย่างปัญหาเพื่อให้เกิดความชัดเจนในเรื่องของการสร้างไฟล์ข้อมูลโดยเฉพาะการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต รวมไปถึงแสดงลักษณะของไฟล์ผลลัพธ์ ขนาดของเอลิเมนต์ในตัวอย่างนี้ใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่เพื่อที่จะลดพื้นที่ในการนำเสนอ ดังนั้นคำตอบจึงไม่แม่นยำเท่าที่ควร ในการวิเคราะห์เพื่อต้องการผลจริงจึงควรที่จะลดขนาดของเอลิเมนต์ให้เล็กลงโดยเฉพาะอย่างยิ่งบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของคำตอบสูงนั้นก็คือบริเวณปลายของแม่พิมพ์ ลักษณะของปัญหาจะเป็นปัญหาการอัดรีดที่มีอัตราส่วนการลดขนาด 0.6 วัสดุมีความเค้นคราก  $1,500 \text{ kg/cm}^2$  กำหนดค่าความหนืดเริ่มต้น  $1000 \text{ kg.s/cm}^2$  ความเร็วทางเข้า  $1 \text{ cm/s}$  จำนวนรอบในการคำนวณสูงสุด 20 รอบ แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์มีจำนวนจุดต่อความเร็ว 183 จุด จุดต่อความดัน 54 จุด และมีจำนวนเอลิเมนต์ 76 เอลิเมนต์ ลักษณะการแบ่งเอลิเมนต์และการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตได้แสดงไว้ในรูป ก.1



รูปที่ ก.1 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขต  
สำหรับตัวอย่างการใช้โปรแกรม MTFLOW(v1)

แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์พร้อมทั้งเงื่อนไขขอบเขตดังแสดงในรูปที่ ก.1 สามารถนำมาเขียนไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรม MTFLOW(v1) ได้ดังนี้

```

2
DIRECT EXTRUSION R=0.6 WITHOUT THERMAL EFFECT
MESH WITH 183 NODES AND 76 ELEMENTS
NPOIV NPOIP NELEM
183 54 76
    
```

| NODE | YIELD CRITERIA |         |         | INITIAL VISCOSITY |        | MAX ITERATION |       |       |        |
|------|----------------|---------|---------|-------------------|--------|---------------|-------|-------|--------|
|      | 1500.00        | 1000.00 | 1000.00 | X-COOR            | Y-COOR | 20            | V-VEL | U-VEL | PRESSU |
| 1    | 0              | 1       | 0       | 14.000            | .000   | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 2    | 0              | 1       | 0       | 16.000            | .000   | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 3    | 0              | 1       | 0       | 18.000            | .000   | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 4    | 0              | 1       | 1       | 20.000            | .000   | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 5    | 0              | 0       | 0       | 12.000            | 2.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 6    | 0              | 0       | 0       | 14.000            | 2.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 7    | 0              | 0       | 0       | 16.000            | 2.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 8    | 0              | 0       | 0       | 18.000            | 2.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 9    | 0              | 0       | 1       | 20.000            | 2.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 10   | 0              | 0       | 1       | 14.000            | 4.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 11   | 0              | 0       | 1       | 16.000            | 4.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 12   | 0              | 0       | 1       | 18.000            | 4.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 13   | 0              | 0       | 1       | 20.000            | 4.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 14   | 1              | 1       | 0       | .000              | .000   | 1.000         | .000  | .000  | .000   |
| 15   | 0              | 1       | 0       | 2.000             | .000   | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 16   | 0              | 1       | 0       | 4.000             | .000   | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 17   | 0              | 1       | 0       | 6.000             | .000   | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 18   | 0              | 1       | 0       | 8.000             | .000   | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 19   | 0              | 1       | 0       | 10.000            | .000   | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 20   | 0              | 1       | 0       | 12.000            | .000   | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 21   | 1              | 1       | 0       | .000              | 2.000  | 1.000         | .000  | .000  | .000   |
| 22   | 0              | 0       | 0       | 2.000             | 2.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 23   | 0              | 0       | 0       | 4.000             | 2.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 24   | 0              | 0       | 0       | 6.000             | 2.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 25   | 0              | 0       | 0       | 8.000             | 2.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 26   | 0              | 0       | 0       | 10.000            | 2.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 27   | 1              | 1       | 0       | .000              | 4.000  | 1.000         | .000  | .000  | .000   |
| 28   | 0              | 0       | 0       | 2.000             | 4.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 29   | 0              | 0       | 0       | 4.000             | 4.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 30   | 0              | 0       | 0       | 6.000             | 4.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 31   | 0              | 0       | 0       | 8.000             | 4.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 32   | 0              | 0       | 0       | 10.000            | 4.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 33   | 1              | 0       | 0       | 12.000            | 4.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 34   | 1              | 1       | 0       | .000              | 6.000  | 1.000         | .000  | .000  | .000   |
| 35   | 0              | 0       | 0       | 2.000             | 6.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 36   | 0              | 0       | 0       | 4.000             | 6.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 37   | 0              | 0       | 0       | 6.000             | 6.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 38   | 0              | 0       | 0       | 8.000             | 6.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 39   | 0              | 0       | 0       | 10.000            | 6.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 40   | 1              | 0       | 0       | 12.000            | 6.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 41   | 1              | 1       | 0       | .000              | 8.000  | 1.000         | .000  | .000  | .000   |
| 42   | 0              | 0       | 0       | 2.000             | 8.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 43   | 0              | 0       | 0       | 4.000             | 8.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 44   | 0              | 0       | 0       | 6.000             | 8.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 45   | 0              | 0       | 0       | 8.000             | 8.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 46   | 0              | 0       | 0       | 10.000            | 8.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 47   | 1              | 0       | 0       | 12.000            | 8.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 48   | 1              | 1       | 0       | .000              | 10.000 | 1.000         | .000  | .000  | .000   |
| 49   | 0              | 1       | 0       | 2.000             | 10.000 | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 50   | 0              | 1       | 0       | 4.000             | 10.000 | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 51   | 0              | 1       | 0       | 6.000             | 10.000 | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 52   | 0              | 1       | 0       | 8.000             | 10.000 | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 53   | 0              | 1       | 0       | 10.000            | 10.000 | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 54   | 1              | 1       | 0       | 12.000            | 10.000 | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 55   | 0              | 1       | -1      | 15.000            | .000   | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 56   | 0              | 0       | -1      | 14.000            | 1.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 57   | 0              | 0       | -1      | 15.000            | 1.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 58   | 0              | 1       | -1      | 13.000            | .000   | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 59   | 0              | 1       | -1      | 17.000            | .000   | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 60   | 0              | 0       | -1      | 16.000            | 1.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |
| 61   | 0              | 0       | -1      | 17.000            | 1.000  | .000          | .000  | .000  | .000   |

|     |   |   |    |        |       |       |      |      |
|-----|---|---|----|--------|-------|-------|------|------|
| 62  | 0 | 1 | -1 | 19.000 | .000  | .000  | .000 | .000 |
| 63  | 0 | 0 | -1 | 18.000 | 1.000 | .000  | .000 | .000 |
| 64  | 0 | 0 | -1 | 19.000 | 1.000 | .000  | .000 | .000 |
| 65  | 0 | 0 | -1 | 20.000 | 1.000 | .000  | .000 | .000 |
| 66  | 0 | 0 | -1 | 13.000 | 2.000 | .000  | .000 | .000 |
| 67  | 0 | 0 | -1 | 13.000 | 3.000 | .000  | .000 | .000 |
| 68  | 0 | 0 | -1 | 11.000 | 1.000 | .000  | .000 | .000 |
| 69  | 0 | 0 | -1 | 12.000 | 1.000 | .000  | .000 | .000 |
| 70  | 0 | 0 | -1 | 11.000 | 2.000 | .000  | .000 | .000 |
| 71  | 0 | 0 | -1 | 12.000 | 3.000 | .000  | .000 | .000 |
| 72  | 0 | 0 | -1 | 15.000 | 2.000 | .000  | .000 | .000 |
| 73  | 0 | 0 | -1 | 14.000 | 3.000 | .000  | .000 | .000 |
| 74  | 0 | 0 | -1 | 15.000 | 3.000 | .000  | .000 | .000 |
| 75  | 0 | 0 | -1 | 13.000 | 1.000 | .000  | .000 | .000 |
| 76  | 0 | 0 | -1 | 17.000 | 2.000 | .000  | .000 | .000 |
| 77  | 0 | 0 | -1 | 16.000 | 3.000 | .000  | .000 | .000 |
| 78  | 0 | 0 | -1 | 17.000 | 3.000 | .000  | .000 | .000 |
| 79  | 0 | 0 | -1 | 19.000 | 2.000 | .000  | .000 | .000 |
| 80  | 0 | 0 | -1 | 18.000 | 3.000 | .000  | .000 | .000 |
| 81  | 0 | 0 | -1 | 19.000 | 3.000 | .000  | .000 | .000 |
| 82  | 0 | 0 | -1 | 20.000 | 3.000 | .000  | .000 | .000 |
| 83  | 0 | 0 | -1 | 15.000 | 4.000 | .000  | .000 | .000 |
| 84  | 0 | 0 | -1 | 13.000 | 4.000 | .000  | .000 | .000 |
| 85  | 0 | 0 | -1 | 17.000 | 4.000 | .000  | .000 | .000 |
| 86  | 0 | 0 | -1 | 19.000 | 4.000 | .000  | .000 | .000 |
| 87  | 0 | 1 | -1 | 1.000  | .000  | .000  | .000 | .000 |
| 88  | 1 | 1 | -1 | .000   | 1.000 | 1.000 | .000 | .000 |
| 89  | 0 | 0 | -1 | 1.000  | 1.000 | .000  | .000 | .000 |
| 90  | 0 | 1 | -1 | 3.000  | .000  | .000  | .000 | .000 |
| 91  | 0 | 0 | -1 | 2.000  | 1.000 | .000  | .000 | .000 |
| 92  | 0 | 0 | -1 | 3.000  | 1.000 | .000  | .000 | .000 |
| 93  | 0 | 1 | -1 | 5.000  | .000  | .000  | .000 | .000 |
| 94  | 0 | 0 | -1 | 4.000  | 1.000 | .000  | .000 | .000 |
| 95  | 0 | 0 | -1 | 5.000  | 1.000 | .000  | .000 | .000 |
| 96  | 0 | 1 | -1 | 7.000  | .000  | .000  | .000 | .000 |
| 97  | 0 | 0 | -1 | 6.000  | 1.000 | .000  | .000 | .000 |
| 98  | 0 | 0 | -1 | 7.000  | 1.000 | .000  | .000 | .000 |
| 99  | 0 | 1 | -1 | 9.000  | .000  | .000  | .000 | .000 |
| 100 | 0 | 0 | -1 | 8.000  | 1.000 | .000  | .000 | .000 |
| 101 | 0 | 0 | -1 | 9.000  | 1.000 | .000  | .000 | .000 |
| 102 | 0 | 1 | -1 | 11.000 | .000  | .000  | .000 | .000 |
| 103 | 0 | 0 | -1 | 10.000 | 1.000 | .000  | .000 | .000 |
| 104 | 0 | 0 | -1 | 1.000  | 2.000 | .000  | .000 | .000 |
| 105 | 1 | 1 | -1 | .000   | 3.000 | 1.000 | .000 | .000 |
| 106 | 0 | 0 | -1 | 1.000  | 3.000 | .000  | .000 | .000 |
| 107 | 0 | 0 | -1 | 3.000  | 2.000 | .000  | .000 | .000 |
| 108 | 0 | 0 | -1 | 2.000  | 3.000 | .000  | .000 | .000 |
| 109 | 0 | 0 | -1 | 3.000  | 3.000 | .000  | .000 | .000 |
| 110 | 0 | 0 | -1 | 5.000  | 2.000 | .000  | .000 | .000 |
| 111 | 0 | 0 | -1 | 4.000  | 3.000 | .000  | .000 | .000 |
| 112 | 0 | 0 | -1 | 5.000  | 3.000 | .000  | .000 | .000 |
| 113 | 0 | 0 | -1 | 7.000  | 2.000 | .000  | .000 | .000 |
| 114 | 0 | 0 | -1 | 6.000  | 3.000 | .000  | .000 | .000 |
| 115 | 0 | 0 | -1 | 7.000  | 3.000 | .000  | .000 | .000 |
| 116 | 0 | 0 | -1 | 9.000  | 2.000 | .000  | .000 | .000 |
| 117 | 0 | 0 | -1 | 8.000  | 3.000 | .000  | .000 | .000 |
| 118 | 0 | 0 | -1 | 9.000  | 3.000 | .000  | .000 | .000 |
| 119 | 0 | 0 | -1 | 10.000 | 3.000 | .000  | .000 | .000 |
| 120 | 0 | 0 | -1 | 11.000 | 3.000 | .000  | .000 | .000 |
| 121 | 0 | 0 | -1 | 1.000  | 4.000 | .000  | .000 | .000 |
| 122 | 1 | 1 | -1 | .000   | 5.000 | 1.000 | .000 | .000 |
| 123 | 0 | 0 | -1 | 1.000  | 5.000 | .000  | .000 | .000 |
| 124 | 0 | 0 | -1 | 3.000  | 4.000 | .000  | .000 | .000 |
| 125 | 0 | 0 | -1 | 2.000  | 5.000 | .000  | .000 | .000 |

|     |   |   |    |        |        |       |      |      |
|-----|---|---|----|--------|--------|-------|------|------|
| 126 | 0 | 0 | -1 | 3.000  | 5.000  | .000  | .000 | .000 |
| 127 | 0 | 0 | -1 | 5.000  | 4.000  | .000  | .000 | .000 |
| 128 | 0 | 0 | -1 | 4.000  | 5.000  | .000  | .000 | .000 |
| 129 | 0 | 0 | -1 | 5.000  | 5.000  | .000  | .000 | .000 |
| 130 | 0 | 0 | -1 | 7.000  | 4.000  | .000  | .000 | .000 |
| 131 | 0 | 0 | -1 | 6.000  | 5.000  | .000  | .000 | .000 |
| 132 | 0 | 0 | -1 | 7.000  | 5.000  | .000  | .000 | .000 |
| 133 | 0 | 0 | -1 | 9.000  | 4.000  | .000  | .000 | .000 |
| 134 | 0 | 0 | -1 | 8.000  | 5.000  | .000  | .000 | .000 |
| 135 | 0 | 0 | -1 | 9.000  | 5.000  | .000  | .000 | .000 |
| 136 | 0 | 0 | -1 | 11.000 | 4.000  | .000  | .000 | .000 |
| 137 | 0 | 0 | -1 | 10.000 | 5.000  | .000  | .000 | .000 |
| 138 | 0 | 0 | -1 | 11.000 | 5.000  | .000  | .000 | .000 |
| 139 | 1 | 0 | -1 | 12.000 | 5.000  | .000  | .000 | .000 |
| 140 | 0 | 0 | -1 | 1.000  | 6.000  | .000  | .000 | .000 |
| 141 | 1 | 1 | -1 | .000   | 7.000  | 1.000 | .000 | .000 |
| 142 | 0 | 0 | -1 | 1.000  | 7.000  | .000  | .000 | .000 |
| 143 | 0 | 0 | -1 | 3.000  | 6.000  | .000  | .000 | .000 |
| 144 | 0 | 0 | -1 | 2.000  | 7.000  | .000  | .000 | .000 |
| 145 | 0 | 0 | -1 | 3.000  | 7.000  | .000  | .000 | .000 |
| 146 | 0 | 0 | -1 | 5.000  | 6.000  | .000  | .000 | .000 |
| 147 | 0 | 0 | -1 | 4.000  | 7.000  | .000  | .000 | .000 |
| 148 | 0 | 0 | -1 | 5.000  | 7.000  | .000  | .000 | .000 |
| 149 | 0 | 0 | -1 | 7.000  | 6.000  | .000  | .000 | .000 |
| 150 | 0 | 0 | -1 | 6.000  | 7.000  | .000  | .000 | .000 |
| 151 | 0 | 0 | -1 | 7.000  | 7.000  | .000  | .000 | .000 |
| 152 | 0 | 0 | -1 | 9.000  | 6.000  | .000  | .000 | .000 |
| 153 | 0 | 0 | -1 | 8.000  | 7.000  | .000  | .000 | .000 |
| 154 | 0 | 0 | -1 | 9.000  | 7.000  | .000  | .000 | .000 |
| 155 | 0 | 0 | -1 | 11.000 | 6.000  | .000  | .000 | .000 |
| 156 | 0 | 0 | -1 | 10.000 | 7.000  | .000  | .000 | .000 |
| 157 | 0 | 0 | -1 | 11.000 | 7.000  | .000  | .000 | .000 |
| 158 | 1 | 0 | -1 | 12.000 | 7.000  | .000  | .000 | .000 |
| 159 | 0 | 0 | -1 | 1.000  | 8.000  | .000  | .000 | .000 |
| 160 | 1 | 1 | -1 | .000   | 9.000  | 1.000 | .000 | .000 |
| 161 | 0 | 0 | -1 | 1.000  | 9.000  | .000  | .000 | .000 |
| 162 | 0 | 0 | -1 | 3.000  | 8.000  | .000  | .000 | .000 |
| 163 | 0 | 0 | -1 | 2.000  | 9.000  | .000  | .000 | .000 |
| 164 | 0 | 0 | -1 | 3.000  | 9.000  | .000  | .000 | .000 |
| 165 | 0 | 0 | -1 | 5.000  | 8.000  | .000  | .000 | .000 |
| 166 | 0 | 0 | -1 | 4.000  | 9.000  | .000  | .000 | .000 |
| 167 | 0 | 0 | -1 | 5.000  | 9.000  | .000  | .000 | .000 |
| 168 | 0 | 0 | -1 | 7.000  | 8.000  | .000  | .000 | .000 |
| 169 | 0 | 0 | -1 | 6.000  | 9.000  | .000  | .000 | .000 |
| 170 | 0 | 0 | -1 | 7.000  | 9.000  | .000  | .000 | .000 |
| 171 | 0 | 0 | -1 | 9.000  | 8.000  | .000  | .000 | .000 |
| 172 | 0 | 0 | -1 | 8.000  | 9.000  | .000  | .000 | .000 |
| 173 | 0 | 0 | -1 | 9.000  | 9.000  | .000  | .000 | .000 |
| 174 | 0 | 0 | -1 | 11.000 | 8.000  | .000  | .000 | .000 |
| 175 | 0 | 0 | -1 | 10.000 | 9.000  | .000  | .000 | .000 |
| 176 | 0 | 0 | -1 | 11.000 | 9.000  | .000  | .000 | .000 |
| 177 | 1 | 0 | -1 | 12.000 | 9.000  | .000  | .000 | .000 |
| 178 | 0 | 1 | -1 | 1.000  | 10.000 | .000  | .000 | .000 |
| 179 | 0 | 1 | -1 | 3.000  | 10.000 | .000  | .000 | .000 |
| 180 | 0 | 1 | -1 | 5.000  | 10.000 | .000  | .000 | .000 |
| 181 | 0 | 1 | -1 | 7.000  | 10.000 | .000  | .000 | .000 |
| 182 | 0 | 1 | -1 | 9.000  | 10.000 | .000  | .000 | .000 |
| 183 | 0 | 1 | -1 | 11.000 | 10.000 | .000  | .000 | .000 |

ELEMENT NODAL CONNECTION [ 76 ] :

|   |    |    |    |     |     |     |
|---|----|----|----|-----|-----|-----|
| 1 | 14 | 22 | 21 | 104 | 88  | 89  |
| 2 | 21 | 28 | 27 | 121 | 105 | 106 |
| 3 | 27 | 35 | 34 | 140 | 122 | 123 |
| 4 | 34 | 42 | 41 | 159 | 141 | 142 |

|    |    |    |    |     |     |     |
|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| 5  | 41 | 49 | 48 | 178 | 160 | 161 |
| 6  | 14 | 15 | 22 | 91  | 89  | 87  |
| 7  | 21 | 22 | 28 | 108 | 106 | 104 |
| 8  | 27 | 28 | 35 | 125 | 123 | 121 |
| 9  | 34 | 35 | 42 | 144 | 142 | 140 |
| 10 | 41 | 42 | 49 | 163 | 161 | 159 |
| 11 | 15 | 23 | 22 | 107 | 91  | 92  |
| 12 | 22 | 29 | 28 | 124 | 108 | 109 |
| 13 | 28 | 36 | 35 | 143 | 125 | 126 |
| 14 | 35 | 43 | 42 | 162 | 144 | 145 |
| 15 | 42 | 50 | 49 | 179 | 163 | 164 |
| 16 | 15 | 16 | 23 | 94  | 92  | 90  |
| 17 | 22 | 23 | 29 | 111 | 109 | 107 |
| 18 | 28 | 29 | 36 | 128 | 126 | 124 |
| 19 | 35 | 36 | 43 | 147 | 145 | 143 |
| 20 | 42 | 43 | 50 | 166 | 164 | 162 |
| 21 | 16 | 24 | 23 | 110 | 94  | 95  |
| 22 | 23 | 30 | 29 | 127 | 111 | 112 |
| 23 | 29 | 37 | 36 | 146 | 128 | 129 |
| 24 | 36 | 44 | 43 | 165 | 147 | 148 |
| 25 | 43 | 51 | 50 | 180 | 166 | 167 |
| 26 | 16 | 17 | 24 | 97  | 95  | 93  |
| 27 | 23 | 24 | 30 | 114 | 112 | 110 |
| 28 | 29 | 30 | 37 | 131 | 129 | 127 |
| 29 | 36 | 37 | 44 | 150 | 148 | 146 |
| 30 | 43 | 44 | 51 | 169 | 167 | 165 |
| 31 | 17 | 25 | 24 | 113 | 97  | 98  |
| 32 | 24 | 31 | 30 | 130 | 114 | 115 |
| 33 | 30 | 38 | 37 | 149 | 131 | 132 |
| 34 | 37 | 45 | 44 | 168 | 150 | 151 |
| 35 | 44 | 52 | 51 | 181 | 169 | 170 |
| 36 | 17 | 18 | 25 | 100 | 98  | 96  |
| 37 | 24 | 25 | 31 | 117 | 115 | 113 |
| 38 | 30 | 31 | 38 | 134 | 132 | 130 |
| 39 | 37 | 38 | 45 | 153 | 151 | 149 |
| 40 | 44 | 45 | 52 | 172 | 170 | 168 |
| 41 | 18 | 26 | 25 | 116 | 100 | 101 |
| 42 | 25 | 32 | 31 | 133 | 117 | 118 |
| 43 | 31 | 39 | 38 | 152 | 134 | 135 |
| 44 | 38 | 46 | 45 | 171 | 153 | 154 |
| 45 | 45 | 53 | 52 | 182 | 172 | 173 |
| 46 | 18 | 19 | 26 | 103 | 101 | 99  |
| 47 | 25 | 26 | 32 | 119 | 118 | 116 |
| 48 | 31 | 32 | 39 | 137 | 135 | 133 |
| 49 | 38 | 39 | 46 | 156 | 154 | 152 |
| 50 | 45 | 46 | 53 | 175 | 173 | 171 |
| 51 | 19 | 5  | 26 | 70  | 103 | 68  |
| 52 | 26 | 33 | 32 | 136 | 119 | 120 |
| 53 | 32 | 40 | 39 | 155 | 137 | 138 |
| 54 | 39 | 47 | 46 | 174 | 156 | 157 |
| 55 | 46 | 54 | 53 | 183 | 175 | 176 |
| 56 | 19 | 20 | 5  | 69  | 68  | 102 |
| 57 | 26 | 5  | 33 | 71  | 120 | 70  |
| 58 | 32 | 33 | 40 | 139 | 138 | 136 |
| 59 | 39 | 40 | 47 | 158 | 157 | 155 |
| 60 | 46 | 47 | 54 | 177 | 176 | 174 |
| 61 | 20 | 6  | 5  | 66  | 69  | 75  |
| 62 | 5  | 10 | 33 | 84  | 71  | 67  |
| 63 | 20 | 1  | 6  | 56  | 75  | 58  |
| 64 | 5  | 6  | 10 | 73  | 67  | 66  |
| 65 | 1  | 7  | 6  | 72  | 56  | 57  |
| 66 | 6  | 11 | 10 | 83  | 73  | 74  |
| 67 | 1  | 2  | 7  | 60  | 57  | 55  |
| 68 | 6  | 7  | 11 | 77  | 74  | 72  |

|    |   |    |    |    |    |    |
|----|---|----|----|----|----|----|
| 69 | 2 | 8  | 7  | 76 | 60 | 61 |
| 70 | 7 | 12 | 11 | 85 | 77 | 78 |
| 71 | 2 | 3  | 8  | 63 | 61 | 59 |
| 72 | 7 | 8  | 12 | 80 | 78 | 76 |
| 73 | 3 | 9  | 8  | 79 | 63 | 64 |
| 74 | 8 | 13 | 12 | 86 | 80 | 81 |
| 75 | 3 | 4  | 9  | 65 | 64 | 62 |
| 76 | 8 | 9  | 13 | 82 | 81 | 79 |

ผลของคำตอบที่ได้เก็บไว้ในไฟล์ข้อมูลที่จะระบุชื่อไว้ในตอนต้นของโปรแกรม ข้อมูลคำตอบจะอยู่ในรูปของความเร็วด้านแนวแกนต่างๆ และความดัน มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

\*\*\*\*\*  
 \* MTFLOW (v1) \*  
 \* NODAL VELOCITY AND PRESSURE SOLUTIONS \*  
 \*\*\*\*\*

OUTPUT RECORDED ON :31-May-00 21:32:14

NUMBER OF VELOCITY NODES : 183  
 NUMBER OF PRESSURE NODES : 54

| NODE | U-VELOCITY  | V-VELOCITY   | PRESSURE     |
|------|-------------|--------------|--------------|
| 1    | .259984E+01 | .000000E+00  | .306955E+03  |
| 2    | .259960E+01 | .000000E+00  | .227881E+02  |
| 3    | .259949E+01 | .000000E+00  | -.374138E+02 |
| 4    | .259946E+01 | .000000E+00  | .000000E+00  |
| 5    | .259929E+01 | -.128442E-02 | -.160007E+03 |
| 6    | .259945E+01 | .139544E-03  | -.198054E+03 |
| 7    | .259946E+01 | .105423E-03  | -.561887E+02 |
| 8    | .259945E+01 | .417203E-04  | -.227746E+02 |
| 9    | .259944E+01 | .370046E-04  | .000000E+00  |
| 10   | .259927E+01 | .181367E-03  | .000000E+00  |
| 11   | .259936E+01 | .598065E-04  | .000000E+00  |
| 12   | .259942E+01 | .413480E-04  | .000000E+00  |
| 13   | .259942E+01 | .358149E-04  | .000000E+00  |
| 14   | .100000E+01 | .000000E+00  | .311452E+04  |
| 15   | .100172E+01 | .000000E+00  | .300652E+04  |
| 16   | .102212E+01 | .000000E+00  | .250944E+04  |
| 17   | .116264E+01 | .000000E+00  | .224486E+04  |
| 18   | .164089E+01 | .000000E+00  | .119145E+04  |
| 19   | .258925E+01 | .000000E+00  | .881245E+03  |
| 20   | .259985E+01 | .000000E+00  | .119491E+04  |
| 21   | .100000E+01 | .000000E+00  | .291960E+04  |
| 22   | .100225E+01 | -.495566E-02 | .279982E+04  |
| 23   | .102124E+01 | -.455660E-01 | .250268E+04  |
| 24   | .112288E+01 | -.228669E+00 | .224387E+04  |
| 25   | .134956E+01 | -.596053E+00 | .151243E+04  |
| 26   | .199979E+01 | -.658377E+00 | .165930E+04  |
| 27   | .100000E+01 | .000000E+00  | .289844E+04  |
| 28   | .100111E+01 | -.962805E-02 | .289435E+04  |
| 29   | .100948E+01 | -.735945E-01 | .281329E+04  |
| 30   | .103273E+01 | -.323570E+00 | .266213E+04  |
| 31   | .103684E+01 | -.743341E+00 | .253139E+04  |
| 32   | .100234E+01 | -.106791E+01 | .293774E+04  |
| 33   | .000000E+00 | -.707834E+00 | .114014E+04  |
| 34   | .100000E+01 | .000000E+00  | .311152E+04  |



|    |             |              |             |
|----|-------------|--------------|-------------|
| 35 | .998806E+00 | -.925511E-02 | .311616E+04 |
| 36 | .988954E+00 | -.680660E-01 | .313491E+04 |
| 37 | .934268E+00 | -.277786E+00 | .319548E+04 |
| 38 | .762738E+00 | -.582812E+00 | .340835E+04 |
| 39 | .426674E+00 | -.694071E+00 | .348812E+04 |
| 40 | .000000E+00 | -.698636E+00 | .482187E+04 |
| 41 | .100000E+01 | .000000E+00  | .284683E+04 |
| 42 | .998332E+00 | -.460607E-02 | .299574E+04 |
| 43 | .982154E+00 | -.395665E-01 | .329977E+04 |
| 44 | .900347E+00 | -.148730E+00 | .359313E+04 |
| 45 | .669905E+00 | -.301696E+00 | .385179E+04 |
| 46 | .323200E+00 | -.343867E+00 | .403052E+04 |
| 47 | .000000E+00 | -.283206E+00 | .396157E+04 |
| 48 | .100000E+01 | .000000E+00  | .333287E+04 |
| 49 | .999648E+00 | .000000E+00  | .345334E+04 |
| 50 | .984750E+00 | .000000E+00  | .364775E+04 |
| 51 | .901906E+00 | .000000E+00  | .387553E+04 |
| 52 | .670744E+00 | .000000E+00  | .404052E+04 |
| 53 | .315040E+00 | .000000E+00  | .402930E+04 |
| 54 | .000000E+00 | .000000E+00  | .395505E+04 |
| 55 | .259971E+01 | .000000E+00  |             |
| 56 | .259974E+01 | .127619E-03  |             |
| 57 | .259963E+01 | .115420E-03  |             |
| 58 | .259993E+01 | .000000E+00  |             |
| 59 | .259954E+01 | .000000E+00  |             |
| 60 | .259956E+01 | .758356E-04  |             |
| 61 | .259951E+01 | .457412E-04  |             |
| 62 | .259947E+01 | .000000E+00  |             |
| 63 | .259948E+01 | .256954E-04  |             |
| 64 | .259946E+01 | .185481E-04  |             |
| 65 | .259945E+01 | .221097E-04  |             |
| 66 | .259944E+01 | -.114300E-03 |             |
| 67 | .259888E+01 | -.146438E-03 |             |
| 68 | .259743E+01 | -.568831E-02 |             |
| 69 | .259972E+01 | -.299514E-03 |             |
| 70 | .242115E+01 | -.384396E+00 |             |
| 71 | .210935E+01 | -.411481E+00 |             |
| 72 | .259945E+01 | .145818E-03  |             |
| 73 | .259920E+01 | .973566E-04  |             |
| 74 | .259931E+01 | .102603E-03  |             |
| 75 | .259983E+01 | .660039E-04  |             |
| 76 | .259945E+01 | .684597E-04  |             |
| 77 | .259937E+01 | .829105E-04  |             |
| 78 | .259941E+01 | .626057E-04  |             |
| 79 | .259944E+01 | .318587E-04  |             |
| 80 | .259942E+01 | .437465E-04  |             |
| 81 | .259942E+01 | .360067E-04  |             |
| 82 | .259942E+01 | .396826E-04  |             |
| 83 | .259932E+01 | .807676E-04  |             |
| 84 | .195157E+01 | .326024E+00  |             |
| 85 | .259940E+01 | .550372E-04  |             |
| 86 | .259942E+01 | .350325E-04  |             |
| 87 | .100062E+01 | .000000E+00  |             |
| 88 | .100000E+01 | .000000E+00  |             |
| 89 | .100065E+01 | -.106829E-02 |             |
| 90 | .101160E+01 | .000000E+00  |             |
| 91 | .100195E+01 | -.246238E-02 |             |
| 92 | .100994E+01 | -.130774E-01 |             |
| 93 | .108170E+01 | .000000E+00  |             |
| 94 | .102382E+01 | -.244406E-01 |             |
| 95 | .106786E+01 | -.775519E-01 |             |
| 96 | .141823E+01 | .000000E+00  |             |
| 97 | .116356E+01 | -.124614E+00 |             |
| 98 | .131386E+01 | -.258355E+00 |             |

|     |             |              |
|-----|-------------|--------------|
| 99  | .207627E+01 | .000000E+00  |
| 100 | .157012E+01 | -.324775E+00 |
| 101 | .188099E+01 | -.418133E+00 |
| 102 | .259601E+01 | .000000E+00  |
| 103 | .236728E+01 | -.330201E+00 |
| 104 | .100102E+01 | -.215363E-02 |
| 105 | .100000E+01 | .000000E+00  |
| 106 | .100064E+01 | -.360576E-02 |
| 107 | .101181E+01 | -.230696E-01 |
| 108 | .100155E+01 | -.778319E-02 |
| 109 | .100748E+01 | -.341765E-01 |
| 110 | .107067E+01 | -.128255E+00 |
| 111 | .101515E+01 | -.642012E-01 |
| 112 | .103787E+01 | -.175171E+00 |
| 113 | .125875E+01 | -.403954E+00 |
| 114 | .107583E+01 | -.297461E+00 |
| 115 | .112219E+01 | -.508971E+00 |
| 116 | .162218E+01 | -.696284E+00 |
| 117 | .118714E+01 | -.732043E+00 |
| 118 | .123157E+01 | -.898635E+00 |
| 119 | .155225E+01 | -.102032E+01 |
| 120 | .183738E+01 | -.967611E+00 |
| 121 | .100047E+01 | -.449811E-02 |
| 122 | .100000E+01 | .000000E+00  |
| 123 | .999672E+00 | -.467945E-02 |
| 124 | .100565E+01 | -.398923E-01 |
| 125 | .999401E+00 | -.105685E-01 |
| 126 | .997336E+00 | -.402155E-01 |
| 127 | .102540E+01 | -.195533E+00 |
| 128 | .995117E+00 | -.769462E-01 |
| 129 | .982234E+00 | -.188231E+00 |
| 130 | .105015E+01 | -.539299E+00 |
| 131 | .964160E+00 | -.322150E+00 |
| 132 | .921016E+00 | -.499331E+00 |
| 133 | .102297E+01 | -.921709E+00 |
| 134 | .857185E+00 | -.699853E+00 |
| 135 | .755991E+00 | -.798951E+00 |
| 136 | .779200E+00 | -.113989E+01 |
| 137 | .578314E+00 | -.932034E+00 |
| 138 | .383616E+00 | -.988861E+00 |
| 139 | .000000E+00 | -.992703E+00 |
| 140 | .999649E+00 | -.408629E-02 |
| 141 | .100000E+01 | .000000E+00  |
| 142 | .999109E+00 | -.235461E-02 |
| 143 | .995290E+00 | -.369908E-01 |
| 144 | .997339E+00 | -.740227E-02 |
| 145 | .990375E+00 | -.265460E-01 |
| 146 | .968944E+00 | -.171533E+00 |
| 147 | .978861E+00 | -.573516E-01 |
| 148 | .948397E+00 | -.123800E+00 |
| 149 | .860817E+00 | -.445539E+00 |
| 150 | .896737E+00 | -.223690E+00 |
| 151 | .810977E+00 | -.332443E+00 |
| 152 | .612095E+00 | -.682495E+00 |
| 153 | .686924E+00 | -.452175E+00 |
| 154 | .536691E+00 | -.514051E+00 |
| 155 | .179515E+00 | -.702185E+00 |
| 156 | .354471E+00 | -.527083E+00 |
| 157 | .173213E+00 | -.475062E+00 |
| 158 | .000000E+00 | -.450037E+00 |
| 159 | .999377E+00 | -.182779E-02 |
| 160 | .100000E+01 | .000000E+00  |
| 161 | .999836E+00 | -.296766E-03 |
| 162 | .991537E+00 | -.208654E-01 |

|     |             |              |
|-----|-------------|--------------|
| 163 | .998416E+00 | -.289652E-02 |
| 164 | .993096E+00 | -.736588E-02 |
| 165 | .946239E+00 | -.955449E-01 |
| 166 | .978858E+00 | -.224795E-01 |
| 167 | .948019E+00 | -.385419E-01 |
| 168 | .790996E+00 | -.242114E+00 |
| 169 | .889135E+00 | -.790554E-01 |
| 170 | .792949E+00 | -.108274E+00 |
| 171 | .498206E+00 | -.347215E+00 |
| 172 | .657432E+00 | -.153751E+00 |
| 173 | .490802E+00 | -.170720E+00 |
| 174 | .161175E+00 | -.315648E+00 |
| 175 | .314271E+00 | -.169851E+00 |
| 176 | .153048E+00 | -.161766E+00 |
| 177 | .000000E+00 | -.146789E+00 |
| 178 | .999867E+00 | .000000E+00  |
| 179 | .992908E+00 | .000000E+00  |
| 180 | .945811E+00 | .000000E+00  |
| 181 | .790132E+00 | .000000E+00  |
| 182 | .495372E+00 | .000000E+00  |
| 183 | .156884E+00 | .000000E+00  |



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ภาคผนวก ข

# โปรแกรมคอมพิวเตอร์ MTFLOW(v2)

### ข.1 รายละเอียดโปรแกรมคอมพิวเตอร์

```
PROGRAM MTFLOW_v2
C
C *****
C *
C * A FINITE ELEMENT COMPUTER PROGRAM FOR SOLVING THE METAL FLOW *
C * UNDER PLANE STRAIN EXTRUSION WITH THERMAL COUPLING. *
C *
C * CHAIYARIT OUPICHIT *
C *
C *****
C
C THE VALUES DECLARED IN THE PARAMETER STATEMENT BELOW SHOULD
C BE ADJUSTED ACCORDING TO THE SIZE OF THE PROBLEMS AND TYPES
C OF COMPUTERS:
C     MXPOIV = MAXIMUM NUMBER OF VELOCITY NODES IN THE MODEL
C     MXPOIP = MAXIMUM NUMBER OF PRESSURE NODES IN THE MODEL
C     MXELE  = MAXIMUM NUMBER OF ELEMENTS IN THE MODEL
C
C PARAMETER (MXPOIV=971, MXPOIP=264, MXELE=444)
C PARAMETER (MXNEQ=2*MXPOIV+MXPOIP)
C
C IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C DIMENSION COORD(MXPOIV,2), TEXT(20)
C DIMENSION UVEL(MXPOIV), VVEL(MXPOIV), PRES(MXPOIV), TEMP(MXPOIV)
C DIMENSION SOLT(MXPOIV), SOLT_O(MXPOIV), SOL(MXNEQ), SOL_O(MXNEQ)
C DIMENSION SYSK(MXNEQ,MXNEQ), SYSR(MXNEQ)
C DIMENSION VISCOUS(MXELE), UVELOC(MXPOIV), VVELOC(MXPOIV)
C DIMENSION STRINV(MXELE)
C
C CHARACTER*20 NAME1,NAME2
C CHARACTER*10 ATIME,ADATE
C
C INTEGER INTMAT(MXELE,6)
C INTEGER IBCU(MXPOIV), IBCV(MXPOIV), IBCP(MXPOIV), IBCT(MXPOIV)
C
C *****
C READ INPUT FILE
C *****
C
C OPEN INPUT FILE
C 10 WRITE(6,20)
C 20 FORMAT(/,' PLEASE ENTER THE INPUT FILE NAME:', /)
C READ(5,'(A)',ERR=10) NAME1
C OPEN(UNIT=7, FILE=NAME1, STATUS='OLD', ERR=10)
C
C OPEN OUTPUT FILES
C
C 11 WRITE(6,21)
```

```

21 FORMAT(/, ' PLEASE ENTER THE RESULT FILE NAME:',/)
READ(5, ' (A)', ERR=11) NAME2
OPEN(UNIT=8, FILE=NAME2, STATUS='NEW', ERR=11)
OPEN(UNIT=9, FILE='CHECK.OUT', STATUS='UNKNOWN')
OPEN(UNIT=10, FILE='CONV.OUT', STATUS='UNKNOWN')
C
C   READ TITLE OF COMPUTATION:
C
  READ(7, *) NLINES
  DO 100 ILINE=1, NLINES
  READ(7, 1) TEXT
  1 FORMAT(20A4)
100 CONTINUE
C
C   READ INPUT DATA:
C
  READ(7, 1) TEXT
  WRITE(9, 104)
104 FORMAT(' NPOIV NPOIP NELEM ')
  READ(7, *) NPOIV, NPOIP, NELEM
  WRITE(9, 105) NPOIV, NPOIP, NELEM
105 FORMAT(4I8)
  IF(NPOIV.GT.MXPOIV) WRITE(6, 110) NPOIV
110 FORMAT(/, ' PLEASE INCREASE THE PARAMETER MXPOIV TO', I5)
  IF(NPOIV.GT.MXPOIV) STOP
  IF(NPOIP.GT.MXPOIP) WRITE(6, 120) NPOIP
120 FORMAT(/, ' PLEASE INCREASE THE PARAMETER MXPOIP TO', I5)
  IF(NPOIP.GT.MXPOIP) STOP
  IF(NELEM.GT.MXELE) WRITE(6, 130) NELEM
130 FORMAT(/, ' PLEASE INCREASE THE PARAMETER MXELE TO', I5)
  IF(NELEM.GT.MXELE) STOP
C
C   READ MATERIAL PROPERTIES:
C
  READ(7, 1) TEXT
  WRITE(9, 134)
134 FORMAT(' YIELD STRESS INITIAL VISCOSITY MAX ITERATION DEN
*SITY HEAT CONDUCTIVITY SPECIFIC HEAT MECH HEAT')
  READ(7, *) YIELD, VIS, T_INI, MITER, DENSITY, CONDUCT, SPCHEAT, HEAT_J
  WRITE(9, 135) YIELD, VIS, T_INI, MITER, DENSITY, CONDUCT, SPCHEAT, HEAT_J
135 FORMAT(3E12.4, I4, 4E12.4)
C
C   READ NODAL COORDINATES, BOUNDARY CONDITIONS, THEIR VALUES:
C   REQUIREMENT: MAIN NODES MUST BE NUMBERED FIRST
C
  READ(7, 1) TEXT
  WRITE(9, 138) NPOIV
138 FORMAT(' NODAL INFORMATION (NODE NO., U-V-P BC, X-Y COORD,',
* ' U-V-P VALUES): [' , I4, ']' )
  DO 150 IP=1, NPOIV
  READ(7, *) I, IBCU(I), IBCV(I), IBCT(I), IBCP(I),
* (COORD(I, K), K=1, 2), UVEL(I), VVEL(I), TEMP(I), PRES(I)
  WRITE(9, 152) I, IBCU(I), IBCV(I), IBCT(I), IBCP(I),
* (COORD(I, K), K=1, 2), UVEL(I), VVEL(I), TEMP(I), PRES(I)
152 FORMAT(I6, 4I4, 6E12.4)
  IF(I.NE.IP) WRITE(6, 155) IP
155 FORMAT(/, ' NODE NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
  IF(I.NE.IP) STOP
150 CONTINUE
C
C   READ ELEMENT NODAL CONNECTIONS:
C
  READ(7, 1) TEXT
  WRITE(9, 157) NELEM

```

```

157 FORMAT(' ELEMENT NODAL CONNECTIONS: [, I4, ']')
DO 160 IE=1,NELEM
  READ(7,*) I, (INTMAT(I,J), J=1,6)
  WRITE(9,162) I, (INTMAT(I,J), J=1,6)
162 FORMAT(7I8)
  IF(I.NE.IE) WRITE(6,165) IE
165 FORMAT(/, ' ELEMENT NO.', I5, ' IN DATA FILE IS MISSING')
  IF(I.NE.IE) STOP
160 CONTINUE

      WRITE(6,220) NPOIV, NPOIP, NELEM
220 FORMAT(/, ' *** THE FINITE ELEMENT MODEL CONSISTS OF:', /,
*         '          NUMBER OF VELOCITY NODES   =', I6, /,
*         '          NUMBER OF PRESSURE NODES    =', I6, /,
*         '          NUMBER OF ELEMENTS          =', I6)
C
C   INITIAL ELEMENT VISCOSITY
C
DO 226 IE = 1,NELEM
  VISCOUS(IE) = VIS
226 CONTINUE
C
C   INITIAL ELEMENT TEMPERATURE
C
DO 227 I = 1,NPOIV
  SOLT(I) = T_INI
227 CONTINUE
C
C   ESTABLISH ALL ELEMENT MATRICES AND ASSEMBLE THEM TO
C   FORM UP SYSTEM EQUATIONS
C
*****
C           MAIN ITERATION
C *****
C
DO 1000 LOOP = 1,MITER

  WRITE(6,225) LOOP
225 FORMAT (/,10X,' *****',
*         /,10X,' ***** ITERATION NO.',I2,' *****',
*         /,10X,' *****')

  NEQ = 2*NPOIV + NPOIP
  DO 180 I=1,NEQ
    SYSR(I) = 0.
180 CONTINUE
    DO 190 I=1,NEQ
      DO 190 J=1,NEQ
        SYSK(I,J) = 0.
190 CONTINUE
C
C   BUILD UP ELEMENT MATRICES
C
WRITE(6,230)
230 FORMAT(/, ' *** ESTABLISHING ELEMENT MATRICES AND',
*         ' ASSEMBLING ELEMENT EQUATIONS ***')
  CALL TRI(NPOIV, NPOIP, NELEM, NEQ,
*         VISCOUS, COORD, INTMAT, INTMATF,
*         SYSK, SYSR, MXPOIV, MXELE, MXNEQ)
C
C   APPLY BOUNDARY CONDITIONS OF NODAL VELOCITIES AND PRESSURE
C
WRITE(6,240)
240 FORMAT(/, ' *** APPLYING BOUNDARY CONDITIONS OF NODAL',

```



```

*          ' VELOCITIES AND PRESSURES ***')
CALL APPLYBC(NPOIV, NPOIP,  NEQ,  IBCU,  IBCV,  IBCP,
*           SYSK,  SYSR,  UVEL,  VVEL,  PRES,  MXPOIV,
*           MXPOIP,  MXNEQ )
C
C   SOLVE A SET OF SIMULTANEOUS SYSTEM EQUATIONS FOR SOLUTIONS
C
WRITE(6,250)
250 FORMAT(/, ' *** SOLVING A SET OF SIMULTANEOUS EQS. FOR',
*          ' VELOCITY AND PRESSURE SOLUTIONS ***' )
WRITE(6,260)  NEQ
260 FORMAT(5X, '( TOTAL OF', I5, ' EQUATIONS TO BE SOLVED )')
CALL GAUSS(NEQ, SYSK, SYSR, SOL, MXNEQ)
C
C   COMPUTE NEW ELEMENTS VISCOSITY
C
WRITE(6,265)
265 FORMAT(/, '*** SOLVING FOR THE NEW SET OF VISCOSITY ***')
CALL ELEVIS (NPOIV,NPOIP,NELEM,NEQ,COORD,INTMAT,SOL
*           ,VISCOUS,MXPOIV,YIELD,MXELE,STRINV,SOLT)
C
C   COMPUTE ENERGY EQUATION
C
WRITE(6,264)
264 FORMAT (/, '***** SOLVING FOR NODALS TEMPERATURE *****')
CALL THERMAL (MXPOIV,MXELE,COORD,INTMAT,SOL,VISCOUS,STRINV,IBCT,
*           TEMP,SOLT,NPOIV,NELEM,DENSITY,CONDUCT,SPCHEAT,
*           YIELD,HEAT_J,MXNEQ,UVELOC,VVELOC)
C
C   CHECK CONVERGENCE
C
IF(LOOP.EQ.1) GOTO 900
WRITE(6,670)
670 FORMAT(/, '*** CHECKING CONVERGENCE ***')
CALL CONVERGE (MXNEQ,MXPOIV,MXPOIP,SOL,SOL_O,LOOP,TOLV,TOLP
*           ,TOLT,NPOIV,NPOIP,NEQ,SOLT,SOLT_O)
C
C   PRINT OUT TOLERANCE
C
IF(LOOP.EQ.2) THEN
WRITE(10,500)
500 FORMAT (/,16X, '*****' //,
*          16X, '* MFlow(v2) *' //,
*          16X, '* VELOCITY PRESSURE AND TEMPERATURE TOLERANCE *' //,
*          16X, '*****' )
WRITE(10,505)
505 FORMAT(/,5X, 'LOOP',5X, 'VELOCITY TOLERANCE',5X,
*          'PRESSURE TOLERANCE',5X, 'TEMPERATURE TOLERANCE')
ENDIF

WRITE(10,510) LOOP,TOLV,TOLP,TOLT
510 FORMAT(5X,I3,8X,F12.4,10X,F12.4,10X,F12.4)

WRITE(6,370) TOLV,TOLP,TOLT
370 FORMAT(/, ' VELOCITY TOLERANCE =',F12.4,/,
*          ' PRESSURE TOLERANCE =',F12.4,/,
*          ' TEMPERATURE TOLERANCE =',F12.4 )

IF (TOLV.LE.1.0.AND.TOLP.LE.1.0.AND.TOLT.LT.1.0) GOTO 1100
900 CONTINUE
C
C   SAVE RESULTS HISTORY
C

```

```

DO 910 IV = 1,NEQ
SOL_O(IV) = SOL(IV)
910 CONTINUE

DO 920 IT = 1,NPOIV
SOLT_O(IT) = SOLT(IT)
920 CONTINUE

1000 CONTINUE

WRITE (6,1010)
1010 FORMAT (/,'***** SOLUTIONS DO NOT CONVERGE *****')

1100 CONTINUE

C *****
C PRINT OUT SOLUTIONS OF NODAL VELOCITIES , PRESSURES
C ELEMENT STRAIN INVARIANT AND EQUVALENT STRESS:
C *****

C
C ROUND-OFF SOLUTION VALUES FOR NEAT OUTPUT:
C
ROFF = 1.E-6
DO 890 IEQ=1,NEQ
IF (ABS(SOL(IEQ)).LT.ROFF) SOL(IEQ) = 0.
890 CONTINUE
DO 891 II= 1,NPOIV
IF(ABS(SOLT(II)).LT.ROFF) SOLT(II) = 0.
891 CONTINUE

C
C WRITE OUTPUT FILE
C
WRITE(8,850)
850 FORMAT
* (/ ,8X,'*****',/,/,
* 8X,'* MTFLOW(V2) *',/,/,
* 8X,'* NODAL VELOCITY TEMPERATURE AND PRESSURE SOLUTIONS *',/,/,
* 8X,'*****')

C
C PRINT DATE AND TIME RECORD
C
CALL DATE(ADATE)
CALL TIME(ATIME)
WRITE(8,855)ADATE,ATIME
855 FORMAT(/ ,8X, A10,3X,A10 )

WRITE(8,860) NPOIV,NPOIV,NPOIP
860 FORMAT(/ ,8X,'NUMBER OF VELOCITY NODES : ' ,I5,/,
* 8X,'NUMBER OF TEMPERATURE NODES : ' ,I5,/,
* 8X,'NUMBER OF PRESSURE NODES : ' ,I5)
WRITE(8,800)
800 FORMAT
* (/ ,' NODE U-VELOCITY V-VELOCITY TEMPERATURE
*PRESSURE',/)
DO 810 I=1,NPOIP
WRITE(8,820) I , SOL(I) , SOL(I+NPOIV) , SOLT(I) , SOL(I+2*NPOIV)
820 FORMAT(I6,4E16.6 )
810 CONTINUE
DO 830 I=NPOIP+1,NPOIV
WRITE(8,840) I , SOL(I) , SOL(I+NPOIV) , SOLT(I)
840 FORMAT(I6,3E16.6)
830 CONTINUE

```

```

STOP
END
C
C-----
C
SUBROUTINE APPLYBC(NPOIV, NPOIP, NEQ, IBCU, IBCV, IBCP,
*                SYSK, SYSR, UVEL, VVEL, PRES, MXPOIV,
*                MXPOIP, MXNEQ)
C
C  APPLY BOUNDARY CONDITIONS FOR NODAL VELOCITIES AND PRESSURES
C  WITH CONDITION CODES OF:
C      0 = FREE TO CHANGE (TO BE COMPUTED)
C      1 = FIXED AS SPECIFIED
C
C  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C  DIMENSION SYSK(MXNEQ,MXNEQ), SYSR(MXNEQ)
C  DIMENSION UVEL(MXPOIV), VVEL(MXPOIV), PRES(MXPOIV)
C
C  INTEGER IBCU(MXPOIV), IBCV(MXPOIV), IBCP(MXPOIV)
C
C  APPLY BOUNDARY CONDITIONS FOR NODAL U-VELOCITIES:
C
C  IEQ1 = 1
C  IEQ2 = NPOIV
C  DO 100 IEQ=IEQ1,IEQ2
C  IEQU = IEQ
C  IF(IBCUIEQU).EQ.0) GO TO 100
C
C  DO 110 IR=1,NEQ
C  IF(IR.EQ.IEQ) GO TO 110
C  SYSR(IR) = SYSR(IR) - SYSK(IR,IEQ)*UVEL(IEQU)
C  SYSK(IR,IEQ) = 0.
110 CONTINUE
C
C  DO 120 IC=1,NEQ
C  SYSK(IEQ,IC) = 0.
120 CONTINUE
C  SYSK(IEQ,IEQ) = 1.
C  SYSR(IEQ) = UVEL(IEQU)
C
C  100 CONTINUE
C
C  APPLY BOUNDARY CONDITIONS FOR NODAL V-VELOCITIES:
C
C  IEQ1 = NPOIV + 1
C  IEQ2 = 2*NPOIV
C  DO 200 IEQ=IEQ1,IEQ2
C  IEQV = IEQ - NPOIV
C  IF(IBCUIEQV).EQ.0) GO TO 200
C
C  DO 210 IR=1,NEQ
C  IF(IR.EQ.IEQ) GO TO 210
C  SYSR(IR) = SYSR(IR) - SYSK(IR,IEQ)*VVEL(IEQV)
C  SYSK(IR,IEQ) = 0.
210 CONTINUE
C
C  DO 220 IC=1,NEQ
C  SYSK(IEQ,IC) = 0.
220 CONTINUE
C  SYSK(IEQ,IEQ) = 1.
C  SYSR(IEQ) = VVEL(IEQV)
C
C  200 CONTINUE

```

```

C
C   APPLY BOUNDARY CONDITIONS FOR NODAL PRESSURES:
C
      IEQ1 = 2*NPOIV + 1
      IEQ2 = NEQ
      DO 300 IEQ=IEQ1,IEQ2
      IEQP = IEQ - 2*NPOIV
      IF(IBCP(IEQP).EQ.0) GO TO 300
C
      DO 310 IR=1,NEQ
      IF(IR.EQ.IEQ) GO TO 310
      SYSR(IR) = SYSR(IR) - SYSK(IR,IEQ)*PRES(IEQP)
      SYSK(IR,IEQ) = 0.
310 CONTINUE
C
      DO 320 IC=1,NEQ
      SYSK(IEQ,IC) = 0.
320 CONTINUE
      SYSK(IEQ,IEQ) = 1.
      SYSR(IEQ) = PRES(IEQP)
C
300 CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
-----
C
      SUBROUTINE ASSMBLE( IE, INTMAT, AKELE, RELE, SYSK, SYSR,
*                        NPOIV, NEQ, NELEM, MXNEQ, MXELE )
C
C   ASSEMBLE ELEMENT EQUATIONS INTO SYSTEM EQUATIONS
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION AKELE(15,15), RELE(15)
      DIMENSION SYSK(MXNEQ,MXNEQ), SYSR(MXNEQ)
C
      INTEGER INTMAT(MXELE,6)
C
C   ASSEMBLING SYSTEM STIFFNESS MATRIX
C
C   CONTRIBUTION OF COEFFICIENTS ASSOCIATED WITH U & V VELOCITIES:
C
      DO 100 I=1,6
      DO 100 J=1,6
      II = INTMAT(IE,I)
      JJ = INTMAT(IE,J)
      K = I + 6
      L = J + 6
      KK = NPOIV + II
      LL = NPOIV + JJ
      SYSK(II,JJ) = SYSK(II,JJ) + AKELE(I,J)
      SYSK(II,LL) = SYSK(II,LL) + AKELE(I,L)
      SYSK(KK,JJ) = SYSK(KK,JJ) + AKELE(K,J)
      SYSK(KK,LL) = SYSK(KK,LL) + AKELE(K,L)
100 CONTINUE
C
C   CONTRIBUTION OF COEFFICIENTS ASSOCIATED WITH PRESSURE:
C
      DO 200 I=1,6
      DO 200 J=1,3
      II = INTMAT(IE,I)
      JJ = INTMAT(IE,J)
      K = I + 6

```

```

L = J + 12
KK = NPOIV + II
LL = 2*NPOIV + JJ
SYSK(II,LL) = SYSK(II,LL) + AKELE(I,L)
SYSK(KK,LL) = SYSK(KK,LL) + AKELE(K,L)
SYSK(LL,II) = SYSK(LL,II) + AKELE(L,I)
SYSK(LL,KK) = SYSK(LL,KK) + AKELE(L,K)
200 CONTINUE
C
C ASSEMBLING SYSTEM LOAD VECTOR
C
C CONTRIBUTION OF VALUES ASSOCIATED WITH U & V VELOCITIES:
C
DO 300 I=1,6
II = INTMAT(IE,I)
K = I + 6
KK = NPOIV + II
SYSR(II) = SYSR(II) + RELE(I)
SYSR(KK) = SYSR(KK) + RELE(K)
300 CONTINUE
C
C CONTRIBUTION OS VALUES ASSOCIATED WITH PRESSURE:
C
DO 400 I=1,3
II = INTMAT(IE,I)
K = I + 12
KK = 2*NPOIV + II
SYSR(KK) = SYSR(KK) + RELE(K)
400 CONTINUE
C
RETURN
END
C
C-----
C
SUBROUTINE GAUSS(N, A, B, X, MXNEQ)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION A(MXNEQ,MXNEQ), B(MXNEQ), X(MXNEQ)
C
C PERFORM SCALING:
C
CALL SCALE(N, A, B, MXNEQ)
C
C FORWARD ELIMINATION:
C
C PERFORM ACCORDING TO ORDER OF 'PRIME' FROM 1 TO N-1:
C
DO 100 IP=1,N-1
C
C PERFORM PARTIAL PIVOTING:
C
CALL PIVOT(N, A, B, MXNEQ, IP)
C
C LOOP OVER EACH EQUATION STARTING FROM THE ONE THAT CORRESPONDS
C WITH THE ORDER OF 'PRIME' PLUS ONE:
C
DO 200 IE=IP+1,N
RATIO = A(IE,IP)/A(IP,IP)
C
C COMPUTE NEW COEFFICIENTS OF THE EQUATION CONSIDERED:
C
DO 300 IC=IP+1,N
A(IE,IC) = A(IE,IC) - RATIO*A(IP,IC)
300 CONTINUE

```

```

      B(IE) = B(IE) - RATIO*B(IP)
200  CONTINUE
C
C      SET COEFFICIENTS ON LOWER LEFT PORTION TO ZERO:
C
      DO 400  IE=IP+1,N
      A(IE,IP) = 0.
400  CONTINUE
100  CONTINUE
C
C      BACK SUBSTITUTION:
C
C      COMPUTE SOLUTION OF THE LAST EQUATION:
C
      X(N) = B(N)/A(N,N)
C
C      THEN COMPUTE SOLUTIONS FROM EQUATION N-1 TO 1:
C
      DO 500  IE=N-1,1,-1
      SUM = 0.
      DO 600  IC=IE+1,N
      SUM = SUM + A(IE,IC)*X(IC)
600  CONTINUE
      X(IE) = (B(IE) - SUM)/A(IE,IE)
500  CONTINUE
      RETURN
      END
C
C-----
C
      SUBROUTINE PIVOT(N, A, B, MXNEQ, IP)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION  A(MXNEQ,MXNEQ), B(MXNEQ)
C
C      PERFORM PARTIAL PIVOTING:
C
      JP = IP
      BIG = ABS(A(IP,IP))
      DO 10  I=IP+1,N
      AMAX = ABS(A(I,IP))
      IF(AMAX.GT.BIG) THEN
      BIG = AMAX
      JP = I
      ENDIF
10  CONTINUE
      IF(JP.NE.IP) THEN
      DO 20  J=IP,N
      DUMY   = A(JP,J)
      A(JP,J) = A(IP,J)
      A(IP,J) = DUMY
20  CONTINUE
      DUMY   = B(JP)
      B(JP) = B(IP)
      B(IP) = DUMY
      ENDIF
      RETURN
      END
C
C-----
C
      SUBROUTINE SCALE(N, A, B, MXNEQ)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION  A(MXNEQ,MXNEQ), B(MXNEQ)
C

```



```

C     PERFORM SCALING:
C
      DO 10  IE=1,N
      BIG = ABS(A(IE,1))
      DO 20  IC=2,N
      AMAX = ABS(A(IE,IC))
      IF(AMAX.GT.BIG)  BIG = AMAX
20    CONTINUE
      DO 30  IC=1,N
      A(IE,IC) = A(IE,IC)/BIG
30    CONTINUE
      B(IE) = B(IE)/BIG
10    CONTINUE
      RETURN
      END
C
C-----
C
      SUBROUTINE MULMAT(A, B, C, I, J, K)
C
C     PERFORM MATRIX MULTIPLICATION: [C(I,K)] = [A(I,J)] [B(J,K)]
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION  A(I,J), B(J,K), C(I,K)
C
      DO 10  IR=1,I
      DO 10  IC=1,K
      C(IR,IC) = 0.
      DO 20  IS=1,J
      C(IR,IC) = C(IR,IC) + A(IR,IS)*B(IS,IC)
20    CONTINUE
10    CONTINUE
C
      RETURN
      END
C
C-----
C
      SUBROUTINE TRI(NPOIV, NPOIP, NELEM, NEQ,
*                  VISCOUS, COORD, INTMAT, INTMATF,
*                  SYSK, SYSR, MXPOIV, MXELE, MXNEQ)
C
C     ESTABLISH ALL ELEMENT MATRICES AND ASSEMBLE THEM TO FORM
C     UP SYSTEM EQUATIONS
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION  COORD(MXPOIV,2), SYSK(MXNEQ,MXNEQ), SYSR(MXNEQ)
      DIMENSION  A(6,6), B(3,6), C(3,6), G(3,3)
      DIMENSION  AT(6,6), BT(6,3), CT(6,3)
      DIMENSION  P66(6,6), P36(3,6), Q36(3,6), P63(6,3)
      DIMENSION  AK11(6,6), AK22(6,6), AK12(6,6), AK21(6,6)
      DIMENSION  AL1(6,3), AL2(6,3), AL1T(3,6), AL2T(3,6)
      DIMENSION  AKELE(15,15), RELE(15), VISCOUS(MXELE)
C
      INTEGER  INTMAT(MXELE,6)
C
C     SET UP [A] MATRIX:
C
      DO 10  I=1,6
      DO 10  J=1,6
      A(I,J) = 0.
10    CONTINUE
      A(1,1) = 1.
      A(2,2) = 1.

```

```

A(3,3) = 1.
A(4,4) = 4.
A(5,5) = 4.
A(6,6) = 4.
A(4,2) = -1.
A(4,3) = -1.
A(5,1) = -1.
A(5,3) = -1.
A(6,1) = -1.
A(6,2) = -1.
C
C   ALSO COMPUTE [A] TRANSPOSE:
C
DO 20 I=1,6
DO 20 J=1,6
AT(J,I) = A(I,J)
20 CONTINUE
C
C   LOOP OVER THE NUMBER OF ELEMENTS:
C
DO 500 IE=1,NELEM
  VISC = VISCOUS(IE)
C
C   FIND ELEMENT LOCAL COORDINATES:
C
  II = INTMAT(IE,1)
  JJ = INTMAT(IE,2)
  KK = INTMAT(IE,3)
C
  XG1 = COORD(II,1)
  XG2 = COORD(JJ,1)
  XG3 = COORD(KK,1)
  YG1 = COORD(II,2)
  YG2 = COORD(JJ,2)
  YG3 = COORD(KK,2)
  AREA= 0.5*(XG2*(YG3-YG1) + XG1*(YG2-YG3) + XG3*(YG1-YG2))
  IF(AREA.LE.0.) WRITE(6,5) IE
5  FORMAT(/,' !!! ERROR !!! ELEMENT NO.', I5,
*         ' HAS NEGATIVE OR ZERO AREA ', /,
*         ' --- CHECK F.E. MODEL FOR NODAL COORDINATES',
*         ' AND ELEMENT NODAL CONNECTIONS ---' )
  IF(AREA.LE.0.) STOP
C
  AREA2 = 2.*AREA
  B1 = (YG2 - YG3)/AREA2
  B2 = (YG3 - YG1)/AREA2
  B3 = (YG1 - YG2)/AREA2
  C1 = (XG3 - XG2)/AREA2
  C2 = (XG1 - XG3)/AREA2
  C3 = (XG2 - XG1)/AREA2
C
C   SET UP [B] AND [C] MATRICES:
C
DO 30 I=1,3
DO 30 J=1,6
B(I,J) = 0.
C(I,J) = 0.
30 CONTINUE
  B(1,1) = 2.*B1
  B(1,5) = B3
  B(1,6) = B2
  B(2,2) = 2.*B2
  B(2,4) = B3
  B(2,6) = B1

```

```

B(3,3) = 2.*B3
B(3,4) = B2
B(3,5) = B1
C(1,1) = 2.*C1
C(1,5) = C3
C(1,6) = C2
C(2,2) = 2.*C2
C(2,4) = C3
C(2,6) = C1
C(3,3) = 2.*C3
C(3,4) = C2
C(3,5) = C1
C
C
C   COMPUTE [B] AND [C] TRANSPOSE:
C
DO 40 I=1,3
DO 40 J=1,6
BT(J,I) = B(I,J)
CT(J,I) = C(I,J)
40 CONTINUE
C
C
C   SET UP [G] MATRIX:
C
FAC = AREA/12.
FAC2 = 2.*FAC
G(1,1) = FAC2
G(2,2) = FAC2
G(3,3) = FAC2
G(1,2) = FAC
G(1,3) = FAC
G(2,1) = FAC
G(2,3) = FAC
G(3,1) = FAC
G(3,2) = FAC
C
C
C   COMPUTE [K11] MATRIX (WITHOUT VIS):
C
CALL MULMAT( B,  A,  P36, 3, 6, 6)
CALL MULMAT( G, P36, Q36, 3, 3, 6)
CALL MULMAT(BT, Q36, P66, 6, 3, 6)
CALL MULMAT(AT, P66, AK11, 6, 6, 6)
C
C
C   COMPUTE [K22] MATRIX (WITHOUT VIS):
C
CALL MULMAT( C,  A,  P36, 3, 6, 6)
CALL MULMAT( G, P36, Q36, 3, 3, 6)
CALL MULMAT(CT, Q36, P66, 6, 3, 6)
CALL MULMAT(AT, P66, AK22, 6, 6, 6)
C
C
C   COMPUTE [K12] MATRIX (WITHOUT VIS):
C
CALL MULMAT( B,  A,  P36, 3, 6, 6)
CALL MULMAT( G, P36, Q36, 3, 3, 6)
CALL MULMAT(CT, Q36, P66, 6, 3, 6)
CALL MULMAT(AT, P66, AK12, 6, 6, 6)
C
C
C   COMPUTE ACTUAL [K11], [K22], [K12], AND [K21]:
C
DO 50 I=1,6
DO 50 J=1,6
AK11(I,J) = VISC*AK11(I,J)
AK22(I,J) = VISC*AK22(I,J)
AK12(I,J) = VISC*AK12(I,J)
AK21(J,I) = AK12(I,J)

```

```

50 CONTINUE
C
C   COMPUTE [L1] AND [L2] MATRICES:
C
CALL MULMAT(BT, G, P63, 6, 3, 3)
CALL MULMAT(AT, P63, AL1, 6, 6, 3)
CALL MULMAT(CT, G, P63, 6, 3, 3)
CALL MULMAT(AT, P63, AL2, 6, 6, 3)
C
DO 60 I=1,6
DO 60 J=1,3
AL1(I,J) = -AL1(I,J)
AL2(I,J) = -AL2(I,J)
AL1T(J,I) = AL1(I,J)
AL2T(J,I) = AL2(I,J)
60 CONTINUE
C
C   FORM UP ELEMENT STIFFNESS MATRIX AND LOAD VECTOR:
C
DO 100 I=1,15
RELE(I) = 0.
DO 100 J=1,15
AKELE(I,J) = 0.
100 CONTINUE
C
DO 110 I=1,6
DO 120 J=1,6
AKELE(I ,J ) = 2.*AK11(I,J) + AK22(I,J)
AKELE(I+6,J+6) = AK11(I,J) + 2.*AK22(I,J)
AKELE(I ,J+6) = AK12(I,J)
AKELE(I+6,J ) = AK21(I,J)
120 CONTINUE
DO 130 J=1,3
AKELE(I ,J+12) = AL1(I,J)
AKELE(I+6,J+12) = AL2(I,J)
130 CONTINUE
110 CONTINUE
DO 140 I=1,3
DO 140 J=1,6
AKELE(I+12,J ) = AL1T(I,J)
AKELE(I+12,J+6) = AL2T(I,J)
140 CONTINUE
C
C   ASSEMBLE THESE ELEMENT MATRICES TO FORM SYSTEM EQUATIONS:
C
CALL ASSMBLE( IE, INTMAT, AKELE, RELE, SYSK, SYSR,
*            NPOIV, NEQ, NELEM, MXNEQ, MXELE )
C
500 CONTINUE
C
RETURN
END
C
C-----
C
SUBROUTINE ELEVIS (NPOIV,NPOIP,NELEM,NEQ,COORD,INTMAT,SOL
*                ,VISCOUS,MXPOIV,YIELD,MXELE,STRINV,SOLT)
C
SUBROUTINE FOR COMPUTE ELEMENT STRAIN AND NONLINEAR VISCOUSITY
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION COORD(MXPOIV,2) , VISCOUS(NELEM) , STRINV(NELEM)
•          , SOL(NEQ) , SOLT(MXPOIV)

```

```

INTEGER INTMAT(MXELE,6)
DO 500 IE = 1,NELEM
II = INTMAT(IE,1)
JJ = INTMAT(IE,2)
KK = INTMAT(IE,3)
LL = INTMAT(IE,4)
MM = INTMAT(IE,5)
NN = INTMAT(IE,6)
XG1 = COORD(II,1)
XG2 = COORD(JJ,1)
XG3 = COORD(KK,1)
YG1 = COORD(II,2)
YG2 = COORD(JJ,2)
YG3 = COORD(KK,2)
AREA= 0.5*(XG2*(YG3-YG1) + XG1*(YG2-YG3) + XG3*(YG1-YG2))
B1 = (YG2 - YG3)
B2 = (YG3 - YG1)
B3 = (YG1 - YG2)
C1 = (XG3 - XG2)
C2 = (XG1 - XG3)
C3 = (XG2 - XG1)
U1 = SOL(II)
U2 = SOL(JJ)
U3 = SOL(KK)
V1 = SOL(II+NPOIV)
V2 = SOL(JJ+NPOIV)
V3 = SOL(KK+NPOIV)
STR_X = (B1*U1+B2*U2+B3*U3) / (2.*AREA)
STR_Y = (C1*V1+C2*V2+C3*V3) / (2.*AREA)
STR_XY = (C1*U1+C2*U2+C3*U3+B1*V1+B2*V2+B3*V3) / (4.*AREA)
STRINV(IE) = SQRT(2.*(STR_X*STR_X+STR_Y*STR_Y+STR_XY*STR_XY*2.))

C AVERAGE ELEMENT TEMPERATURE
AVE_T= (SOLT(II)+SOLT(JJ)+SOLT(KK)+SOLT(LL)+SOLT(MM)+SOLT(NN))/6.

C FLOW STRESS
YIELD2 = YIELD*(1-0.0007*AVE_T)

C ELEMENT VISCOSITY
VISCOUS(IE) = YIELD2/SQRT(3.)/STRINV(IE)

C CUT OFF THE INFINITE VISCOSITY
IF (VISCOUS(IE).GT.1.E6) VISCOUS(IE)=1.E6
500 CONTINUE
RETURN
END

C
C-----
C
SUBROUTINE THERMAL (MXPOIT,MXELE,COORD,INTMAT,SOL,VISCOUS,STRINV,
* IBCT,TEMP,SOLT,NPOIT,NELEM,DENSITY,CONDUCT,SPCHEAT
* ,YIELD,HEAT_J,MXNEQ,UVELOC,VVELOC)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION COORD(MXPOIT,2) , UVELOC(MXPOIT) ,VVELOC(MXPOIT)
DIMENSION SYSKT(MXPOIT,MXPOIT) ,SYSRT(MXPOIT) ,VISCOUS(MXELE)
DIMENSION STRINV(MXELE) ,SOLT(MXPOIT) ,TEMP(MXPOIT) ,SOL(MXNEQ)
INTEGER INTMAT(MXELE,6) ,IBCT(MXPOIT)

C
C BUILD U AND V VELOCITY
C
DO 5 IU=1,NPOIT
UVELOC(IU) = SOL(IU)
VVELOC(IU) = SOL(IU+NPOIT)

```

```

5 CONTINUE
      DO 50 I=1,NPOIT
        SYSRT(I) = 0.
50 CONTINUE
      DO 60 I=1,NPOIT
        DO 60 J=1,NPOIT
          SYSKT(I,J) = 0.
60 CONTINUE

C
C   BUILD UP ELEMENT MATRICES AND ASSEMBLY
C
      WRITE(6,10)
10  FORMAT(/,' *** ESTABLISHING ELEMENT MATRICES AND',
*      ' ASSEMBLING ELEMENT EQUATIONS ***'
        )
      CALL TRI_T(MXPOINT,MXELE,COORD,INTMAT,VISCOUS,STRINV,NPOIT,NELEM,
*UVELOC,VVELOC,SYSKT,SYSRT,DENSITY,CONDUCT,SPCHEAT,YIELD,HEAT_J)

C
C   APPLY BOUNDARY CONDITIONS
C
      WRITE(6,15)
15  FORMAT(/,' *** APPLYING BOUNDARY CONDITIONS***')
      CALL APPLYBC_T(NPOIT,IBCT,SYSKT,SYSRT,TEMP,MXPOINT)

C
C   SOLVE A SET OF SIMULTANEOUS EQUATION
C
      WRITE(6,20)
20  FORMAT(/,' *** SOLVING A SET OF SIMULTANEOUS EQS. FOR',
*      ' TEMPERATURE SOLUTIONS ***'
        )
      WRITE(6,30) NPOIT
30  FORMAT(5X,' ( TOTAL OF', I5,' EQUATIONS TO BE SOLVED )')
      CALL GAUSS(NPOIT,SYSKT,SYSRT,SOLT,MXPOINT)

      RETURN
      END

C
C-----
C
      SUBROUTINE TRI_T(MXPOINT,MXELE,COORD,INTMAT,VISCOUS,STRINV,NPOIT,
*      NELEM,UVELOC,VVELOC,SYSKT,SYSRT,DENSITY,CONDUCT,SPCHEAT
*      ,YIELD,HEAT_J)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION COORD(MXPOINT,2), UVELOC(MXPOINT),VVELOC(MXPOINT)
      DIMENSION SYSKT(MXPOINT,MXPOINT),SYSRT(MXPOINT),VISCOUS(MXELE)
      DIMENSION STRINV(MXELE)
      DIMENSION A(6,6), B(3,6), C(3,6), G(3,3),E(6),F(6,3)
      DIMENSION AT(6,6), BT(6,3), CT(6,3)
      DIMENSION P66(6,6),Q66(6,6),P36(3,6), Q36(3,6), P63(6,3)
      DIMENSION AKX(6,6), AKY(6,6), AMX(6,6), AMY(6,6)
      DIMENSION AKTELE(6,6), RTELE(6)

C
      INTEGER INTMAT(MXELE,6)

C
C   SET UP [A] MATRIX:
C
      DO 10 I=1,6
        DO 10 J=1,6
          A(I,J) = 0.
10 CONTINUE

```



```

A(1,1) = 1.
A(2,2) = 1.
A(3,3) = 1.
A(4,4) = 4.
A(5,5) = 4.
A(6,6) = 4.
A(4,2) = -1.
A(4,3) = -1.
A(5,1) = -1.
A(5,3) = -1.
A(6,1) = -1.
A(6,2) = -1.
C
C ALSO COMPUTE [A] TRANSPOSE:
C
DO 20 I=1,6
DO 20 J=1,6
AT(J,I) = A(I,J)
20 CONTINUE
C
C LOOP OVER THE NUMBER OF ELEMENTS:
C
DO 500 IE=1,NELEM
C
C FIND ELEMENT LOCAL COORDINATES:
C
II = INTMAT(IE,1)
JJ = INTMAT(IE,2)
KK = INTMAT(IE,3)
LL = INTMAT(IE,4)
MM = INTMAT(IE,5)
NN = INTMAT(IE,6)
C
XG1 = COORD(II,1)
XG2 = COORD(JJ,1)
XG3 = COORD(KK,1)
YG1 = COORD(II,2)
YG2 = COORD(JJ,2)
YG3 = COORD(KK,2)
AREA= 0.5*(XG2*(YG3-YG1) + XG1*(YG2-YG3) + XG3*(YG1-YG2))
IF(AREA.LE.0.) WRITE(6,5) IE
5 FORMAT(/,' !!! ERROR !!! ELEMENT NO.', I5,
* ' HAS NEGATIVE OR ZERO AREA ', /,
* ' --- CHECK F.E. MODEL FOR NODAL COORDINATES',
* ' AND ELEMENT NODAL CONNECTIONS ---' )
IF(AREA.LE.0.) STOP
C
AREA2 = 2.*AREA
B1 = (YG2 - YG3)/AREA2
B2 = (YG3 - YG1)/AREA2
B3 = (YG1 - YG2)/AREA2
C1 = (XG3 - XG2)/AREA2
C2 = (XG1 - XG3)/AREA2
C3 = (XG2 - XG1)/AREA2
C
C SET UP [B] AND [C] MATRICES:
C
DO 30 I=1,3
DO 30 J=1,6
B(I,J) = 0.
C(I,J) = 0.
30 CONTINUE
B(1,1) = 2.*B1

```

```

B(1,5) = B3
B(1,6) = B2
B(2,2) = 2.*B2
B(2,4) = B3
B(2,6) = B1
B(3,3) = 2.*B3
B(3,4) = B2
B(3,5) = B1
C(1,1) = 2.*C1
C(1,5) = C3
C(1,6) = C2
C(2,2) = 2.*C2
C(2,4) = C3
C(2,6) = C1
C(3,3) = 2.*C3
C(3,4) = C2
C(3,5) = C1

```

C  
C  
C

```

COMPUTE [B] AND [C] TRANSPOSE:

```

```

DO 40 I=1,3
DO 40 J=1,6
BT(J,I) = B(I,J)
CT(J,I) = C(I,J)
40 CONTINUE

```

C  
C  
C

```

SETUP [G] MATRIX:

```

```

FAC = AREA/12.
FAC2 = 2.*FAC
G(1,1) = FAC2
G(2,2) = FAC2
G(3,3) = FAC2
G(1,2) = FAC
G(1,3) = FAC
G(2,1) = FAC
G(2,3) = FAC
G(3,1) = FAC
G(3,2) = FAC

```

C  
C  
C

```

SETUP [E] MATRIX:

```

```

E(1) = FAC2
E(2) = FAC2
E(3) = FAC2
E(4) = FAC
E(5) = FAC
E(6) = FAC

```

C  
C  
C

```

SETUP [F] MATRIX:

```

```

FACF1 = AREA/60.
FACF2 = 2.*FACF1
FACF6 = 6.*FACF1
F(1,1) = FACF6
F(1,2) = FACF2
F(1,3) = FACF2
F(2,1) = FACF2
F(2,2) = FACF6
F(2,3) = FACF2
F(3,1) = FACF2
F(3,2) = FACF2
F(3,3) = FACF6
F(4,1) = FACF1

```

```

F(4,2) = FACF2
F(4,3) = FACF2
F(5,1) = FACF2
F(5,2) = FACF1
F(5,3) = FACF2
F(6,1) = FACF2
F(6,2) = FACF2
F(6,3) = FACF1

C
C   COMPUTE [KX] MATRIX:
C
CALL MULMAT( B, A,P36,3,6,6)
CALL MULMAT( F,P36,Q66,6,3,6)
CALL MULMAT(AT,Q66,AKX,6,6,6)

C
C   COMPUTE [KY] MATRIX:
C
CALL MULMAT( C, A,P36,3,6,6)
CALL MULMAT( F,P36,Q66,6,3,6)
CALL MULMAT(AT,Q66,AKY,6,6,6)

C
C   COMPUTE [MX] MATRIX:
C
CALL MULMAT( B, A,P36,3,6,6)
CALL MULMAT( G,P36,Q36,3,3,6)
CALL MULMAT(BT,Q36,P66,6,3,6)
CALL MULMAT(AT,P66,AMX,6,6,6)

C
C   COMPUTE [MY] MATRIX:
C
CALL MULMAT( C, A,P36,3,6,6)
CALL MULMAT( G,P36,Q36,3,3,6)
CALL MULMAT(CT,Q36,P66,6,3,6)
CALL MULMAT(AT,P66,AMY,6,6,6)

C
C   MULTIPLY [MX] AND [MY] BY CONDUCTIVITY/(SPCHEAT*DENSITY)
C
APARA = CONDUCT/(SPCHEAT*DENSITY)
DO 50 I = 1,6
DO 50 J = 1,6
AMX(I,J) = APARA*AMX(I,J)
AMY(I,J) = APARA*AMY(I,J)
50 CONTINUE

C
C   MULTIPLY [KX] AND [KY] WITH AVERAGE VELOCITIES.
C
AVE_U = (UVELOC(II)+UVELOC(JJ)+UVELOC(KK)+UVELOC(LL)
*       +UVELOC(MM)+UVELOC(NN))/6.
AVE_V = (VVELOC(II)+VVELOC(JJ)+VVELOC(KK)+VVELOC(LL)
*       +VVELOC(MM)+VVELOC(NN))/6.

DO 60 I = 1,6
DO 60 J = 1,6
AKX(I,J) = AVE_U*AKX(I,J)
AKY(I,J) = AVE_V*AKY(I,J)
60 CONTINUE

C
C   FORM UP ELEMENT THERMAL MATRIX AND LOAD VECTOR
C
DO 70 I = 1,6
RTELE(I) = 0.
DO 70 J = 1,6

```

```

      AKTELE(I,J) = 0.
70  CONTINUE

      DO 80 I = 1,6
      DO 80 J = 1,6
      AKTELE(I,J) = AKX(I,J)+AKY(I,J)+AMX(I,J)+AMY(I,J)
80  CONTINUE

      HEATG = VISCOUS(IE)*STRINV(IE)*STRINV(IE)/HEAT_J

      DO 90 I = 1,6
      SUMM = 0.
      DO 100 J = 1,6
      SUMM = AT(I,J)*E(J) + SUMM
100  CONTINUE
      RTELE(I) = HEATG*SUMM/(DENSITY*SPCHEAT)
90  CONTINUE

C
C   ASSEMBLE THESE ELEMENT MATRICES TO FORM SYSTEM EQUATIONS:
C
      CALL ASSM_T (IE,INTMAT,AKTELE,RTELE,SYSKT,SYSR,T,NPOIT
*           ,NELEM,MXPOIT,MXELE)
500  CONTINUE
      RETURN
      END

C
C-----
C
      SUBROUTINE ASSM_T(  IE, INTMAT, AKTELE, RTELE,SYSKT,SYSR,T,
*           NPOIT, NELEM, MXPOIT, MXELE )
C
C   ASSEMBLE ELEMENT EQUATIONS INTO SYSTEM EQUATIONS
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION  AKTELE(6,6), RTELE(6)
      DIMENSION  SYSKT(MXPOIT,MXPOIT), SYSRT(MXPOIT)
C
      INTEGER  INTMAT(MXELE,6)
C
C   ASSEMBLING SYSTEM STIFFNESS MATRIX
C
      DO 100 I=1,6
      DO 100 J=1,6
      II = INTMAT(IE,I)
      JJ = INTMAT(IE,J)
      SYSKT(II,JJ) = SYSKT(II,JJ) + AKTELE(I,J)
100  CONTINUE
C
C   ASSEMBLING SYSTEM LOAD VECTOR
C
      DO 200 I = 1,6
      II = INTMAT(IE,I)
      SYSRT(II) = SYSRT(II)+RTELE(I)
200  CONTINUE
      RETURN
      END

C
C-----
C
      SUBROUTINE APPLYBC_T(NPOIT,IBCT,SYSKT,SYSR,T,TEMP,MXPOIT)
C
C   APPLY BOUNDARY CONDITIONS FOR NODAL TEMPERATURE

```

```

C      WITH CONDITION CODES OF:
C          0 = FREE TO CHANGE (TO BE COMPUTED)
C          1 = FIXED AS SPECIFIED
C
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C      DIMENSION  SYSKT(MXPOIT,MXPOIT), SYSRT(MXPOIT)
C      DIMENSION  TEMP(MXPOIT)
C
C      INTEGER  IBCT(MXPOIT)
C
C      APPLY BOUNDARY CONDITIONS FOR NODAL TEMPERATURE
C
C
C      DO 100  IEQ=1,NPOIT
C          IEQT = IEQ
C          IF(IBCT(IEQT).EQ.0)  GO TO 100
C
C      DO 110  IR=1,NPOIT
C          IF(IR.EQ.IEQ)  GO TO 110
C          SYSRT(IR) = SYSRT(IR) - SYSKT(IR,IEQ)*TEMP(IEQT)
C          SYSKT(IR,IEQ) = 0.
110  CONTINUE
C
C      DO 120  IC=1,NPOIT
C          SYSKT(IEQ,IC) = 0.
120  CONTINUE
C          SYSKT(IEQ,IEQ) = 1.
C          SYSRT(IEQ) = TEMP(IEQT)
C
C      100 CONTINUE
C
C      RETURN
C      END
C
C-----
C
C      SUBROUTINE CONVERGE (MXNEQ,MXPOIV,MXPOIP,SOL,SOL_O,LOOP,TOLV,TOLP
C      * ,TOLT,NPOIV,NPOIP,NEQ,SOLT,SOLT_O)
C
C      SUBROUTINE FOR COMPUTE THE CONVERGENCE CRITERIA
C
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
C      DIMENSION SOL(MXNEQ),SOL_V(MXPOIV),SOL_P(MXPOIP),SOL_O(MXNEQ)
C      DIMENSION SOL_NV(MXPOIV),SOL_NP(MXPOIP),SOLT(MXPOIV)
C      DIMENSION SOLT_O(MXPOIV)
C
C      DO 100  IV = 1,NPOIV
C          SOL_V(IV) = SQRT((SOL(IV))**2.+(SOL(IV+NPOIV))**2.)
C          SOL_NV(IV) = SQRT((SOL_O(IV))**2.+(SOL_O(IV+NPOIV))**2.)
100  CONTINUE
C
C      DO 200  IP = 1,NPOIP
C          SOL_P(IP) = SOL(IP+(2.*NPOIV))
C          SOL_NP(IP) = SOL_O(IP+(2.*NPOIV))
200  CONTINUE
C
C      COMPUTE NECESSARY PARAMETER FOR CHECK TOLLERENCE
C
C      AAA = 0.
C      BBB = 0.
C      CCC = 0.
C      DDD = 0.

```

```

EEE = 0.
FFF = 0.
C
DO 350 J = 1,NPOIV
AA = (SOL_V(J)-SOL_NV(J))**2.
AAA = AAA + AA
BB = (SOL_NV(J))**2
BBB = BBB + BB
350 CONTINUE

DO 360 K = 1,NPOIP
CC = SOL_P(K)
CCC = CCC + CC
DD = SOL_NP(K)
DDD = DDD + DD
360 CONTINUE

DO 361 I = 1,NPOIV
EE = (SOLT(I)-SOLT_O(I))**2.
EEE = EEE + EE
FF = (SOLT_O(I))**2.
FFF = FFF + FF
361 CONTINUE

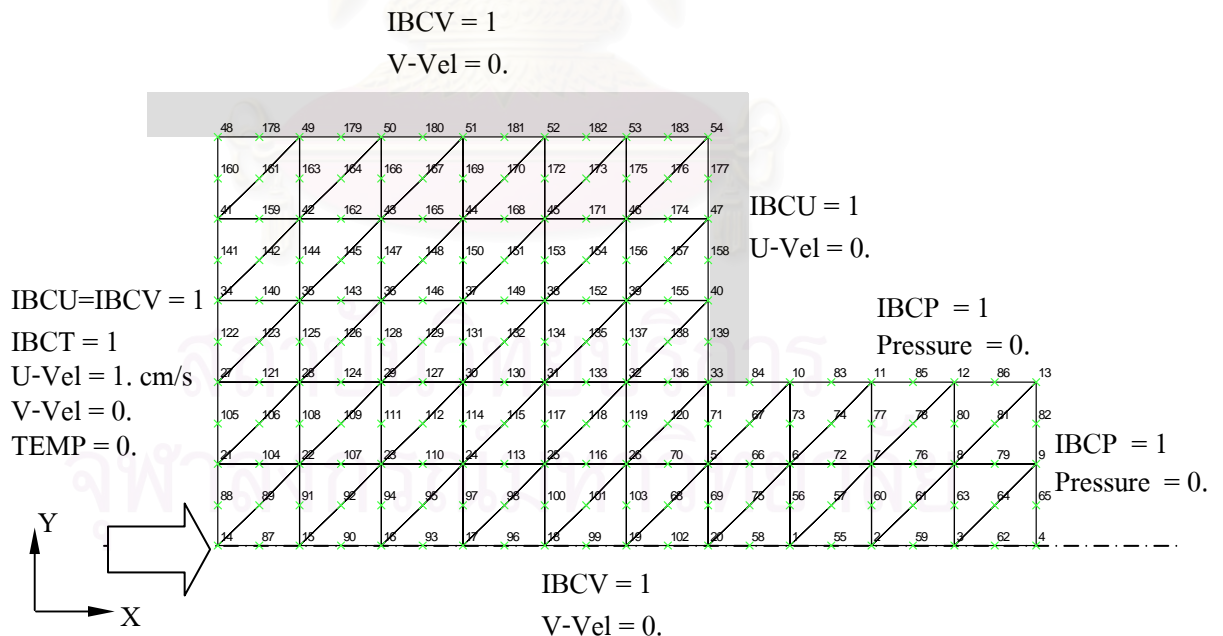
TOLV = SQRT(AAA/BBB)*100.
TOLP = ABS((DDD-CCC)/DDD)*100.
TOLT = SQRT(EEE/FFF)*100.

500 CONTINUE

RETURN
END

```

## ข.2 ตัวอย่างปัญหา



รูปที่ ข.1 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์และเงื่อนไขขอบเขต  
สำหรับตัวอย่างการใช้โปรแกรม MTFLOW(v2)



ในหัวข้อนี้จะยกตัวอย่างของปัญหาการอัดรีดสองมิติที่มีความร้อนมาเกี่ยวข้องเพื่อที่จะแสดงถึงการสร้างไฟล์ข้อมูล การกำหนดเงื่อนไขขอบเขต รวมทั้งลักษณะของไฟล์ผลลัพธ์ ตัวอย่างที่ยกขึ้นมาจะมีลักษณะเดียวกับในภาคผนวก ก คือมีอัตราส่วนการลดขนาด 0.6 แต่จะเพิ่มการคำนวณหาอุณหภูมิโดยกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่ทางเข้ามีอุณหภูมิสัมพัทธ์เป็น 0 เพื่อหาอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้นในแต่ละตำแหน่งบนโดเมนปัญหา ค่าคุณสมบัติต่างๆของวัสดุ คือ มีค่าความเค้นคราก  $1500 \text{ kg/cm}^2$  มีค่าความหนาแน่น  $0.01 \text{ kg/cm}^3$  สัมประสิทธิ์การนำความร้อน  $1.0 \text{ cal/(s.cm}^{\circ}\text{C)}$  ค่าความจุความร้อนจำเพาะ  $100.0 \text{ cal/(kg}^{\circ}\text{C)}$  และค่าคงที่สำหรับแปลงความร้อนทางกล (Mechanical Equivalent of heat, J)  $42.65 \text{ kg.cm/cal}$  และกำหนดความหนืดเริ่มต้น  $1000.0 \text{ kg.s/cm}^2$  อุณหภูมิเริ่มต้นสำหรับรอบแรกของการคำนวณเท่ากับ  $100.0^{\circ}\text{C}$  ความเร็วทางเข้า  $1.0 \text{ cm/s}$  จำนวนรอบสูงสุดในการคำนวณ 20 รอบ และแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์มีจำนวนจุดต่อความเร็ว 183 จุด จุดต่อความดัน 54 จุด และมีจำนวนเอลิเมนต์ 76 เอลิเมนต์ ลักษณะการจัดเรียงเอลิเมนต์และการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตแสดงโดยรูป ข.1 รายละเอียดของไฟล์ข้อมูลมีดังนี้

2

DIRECT EXTRUSION R=0.6 WITH THERMAL COUPLING

MESH WITH 183 NODES AND 76 ELEMENTS

| NPOIV   |         | NPOIP |        | NELEM |        | DENSITY |         | k     |      | c        |  | J     |
|---------|---------|-------|--------|-------|--------|---------|---------|-------|------|----------|--|-------|
| 183     |         | 54    |        | 76    |        | .01     |         | 1.00  |      | 100.00   |  | 42.65 |
| YIELD   | INI     | VIS   | INI    | TEMP  | MAX    | ITER    | DENSITY | k     | c    | J        |  |       |
| 1500.00 | 1000.00 |       | 100.00 |       | 20     |         |         |       |      |          |  |       |
| NODE    | IBCU    | IBCV  | IBCT   | IBCP  | X-COOR | Y-COOR  | V-VEL   | U-VEL | TEMP | PRESSURE |  |       |
| 1       | 0       | 1     | 0      | 0     | 14.000 | .000    | .000    | .000  | .000 | .000     |  |       |
| 2       | 0       | 1     | 0      | 0     | 16.000 | .000    | .000    | .000  | .000 | .000     |  |       |
| 3       | 0       | 1     | 0      | 0     | 18.000 | .000    | .000    | .000  | .000 | .000     |  |       |
| 4       | 0       | 1     | 0      | 1     | 20.000 | .000    | .000    | .000  | .000 | .000     |  |       |
| 5       | 0       | 0     | 0      | 0     | 12.000 | 2.000   | .000    | .000  | .000 | .000     |  |       |
| 6       | 0       | 0     | 0      | 0     | 14.000 | 2.000   | .000    | .000  | .000 | .000     |  |       |
| 7       | 0       | 0     | 0      | 0     | 16.000 | 2.000   | .000    | .000  | .000 | .000     |  |       |
| 8       | 0       | 0     | 0      | 0     | 18.000 | 2.000   | .000    | .000  | .000 | .000     |  |       |
| 9       | 0       | 0     | 0      | 1     | 20.000 | 2.000   | .000    | .000  | .000 | .000     |  |       |
| 10      | 0       | 0     | 0      | 1     | 14.000 | 4.000   | .000    | .000  | .000 | .000     |  |       |
| 11      | 0       | 0     | 0      | 1     | 16.000 | 4.000   | .000    | .000  | .000 | .000     |  |       |
| 12      | 0       | 0     | 0      | 1     | 18.000 | 4.000   | .000    | .000  | .000 | .000     |  |       |
| 13      | 0       | 0     | 0      | 1     | 20.000 | 4.000   | .000    | .000  | .000 | .000     |  |       |
| 14      | 1       | 1     | 1      | 0     | .000   | .000    | 1.000   | .000  | .000 | .000     |  |       |
| 15      | 0       | 1     | 0      | 0     | 2.000  | .000    | .000    | .000  | .000 | .000     |  |       |
| 16      | 0       | 1     | 0      | 0     | 4.000  | .000    | .000    | .000  | .000 | .000     |  |       |
| 17      | 0       | 1     | 0      | 0     | 6.000  | .000    | .000    | .000  | .000 | .000     |  |       |
| 18      | 0       | 1     | 0      | 0     | 8.000  | .000    | .000    | .000  | .000 | .000     |  |       |
| 19      | 0       | 1     | 0      | 0     | 10.000 | .000    | .000    | .000  | .000 | .000     |  |       |
| 20      | 0       | 1     | 0      | 0     | 12.000 | .000    | .000    | .000  | .000 | .000     |  |       |
| 21      | 1       | 1     | 1      | 0     | .000   | 2.000   | 1.000   | .000  | .000 | .000     |  |       |
| 22      | 0       | 0     | 0      | 0     | 2.000  | 2.000   | .000    | .000  | .000 | .000     |  |       |
| 23      | 0       | 0     | 0      | 0     | 4.000  | 2.000   | .000    | .000  | .000 | .000     |  |       |
| 24      | 0       | 0     | 0      | 0     | 6.000  | 2.000   | .000    | .000  | .000 | .000     |  |       |
| 25      | 0       | 0     | 0      | 0     | 8.000  | 2.000   | .000    | .000  | .000 | .000     |  |       |
| 26      | 0       | 0     | 0      | 0     | 10.000 | 2.000   | .000    | .000  | .000 | .000     |  |       |
| 27      | 1       | 1     | 1      | 0     | .000   | 4.000   | 1.000   | .000  | .000 | .000     |  |       |
| 28      | 0       | 0     | 0      | 0     | 2.000  | 4.000   | .000    | .000  | .000 | .000     |  |       |

|    |   |   |   |    |        |        |       |      |      |      |
|----|---|---|---|----|--------|--------|-------|------|------|------|
| 29 | 0 | 0 | 0 | 0  | 4.000  | 4.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 30 | 0 | 0 | 0 | 0  | 6.000  | 4.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 31 | 0 | 0 | 0 | 0  | 8.000  | 4.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 32 | 0 | 0 | 0 | 0  | 10.000 | 4.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 33 | 1 | 0 | 0 | 0  | 12.000 | 4.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 34 | 1 | 1 | 1 | 0  | .000   | 6.000  | 1.000 | .000 | .000 | .000 |
| 35 | 0 | 0 | 0 | 0  | 2.000  | 6.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 36 | 0 | 0 | 0 | 0  | 4.000  | 6.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 37 | 0 | 0 | 0 | 0  | 6.000  | 6.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 38 | 0 | 0 | 0 | 0  | 8.000  | 6.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 39 | 0 | 0 | 0 | 0  | 10.000 | 6.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 40 | 1 | 0 | 0 | 0  | 12.000 | 6.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 41 | 1 | 1 | 1 | 0  | .000   | 8.000  | 1.000 | .000 | .000 | .000 |
| 42 | 0 | 0 | 0 | 0  | 2.000  | 8.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 43 | 0 | 0 | 0 | 0  | 4.000  | 8.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 44 | 0 | 0 | 0 | 0  | 6.000  | 8.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 45 | 0 | 0 | 0 | 0  | 8.000  | 8.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 46 | 0 | 0 | 0 | 0  | 10.000 | 8.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 47 | 1 | 0 | 0 | 0  | 12.000 | 8.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 48 | 1 | 1 | 1 | 0  | .000   | 10.000 | 1.000 | .000 | .000 | .000 |
| 49 | 0 | 1 | 0 | 0  | 2.000  | 10.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 50 | 0 | 1 | 0 | 0  | 4.000  | 10.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 51 | 0 | 1 | 0 | 0  | 6.000  | 10.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 52 | 0 | 1 | 0 | 0  | 8.000  | 10.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 53 | 0 | 1 | 0 | 0  | 10.000 | 10.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 54 | 1 | 1 | 0 | 0  | 12.000 | 10.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 55 | 0 | 1 | 0 | -1 | 15.000 | .000   | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 56 | 0 | 0 | 0 | -1 | 14.000 | 1.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 57 | 0 | 0 | 0 | -1 | 15.000 | 1.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 58 | 0 | 1 | 0 | -1 | 13.000 | .000   | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 59 | 0 | 1 | 0 | -1 | 17.000 | .000   | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 60 | 0 | 0 | 0 | -1 | 16.000 | 1.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 61 | 0 | 0 | 0 | -1 | 17.000 | 1.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 62 | 0 | 1 | 0 | -1 | 19.000 | .000   | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 63 | 0 | 0 | 0 | -1 | 18.000 | 1.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 64 | 0 | 0 | 0 | -1 | 19.000 | 1.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 65 | 0 | 0 | 0 | -1 | 20.000 | 1.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 66 | 0 | 0 | 0 | -1 | 13.000 | 2.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 67 | 0 | 0 | 0 | -1 | 13.000 | 3.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 68 | 0 | 0 | 0 | -1 | 11.000 | 1.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 69 | 0 | 0 | 0 | -1 | 12.000 | 1.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 70 | 0 | 0 | 0 | -1 | 11.000 | 2.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 71 | 0 | 0 | 0 | -1 | 12.000 | 3.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 72 | 0 | 0 | 0 | -1 | 15.000 | 2.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 73 | 0 | 0 | 0 | -1 | 14.000 | 3.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 74 | 0 | 0 | 0 | -1 | 15.000 | 3.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 75 | 0 | 0 | 0 | -1 | 13.000 | 1.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 76 | 0 | 0 | 0 | -1 | 17.000 | 2.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 77 | 0 | 0 | 0 | -1 | 16.000 | 3.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 78 | 0 | 0 | 0 | -1 | 17.000 | 3.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 79 | 0 | 0 | 0 | -1 | 19.000 | 2.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 80 | 0 | 0 | 0 | -1 | 18.000 | 3.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 81 | 0 | 0 | 0 | -1 | 19.000 | 3.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 82 | 0 | 0 | 0 | -1 | 20.000 | 3.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 83 | 0 | 0 | 0 | -1 | 15.000 | 4.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 84 | 0 | 0 | 0 | -1 | 13.000 | 4.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 85 | 0 | 0 | 0 | -1 | 17.000 | 4.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 86 | 0 | 0 | 0 | -1 | 19.000 | 4.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 87 | 0 | 1 | 0 | -1 | 1.000  | .000   | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 88 | 1 | 1 | 1 | -1 | .000   | 1.000  | 1.000 | .000 | .000 | .000 |
| 89 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1.000  | 1.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 90 | 0 | 1 | 0 | -1 | 3.000  | .000   | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 91 | 0 | 0 | 0 | -1 | 2.000  | 1.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 92 | 0 | 0 | 0 | -1 | 3.000  | 1.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |

|     |   |   |   |    |        |       |       |      |      |      |
|-----|---|---|---|----|--------|-------|-------|------|------|------|
| 93  | 0 | 1 | 0 | -1 | 5.000  | .000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 94  | 0 | 0 | 0 | -1 | 4.000  | 1.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 95  | 0 | 0 | 0 | -1 | 5.000  | 1.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 96  | 0 | 1 | 0 | -1 | 7.000  | .000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 97  | 0 | 0 | 0 | -1 | 6.000  | 1.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 98  | 0 | 0 | 0 | -1 | 7.000  | 1.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 99  | 0 | 1 | 0 | -1 | 9.000  | .000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 100 | 0 | 0 | 0 | -1 | 8.000  | 1.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 101 | 0 | 0 | 0 | -1 | 9.000  | 1.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 102 | 0 | 1 | 0 | -1 | 11.000 | .000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 103 | 0 | 0 | 0 | -1 | 10.000 | 1.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 104 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1.000  | 2.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 105 | 1 | 1 | 1 | -1 | .000   | 3.000 | 1.000 | .000 | .000 | .000 |
| 106 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1.000  | 3.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 107 | 0 | 0 | 0 | -1 | 3.000  | 2.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 108 | 0 | 0 | 0 | -1 | 2.000  | 3.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 109 | 0 | 0 | 0 | -1 | 3.000  | 3.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 110 | 0 | 0 | 0 | -1 | 5.000  | 2.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 111 | 0 | 0 | 0 | -1 | 4.000  | 3.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 112 | 0 | 0 | 0 | -1 | 5.000  | 3.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 113 | 0 | 0 | 0 | -1 | 7.000  | 2.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 114 | 0 | 0 | 0 | -1 | 6.000  | 3.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 115 | 0 | 0 | 0 | -1 | 7.000  | 3.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 116 | 0 | 0 | 0 | -1 | 9.000  | 2.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 117 | 0 | 0 | 0 | -1 | 8.000  | 3.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 118 | 0 | 0 | 0 | -1 | 9.000  | 3.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 119 | 0 | 0 | 0 | -1 | 10.000 | 3.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 120 | 0 | 0 | 0 | -1 | 11.000 | 3.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 121 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1.000  | 4.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 122 | 1 | 1 | 1 | -1 | .000   | 5.000 | 1.000 | .000 | .000 | .000 |
| 123 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1.000  | 5.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 124 | 0 | 0 | 0 | -1 | 3.000  | 4.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 125 | 0 | 0 | 0 | -1 | 2.000  | 5.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 126 | 0 | 0 | 0 | -1 | 3.000  | 5.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 127 | 0 | 0 | 0 | -1 | 5.000  | 4.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 128 | 0 | 0 | 0 | -1 | 4.000  | 5.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 129 | 0 | 0 | 0 | -1 | 5.000  | 5.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 130 | 0 | 0 | 0 | -1 | 7.000  | 4.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 131 | 0 | 0 | 0 | -1 | 6.000  | 5.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 132 | 0 | 0 | 0 | -1 | 7.000  | 5.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 133 | 0 | 0 | 0 | -1 | 9.000  | 4.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 134 | 0 | 0 | 0 | -1 | 8.000  | 5.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 135 | 0 | 0 | 0 | -1 | 9.000  | 5.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 136 | 0 | 0 | 0 | -1 | 11.000 | 4.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 137 | 0 | 0 | 0 | -1 | 10.000 | 5.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 138 | 0 | 0 | 0 | -1 | 11.000 | 5.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 139 | 1 | 0 | 0 | -1 | 12.000 | 5.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 140 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1.000  | 6.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 141 | 1 | 1 | 1 | -1 | .000   | 7.000 | 1.000 | .000 | .000 | .000 |
| 142 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1.000  | 7.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 143 | 0 | 0 | 0 | -1 | 3.000  | 6.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 144 | 0 | 0 | 0 | -1 | 2.000  | 7.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 145 | 0 | 0 | 0 | -1 | 3.000  | 7.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 146 | 0 | 0 | 0 | -1 | 5.000  | 6.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 147 | 0 | 0 | 0 | -1 | 4.000  | 7.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 148 | 0 | 0 | 0 | -1 | 5.000  | 7.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 149 | 0 | 0 | 0 | -1 | 7.000  | 6.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 150 | 0 | 0 | 0 | -1 | 6.000  | 7.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 151 | 0 | 0 | 0 | -1 | 7.000  | 7.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 152 | 0 | 0 | 0 | -1 | 9.000  | 6.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 153 | 0 | 0 | 0 | -1 | 8.000  | 7.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 154 | 0 | 0 | 0 | -1 | 9.000  | 7.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 155 | 0 | 0 | 0 | -1 | 11.000 | 6.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 156 | 0 | 0 | 0 | -1 | 10.000 | 7.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |

|     |   |   |   |    |        |        |       |      |      |      |
|-----|---|---|---|----|--------|--------|-------|------|------|------|
| 157 | 0 | 0 | 0 | -1 | 11.000 | 7.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 158 | 1 | 0 | 0 | -1 | 12.000 | 7.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 159 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1.000  | 8.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 160 | 1 | 1 | 1 | -1 | .000   | 9.000  | 1.000 | .000 | .000 | .000 |
| 161 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1.000  | 9.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 162 | 0 | 0 | 0 | -1 | 3.000  | 8.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 163 | 0 | 0 | 0 | -1 | 2.000  | 9.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 164 | 0 | 0 | 0 | -1 | 3.000  | 9.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 165 | 0 | 0 | 0 | -1 | 5.000  | 8.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 166 | 0 | 0 | 0 | -1 | 4.000  | 9.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 167 | 0 | 0 | 0 | -1 | 5.000  | 9.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 168 | 0 | 0 | 0 | -1 | 7.000  | 8.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 169 | 0 | 0 | 0 | -1 | 6.000  | 9.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 170 | 0 | 0 | 0 | -1 | 7.000  | 9.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 171 | 0 | 0 | 0 | -1 | 9.000  | 8.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 172 | 0 | 0 | 0 | -1 | 8.000  | 9.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 173 | 0 | 0 | 0 | -1 | 9.000  | 9.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 174 | 0 | 0 | 0 | -1 | 11.000 | 8.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 175 | 0 | 0 | 0 | -1 | 10.000 | 9.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 176 | 0 | 0 | 0 | -1 | 11.000 | 9.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 177 | 1 | 0 | 0 | -1 | 12.000 | 9.000  | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 178 | 0 | 1 | 0 | -1 | 1.000  | 10.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 179 | 0 | 1 | 0 | -1 | 3.000  | 10.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 180 | 0 | 1 | 0 | -1 | 5.000  | 10.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 181 | 0 | 1 | 0 | -1 | 7.000  | 10.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 182 | 0 | 1 | 0 | -1 | 9.000  | 10.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |
| 183 | 0 | 1 | 0 | -1 | 11.000 | 10.000 | .000  | .000 | .000 | .000 |

## ELEMENT NODAL CONNECTION [ 76 ] :

|    |    |    |    |     |     |     |
|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| 1  | 14 | 22 | 21 | 104 | 88  | 89  |
| 2  | 21 | 28 | 27 | 121 | 105 | 106 |
| 3  | 27 | 35 | 34 | 140 | 122 | 123 |
| 4  | 34 | 42 | 41 | 159 | 141 | 142 |
| 5  | 41 | 49 | 48 | 178 | 160 | 161 |
| 6  | 14 | 15 | 22 | 91  | 89  | 87  |
| 7  | 21 | 22 | 28 | 108 | 106 | 104 |
| 8  | 27 | 28 | 35 | 125 | 123 | 121 |
| 9  | 34 | 35 | 42 | 144 | 142 | 140 |
| 10 | 41 | 42 | 49 | 163 | 161 | 159 |
| 11 | 15 | 23 | 22 | 107 | 91  | 92  |
| 12 | 22 | 29 | 28 | 124 | 108 | 109 |
| 13 | 28 | 36 | 35 | 143 | 125 | 126 |
| 14 | 35 | 43 | 42 | 162 | 144 | 145 |
| 15 | 42 | 50 | 49 | 179 | 163 | 164 |
| 16 | 15 | 16 | 23 | 94  | 92  | 90  |
| 17 | 22 | 23 | 29 | 111 | 109 | 107 |
| 18 | 28 | 29 | 36 | 128 | 126 | 124 |
| 19 | 35 | 36 | 43 | 147 | 145 | 143 |
| 20 | 42 | 43 | 50 | 166 | 164 | 162 |
| 21 | 16 | 24 | 23 | 110 | 94  | 95  |
| 22 | 23 | 30 | 29 | 127 | 111 | 112 |
| 23 | 29 | 37 | 36 | 146 | 128 | 129 |
| 24 | 36 | 44 | 43 | 165 | 147 | 148 |
| 25 | 43 | 51 | 50 | 180 | 166 | 167 |
| 26 | 16 | 17 | 24 | 97  | 95  | 93  |
| 27 | 23 | 24 | 30 | 114 | 112 | 110 |
| 28 | 29 | 30 | 37 | 131 | 129 | 127 |
| 29 | 36 | 37 | 44 | 150 | 148 | 146 |
| 30 | 43 | 44 | 51 | 169 | 167 | 165 |
| 31 | 17 | 25 | 24 | 113 | 97  | 98  |
| 32 | 24 | 31 | 30 | 130 | 114 | 115 |
| 33 | 30 | 38 | 37 | 149 | 131 | 132 |
| 34 | 37 | 45 | 44 | 168 | 150 | 151 |
| 35 | 44 | 52 | 51 | 181 | 169 | 170 |

|    |    |    |    |     |     |     |
|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| 36 | 17 | 18 | 25 | 100 | 98  | 96  |
| 37 | 24 | 25 | 31 | 117 | 115 | 113 |
| 38 | 30 | 31 | 38 | 134 | 132 | 130 |
| 39 | 37 | 38 | 45 | 153 | 151 | 149 |
| 40 | 44 | 45 | 52 | 172 | 170 | 168 |
| 41 | 18 | 26 | 25 | 116 | 100 | 101 |
| 42 | 25 | 32 | 31 | 133 | 117 | 118 |
| 43 | 31 | 39 | 38 | 152 | 134 | 135 |
| 44 | 38 | 46 | 45 | 171 | 153 | 154 |
| 45 | 45 | 53 | 52 | 182 | 172 | 173 |
| 46 | 18 | 19 | 26 | 103 | 101 | 99  |
| 47 | 25 | 26 | 32 | 119 | 118 | 116 |
| 48 | 31 | 32 | 39 | 137 | 135 | 133 |
| 49 | 38 | 39 | 46 | 156 | 154 | 152 |
| 50 | 45 | 46 | 53 | 175 | 173 | 171 |
| 51 | 19 | 5  | 26 | 70  | 103 | 68  |
| 52 | 26 | 33 | 32 | 136 | 119 | 120 |
| 53 | 32 | 40 | 39 | 155 | 137 | 138 |
| 54 | 39 | 47 | 46 | 174 | 156 | 157 |
| 55 | 46 | 54 | 53 | 183 | 175 | 176 |
| 56 | 19 | 20 | 5  | 69  | 68  | 102 |
| 57 | 26 | 5  | 33 | 71  | 120 | 70  |
| 58 | 32 | 33 | 40 | 139 | 138 | 136 |
| 59 | 39 | 40 | 47 | 158 | 157 | 155 |
| 60 | 46 | 47 | 54 | 177 | 176 | 174 |
| 61 | 20 | 6  | 5  | 66  | 69  | 75  |
| 62 | 5  | 10 | 33 | 84  | 71  | 67  |
| 63 | 20 | 1  | 6  | 56  | 75  | 58  |
| 64 | 5  | 6  | 10 | 73  | 67  | 66  |
| 65 | 1  | 7  | 6  | 72  | 56  | 57  |
| 66 | 6  | 11 | 10 | 83  | 73  | 74  |
| 67 | 1  | 2  | 7  | 60  | 57  | 55  |
| 68 | 6  | 7  | 11 | 77  | 74  | 72  |
| 69 | 2  | 8  | 7  | 76  | 60  | 61  |
| 70 | 7  | 12 | 11 | 85  | 77  | 78  |
| 71 | 2  | 3  | 8  | 63  | 61  | 59  |
| 72 | 7  | 8  | 12 | 80  | 78  | 76  |
| 73 | 3  | 9  | 8  | 79  | 63  | 64  |
| 74 | 8  | 13 | 12 | 86  | 80  | 81  |
| 75 | 3  | 4  | 9  | 65  | 64  | 62  |
| 76 | 8  | 9  | 13 | 82  | 81  | 79  |

ผลการคำนวณจะอยู่ในรูปของค่าความเร็ว ความดัน และอุณหภูมิที่จุดต่อต่างๆภายในแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ มีรายละเอียดดังนี้

\*\*\*\*\*  
 \* MTFLOW(v2) \*  
 \* NODAL VELOCITY TEMPERATURE AND PRESSURE SOLUTIONS \*  
 \*\*\*\*\*

OUTPUT RECORDED ON :31-May-00 21:38:09

NUMBER OF VELOCITY NODES : 183  
 NUMBER OF TEMPERATURE NODES : 183  
 NUMBER OF PRESSURE NODES : 54

NODE U-VELOCITY V-VELOCITY TEMPERATURE PRESSURE

|    |             |              |             |              |
|----|-------------|--------------|-------------|--------------|
| 1  | .260285E+01 | .000000E+00  | .539073E+02 | .510018E+03  |
| 2  | .260285E+01 | .000000E+00  | .588143E+02 | .331173E+03  |
| 3  | .260285E+01 | .000000E+00  | .623881E+02 | .143078E+03  |
| 4  | .260285E+01 | .000000E+00  | .645779E+02 | .000000E+00  |
| 5  | .260279E+01 | -.301625E-03 | .636697E+02 | -.918422E+02 |
| 6  | .260285E+01 | .000000E+00  | .676556E+02 | -.345830E+03 |
| 7  | .260285E+01 | .000000E+00  | .690090E+02 | .799896E+02  |
| 8  | .260285E+01 | .000000E+00  | .692771E+02 | -.370154E+03 |
| 9  | .260285E+01 | .000000E+00  | .692846E+02 | .000000E+00  |
| 10 | .260285E+01 | .000000E+00  | .894176E+02 | .000000E+00  |
| 11 | .260285E+01 | .000000E+00  | .804393E+02 | .000000E+00  |
| 12 | .260285E+01 | .000000E+00  | .762607E+02 | .000000E+00  |
| 13 | .260285E+01 | .000000E+00  | .740904E+02 | .000000E+00  |
| 14 | .100000E+01 | .000000E+00  | .000000E+00 | .303453E+04  |
| 15 | .100046E+01 | .000000E+00  | .663972E+00 | .296576E+04  |
| 16 | .100979E+01 | .000000E+00  | .357714E+01 | .242969E+04  |
| 17 | .110842E+01 | .000000E+00  | .119796E+02 | .215201E+04  |
| 18 | .154605E+01 | .000000E+00  | .271677E+02 | .113066E+04  |
| 19 | .259896E+01 | .000000E+00  | .434591E+02 | .800071E+03  |
| 20 | .260285E+01 | .000000E+00  | .482740E+02 | .107050E+04  |
| 21 | .100000E+01 | .000000E+00  | .000000E+00 | .287664E+04  |
| 22 | .100070E+01 | -.140825E-02 | .649756E+00 | .268703E+04  |
| 23 | .101054E+01 | -.242076E-01 | .355588E+01 | .237331E+04  |
| 24 | .108905E+01 | -.183934E+00 | .118189E+02 | .215598E+04  |
| 25 | .130525E+01 | -.594400E+00 | .269832E+02 | .145487E+04  |
| 26 | .194683E+01 | -.731318E+00 | .469342E+02 | .154631E+04  |
| 27 | .100000E+01 | .000000E+00  | .000000E+00 | .280338E+04  |
| 28 | .100030E+01 | -.292893E-02 | .677888E+00 | .273731E+04  |
| 29 | .100485E+01 | -.415650E-01 | .369640E+01 | .266639E+04  |
| 30 | .102511E+01 | -.268181E+00 | .122836E+02 | .255364E+04  |
| 31 | .103009E+01 | -.745187E+00 | .285577E+02 | .244094E+04  |
| 32 | .992925E+00 | -.113085E+01 | .527075E+02 | .284955E+04  |
| 33 | .000000E+00 | -.751664E+00 | .750224E+02 | .111202E+04  |
| 34 | .100000E+01 | .000000E+00  | .000000E+00 | .296702E+04  |
| 35 | .999609E+00 | -.270611E-02 | .618369E+00 | .303598E+04  |
| 36 | .993364E+00 | -.376216E-01 | .342038E+01 | .305180E+04  |
| 37 | .945074E+00 | -.224295E+00 | .118367E+02 | .308741E+04  |
| 38 | .772003E+00 | -.574085E+00 | .290489E+02 | .327383E+04  |
| 39 | .426906E+00 | -.750537E+00 | .535129E+02 | .338660E+04  |
| 40 | .000000E+00 | -.775362E+00 | .680661E+02 | .465435E+04  |
| 41 | .100000E+01 | .000000E+00  | .000000E+00 | .269688E+04  |
| 42 | .999507E+00 | -.120380E-02 | .496903E+00 | .281114E+04  |
| 43 | .991683E+00 | -.197896E-01 | .284792E+01 | .311003E+04  |
| 44 | .933566E+00 | -.113803E+00 | .105974E+02 | .342022E+04  |
| 45 | .724762E+00 | -.292830E+00 | .280917E+02 | .371889E+04  |
| 46 | .362439E+00 | -.385177E+00 | .526405E+02 | .393183E+04  |
| 47 | .000000E+00 | -.340607E+00 | .656364E+02 | .385077E+04  |
| 48 | .100000E+01 | .000000E+00  | .000000E+00 | .309134E+04  |
| 49 | .999996E+00 | .000000E+00  | .397472E+00 | .330150E+04  |
| 50 | .995494E+00 | .000000E+00  | .241612E+01 | .353295E+04  |
| 51 | .946779E+00 | .000000E+00  | .963048E+01 | .377604E+04  |
| 52 | .750154E+00 | .000000E+00  | .270886E+02 | .394611E+04  |
| 53 | .377919E+00 | .000000E+00  | .521245E+02 | .392748E+04  |
| 54 | .000000E+00 | .000000E+00  | .651590E+02 | .384544E+04  |
| 55 | .260285E+01 | .000000E+00  | .566584E+02 |              |
| 56 | .260285E+01 | .000000E+00  | .576846E+02 |              |
| 57 | .260285E+01 | .000000E+00  | .598475E+02 |              |
| 58 | .260285E+01 | .000000E+00  | .513278E+02 |              |
| 59 | .260285E+01 | .000000E+00  | .608586E+02 |              |
| 60 | .260285E+01 | .000000E+00  | .617217E+02 |              |
| 61 | .260285E+01 | .000000E+00  | .631582E+02 |              |
| 62 | .260285E+01 | .000000E+00  | .638430E+02 |              |
| 63 | .260285E+01 | .000000E+00  | .644007E+02 |              |



|     |             |              |             |
|-----|-------------|--------------|-------------|
| 64  | .260285E+01 | .000000E+00  | .653176E+02 |
| 65  | .260285E+01 | .000000E+00  | .658161E+02 |
| 66  | .260285E+01 | -.437954E-04 | .660720E+02 |
| 67  | .260276E+01 | -.528993E-04 | .818135E+02 |
| 68  | .260193E+01 | -.213337E-02 | .492282E+02 |
| 69  | .260284E+01 | -.689232E-04 | .522055E+02 |
| 70  | .239738E+01 | -.429102E+00 | .568118E+02 |
| 71  | .208981E+01 | -.434064E+00 | .746507E+02 |
| 72  | .260285E+01 | .000000E+00  | .684413E+02 |
| 73  | .260285E+01 | .000000E+00  | .805447E+02 |
| 74  | .260285E+01 | .000000E+00  | .785372E+02 |
| 75  | .260285E+01 | .000000E+00  | .551065E+02 |
| 76  | .260285E+01 | .000000E+00  | .690984E+02 |
| 77  | .260285E+01 | .000000E+00  | .768109E+02 |
| 78  | .260285E+01 | .000000E+00  | .753085E+02 |
| 79  | .260285E+01 | .000000E+00  | .691997E+02 |
| 80  | .260285E+01 | .000000E+00  | .741596E+02 |
| 81  | .260285E+01 | .000000E+00  | .731456E+02 |
| 82  | .260285E+01 | .000000E+00  | .726519E+02 |
| 83  | .260285E+01 | .000000E+00  | .840080E+02 |
| 84  | .195989E+01 | .336833E+00  | .888336E+02 |
| 85  | .260285E+01 | .000000E+00  | .780360E+02 |
| 86  | .260285E+01 | .000000E+00  | .748482E+02 |
| 87  | .100016E+01 | .000000E+00  | .158858E+00 |
| 88  | .100000E+01 | .000000E+00  | .000000E+00 |
| 89  | .100019E+01 | -.285254E-03 | .166110E+00 |
| 90  | .100507E+01 | .000000E+00  | .148892E+01 |
| 91  | .100053E+01 | -.678185E-03 | .623225E+00 |
| 92  | .100449E+01 | -.626390E-02 | .150750E+01 |
| 93  | .105087E+01 | .000000E+00  | .679313E+01 |
| 94  | .101078E+01 | -.127879E-01 | .347451E+01 |
| 95  | .104299E+01 | -.573288E-01 | .673363E+01 |
| 96  | .134211E+01 | .000000E+00  | .191975E+02 |
| 97  | .111265E+01 | -.100714E+00 | .117222E+02 |
| 98  | .125088E+01 | -.243728E+00 | .187618E+02 |
| 99  | .202951E+01 | .000000E+00  | .362209E+02 |
| 100 | .149599E+01 | -.326237E+00 | .269539E+02 |
| 101 | .180593E+01 | -.459699E+00 | .360104E+02 |
| 102 | .260146E+01 | .000000E+00  | .458470E+02 |
| 103 | .234520E+01 | -.367329E+00 | .442517E+02 |
| 104 | .100033E+01 | -.597061E-03 | .173608E+00 |
| 105 | .100000E+01 | .000000E+00  | .000000E+00 |
| 106 | .100020E+01 | -.104827E-02 | .179524E+00 |
| 107 | .100571E+01 | -.115470E-01 | .154661E+01 |
| 108 | .100046E+01 | -.230779E-02 | .662395E+00 |
| 109 | .100367E+01 | -.178826E-01 | .159678E+01 |
| 110 | .104794E+01 | -.969978E-01 | .679136E+01 |
| 111 | .100739E+01 | -.354303E-01 | .362993E+01 |
| 112 | .102564E+01 | -.135511E+00 | .695120E+01 |
| 113 | .121819E+01 | -.380001E+00 | .186378E+02 |
| 114 | .105421E+01 | -.243994E+00 | .119872E+02 |
| 115 | .110071E+01 | -.482906E+00 | .189773E+02 |
| 116 | .157768E+01 | -.735755E+00 | .367786E+02 |
| 117 | .116204E+01 | -.731967E+00 | .274185E+02 |
| 118 | .120690E+01 | -.934957E+00 | .379322E+02 |
| 119 | .152548E+01 | -.108695E+01 | .505297E+02 |
| 120 | .180261E+01 | -.102453E+01 | .631721E+02 |
| 121 | .100014E+01 | -.134210E-02 | .184087E+00 |
| 122 | .100000E+01 | .000000E+00  | .000000E+00 |
| 123 | .999889E+00 | -.138526E-02 | .179064E+00 |
| 124 | .100270E+01 | -.212863E-01 | .163229E+01 |
| 125 | .999786E+00 | -.325471E-02 | .651167E+00 |
| 126 | .998208E+00 | -.213657E-01 | .159337E+01 |
| 127 | .101804E+01 | -.152382E+00 | .709741E+01 |

|     |             |              |             |
|-----|-------------|--------------|-------------|
| 128 | .996524E+00 | -.440790E-01 | .359419E+01 |
| 129 | .983950E+00 | -.144710E+00 | .697758E+01 |
| 130 | .104327E+01 | -.512251E+00 | .195325E+02 |
| 131 | .967134E+00 | -.267321E+00 | .121941E+02 |
| 132 | .921331E+00 | -.468563E+00 | .196380E+02 |
| 133 | .101439E+01 | -.956842E+00 | .397096E+02 |
| 134 | .854162E+00 | -.698679E+00 | .291717E+02 |
| 135 | .748337E+00 | -.829632E+00 | .408620E+02 |
| 136 | .769676E+00 | -.120111E+01 | .659053E+02 |
| 137 | .568956E+00 | -.991306E+00 | .538128E+02 |
| 138 | .376825E+00 | -.105744E+01 | .656122E+02 |
| 139 | .000000E+00 | -.105662E+01 | .710368E+02 |
| 140 | .999872E+00 | -.116131E-02 | .170467E+00 |
| 141 | .100000E+01 | .000000E+00  | .000000E+00 |
| 142 | .999728E+00 | -.595032E-03 | .152578E+00 |
| 143 | .997381E+00 | -.189270E-01 | .151100E+01 |
| 144 | .999134E+00 | -.207490E-02 | .547480E+00 |
| 145 | .995274E+00 | -.121376E-01 | .136710E+01 |
| 146 | .975616E+00 | -.128602E+00 | .666234E+01 |
| 147 | .988303E+00 | -.306832E-01 | .309172E+01 |
| 148 | .964166E+00 | -.861584E-01 | .615980E+01 |
| 149 | .871616E+00 | -.412119E+00 | .192691E+02 |
| 150 | .920649E+00 | -.177896E+00 | .111907E+02 |
| 151 | .840222E+00 | -.297388E+00 | .186325E+02 |
| 152 | .616685E+00 | -.708900E+00 | .408978E+02 |
| 153 | .717378E+00 | -.443790E+00 | .287000E+02 |
| 154 | .562474E+00 | -.535989E+00 | .407573E+02 |
| 155 | .178915E+00 | -.772981E+00 | .639479E+02 |
| 156 | .374821E+00 | -.576782E+00 | .530669E+02 |
| 157 | .179649E+00 | -.541351E+00 | .629114E+02 |
| 158 | .000000E+00 | -.517582E+00 | .666900E+02 |
| 159 | .999814E+00 | -.447899E-03 | .136550E+00 |
| 160 | .100000E+01 | .000000E+00  | .000000E+00 |
| 161 | .999998E+00 | -.360046E-05 | .119752E+00 |
| 162 | .996293E+00 | -.932321E-02 | .123525E+01 |
| 163 | .999607E+00 | -.792108E-03 | .422526E+00 |
| 164 | .997939E+00 | -.245456E-02 | .110216E+01 |
| 165 | .966761E+00 | -.657189E-01 | .568461E+01 |
| 166 | .991151E+00 | -.116443E-01 | .254174E+01 |
| 167 | .973448E+00 | -.231264E-01 | .525324E+01 |
| 168 | .835229E+00 | -.217252E+00 | .179381E+02 |
| 169 | .930529E+00 | -.616733E-01 | .998000E+01 |
| 170 | .851605E+00 | -.913813E-01 | .172910E+02 |
| 171 | .544413E+00 | -.367496E+00 | .403904E+02 |
| 172 | .725416E+00 | -.150285E+00 | .275766E+02 |
| 173 | .556884E+00 | -.175731E+00 | .399903E+02 |
| 174 | .180773E+00 | -.369800E+00 | .621009E+02 |
| 175 | .367150E+00 | -.189940E+00 | .524125E+02 |
| 176 | .179922E+00 | -.189722E+00 | .617896E+02 |
| 177 | .000000E+00 | -.176454E+00 | .652023E+02 |
| 178 | .999998E+00 | .000000E+00  | .117472E+00 |
| 179 | .997960E+00 | .000000E+00  | .105222E+01 |
| 180 | .972715E+00 | .000000E+00  | .503135E+01 |
| 181 | .851606E+00 | .000000E+00  | .168374E+02 |
| 182 | .566506E+00 | .000000E+00  | .395195E+02 |
| 183 | .188905E+00 | .000000E+00  | .615959E+02 |

## ภาคผนวก ค

### โปรแกรมย่อยสำหรับคำนวณแรงรีดและแรงบิดรีด

เนื่องจากในการหาแรงรีดและแรงบิดรีดจากความดันบริเวณผิวสัมผัสระหว่างลูกรีดและโลหะแผ่นที่คำนวณได้โปรแกรม MTFLOW มีความจำเป็นต้องหาค่าการอินทิกรัลเชิงตัวเลขดังสมการ (7.3) และ (7.4) โปรแกรมย่อย ROLLF จึงถูกประดิษฐ์ขึ้นเพื่อใช้ประกอบกับโปรแกรม MTFLOW ในการคำนวณค่าดังกล่าวโดยใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule) [2] ในการใช้งานเพียงแต่เรียกใช้โปรแกรมย่อยนี้จากโปรแกรม MTFLOW ในช่วงท้ายของโปรแกรมหลักหลังจากที่ได้ผลเฉลยทั้งหมดเป็นที่เรียบร้อยแล้ว โปรแกรมย่อยจะทำการค้นหาจุดต่อความดันที่อยู่ผิวสัมผัสจากจุดต่อทั้งหมดโดยอาศัยความจริงของเงื่อนไขขอบเขตบริเวณนั้นจะต้องมีค่า IBCU และ IBCV ในข้อมูลนำเข้าเท่ากับ 1 กล่าวคือผู้ใช้จะเป็นผู้กำหนดความเร็วตามแนวแกน x และ y เองซึ่งก็คือความเร็วที่ผิวสัมผัสที่เกิดจากการหมุนของลูกรีดนั่นเอง หลังจากนั้นก็จะทำการจัดเรียงจุดต่อตามลำดับระยะพิคัดแกน x โดยเรียงจากน้อยไปมาก หลังจากนั้นก็สามารถคำนวณหาพื้นที่ใต้กราฟความดันที่ขอบของแต่ละเอลิเมนต์โดยใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมู ผลรวมที่ขอบเอลิเมนต์ตลอดพื้นผิวสัมผัสก็คือแรงรีดนั่นเอง ส่วนแรงบิดรีดหาได้จากผลรวมของพื้นที่ของแต่ละเอลิเมนต์คูณกับระยะเฉลี่ยตามแนวแกน x จากขอบเอลิเมนต์ถึงแกนที่ลากผ่านจุดศูนย์กลางลูกรีดตามแนวแกน y ผลของแรงรีดและแรงบิดรีดที่ได้จะแสดงบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ ความแม่นยำของผลที่ได้จะขึ้นอยู่กับความยาวขอบของแต่ละเอลิเมนต์ ความยาวขอบน้อยจะส่งผลให้ค่าที่ได้น่าเชื่อถือมากกว่าในกรณีที่มีความยาวขอบสูงกว่า

รายละเอียดของโปรแกรมย่อย ROLLF มีดังนี้

```

SUBROUTINE ROLLF (IBCU, IBCV, COORD, SOL, NPOIV, NPOIP, NEQ,
*              MXPOIV, MXPOIP, MXNEQ)
C
C  SUBROUTINE FOR CALCULATE ROLLING FORCE AND TORQUE
C
  IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
  DIMENSION IBCU (MXPOIV), IBCV (MXPOIV), SOL (MXNEQ), NNODE (MXPOIP)
  DIMENSION COORD (MXPOIV, 2)
C
  PICK UP CONTACT NODES AND REARRANGE THEIR ORDER ON X-COORDINATE
  FROM MIN TO MAX
  IPP = 0
  DO 100 I = 1, NPOIP
    IF (IBCU (I) .EQ. 1 .AND. IBCV (I) .EQ. 1) THEN
      IPP = IPP + 1
      NNODE (IPP) = I
    ENDIF
  100 CONTINUE
C
  DO 200 J = 1, IPP
```

```

NNN = NNODE(J)
XMIN = COORD(NNODE(J),1)
N_N = J

DO 300 I = J,IPP
MMM = NNODE(I)
IF (COORD(MMM,1) .LT. XMIN) THEN
XMIN = COORD(MMM,1)
N_N = I
ENDIF
300 CONTINUE

NDUM = NNODE(J)
NNODE(J) = NNODE(N_N)
NNODE(N_N) = NDUM
200 CONTINUE

C COMPUTE ROLLING FORCE

RFORCE = 0.
RLP = 0.
RTORQUE = 0.
DO 400 I = 1,IPP-1
XXX1 = COORD(NNODE(I),1)
XXX2 = COORD(NNODE(I+1),1)
YYY1 = COORD(NNODE(I),2)
YYY2 = COORD(NNODE(I+1),2)
PPP1 = SOL(2*NPOIV+NNODE(I))
PPP2 = SOL(2*NPOIV+NNODE(I+1))
PROJL = XXX2-XXX1

C CHECK ERROR FROM NEGATIVE PROJECTED LENGTH
IF (PROJL.LE.0.0) THEN
WRITE(*,*) ' ERROR : NEGATIVE VALUE OF PROJECTED LENGTH'
STOP
ENDIF

RFORCE = 0.5*(PPP1+PPP2)*PROJL+RFORCE
RLP = PROJL + RLP

C CALCULATE TORQUE AT EACH ELEMENT PRESSURE

XCEN = COORD(NNODE(IPP),1)
ARM = (XCEN-XXX2)+PROJL/2.

C CHECK ERROR FROM NEGATIVE ARM LENGTH
IF (ARM.LE.0.0) THEN
WRITE(*,*) ' ERROR : NEGATIVE VALUE OF ARM LENGTH'
STOP
ENDIF

RTORQUE = RTORQUE+ 0.5*(PPP1+PPP2)*PROJL*ARM

400 CONTINUE

C 2 ROLLING MILL

RTORQUE = RTORQUE*2.

C PRINT OUT THE RESULTS
WRITE(*,*) ' *****'
WRITE(*,*) ' ROLLING FORCE '
WRITE(*,*) ' *****'
WRITE(*,500) RFORCE

```

```
WRITE(*,*) ' *****'  
WRITE(*,*) '   ROLLING TORQUE '  
WRITE(*,*) ' *****'  
WRITE(*,500) RTORQUE  
500 FORMAT(10X,F20.9)  
  
RETURN  
END
```



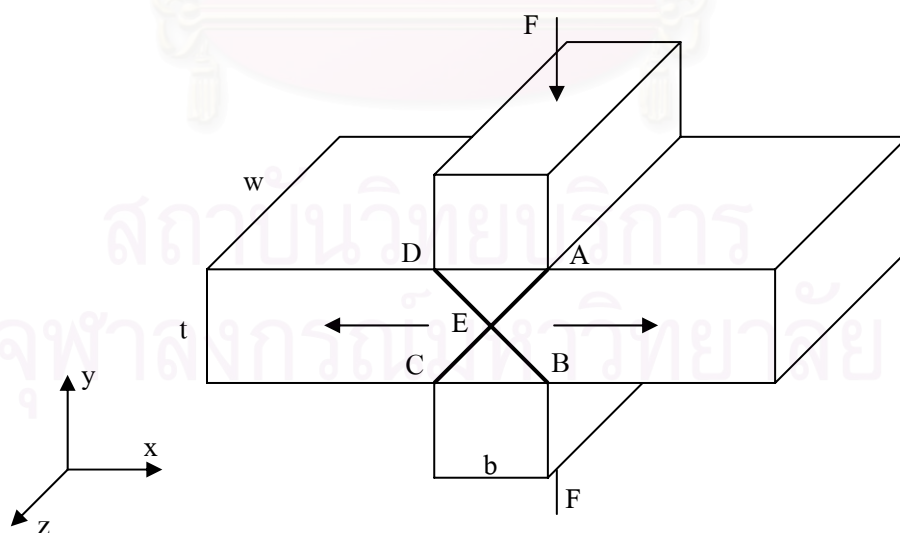
สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ภาคผนวก ง

### ทฤษฎีสลิปไลน์สำหรับปัญหาความเครียดในระนาบ

ทฤษฎีสลิปไลน์เป็นทฤษฎีที่อธิบายและใช้วิเคราะห์ปัญหาการขึ้นรูปโลหะแบบสองมิติในลักษณะของความเครียดในระนาบ (Plane Strain) มีข้อสมมุติฐานคือวัสดุต้องเป็นเนื้อเดียวกัน (Homogeneous) มีความแข็งแรงเท่ากันในทุกทิศทาง (Isotropic) วัสดุจะต้องเป็นวัสดุอุดมคติ (Ideal Plastic) กล่าวคือไม่พิจารณาผลของความเครียดแข็ง (Strain Hardening) ไม่พิจารณาผลของอัตราการเปลี่ยนแปลงความเครียด (Strain Rate) ไม่พิจารณาผลของอุณหภูมิ และไม่พิจารณาผลจากความเครียดอีลาสติก เพราะถือว่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความเครียดที่เกิดขึ้นในช่วงที่เป็นพลาสติก

วัตถุประสงค์ของการประยุกต์ใช้ทฤษฎีสลิปไลน์กับปัญหาการอัดรีดก็คือจะใช้ในการหาแรงดันอัดรีดซึ่งวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้เปรียบเทียบกับผลแรงดันอัดรีดที่คำนวณได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ทฤษฎีสลิปไลน์จะเป็นการหาสนามของเส้นเฉือน (Shear Line) ซึ่งก็คือสนามของเส้นที่วางตัวในแนวทิศทางที่เกิดความเค้นเฉือนสูงสุด (Maximum Shear Stress) ซึ่งจะทำมุม 45 องศา กับแนวแกนหลัก (Principal Stress) โดยเส้นเฉือนที่สอดคล้องกันทั้งระบบบนโดเมนการไหลจะเป็นเส้นที่แบ่งแยกระหว่างบริเวณของวัสดุที่แข็งเกร็ง กับบริเวณที่วัสดุเกิดการเปลี่ยนรูปเชิงพลาสติก (Plastic Deformation)

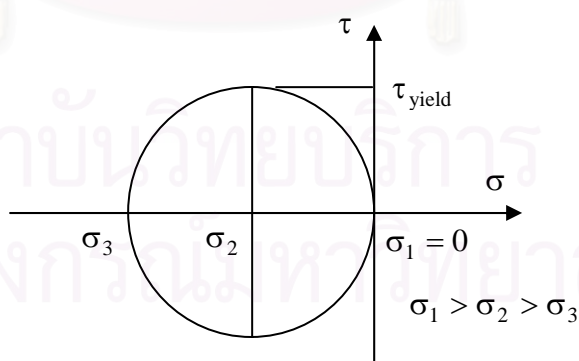


รูปที่ ง.1 สนามสลิปไลน์สำหรับปัญหาการกดอัดโลหะแผ่น



ก่อนที่จะไปถึงการอธิบายสมการทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีสลิปไลน์สำหรับปัญหาการอัดรีด ซึ่งเป็นปัญหาที่ค่อนข้างซับซ้อน จะขอยกตัวอย่างปัญหาอย่างง่ายเพื่อที่จะได้เข้าใจถึงแนวคิดของทฤษฎีนี้ต่อปัญหาการเปลี่ยนรูปเชิงพลาสติกของโลหะ ดังตัวอย่างปัญหาการกดอัดโลหะแผ่นต่อไปนี้ [11]

ตัวอย่างการกดอัดมีแบบจำลองดังแสดงในรูปที่ 1 เป็นการกดอัดโลหะแผ่นที่มีความหนา  $t$  มีความลึก  $w$  ด้วยแรง  $F$  ผ่านแท่นกดอัดที่เป็นวัตถุแข็งเกร็งมีความกว้าง  $b$  ซึ่งเท่ากับ  $t$  สมมติว่าไม่มีการเปลี่ยนรูปตามแนวแกน  $z$  ขณะกดอัด และสมมติให้ไม่มีแรงเสียดทานที่ผิวสัมผัสระหว่างแท่นกดอัดและโลหะแผ่น ดังนั้นแรงที่กระทำจะทำให้เกิดความเค้นตามแนวแกน  $y$  ( $\sigma_y$ ) เป็นแนวแกนหลัก ดังนั้นจะเกิดทิศทางของความเค้นเฉือนสูงสุดทำมุม 45 องศากับแกน  $y$  ก็คือเส้น AEC และ DEB บริเวณ DEA และ CEB จะเปรียบเสมือนก้อนวัตถุแข็งเกร็ง 2 ก้อนในขณะที่ด้านขวาของ AEB และด้านซ้ายของ DEC จะเป็นวัตถุแข็งเกร็งเช่นเดียวกัน ซึ่งจะก่อให้เกิดการไหลตามแนวสลิปไลน์ออกทางด้านซ้ายและขวาตามแนวลูกศร หากแรงกระทำ  $F$  เพียงพอที่จะทำให้เกิดการเปลี่ยนรูปเชิงพลาสติก เส้น DEA และ CEB นี้เองคือเส้นสลิปไลน์ ซึ่งหากพิจารณาตามความเป็นจริงโลหะจะมีการเปลี่ยนแปลงความหนาซึ่งจะไม่สอดคล้องกับคำอธิบายของทฤษฎีสลิปไลน์เสียทีเดียว แต่ว่าวัตถุประสงค์หลักของทฤษฎีนี้ก็คือการหาแรงหรือแรงดันที่เพียงพอที่จะทำให้เกิดการเปลี่ยนรูป ซึ่งสามารถหาได้จากเส้นสลิปไลน์นี้เอง โดยเริ่มจากความเป็นจริงที่ว่าแรงกระทำตามแนวแกน  $x$  ตามแนวเส้นสลิปไลน์เป็นศูนย์เนื่องจากโลหะแผ่นเคลื่อนอิสระตามแนวแกน  $x$  โดยไม่มีแรงภายนอกมากระทำ ดังนั้น  $\sigma_x = 0$  และ  $\sigma_1$  ต้องเป็นความเค้นตามแนวแกนหลักเนื่องจากไม่มีแรงเสียดทานบริเวณการสัมผัส โดยสามารถเขียนวงกลมของมอห์ร์ (Mohr's Circle) ในบริเวณเส้นสลิปไลน์ได้ดังนี้



รูปที่ 2 วงกลมของมอห์ร์สำหรับความเค้นในบริเวณเส้นสลิปไลน์ของปัญหาการกดอัดโลหะแผ่น

หากกำหนดให้ความเค้นเฉือนครากมีค่าเท่ากับ  $\tau_{yield}$  และ  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  โดย  $\sigma_z$  จะเป็นความเค้นตามแนวแกนหลักค่าที่ 2 ( $\sigma_2$ ) จากรูปจะเห็นว่า  $\sigma_3 = 2\tau_{yield}$  ดังนั้นสามารถคำนวณหาแรง  $F$  ตามแนวแกน  $y$  ที่ทำให้โลหะแผ่นเริ่มเกิดการเปลี่ยนรูปเชิงพลาสติกได้คือ  $2wb\tau_{yield}$  นั่นเอง

ตัวอย่างที่น่าเสนอนี้เป็นรูปแบบอย่างง่ายของสนามสลิปไลน์ แต่ทำให้เข้าใจแนวคิดของทฤษฎีนี้ได้เป็นอย่างดี สำหรับปัญหาการอัดรีดจะมีรูปแบบของสลิปไลน์ที่ซับซ้อนมากขึ้น ซึ่งจะต้องมีทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่เข้ามารองรับทำให้สามารถคำนวณหาแรงดันที่ใช้ในการอัดรีด ดังที่จะได้อธิบายต่อไป แต่อย่างไรก็ตาม แนวคิดของทฤษฎีนี้ยังคงเหมือนกับที่ได้อธิบายไว้ในตัวอย่างข้างต้น

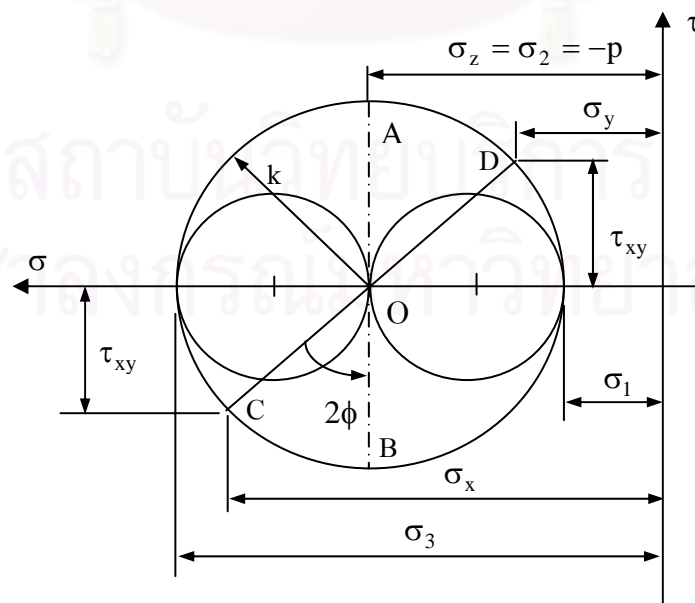
### ง.1 ทฤษฎีพื้นฐานในการสร้างสนามสลิปไลน์

ปัญหาความเครียดในระนาบ (Plane Strain) ในกลศาสตร์ของแข็งเป็นปัญหาที่มีลักษณะของคำตอบเหมือนกันในทุกๆระนาบของปัญหาในแนวตั้งฉากกับระนาบความเครียดนั้น กล่าวคือจะไม่มี การเปลี่ยนรูปในแนวตั้งฉากกับระนาบ ทำให้ค่าความเครียดในแนวนั้นมีค่าเป็นศูนย์ และ ความสัมพันธ์ของส่วนประกอบของความเครียดในทิศทางต่างๆเป็นดังนี้

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_x &= -\dot{\epsilon}_y \\ \dot{\epsilon}_z &= \dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zx} = 0\end{aligned}\quad (ง.1)$$

ค่าของความเค้นเฉือนที่จุดครากเขียนได้ในรูป

$$|\tau|_{\max} = \left[ \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \tau_{\text{yield}} \quad (ง.2)$$

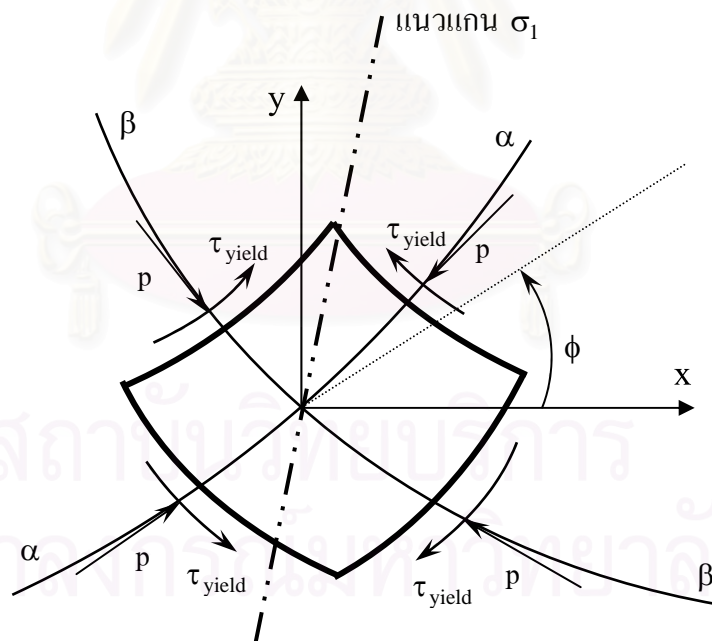


รูปที่ ง.3 วงกลมของมอห์ร์ แสดงส่วนประกอบของความเค้นในทิศทางต่างๆ

จากรูปที่ ๓.3 สามารถหาส่วนประกอบต่างๆของความเค้นได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= -p - \tau_{\text{yield}} \sin 2\phi \\
 \sigma_y &= -p + \tau_{\text{yield}} \sin 2\phi \\
 \sigma_z &= -p = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \\
 \tau_{xy} &= \tau_{\text{yield}} \cos 2\phi \\
 \tau_{yz} &= \tau_{zx} = 0
 \end{aligned}
 \tag{๓.3}$$

โดยมุม  $\phi$  คือมุมที่แกน  $\alpha$  ซึ่งเป็นแกนหลักของความเค้นเฉือน (Principal Shear Stress) แสดงโดยแกน OB ในรูป ๓.1 ทำมุมกับแกน x แสดงโดยแกน OC ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา บนระบบแกนจริง (จะทำมุม  $2\phi$  บนระบบแกนของ Mohr Circle) ส่วนแกน  $\beta$  ซึ่งเป็นแกนหลักของความเค้นเฉือนอีกแกนหนึ่ง จะทำมุม  $90^\circ$  องศา กับแกน  $\alpha$  ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาบนระบบแกนจริง โดยที่แนวแกนหลักของความเค้น (Principal Normal Stress) จะผ่านแกน  $\alpha$ - $\beta$  ในควอดแรนต์ (Quadrant) ที่ 1 และ 3 ดังรูปที่ ๓.4 โดยนิยามให้  $\sigma_1$  มีค่ามากกว่า  $\sigma_3$



รูปที่ ๓.4 ทิศทางของความเค้นและแนวแกนต่างๆบนระนาบ

โดยทั่วไปความเค้นที่เกิดขึ้นบนขอบเขตของปัญหาที่เกิดการเปลี่ยนรูปเชิงพลาสติก (Plastic Deformation) จะไม่มีความต่อเนื่องจากจุดหนึ่งไปอีกจุดหนึ่ง เส้นโค้งที่ลากเชื่อมต่อและสัมผัสกับแกน  $\alpha$  และ  $\beta$  จะเรียกว่าเส้น  $\alpha$  และ  $\beta$  สลิปไลน์ตามลำดับ โดยจะมีค่าความสัมผัสที่คงที่ ซึ่ง

สามารถหาได้จากการแทนค่าสมการที่ (ง.3) ลงในสมการสมดุลของแรงในสองมิติแล้วทำการอินทิเกรต สมการสมดุลของแรงมีรูปแบบดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0\end{aligned}\quad (ง.4)$$

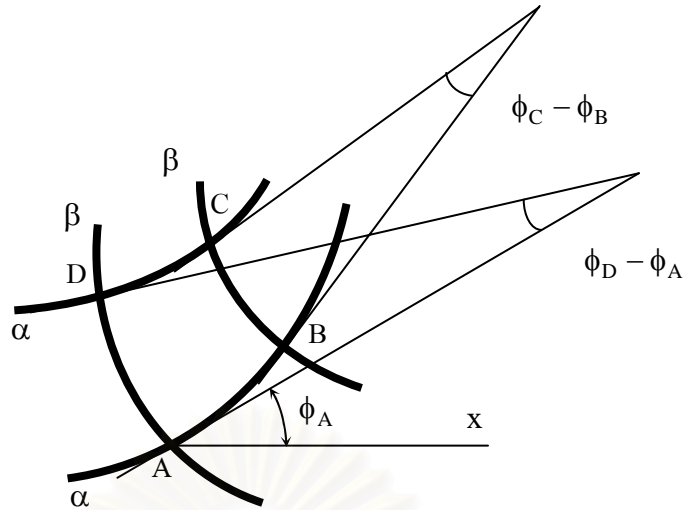
จะได้ค่าความสัมพันธ์ระหว่าง  $p$  และ  $\phi$  บนเส้น  $\alpha$  และ  $\beta$  สลิปไลน์ ดังนี้

$$\begin{aligned}- \alpha \text{ สลิปไลน์} & \quad p + 2\tau_{\text{yield}} \phi = C_1 \\ - \beta \text{ สลิปไลน์} & \quad p - 2\tau_{\text{yield}} \phi = C_2\end{aligned}\quad (ง.5)$$

โดย  $C_1$  และ  $C_2$  คือค่าคงที่  $\phi$  คือมุมที่  $\alpha$  ทำกับแกน  $x$  ในหน่วยเรเดียน

จากความสัมพันธ์ที่ (ง.5) นี้ สามารถใช้ในการหาความดันที่ตำแหน่งต่างๆบนขอบเขตของปัญหา หากรู้ความดันเริ่มต้นและมุมสัมผัสที่  $\alpha$  สลิปไลน์ ทำกับแกน  $x$  ที่จุดใดจุดหนึ่ง อีกทั้งยังสามารถสร้างความสัมพันธ์ของมุมที่ลากในแนวสัมผัสกับ  $\alpha$  และ  $\beta$  สลิปไลน์ เส้นต่างๆดังรูปที่ ง.5 โดยความสัมพันธ์นี้จะสามารถนำไปสร้างสนามของสลิปไลน์ โดยหากเรารู้มุมสัมผัส  $\phi$  ที่ตำแหน่งของจุด 3 จุด บนสนามของสลิปไลน์ที่ตัดกัน ก็สามารถหามุมสัมผัสตำแหน่งที่ 4 ได้ โดยวิธีการกราฟฟิก ความสัมพันธ์อันนี้ถูกนำเสนอและเรียกว่าทฤษฎีของ Hencky โดยทฤษฎีนี้จะนำเสนอความสัมพันธ์ที่เท่ากันของผลต่างของมุมสัมผัสที่เกิดจากการตัดกันของ  $\alpha$  และ  $\beta$  สลิปไลน์สองชุด ดังรูปที่ ง.3 โดยใช้ความสัมพันธ์ที่ (ง.5) ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้

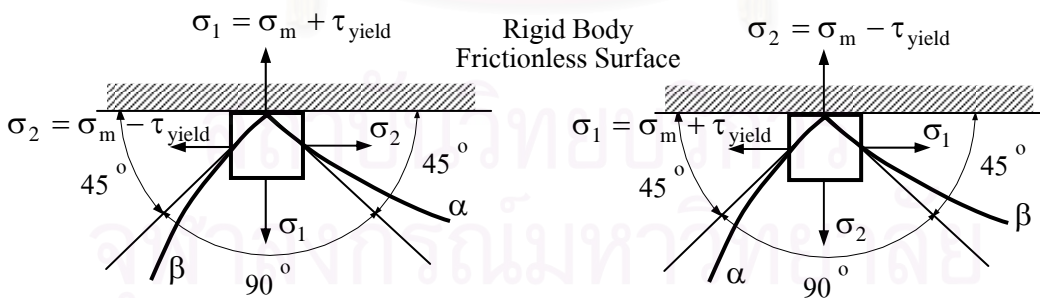
$$\begin{aligned}1. \quad A \rightarrow B, \alpha \text{ สลิปไลน์}, & \quad p_B + 2\tau_{\text{yield}}\phi_B = p_A + 2\tau_{\text{yield}}\phi_A \\ B \rightarrow C, \beta \text{ สลิปไลน์}, & \quad p_C - 2\tau_{\text{yield}}\phi_C = p_B - 2\tau_{\text{yield}}\phi_B \\ \text{ดังนั้นผลต่างของความดันระหว่าง C และ A คือ} & \\ p_C - p_A &= 2\tau_{\text{yield}}(\phi_A + \phi_C - 2\phi_B) \\ 2. \quad A \rightarrow D, \beta \text{ สลิปไลน์}, & \quad p_D - 2\tau_{\text{yield}}\phi_D = p_A - 2\tau_{\text{yield}}\phi_A \\ D \rightarrow C, \alpha \text{ สลิปไลน์}, & \quad p_C + 2\tau_{\text{yield}}\phi_C = p_D + 2\tau_{\text{yield}}\phi_D \\ \text{ดังนั้นผลต่างของความดันระหว่าง C และ A คือ} & \\ p_C - p_A &= 2\tau_{\text{yield}}(2\phi_D - \phi_C - \phi_A) \\ \text{จะได้} & \quad \phi_C - \phi_B = \phi_D - \phi_A\end{aligned}\quad (ง.6)$$



รูปที่ ๓.๕ ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นสลิปไลน์สองชุดที่ตัดกัน

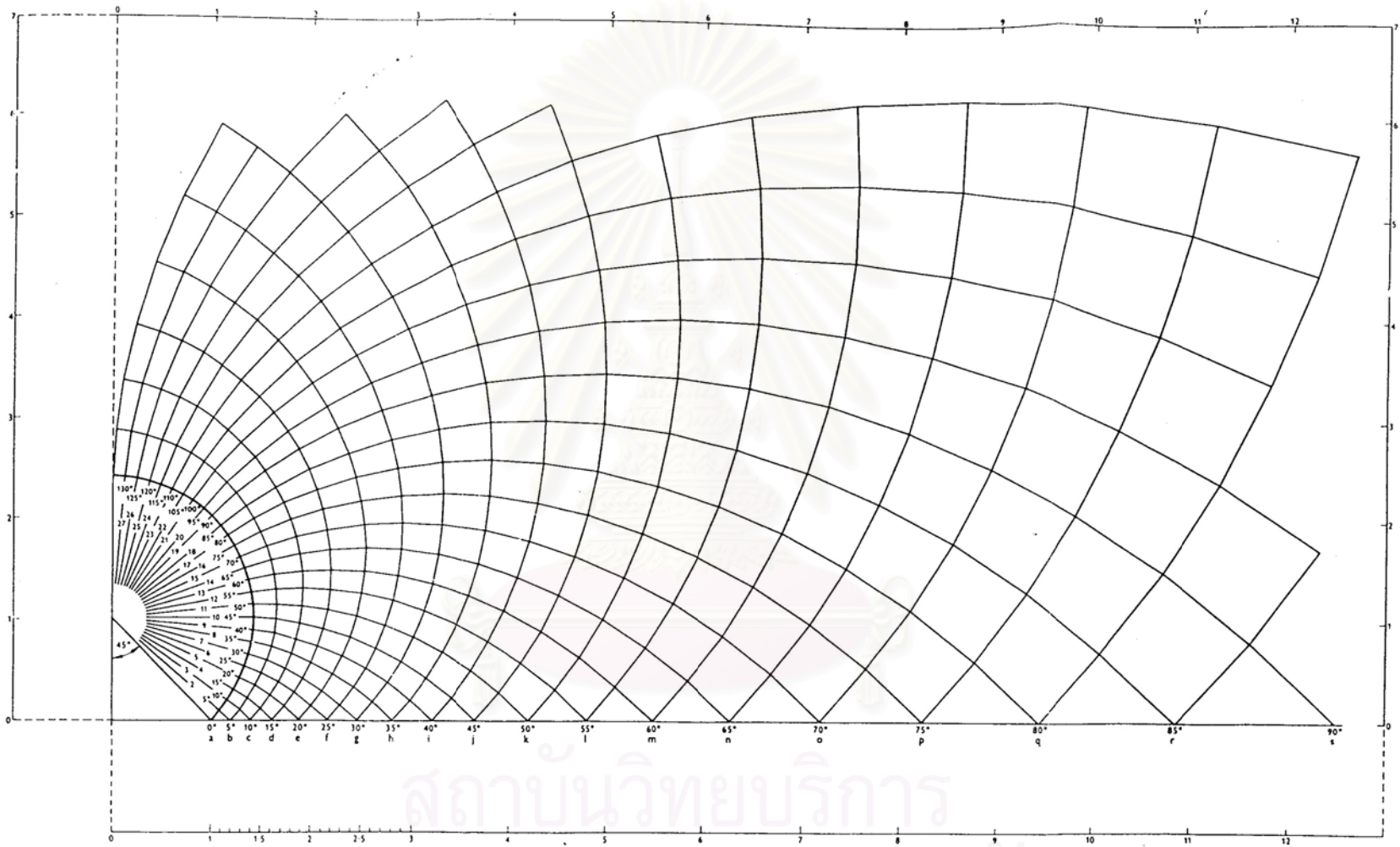
๓.๒ การสร้างเส้นสลิปไลน์

ลักษณะการสร้างเส้นที่เรียกว่าสลิปไลน์นี้ จะเป็นการหาเส้นขอบเขตที่เกิดความไม่ต่อเนื่องระหว่างพื้นที่ที่เกิดการเปลี่ยนรูปเชิงพลาสติกกับพื้นที่ที่แข็งเกร็ง (Rigid) โดยเส้นดังกล่าวเป็นส่วนหนึ่งของสนามและ  $\beta$  สลิปไลน์นั่นเอง การสร้างเส้นสลิปไลน์จะเริ่มจากการสร้างจากสนามรูปศูนย์กลางใบพัด (Centred-Fan Field) โดยมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดซิงกูลาริตี (Singularity) ซึ่งเป็นจุดที่เป็นศูนย์กลางรวมของแรงที่มากระทำ ดังเช่นปลายสุดของแม่พิมพ์สำหรับอัดรีดที่กระทำต่อโลหะ เป็นต้น



รูปที่ ๓.๖ ทิศทางของความเค้นหลักและเส้นสลิปไลน์บริเวณพื้นผิวลื่น

โดยการสร้างเส้นสลิปไลน์นี้จะต้องสัมพันธ์กับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition) โดยเส้นสลิปไลน์นี้จะทำมุม 45 องศากับผิวที่เป็นอิสระ (Free Surface) หรือกับผิวที่สัมผัสกับผิวภายนอกในภาวะที่ไม่มีแรงเสียดทานและผิวภายนอกแข็งเกร็ง ดังรูปที่ ๓.๖ หรือกับผิวที่อยู่ในแนวแกนสมมาตร



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รูปที่ ง.7 ตัวอย่างสนามของเส้นสลิปไลน์ที่เกิดขึ้นในลักษณะศูนย์กลางรูปไบพอด [ 8 ]



ในกรณีทั่วไปจะใช้การลองผิดลองถูก (Trial and Error) เพื่อที่จะหาเส้นที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตในทุกๆด้าน ทั้งนี้ทั้งนั้นในการสร้างเส้นสลิปไลน์นี้จะอาศัยพื้นฐานของสมการที่ (ง.5) และหลักการเท่ากันของมุมดังที่ได้กล่าวมาแล้ว

ตัวอย่างของสนามสลิปไลน์โดยทั่วไปที่เกิดจากสนามรูปศูนย์กลางไบพอด ได้แสดงในรูป ง.7 ซึ่งสามารถใช้รูปนี้ช่วยในการสร้างเส้นสลิปไลน์โดยเลือกเส้นที่สอดคล้องกับภาวะของระบบที่ดีที่สุด

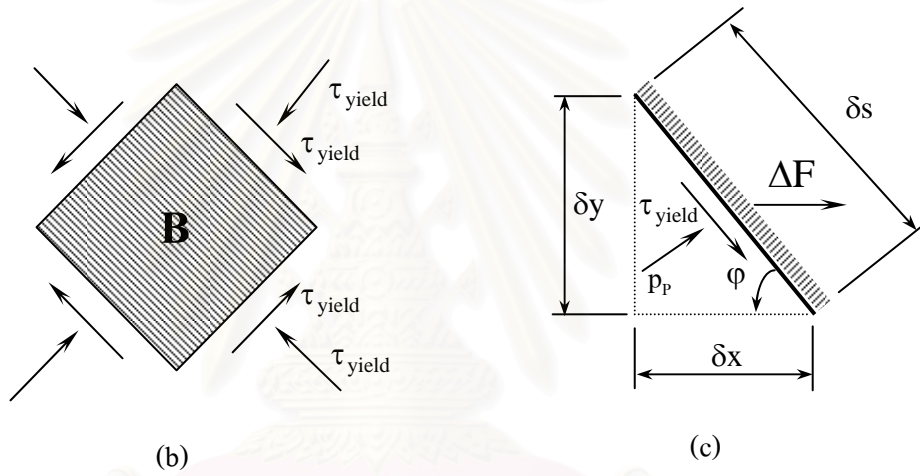
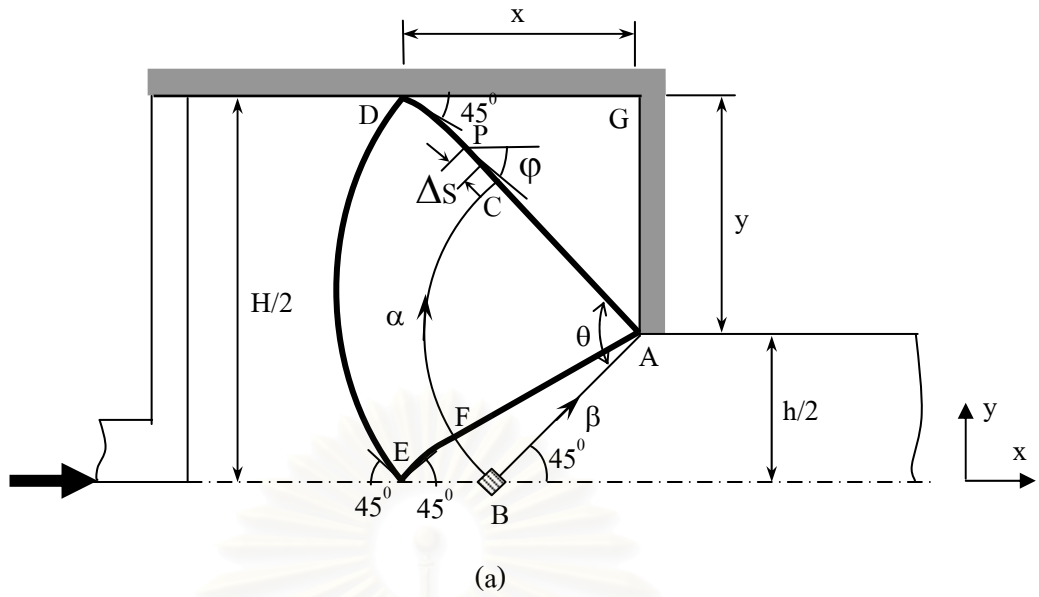
### ง.3 ตัวอย่างเส้นสลิปไลน์ และการหาแรงดันอัดรีดของปัญหาการอัดรีดที่มีอัตราส่วนการลดขนาดมากกว่า 0.5 ผนังไม่มีความเสียดทาน

ในการสร้างเส้นสลิปไลน์ของปัญหานี้ จะเริ่มจากการสร้างเส้น AB โดยจุด A เป็นจุดซิงกูลาリティ (Singularity) ลากทำมุมกับแกนสมมาตร 45 องศา แล้วสร้างส่วนของเส้นโค้ง BC โดยมีจุด A เป็นจุดศูนย์กลาง เส้นตรง AB ทำมุมใดๆกับเส้นตรง AC ทั้งนี้ขนาดของมุมจะขึ้นอยู่กับอัตราส่วนการลดขนาดซึ่งจะใช้วิธีการทดลองสุ่มเพื่อที่จะหาขนาดของมุมที่เหมาะสม ดังนั้นหากปัญหานี้มีอัตราส่วนการลดขนาดเท่ากับ 0.5 ดังรูป ง.7 เส้น AC จะทำมุม 45 องศาที่ผนังอีกด้านหนึ่งซึ่งเป็นผิวสัมผัสที่ไม่มีความเสียดทานพอดี และ AB จะทำมุม 90 องศา กับ AC จึงได้เส้นรอบรูป ABC เป็นเส้นสลิปไลน์ ซึ่งเป็นเส้นที่จะเกิดความไม่ต่อเนื่อง (Discontinuity) ขึ้น แต่ในกรณีที่อัตราส่วนการลดขนาดมากกว่า 0.5 เส้นรอบรูป ABC จึงยังไม่ใช่เส้นที่สอดคล้อง จึงต้องทำการสร้างเส้นใหม่ในลักษณะเดียวกับรูป ง.5 จนได้เส้นรอบรูป AFEDC ที่สอดคล้องกับปัญหา โดยเส้นรอบรูป ACDG จะเป็นบริเวณที่โลหะไม่เกิดการไหล (Dead Metal Zone) โลหะภายในบริเวณที่เกิดการเปลี่ยนรูปเชิงพลาสติกจะไหลไปตามแนวเส้นโค้ง ACDG และเกิดความไม่ต่อเนื่องขึ้นบนแนวเส้นโค้งนี้ระหว่างสองฝั่งของเส้นโค้งนั่นเอง

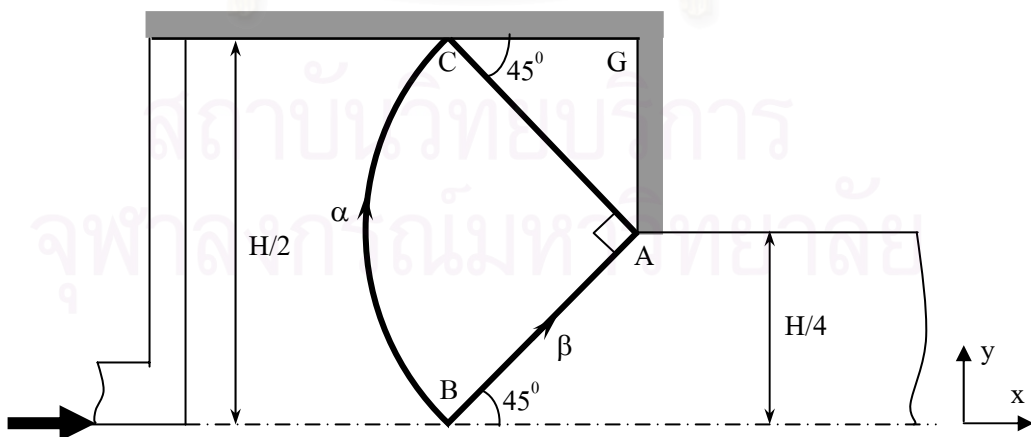
เนื่องจากว่าไม่มีแรงเกิดขึ้นตามแนวแกน x ของโลหะที่อยู่บนแนวเส้น AB ดังนั้นแรงลัพธ์ที่เกิดจากความเค้นเฉือน และความดันจะหักล้างกันหมดไป โดยภาวะที่จุด B ได้แสดงไว้ในรูป ง.8(b) ดังนั้นจึงสามารถหาความดันที่เกิดขึ้นที่จุด B ได้ (เท่ากับ  $\tau_{yield}$ ) แล้วใช้ความสัมพันธ์ในสมการที่ (ง.5) เพื่อหาจุดอื่นๆต่อไปดังตัวอย่างที่จะแสดงต่อไปนี้

- หาความดันที่จุด C

พิจารณา B  $\rightarrow$  C ,  $\alpha$  สลิปไลน์,  $p_C + 2\tau_{yield}(-\theta) = \tau_{yield}$   
 ดังนั้น  $p_C = \tau_{yield}(1 + 2\theta)$



รูปที่ ง.8 เส้นสลิปไลน์ของปัญหาการอัดรีดแบบผนังถื่นและมีอัตราส่วนการลดขนาดมากกว่า 0.5



รูปที่ ง.9 เส้นสลิปไลน์ของปัญหาการอัดรีดแบบผนังถื่นและมีอัตราส่วนการอัดเท่ากับ 0.5

- หาคความดันที่จุด P

$$\text{พิจารณา } C \rightarrow P, \beta \text{ สลิตป์ไลน์, } p_P - 2\tau_{\text{yield}}\left(\theta - \frac{\pi}{4} - \varphi\right) = p_C$$

ดังนั้น

$$p_P = \tau_{\text{yield}}\left(1 + 4\theta - \frac{\pi}{2} - 2\varphi\right)$$

- หาคความดันที่จุด D

$$\text{เนื่องจากจุด D อยู่บน } \beta \text{ สลิตป์ไลน์เดียวกับจุด P และมีค่า } \varphi = \frac{\pi}{4}$$

ดังนั้น

$$p_D = \tau_{\text{yield}}(1 + 4\theta - \pi)$$

จากรูปที่ ง.6 (c) ส่วนของเส้นโค้ง  $\delta s$  สามารถหาแรงลัพธ์ที่กระทำตามแนวแกน x ได้โดยวิธีการแตกแรงที่เกิดจากความเค้นเฉือน และความดัน

$$\begin{aligned} \Delta F &= \tau_{\text{yield}}\delta s \cdot \cos \varphi + p_P \delta s \cdot \sin \varphi \\ &= \tau_{\text{yield}}\delta x + \tau_{\text{yield}}\left(1 + 4\theta - \frac{\pi}{2} - 2\varphi\right)\delta y \end{aligned}$$

ผลรวมของแรงที่เกิดบนเส้นตรง AD คือ

$$\begin{aligned} F &= \sum \Delta F = \tau_{\text{yield}} \sum \delta x + \tau_{\text{yield}} \sum \left(1 + 4\theta - \frac{\pi}{2}\right)\delta y - 2\tau_{\text{yield}} \sum \varphi \delta y \\ &= \tau_{\text{yield}} \left(x + \left(1 + 4\theta - \frac{\pi}{2}\right)y - 2\sum \varphi \delta y\right) \end{aligned}$$

ดังนั้นแรงดันที่ใช้ในการดัน โลหะผ่านแม่พิมพ์เฉื่อย (P) จะมีค่าเท่ากับ

$$\frac{P}{2\tau_{\text{yield}}} = \frac{F}{2\tau_{\text{yield}}H/2} = \frac{x + y(1 + 4\theta - \pi/2) - 2\sum \varphi \delta y}{H} \quad (\text{ง.7})$$

ซึ่งสามารถนำไปใช้หาแรงดันอัดรีดเฉื่อยสำหรับแม่พิมพ์ที่มีอัตราส่วนการลดขนาดต่างๆ ดังเช่นหากใช้แม่พิมพ์ที่มีอัตราส่วนการลดขนาด 0.5 ดังในรูปที่ ง.9 แทนค่าตัวแปรต่างๆในสมการที่ (ง.7) ดังนี้

$$x = y = \frac{H}{4} ; \theta = \frac{\pi}{2}$$

เนื่องจาก AC เป็นเส้นตรง ดังนั้น

$$\sum \varphi \delta y = \varphi y \quad ; \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

จะได้

$$\frac{P}{2\tau_{\text{yield}}} = 1.3$$

## ประวัติผู้วิจัย

นายชัยฤทธิ์ อุ่พิชิต เกิดเมื่อวันที่ 9 มกราคม 2515 ที่จังหวัดกรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมเครื่องกล จากภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ เมื่อปีการศึกษา 2537 เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ที่ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2541



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย