

การออกแบบตัวควบคุมร่วมของระบบเชิงเส้นหลายระบบ โดยคำนึงถึงสมรรถนะแบบ H_2 ด้วยวิธี
อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น



นาย วรุต ศิลป์ศรีกุล

สถาบันวิทยบริการ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

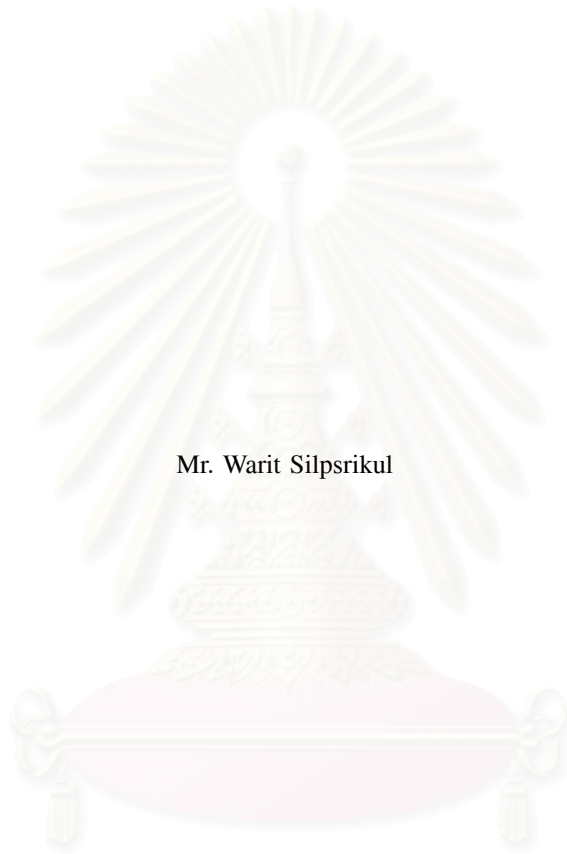
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2543

ISBN 974-347-096-4

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

AN LMI APPROACH TO SIMULTANEOUS CONTROLLER DESIGN WITH H_2 PERFORMANCE
CONSIDERATION



Mr. Warit Silpsrikul

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Electrical Engineering

Department of Electrical Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2000

ISBN 974-347-096-4

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การออกแบบตัวควบคุมร่วมของระบบเชิงเส้นหลายระบบ โดยคำนึงถึงสมรรถนะแบบ H_2 ด้วยวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

โดย นาย วฤต ศิลป์ศรีกุล

ภาควิชา วิศวกรรมไฟฟ้า

อาจารย์ที่ปรึกษา ดร.มานพ วงศ์สายสุวรรณ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้บัณฑิตวิทยาลัยเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาโท

..... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร. สมศักดิ์ ปัญญาแก้ว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

..... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. สุวลัย ประดิษฐ์นนท์)

..... อาจารย์ที่ปรึกษา
(อาจารย์ ดร. มานพ วงศ์สายสุวรรณ)

..... กรรมการ
(อาจารย์ ดร. สุชิน อรุณสวัสดิ์วงศ์)

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วฤต ศิลป์ศรีกุล : การออกแบบตัวควบคุมร่วมของระบบเชิงเส้นหลายระบบ โดยคำนึงถึงสมรรถนะแบบ H_2 ด้วยวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (An LMI Approach to Simultaneous Controller Design with H_2 Performance Consideration) อ.ที่ปรึกษา : ดร. มานพ วงศ์สายสุวรรณ, 82 หน้า, ISBN 974-347-096-4.

วิทยานิพนธ์นี้พิจารณาปัญหาตัวควบคุมตัวเดียวกันสำหรับระบบเชิงเส้นหลายระบบ โดยพิจารณาสมรรถนะในเชิง H_2 พร้อมทั้งได้เสนอวิธีการหาตัวควบคุมดังกล่าว โดยที่ตัวควบคุมที่ได้นี้เป็นตัวควบคุมแบบเต็มอันดับ วิธีที่เสนอนี้แบ่งเป็น 2 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นตอนหาเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะร่วม และขั้นตอนหาเมทริกซ์สังเกตสถานะร่วม ซึ่งแต่ละขั้นตอนใช้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเป็นเครื่องมือในการหาคำตอบ

นอกจากนี้เราได้เปรียบเทียบวิธีที่นำเสนอกับวิธี cross decomposition algorithm ซึ่งเป็นวิธีที่มีผู้เสนอก่อนแล้ว และวิทยานิพนธ์นี้รวบรวมแนวความคิด และมุมมองของปัญหาตัวควบคุมสำหรับหลายระบบอีกด้วย

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา	ลายมือชื่อนิสิต
สาขาวิชา	ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา
ปีการศึกษา	ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม

##4170318321 : MAJOR ELECTRICAL ENGINEERING

KEY WORD: SIMULTANEOUS CONTROLLER, PERFORMANCE, COPRIME FACTORIZATION, LINEAR MATRIX INEQUALITY

WARIT SILPSRIKUL :AN LMI APPROACH TO SIMULTANEOUS CONTROLLER DESIGN WITH H_2 PERFORMANCE CONSIDERATION THESIS ADVISOR : MANOP WONGSAISUWAN, Ph.D. 82 pp., ISBN 974-347-096-4.

This thesis considers the simultaneous controller problem and proposes the method for finding such a controller which is full-order with H_2 performance consideration. The proposed method is divided into two steps. The first step is to find a simultaneous state feedback matrix and the other step is to find a simultaneous state observer matrix. In both steps, the linear matrix inequality is used as a tool for finding the solutions.

In addition, this thesis compares the proposed method with an existing method known as the cross decomposition algorithm. We also provide the background, the theorems and some viewpoints of the problem.



Department
Field of study
Academic Year

Student's signature
Advisor's signature

กิตติกรรมประกาศ

การทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้นั้น ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณอาจารย์ ดร. มานพ วงศ์สายสุวรรณ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ท่านได้ให้คำปรึกษาและแรงเสริมตลอดในช่วงเวลาทำวิทยานิพนธ์นี้ ตลอดจนคณาจารย์ในสาขาระบบควบคุมของภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยทุกท่านที่ได้ประสาทความรู้ทางด้านระบบควบคุมให้ข้าพเจ้า โดยเฉพาะอาจารย์ ดร. เดวิด บรรเจิดพงศ์ชัย ที่ท่านให้คำแนะนำต่อนสัมมนาประจำห้องปฏิบัติการเมื่อปี 2543 ภาควิชาการศึกษาลาย

ข้าพเจ้าขอระลึกถึงพระคุณบิดา-มารดา รวมถึงสมาชิกทุกคนในครอบครัวของข้าพเจ้า ที่คอยเป็นห่วงในตัวของข้าพเจ้าเสมอมา และขอบคุณเพื่อน รุ่นพี่ รุ่นน้องทุกๆท่านที่เป็นกำลังใจให้ ขอให้เพื่อนเล่นที่สนุกดีที่ทำให้ข้าพเจ้ามีรอยยิ้มได้เสมอ

นอกจากนี้ขอบคุณโครงการศิษย์ก้นกุฏิที่ได้ให้ทุนส่วนหนึ่งในการทำวิทยานิพนธ์นี้ ท้ายที่สุดอยากบอกว่าขอบคุณนะแต่ 'เธอ'

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญตาราง.....	ฌ
สารบัญภาพ	ฎ
บทที่	
1 บทนำ.....	1
1.1 กล่าวนำปัญหา	1
1.2 ความเป็นมา	1
1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์	3
1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน	3
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	3
2 ทฤษฎีการมีตัวควบคุมร่วมกันสำหรับระบบเชิงเส้นหลายระบบ	4
2.1 ความหมายของการควบคุมระบบหลายระบบด้วยตัวควบคุมตัวเดียวกัน	4
2.2 วิเคราะห์ปัญหาในรูปแบบเมทริกซ์ฟังก์ชันถ่ายโอน	6
2.3 การวิเคราะห์ในเชิงสมการสถานะ	11
2.4 ข้อสังเกตเกี่ยวกับระบบช่วย	17
3 การแก้ปัญหาสมรรถนะแบบ H_2 โดยใช้สมการเมทริกซ์เชิงเส้น	21
3.1 การแก้ปัญหาสมรรถนะแบบ H_2 โดยแยกหาเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ และเมทริกซ์ สังเกตสถานะ	21
3.2 การแก้ปัญหาสมรรถนะแบบ H_2 โดยพิจารณาหาเมทริกซ์ตัวควบคุมโดยตรง	24
4 การแก้ปัญหาตัวควบคุมร่วมสำหรับระบบเชิงเส้นหลายระบบโดยคำนึงถึงสมรรถนะแบบ H_2 ด้วยสมการเมทริกซ์เชิงเส้น	30
4.1 วิธีที่เสนอ	30
4.1.1 ที่มาของวิธีที่เสนอ	30

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
4.1.2 รายละเอียดของวิธีที่เสนอ	31
4.2 วิธี cross decomposition algorithm	33
5 ตัวอย่างการออกแบบตัวควบคุม.....	37
5.1 ตัวอย่างการทดสอบการมีตัวควบคุมร่วมของระบบที่สุมขึ้นมา 2 ระบบ	38
5.2 ตัวอย่างการควบคุมตำแหน่งชุดมอเตอร์ 2 ชุด	39
5.3 ตัวอย่างการควบคุมระบบไม่เชิงเส้น Electromagnetic Suspension	57
5.4 ตัวอย่างปัญหาการควบคุมแบบเชื่อถือได้	66
6 ข้อสรุปและข้อเสนอแนะ.....	69
รายการอ้างอิง.....	71
ภาคผนวก.....	73
ก ระบบ เสถียรภาพและ สมรรถนะ.....	74
ก.1 ระบบที่พิจารณา	74
ก.2 เสถียรภาพ	75
ก.3 สมรรถนะ	76
ข อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น.....	78
ข.1 รูปแบบอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น.....	79
ข.2 แนวทางจัดปัญหาให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น	80
ประวัติผู้เขียน.....	82

สารบัญตาราง

	หน้า
5.1 ขั้วและศูนย์ของระบบ 2 ระบบที่สุมขึ้นมา	38
5.2 ขั้วของระบบวงปิดของระบบสุม 2 ระบบ ในตัวอย่างที่ 1	39
5.3 ความหมายของตัวแปรต่างๆ ในสมการของมอเตอร์	40
5.4 ค่าตัวแปรต่างๆ ของมอเตอร์ 2 ชุด	40
5.5 ขั้วและศูนย์ของระบบวงเปิดของมอเตอร์ทั้งสองตัว	41
5.6 ค่าเจาะจงของ $A_{si} + B_{2si}F$ ของมอเตอร์ทั้งสองตัวในกรณีศึกษาที่ 1 ตัวอย่างที่ 2	43
5.7 ค่าที่ได้จากขั้นตอนการหาเมทริกซ์สังเกตสถานะร่วม ในกรณีศึกษาที่ 1 ของตัวอย่างที่ 2	44
5.8 ค่าเจาะจงของเมทริกซ์ $A_{si} + HC_{2si}$ ของมอเตอร์แต่ละชุด ในกรณีศึกษาที่ 1 ตัวอย่างที่ 2	44
5.9 ขั้วของระบบวงปิดของแต่ละมอเตอร์ เมื่อใช้ข้อมูลของแต่ละมอเตอร์ในขั้นตอนการหาเมทริกซ์สังเกตสถานะร่วม ในกรณีศึกษาที่ 1 ตัวอย่างที่ 2	44
5.10 ค่าตัวแปรที่ได้จากวิธีที่เสนอ ในกรณีศึกษาที่ 2 ตัวอย่างที่ 2	47
5.11 แสดงค่าสมรรถนะ ในแต่ละกรณีศึกษาย่อย ของกรณีศึกษาที่ 2 ในตัวอย่างที่ 2	47
5.12 ขั้วระบบวงปิดของมอเตอร์ทั้งสองชุด ที่ให้ผลตอบตามคุณสมบัติตามตรงการด้วยวิธีการหาตัวควบคุมร่วมตามวิธีที่เสนอ ในตัวอย่างที่ 2	54
5.13 ขั้วระบบวงปิดของมอเตอร์ทั้งสองชุด ที่ให้ผลตอบตามคุณสมบัติตามตรงการด้วยวิธีการหาตัวควบคุมร่วมตามวิธี CDA ในตัวอย่างที่ 2	58
5.14 ค่าพารามิเตอร์ในระบบ electromagnetic suspension: EMS	59
5.15 ตำแหน่งขั้วระบบวงปิดแต่ละสถานะของระบบ EMS ในตัวอย่างที่ 3 ของการออกแบบครั้งที่ 1 ด้วยวิธีที่เสนอ	62
5.16 ตำแหน่งขั้วระบบวงปิดแต่ละสถานะของระบบ EMS ในตัวอย่างที่ 3 ของการออกแบบครั้งที่ 1 ด้วยวิธี CDA	64
5.17 ตำแหน่งขั้วระบบวงปิดแต่ละสถานะของระบบ EMS ในตัวอย่างที่ 3 ของการออกแบบครั้งที่ 1 ด้วยวิธี CDA	65
5.18 ตำแหน่งขั้วระบบวงปิดแต่ละสถานะการทำงานต่าง ในตัวอย่างที่ 4 ด้วยตัวควบคุมที่ได้จากวิธีที่เสนอ	68

สารบัญภาพ

	หน้า
2.1 ความหมายของ simultaneous control	5
2.2 เขตของการมีตัวควบคุมร่วม	5
2.3 ขั้นตอนการตรวจสอบการมีตัวควบคุมร่วมของสองระบบ	6
2.4 ระบบต่ออนุกรม	12
2.5 ระบบต่อขนาน	12
2.6 ระบบผกผัน	13
5.1 ชุดมอเตอร์	39
5.2 ลักษณะผลกระทบของมุมภาระที่มีต่อภาระเมื่อใส่ภาระให้	41
5.3 แผนภาพการควบคุมมอเตอร์ ในตัวอย่างที่ 2	42
5.4 กรณีศึกษาที่ 1: แสดงตำแหน่งมุมและแรงดันสัญญาณควบคุม ของทั้งสองมอเตอร์ โดยเปรียบเทียบการใช้ข้อมูลแต่ละมอเตอร์มาสร้าง เป็นตัวควบคุม	45
5.5 กรณีศึกษาที่ 2.1 โดยมีพารามิเตอร์ $c_{1s1} = 9, d_{12s1} = 1, c_{1s2} = 1, d_{12s2} = 1$	46
5.6 กรณีศึกษาที่ 2.2 โดยมีพารามิเตอร์ $c_{1s1} = 1, d_{12s1} = 1, c_{1s2} = 9, d_{12s2} = 1$	48
5.7 กรณีศึกษาที่ 2.3 โดยมีพารามิเตอร์ $c_{1s1} = 1, d_{12s1} = 16, c_{1s2} = 1, d_{12s2} = 1$	49
5.8 กรณีศึกษาที่ 2.4 โดยมีพารามิเตอร์ $c_{1s1} = 1, d_{12s1} = 1, c_{1s2} = 1, d_{12s2} = 4$	50
5.9 ออกแบบครั้งที่ 1 ด้วยวิธีที่เสนอ โดยมีพารามิเตอร์ $c_{1s1} = 9, d_{12s1} = 2, c_{1s2} = 9, d_{12s2} = 0.01$ ในตัวอย่างที่ 2	51
5.10 ออกแบบครั้งที่ 2 ด้วยวิธีที่เสนอ โดยมีพารามิเตอร์ $c_{1s1} = 9, d_{12s1} = 3, c_{1s2} = 9, d_{12s2} = 0.01$ ในตัวอย่างที่ 2	52
5.11 ออกแบบครั้งที่ 3 ด้วยวิธีที่เสนอ โดยมีพารามิเตอร์ $c_{1s1} = 4, d_{12s1} = 3, c_{1s2} = 12, d_{12s2} = 0.01$ ในตัวอย่างที่ 2	53
5.12 ออกแบบครั้งที่ 1 ด้วยวิธี CDA โดยมีพารามิเตอร์ $c_{1s1} = 4, d_{12s1} = 3, c_{1s2} = 12, d_{12s2} = 0.01$ ในตัวอย่างที่ 2	54
5.13 การลู่เข้าของค่า f_1 และ f_2 จากการออกแบบครั้งที่ 2 ด้วยวิธี CDA ในตัวอย่างที่ 2	55
5.14 ออกแบบครั้งที่ 2 ด้วยวิธี CDA โดยมีพารามิเตอร์ $c_{1s1} = 16, d_{12s1} = 0.01, c_{1s2} = 16, d_{12s2} = 0.01$ ในตัวอย่างที่ 2	55
5.15 ออกแบบครั้งที่ 3 ด้วยวิธี CDA โดยมีพารามิเตอร์ $c_{1s1} = 16, d_{12s1} = 0.5, c_{1s2} = 16, d_{12s2} = 0.01$ ในตัวอย่างที่ 2	56

สารบัญญภาพ (ต่อ)

	หน้า
5.16 ออกแบบครั้งที่ 4 ด้วยวิธี CDA โดยมีพารามิเตอร์ $c_{1s1} = 4$, $d_{12s1} = 0.5$, $c_{1s2} = 20$, $d_{12s2} = 0.01$	57
5.17 ระบบ Electromagnetic Suspension	58
5.18 ลักษณะการจำลองระบบ electromagnetic suspension หรือ ems	60
5.19 ผลตอบแบบจำลองระบบ EMS โดยใช้ตัวควบคุมที่ออกแบบมาเพื่อสภาวะที่ 1 อย่าง เดียว	62
5.20 ผลตอบแบบจำลองระบบ EMS โดยใช้วิธีที่เสนอ ในการออกแบบครั้งที่ 1 เพื่อหาตัว ควบคุมสำหรับทั้งสามสภาวะ	63
5.21 ผลตอบแบบจำลองระบบ EMS โดยใช้วิธี CDA ในการออกแบบครั้งที่ 1 เพื่อหาตัว ควบคุมสำหรับทั้งสามสภาวะ	64
5.22 ผลตอบแบบจำลองระบบ EMS โดยใช้วิธี CDA ในการออกแบบครั้งที่ 2 เพื่อหาตัว ควบคุมสำหรับทั้งสามสภาวะ	65
ก.1 ระบบป้อนกลับ	74
ข.1 ขั้นตอนการแก้ปัญหาใช้สมการเมทริกซ์เชิงเส้น	78

บทที่ 1

บทนำ

1.1 กล่าวนำปัญหา

ในการควบคุมระบบที่มีความไม่เป็นเชิงเส้น (nonlinear system) วิธีที่ง่ายที่สุดคือ พิจารณาจุดทำงานแต่ละจุดในช่วงที่ใช้งาน (operation interval) เพราะในช่วงการทำงานที่แคบเพียงพอ ระบบจะมีคุณสมบัติเป็นระบบเชิงเส้น (linear system) ซึ่งสามารถใช้ทฤษฎีการออกแบบตัวควบคุมเชิงเส้น (linear control theory) สำหรับจุดทำงานดังกล่าวได้ โดยการนำแบบจำลองที่ไม่เป็นเชิงเส้นมาทำให้เป็นเชิงเส้น (linearization) รอบๆ จุดทำงานนั้นๆ ในกรณีที่ไม่ทราบแบบจำลองที่แน่นอนของระบบไม่เชิงเส้น แบบจำลองเชิงเส้นในแต่ละช่วงการทำงาน ยังสามารถได้จากการหาเอกลักษณ์ของระบบ (system identification) เมื่อได้แบบจำลองเชิงเส้นสำหรับแต่ละช่วงการทำงานแล้ว จึงออกแบบตัวควบคุมเชิงเส้นที่ทำให้แต่ละจุดทำงานมีผลตอบ หรือสมรรถนะ (performance) ให้เป็นที่ยอมรับได้ โดยการออกแบบลักษณะนี้ตัวควบคุมเชิงเส้นตัวหนึ่งถูกออกแบบมาสำหรับช่วงการทำงานหนึ่งๆ เท่านั้น หากมีการเปลี่ยนช่วงการทำงาน อาจจะต้องเปลี่ยนตัวควบคุมด้วย ซึ่งก่อให้เกิดความไม่สะดวก อีกทั้งเป็นการสิ้นเปลืองค่าใช้จ่าย ดังนั้นจึงเกิดความคิดที่จะใช้ตัวควบคุมเชิงเส้นเพียงตัวเดียว เพื่อใช้สำหรับหลายๆ จุดการทำงานของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น

ปัญหาดังกล่าวข้างต้นสามารถมองเป็นปัญหาการควบคุมระบบเชิงเส้นหลายๆระบบ ด้วยตัวควบคุมเพียงตัวเดียว (simultaneous control problem) นอกจากนี้ปัญหาที่ระบบเชิงเส้นต้องการตัวควบคุมเพื่อใช้ควบคุมระบบ ในกรณีที่ระบบเกิดการผิดพลาดในขณะการทำงานที่สภาวะปกติ กล่าวคือเมื่อมีการผิดพลาดที่ตัวขับเคลื่อน (actuator failure) หรือเมื่อมีการผิดพลาดที่ตัวตรวจวัด (sensor failure) แล้วตัวควบคุมยังคงรักษาเสถียรภาพวงปิดไว้ได้ เรียกปัญหาในลักษณะนี้ว่า ปัญหาการควบคุมแบบเชื่อถือได้ (reliable control problem) สามารถมองเป็นปัญหาการควบคุมระบบเชิงเส้นหลายๆระบบด้วยตัวควบคุมตัวเดียวได้เช่นกัน

1.2 ความเป็นมา

ปัญหาการควบคุมระบบเชิงเส้นหลายระบบด้วยตัวควบคุมตัวร่วมกัน มีลำดับการวิจัยอย่างคร่าวๆ ดังนี้

- ปี ค.ศ. 1982 ปัญหาการควบคุมระบบเชิงเส้นหลายระบบ ด้วยตัวควบคุมตัวร่วมกันมีกล่าวถึงครั้งแรกโดย Sacks กับ Murray [1] และ Vidyasagar [2]

- ปี ค.ศ. 1983 Looze [3] เสนอ dual optimization procedure เพื่อหาเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ สำหรับระบบเชิงเส้นหลายระบบ โดยใช้ระบบเครื่องบิน McDonnell-Douglas F4-E เป็นตัวอย่าง ซึ่งในขั้นตอนดังกล่าวต้องหาค่าเริ่มต้นของเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะที่ทำให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพอยู่แล้ว ในขณะที่ Kreisselmeier [4] และคณะ ใช้วิธีที่เรียกว่า vector performance optimization ในการหาตัวควบคุมสำหรับเครื่องบิน McDonnell-Douglas F-4C
- ปี ค.ศ. 1985 Vidyasagar [5] ได้แปลงปัญหาของการมีตัวควบคุมเชิงเส้นร่วมกันของระบบจำนวน l ระบบ ลดเหลือปัญหาการมีตัวควบคุมเชิงเส้นที่เสถียรร่วมกันสำหรับ $l - 1$ ระบบ พร้อมทั้งยังให้วิธีการหาตัวควบคุมดังกล่าว ซึ่งตัวควบคุมที่ได้เพียงแค่นี้ทำให้แต่ละระบบมีเสถียรภาพเท่านั้น อีกทั้งตัวควบคุมที่ได้มีอันดับค่อนข้างสูง
- ปี ค.ศ. 1986 Minto กับ Vidyasagar [6] เสนอแนวทางหาตัวควบคุมร่วมสำหรับระบบเชิงเส้นหลายระบบในเชิงสมการสถานะ (state space) แต่วิธีที่เสนอมีข้อจำกัดมากมายในเรื่องจำนวนสถานะของระบบ จำนวนสัญญาณเข้า และ จำนวนของสัญญาณออก
- ปี ค.ศ. 1987 Vidyasagar [7] ใช้แนวทางในการแก้เดียวกับที่เสนอไว้ใน ปี 1985 แต่มีการกำหนดขอบเขตเสถียรภาพให้แต่ละระบบต่างกัน
- ปี ค.ศ. 1988 Vidyasagar [8] ได้วิเคราะห์ปัญหา การควบคุมระบบเชิงเส้นหลายระบบ ด้วยตัวควบคุมตัวร่วมกัน ในรูปสมการสถานะ ซึ่งให้มุมมองอีกมุมมองหนึ่งของปัญหา และในปีเดียวกัน Ghosh [9] รวบรวมและเสนอ แนวทางของปัญหาโดยวิธี algebraic geometric ซึ่งเป็นมุมมองที่ต้องเอาจำนวนของสัญญาณออก สัญญาณเข้ามาเป็นข้อจำกัดทำนองเดียวกับของ Minto ปี 1986
- ปี ค.ศ. 1990 Chow [10] นำแนวความคิดที่ Ghosh เสนอไว้ในปี 1988 มาใช้ในการหาตัวควบคุมดังกล่าว โดยการกำหนดขั้ว (pole) ให้แต่ละระบบ นอกจากจะมีข้อจำกัดในเรื่องของจำนวนสัญญาณเข้า สัญญาณออกแล้ว ตำแหน่งขั้วที่กำหนดเป็นข้อจำกัดอีกเช่นเดียวกัน
- ปี ค.ศ. 1996 Toker [11] กล่าวถึงอันดับของตัวควบคุมที่ทำให้ระบบวงปิดของระบบสองระบบมีเสถียรภาพ ทำให้ทราบว่า ไม่สามารถทราบถึงอันดับที่น้อยที่สุดของตัวควบคุมที่ทำให้ระบบสองระบบมีเสถียรภาพได้
- ปี ค.ศ. 1997 Luke, Dorato และ Abdalla [12] ได้หาเมทริกซ์สำหรับป้อนกลับสถานะร่วมกัน สำหรับหลายระบบ โดยอาศัยอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (linear matrix inequality) เป็นเครื่องมือในการหาเมทริกซ์ดังกล่าว
- ปี ค.ศ. 1999 Cao, Sun, และ Lam [13] ใช้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในการแก้ปัญหา การป้อนกลับสัญญาณออกสถิตย์ (static output feedback) และนอกจากนี้วิธีของที่พวกเขาเสนอ ยังสามารถนำไปใช้ได้กับกรณีหลายระบบอีกด้วย

- ปี ค.ศ. 1999 Geromel, Bernussou, และ Oliverira [14] ออกบทความเกี่ยวกับการหาตัวควบคุม สำหรับสมรรถนะ H_2 โดยอาศัยอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น และได้ขยายต่อไปสำหรับการแก้ปัญหาการควบคุมแบบเชื่อถือได้ ซึ่งเป็นอีกแนวทางหนึ่ง ในการแก้ปัญหาการควบคุมหลายระบบด้วยตัวควบคุมตัวร่วมกัน

จากลำดับที่มาของปัญหาการควบคุมระบบเชิงเส้นหลายระบบด้วยตัวควบคุมตัวเดียวกันพอสรุปแนวทางการวิจัยได้ดังนี้

1. วิเคราะห์เชิงทฤษฎี อาทิเช่น Sacks and Murray 1982, Vidyasagar 1985, Ghosh 1988, Vidyasagar 1988 เป็นต้น
2. ใช้อัลกอริทึมการค้นหาเพื่อแก้ปัญหา (searching algorithm) อาทิเช่น Looze 1983, Kreisselmeier และคณะ, Cao และคณะ 1999, Geromel และคณะ 1999 เป็นต้น

1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

1. เสนอขั้นตอนในการออกแบบตัวควบคุมเชิงเส้น สำหรับหลายระบบด้วยตัวควบคุมตัวร่วมกัน โดยคำนึงถึงสมรรถนะของแต่ละระบบ
2. เปรียบเทียบ วิเคราะห์ขั้นตอนที่เสนอ และศึกษาแนวทางในการประยุกต์ใช้ในอุตสาหกรรม

1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. ศึกษา รวบรวม สรุป แนวความคิดการใช้ตัวควบคุมสำหรับหลายระบบ
2. เขียนขั้นตอนในการหาตัวควบคุมสองระบบ
3. ทดสอบขั้นตอนที่ได้ด้วยการจำลองระบบ (simulation)
4. วิเคราะห์เปรียบเทียบผลจากขั้นตอนที่เสนอ

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้ขั้นตอนในการออกแบบตัวควบคุมสำหรับหลายระบบ ที่คำนึงถึงสมรรถนะของแต่ละระบบด้วย

บทที่ 2

ทฤษฎีการมีตัวควบคุมร่วมกันสำหรับระบบเชิงเส้นหลายระบบ

ในช่วงแรกของงานวิจัยเกี่ยวกับการมีตัวควบคุมร่วมกันของระบบเชิงเส้นหลายระบบ (simultaneous control) ปัญหาถูกพิจารณาในรูปเมทริกซ์ฟังก์ชันถ่ายโอน (transfer function matrix) โดยอาศัยการแยกตัวประกอบเฉพาะร่วม (coprime factorization) [5] เป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์ ต่อมาในปี 1986 Vidyasagar ได้วิเคราะห์ปัญหาในรูปแบบสมการสถานะ บทนี้จะลำดับเนื้อหาของปัญหาการมีตัวควบคุมร่วมกัน เริ่มด้วย ความหมายของปัญหา การวิเคราะห์ในรูปแบบเมทริกซ์ฟังก์ชันถ่ายโอน มุมมองในรูปแบบสมการสถานะ และสุดท้ายเป็นข้อสังเกตที่ได้จากการศึกษาปัญหาดังกล่าว

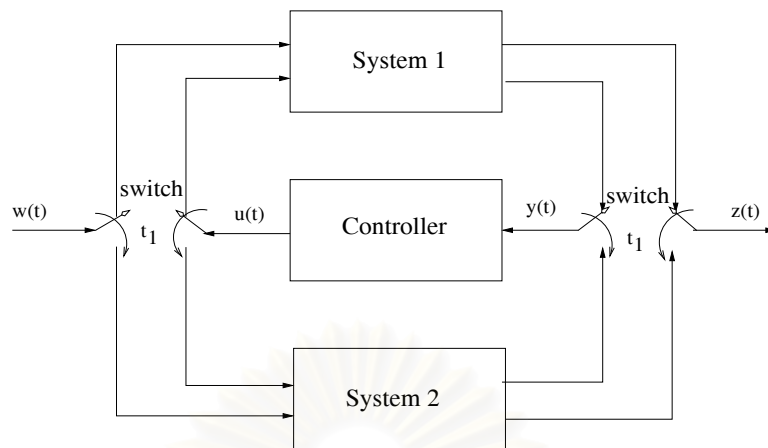
2.1 ความหมายของการควบคุมระบบหลายระบบด้วยตัวควบคุมตัวเดียวกัน

จากที่กล่าวนำในตอนต้นของบทที่ 1 ถึงที่มาของวิทยานิพนธ์ว่าเกิดจากการปัญหาการควบคุมระบบไม่เชิงเส้นที่หลายๆ จุดทำงาน ซึ่งแต่ละจุดทำงานมีลักษณะเป็นระบบเชิงเส้น เราต้องการหาตัวควบคุมตัวเดียวที่สามารถใช้ได้ทุกๆ จุดทำงาน เราสามารถอธิบายแนวความคิดดังกล่าว โดยใช้รูปที่ 2.1 ประกอบ

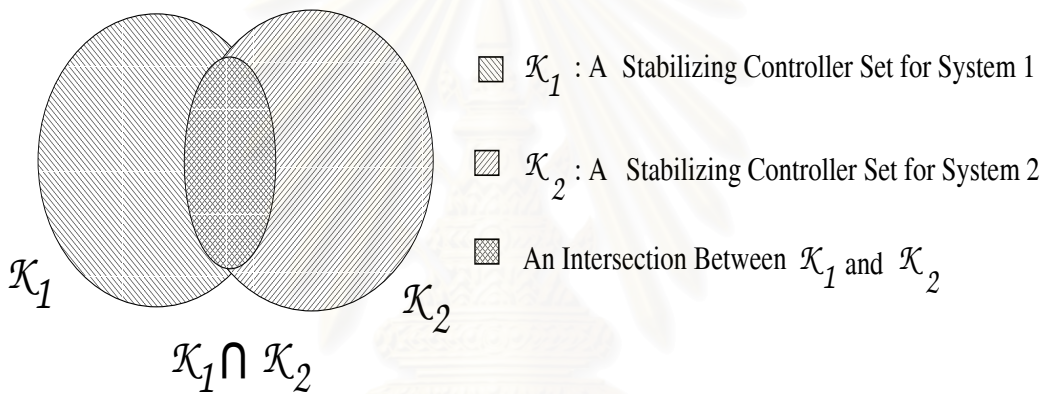
เมื่อเวลาก่อน t_1 เราใช้ตัวควบคุมกับจุดทำงานที่ 1 หรือเปรียบกับใช้ควบคุมระบบที่ 1 โดยมีสัญญาณภายนอก $w(t)$ เข้าที่ระบบที่ 1 และสัญญาณออก $y(t)$ จากระบบที่ 1 เข้าไปยังตัวควบคุมเพื่อหาสัญญาณควบคุม $u(t)$ ไปควบคุมระบบที่ 1 ขณะเดียวกันก็วัดสัญญาณที่พิจารณา $z(t)$ จากระบบที่ 1 และเมื่อเวลา $t = t_1$ มีการเปลี่ยนจุดการทำงานไปเป็นจุดทำงานที่ 2 เปรียบเสมือนเราสับสวิตช์เพื่อให้ตัวควบคุมจากเดิมที่ใช้ควบคุมระบบที่ 1 มาเป็นควบคุมระบบที่ 2 แทนและสับสัญญาณภายนอกและสัญญาณภายนอก $w(t)$ เข้าที่ระบบที่ 2 ตัวควบคุมรับสัญญาณออก $y(t)$ จากระบบที่ 2 เพื่อหาสัญญาณควบคุม $u(t)$ ไปควบคุมระบบที่ 2 และสับสวิตช์เพื่อวัดสัญญาณที่พิจารณา $z(t)$ จากระบบที่ 2 แทน

จากทฤษฎีการควบคุมซึ่งจะกล่าวในบทต่อไป ทำให้เราทราบว่า ตัวควบคุมที่สามารถทำให้ระบบวงปิด สำหรับระบบหนึ่งระบบมีเสถียรภาพ หรือมีผลตอบตามคุณสมบัติที่เราต้องการนั้น ไม่มีแค่ตัวควบคุมเพียงตัวเดียว แต่มีเป็นเซตของตัวควบคุม กล่าวคือ

$$\mathcal{K} \triangleq \{C(s) \mid \mathbb{H}(P(s), C(s)) \text{ มีเสถียรภาพ}\} \quad (2.1)$$



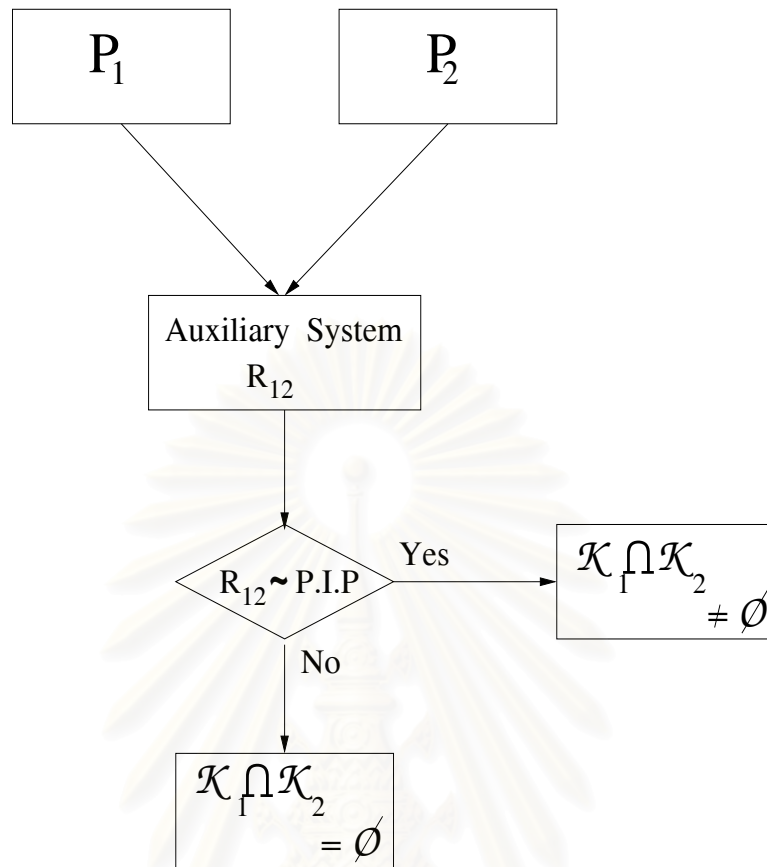
รูปที่ 2.1: ความหมายของ simultaneous control



รูปที่ 2.2: เซตของการมีตัวควบคุมร่วม

ดังนั้นปัญหาการมีตัวควบคุมร่วม สำหรับในกรณี 2 ระบบ สามารถอธิบายได้ดังนี้ เซต K_1 เป็นเซตของตัวควบคุมที่ทำให้ระบบที่ 1 มีเสถียรภาพ และเซต K_2 เป็นเซตของตัวควบคุมที่ทำให้ระบบที่ 2 มีเสถียรภาพ การที่ระบบทั้งสองสามารถมีตัวควบคุมร่วมกันได้นั้น ต้องมีเซตที่เกิดจากการร่วมกัน (intersection) ระหว่าง K_1 กับ K_2 หรือ $\text{K}_1 \cap \text{K}_2 \neq \phi$ โดยที่ ϕ แทนเซตว่าง (empty set) ซึ่งอธิบายได้ในรูปที่ 2.2

การที่เซต K_1 และ K_2 จะมีสมาชิกร่วมกันได้นั้นสามารถตรวจสอบได้ โดยการนำระบบที่ 1 หรือ P_1 และ ระบบที่ 2 หรือ P_2 มาสร้างระบบเชิงเส้นระบบหนึ่งเรียกว่า ระบบช่วย (auxiliary system) นำระบบช่วยนี้มาตรวจสอบคุณสมบัติที่เรียกว่า คุณสมบัติ parity interlacing property หรือ P.I.P. ที่มาของระบบช่วย และคุณสมบัติ P.I.P. จะกล่าวในรายละเอียดในบทต่อไป ถ้าระบบช่วยมีคุณสมบัติดังกล่าวแล้ว เซต K_1 และ K_2 ก็จะมีสมาชิกร่วมกัน นั่นหมายถึงระบบสองระบบ สามารถมีตัวควบคุมร่วมกัน ซึ่งอธิบายด้วยแผนภาพในรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3: ขั้นตอนการตรวจสอบการมีตัวควบคุมร่วมของสองระบบ

2.2 วิเคราะห์ปัญหาในรูปแบบเมทริกซ์ฟังก์ชันถ่ายโอน

เราสามารถพิจารณาระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลาที่บรรยายด้วย (ก.1) เพียงแค่พิจารณาเมทริกซ์ฟังก์ชันถ่ายโอนจาก $u(t)$ ไปยัง $y(t)$ กล่าวคือ

$$\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s)$$

โดยที่ $\hat{y}(s)$ และ $\hat{u}(s)$ เป็นการแปลงลาปลาซ (Laplace transform) ของ $y(t)$ และ $u(t)$ ตามลำดับ และ $G(s) \in \mathcal{M}$ เป็นเมทริกซ์ฟังก์ชันถ่ายโอนจาก $\hat{u}(s)$ ไปยัง $\hat{y}(s)$ สัญลักษณ์ \mathcal{M} แทนเซตของเมทริกซ์ฟังก์ชันถ่ายโอนตรรกยะ (rational transfer function matrix) นอกจากนี้เรายังสามารถแยก $G(s)$ ได้เป็น

$$G(s) = N(s)D^{-1}(s) = \tilde{D}^{-1}(s)\tilde{N}(s) \quad (2.2)$$

โดยที่ $N(s)$, $D(s)$, $\tilde{N}(s)$, $\tilde{D}(s) \in \mathcal{M}_S$ เมื่อ \mathcal{M}_S แทนเซตของเมทริกซ์ฟังก์ชันถ่ายโอนตรรกยะเสถียร¹ (stable rational transfer function matrix) และเรียก $(N(s), D(s))$ และ $(\tilde{N}(s), \tilde{D}(s))$ ว่าตัว

¹ฟังก์ชันถ่ายโอนเสถียร หมายถึง ฟังก์ชันที่ไม่มีขั้ว (pole) อยู่ในพื้นที่ปิดทางด้านขวาของแกนจินตภาพในระนาบเชิงซ้อน

ประกอบเฉพาะร่วมเกี่ยวขวา และซ้ายของ $G(s)$ (right and left coprime factorization) ตามลำดับ ซึ่งตัวประกอบเฉพาะร่วมเกี่ยวขวาและซ้ายสอดคล้องกับสมการไดโอแฟนไทน์ (Diophantine equation) ดังนี้

$$\begin{aligned}\tilde{X}(s)N(s) + \tilde{Y}(s)D(s) &= I \text{ และ} \\ \tilde{N}(s)X(s) + \tilde{D}(s)Y(s) &= I\end{aligned}\quad (2.3)$$

โดยที่ $X(s), Y(s), \tilde{X}(s), \tilde{Y}(s) \in \mathcal{M}_S$ จะเห็นได้ว่าทั้ง $(X(s), Y(s))$ และ $(\tilde{X}(s), \tilde{Y}(s))$ ก็เป็นตัวประกอบเฉพาะร่วมเกี่ยวขวาและซ้ายเช่นกัน เซตของตัวควบคุมทั้งหมดที่ทำให้ระบบวงปิดของ $G(s)$ มีเสถียรภาพเขียนได้ดังนี้

บทตั้ง 1 [5] :ให้ $G(s) \in \mathcal{M}$ ที่มีตัวประกอบเฉพาะร่วมเกี่ยวขวาและซ้ายคือ $(N(s), D(s)), (\tilde{N}(s), \tilde{D}(s))$ ตามลำดับ และมีเมทริกซ์ $U(s), V(s), \tilde{U}(s)$ และ $\tilde{V}(s) \in \mathcal{M}_S$ ที่สอดคล้องกับสมการ

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}(s) & -\tilde{U}(s) \\ -\tilde{N}(s) & \tilde{D}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(s) & U(s) \\ N(s) & V(s) \end{bmatrix} = I \quad (2.4)$$

แล้วเซตของตัวควบคุมทุกตัวที่ทำให้ระบบ $G(s)$ มีเสถียรภาพคือ

$$\begin{aligned}K(G(s)) &= \{(U(s) + D(s)Q(s))(V(s) + N(s)Q(s))^{-1} \\ &\quad \text{โดยที่ } Q(s) \in \mathcal{M}_S \text{ และ } |V(s) + N(s)Q(s)| \neq 0\} \\ &= \{(\tilde{V}(s) + \tilde{Q}(s)\tilde{N}(s))^{-1}(\tilde{U}(s) + \tilde{Q}(s)\tilde{D}(s)) \\ &\quad \text{โดยที่ } \tilde{Q}(s) \in \mathcal{M}_S \text{ และ } |\tilde{V}(s) + \tilde{Q}(s)\tilde{N}(s)| \neq 0\}\end{aligned}\quad (2.5)$$

□

บทพิสูจน์ หาได้ใน [5]

□

กล่าวคือถ้าเราหาเมทริกซ์ฟังก์ชันถ่ายโอน $U(s), V(s), \tilde{U}(s)$ และ $\tilde{V}(s) \in \mathcal{M}_S$ ที่สอดคล้องกับ (2.4) เราสามารถสร้างเซตของตัวควบคุมทั้งหมดที่จะทำให้ระบบ $G(s)$ มีเสถียรภาพได้ และสำหรับวิทยานิพนธ์นี้ ในกรณีที่ $Q(s) = 0$ เราขอเรียกตัวควบคุมดังกล่าวว่า ตัวควบคุมกลาง (central controller) สังเกตว่าตัวควบคุมในเซตดังกล่าวก็อยู่ในรูป ตัวประกอบเฉพาะร่วมเกี่ยวขวาและซ้ายเช่นกัน ดังนี้

$$\begin{aligned}C(s) &= N_c(s)D_c^{-1}(s) \triangleq (U(s) + D(s)Q(s))(V(s) + N(s)Q(s))^{-1} \\ &= \tilde{D}_c^{-1}(s)\tilde{N}_c(s) \triangleq (\tilde{V}(s) + \tilde{Q}(s)\tilde{N}(s))^{-1}(\tilde{U}(s) + \tilde{Q}(s)\tilde{D}(s))\end{aligned}$$

โดยนิยามเมทริกซ์ $(N_c(s), D_c(s))$ และ $(\tilde{N}_c(s), \tilde{D}_c(s))$ เป็นตัวประกอบเฉพาะร่วมเกี่ยวขวาและซ้ายของตัวควบคุม $C(s)$ ตามลำดับ นอกจากนี้ยังมีความสัมพันธ์ระหว่าง ตัวประกอบเฉพาะร่วมเกี่ยวขวาและซ้ายของตัวระบบ $G(s)$ กับตัวควบคุม $C(s)$ ซึ่งจะนำไปใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการมีตัวควบคุมร่วมต่อไป

ในเนื้อหาต่อไป เราจะมีอาร์กถึงเซตย่อย (subset) \mathcal{U}_S ที่มีคุณสมบัติตามนิยาม

นิยาม 1 นิยามเซตย่อย $\mathcal{U}_S \subset \mathcal{M}_S$ มีคุณสมบัติดังนี้

$$\mathcal{U}_S \triangleq \{W(s) \mid W(s) \in \mathcal{M}_S \text{ และ } W^{-1}(s) \in \mathcal{M}_S\}$$

และเราเรียกเมทริกซ์ $W(s)$ ว่า unimodular □

เซตย่อย \mathcal{U}_S นี้จะถูกใช้อ้างถึงในทฤษฎีบทต่อไป

ทฤษฎีบทที่ 1 [5] สมมติว่า $G(s), C(s) \in \mathcal{M}$ ให้ $(N(s), D(s))$ และ $(\tilde{N}(s), \tilde{D}(s))$ เป็นตัวประกอบเฉพาะร่วมเกี่ยวขวาและซ้ายของระบบ $G(s)$ ตามลำดับ ให้ $(N_c(s), D_c(s))$ และ $(\tilde{N}_c(s), \tilde{D}_c(s))$ เป็นตัวประกอบเฉพาะร่วมเกี่ยวขวาและซ้ายของตัวควบคุม $C(s)$ ตามลำดับ แล้วข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. $\mathbb{H}(G(s), C(s))$ มีเสถียรภาพ
2. เมทริกซ์ $\tilde{N}_c(s)N(s) + \tilde{D}_c(s)D(s)$ เป็น unimodular
3. เมทริกซ์ $\tilde{N}(s)N_c(s) + \tilde{D}(s)D_c(s)$ เป็น unimodular

□

บทพิสูจน์ หาได้ใน [5] □

จากทฤษฎีบทที่ 1 คำกล่าวที่ว่า $\mathbb{H}(G(s), C(s))$ มีเสถียรภาพ เราสามารถพูดได้อีกกันว่า $C(s)$ เป็นตัวควบคุมที่ทำให้ระบบวงปิดของ $G(s)$ มีเสถียรภาพ (stabilizing controller)

บทแทรก 1 [5] สมมติว่า $G(s) \in \mathcal{M}_S$ ให้ $(N(s), D(s))$ และ $(\tilde{N}(s), \tilde{D}(s))$ เป็นตัวประกอบเฉพาะร่วมเกี่ยวขวาและซ้ายของระบบ $G(s)$ ตามลำดับ แล้วข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. $C(s)$ ทำให้ $G(s)$ มีเสถียรภาพ
2. $C(s)$ มีตัวประกอบเฉพาะร่วมเกี่ยวซ้าย $(\tilde{N}_c(s), \tilde{D}_c(s))$ ที่ทำให้ $\tilde{N}_c(s)N(s) + \tilde{D}_c(s)D(s) = I$
3. $C(s)$ มีตัวประกอบเฉพาะร่วมเกี่ยวขวา $(N_c(s), D_c(s))$ ที่ทำให้ $\tilde{N}(s)N_c(s) + \tilde{D}(s)D_c(s) = I$

□

บทพิสูจน์ หาได้จาก [5] □

โดยที่ $C(s)$ ในบทแทรกข้างต้น ก็คือตัวควบคุมกลางนั่นเอง และในกรณีที่ตัวควบคุมเองเสถียรด้วยแล้ว สามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

บทแทรก 2 สมมติว่าระบบ $G(s) = N(s)D^{-1}(s) = \tilde{D}^{-1}(s)\tilde{N}(s)$ มีเสถียรภาพวงปิดได้ด้วยตัวควบคุม $C(s) \in \mathcal{M}_S$ ที่มี $(N_c(s), D_c(s))$ และ $(\tilde{N}_c(s), \tilde{D}_c(s))$ เป็นตัวประกอบเฉพาะร่วมเกี่ยวขวาและซ้ายตามลำดับ แล้วเมทริกซ์ $C(s)N(s) + D(s)$ และ $\tilde{N}(s)C(s) + \tilde{D}(s)$ จะเป็น unimodular □

บทพิสูจน์ จากที่กำหนดให้ $C(s) \in \mathcal{M}_S$ ซึ่งตรงกับการที่ $\tilde{D}_c(s), D_c(s) \in \mathcal{U}_S$ ทำให้ $\tilde{D}_c^{-1}(s), D_c^{-1}(s) \in \mathcal{U}_S$ เช่นกัน จากบทแทรกที่แล้ว เราจะได้

$$\begin{aligned}\tilde{D}_c^{-1}(s)\tilde{N}_c(s)N(s) + (s)D(s) &= \tilde{D}_c^{-1}(s) \Rightarrow C(s)N(s) + \tilde{D}_c(s)D(s) = \tilde{D}_c^{-1}(s) \in \mathcal{U}_S \\ \tilde{N}(s)N_c(s)D_c^{-1}(s) + \tilde{D}(s) &= D_c^{-1}(s) \Rightarrow \tilde{N}(s)C(s) + \tilde{D}(s) = D_c^{-1}(s) \in \mathcal{U}_S\end{aligned}$$

□

เรานำเนื้อหาที่กล่าวมาข้างต้น มาใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาของการมีตัวควบคุมร่วมกัน ตามที่แสดงต่อไปนี โดยเริ่มจากการวิเคราะห์ในกรณี 2 ระบบ, $G_1(s)$ และ $G_2(s)$ ที่มีตัวประกอบเฉพาะร่วมเกี่ยววชาญาย $(N_i(s), D_i(s))$ และ $(\tilde{N}_i(s), \tilde{D}_i(s))$ ตามลำดับ สำหรับ $i = 1, 2$ และมี $U_i(s), V_i(s), \tilde{U}_i(s), \tilde{V}_i(s)$ ที่สอดคล้องกับ (2.4) สำหรับแต่ละ $i = 1, 2$

ตัวควบคุมร่วมกันสำหรับทั้งสองระบบวิเคราะห์ดังนี้ สำหรับ $\exists C_1(s) \in \mathcal{K}(G_1(s))$ และ $\exists C_2(s) \in \mathcal{K}(G_2(s))$ ปัญหาตัวควบคุมร่วม คือ

$$\begin{aligned}C_1(s) &= C_2(s) \\ \tilde{D}_{c1}^{-1}(s)\tilde{N}_{c1}(s) &= \tilde{D}_{c2}^{-1}(s)\tilde{N}_{c2}(s) \\ \tilde{N}_{c1}(s) &= \tilde{D}_{c1}(s)\tilde{D}_{c2}^{-1}(s)\tilde{N}_{c2}^{-1}(s)\end{aligned}$$

ถ้ามี $M(s) \in \mathcal{U}_S$ นิยาม $M(s) \triangleq \tilde{D}_{c1}(s)\tilde{D}_{c2}^{-1}(s)$

$$\begin{aligned}\tilde{N}_{c1}(s) &= M(s)\tilde{N}_{c2}^{-1}(s) \\ \tilde{D}_{c1}(s) &= M(s)\tilde{D}_{c2}(s)\end{aligned}$$

โดยการแทน $\tilde{D}_c(s) = \tilde{V}_1(s) + \tilde{Q}_1(s)\tilde{N}_1(s)$ และ $\tilde{N}_c(s) = \tilde{U}_1(s) + \tilde{Q}_1(s)\tilde{D}_1(s)$ เราสามารถเขียนได้ว่า

$$\begin{aligned}\tilde{U}_1(s) + \tilde{Q}_1(s)\tilde{D}_1(s) &= M(s)(\tilde{U}_2(s) + \tilde{Q}_2(s)\tilde{D}_2(s)) \\ \text{และ } \tilde{V}_1(s) + \tilde{Q}_1(s)\tilde{N}_1(s) &= M(s)(\tilde{V}_2(s) + \tilde{Q}_2(s)\tilde{N}_2(s))\end{aligned}$$

หรือเขียนได้ในรูป

$$\begin{bmatrix} I & \tilde{Q}_1(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U}_1(s) & \tilde{V}_1(s) \\ \tilde{D}_1(s) & \tilde{N}_1(s) \end{bmatrix} = M(s) \begin{bmatrix} I & \tilde{Q}_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U}_2(s) & \tilde{V}_2(s) \\ \tilde{D}_2(s) & \tilde{N}_2(s) \end{bmatrix}$$

จากความสัมพันธ์ (2.4) เราเขียนสมการเมทริกซ์ข้างบนได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} I & \tilde{Q}_1(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U}_1(s) & \tilde{V}_1(s) \\ \tilde{D}_1(s) & \tilde{N}_1(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -N_2(s) & V_2(s) \\ D_2(s) & -U_2(s) \end{bmatrix} = M(s) \begin{bmatrix} I & \tilde{Q}_2(s) \end{bmatrix}$$

เพื่อความสะดวกนิยามเมทริกซ์ฟังก์ชันถ่ายโอน

$$\begin{bmatrix} A(s) & S(s) \\ B(s) & T(s) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{U}_1(s) & \tilde{V}_1(s) \\ \tilde{D}_1(s) & \tilde{N}_1(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -N_2(s) & V_2(s) \\ D_2(s) & -U_2(s) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

เราจะได้ $A(s) + \tilde{Q}_1(s)B(s) = M(s)$ หรือกล่าวได้ว่า $A(s) + \tilde{Q}_1(s)B(s) \in \mathcal{U}_S$ เป็นที่มาของทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2 [5] กำหนดให้ระบบสองระบบ $G_1(s)$ และ $G_2(s)$ ซึ่งมีตัวประกอบเฉพาะร่วมเกี่ยวข้องขาและซ้าย คือ $(N_i(s), D_i(s))$ และ $(\tilde{N}_i(s), \tilde{D}_i(s))$, $i = 1, 2$ และมีเมทริกซ์ $U_i(s)$, $V_i(s)$, $\tilde{U}_i(s)$, $\tilde{V}_i(s) \in \mathcal{M}_S$ ที่สอดคล้องกับสมการ (2.4) และนิยาม $R(s) = B(s)A^{-1}(s)$ โดยที่

$$\begin{bmatrix} A(s) \\ B(s) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{V}_1(s) & -\tilde{U}_1(s) \\ -\tilde{N}_1(s) & \tilde{D}_1(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_2(s) \\ N_2(s) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

แล้ว $G_1(s)$ และ $G_2(s)$ สามารถมีตัวควบคุมร่วมกันได้ก็ต่อเมื่อมี $M(s) \in \mathcal{M}_S$ ที่ทำให้ $A(s) + M(s)B(s)$ เป็น unimodular \square

บทพิสูจน์ หาได้จาก [5] หรือ จากที่ลำดับไว้ก่อนทฤษฎีบท \square

เราสามารถมองได้ว่า $(B(s), A(s))$ เป็นตัวประกอบเฉพาะร่วมเกี่ยวข้องขา ของระบบที่ถูกสร้างขึ้นมาจากระบบ $G_1(s)$ และ $G_2(s)$ เราเรียกระบบ $R(s) \triangleq B(s)A^{-1}(s)$ ที่สร้างขึ้นมานี้ว่าระบบช่วย (auxiliary system) กล่าวคือถ้ามี $M(s) \in \mathcal{M}_S$ ทำให้ $A(s) + M(s)B(s) \in \mathcal{U}_S$ แล้วระบบสองระบบก็จะ มีตัวควบคุมร่วมกัน นอกจากนี้จากบทแทรก 2 เราสามารถกล่าวได้ว่า $M(s)$ เป็นตัวควบคุมที่เสถียรที่ทำให้ระบบช่วย $R(s)$ มีเสถียรภาพวงปิด สำหรับในกรณีระบบเชิงเส้นหลายระบบก็จะมีทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 3 ระบบ $G_1(s)$, $G_2(s)$, \dots , $G_l(s)$ ที่มีตัวประกอบเฉพาะร่วมเกี่ยวข้องขาและซ้ายคือ $(N_i(s), D_i(s))$ และ $(\tilde{N}_i(s), \tilde{D}_i(s))$, $i = 1, 2, \dots, l$ ตามลำดับ และมีเมทริกซ์ $U_i(s)$, $V_i(s)$, $\tilde{U}_i(s)$ และ $\tilde{V}_i(s) \in \mathcal{M}_S$ ที่สอดคล้องกับสมการ (2.4) สำหรับแต่ละระบบ $i = 1, 2, \dots, l$ และนิยามระบบช่วย $R_i(s) \triangleq B_i(s)A_i^{-1}(s)$, $i = 2, \dots, l$ โดยที่

$$\begin{bmatrix} A_i(s) \\ B_i(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{V}_1(s) & -\tilde{U}_1(s) \\ -\tilde{N}_1(s) & \tilde{D}_1(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_i(s) \\ N_i(s) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

แล้วระบบ $G_1(s)$, $G_2(s)$, \dots , $G_l(s)$ มีเสถียรภาพด้วยตัวควบคุมตัวร่วมกันได้ ก็ต่อเมื่อ มี $M(s) \in \mathcal{M}_S$ ที่ทำให้ $A_i(s) + M(s)B_i(s)$ เป็น unimodular สำหรับแต่ละ $i = 2, 3, \dots, l$ \square

บทพิสูจน์ หาได้จากใน [5] \square

ดังนั้นปัญหาการมีตัวควบคุมร่วมกัน l ระบบ จึงแก้ได้โดยพิจารณาปัญหาการมีตัวควบคุมที่เสถียรร่วมกัน ของระบบช่วย $l - 1$ ระบบ เราเรียกปัญหาที่ระบบเชิงเส้นระบบหนึ่งสามารถทำให้มีเสถียรภาพวงปิดได้ด้วยตัวควบคุมที่เสถียรว่า strong stabilization problem การที่ระบบสามารถมีตัวควบคุมที่เสถียรมาทำให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพได้นั้น ระบบจะต้องมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

บทตั้ง 2 [5] ระบบ $G(s)$ สามารถมีตัวควบคุมที่เสถียรมาทำให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพได้ ก็ต่อเมื่อจำนวนขั้ว (pole) ระหว่างศูนย์ขวางกัน (blocking zero) ที่วางอยู่บนแกนจำนวนจริง ในพื้นที่ปิดทางด้านขวาของแกนจินตภาพบนระนาบเชิงซ้อน มีเป็นจำนวนคู่

บทพิสูจน์ หาได้จาก [5]

เราเรียกคุณสมบัติของระบบตามบทตั้ง 2 ว่า parity interlacing property หรือ P.I.P นอกจากนี้ยังมีบทแทรกที่สะดวกในการตรวจสอบคุณสมบัติ P.I.P ของระบบเชิงเส้นหนึ่งๆ ดังนี้

บทแทรก 3 [5] สมมุติมีระบบ $G(s) \in \mathcal{M}$ มี $(N(s), D(s))$ เป็นตัวประกอบเฉพาะร่วมขวา แล้วระบบจะมีตัวควบคุมที่เสถียรหรือ $C(s) \in \mathcal{M}_S$ ทำให้ระบบวงปิด $\mathbb{H}(G(s), C(s))$ มีเสถียรภาพได้ ก็ต่อเมื่อ $\det(D(s))$ มีเครื่องหมายร่วมกันที่แต่ละศูนย์ขวางกัน (blocking zero) ที่วางอยู่บนแกนจำนวนจริง ในพื้นที่ปิดทางด้านขวาของแกนจินตภาพ บนระนาบเชิงซ้อน

บทพิสูจน์ หาได้จาก [5]

ดังนั้นสำหรับระบบสองระบบสามารถมีตัวควบคุมร่วมกันได้ ก็ต่อเมื่อ ระบบช่วยที่เกิดจากระบบทั้งสอง มีคุณสมบัติ parity interlacing property ส่วนในกรณีของ $l > 2$ ระบบนั้น แม้ว่าปัญหาจะถูกแปลงเป็นการมีตัวควบคุมที่เสถียรร่วมกันของระบบ $l - 1$ ระบบ แต่คุณสมบัติ P.I.P. ก็ไม่สามารถนำมาตรวจสอบได้เพราะว่าคุณสมบัติดังกล่าวบอกเพียงว่ามีตัวควบคุมร่วมกัน แต่ตัวควบคุมนั้นไม่จำเป็นต้องเป็นตัวควบคุมที่เสถียร

จากการวิเคราะห์ที่กล่าวมาข้างต้น เราได้ทราบถึงเงื่อนไขที่ทำให้ ระบบเชิงเส้นหลายระบบมีเสถียรภาพด้วยตัวควบคุมตัวร่วมกัน ในกรณีที่ระบบสองระบบเราสามารถตรวจสอบการมีตัวควบคุมร่วมได้ด้วยคุณสมบัติ P.I.P. ของระบบช่วยที่สร้างขึ้นมาจากระบบทั้งสอง

2.3 การวิเคราะห์ในเชิงสมการสถานะ

ในส่วนที่แล้วเป็นการวิเคราะห์ในรูปเมทริกซ์ฟังก์ชันถ่ายโอน ต่อมา Vidyasagar [8] ได้นำทฤษฎีที่ Nett และคณะ [16] ให้ไว้เกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างตัวประกอบเฉพาะร่วมขวาและซ้ายกับสมการสถานะ มาแปลงปัญหาที่ถูกวิเคราะห์ด้วยเมทริกซ์ฟังก์ชันถ่ายโอน ให้อยู่ในรูปสมการสถานะ ผลจากการวิเคราะห์ในเชิงสมการสถานะทำให้เราได้มุมมองของปัญหาการมีตัวควบคุมร่วมที่กว้างขึ้น

โดยทั่วไป เมทริกซ์ฟังก์ชันถ่ายโอน สามารถเขียนในรูปสมการสถานะได้ดังนี้

$$G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$$

เราเรียกเมทริกซ์ A ในระบบสมการสถานะว่า เมทริกซ์ลักษณะสมบัติ (characteristic matrix) เพื่อความสะดวกเราใช้สัญลักษณ์

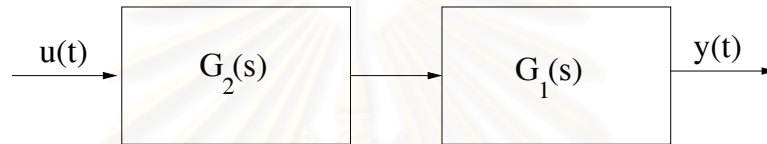
$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \text{ แทน } D + C(sI - A)^{-1}B$$

ระบบเชิงเส้นที่แทนด้วยสัญลักษณ์ดังกล่าว มีพีชคณิตของระบบดังนี้ (เท่าที่กล่าวถึงในวิทยานิพนธ์)

กำหนดให้

$$G_1(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{s1} & B_{s1} \\ \hline C_{s1} & D_{s1} \end{array} \right], \quad G_2(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{s2} & B_{s2} \\ \hline C_{s2} & D_{s2} \end{array} \right]$$

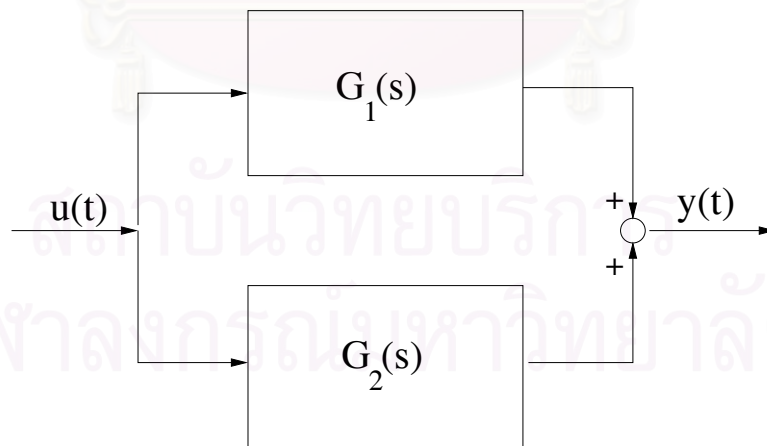
1. ระบบต่ออนุกรมกันที่มีลักษณะกายภาพดังรูปที่ 2.4 และมีพีชคณิตดังนี้



รูปที่ 2.4: ระบบต่ออนุกรม

$$G_1(s)G_2(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_{s1} & B_{s1}C_{s2} & B_{s1}D_{s2} \\ 0 & A_{s2} & B_{s2} \\ \hline C_{s1} & D_{s1}C_{s2} & D_{s1}D_{s2} \end{array} \right]$$

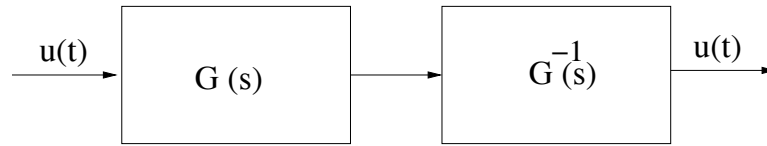
2. ระบบต่อขนานที่มีลักษณะกายภาพดังรูปที่ 2.5 และมีพีชคณิตดังนี้



รูปที่ 2.5: ระบบต่อขนาน

$$G_1(s) + G_2(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_{s1} & 0 & B_{s1} \\ 0 & A_{s2} & B_{s2} \\ \hline C_{s1} & C_{s2} & D_{s1} \end{array} \right]$$

3. การผกผันระบบ (inversion) ในกรณีที่ D เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (non-singular matrix) กล่าวคือเป็นเมทริกซ์ที่หาผกผันได้ การผกผันระบบมีลักษณะกายภาพดังรูปที่ 2.6 และมีพีชคณิตดังนี้



รูปที่ 2.6: ระบบผกผัน

$$G^{-1}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A - BD^{-1}C & BD^{-1} \\ \hline -D^{-1}C & D^{-1} \end{array} \right]$$

จากทฤษฎีควบคุม ถ้าสมมติให้ระบบและตัวควบคุมมีสมการสถานะ

$$G(s) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad \text{และ} \quad C(s) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right]$$

ตามลำดับ ระบบวงปิดจะมีเมทริกซ์ลักษณะสมบัติดังนี้

$$\mathbb{A}_{cl}(G(s), C(s)) \triangleq \left[\begin{array}{cc} A + BD_cC & BC_c \\ B_cC & A_c \end{array} \right] \quad (2.9)$$

โดยที่สัญลักษณ์ $\mathbb{A}_{cl}(G(s), C(s))$ แทนเมทริกซ์ลักษณะสมบัติวงปิดของระบบ $G(s)$ กับตัวควบคุม $C(s)$ หรือ $\mathbb{H}(G(s), C(s))$

จากการแยกตัวประกอบเฉพาะร่วมขวา $G(s) = N(s)D^{-1}(s)$ เราสามารถเขียนได้ว่า $\hat{y}(s) = N(s)D^{-1}(s)\hat{u}(s)$ หมายความว่า มีสัญญาณ $v(t)$ ที่มีการแปลงลาปลาซ $\hat{v}(s)$ ที่ทำให้

$$\hat{y}(s) = N(s)\hat{v}(s); \quad \hat{u}(s) = D(s)\hat{v}(s)$$

ในเชิงสมการสถานะ หากเรากำหนดให้สัญญาณควบคุม $u = Fx + v$ เราจะได้ระบบป้อนกลับสถานะที่มีสมการสถานะ ดังนี้

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \\ u = Fx + v \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (A + BF)x + Bv \\ y = (C + DF)x + Du \\ u = Fx + v \end{array} \right. \quad (2.10)$$

โดยที่ F เป็นเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะที่ทำให้ $A + BF$ เป็นเมทริกซ์เสถียร เนื่องจาก $N(s)$ เป็นเมทริกซ์ฟังก์ชันถ่ายโอนที่แปลงสัญญาณ $v(t)$ เป็นสัญญาณ $y(t)$ จึงสามารถเขียนแทนด้วย

$$N(s) = \left[\begin{array}{c|c} A + BF & B \\ \hline C + DF & I \end{array} \right] \quad (2.11)$$

และ $D(s)$ เป็นเมทริกซ์ฟังก์ชันถ่ายโอนที่แปลงสัญญาณ $v(t)$ เป็นสัญญาณ $u(t)$ จึงสามารถเขียนแทนด้วย

$$D(s) = \left[\begin{array}{c|c} A + BF & B \\ \hline F & I \end{array} \right] \quad (2.12)$$

เราพิจารณาตัวควบคุมกลางที่มีตัวประกอบเฉพาะร่วมขวา $C(s) = U(s)V^{-1}(s)$ กล่าวคือ $\hat{u}(s) = U(s)V^{-1}(s)\hat{y}(s)$ หรือมีสัญญาณ $r(t)$ ที่มีการแปลงลาปลาซเป็น $\hat{r}(s)$ ทำให้

$$\hat{u}(s) = U(s)\hat{r}(s); \quad \hat{y}(s) = V(s)\hat{r}(s)$$

โดยให้สัญญาณ $r = y - (Cx_c + Du)$ เมื่อ x_c เป็นตัวแปรสถานะของตัวควบคุม สมการสถานะเขียนได้เป็น

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_c = Ax_c + Bu + H(Cx_c + Du - y) \\ u = Fx_c \\ r = y - (Cx_c + Du) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_c = (A + BF)x_c - Hr \\ u = Fx_c \\ y = r + (C + DF)x_c \end{array} \right. \quad (2.13)$$

โดยที่เมทริกซ์ H เป็นเมทริกซ์ป้อนกลับตัวสังเกตสถานะ ที่ทำให้ $A + HC$ เป็นเมทริกซ์เสถียร เนื่องจาก $U(s)$ เป็นเมทริกซ์ฟังก์ชันถ่ายโอนที่แปลงสัญญาณ $r(t)$ เป็นสัญญาณ $u(t)$ จึงสามารถเขียนแทนด้วย

$$U(s) = \left[\begin{array}{c|c} A + BF & -H \\ \hline F & 0 \end{array} \right] \quad (2.14)$$

และ $V(s)$ เป็นเมทริกซ์ฟังก์ชันถ่ายโอนที่แปลงสัญญาณ $r(t)$ เป็นสัญญาณ $y(t)$ สามารถเขียนแทนด้วย

$$V(s) = \left[\begin{array}{c|c} A + BF & B \\ \hline C + DF & I \end{array} \right] \quad (2.15)$$

เรานำ $N(s), D(s), U(s)$, และ $V(s)$ มาเขียนรวมกันจะได้

$$\left[\begin{array}{cc} D(s) & U(s) \\ N(s) & V(s) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} A + BF & B & -H & & \\ \hline F & I & 0 & & \\ C + DF & D & I & & \end{array} \right] \quad (2.16)$$

จากสมการไดโอฟานทีน (2.4) จะมีเมทริกซ์

$$\left[\begin{array}{cc} \tilde{V}(s) & -\tilde{U}(s) \\ -\tilde{N}(s) & \tilde{D}(s) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} D(s) & U(s) \\ N(s) & V(s) \end{array} \right]^{-1}$$

โดยใช้พีชคณิตของระบบ เมทริกซ์ดังกล่าวสามารถเขียนแทนได้ด้วย

$$\left[\begin{array}{cc} \tilde{V}(s) & -\tilde{U}(s) \\ -\tilde{N}(s) & \tilde{D}(s) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} A + HC & -B - HD & H & & \\ \hline F & I & 0 & & \\ C & -D & I & & \end{array} \right] \quad (2.17)$$

ดังที่กล่าวมาแล้วในบทที่ 2 โดยไม่สูญเสียความเป็นทั่วไป เราจะพิจารณาเฉพาะในกรณีระบบที่เป็น strictly proper กล่าวคือระบบที่มีรูปแบบ

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right]$$

ทำให้ (2.16) และ (2.17) เขียนได้ใหม่เป็น

$$\left[\begin{array}{cc|cc} D(s) & U(s) & A + BF & B - H \\ \hline N(s) & V(s) & F & I \quad 0 \\ & & C & 0 \quad I \end{array} \right] \quad (2.18)$$

และ

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \tilde{V}(s) & -\tilde{U}(s) & A + HC & -B \quad H \\ \hline -\tilde{N}(s) & \tilde{D}(s) & F & I \quad 0 \\ & & C & 0 \quad I \end{array} \right] \quad (2.19)$$

ตามลำดับ และต่อไปนี้เราสมมุติให้ระบบเชิงเส้นสองระบบมีฟังก์ชันถ่ายโอน

$$G_1(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{s1} & B_{s1} \\ \hline C_{s1} & 0 \end{array} \right], \quad G_2(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{s2} & B_{s2} \\ \hline C_{s2} & 0 \end{array} \right]$$

และแต่ละระบบมีเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ F_{si} และเมทริกซ์สังเกตสถานะ H_{si} ที่ทำให้ $A_{si} + B_{si}F_{si}$ และ $A_{si} + H_{si}C_{si}$ เป็นเมทริกซ์เสถียร สำหรับ $i = 1, 2$ และสมมุติมีตัวควบคุม $\exists C(s) \in \mathcal{K}(G_1(s))$ ที่เขียนอยู่ในรูป

$$\begin{aligned} C(s) &= \tilde{D}_c^{-1}(s)\tilde{N}_c(s) \\ &= (\tilde{V}(s) + Q(s)\tilde{N}(s))^{-1}(\tilde{U}(s) + Q(s)\tilde{D}(s)) \end{aligned} \quad (2.20)$$

โดยที่ $Q(s) \in \mathcal{M}_S$ แทนด้วย

$$Q(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_q & B_q \\ \hline C_q & D_q \end{array} \right]$$

เราสามารถเขียน $\tilde{N}_c(s)$ และ $\tilde{D}_c(s)$ ได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \tilde{D}_c(s) & -\tilde{N}_c(s) & I & -Q(s) \\ \hline \tilde{V}(s) & -\tilde{U}(s) \\ -\tilde{N}(s) & \tilde{D}(s) \end{array} \right] \quad (2.21)$$

โดยที่

$$\left[\begin{array}{cc|cc} I & -Q(s) & A_q & 0 \quad -B_q \\ \hline C_q & I & I & -D_q \end{array} \right]$$

โดยอาศัยพีชคณิตของระบบ $\tilde{N}_c(s)$ และ $\tilde{D}_c(s)$ เขียนได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \tilde{D}_c(s) & -\tilde{N}_c(s) & A_{s1} + H_{s1}C_{s1} & 0 & -B_{s1} & H_{s1} \\ \hline -B_qC_{s1} & A_q & 0 & -B_q \\ F_{s1} - D_qC_{s1} & C_q & I & -D_q \end{array} \right] \quad (2.22)$$

และจาก $C(s) = \tilde{D}_c^{-1}(s)\tilde{N}_c(s)$ เราสามารถเขียนตัวควบคุมในเชิงสมการสถานะได้

$$C(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_{s1} + H_{s1}C_{s1} + B_{s1}F_{s1} - B_{s1}D_qC_{s1} & B_{s1}C_q & -H_{s1} + B_{s1}D_q \\ -B_qC_{s1} & A_q & B_q \\ \hline F_{s1} - D_qC_{s1} & C_q & D_q \end{array} \right] \quad (2.23)$$

จาก (2.9) เราจะได้เมทริกซ์วงรอบปิดของระบบ $G_1(s)$ กับตัวควบคุม $C(s)$ เป็น

$$\mathbb{A}_{cl}(G_1(s), C(s)) = \left[\begin{array}{ccc} A_{s1} + B_{s1}D_qC_{s1} & B_{s1}F_{s1} - B_{s1}D_qC_{s1} & B_{s1}C_q \\ -H_{s1}C_{s1} + B_{s1}D_qC_{s1} & A_{s1} + H_{s1}C_{s1} + B_{s1}F_{s1} - B_{s1}D_qC_{s1} & B_{s1}C_q \\ B_qC_{s1} & -B_qC_{s1} & A_q \end{array} \right] \quad (2.24)$$

และเมื่อเราทำการแปลงคล้าย $A_{cl1} \triangleq \mathbb{A}_{cl}(G_1(s), C(s))$ โดยใช้เมทริกซ์

$$T = \begin{bmatrix} I & I & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

จะได้เมทริกซ์ลักษณะวงรอบปิดของระบบ $G_1(s)$ และ $C(s)$ เป็น

$$T^{-1}A_{cl1}T = \left[\begin{array}{ccc} A_{s1} + H_{s1}C_{s1} & 0 & 0 \\ -H_{s1}C_{s1} + B_{s1}D_qC_{s1} & A_{s1} + B_{s1}F_{s1} & B_{s1}C_q \\ B_{s1}C_q & 0 & A_q \end{array} \right] \quad (2.25)$$

ทำให้เราสังเกตเห็นได้ว่า ค่าเจาะจงของเมทริกซ์ลักษณะวงปิดที่แปลงมานี้ ขึ้นอยู่กับขั้วของเมทริกซ์ $A_{s1} + B_{s1}F_{s1}$, $A_{s1} + H_{s1}C_{s1}$ และ A_q สอดคล้องกับทฤษฎีที่มีอยู่หนังสือการควบคุมสมัยใหม่ (modern control) เช่น [17] [18] และ [23] เป็นต้น

เพื่อแก้ปัญหาการมีตัวควบคุมร่วมกัน คือนำตัวควบคุม $C(s)$ ไปใช้กับระบบ $G_2(s)$ ได้ด้วย เราหาเมทริกซ์ลักษณะวงปิดของระบบ $G_2(s)$ กับตัวควบคุม $C(s)$ ได้ดังนี้

$$\mathbb{A}_{cl}(G_2(s), C(s)) = \left[\begin{array}{ccc} A_{s2} + B_{s2}D_qC_{s2} & B_{s2}F_{s1} - B_{s2}D_qC_{s1} & B_{s2}C_q \\ -H_{s1}C_{s2} + B_{s1}D_qC_{s2} & A_{s1} + H_{s1}C_{s1} + B_{s1}F_{s1} - B_{s1}D_qC_{s1} & B_{s1}C_q \\ B_qC_{s2} & -B_qC_{s1} & A_q \end{array} \right] \quad (2.26)$$

สำหรับระบบช่วยตามนियามในสมการ (2.7) โดยใช้พีชคณิตระบบ เราเขียนเมทริกซ์ฟังก์ชันถ่ายโอน $A(s)$ และ $B(s)$ ในรูปสมการสถานะได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} A(s) \\ B(s) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} A_{s2} + B_{s2}F_{s2} & 0 & B_{s2} \\ -B_{s1}F_{s2} + H_{s1}C_{s2} & A_{s1} + H_{s1}C_{s1} & -B_{s1} \\ \hline F_{s2} & F_{s1} & I \\ C_{s2} & C_{s1} & 0 \end{array} \right] \quad (2.27)$$

จาก $R(s) = B(s)A^{-1}(s)$ เราได้ $R(s)$ ในรูปสมการสถานะ

$$R(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_{s2} & -B_{s2}F_{s1} & B_{s2} \\ \hline H_{s1}C_{s2} & A_{s1} + H_{s1}C_{s1} + B_{s1}F_{s1} & -B_{s1} \\ C_{s2} & C_{s1} & 0 \end{array} \right] \quad (2.28)$$

เมทริกซ์ลักษณะสมบัติวงปิดของระบบช่วย $R(s)$ กับตัวควบคุม $Q(s)$ เขียนได้เป็น

$$\mathbb{A}_{cl}(R(s), Q(s)) = \left[\begin{array}{ccc} A_{s2} + B_{s2}D_qC_{s2} & -B_{s2}F_{s1} + B_{s2}D_qC_{s1} & B_{s2}C_q \\ H_{s1}C_{s2} - B_{s1}D_qC_{s2} & A_{s1} + H_{s1}C_{s1} + B_{s1}F_{s1} - B_{s1}D_qC_{s1} & -B_{s1}C_q \\ B_qC_2 & B_qC_{s1} & A_q \end{array} \right] \quad (2.29)$$

และเมื่อทำการแปลงคล้าย $\mathbb{A}_{cl}(R(s), Q(s))$ ด้วยเมทริกซ์

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

ก็จะได้ $T^{-1}\mathbb{A}_{cl}(R(s), Q(s))T = \mathbb{A}_{cl}(G_2(s), C(s))$ ผลก็คือตำแหน่งขั้วของระบบวงปิด $\mathbb{H}(R(s), Q(s))$ และ $\mathbb{H}(G_2(s), C(s))$ เป็นตำแหน่งเดียวกัน ดังนั้นถ้าเราออกแบบตัวควบคุมที่เสถียร $Q(s)$ กับระบบช่วย ตำแหน่งขั้วที่ได้จะตรงกับตำแหน่งการที่ใช้ตัวควบคุมที่สร้างขึ้นจาก $Q(s)$ กับระบบ $G_2(s)$ ซึ่งเป็นมุมมองหนึ่งที่เราเห็นได้จากการวิเคราะห์ในเชิงสมการสถานะ

2.4 ข้อสังเกตเกี่ยวกับระบบช่วย

หัวข้อที่แล้วกล่าวถึงระบบช่วย $R(s)$ ในรูปแบบสมการสถานะ สมการ (2.28) เราสังเกตเห็นว่า ระบบช่วย $R(s)$ ที่ได้นั้น มีเมทริกซ์ F_{s1} และ H_{s1} ที่ได้จากการออกตัวป้อนกลับสถานะ และตัวสังเกตสถานะของระบบที่ 1 อยู่ด้วย หรือกล่าวได้ว่าระบบช่วยเป็นฟังก์ชันของเมทริกซ์ทั้งสองแน่นอนว่า ตำแหน่งขั้วและศูนย์ของระบบช่วยต้องมีการเปลี่ยนแปลงตามเมทริกซ์ทั้งสอง แต่อย่างไรก็ตามเมทริกซ์สองตัวนี้ก็ไม่มีผลต่อคุณสมบัติ P.I.P ของระบบช่วย ตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 4 กำหนดให้ระบบ $G_1(s)$ และ $G_2(s)$ ที่มีสมการสถานะ

$$G_1(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{s1} & B_{s1} \\ \hline C_{s1} & 0 \end{array} \right], \quad G_2(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{s2} & B_{s2} \\ \hline C_{s2} & 0 \end{array} \right]$$

คุณสมบัติ P.I.P ของระบบช่วยที่เกิดจากระบบทั้งสองตามทฤษฎีบทที่ 3 ไม่เปลี่ยนแปลง ถ้าเมทริกซ์ F_{s1} และ F_{s2} เป็นเมทริกซ์ใดๆ ที่ยังคงทำให้ $A_{s1} + B_{s1}F_{s1}$ และ $A_{s2} + B_{s2}F_{s2}$ มีเสถียรภาพ \square

บทพิสูจน์ จากระบบช่วย $R(s) = (\tilde{D}_1(s)N_2(s) - \tilde{N}_1(s)D_2(s))(\tilde{V}_1(s)D_2(s) - \tilde{U}_1(s)N_2(s))^{-1}$ ให้ $\sigma \in \{s \in \mathcal{R} \mid R(s) = 0 \text{ และ เป็นค่าจริงที่มากกว่า } 0\}$ หรือเป็นศูนย์ (zero) ที่อยู่บนแกนจำนวนจริง

ด้านบวกของระนาบเชิงซ้อนของระบบช่วย กล่าวคือ

$$\begin{aligned}\tilde{D}_1(\sigma) N_2(\sigma) - \tilde{N}_1(\sigma) D_2(\sigma) &= 0 \\ \tilde{N}_1(\sigma) D_2(\sigma) &= \tilde{D}_1(\sigma) N_2(\sigma) \\ \tilde{D}_1^{-1}(\sigma) \tilde{N}_1(\sigma) &= N_2(\sigma) D_2^{-1}(\sigma) \\ P_1(\sigma) &= P_2(\sigma)\end{aligned}\tag{2.30}$$

กล่าวคือ ค่าอัตราขยายของแต่ละระบบที่ $s = \sigma$ มีค่าเท่ากัน และจากบทแทรกที่ 3 คุณสมบัติ P.I.P. ยังสามารถพิจารณาได้จากเครื่องหมายของ $\det(\tilde{V}_1(\sigma) D_2(\sigma) - \tilde{U}_1(\sigma) N_2(\sigma))$ โดยอาศัยว่า $P_1(\sigma) = P_2(\sigma)$ และความสัมพันธ์จากสมการไดโอแฟนทีน เราได้

$$\begin{aligned}\tilde{V}_1(\sigma) D_2(\sigma) - \tilde{U}_1(\sigma) N_2(\sigma) &= \tilde{V}_1(\sigma) D_2(\sigma) - \tilde{U}_1(\sigma) \tilde{D}_1^{-1}(\sigma) \tilde{N}_1(\sigma) D_2(\sigma) \\ &= (\tilde{V}_1(\sigma) - \tilde{U}_1(\sigma) \tilde{D}_1^{-1}(\sigma) \tilde{N}_1(\sigma)) D_2(\sigma) \\ &= (\tilde{V}_1(\sigma) - \tilde{U}_1(\sigma) N_1(\sigma) D_1^{-1}(\sigma)) D_2(\sigma) \\ &= (\tilde{V}_1(\sigma) D_1(\sigma) - \tilde{U}_1(\sigma) N_1(\sigma)) D_1^{-1}(\sigma) D_2(\sigma) \\ &= D_1^{-1}(\sigma) D_2(\sigma)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } \det(\tilde{V}_1(\sigma) D_2(\sigma) - \tilde{U}_1(\sigma) N_2(\sigma)) &= \det(D_1^{-1}(\sigma) D_2(\sigma)) \\ &= \det(D_1^{-1}(\sigma)) \det(D_2(\sigma))\end{aligned}$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างสมการสถานะและตัวประกอบเฉพาะร่วม [16] แน่ใจว่าจะต้องใช้ F_{s1} และ F_{s2} ที่ทำให้ $A_{s1} + B_{s1}F_{s1}$ และ $A_{s2} + B_{s2}F_{s2}$ มีเสถียรภาพ เพื่อว่า $D_1(s) \in \mathcal{M}_S$ และ $D_2(s) \in \mathcal{M}_S$ ซึ่งหมายความว่าคุณสมบัติ P.I.P. ของระบบช่วยไม่ขึ้นต่อค่า F_{si} และ H_{si} \square

จากทฤษฎีบทข้างต้นบอกเราคุณสมบัติ P.I.P. ไม่ขึ้นกับเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ F_{si} และเมทริกซ์สังเกตสถานะ H_{si} การมีตัวควบคุมร่วมกันขึ้นอยู่กับลักษณะของระบบเอง จากการพิสูจน์ข้างต้น กล่าวได้ว่าคุณสมบัติ P.I.P. ของระบบช่วยขึ้นอยู่กับตำแหน่งขั้วและศูนย์ของทั้งสองระบบ และอันที่จริงแล้ว จากความสัมพันธ์ระหว่างเมทริกซ์ฟังก์ชันถ่ายโอนกับสมการสถานะ เพื่อให้ได้ตัวประกอบเฉพาะร่วมอยู่ในเซต \mathcal{M}_S เราจำเป็นต้องหาเมทริกซ์ F_{si} และ H_{si} ที่ทำให้ $A_{si} + B_{si}F_{si}$ และ $A_{si} + H_{si}C_{si}$ เป็นเมทริกซ์เสถียรอยู่แล้ว

ถ้าระบบช่วยมีคุณสมบัติ P.I.P. เรามองได้เพียงว่าระบบ 2 ระบบมีตัวควบคุมร่วมกัน แต่ Toker [11] ได้แสดงให้เห็นว่าเราไม่สามารถระบุได้แน่ชัดถึงอันดับที่น้อยที่สุดของตัวควบคุม ดังนั้นวิทยานิพนธ์นี้จะพิจารณาตัวควบคุมอันดับเต็มเท่านั้น หรือตัวควบคุมที่มีอันดับเท่ากับอันดับของระบบหรือ $n_c = n_p$ ซึ่งหมายความว่าแต่ละระบบมีจำนวนตัวแปรสถานะเท่ากัน และหากระบบสอง

ระบบมีระบบช่วยที่มีคุณสมบัติสอดคล้องตามเงื่อนไข P.I.P ก็ไม่ได้หมายความว่าจะมีตัวควบคุมเต็มอันดับร่วมกัน

สำหรับในกรณีที่ตัวควบคุมเต็มอันดับ ปัญหาก็กลายเป็นการที่ระบบช่วยมีเสถียรภาพด้วยการป้อนกลับสัญญาณออกสถิตย์ (static output feedback)

ทฤษฎีบทที่ 5 ระบบ $G_1(s)$ และ $G_2(s)$ ที่มีสมการสถานะ

$$G_1(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{s1} & B_{s1} \\ \hline C_{s1} & 0 \end{array} \right], \quad G_2(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{s2} & B_{s2} \\ \hline C_{s2} & 0 \end{array} \right]$$

มีตัวควบคุมอันดับเต็มที่ทำให้ทั้งสองมีเสถียรภาพร่วมกัน ก็ต่อเมื่อ ระบบช่วยที่เกิดจากทั้งสองระบบมีเสถียรภาพได้การป้อนกลับสัญญาณออกสถิตย์ \square

บทพิสูจน์ ตัวควบคุมอันดับเต็มหมายถึง $Q(s) = D_q$ หรือเป็นเมทริกซ์คงที่ ทำให้เมทริกซ์ลักษณะสมบัติวงปิดของระบบ $\mathbb{H}(R(s), D_q)$ เป็นดังนี้

$$\begin{aligned} A_{cl}(R(s), D_q) &= \left[\begin{array}{cc} A_{s2} + B_{2s2}D_qC_{2s2} & -B_{2s2}F_{s1} + B_{2s2}D_qC_{2s1} \\ H_{s1}C_{2s2} - B_{2s1}D_qC_{2s2} & A_{s1} + H_{s1}C_{2s1}B_{2s1}F_{s1} - B_{2s1}D_qC_{2s1} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc} A_{s2} & -B_{2s2}F_{s1} \\ H_{s1}C_{2s2} & A_{s1} + HC_{2s1} + B_{2s1}F_{s1} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} B_{s2} \\ -B_{s1} \end{array} \right] D_q \left[\begin{array}{cc} C_{s2} & C_{s1} \end{array} \right] \\ &\triangleq A_r + B_r K_r C_r \end{aligned}$$

และถ้าระบบช่วย มีตัวสามารถควบคุมด้วยการป้อนกลับสัญญาณออก D_q แล้วตัวควบคุมที่ทำให้ทั้งระบบที่ 1 และ 2 มีเสถียรภาพคือ

$$C(s) = \left[\begin{array}{c|c} \frac{A_{s1} + B_{2s1}F_{s1} + H_{s1}C_{2s1} - B_{2s1}D_qC_{2s1}}{F_{s1}} & \frac{-H_{s1}}{D_q} \end{array} \right]$$

\square

และถ้าเราต้องการให้ตัวควบคุมร่วม ที่มีลักษณะเป็น strictly proper ด้วยแล้ว กล่าวคือ $D_q = 0$ เราจะได้บทแทรกดังต่อไปนี้

บทแทรก 4 ถ้ากำหนดให้ตัวควบคุมเป็น strictly proper หรือ $D_c = 0$ แล้ว ระบบทั้งสองจะมีตัวควบคุมอันดับเต็มร่วมกันระหว่างสองระบบ ก็ต่อเมื่อ ระบบช่วยที่เกิดจากทั้งสองระบบมีเสถียรภาพอยู่แล้ว \square

บทพิสูจน์ เนื่องจากตัวควบคุมที่เป็น strictly proper มีลักษณะ $D_c = D_q = 0$ และไม่มี A_q, B_q, C_q ดังนั้นไม่มี $Q(s)$ เป็นผลให้เมทริกซ์ลักษณะวงปิดของระบบที่ 2 กับตัวควบคุมร่วม เท่ากับเมทริกซ์ลักษณะสมบัติของระบบช่วย \square

ในหัวข้อนี้ เราได้แก้ไขข้อสงสัยเกี่ยวกับคุณสมบัติ P.I.P ของระบบช่วยที่เป็นฟังก์ชันของ เมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ และ เมทริกซ์สังเกตสถานะ และได้แสดงมุมมองอีกมุมมองหนึ่งของปัญหา การมีตัวควบคุมร่วมกันของสองระบบโดยใช้ตัวควบคุมเต็มอันดับ โดยหวังว่ามุมมองที่เราได้กล่าวไว้ อาจจะเป็นประโยชน์ในงานวิจัยในอนาคตต่อไป



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 3

การแก้ปัญหาสมรรถนะแบบ H_2 โดยใช้สมการเมทริกซ์เชิงเส้น

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงการแก้ปัญหาสมรรถนะแบบ H_2 ด้วยสมการเมทริกซ์เชิงเส้น รายละเอียดของสมการเมทริกซ์เชิงเส้น เรากล่าวไว้ในภาคผนวก ข และข้อกำหนดในการพิจารณาสมรรถนะแบบ H_2 สำหรับระบบในรูปแบบทั่วไป (ก.1) มีดังนี้ [18]

1. (A, B_2) สามารถทำให้มีเสถียรภาพได้ (stabilizable)
2. (A, C_2) สามารถตรวจจับได้ (detectable)
3. $D_{12}^T D_{12} > 0$ และ $D_{21} D_{21}^T > 0$
4. $\text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n_p + n_u$ สำหรับทุก ω จำนวนจริง
5. $\text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n_p + n_y$ สำหรับทุก ω จำนวนจริง

ในการวิเคราะห์หาตัวควบคุมเต็มอันดับที่พิจารณาถึงสมรรถนะแบบ H_2 ของระบบวงปิด มี 2 แนวทางด้วยกัน แนวทางแรกโดยอาศัย separation principle ออกแบบเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะและเมทริกซ์สังเกตสถานะแยกกัน แล้วนำมาสร้างเป็นตัวควบคุม อีกแนวทางหนึ่งคือหาเมทริกซ์ของตัวควบคุมโดยตรง ในวิทยานิพนธ์นี้จะกล่าวถึงวิธีทั้งสอง เพื่อจะกล่าวถึงต่อไปในการแก้ปัญหาการมีตัวควบคุมร่วมกันสำหรับหลายระบบ โดยคำนึงถึงสมรรถนะแบบ H_2

3.1 การแก้ปัญหาสมรรถนะแบบ H_2 โดยแยกหาเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะและเมทริกซ์สังเกตสถานะ

- หาเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะจากปัญหา Linear Quadratic Regulator (LQR) เป็นปัญหาที่หาตัวควบคุม $u(t)$ ที่ทำให้ระบบ

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ I_{n_p} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

มีฟังก์ชันวัตถุประสงค์

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (3.2)$$

ต่ำสุด โดยที่ $Q \geq 0$ และ $R > 0$ ปัญหาของเราคือต้องการที่จะ $\min_u J$ โดยมีระบบ (3.1) เป็นเงื่อนไข และจากทฤษฎีการควบคุมแบบเหมาะสมที่สุด ถ้า (A, B_2) ทำให้เสถียรภาพได้

(stabilizable) จะมีตัวควบคุมได้ในรูป $u = Fx$ เราเรียก F ว่าเป็นเมทริกซ์อัตราขยายป้อนกลับสถานะ สำหรับพจน์ในฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (3.2) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} x^T Q x + u^T R u &= \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x^T Q^{\frac{1}{2}} & u^T R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} x \\ R^{\frac{1}{2}} u \end{bmatrix} \\ &= z^T z \end{aligned} \quad (3.3)$$

กล่าวคือ เราสร้างสัญญาณที่จะพิจารณา $z(t)$ ให้กับระบบ โดยที่

$$\begin{aligned} z &= \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} u \\ &= C_1 x + D_{12} u \end{aligned} \quad (3.4)$$

หรือ $Q = C_1^T C_1$, $R = D_{12}^T D_{12}$ และ $D_{12}^T C_1 = 0$ ทำให้เราได้ฟังก์ชันวัตถุประสงค์

$$J = \int_0^{\infty} z^T z dt$$

และระบบวงปิดสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_2 F & B_1 \\ C_1 + D_{12} F & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

สังเกตเห็นได้ว่าลักษณะดังกล่าวเป็นลักษณะของสมรรถนะแบบ H_2 ที่ได้กล่าวถึงในบทที่ 2 นั่นคือเราจะได้ $\|T_{zw}\|_2^2 = \text{trace}(B_1^T X B_1)$ โดยที่เมทริกซ์ X สอดคล้องกับ

$$\begin{aligned} \exists X > 0, \quad (A + B_2 F)^T X + X(A + B_2 F) \\ + (C_1 + D_{12} F)^T (C_1 + D_{12} F) = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

แต่ (3.6) ไม่อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น เราจึงต้องจัดให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น โดยการคูณซ้ายและขวาสมการ (3.6) ด้วยเมทริกซ์ $\tilde{P}_f \triangleq X^{-1}$

$$\exists \tilde{P}_f > 0, \quad \tilde{P}_f (A + B_2 F)^T + (A + B_2 F) \tilde{P}_f + \tilde{P}_f (C_1 + D_{12} F)^T (C_1 + D_{12} F) \tilde{P}_f = 0 \quad (3.7)$$

และให้ $\|T_{zw}\|_2^2 = \text{trace}(B_1^T \tilde{P}_f^{-1} B_1)$ ซึ่งสามารถแทนได้ด้วยการแก้ปัญหาต่อไปนี้

$$\min \gamma_f \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} (B_1^T \tilde{P}_f^{-1} B_1) < \gamma_f I \\ \tilde{P}_f (A + B_2 F)^T + (A + B_2 F) \tilde{P}_f + \tilde{P}_f (C_1 + D_{12} F)^T (C_1 + D_{12} F) \tilde{P}_f < 0 \\ \tilde{P}_f > 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

อาศัยความสมมูลกันของ Schur complement และวิธีการเปลี่ยนตัวแปร ทำให้เขียนปัญหาให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้เป็น

$$\min \gamma_f \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} \gamma_f I & B_1^\top \\ B_1 & P_f \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} (AP_f + B_2M_f) + (AP_f + B_2M_f)^\top & * \\ (C_1P_f + D_{12}M_f) & -I \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

โดยที่ $M_f \triangleq FP_f$ เป็นตัวแปรที่ถูกเปลี่ยน และสัญลักษณ์ * หมายถึงส่วนสลับที่ของพจน์ที่อยู่ฝั่งตรงกันข้ามของแนวทแยงมุม ปัญหาข้างต้นเป็นรูปแบบอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นแบบหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันเชิงเส้น มีตัวแปรในปัญหาคือ γ_f , P_f และ M_f

- **ตัวสังเกตสถานะแบบเหมาะสมที่สุด** เมื่อระบบไม่สามารถมีตัวแปรสถานะให้สำหรับป้อนกลับ จำเป็นที่จะต้องสร้างตัวแปรสถานะขึ้นมา โดยอาศัยตัวสังเกตสถานะ (state observer) กล่าวคือมีระบบ

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

โดยที่ $B_1^\top D_{21} = 0$ เราต้องการสร้างตัวแปรสถานะ $\hat{x}(t)$ จาก $y(t)$ ด้วย

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_2u + H(C_2\hat{x} - y) \quad (3.11)$$

เรียก H ว่าเมทริกซ์สังเกตสถานะ (state observer matrix) ถ้าให้ $\xi = \hat{x} - x$ จะได้ระบบ

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ u_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A + HC_2) & -(B_1 + HD_{21}) \\ F & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ w \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

สามารถพิจารณาเป็นสมรรถนะแบบ H_2 ได้ คือ มีเมทริกซ์สมมาตร $Q > 0$ ที่สอดคล้องกับ

$$(A + HC_2)Q + Q(A + HC_2)^\top + (B_1 + HD_{21})(B_1 + HD_{21})^\top = 0 \quad (3.13)$$

ซึ่งจะได้ $\|T_{ew}\|_2^2 = \text{trace}(FQF^\top)$ เห็นได้ชัดว่า (3.13) ไม่อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ทำให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น โดยนิยามตัวแปร $\tilde{P}_h \triangleq Q^{-1}$ สมการ (3.13) กลายเป็น

$$\exists \tilde{P}_h > 0, \quad \tilde{P}_h(A + HC_2) + (A + HC_2)^\top \tilde{P}_h + \tilde{P}_h(B_1 + HD_{21})(B_1 + HD_{21})^\top \tilde{P}_h = 0 \quad (3.14)$$

โดยอาศัยความสมมูลของ Schur complement และการเปลี่ยนตัวแปร ได้ปัญหาในรูปอสมการเมทริกซ์ดังนี้

$$\min \gamma_h \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} \gamma_h I & F \\ F^\top & P_h \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} (P_h A + M_h C_2) + (P_h A + M_h C_2)^\top & (P_h B_1 + M_h D_{21}) \\ * & -I \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

โดยที่ $M_h = P_h H$ เป็นตัวแปรที่เปลี่ยนแทน และมี γ_h , P_h และ M_h เป็นตัวแปรในปัญหา

จากที่กล่าวมา เป็นการออกแบบเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ F และเมทริกซ์สังเกตสถานะ H โดยคำนึงถึงสมรรถนะแบบ H_2 โดยทั่วไปเราไม่สามารถวัดตัวแปรสถานะของระบบได้ทุกตัว ดังนั้นเราต้องใช้ตัวสังเกตสถานะ เพื่อสร้างตัวแปรสถานะเหล่านั้นแทน กล่าวคือเราใช้ $u(t) = F\hat{x}(t)$ แทน $u(t) = Fx(t)$ จาก separation principle ทำให้เราได้ระบบวงปิดมีค่าเจาะจงขึ้นอยู่กับ $A + B_2F$ และ $A + HC_2$ ขณะเดียวกันจะให้สมรรถนะแบบ H_2 ของระบบวงปิดเป็น

$$\|T_{wz}\|_2^2 = B_1^T P_f^{-1} B_1 + F P_f^{-1} F^T$$

และสร้างเมทริกซ์ในตัวควบคุม (2.1) ดังนี้ [18]

$$A_c = A + B_2F + HC_2, \quad B_c = -H, \quad C_c = F$$

อย่างไรก็ตามเราสามารถหาตัวควบคุม (2.1) ได้โดยตรง เพื่อให้ระบบวงปิดมีสมรรถนะแบบ H_2 ดังที่จะปรากฏในหัวข้อถัดไป

3.2 การแก้ปัญหาสมรรถนะแบบ H_2 โดยพิจารณาหาเมทริกซ์ตัวควบคุมโดยตรง

จากระบบ (ก.1) และ ตัวควบคุม (ก.2) เราเขียนสามารถนำมาเขียนรวมกันได้ [14]

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \\ z \\ y \\ x_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B_1 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ \hline C_1 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ \hline C_2 & 0 & D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \\ w \\ u \\ \dot{x}_c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \mathbb{K} \begin{bmatrix} y \\ x_c \end{bmatrix}$$

เพื่อความสะดวกเรานิยาม

$$\begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} A & 0 & B_1 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ \hline C_1 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ \hline C_2 & 0 & D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะให้ระบบวงปิดสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_2 K C_2 & B_1 + B_2 K D_{21} \\ C_1 + D_{12} K C_2 & D_{11} + D_{12} K D_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ w \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ w \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

โดยที่ $\tilde{x} = [x^T \ x_c^T]^T$ เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับ $\|T_{zw}\|_2 < \infty$ คือ $\tilde{D} = 0$ ซึ่งจะเป็นจริงถ้า

1. $D_{11} = 0$ และ

2. $D_{12} = 0$ หรือ $D_{21} = 0$ หรือ $D_c = 0$

ในวิทยานิพนธ์นี้เราเลือกใช้เงื่อนไขที่ $D_{11} = 0$ และ $D_c = 0$ ซึ่งจะทำให้ระบบที่เราพิจารณาเหลือเพียงแต่

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

และตัวควบคุมเป็น

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

และระบบวงปิดเป็น

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ w \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

โดยที่

$$\tilde{A} \triangleq \begin{bmatrix} A & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} \triangleq \begin{bmatrix} B_1 \\ B_c D_{21} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} \triangleq [C_1 \quad D_{12} C_c] \quad (3.20)$$

เราจะพิจารณาเสถียรภาพวงปิดของระบบก่อน และสมรรถนะเป็นลำดับต่อไป เพราะปัญหาที่มีความเกี่ยวเนื่องกัน ระบบวงปิด (3.19) จะมีเสถียรภาพก็ต่อเมื่อสอดคล้องกับอสมการเลียปูนอฟ กล่าวคือ

$$\exists \tilde{P} \in \mathcal{R}^{2n_p \times 2n_p}, \tilde{P} > 0, \quad \tilde{A}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A} < 0 \quad (3.21)$$

ซึ่งสมมูลกับทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 6, [14] ระบบ (3.17) สามารถทำให้มีเสถียรภาพได้ด้วยตัวควบคุม (3.18) ก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์ สมมาตร $X, Y \in \mathcal{R}^{n_p \times n_p}$ และเมทริกซ์ $M \in \mathcal{R}^{n_p \times n_p}, L \in \mathcal{R}^{n_u \times n_p}, F \in \mathcal{R}^{n_p \times n_y}$ เป็นคำตอบของอสมการ

$$\begin{bmatrix} H & Z + M \\ Z^T + M^T & G \end{bmatrix} < 0 \quad (3.22)$$

$$\begin{bmatrix} Y & I \\ I & X \end{bmatrix} > 0 \quad (3.23)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} H(Y, L) &\triangleq AY + YA^T + B_2 L + L^T B_2^T \\ G(X, F) &\triangleq A^T X + X A + F C_2 + C_2^T F^T \\ Z(X, Y, F, L) &\triangleq A + Y A^T X + L^T B_2^T X + Y C_2^T F^T \end{aligned}$$

□

บทพิสูจน์ จากทฤษฎีเปลี่ยนนอพ (3.21) นิยามเมทริกซ์ \tilde{P} , \tilde{P}^{-1} และเมทริกซ์แปลง, $T \in \mathcal{R}^{2n_p \times 2n_p}$ ด้วยเมทริกซ์ย่อยขนาด $n_p \times n_p$

$$\tilde{P} \triangleq \begin{bmatrix} X & U \\ U^T & \hat{X} \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}^{-1} \triangleq \begin{bmatrix} Y & V \\ V^T & \hat{Y} \end{bmatrix}, \quad T \triangleq \begin{bmatrix} Y & I \\ V^T & 0 \end{bmatrix}$$

จากนิยามตัวแปร \tilde{P} และ \tilde{P}^{-1} จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง $X, Y, U, V, \hat{X}, \hat{Y}$ ดังนี้

$$\tilde{P} \tilde{P}^{-1} = \begin{bmatrix} XY + UV^T & XV + U\hat{Y} \\ U^T Y + \hat{X} V^T & U^T V + \hat{X} \hat{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_p} & 0 \\ 0 & I_{n_p} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

ในขณะเดียวกันจาก matrix inversion lemma และ $\tilde{P} > 0$

$$Y = (X - U\hat{X}U^T)^{-1} = X^{-1} - X^{-1}U(U^T X^{-1}U - \hat{X})^{-1}U^T X^{-1} > X^{-1} \quad (3.25)$$

สมมูลกับ (3.23) คุณ T^T ที่ด้านซ้าย และ T ที่ด้านขวาของ (3.21) อาศัยความสัมพันธ์ (3.24) จะให้

$$T^T \tilde{P} \tilde{A} T = \begin{bmatrix} AY + B_2 C_c V^T & A \\ XAY + XB_2 C_c V^T + UB_c C_2 Y + UA_c V^T & XA + UB_c C_2 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

นิยามตัวแปรใหม่

$$L \triangleq C_c V^T, \quad F \triangleq UB_c, \quad M \triangleq VA_c^T U^T \quad (3.27)$$

ทำให้ (3.26) อยู่ในรูป

$$T^T \tilde{P} \tilde{A} T = \begin{bmatrix} AY + B_2 L & A \\ XAY + XB_2 C_c V^T + UB_c C_2 Y + M^T & XA + FC_2 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

และเมื่อรวมกับส่วนสลับ (transpose), $T^T \tilde{A}^T \tilde{P} T$ ก็จะได้ (3.22) \square

เมทริกซ์ $Z(X, Y, F, L)$ เป็นเมทริกซ์ที่ไม่เชิงเส้นในตัวแปร X, Y, F, L ดังนั้นเมื่อกำหนดให้ $Z + M = 0$, (3.22) จะเหลือเพียง

$$\begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} Y & I \\ I & X \end{bmatrix} > 0$$

ซึ่งเป็นอสมการเชิงเส้นในตัวแปร X, Y, F, L เราสามารถหาเมทริกซ์ M กลับคืนมาได้จาก $M = -Z(X, Y, F, L)$ และนำไปหา A_c ต่อไป

ที่กล่าวมาข้างต้นเป็นการหาตัวควบคุม (3.18) เพื่อให้ระบบ (3.17) มีเสถียรภาพเท่านั้น ในลำดับต่อไปนอกจากระบบวงปิดจะเสถียรภาพแล้ว เรายังต้องการให้ $\|T_{zw}\|_2$ ของระบบวงรอบปิดมีค่าน้อยที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ ซึ่งปัญหานี้สมมูลกับ

$$\min \text{trace}(\tilde{B}^T \tilde{P} \tilde{B}) \quad \text{s.t.} \quad \tilde{A}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A} + \tilde{C}^T \tilde{C} < 0 \quad (3.29)$$

เมื่อทำการแปลงอสมการที่เป็นเงื่อนไขใน (3.29) ด้วยการคูณด้านซ้ายด้วย T^T และคูณด้านขวาด้วย T จะได้

$$\begin{aligned}
 & T^T (\tilde{A}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A} + \tilde{C}^T \tilde{C}) T < 0 \\
 & \begin{bmatrix} H & Z+M \\ Z^T + M^T & G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y & V \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^T \\ C_c^T D_{12}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & I \\ V^T & 0 \end{bmatrix} < 0 \\
 & \begin{bmatrix} H & Z+M & Y C_1^T + V C_c^T D_{12}^T \\ Z^T + M^T & G & C_1^T \\ C_1 Y + D_{12} C_c V^T & C_1 & -I \end{bmatrix} < 0 \\
 & \begin{bmatrix} H & Z+M & Y C_1^T + L^T D_{12}^T \\ Z^T + M^T & G & C_1^T \\ C_1 Y + D_{12} L & C_1 & -I \end{bmatrix} < 0
 \end{aligned}$$

ให้ $M = -Z - (Y C_1^T + L^T D_{12}^T) C_1 \triangleq -Z - N C_1$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} H & -N C_1 & N \\ -C_1^T N^T & G & C_1^T \\ N^T & C_1 & -I \end{bmatrix} < 0 \\
 & \begin{bmatrix} H & -N C_1 \\ -C_1^T N^T & G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N \\ C_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N^T & C_1 \end{bmatrix} < 0 \\
 & \begin{bmatrix} H & -N C_1 \\ -C_1^T N^T & G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N N^T & N C_1 \\ C_1^T N^T & C_1^T C_1 \end{bmatrix} < 0 \\
 & \begin{bmatrix} H + N N^T & 0 \\ 0 & G + C_1^T C_1 \end{bmatrix} < 0
 \end{aligned}$$

ซึ่งแยกออกได้เป็น

$$\begin{bmatrix} H & Y C_1^T + L^T D_{12}^T \\ C_1 Y + D_{12} L & -I \end{bmatrix} < 0, \quad \text{และ} \quad G + C_1^T C_1 < 0 \quad (3.30)$$

และในส่วนของฟังก์ชันจุดประสงค์เทอม $\tilde{B}^T \tilde{P} \tilde{B}$ แทนด้วยเมทริกซ์สมมาตร $W > 0$ โดยที่ $W > \tilde{B}^T \tilde{P} \tilde{B}$ ทำให้ $\text{trace} W > \text{trace}(\tilde{B}^T \tilde{P} \tilde{B})$ ดังนั้นหากเราแก้ปัญหา $\min(\text{trace} W)$ แทนก็จะสมมูลกับปัญหา (3.29) แต่ต้องเพิ่มเงื่อนไขดังต่อไปนี้

เพราะว่า $\tilde{P} > 0$ และ $W > 0$, ทำให้ $W > \tilde{B}^T \tilde{P} \tilde{B}$ สมมูลกับ $\tilde{P}^{-1} - \tilde{B} W^{-1} \tilde{B}^T > 0$

แทนค่า \tilde{B} , \tilde{P}^{-1} และทำการแปลงอสมการด้วย T_q เมื่อให้

$$T_q = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & U \end{bmatrix}$$

อาศัยความสัมพันธ์ใน (3.24) เขียนเงื่อนไขข้างต้นได้

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & U \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} Y & V \\ V^T & \hat{Y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_1 \\ B_c D_{21} \end{bmatrix} W^{-1} \begin{bmatrix} B_1^T & D_{21}^T B_c^T \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & U^T \end{bmatrix} &> 0 \\ \begin{bmatrix} Y & I \\ I & X \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_1 \\ X B_1 + U B_c D_{21} \end{bmatrix} W^{-1} \begin{bmatrix} B_1^T & B_1^T X + D_{21}^T B_c^T U^T \end{bmatrix} &< 0 \\ \begin{bmatrix} Y & I & B_1 \\ I & X & X B_1 + F D_{21} \\ B_1^T & B_1^T X + D_{21}^T F^T & W \end{bmatrix} &> 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

สรุปปัญหาการหาตัวควบคุมที่ทำให้ H_2 ของระบบมีค่าน้อยที่สุดเท่าที่จะทำได้คือการแก้ปัญหาดังต่อไปนี้

$$\min \text{trace} W \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} Y & I & B_1 \\ I & X & X B_1 + F D_{21} \\ B_1^T & B_1^T X + D_{21}^T F^T & W \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} H & Y C_1^T + L^T D_{12}^T \\ C_1 Y + D_{12} L & -I \end{bmatrix} < 0 \\ G + C_1^T C_1 < 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

โดยมี X, Y, L , และ F เป็นตัวแปร เมื่อแก้หาเมทริกซ์ X, Y, L , และ F ได้แล้ว สร้างตัวควบคุมดังนี้

1. ให้ $V = Y$
2. จาก $XY + UV^T = I$ ดังนั้น $U = Y^{-1} - X$
3. $M = -Z - (Y C_1^T + L^T D_{12}^T) C_1$ โดยที่ $Z = A + Y A^T X + L^T B_2^T X + Y C_2^T F^T$
4. $A_c = U^{-1} M^T Y^{-1}$, $B_c = U^{-1} F$, และ $C_c = L Y^{-1}$

ก็จะได้ตัวควบคุมที่ทำให้ระบบวงปิดมีสมรรถนะแบบ H_2 ที่มีคุณสมบัติ $\|T_{zw}\|_2^2 < \text{trace} W$

ในบทนี้เราได้กล่าวถึงการแก้สมรรถนะแบบ H_2 ด้วยอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นนี้ 2 แนวทางด้วยกัน แนวทางแรกเป็นการหาตัวควบคุมเต็มอันดับที่เกิดจากการออกแบบเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ และเมทริกซ์ตัวสังเกตสถานะแยกกัน วิธีนี้ผู้สนใจรายละเอียดสามารถหาได้จาก [18] ส่วนอีกแนวทางหนึ่งเป็นการหาเมทริกซ์ของตัวควบคุมโดยตรง กล่าวคือไม่ได้แยกเป็นพิจารณาเป็นสองปัญหาย่อย ได้แก้ปัญหาการป้อนกลับสถานะ และปัญหาตัวสังเกตสถานะ วิธีนี้ผู้สนใจสามารถหารายละเอียดเพิ่มเติมจากจาก [14]

ปัญหาสมรรถนะแบบ H_2 นี้เป็นเพียงปัญหาหนึ่งในทางระบบควบคุม ที่สามารถจัดอยู่ในรูป
อสมการ เมทริกซ์เชิงเส้นได้ ยังมีปัญหาอื่นๆ อีกที่จัดอยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ผู้สนใจ
สามารถหาเพิ่มเติมได้จาก [21], [22], [15], [20], [19] เป็นต้น อย่างไรก็ตามแนวทางการพิจารณา
ปัญหาสมรรถนะแบบ H_2 ที่เสนอในบทนี้จะนำไปใช้ในบทต่อไป



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 4

การแก้ปัญหาตัวควบคุมร่วมสำหรับระบบเชิงเส้นหลายระบบโดยคำนึงถึงสมรรถนะแบบ H_2 ด้วยอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

เราจะนำแนวทางการแก้ปัญหาสมรรถนะแบบ H_2 ในบทที่แล้วมาใช้ เพื่อหาตัวควบคุมร่วมกันสำหรับหลายระบบ ในบทนี้เราจะเสนอสองวิธี วิธีแรกเป็นวิธีที่วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอ โดยออกแบบเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะร่วมกันก่อน (simultaneous statefeedback) แล้วจึงออกแบบเมทริกซ์สังเกตสถานะ ระหว่างทำวิทยานิพนธ์ Geromel และคณะ ได้เสนอขั้นตอนในการหาตัวควบคุมเต็มอันดับ โดยคำนึงถึงสถานะแบบ H_2 ของระบบวงปิด นอกจากนี้ Geromel และคณะยังขยายแนวทางต่อเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาการควบคุมแบบเชื่อถือได้อีกด้วย ดังที่กล่าวไว้ในบทที่ 1 ว่าปัญหาการควบคุมแบบเชื่อถือได้ก็จัดอยู่ในปัญหาการควบคุมด้วยตัวควบคุมร่วมกันสำหรับระบบเชิงเส้นหลายระบบเช่นกัน นอกจากนี้ผู้ทำวิทยานิพนธ์นี้ ยังได้เพิ่มเติมความหลากหลายให้แก่ขั้นตอนที่ Geromel และคณะเสนอ ซึ่งจะแสดงไว้ในหัวข้อที่ 2 ของบทนี้

ในการอ้างอิงระบบต่างๆ เพื่อไม่ให้เกิดความสับสน เราจะใส่สัญลักษณ์ห้อย s_i ข้างท้ายเมทริกซ์ใน (ก.1) เพื่ออ้างอิงระบบเชิงเส้นที่ i เช่น

$$\begin{bmatrix} A_{s1} & B_{1s1} & B_{2s1} \\ C_{1s1} & D_{11s1} & D_{12s1} \\ C_{2s1} & D_{21s1} & D_{22s1} \end{bmatrix}$$

หมายถึงชุดของเมทริกซ์ที่บรรยายใน สมการสถานะของระบบที่ 1 เป็นต้น

4.1 วิธีที่เสนอ

4.1.1 ที่มาของวิธีที่เสนอ

สำหรับระบบๆ หนึ่ง วิธีที่เราสามารถหาตัวควบคุมเต็มอันดับวิธีหนึ่ง คือ เราหาเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะและเมทริกซ์สถานะ แล้วใช้ข้อมูลของระบบและเมทริกซ์ทั้งสองมาสร้างตัวควบคุม โดย separation principle เราสามารถหาเมทริกซ์ทั้งสองแยกกันได้ เราอาศัยแนวทางเดียวกันสำหรับวิธีที่เสนอเพื่อหาตัวควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นหลายระบบ เราจะสร้างตัวควบคุมร่วมกันสำหรับระบบเชิงเส้นหลายระบบจาก เมทริกซ์ทั้งสอง แต่ในการสร้างตัวควบคุมนั้น นอกจากจะใช้เมทริกซ์ทั้งสองแล้วยังต้องอาศัยข้อมูลของระบบใดระบบหนึ่ง ทำให้เมื่อเราเขียนสมการสถานะระบบวงปิดของแต่ละระบบ เราจะพบว่า มีเพียงระบบวงปิดเดียวที่สอดคล้องกับ separation principle ซึ่งจะเห็นได้จากรายละเอียดในส่วนต่อไป

4.1.2 รายละเอียดของวิธีที่เสนอ

เราเสนอให้ออกแบบเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ F ที่ทำให้ $A + BF$ มีเสถียรภาพก่อน ในการเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะนี้ เราคำนึงสมรรถนะแบบ H_2 ของระบบวงปิดเมื่อมีการป้อนกลับสถานะด้วย คือสำหรับระบบเพียงระบบเดียว เราแก้จากปัญหาที่กล่าวไว้ในปัญหา lqr ของบทที่ 4

$$\min_{\gamma_f, P_f, M_f} \gamma_f \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} \gamma_f I & B_1^T \\ B_1 & P_f \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} (AP_f + B_2M_f) + (AP_f + B_2M_f)^T & * \\ (C_1P_f + D_{12}M_f) & -I \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

โดยที่ $M_f \triangleq FP_f$ ส่วนในกรณีของระบบเชิงเส้นหลายระบบ เราจะแก้ปัญหาดังต่อไปนี้แทน

$$\min_{\gamma_f, P_f, M_f} \gamma_f \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} \gamma_f I & B_{1si}^T \\ B_{1si} & P_f \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} (A_{si}P_f + B_{2si}M_f) + (A_{si}P_f + B_{2si}M_f)^T & * \\ (C_{1si}P_f + D_{12si}M_f) & -I \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

$i = 1, 2, \dots, l$ และหา F จาก $F = M_f P_f^{-1}$ กล่าวคือเป็นการแก้หาเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะร่วมกันสำหรับหลายๆ ระบบ โดยการเพิ่มสมการเมทริกซ์เชิงเส้นของแต่ละระบบแล้วใช้ LMI-Toolbox เป็นเครื่องมือในการหาคำตอบ เมื่อได้เมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ F แล้วนำมาสร้างตัวสังเกตสถานะในขั้นตอนต่อไป

เนื่องจากเราต้องการตัวควบคุมร่วมกันสำหรับหลายๆ ระบบ นั่นคือตัวสังเกตสถานะต้องเป็นตัวร่วมกัน ในการสร้างตัวสังเกตสถานะนั้นเราต้องเลือกระบบมาระบบหนึ่งก่อน ให้ระบบที่เลือกมานี้เป็นระบบที่ 1 กล่าวคือ

$$\text{มีระบบ } \dot{x} = A_{s1}x + B_{2s1}u + B_{1s1}w$$

$$y = C_{2s1}x + D_{21s1}w$$

$$\text{สร้างตัวแปรสถานะจาก } \dot{\hat{x}} = A_{s1}\hat{x} + B_{2s1}u + H(C_{2s1}\hat{x} - y)$$

แทน $u = F\hat{x}$ และ $x_c = -\hat{x}$ ได้ระบบวงปิดดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{s1} & -B_{2s1}F \\ HC_{2s1} & A_{s1} + B_{2s1}F + HC_{2s1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{1s1} \\ HD_{21s1} \end{bmatrix} w$$

$$z = \begin{bmatrix} C_{1s1} & -D_{12s1}F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

เพื่อความสะดวก เรานิยามเมทริกซ์ใน (4.3) ดังนี้

$$A_{cli} = \begin{bmatrix} A_{si} & -B_{2si}F \\ HC_{2si} & A_{s1} + B_{2s1}F + HC_{2s1} \end{bmatrix}$$

$$B_{cli} = \begin{bmatrix} B_{1si} \\ HD_{21si} \end{bmatrix}, \quad C_{cli} = \begin{bmatrix} C_{1si} & -D_{12si}F \end{bmatrix}$$

เราสามารถสังเกตเห็นได้ว่า สำหรับ $i = 1$, A_{cl1} จะสอดคล้องกับ separation principle เพียงกรณีเดียว เราพิจารณาสมรรถนะ H_2 ของระบบวงปิดจากปัญหา

$$\exists Q_{cl} > 0, \quad \text{s.t.} \quad A_{cli}Q_{cl} + Q_{cl}A_{cli}^T + B_{cli}B_{cli}^T = 0 \quad (4.4)$$

จะให้ $\|T_{zw}\|_{2i}^2 = \text{trace}(C_{cli}Q_{cl}C_{cli}^T)$ เราสามารถจัดให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้โดย คูณซ้ายและขวาด้วย $Y_{cl} = Q_{cl}^{-1}$ ปัญหาข้างต้นจะแทนได้ด้วย

$$\min \gamma_h \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} C_{cli}Y_{cl}^{-1}C_{cli}^T > \gamma_h I \\ Y_{cl}A_{cli} + A_{cli}^T Y_{cl} + Y_{cl}B_{cli}B_{cli}^T Y_{cl} < 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

กำหนดให้ Y_{cl} อยู่ในรูปแบบ

$$Y_{cl} \triangleq \begin{bmatrix} P_h & S \\ S & S \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

แทน Y_{cl} ใน (4.5) แล้วอาศัยการเปลี่ยนตัวแปร $M_h = SH$ และเพื่อความสะดวกนิยามตัวแปรต่อไปนี้

$$M_{ai} = (P_h A_i + M_h C_{2si}) + (P_h A_i + M_h C_{2si})^T$$

$$M_{a1} = (S(A_1 + (B_{2s1} - B_{2si})F) + M_h C_{2s1}) + (S(A_1 + (B_{2s1} - B_{2si})F) + M_h C_{2s1})^T$$

$$L = -P_h B_{2si}F + S(A_1 + B_{2s1}F) + M_h C_{2s1} + (M_h C_{2si})^T + A_{si}^T S$$

โดยอาศัย Schur complement เราเขียนปัญหา (4.5) ได้เป็น

$$\min_{\gamma_h, P_h, M_h} \gamma_h \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} \gamma_h I & C_{cli} \\ C_{cli}^T & Y_{cl} \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} M_{ai} & L & P_h B_{1si} + M_h D_{21si} \\ * & M_{a1} & S B_{1si} + M_h D_{21si} \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \end{cases}$$

โดยที่ $C_{cli} = [C_{1si} \quad -D_{12si}F]$ เมื่อเราแก้หา S และ M_h ได้แล้ว เราจึงหา H จาก $H = S^{-1}M_h$ สรุปแนวทางที่เสนอมีลำดับขั้นตอนการหาตัวควบคุมร่วมกันสำหรับระบบเชิงเส้นหลายระบบ ดังนี้

1. กรณีที่มีระบบที่จะพิจารณาเพียง 2 ระบบ ตรวจสอบว่าสองระบบนั้นสามารถมีตัวควบคุมร่วมกันได้หรือไม่ โดยอาศัยการตรวจคุณสมบัติ P.I.P ของระบบช่วย

2. แก้ปัญหา (4.2) โดยมี P_f และ M_f เป็นตัวแปร จากนั้นหา F จาก $F = M_f P_f^{-1}$
3. แก้ปัญหา (4.7) โดยมี P_h, S, M_h เป็นตัวแปร จากนั้นหา H จาก $H = S^{-1} M_h$
4. นำ F และ H ที่ได้มาหาตัวควบคุมเต็มอันดับ จาก

$$A_c = A_{s1} + B_{2s1}F + HC_{2s1}, \quad B_c = -H, \quad C_c = F$$

ขั้นตอนที่เสนอมานี้ เป็นเพียงแนวทางหนึ่งในการหาตัวควบคุมร่วมกันสำหรับระบบเชิงเส้นหลายระบบ แต่อย่างไรก็ตามวิธีที่เสนอนี้ยังไม่รับประกันในทุกๆ กรณีว่าจะสามารถหาตัวควบคุมร่วมกันสำหรับหลายๆ ระบบในปัญหานั้นๆ ให้ได้ แม้ว่าในกรณี 2 ระบบที่มีระบบช่วยที่สอดคล้องกับเงื่อนไข P.I.P ก็ตาม อาจเป็นเพราะปัญหาเหล่านั้นไม่สามารถมีตัวควบคุมเต็มอันดับร่วมกัน หรือเป็นเพราะประสิทธิภาพของแนวทางที่เสนอไม่ดีพอ ในที่นี้เราขอเรียก ขั้นตอนที่ 2 ว่า ขั้นตอนการหาเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะร่วม และเรียกขั้นตอนที่ 3 ว่า ขั้นตอนการหาเมทริกซ์สังเกตสถานะร่วม

4.2 วิธี cross decomposition algorithm

จากการแก้ปัญหาสมรรถนะแบบ H_2 ให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ในหัวข้อสุดท้ายของบทที่แล้วนั้น Geromel และคณะได้เสนอแนวทางการหาตัวควบคุมโดยคำนึงถึงสมรรถนะแบบ H_2 นั้น ตัวควบคุมที่ได้ยังต้องอาศัยข้อมูลของตัวระบบ กล่าวคือ ใช้ A, B_2 , และ C_2 มาสร้างเมทริกซ์ A_c ร่วมกับตัวแปรจากอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น แต่ Geromel และคณะ [14] ได้ทำการปรับปรุงการหาตัวควบคุมโดยคำนึงถึงสมรรถนะแบบ H_2 ให้ดีกว่าเดิม อีกทั้งในการสร้างตัวควบคุมยังไม่ต้องอาศัยข้อมูลของตัวระบบอีกด้วย ขั้นตอนที่ตั้งกล่าวเรียกว่า cross decomposition algorithm หรือ CDA ซึ่งสรุปได้ดังนี้

1. หา L_0, Y_0 จาก (3.32) โดยไม่จำเป็นต้องแก้ปัญหา $\min \text{trace } W$ เพียงแต่หา X, Y, L , และ F ที่ทำให้เงื่อนไขเป็นจริงก็เพียงพอ และเริ่มนับ $k = 1$
2. ให้ $L_k = L_{k-1}, Y_k = Y_{k-1}, A_k = A + B_2 L_k Y_k^{-1}, C_k = C_1 D_{12} L_k Y_k^{-1}$ และแก้ปัญหาต่อไปนี้ โดยมี P, X, S, F , และ W เป็นตัวแปร

$$\min \text{trace } W \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} P & P & P B_1 \\ P & X & X B_1 + F D_{21} \\ B_1^T P & B_1^T X + D_{12}^T F^T & W \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} A_k^T P + P A_k & * & * \\ A^T P + X A_k + F C_2^T + S^T & G & * \\ C_k & C_1 & -I \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

เมื่อแก้ได้แล้ว กำหนดให้ $f_1 = \text{trace } W, X_k = X, F_k = F$

3. ให้ $A_k = A + X_k^{-1}F_kC_2$, $B_k = X_k^{-1}F_kD_{21}$ และแก้ปัญหาดังต่อไปนี้ โดยมี Y , Q , S , L , และ W เป็นตัวแปร

$$\min \text{trace } W \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} Y & Q & B_1 \\ Q & Q & B_k \\ B_1^T & B_k^T & W \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} H & * & * \\ Q A^T + A_k Y + B_2 L + S^T & A_k Q + Q A_k^T & * \\ C_1 Y + D_1 L & C_1 Q & -I \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

เมื่อแก้ได้แล้ว กำหนดให้ $f_2 = \text{trace } W$, $Y_k = Y$, $L_k = L$

4. ถ้า $\frac{|f_2 - f_1|}{f_2} > \epsilon$ ให้ $k = k + 1$ กลับไปทำขั้นตอนที่ 2. นอกเหนือจากนี้หยุด โดยที่ ϵ เป็นค่าบวกขนาดเล็ก

บทพิสูจน์การลู่อเข้า และที่มาของอัลกอริทึมนี้ Geromel และคณะกล่าวไว้ใน [14]

ในการนำมาใช้แก้ปัญหาคอมพิวเตอร์แบบเชื่อถือได้ หรืออีกนัยหนึ่งคือการควบคุมระบบระบบเชิงเส้นหลายระบบด้วยตัวควบคุมตัวเดียว ทำโดยใส่เงื่อนไข H_2 ของแต่ละระบบ แล้วแก้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นด้วยตัวแปรเดียวกัน และพร้อมๆกัน โดยที่แต่ละระบบ Geromel และคณะให้เมทริกซ์ B_1 , C_1 , D_1 , D_{12} และ D_{21} เป็นเมทริกซ์เดียวกัน ใน [14] ขั้นตอนการสร้างอัลกอริทึมดังกล่าว มีการเปลี่ยนตัวแปร อันได้แก่ $X = Q^{-1}$ และ $S = M X^{-1}$ ซึ่งนำมาหาตัวควบคุมตามลำดับดังนี้

1. ให้ $V = Q - Y$
2. จาก $XY + UV^T = I$ ได้ $U = Q^{-1}$
3. จากการกำหนดตัวแปรใหม่ $X = Q^{-1}$ และ $S = M X^{-1}$ ได้ $M = S Q^{-1}$
4. ดังนั้น $A_c = S^T(Q - Y)^{-1}$, $B_c = X^{-1}F$ และ $C_c = L(Q - Y)^{-1}$

สังเกตว่าตัวควบคุมที่หาโดยวิธีนี้ เมทริกซ์ A_c ไม่ขึ้นอยู่กับข้อมูลของระบบใดระบบหนึ่ง แต่จะได้จากตัวแปรที่หาได้จากอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ซึ่งวิธีนี้ไม่ต้องหาเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ และเมทริกซ์ตัวสังเกตสถานะแยกกัน แต่รวมกันเป็นเมทริกซ์ ของตัวควบคุมที่จะต้องหาออกมา ในรูปของตัวแปรในอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

ดังที่กล่าวไว้แล้ว Geromel และคณะเสนอให้ชุดของเมทริกซ์ B_1 , C_1 , D_1 , D_{12} และ D_{21} ของแต่ละระบบเป็นเมทริกซ์เดียวกัน ผู้ท้าววิทยานิพนธ์เห็นว่าไม่จำเป็นที่แต่ละระบบต้องมีชุดเมทริกซ์ดังกล่าวเหมือนกัน แต่ละระบบสามารถมีชุดเมทริกซ์ดังกล่าวแตกต่างกันได้ แต่ทั้งนี้

ขนาดของเมทริกซ์ในแต่ละระบบต้องมีขนาดเดียวกัน เมื่อชุดเมทริกซ์ดังกล่าวแตกต่างกันแล้วจำนวนเงื่อนไขในอสมการเมทริกซ์ก็จะเพิ่มขึ้น

ดังนั้นในการแก้ปัญหาตัวควบคุมร่วม อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (3.32) จะต้องเปลี่ยนเป็น

$$\min \text{trace } W \quad \text{s.t.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} Y & I & B_{1si} \\ I & X & XB_{1si} + FD_{21si} \\ B_{1si}^T & B_{1si}^T X + D_{21si}^T F^T & W \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} H_{si} & YC_{1si}^T + L^T D_{12si}^T \\ C_{1si} Y + D_{12si} L & -I \end{bmatrix} < 0 \\ G_{si} + C_{1si}^T C_{1si} < 0 \end{array} \right. \quad (4.9)$$

สำหรับ $i = 1, 2, \dots, l$ อสมการ (4.7) ในขั้นตอนที่ 2 ของ CDA เปลี่ยนเป็น

$$\min \text{trace } W \quad \text{s.t.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} P & * & * \\ P & X & * \\ B_{1si}^T P & B_{1si}^T X + D_{12si}^T F^T & W \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} A_{ksi}^T P + PA_{ksi} & * & * \\ A_{si}^T P + XA_{ksi} + FC_2^T + S^T & G_{si} & * \\ C_{ksi} & C_{1si} & -I \end{bmatrix} < 0 \end{array} \right. \quad (4.10)$$

โดยที่ $A_{ksi} = A_{si} + B_{2si} L_k Y_k^{-1}$, $C_k = C_{1si} D_{12si} L_k Y_k^{-1}$ สำหรับ $i = 1, 2, \dots, l$ และอสมการ (4.8) ในขั้นตอนที่ 3 ของ CDA แก้เป็น

$$\min \text{trace } W \quad \text{s.t.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} Y & Q & B_{1si} \\ Q & Q & B_{ksi} \\ B_{1si}^T & B_{ksi}^T & W \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} H_{si} & * & * \\ QA^T + A_{ksi} Y + B_{2si} L + S^T & A_{ksi} Q + QA_{ksi}^T & * \\ C_1 Y + D_{1si} L & C_{1si} Q & -I \end{bmatrix} < 0 \end{array} \right. \quad (4.11)$$

โดยที่ $A_{ksi} = A_{si} + X_{ksi}^{-1} F_k C_{2si}$, $B_{ksi} = X_{ksi}^{-1} F_k D_{21si}$ สำหรับ $i = 1, 2, \dots, l$

จากการลักษณะการตั้งปัญหาและแนวทางวิธีการแก้ปัญหาทั้งวิธีที่ผู้ทำวิทยานิพนธ์เสนอ และวิธีที่ Geromel และคณะเสนอเพื่อแก้ปัญหาคอมพิวเตอร์แบบเชื่อถือได้นั้น ผู้ทำวิทยานิพนธ์ให้ข้อสังเกตว่าความเป็นทั่วไปในการเปลี่ยนตัวแปรในวิธีของ Geromel และคณะมีมากกว่า อาทิเช่น เมทริกซ์ของ

ตัวควบคุม A_c ในวิธีที่ Geromel และคณะเกิดจากตัวแปรในอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น แต่ในขณะที่วิธีที่ผู้ทำวิทยานิพนธ์เสนอ นั้น มีข้อกำหนดว่าต้องหาเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะก่อน แล้วจึงค่อยหาเมทริกซ์สังเกตสถานะ แล้วจึงนำมาสร้างตัวควบคุม ซึ่งต้องใช้ข้อมูลของระบบใดระบบหนึ่งมาสร้างตัวควบคุม กล่าวคือใช้เมทริกซ์ A ของระบบใดระบบหนึ่ง อีกทั้งต้องยอมรับว่าขั้นตอนที่ผู้ทำวิทยานิพนธ์เสนอ นี้มีความยุ่งยากกว่า แต่อย่างไรก็ตามวิธีที่ผู้ทำวิจัยเสนอนี้ เป็นทางเลือกหนึ่งในการแก้ปัญหามีตัวควบคุมร่วมกัน ตัวอย่างและการเปรียบเทียบวิธีทั้งสองอยู่ในบทถัดไป

วิธีทั้งสองเป็นการแก้ปัญหการควบคุมระบบเชิงเส้นหลายระบบด้วยตัวควบคุมตัวร่วมกัน โดยคำนึงถึงสมรรถนะแบบ H_2 ของระบบวงปิด ในวิธีทั้งสองเราสามารถปรับเมทริกซ์ C_{1si} และ D_{12si} ได้เพื่อให้ระบบมีคุณสมบัติตามที่เรากำลังต้องการ



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 5

ตัวอย่างการออกแบบตัวควบคุม

จากที่กล่าวถึงแนวทางในการหาตัวควบคุมร่วมกันสำหรับระบบเชิงเส้นหลายระบบในบทที่ 5 นั้น อันได้แก่ แนวทางที่ผู้ทำวิทยานิพนธ์เสนอ (หัวข้อที่ 5.2) ซึ่งเป็นแนวทางที่หาเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะร่วมกันก่อน แล้วจึงหาเมทริกซ์สังเกตสถานะร่วม แล้วนำเมทริกซ์ทั้งสองมาสร้างตัวควบคุม และแนวทางที่ หาตัวควบคุมโดยตรงเลย ซึ่งเป็นแนวทางที่ Geromel และคณะ [14] เสนอไว้ หรือเรียกว่า cross decomposition algorithm (CDA) ในบทนี้เป็นตัวอย่างการนำเอาแนวทางทั้งสองมาแก้ปัญหาตัวอย่างต่างๆ โดยสรุปดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 เป็นตัวอย่างการตรวจสอบการมีคุณสมบัติการมีตัวควบคุมของระบบ สองระบบที่ถูกสุมขึ้นมา

ตัวอย่างที่ 2 เป็นตัวอย่างการหาตัวควบคุมสำหรับชุดมอเตอร์ 2 ชุด ในตัวอย่างนี้แยกเป็น 3 ส่วน ดังนี้

1. ศึกษาผลของการเลือกใช้ข้อมูลของระบบ ที่นำมาใช้ในการสร้างตัวสังเกตสถานะ ในวิธีที่เสนอ
2. ศึกษาผลของการปรับค่าเมทริกซ์ C_{1si} และ D_{12si}
3. การออกแบบหาตัวควบคุม โดยใช้ทั้งวิธีที่เสนอ และวิธี CDA

ตัวอย่างที่ 3 เป็นตัวอย่างการออกแบบตัวควบคุมร่วมสำหรับ 3 สถานะการทำงานของระบบ electromagnetic suspension ซึ่งเป็นระบบไม่เชิงเส้น แต่ทำให้เป็นเชิงเส้นที่ 3 สถานะการทำงาน ใช้ทั้งสองวิธีในการออกแบบหาตัวควบคุมร่วมกันสำหรับทั้ง 3 สถานะ พร้อมทั้งเปรียบเทียบผลที่ได้

ตัวอย่างที่ 4 จากที่เกริ่นไว้ในบทที่ 1 ว่าปัญหาการควบคุมแบบเชื่อถือได้ก็สามารถมองเป็นปัญหาการมีตัวควบคุมร่วมกันสำหรับระบบเชิงเส้นหลายระบบได้นั้น ในตัวอย่างนี้ เป็นการแก้ปัญหาการควบคุมแบบเชื่อถือได้ โดยสมมุติระบบในสถานะการทำงานที่ ตัวขับเคลื่อนและตัวตรวจวัดบกพร่อง

	poles	zeros
P_1	0.8864, -5.3548	-5.2053
P_2	$-3.7594 \pm 0.6917i$	-4.4515

ตารางที่ 5.1: ขั้วและศูนย์ของระบบ 2 ระบบที่สุมขึ้นมา

5.1 ตัวอย่างการทดสอบการมีตัวควบคุมร่วมของระบบที่สุมขึ้นมา 2 ระบบ

เป็นตัวอย่างในการแสดงลำดับการพิจารณาว่า ระบบ 2 ระบบที่ได้จากการสุมขึ้นมา สามารถมีตัวควบคุมร่วมกันได้หรือไม่ โดยแต่ละระบบมีเมทริกซ์ที่บรรยายในสมการสถานะดังนี้

$$\begin{aligned} A_{s1} &= \begin{bmatrix} 0.0677 & 1.1557 \\ 3.8413 & -4.5361 \end{bmatrix}, B_{2s1} = \begin{bmatrix} 3.2667 \\ 1.1138 \end{bmatrix} \\ C_{2s1} &= \begin{bmatrix} 0.8473 & 0.1141 \end{bmatrix} \\ A_{s2} &= \begin{bmatrix} -3.8518 & 1.8318 \\ -0.2659 & -3.6670 \end{bmatrix}, B_{2s2} = \begin{bmatrix} 0.8122 \\ 0.6598 \end{bmatrix} \\ C_{2s2} &= \begin{bmatrix} 0.2553 & 0.2385 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

แต่ละระบบมีขั้ว และศูนย์ ดังแสดงในตารางที่ 5.1 ลำดับการตรวจสอบการมีตัวควบคุมร่วมมีดังนี้

1. หาระบบช่วย R_{12} ที่เกิดจาก P_1 กับ P_2
2. ตรวจสอบว่า R_{12} มีคุณสมบัติ P.I.P หรือไม่

จากตัวอย่างนี้ ให้ R_{12} ที่มี ศูนย์อยู่ที่ $-5.1628, -4.0548 \pm 1.0019i$, และขั้วที่ $-7.3921, -5.2397, -4.0335 \pm 0.9984i$, ซึ่งมีคุณสมบัติ P.I.P นั่นคือ ระบบทั้งสองสามารถมีตัวควบคุมร่วมกันได้ โดยกำหนดให้แต่ละระบบมีเมทริกซ์ B_1, C_1, D_{12}, D_{21} เดียวกัน

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.4641 \\ 0.0713 \end{bmatrix}, C_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D_{12}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D_{21} = 0.0160$$

เมทริกซ์ B_1 และ D_{12} ได้มาจากการสุมเช่นกัน ตัวควบคุมตัวหนึ่งที่ทำให้ระบบทั้งสองมีเสถียรภาพ หากากวิธีที่เสนอตามลำดับดังนี้

1. หาเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะร่วม ได้ $F = \begin{bmatrix} -1.4138 & -0.1581 \end{bmatrix}$
2. หาเมทริกซ์สังเกตสถานะร่วม โดยนำ F ไปหา H โดยใช้ข้อมูลของระบบที่ 1 ได้ $H = \begin{bmatrix} -18.5169 & -4.3032 \end{bmatrix}^T$
3. นำไปสร้างตัวควบคุม

$$A_c = A_{s1} + B_{2s1}F + HC_{2s1}, B_c = -H, C_c = F$$

	P_1	P_2
ขั้วระบบ	-3.4251	-5.0625
วงปิด	-5.0448	-19.7917
	-5.8378	$-4.0539 \pm 0.9202i$
	-15.6040	

ตารางที่ 5.2: ขั้วของระบบวงปิดของระบบสุม 2 ระบบ ในตัวอย่างที่ 1

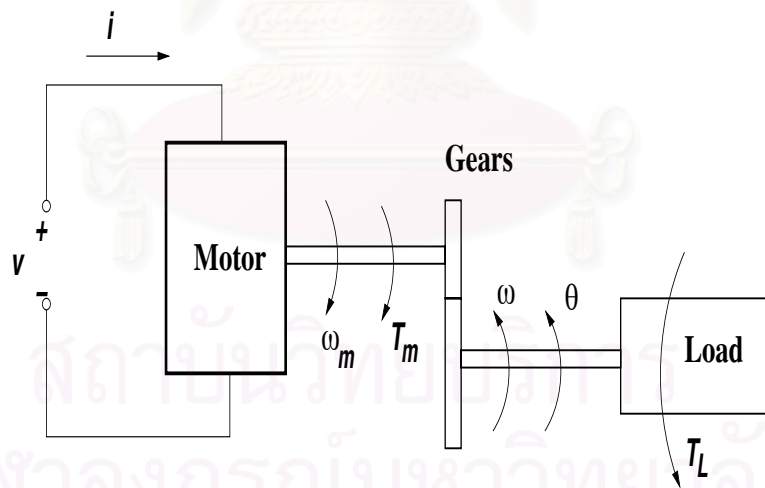
เขียนในรูปฟังก์ชันถ่ายโอนได้

$$C(s) = \frac{-26.8591(s + 4.182)}{(s^2 + 14.16s + 52.3)}$$

ขั้วระบบวงปิดของแต่ละระบบตามตารางที่ 5.2 ซึ่งระบบวงปิดแต่ละระบบมีเสถียรภาพด้วยตัวควบคุมตัวเดียวกัน

5.2 ตัวอย่างการควบคุมตำแหน่งชุดมอเตอร์ 2 ชุด

โรงงานแห่งหนึ่งมีลักษณะงานที่ต้องการควบคุมตำแหน่งของมอเตอร์ แบบจำลองมอเตอร์นำมาจาก [23] ตามรูปที่ 5.1



รูปที่ 5.1: ชุดมอเตอร์

และมีสมการสถานะบรรยายด้วย

$$\dot{x} = Ax + B_1T_L + B_2u, \quad y = C_2x$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
 x &= [\theta \quad \omega \quad i]^T \\
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{NK_m}{J_e} \\ 0 & -\frac{NK_m}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \\
 B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_e} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \\
 C_2 &= [1 \quad 0 \quad 0]
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

และตัวแปรต่างๆ มีความหมายตามตารางที่ 5.3

θ	แทนตำแหน่งมุมของแกนภาระ (load)	(rad)
ω	แทนความเร็วเชิงมุมของแกนภาระ	(rad/s)
i	แทนกระแสในขดลวดอาร์เมเจอร์	(A)
u	แทนแรงดันจ่ายให้มอเตอร์	(Volt)
T_L	แทนภาระที่ใส่เข้ามา	
R	แทนความต้านทานขดลวดอาร์เมเจอร์	(Ω)
L	แทนค่าความเหนี่ยวนำในขดลวดอาร์เมเจอร์	(H)
N	แทนอัตราส่วนทดเฟือง	
K_m	แทนค่าคงที่สนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำ	(Nm/A)
J	แทนโมเมนต์ความเฉื่อยของแกนหมุนภาระ	(Kg m ²)
J_m	แทนโมเมนต์ความเฉื่อยของแกนมอเตอร์	(Kg m ²)
J_e	แทนโมเมนต์ความเฉื่อยที่ส่งผลด้านแกนภาระ	$= J + N^2 J_m$

ตารางที่ 5.3: ความหมายของตัวแปรต่างๆ ในสมการของมอเตอร์

สมมุติว่าโรงงานมีมอเตอร์ลักษณะดังกล่าว 2 ตัว แตกต่างกันที่ค่าพารามิเตอร์ของมอเตอร์ตามตาราง 5.4

พารามิเตอร์	มอเตอร์ 1	มอเตอร์ 2	หน่วย
R	1.2	2.0	Ω
L	0.05	0.05	H
N	12	15	
K_m	0.05	0.05	Nm/A
J	0.02	0.5	Kg m ²
J_m	8×10^{-4}	8×10^{-4}	Kg m ²

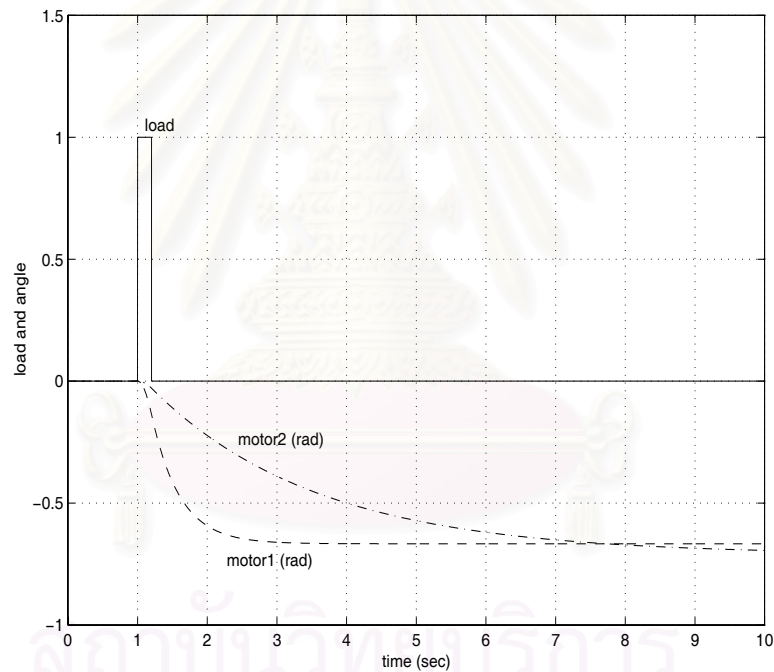
ตารางที่ 5.4: ค่าตัวแปรต่างๆ ของมอเตอร์ 2 ชุด

ศูนย์และขั้วจากภาวะระบบ T_L ไปยังมุมของภาวะ θ ของมอเตอร์ทั้งสองตัวนี้ แสดงในตารางที่ 5.5

	มอเตอร์ 1	มอเตอร์ 2
pole	0.0000	0.0000
	-2.4740	-0.4180
	-21.5260	-39.5820
zero	-24.0000	-40.0000

ตารางที่ 5.5: ขั้วและศูนย์ของระบบวงเปิดของมอเตอร์ทั้งสองตัว

ในการทำงาน จะมีภาวะ T_L ที่มีลักษณะเป็นพัลส์สัญญาณกว้าง 0.2 วินาที ขนาดหนึ่งหน่วย ตามรูปที่ 10 (เส้นทึบ) ซึ่งทำให้มุมของภาวะเปลี่ยนไปในลักษณะรูปที่ 5.2 (เส้นประสำหรับมอเตอร์ 1 และเส้นประจุด สำหรับมอเตอร์ 2)



รูปที่ 5.2: ลักษณะผลกระทบของมุมภาวะที่มีต่อภาวะเมื่อใส่ภาวะให้

ภาวะนี้จะมาทุกๆ 5 วินาที ดังนั้นภายใน 5 วินาทีนี้ มุมที่แกนภาวะหรือ θ จะต้องกลับมาอยู่ที่ตำแหน่ง 0 องศาให้ทันก่อนภาวะในรอบถัดไป และสัญญาณควบคุมที่จ่ายให้มอเตอร์ ถูกจำกัดที่ ± 3 โวลต์

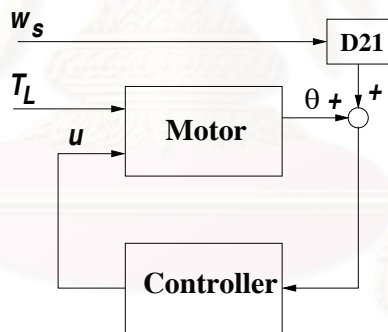
กล่าวคือ เราต้องหาตัวควบคุมเพื่อใช้ควบคุมมอเตอร์ทั้งสองตัว ให้ระบบวงปิดได้ผลตอบตามวัตถุประสงค์ตามที่ระบุไว้ข้างต้น แต่ก่อนอื่นจะต้องทำการตรวจสอบคุณสมบัติ P.I.P ของระบบช่วยที่

เกิดจากมอเตอร์ทั้งสองก่อน เพื่อดูว่ามอเตอร์ทั้งสองตัว สามารถมีตัวควบคุมร่วมกันได้หรือไม่ โดยการสร้างระบบช่วย ได้ระบบช่วย ที่มีขั้วอยู่ที่ $-39.5813, -29.2802, -2.7090 \pm 0.7541i, -0.1866 \pm 0.3259i$, ซึ่งเป็นขั้วที่เสถียรหมด ดังนั้นระบบช่วยจึงมีคุณสมบัติ P.I.P

เพื่อให้ระบบอยู่ในรูปแบบทั่วไป (ก.1) เราต่อเติมระบบมอเตอร์ดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{si}x + \begin{bmatrix} B_{1si} & 0_{3 \times 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_L \\ w_s \end{bmatrix} + B_{2si}u \\ z &= \begin{bmatrix} c_{1si} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ d_{12si} \end{bmatrix} u \\ y &= C_{2si}x + \begin{bmatrix} 0 & d_{21si} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_L \\ w_s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

เมื่อ ตัวห้อย 'si' แทนมอเตอร์ตัวที่ $i, i = 1, 2$ และ w_s เป็นสัญญาณรบกวนภายนอกที่เข้ามาทางตัวตรวจวัด (sensor), z เป็นสัญญาณที่สร้างขึ้นเพื่อใช้ในการวิเคราะห์สมรรถนะแบบ H_2 หรืออีกนัยหนึ่ง เป็นสัญญาณที่เกิดจากการถ่วงตัวแปรสถานะ และสัญญาณควบคุม นั่นเอง ในตัวอย่างนี้เราจะใช้ การพิจารณาปัญหาแบบสมรรถนะ H_2 ตามวิธีที่เสนอไว้สองวิธีในบทที่แล้ว ลักษณะการควบคุมแสดงได้ดังรูปที่ 5.3



รูปที่ 5.3: แผนภาพการควบคุมมอเตอร์ในตัวอย่างที่ 2

ดังที่กล่าวไว้ในบทที่ 4 ข้อกำหนดในการพิจารณาสมรรถนะแบบ H_2 ถึงแม้ว่าในตัวอย่างนี้เราสมมุติให้ $w_s(t) = 0$ ก็ตาม แต่เราจำเป็นต้องมีเมทริกซ์ D_{21si} ซึ่งในตัวอย่างนี้ D_{21si} ขึ้นอยู่กับค่า d_{s1si} นั่นเอง เราจึงกำหนดให้ d_{21} มีขนาดน้อยๆ ในที่นี้กำหนดให้ $d_{21} = 0.1$ ส่วน c_{1si} และ d_{12si} เป็นชุดพารามิเตอร์ที่ใช้ในการถ่วงมุมแกนการะ และสัญญาณแรงดันควบคุมมอเตอร์ ตามลำดับ

ดังที่กล่าวไว้ในตอนต้นบท ในตัวอย่างนี้จะแยกเป็น 3 ส่วน ได้แก่ 2 กรณีศึกษาสำหรับศึกษาวิธีที่เสนอ และอีกส่วนเป็นการออกแบบตัวควบคุม โดยทั้งวิธีที่เสนอ กับวิธี CDA เพื่อเป็นการเปรียบเทียบ

กรณีศึกษาที่ 1 ศึกษาผลของการเลือกใช้ข้อมูลของระบบที่นำมาใช้หาเมทริกซ์สังเกตสถานะ ในวิธีที่เสนอ ดังที่กล่าวมาแล้วว่าในขั้นตอนที่เสนอนั้น เราต้องหาเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะร่วม F ก่อนแล้วจึงนำเมทริกซ์นี้กับข้อมูลของระบบใดระบบหนึ่งมาหาเมทริกซ์สังเกตสถานะ H จากนั้นจึงนำเมทริกซ์ F, H และข้อมูลของระบบดังกล่าว ไปสร้างตัวควบคุมอีกที ในกรณีศึกษาจะศึกษาผลของการเลือกใช้ข้อมูลของมอเตอร์แต่ละตัว ในการนำมาสร้างตัวควบคุมร่วมกัน กำหนดให้ c_{1si} และ d_{12si} ของแต่ละระบบเหมือนกัน ให้ $c_{1s1} = 1, d_{12s1} = 1, c_{1s2} = 1,$ และ $d_{12s2} = 1$ ในขั้นตอนการหาเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะร่วม (simultaneous state feedback) ได้ $\gamma_f, P_f,$ และ M_f ตามนี้

$$\gamma_f = 137.3611, \quad P_f = \begin{bmatrix} 1.3247 & -1.0024 & -0.1385 \\ -1.0024 & 1.1915 & -0.6121 \\ -0.1385 & -0.6121 & 14.9588 \end{bmatrix}, \quad M_f = \begin{bmatrix} 0.0182 & 0.0032 & -20.7802 \end{bmatrix}$$

หา F จาก $F = M_f P_f^{-1}$ ได้

$$F = \begin{bmatrix} -2.0032 & -2.4573 & -1.5082 \end{bmatrix}$$

ค่า F ที่ได้ให้ค่าเจาะจงของ $A_{si} + B_{2si}F$ ตามตารางที่ 5.6

	$A_{s1} + B_{2s1}F$	$A_{s2} + B_{2s2}F$
eigen value	-0.7727	-69.1511
	-4.7285	$-0.5069 \pm 0.6181i$
	-48.6638	

ตารางที่ 5.6: ค่าเจาะจงของ $A_{si} + B_{2si}F$ ของมอเตอร์ทั้งสองตัวในกรณีศึกษาที่ 1 ตัวอย่างที่ 2

เมื่อได้เมทริกซ์ป้อนกลับสถานะแล้ว นำไปหาเมทริกซ์สังเกตสถานะร่วม ได้ค่าตัวแปร γ_h, P_h และ M_h จากการใช้ ข้อมูลของมอเตอร์แต่ละตัวในขั้นตอนการหาตัวสังเกตสถานะร่วม แสดงในตารางที่ 5.7

โดยที่ H_j แทนเมทริกซ์สังเกตสถานะ ที่ได้จากข้อมูลของมอเตอร์ตัวที่ $j, j = 1, 2$ ทำให้เมทริกซ์ $A_{si} + H_j C_{2si}$ มีค่าเจาะจงดังที่แสดงอยู่ในตารางที่ 5.8

สร้างตัวควบคุม ได้ดังนี้

$$C_{m1}(s) = \frac{-1063.8165(s + 28.81)(s + 1.372)}{(s + 52.11)(s^2 + 64.28s + 1181)}$$

และ

$$C_{m2}(s) = \frac{-561.1224(s + 36.51)(s + 0.9935)}{(s + 69.22)(s^2 + 29.07s + 275.9)}$$

โดยที่ C_{mj} เป็นตัวควบคุมที่เกิดจากการใช้ข้อมูลตัวที่ j ในการหาเมทริกซ์สังเกตสถานะร่วม ตำแหน่งขั้วของระบบวงปิด แสดงดังตารางที่ 5.9

ตัวแปร\ข้อมูลจาก	มอเตอร์ตัวที่ 1	มอเตอร์ตัวที่ 2
γ_h	965.6830	300.7104
P_h	$\begin{bmatrix} 5.2121 & -0.1975 & 0.0270 \\ -0.1975 & 0.0760 & 0.0113 \\ 0.0270 & 0.0113 & 0.0165 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 13.7350 & -1.1000 & -0.0457 \\ -1.1000 & 0.2372 & 0.0442 \\ -0.0457 & 0.0442 & 0.0935 \end{bmatrix}$
M_h	$\begin{bmatrix} -103.1898 & 0.1609 & -0.0989 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -101.4851 & 0.0874 & -0.2076 \end{bmatrix}$
H	$\begin{bmatrix} -62.2258 & -889.2167 & 826.0891 \end{bmatrix}^T$	$\begin{bmatrix} -28.1162 & -244.1312 & 63.0636 \end{bmatrix}^T$

ตารางที่ 5.7: ค่าที่ได้จากขั้นตอนการหาเมทริกซ์สังเกตสถานะร่วม ในกรณีศึกษาที่ 1 ของตัวอย่างที่ 2

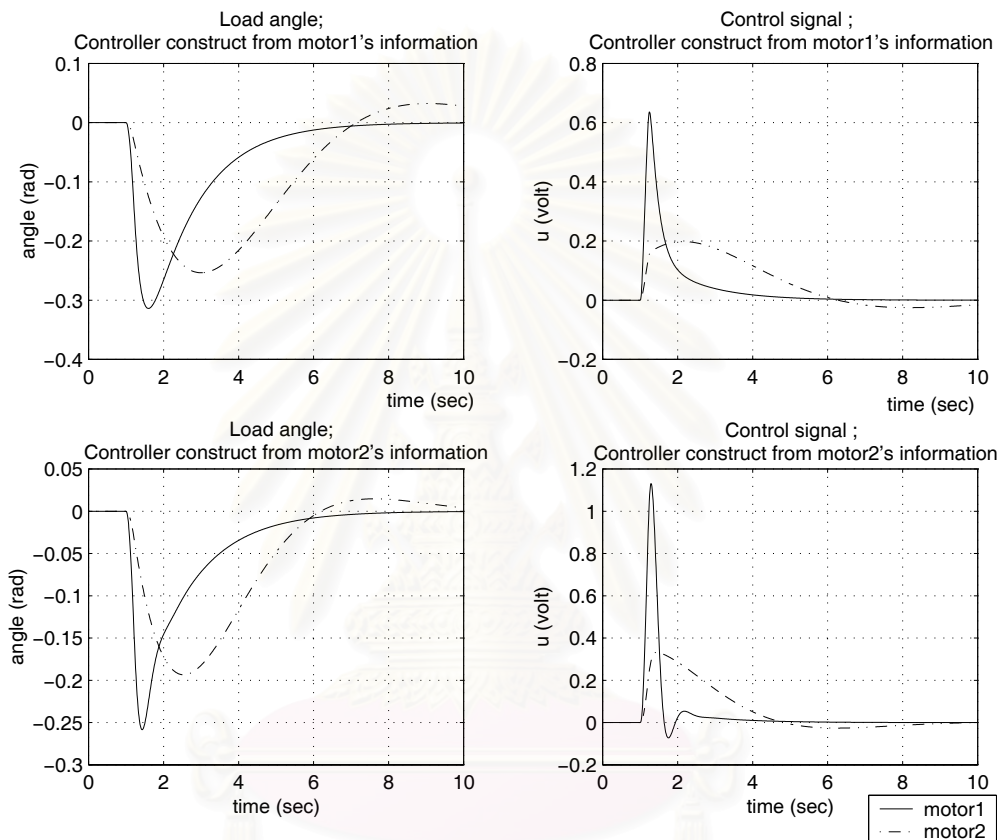
ค่าเจาะจง	$A_{s1} + H_1C_{2s1}$	$A_{s2} + H_1C_{2s2}$	$A_{s1} + H_2C_{2s1}$	$A_{s2} + H_2C_{2s2}$
	-15.98	$-40.34 \pm 5.41i$	-23.68	-39.62
	$-35.12 \pm 8.92i$	-21.53	$-14.21 \pm 9.83i$	$-14.24 \pm 7.31i$

ตารางที่ 5.8: ค่าเจาะจงของเมทริกซ์ $A_{si} + HC_{2si}$ ของมอเตอร์แต่ละชุด ในกรณีศึกษาที่ 1 ตัวอย่างที่ 2

	ข้อมูลมอเตอร์ 1		ข้อมูลมอเตอร์ 2	
	มอเตอร์ 1	มอเตอร์ 2	มอเตอร์ 1	มอเตอร์ 2
pole	-0.7727	-42.6112	-0.7333	-39.6287
	-4.7285	-50.1523	-69.0491	-69.1511
	-15.9831	$0.3413 \pm 0.5204i$	$-4.6819 \pm 6.9118i$	$-0.5069 \pm 0.6181i$
	-48.6638	$31.4724 \pm 11.4023i$	$-21.5675 \pm 6.8394i$	$-14.2437 \pm 7.3156i$
	$-35.1214 \pm 8.9266i$			

ตารางที่ 5.9: ขั้วของระบบวงปิดของแต่ละมอเตอร์ เมื่อใช้ข้อมูลของแต่ละมอเตอร์ในขั้นตอนการหาเมทริกซ์สังเกตสถานะร่วม ในกรณีศึกษาที่ 1 ตัวอย่างที่ 2

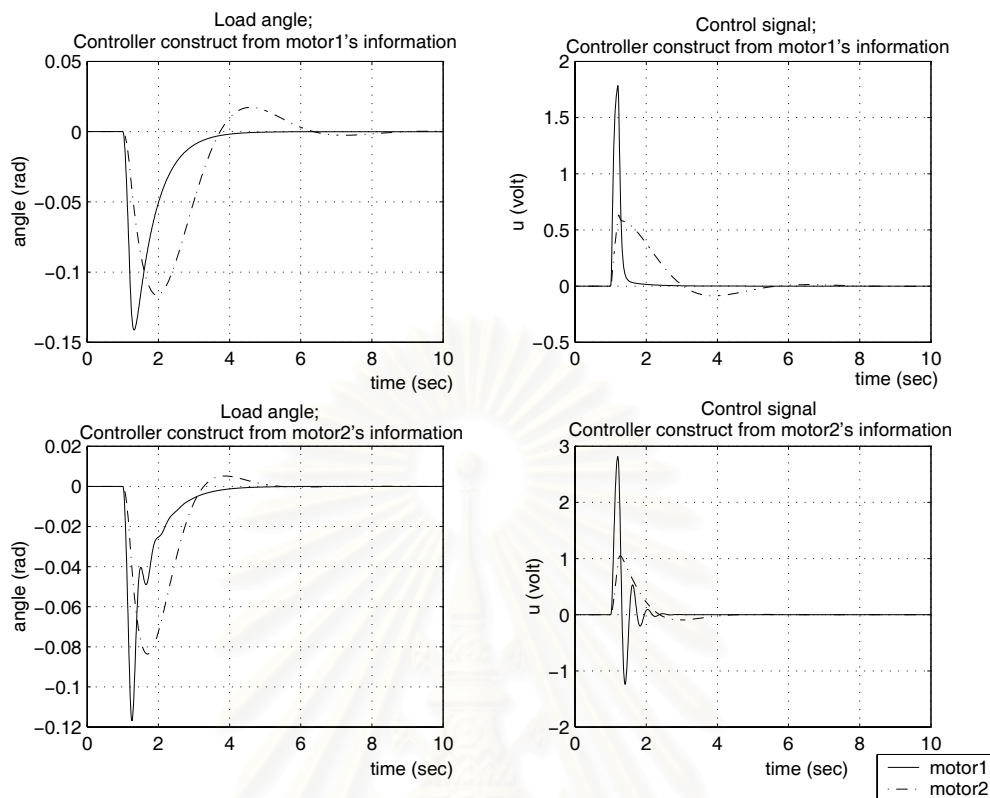
ผลที่ได้จากกรณีศึกษาที่ 1 สังเกตว่าเมื่อเราใช้ตัวควบคุมที่เกิดจากข้อมูลของมอเตอร์ตัวที่ i แล้วระบบวงปิดของมอเตอร์ตัวนั้น จะสอดคล้องกับ separation principle ตัวอย่างเช่น ตัวควบคุมที่เกิดจาก H_1 ก็จะทำให้ระบบวงปิดของมอเตอร์ตัวที่ 1 มีขั้วตรงกับ ค่าเจาะจงของ เมทริกซ์ $A_{s1} + B_{2s1}F$ และ $A_{s1} + H_1C_{2s1}$ ส่วนระบบวงปิดที่ของมอเตอร์ตัวที่ 2 กับตัวควบคุมที่เกิดจาก H_1 นั้นเรายังไม่สามารถบอกอะไรได้ และผลการควบคุมแสดงในรูปที่ 5.4



รูปที่ 5.4: กรณีศึกษาที่ 1: แสดงตำแหน่งมุมและแรงดันสัญญาณควบคุม ของทั้งสองมอเตอร์ โดยเปรียบเทียบการใช้ข้อมูลแต่ละมอเตอร์มาสร้าง เป็นตัวควบคุม

กรณีศึกษาที่ 2 ศึกษาผลของการเปลี่ยนค่าเมทริกซ์ C_{1si} และ D_{12si} โดยการเปลี่ยนค่า c_{1si} และ $d_{12si}, i = 1, 2$. ทำการศึกษาโดยแยกเป็นกรณีดังนี้

- กรณีศึกษาที่ 2.1 ใช้พารามิเตอร์ในการถ่วง $c_{1s1} = 9, d_{12s1} = 1, c_{1s2} = 1, d_{12s2} = 1$ ผลตอบดังรูปที่ 5.5
- กรณีศึกษาที่ 2.2 ใช้พารามิเตอร์ในการถ่วง $c_{1s1} = 1, d_{12s1} = 1, c_{1s2} = 9, d_{12s2} = 1$ ให้ผลตอบดังรูปที่ 5.6



รูปที่ 5.5: กรณีศึกษาที่ 2.1 โดยมีพารามิเตอร์ $c_{1s1} = 9$, $d_{12s1} = 1$, $c_{1s2} = 1$, $d_{12s2} = 1$

- กรณีศึกษาที่ 2.3 ใช้พารามิเตอร์ในการถ่วง $c_{1s1} = 1$, $d_{12s1} = 16$, $c_{1s2} = 1$, $d_{12s2} = 1$ ให้ผลตอบดังรูปที่ 5.7
- กรณีศึกษาที่ 2.4 ใช้พารามิเตอร์ในการถ่วง $c_{1s1} = 1$, $d_{12s1} = 1$, $c_{1s2} = 1$, $d_{12s2} = 4$ ให้ผลตอบดังรูปที่ 5.8

ค่าเมทริกซ์ F , $H_j, j = 1, 2$ รวมถึงค่า $\gamma_{hj}, j = 1, 2$ ในแต่ละกรณีแสดงตามตารางที่ 5.10

ผลที่ได้จากกรณีศึกษาที่ 2 จากการเปลี่ยนแปลงค่าในเมทริกซ์ C_{1si} และ D_{12si} ในทั้ง 4 กรณีย่อยศึกษา โดยเปรียบเทียบกับกรณีศึกษาที่ 1 สังเกตจากรูปกราฟผลตอบรูปที่ 5.4-5.8 พิจารณาร่วมกับฟังก์ชันวัดสมรรถนะที่นิยามดังนี้ $\gamma(e(t)) \triangleq \int_0^t e^2(t)dt$, $t = 10$ เมื่อ $e(t)$ เป็นสัญญาณที่เราจะพิจารณา ค่าของ $\gamma(\cdot)$ ในกรณีต่างๆ แสดงในตาราง 5.11

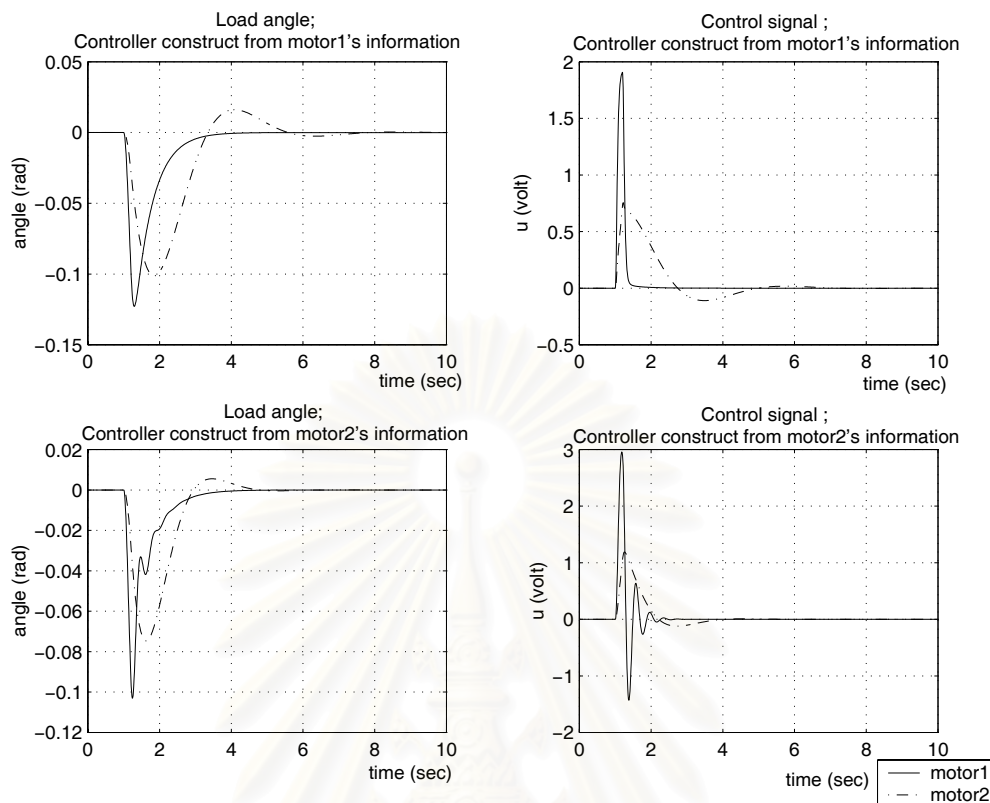
ในตารางที่ 5.11 ตัวห้อย 'ij' หมายถึง มอเตอร์ตัวที่ i ควบคุมด้วยมอเตอร์ที่สร้างจากข้อมูลมอเตอร์ตัวที่ j จากตารางที่ 5.11 และกราฟผลตอบ 5.4-5.8 เห็นได้ว่า ค่าพารามิเตอร์ c_{1s1} และ d_{12s1} มีผลต่อผลตอบของระบบ การถ่วงค่า c_{1si} ที่มากกว่า ทำให้มุมของแกนการะเมื่อมีการะภายนอกกระทำ มีการเปลี่ยนแปลงน้อยกว่า และทำให้มุมการะกลับมาที่ตำแหน่งศูนย์ได้เร็วกว่าด้วย หรือดูได้จากตารางที่ 5.11 ในกรณีที่ 1 กับกรณี 2.1 และ 2.2 ค่า $\gamma(\theta_{ij})$ จะน้อยกว่า แต่ขณะเดียวกัน ก็

กรณีศึกษาที่	F	γ_{h1}	H_1	γ_{h2}	H_2
2.1	$\begin{bmatrix} -12.9857 \\ -8.2982 \\ -1.9389 \end{bmatrix}$	8.2514×10^4	$\begin{bmatrix} -0.1113 \\ -2.3772 \\ 0.0555 \end{bmatrix} \times 10^3$	2.5367^4	$\begin{bmatrix} -63.8511 \\ -957.4900 \\ -313.5336 \end{bmatrix}$
2.2	$\begin{bmatrix} -17.1280 \\ -9.3227 \\ -1.9815 \end{bmatrix}$	1.7157×10^5	$\begin{bmatrix} -0.1276 \\ -3.1824 \\ -0.6965 \end{bmatrix} \times 10^3$	4.4638×10^4	$\begin{bmatrix} -0.0715 \\ -1.1920 \\ -0.5236 \end{bmatrix} \times 10^3$
2.3	$\begin{bmatrix} -2.1533 \\ -2.8676 \\ -1.8894 \end{bmatrix}$	1.3326×10^3	$\begin{bmatrix} -0.0689 \\ -1.0514 \\ 1.0325 \end{bmatrix} \times 10^3$	448.7182	$\begin{bmatrix} -29.8371 \\ -263.4528 \\ 69.7673 \end{bmatrix}$
2.4	$\begin{bmatrix} -1.7105 \\ -1.1341 \\ 0.5018 \end{bmatrix}$	336.4753	$\begin{bmatrix} -50.8229 \\ -687.3881 \\ 30.6634 \end{bmatrix}$	163.8827	$\begin{bmatrix} -36.3323 \\ -393.5877 \\ -47.7846 \end{bmatrix}$

ตารางที่ 5.10: ค่าตัวแปรที่ได้จากวิธีที่เสนอ ในกรณีศึกษาที่ 2 ตัวอย่างที่ 2

$\gamma(\cdot)$	θ_{11}	θ_{12}	θ_{21}	θ_{22}	u_{11}	u_{12}	u_{21}	u_{22}
กรณี 1	0.1122	0.0501	0.1720	0.0787	0.1192	0.2905	0.0962	0.1417
กรณี 2.1	0.0097	0.0038	0.0162	0.0061	0.4985	1.2865	0.2934	0.4552
กรณี 2.2	0.0063	0.0026	0.0106	0.0042	0.5836	1.4357	0.3530	0.5298
กรณี 2.3	0.3027	0.3123	0.4625	0.4747	0.0986	0.0974	0.0441	0.0436
กรณี 2.4	0.5515	0.3083	0.7854	0.4602	0.0290	0.0563	0.0384	0.0502

ตารางที่ 5.11: แสดงค่าสมรรถนะ ในแต่ละกรณีย่อยย่อย ของกรณีศึกษาที่ 2 ในตัวอย่างที่ 2

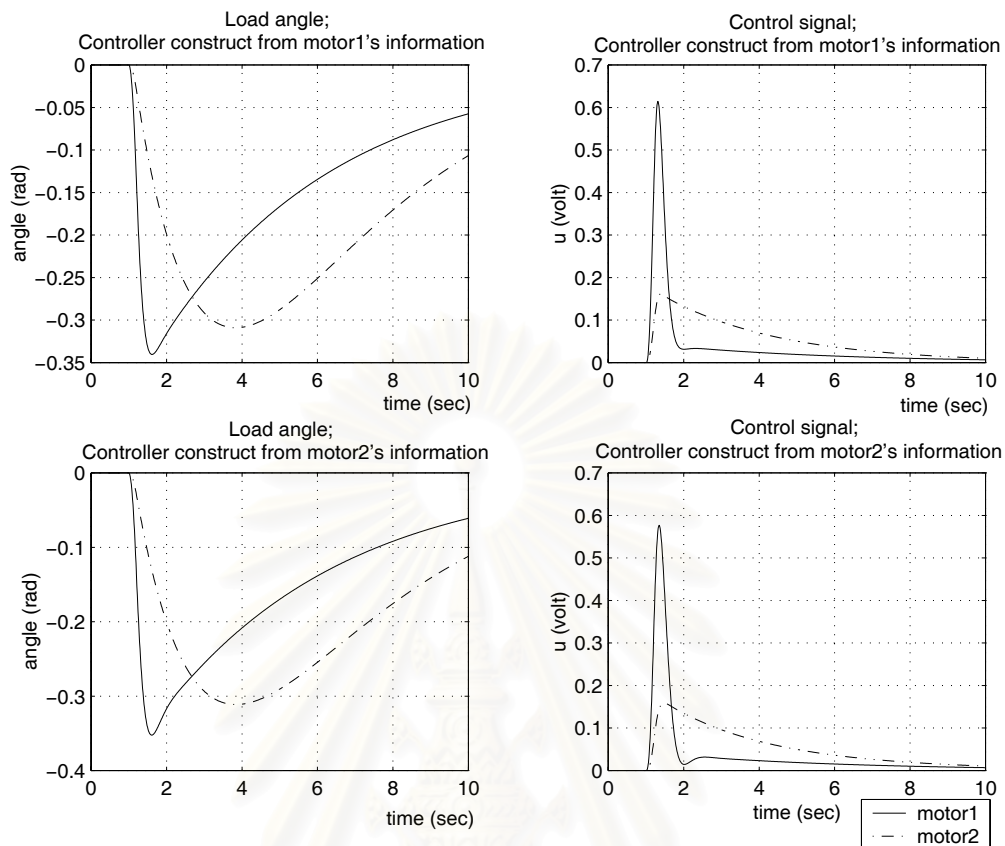


รูปที่ 5.6: กรณีศึกษาที่ 2.2 โดยมีพารามิเตอร์ $c_{1s1} = 1$, $d_{12s1} = 1$, $c_{1s2} = 9$, $d_{12s2} = 1$

จะเป็นการเพิ่มสัญญาณควบคุมให้มีค่ามากขึ้น สำหรับการถ่วงค่า d_{12s2} ให้มีค่ามากขึ้น สัญญาณควบคุมมีขนาดเล็กลง

จากการเปรียบเทียบกรณีศึกษาที่ 2.1 และ 2.2 เป็นการศึกษาผล จากการถ่วง c_{1s1} กับ c_{1s2} นั้น เห็นได้ว่าไม่ว่าจะถ่วงค่าใด ก็จะมีผลต่อมุมภาระของมอเตอร์ทั้งสอง เพราะพารามิเตอร์ทั้งสองเป็นส่วนหนึ่งเงื่อนไขการหาตัวควบคุมในสมการเมทริกซ์เชิงเส้น แต่อย่างไรก็ตามการพิจารณาค่าทั้งสองยังมีส่วนในการออกแบบตัวควบคุม ซึ่งจะเห็นได้ในส่วนของการออกแบบ

ข้อสังเกต จากในกรณีตัวอย่างปัญหานี้ ข้อเปรียบเทียบระหว่างการใช้ข้อมูลของมอเตอร์แต่ละตัว เพื่อมาหาเมทริกซ์สังเกตสถานะร่วมนั้น เห็นได้ว่าในแต่ละกรณีศึกษา การใช้ข้อมูลของมอเตอร์ตัวที่ 2 มาสร้างตัวสังเกตสถานะนั้น จะให้ผลตอบที่ดีกว่าการใช้ข้อมูลของมอเตอร์ตัวที่ 1 โดยเห็นได้ชัดว่าในแต่ละกรณีศึกษานั้นตัวควบคุมที่เกิดจากการใช้ข้อมูลของมอเตอร์ตัวที่ 2 มุมภาระที่เปลี่ยนแปลงจะน้อยกว่า และเวลากลับสู่ศูนย์จะเร็วกว่า และหากพิจารณาลักษณะทางกายภาพของมอเตอร์ทั้งสองพบว่ามอเตอร์ตัวที่ 2 ต้องใช้กำลังในการขับเคลื่อนมากกว่ามอเตอร์ตัวที่ 1 จึงน่าจะเป็นเหตุผลที่จะพิจารณามอเตอร์ตัวที่ 2 มาใช้เป็นข้อมูลในขั้นตอนหาเมทริกซ์สังเกตสถานะร่วม ดังนั้นในส่วนต่อไปของปัญหานี้ ซึ่งเป็นส่วนของการหาตัวควบคุมเพื่อผลตอบมีลักษณะตามที่ต้องการนั้น เราจะใช้ข้อ



รูปที่ 5.7: กรณีศึกษาที่ 2.3 โดยมีพารามิเตอร์ $c_{1s1} = 1$, $d_{12s1} = 16$, $c_{1s2} = 1$, $d_{12s2} = 1$

มูลของมอเตอร์ตัวที่ 2 มาสร้างตัวควบคุม

การออกแบบหัตว์ควบคุม ในการออกแบบตัวควบคุมเพื่อให้มอเตอร์ทั้งสองมีระบบวงปิดตามที่ต้องการนั้น กล่าวคือ ต้องการให้ตำแหน่งมุมของภาระกลับมาที่ตำแหน่งศูนย์ และแรงดันที่ควบคุมมอเตอร์นั้น อยู่ในช่วง ± 3 โวลต์

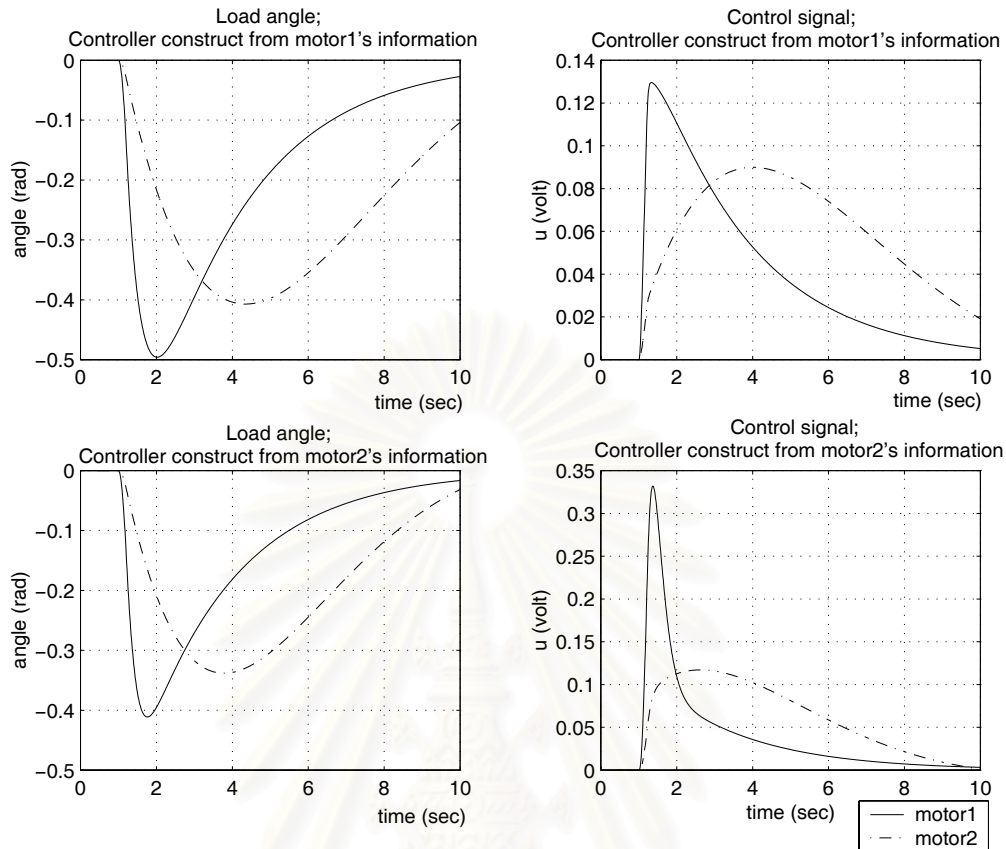
- ด้วยวิธีที่เสนอ มีลำดับการออกแบบดังนี้

ออกแบบครั้งที่ 1 : โดยกำหนดให้ $c_{1s1} = 9$, $d_{12s1} = 2$, $c_{1s2} = 9$, $d_{12s2} = 0.01$ ได้ตัวควบคุม

$$C(s) = \frac{-6.2123 \times 10^3 (s + 49.2290)(s + 2.2339)}{(s + 60.6304)(s^2 + 65.8948s + 1.3509 \times 10^3)}$$

ได้ผลตอบตามรูปที่ จากผลตอบตามรูปที่ 5.9 นี้ สังเกตว่าแม้ว่ามุมของภาระของมอเตอร์ทั้งสองจะเข้าที่ศูนย์องศาภายในวินาทีที่ 6 แต่สัญญาณควบคุมมีขนาดเกิน 3 โวลต์มาเล็กน้อย

ออกแบบครั้งที่ 2 : เนื่องจากในการออกแบบครั้งแรก สัญญาณควบคุมเกินอยู่ จึงทำการ



รูปที่ 5.8: กรณีศึกษาที่ 2.4 โดยมีพารามิเตอร์ $c_{1s1} = 1$, $d_{12s1} = 1$, $c_{1s2} = 1$, $d_{12s2} = 4$

เพิ่ม d_{12s1} เป็น 3 ได้ตัวควบคุม

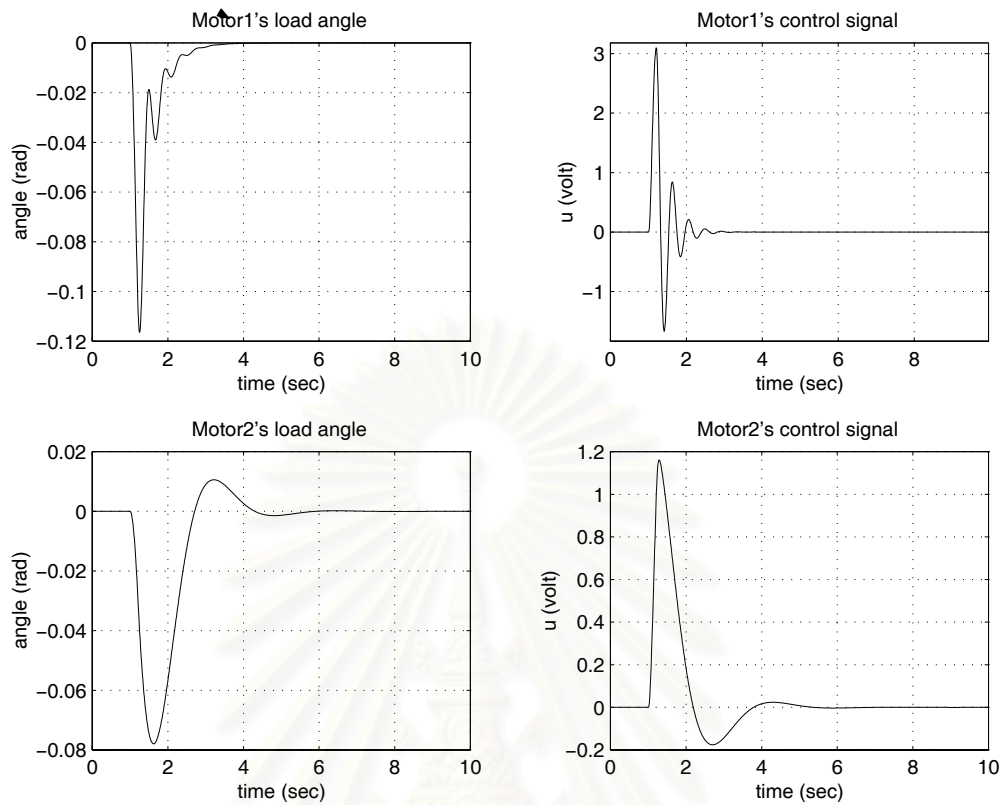
$$C(s) = \frac{-2.6595 \times 10^3 (s + 49.4350)(s + 1.8710)}{(s + 46.0080)(s^2 + 53.8770s + 940.8909)}$$

ให้ผลตอบระบบวงปิดดังรูปที่ 5.10 สังเกตว่าคราวนี้ สัญญาณควบคุมมีขนาดไม่เกิน 3 โวลต์ แต่ที่มอเตอร์ตัวที่ 2 มุมของภาระ หลังจากใช้เวลา 6 วินาที ยังไม่เข้าที่ตำแหน่งศูนย์องศา

ออกแบบครั้งที่ 3 : เนื่องจากการออกแบบครั้งที่ 2 ตำแหน่งมุมภาระของมอเตอร์ตัวที่ 2 ยังไม่กลับมาที่ตำแหน่งศูนย์ จึงเพิ่ม c_{1s2} เป็น 12 ขณะเดียวกันก็ลด c_{1s1} เป็น 4 เพราะผลตอบมุมแกนภาระของมอเตอร์ตัวที่ 1 มีคุณสมบัติได้เกินตามที่เราต้องการ ด้วยค่าถ่วงครั้งนี้ ได้ตัวควบคุม

$$C(s) = \frac{-5.3153 \times 10^3 (s + 49.3141)(s + 2.3503)}{(s + 59.9924)(s^2 + 64.5880s + 1.2857 \times 10^3)}$$

ให้ผลตอบของระบบวงปิดตามรูปที่ 5.11 ซึ่งมุมแกนภาระ และสัญญาณควบคุมตามที่เรากำลังต้องการ



รูปที่ 5.9: ออกแบบครั้งที่ 1 ด้วยวิธีที่เสนอ โดยมีพารามิเตอร์ $c_{1s1} = 9$, $d_{12s1} = 2$, $c_{1s2} = 9$, $d_{12s2} = 0.01$ ในตัวอย่างที่ 2

ข้อของระบบวงปิดของมอเตอร์ทั้งสองตัว ในแต่ละครั้งของการออกแบบด้วยวิธีที่เสนอ แสดงในตารางที่ 5.12

- วิธี CDA เป็นวิธีการแก้ปัญหาการหาตัวควบคุมแบบเชื่อถือได้ที่เสนอโดย Geromel และคณะ แต่ในวิทยานิพนธ์นี้ให้เมทริกซ์ C_{1si} , D_{12si} , ของแต่ละระบบแตกต่างกัน ในการออกแบบแต่ละครั้ง ใช้ $\epsilon = 0.01$ เป็นตัวหยุดการวนรอบของอัลกอริทึม CDA

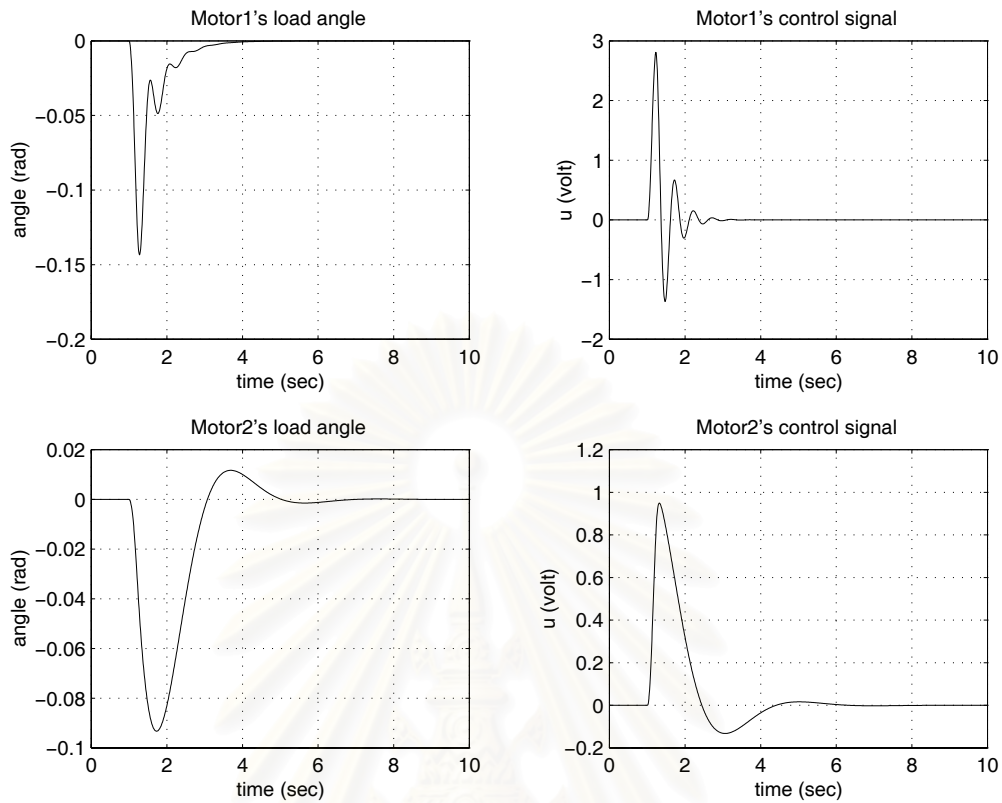
การออกแบบครั้งที่ 1 ใช้ค่าถ่วงตามการออกแบบที่ 3 ของวิธีที่เสนอ คือ ให้ $c_{1s1} = 4$, $d_{12s1} = 3$, $c_{1s2} = 12$, $d_{12s2} = 0.01$ อัลกอริทึมที่กล่าวในบทที่ 5 วน 4 รอบ ให้ลำดับการลู่อเข้า f_1 และ f_2 ดังนี้

$$\{f_1\} = \{6.1899, 0.5795, 0.4769, 0.4628\} \times 10^4$$

$$\{f_2\} = \{1.3226, 0.5066, 0.4675, 0.4610\} \times 10^4$$

และให้ตัวควบคุม

$$C(s) = \frac{-668.1368(s + 29.5538)(s + 1.6944)}{(s + 48.0536)(s^2 + 19.9162s + 221.1632)}$$



รูปที่ 5.10: ออกแบบครั้งที่ 2 ด้วยวิธีที่เสนอ โดยมีพารามิเตอร์ $c_{1s1} = 9$, $d_{12s1} = 3$, $c_{1s2} = 9$, $d_{12s2} = 0.01$ ในตัวอย่างที่ 2

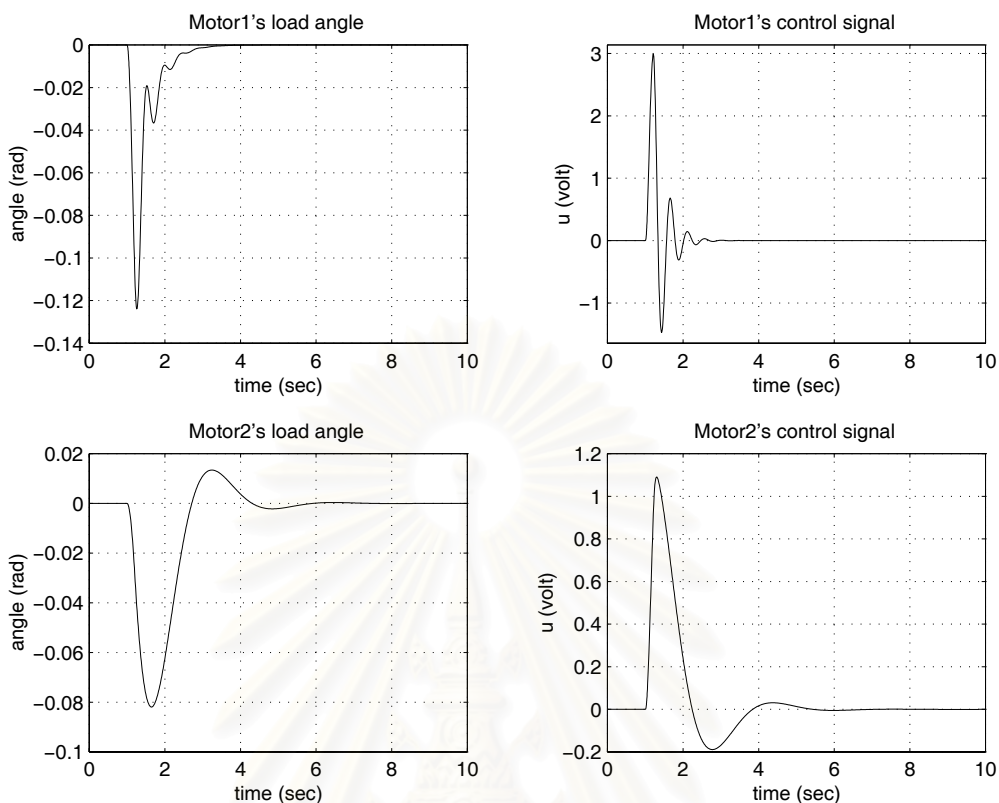
ทำให้ระบบวงปิดผลตอบตามรูปที่ 5.12 สังเกตว่า ด้วยพารามิเตอร์ที่ใช้ในการถ่วงเดียวกันกับวิธีที่แล้ว ในวิธีนี้ให้ผลตอบที่ไม่ดีนัก กล่าวคือยังไม่ให้ผลตอบตามที่ เราต้องการ

การออกแบบครั้งที่ 2 เนื่องจากตัวถ่วงที่ใช้ในการออกแบบครั้งที่แล้ว ให้ผลตอบที่ช้า จึงเพิ่มตัวถ่วง c_{1s1} และ c_{1s2} ขณะเดียวกันยอมให้สัญญาณควบคุมมีขนาดเพิ่มขึ้นได้ โดยใช้ค่าถ่วงดังนี้ $c_{1s1} = 16$, $d_{12s1} = 0.01$, $c_{1s2} = 16$, $d_{12s2} = 0.01$ อัลกอริทึมวนรอบ 17 รอบ ให้การลู่เข้าของค่า f_1 และ f_2 ตามรูปที่ 5.13 ได้ตัวควบคุม

$$C(s) = \frac{-1.6983 \times 10^5 (s + 28.7635)(s + 2.3876)}{(s + 3.1500 \times 10^3)(s^2 + 29.4858s + 432.4392)}$$

ที่ทำให้ผลตอบของระบบวงปิดมีลักษณะตามรูปที่ 5.14 สังเกตว่า สัญญาณควบคุมมอเตอร์ตัวที่ 1 มีขนาดเกิน 3 โวลต์มาเล็กน้อย ดังนั้นจึงทำการออกแบบใหม่

การออกแบบครั้งที่ 3 เนื่องจากการออกแบบในครั้งที่แล้ว สัญญาณควบคุมของมอเตอร์ตัวที่ 1 เกินขอบเขตที่กำหนดไว้ ดังนั้นครั้งนี้ใช้ค่าถ่วงดังนี้ $c_{1s1} = 16$, $d_{12s1} = 0.5$, $c_{1s2} = 16$, $d_{12s2} = 0.01$ โดยหวังว่าเพิ่ม ตัวถ่วง d_{12s1} ให้มีขนาดเพิ่มขึ้น เพื่อจะไปลดสัญญาณควบคุมลง



รูปที่ 5.11: ออกแบบครั้งที่ 3 ด้วยวิธีที่เสนอ โดยมีพารามิเตอร์ $c_{1s1} = 4$, $d_{12s1} = 3$, $c_{1s2} = 12$, $d_{12s2} = 0.01$ ในตัวอย่างที่ 2

อัลกอริทึมวนรอบอยู่ 7 รอบ ให้ลำดับการลู่อู่เข้า f_1 และ f_2 ดังนี้

$$\{f_1\} = \{3.5909, 0.1901, 0.0912, 0.0654, 0.0564, 0.0531, 0.0519\} \times 10^5$$

$$\{f_2\} = \{5.3054, 1.2948, 0.7647, 0.6016, 0.5444, 0.5235, 0.5155\} \times 10^5$$

ให้ตัวควบคุมดังนี้

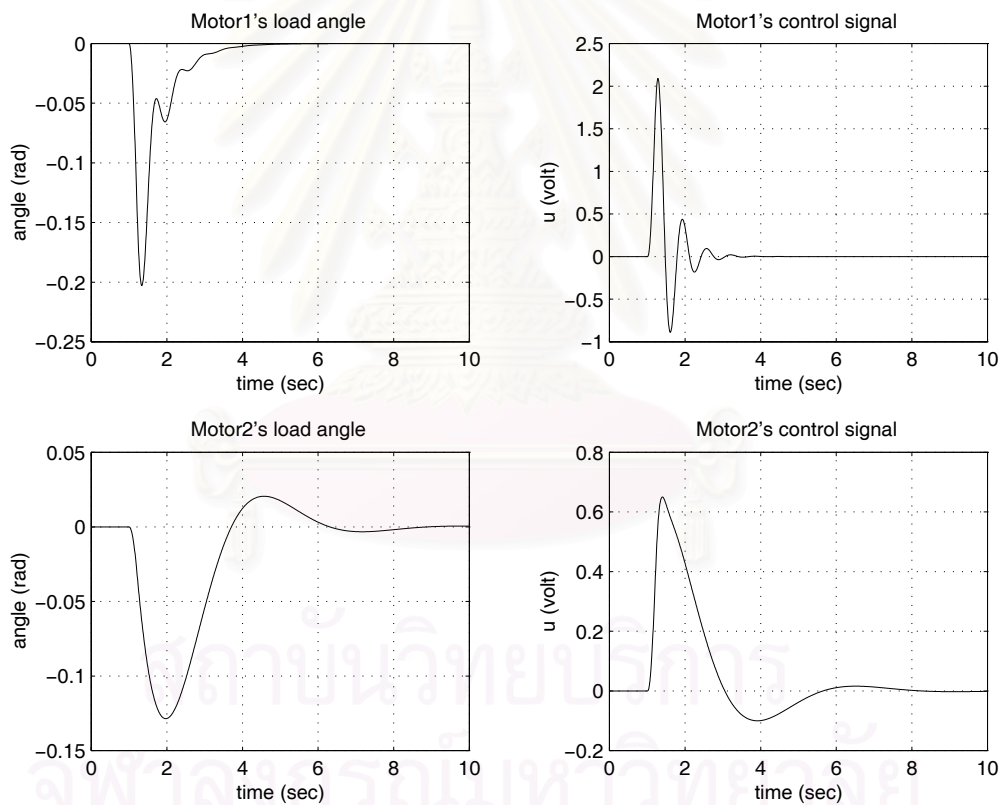
$$C(s) = \frac{-6.3259 \times 10^3 (s + 28.8396)(s + 2.0820)}{(s + 1.8256 \times 10^2)(s^2 + 25.6117s + 339.2516)}$$

ตัวควบคุมนี้ให้ผลตอบของระบบวงปิดตามรูปที่ 5.15 จากผลตอบตามรูปนี้ แม้ว่าสัญญาณควบคุมมีน้อยกว่า 3 โวลต์ แต่ก็ตาม แต่กลับทำให้ มุมภาระมอเตอร์ตัวที่ 2 ที่เวลาหลังจากวินาทีที่ 6 ยังไม่กลับอยู่ที่ ตำแหน่งศูนย์ดีพอ

การออกแบบครั้งที่ 4 ใช้ค่าถ่วงดังนี้ $c_{1s1} = 4$, $d_{12s1} = 0.5$, $c_{1s2} = 20$, $d_{12s2} = 0.01$ ซึ่งการออกแบบในครั้งนี้ มีการปรับ c_{1s1} ลดลงเนื่องจาก มุมภาระของมอเตอร์ตัวที่ 1 ให้ผลตอบเป็นที่น่าพอใจอยู่แล้ว ขณะเดียวกันก็เพิ่มตัวถ่วง c_{1s2} ให้เพิ่มขึ้นเพื่อต้องการลดการเปลี่ยน

เครื่องที่ ออกแบบ	ครั้งที่ 1	ครั้งที่ 2	ครั้งที่ 3
ขั้วระบบวงปิด	-2.2023	-1.7905	-2.3313
มอเตอร์	-58.0574	-46.8571	-57.8486
ตัวที่ 1	$-3.2423 \pm 14.6751i$ $-41.8904 \pm 18.5681i$	$-2.9997 \pm 12.6397i$ $-34.6189 \pm 18.5342i$	$-3.4292 \pm 13.8727i$ $-40.7711 \pm 17.9750i$
ขั้วระบบวงปิด	-29.6700	-29.1248	-30.1388
มอเตอร์	-59.4425	-46.7550	-58.9895 <i>i</i>
ตัวที่ 2	$-1.2518 \pm 1.9699i$ $-37.4545 \pm 12.8738i$	$-1.0598 \pm 1.6038i$ $-30.9428 \pm 10.9933i$	$-1.1319 \pm 1.9648i$ $-36.5941 \pm 12.1435i$

ตารางที่ 5.12: ขั้วระบบวงปิดของมอเตอร์ทั้งสองชุด ที่ให้ผลตอบตามคุณสมบัติตามตรงการด้วยวิธีการหาตัวควบคุมร่วมตามวิธีที่เสนอ ในตัวอย่างที่ 2

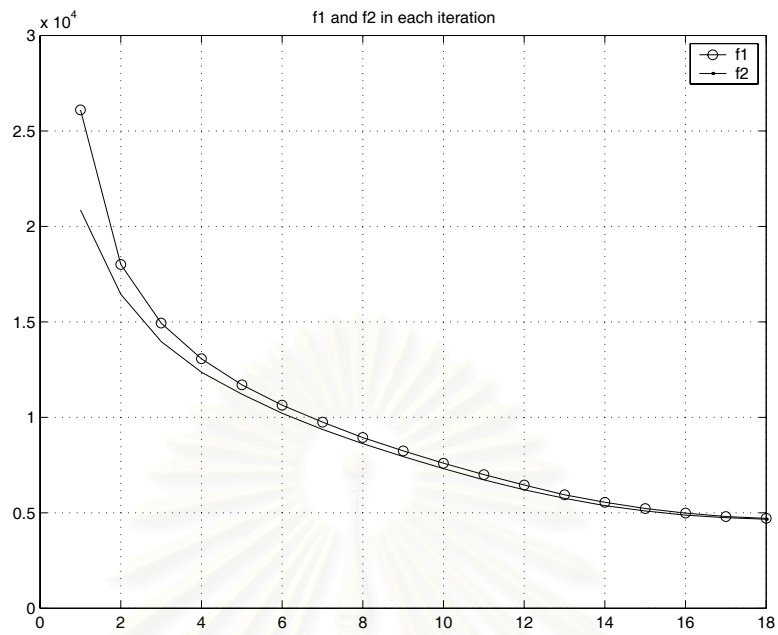


รูปที่ 5.12: ออกแบบครั้งที่ 1 ด้วยวิธี CDA โดยมีพารามิเตอร์ $c_{1s1} = 4$, $d_{12s1} = 3$, $c_{1s2} = 12$, $d_{12s2} = 0.01$ ในตัวอย่างที่ 2

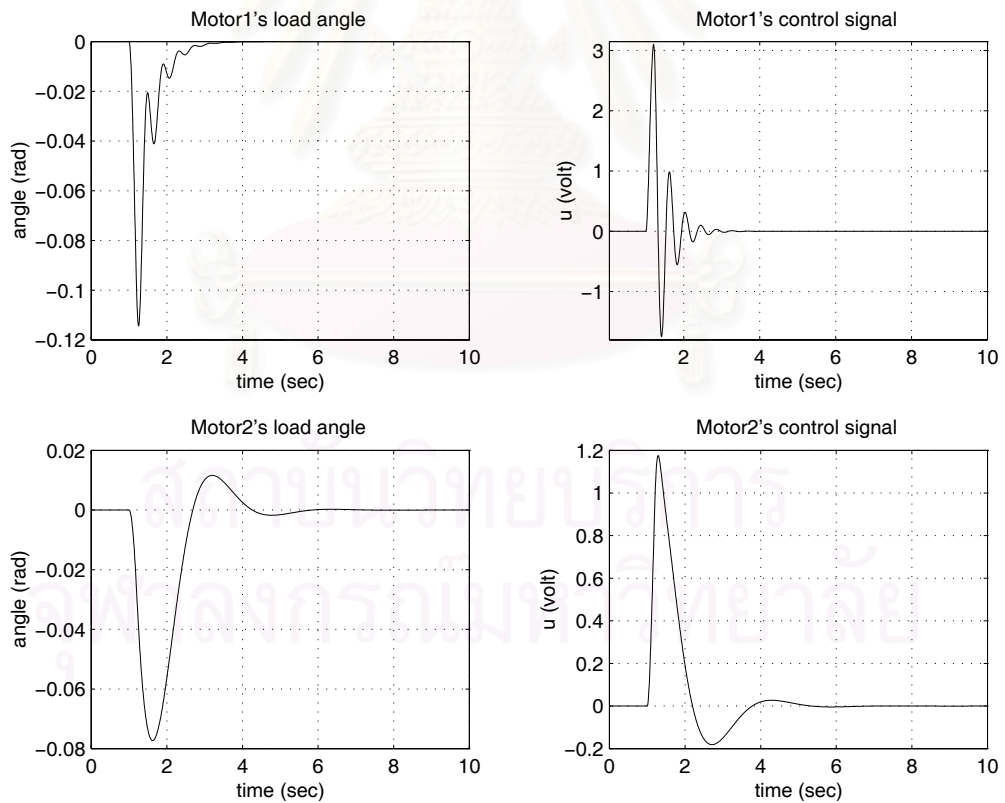
แปลงมุมภาวะ ของมอเตอร์ตัวที่ 2 อัลกอริทึมวนไป 7 รอบ ให้ลำดับการลู่เข้า f_1 และ f_2 ดังนี้

$$\{f_1\} = \{6.0242, 0.3182, 0.1540, 0.1065, 0.0881, 0.0803, 0.0769\} \times 10^5$$

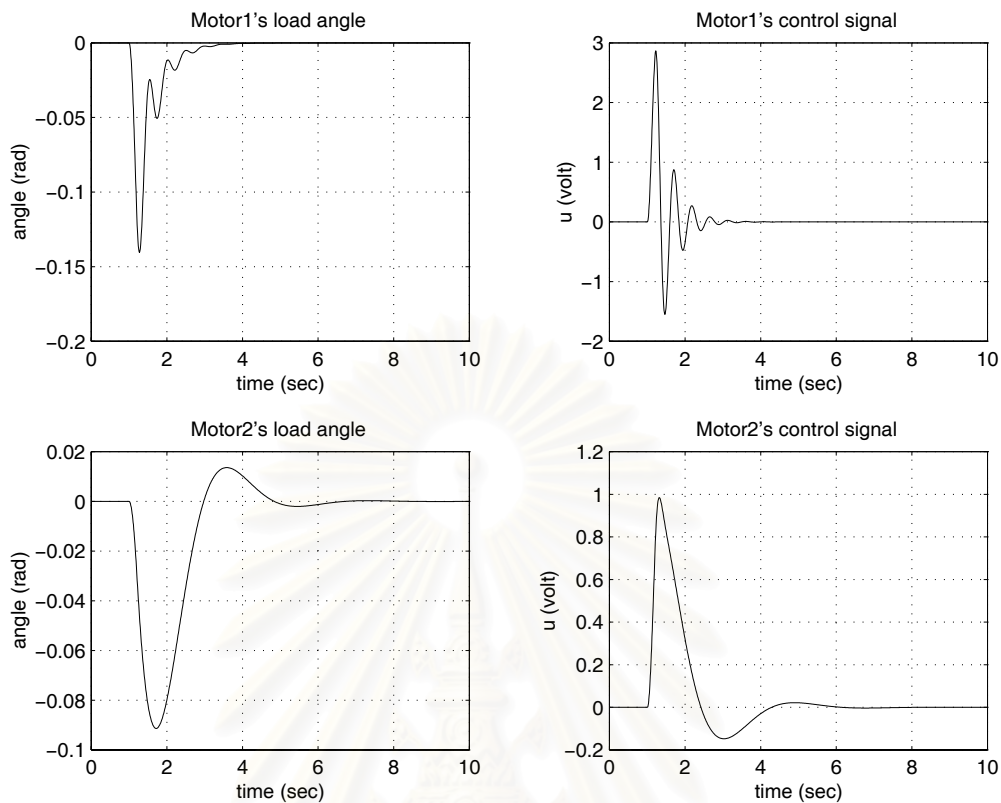
$$\{f_2\} = \{8.1509, 2.1892, 1.2765, 0.9641, 0.8390, 0.7848, 0.7620\} \times 10^4$$



รูปที่ 5.13: การลู่เข้าของค่า f_1 และ f_2 จากการออกแบบครั้งที่ 2 ด้วยวิธี CDA ในตัวอย่างที่ 2



รูปที่ 5.14: ออกแบบครั้งที่ 2 ด้วยวิธี CDA โดยมีพารามิเตอร์ $c_{1s1} = 16$, $d_{12s1} = 0.01$, $c_{1s2} = 16$, $d_{12s2} = 0.01$ ในตัวอย่างที่ 2



รูปที่ 5.15: ออกแบบครั้งที่ 3 ด้วยวิธี CDA โดยมีพารามิเตอร์ $c_{1s1} = 16$, $d_{12s1} = 0.5$, $c_{1s2} = 16$, $d_{12s2} = 0.01$ ในตัวอย่างที่ 2

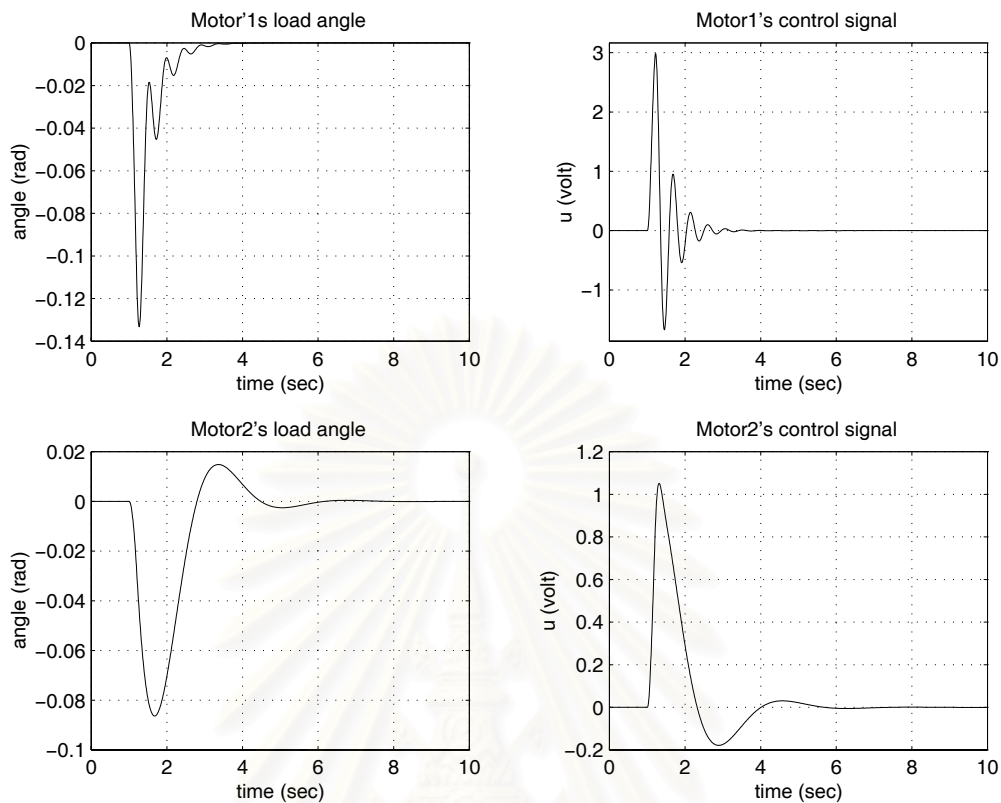
ได้ตัวควบคุมตามนี้

$$C(s) = \frac{-8.1129 \times 10^3 (s + 27.9648)(s + 2.3480)}{(s + 2.0521 \times 10^2)(s^2 + 26.2975s + 359.2992)}$$

ที่ให้ผลตอบของระบบวงปิดตามรูปที่ 5.16 ซึ่งให้ผลตอบเป็นที่น่าพอใจ และผลตอบได้ตรงตามที่กำหนดไว้ ขั้วระบบวงปิดของมอเตอร์ทั้งสองตัว ในแต่ละครั้งของการออกแบบด้วยวิธี CDA แสดงดังตารางที่ 5.13

ข้อเปรียบเทียบระหว่างวิธีที่เสนอ และวิธี CDA จากตัวอย่างนี้

1. สำหรับตัวถ่วง c_{1si} , และ d_{12si} บางค่า นั้น วิธีที่เสนอ ไม่สามารถหาคำตอบให้ได้ โดยส่วนใหญ่จากที่ได้ทำการศึกษามา วิธีที่เสนอ นี้จะไม่มีคำตอบให้ในขั้นตอนการหาสังเกตสถานะร่วม กล่าวคือ สามารถหาเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะร่วมกันได้อย่างเดียว ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ $c_{1s1} = 4$, $d_{12s1} = 3$, $c_{1s2} = 20$, $d_{12s2} = 0.01$ ด้วยวิธีที่เสนอ ไม่สามารถให้คำตอบได้ แต่ด้วยค่าถ่วงเหล่านี้ วิธี CDA สามารถให้คำตอบได้ ด้วยการวนรอบอัลกอริทึม 5 รอบ
2. ในวิธีที่เสนอ ต้องมีการเลือกระบบที่จะนำข้อมูลของระบบนั้นมาหาเมทริกซ์สังเกตสถานะร่วม ซึ่งระบบที่เลือกนี้ มีผลต่อผลตอบของระบบวงปิด และในบางค่าของตัวถ่วงที่ใช้ ระบบที่นำมา



รูปที่ 5.16: ออกแบบครั้งที่ 4 ด้วยวิธี CDA โดยมีพารามิเตอร์ $c_{1s1} = 4$, $d_{12s1} = 0.5$, $c_{1s2} = 20$, $d_{12s2} = 0.01$

หาเมทริกซ์สังเกตสถานะรวมนี้ ยังมีผลต่อการหาคำตอบว่าได้หรือไม่อีกด้วย ตัวอย่างเช่นในการออกแบบครั้งที่ 3 ซึ่งเราใช้ข้อมูลของ มอเตอร์ที่ 2 สร้างตัวสังเกตสถานะ แต่ถ้าเราใช้ข้อมูลของมอเตอร์ตัวที่ 1 เราจะได้คำตอบจากวิธีที่เสนอ ในขณะที่วิธี CDA นั้นเราไม่จำเป็นต้องเลือกระบบที่จะนำมาหาเมทริกซ์สังเกตสถานะรวม เพราะในวิธี CDA นี้ เราหาเมทริกซ์ A_c โดยตรง ซึ่งต่างจากวิธีที่เสนอตรงที่ วิธีที่เสนอเมทริกซ์ A_c เกิดจาก ข้อมูลของระบบใดระบบหนึ่ง, เมทริกซ์ป้อนกลับสถานะรวม และเมทริกซ์สังเกตสถานะรวม

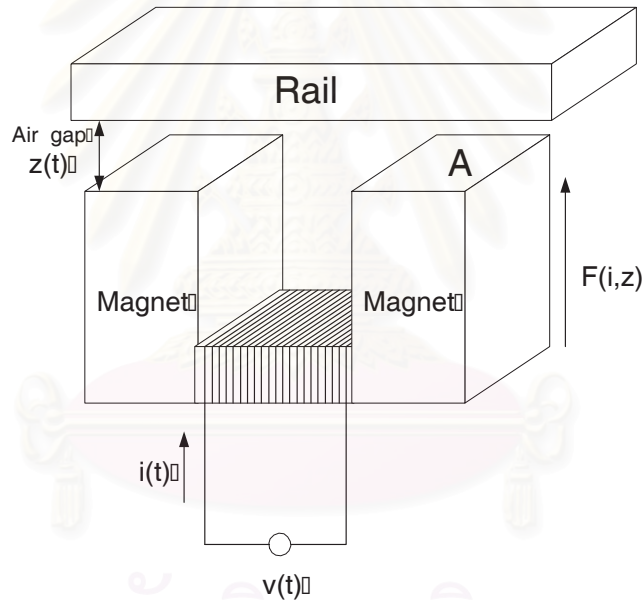
- เราสังเกตว่า จากการออกแบบครั้งที่ 1 ในวิธี CDA ถึงแม้เราใช้พารามิเตอร์ถ่วงเดียวกันกับการออกแบบครั้งที่ 3 ด้วยแนว ทางที่เสนอ นั้น วิธี CDA ให้ผลตอบที่ดียิ่งกว่า นั่นคือ มุมการะมีการเปลี่ยนแปลงมากกว่า และ เวลาเข้าสู่ตำแหน่งศูนย์ช้ากว่า นับว่าเป็นข้อด้อยของวิธี CDA

5.3 ตัวอย่างการควบคุมระบบไม่เชิงเส้น Electromagnetic Suspension

เป็นตัวอย่างระบบที่นำมาจาก [24] เพื่อทำการจำลองระบบ (simulation) หาตัวควบคุมร่วมกัน ของสภาวะการทำงาน 3 สภาวะของระบบ electromagnetic suspension หรือ EMS ชุดทดลองที่มีลักษณะตามรูปที่ 5.17 และมีแบบจำลองระบบดังนี้

ครั้งที่ออกแบบ	ครั้งที่ 1	ครั้งที่ 2	ครั้งที่ 3	ครั้งที่ 4
ขั้วระบบวงปิด	-1.53	-2.37	-2.01	-2.32
มอเตอร์	-47.48	-3.15×10^3	-1.82×10^2	-2.05×10^2
ตัวที่ 1	$-2.44 \pm 9.83i$	$-2.78 \pm 15.24i$	$-2.48 \pm 13.24i$	$-2.46 \pm 13.70i$
	$-19.03 \pm 5.76i$	$-22.76 \pm 7.62i$	$-21.36 \pm 6.87i$	$-21.56 \pm 6.76i$
ขั้วระบบวงปิด	-40.03	-39.96	-39.86	-39.92
มอเตอร์	-47.61	-3.15×10^3	-1.82×10^2	-2.05×10^2
ตัวที่ 2	$-9.45 \pm 10.40i$	$-1.20 \pm 1.99i$	$-1.02 \pm 1.68i$	$-1.04 \pm 1.86i$
	$-0.70 \pm 1.20i$	$-13.56 \pm 13.91i$	$-11.86 \pm 12.50i$	$-12.15 \pm 12.93i$

ตารางที่ 5.13: ขั้วระบบวงปิดของมอเตอร์ทั้งสองชุด ที่ให้ผลตอบตามคุณสมบัติตามตรงการด้วยวิธีการหาตัวควบคุมร่วมตามวิธี CDA ในตัวอย่างที่ 2



รูปที่ 5.17: ระบบ Electromagnetic Suspension

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{\mu_0 N^2 A}{4\alpha m} \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^2 + G + \frac{1}{\alpha m} f \\ \frac{x_2 x_3}{x_1} - \frac{2R}{\mu_0 N^2 A} x_3 x_1 + \frac{2x_1}{\mu_0 N^2 A} u \end{bmatrix} \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

โดยที่ $x_1 = z$ คือ ระยะห่างแนวตั้งระหว่างราง (Rail) กับแม่เหล็ก (Magnet) [m], $x_2 = \dot{z}$ ความเร็วในแนวตั้งของแท่งแม่เหล็ก [m/s], $x_3 = i$ กระแสไฟฟ้าในขดลวดแม่เหล็ก [A], $G = 9.8$ [m/s²] เป็นค่าแรงโน้มถ่วงโลก, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m], A เป็นพื้นที่หน้าตัดของแท่งแม่เหล็ก [Cm²], N แทนจำนวนรอบของขดลวด, R แทนความต้านทานรวมของขดลวดที่พันรอบแม่เหล็ก [Ω], u แทนแรงดัน

	ค่าที่ใช้	หน่วย
m	15	kg
R	8	Ω
N	2000	รอบ
A	12	Cm^2

ตารางที่ 5.14: ค่าพารามิเตอร์ในระบบ electromagnetic suspension: EMS

จ่ายให้ขดลวด [Volt], m มวลรวมทั้งหมด [kg], α เป็นอัตราส่วนของมวลที่เปลี่ยนไปหรือคือ $\frac{m_p}{m}$ เมื่อ m_p แทนมวลที่เปลี่ยนไป [kg], f เป็นแรงรบกวนจากภายนอก โดยค่าต่างๆ เป็นตามตารางที่ 5.14

เนื่องจากระบบเป็นระบบไม่เชิงเส้น ในแนวทางที่กล่าวไว้ตั้งแต่แรกคือการทำให้เป็นเชิงเส้น รอบจุดทำงาน โดยที่จุดทำงาน $z = x_{1d}, f = 0$ ในสภาวะการทำงานที่สัดส่วนมวล $\alpha = \alpha_d$ และเพื่อความสะดวก นิยามตัวแปรดังนี้

$$a_1 \triangleq \frac{\mu_0 N^2 A}{4\alpha m}, \quad a_2 \triangleq \frac{2R}{\mu_0 N^2 A}, \quad b \triangleq \frac{2}{\mu_0 N^2 A}$$

หลังจากทำการให้เป็นเชิงเส้นแล้ว ที่สภาวะสมดุล (equilibrium) ได้จุดสมดุลต่างๆ ดังนี้

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_{1d} \\ x_2^* &= 0 \\ x_3^* &= \sqrt{\left(\frac{G}{a_1^*}\right)} x_{1d} \\ u^* &= \frac{a_2}{b} x_3^* \\ y^* &= x_1^* \end{aligned} \tag{5.3}$$

สังเกตว่า a_1 เป็นค่าที่ขึ้นอยู่กับมวลที่เปลี่ยนแปลงหรือค่า α ดังนั้นเราจึงกำหนดที่สภาวะการทำงาน α_d ทำให้ $a_{1d} = \frac{\mu_0 N^2 A}{4\alpha_d m}$ เราได้สมการเชิงเส้นรอบสภาวะการทำงานดังกล่าวข้างต้น ดังนี้

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= A\Delta x + B_2\Delta u + B_1f \\ \Delta y &= C_2\Delta x \end{aligned} \tag{5.4}$$

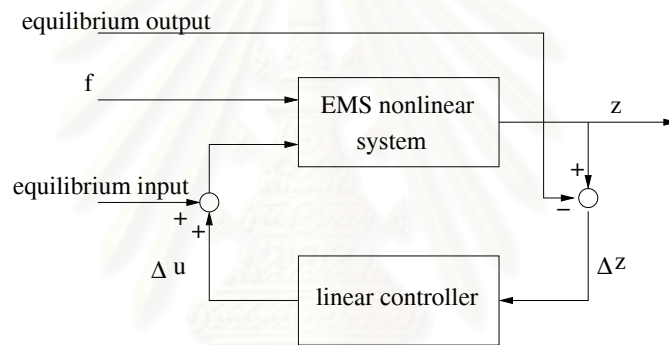
เมื่อ

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2a_{1d}x_3^{*2}}{x_1^{*3}} & 0 & -\frac{2a_{1d}x_3^*}{x_1^{*2}} \\ -\frac{x_3^*}{x_1^{*2}} - a_2x_3^* + bu^* & \frac{x_3^*}{x_1^*} & -a_2x_1^* \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ bx_1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\alpha_d m} \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.5}$$

และ Δ แทนการเปลี่ยนแปลงรอบสภาวะการทำงาน เราทำการต่อเติมระบบเชิงเส้นให้เป็นระบบในรูปแบบทั่วไป (ก.1) โดย

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x} &= A_{si} \Delta x + \begin{bmatrix} B_{1si} & 0_{3 \times 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ w_s \end{bmatrix} + B_{2si} \Delta u \\ z &= \begin{bmatrix} c_{1si} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ d_{12si} \end{bmatrix} \Delta u \\ \Delta y &= C_{2si} \Delta x + \begin{bmatrix} 0 & d_{21si} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ w_s \end{bmatrix}\end{aligned}$$

เช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 2 ตัวห้อย 'si' แทนสภาวะการทำงานที่ $i, i = 1, 2, 3$ และ w_s เป็นสัญญาณรบกวนภายนอกที่เข้ามาทางตัวตรวจวัด (sensor), z เป็นสัญญาณที่สร้างขึ้นเพื่อใช้ในการวิเคราะห์สมรรถนะแบบ H_2 ในที่กำหนดให้ $D_{21} = 0.01$ แสดงการจำลองการควบคุมดังรูปที่ 5.18 ในตัวอย่าง



รูปที่ 5.18: ลักษณะการจำลองระบบ electromagnetic suspension หรือ ems

นี้ กำหนดให้มี 3 สภาวะการทำงาน ดังนี้

1. เมื่อระยะแนวดิ่งอยู่ที่ $x_{1d} = 8$ มิลลิเมตร มวลไม่มีการเปลี่ยนแปลง คือ $\alpha_d = 1$
2. เมื่อระยะแนวดิ่งอยู่ที่ $x_{1d} = 15$ มิลลิเมตร มวลเพิ่มขึ้นสองเท่า คือ $\alpha_d = 0.6$
3. เมื่อระยะแนวดิ่งอยู่ที่ $x_{1d} = 4$ มิลลิเมตร มวลลดลงเหลือครึ่งหนึ่ง คือ $\alpha_d = 1.5$

ทั้งสามสภาวะนี้ให้ฟังก์ชันถ่ายโอนจากรบกวนภายนอก ไปสัญญาณออกดังนี้

$$G_1(s) = \frac{0.066667(s + 21.22)}{(s - 31.43)(s^2 + 52.65s + 1654)}$$

$$G_2(s) = \frac{0.11111(s + 39.79)}{(s - 27.75)(s^2 + 67.53s + 1874)}$$

$$G_3(s) = \frac{0.044444(s + 10.61)}{(s - 34.1)(s^2 + 44.71s + 1525)}$$

สัญญาณรบกวนภายนอกที่ใส่เข้ามาเป็นสัญญาณรบกวนในลักษณะพัลส์ กว้าง 0.05 วินาที ขนาด 5 หน่วย ในตัวอย่างนี้จะแสดงให้เห็นถึงผลการใช้ตัวควบคุมที่ออกแบบเพื่อสภาวะที่ 1 เพียงอย่างเดียวในการควบคุมสภาวะทั้ง 3 ต่อจากนั้นก็หาตัวควบคุมเพื่อทั้ง 3 สภาวะ โดยแบ่งการออกแบบเป็น 2 ครั้ง แต่แต่ละครั้งของการออกแบบจะใช้ทั้งสองวิธี อันได้แก่วิธีที่เสนอ และวิธี CDA สำหรับวิธีที่เสนอนั้นเราใช้ข้อมูลสภาวะที่ 1 ในการขั้นตอนหาเมทริกซ์สังเกตสถานะร่วม เพราะสภาวะดังกล่าวเป็นสภาวะกลางของทั้งสองสภาวะ

การใช้ตัวควบคุมที่ออกแบบมาสำหรับสภาวะที่ 1 อย่างเดียว ในการออกแบบครั้งนี้ เราแก้เมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ F และ เมทริกซ์สังเกตสถานะ, H จากการแก้สมการราคาดี

$$PA + A^T P - PB_2(D_{12}^T D_{12})^{-1} B_2^T P + C_1^T C_1 = 0$$

และ

$$QA^T + AQ - QC_2^T(D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2 Q + B_1 B_1^T = 0$$

ตามลำดับแล้วหา F และ H จาก

$$F = -(D_{12}^T D_{12})^{-1} B_2^T P \quad \text{และ} \quad H = -QC_2^T(D_{21} D_{21}^T)^{-1}$$

โดยอาศัยฟังก์ชัน 'lqr' ที่มีอยู่ใน โปรแกรม Matlab เป็นตัวหา เมทริกซ์ F และ H ดังกล่าว แล้วสร้างตัวควบคุมจาก

$$A_c = A_{s1} + B_{s1}F + HC_{s1}, \quad B_c = H, \quad C_c = -F$$

ในตัวอย่างนี้ ให้เมทริกซ์

$$C_{1s1} = C_{1s2} = \begin{bmatrix} 0.0100 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0100 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0100 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{1s3} = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0100 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0100 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

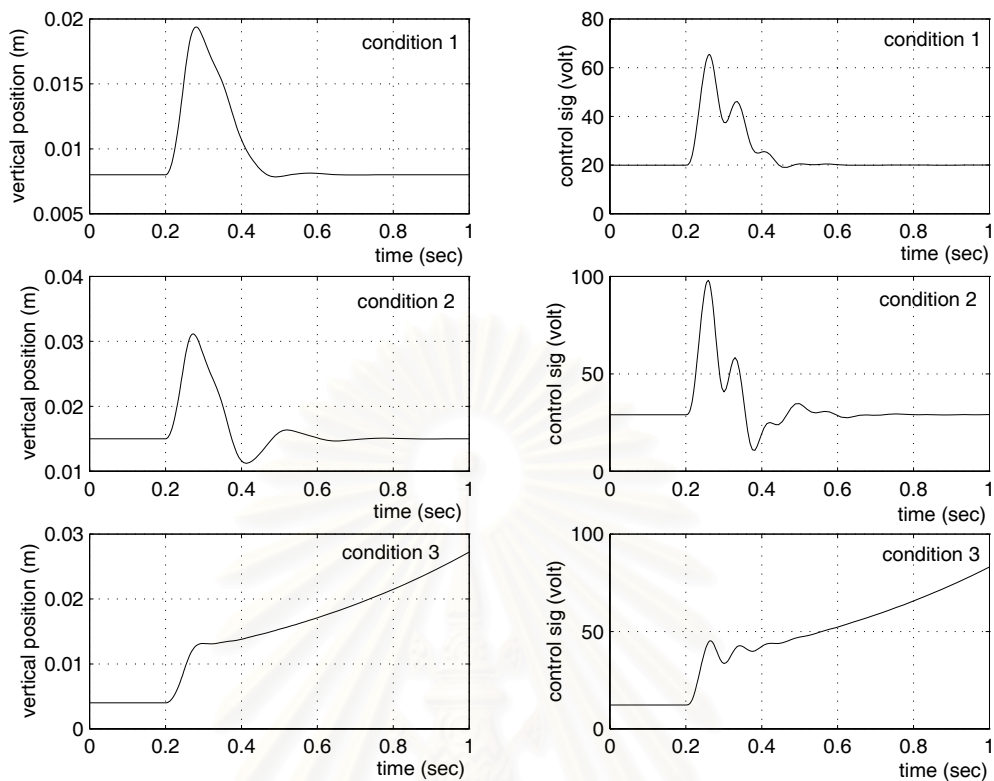
$$D_{12s1} = D_{12s2} = 0.001, \quad D_{12s2} = 0.0001$$

จากค่าเมทริกซ์เหล่านี้ ได้ เมทริกซ์ F และ H ที่ทำให้เกิดตัวควบคุม

$$C_1(s) = \frac{1.0573 \times 10^6 (s^2 + 59.71s + 1887)}{(s + 72.73)(s^2 + 34.46s + 9171)}$$

และให้ตัวผลตอบของระบบวงปิดต่อแรงกระทำภายนอก ตามรูปที่ 5.19 ซึ่งทำให้ที่สภาวะที่ 3 ขาดเสถียรภาพ

การออกแบบตัวควบคุมเพื่อทั้ง 3 สภาวะครั้งที่ 1 ในกรณีปัญหานี้ โดยใช้เมทริกซ์ C_{1si} และ D_{12si} เป็นค่าเดียวกัน กับการออกแบบสำหรับสภาวะที่ 1 เพียงอย่างเดียว



รูปที่ 5.19: ผลตอบแบบจำลองระบบ EMS โดยใช้ตัวควบคุมที่ออกแบบมาเพื่อสภาวะที่ 1 อย่างเดียว

- การออกแบบตัวควบคุมร่วมครั้งที่ 1 ด้วยวิธีที่เสนอ: ในคราวนี้สามารถหาตัวควบคุมได้ดังนี้

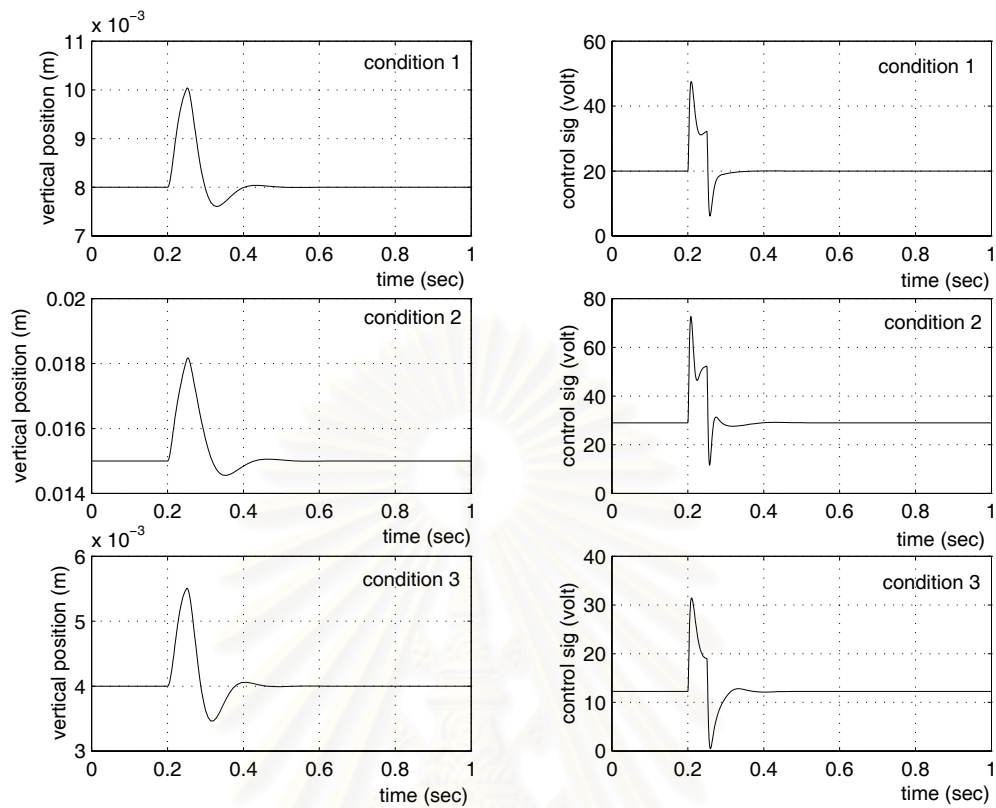
$$C(s) = \frac{1.9740 \times 10^9 (s^2 + 49.15s + 1608)}{(s + 401.1)(s^2 + 1765s + 1.218 \times 10^6)}$$

ทำให้ระบบขั้ววงปิดของแต่ละสถานะเป็นตามตาราง 5.15

และให้ผลตอบของระบบวงปิดเนื่องจากแรงกระทำภายนอก ตามรูปที่ 5.20

	สภาวะที่ 1	สภาวะที่ 2	สภาวะที่ 3
ขั้ววงปิด	-111.7854	-18.7347 ± 28.3983i	-41.3723
ของแต่ละ	-201.8070	-160.6483 ± 118.8562i	-267.4103
สภาวะ	-22.4672 ± 30.1053i	-160.6483 ± 118.8562i	-25.3549 ± 37.3481i
	-914.4873 ± 664.7378i		-908.6993 ± 664.1846i

ตารางที่ 5.15: ตำแหน่งขั้วระบบวงปิดแต่ละสภาวะของระบบ EMS ในตัวอย่างที่ 3 ของการออกแบบครั้งที่ 1 ด้วยวิธีที่เสนอ



รูปที่ 5.20: ผลตอบแบบจำลองระบบ EMS โดยใช้วิธีที่เสนอ ในการออกแบบครั้งที่ 1 เพื่อหาตัวควบคุมสำหรับทั้งสามสถานะ

- การออกแบบตัวควบคุมร่วมครั้งที่ 1 ด้วยวิธี CDA : เพื่อเปรียบเทียบกันวิธีที่เสนอ ทำการหาตัวควบคุมจากวิธี CDA ได้ตัวควบคุมดังนี้

$$C(s) = \frac{4.4254 \times 10^6 (s^2 + 62.11s + 2549)}{(s + 152.6)(s^2 + 127.6s + 2.093 \times 10^4)}$$

ทำให้ระบบวงปิดของแต่ละสถานะเป็นตามตารางที่ 5.16 และให้ผลตอบของระบบวงปิดเนื่องจากแรงกระทำภายนอก ตามรูปที่ 5.22

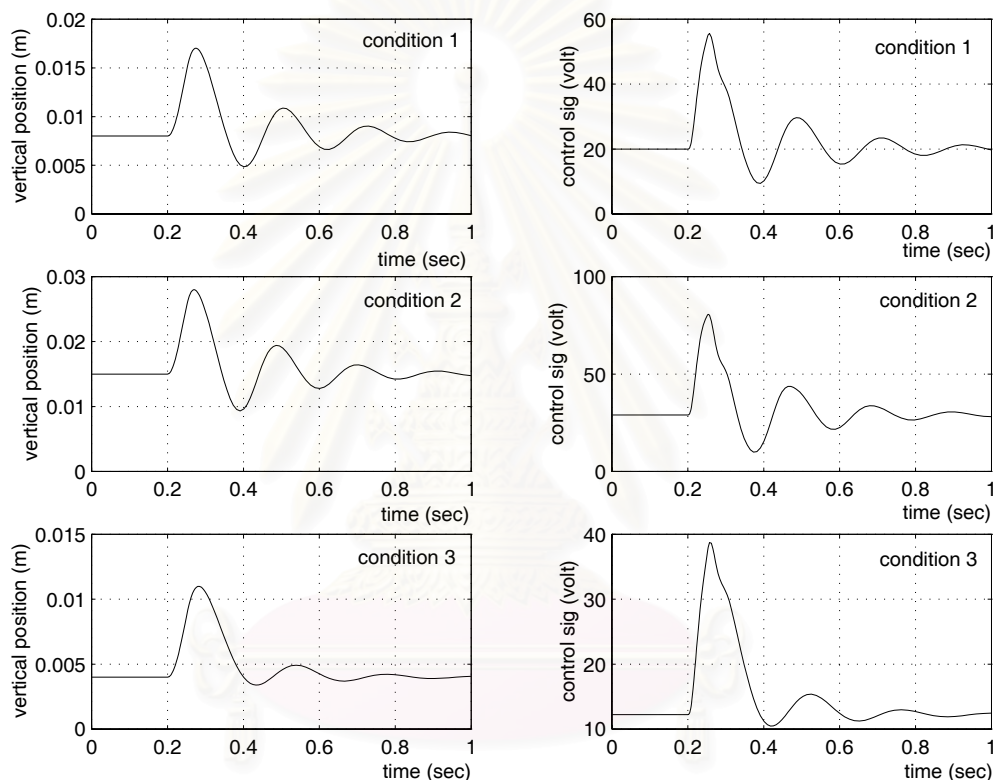
การออกแบบตัวควบคุมเพื่อทั้ง 3 สถานะครั้งที่ 2 ในการออกแบบครั้งนี้ ทดลองลดสัญญาณควบคุมของสถานะที่ 3 ให้มีขนาดลดลง อีกทั้งบีบให้เปลี่ยนแปลงในแนวตั้งทั้งสามน้อยลงด้วย กล่าวคือ ให้ค่าเมทริกซ์ C_{1si} และ D_{12si} เป็นดังนี้

$$C_{1si} = \begin{bmatrix} 0.0100 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1000 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12si} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0010 \end{bmatrix}, \quad D_{21s1} = 0.0010$$

- การออกแบบตัวควบคุมร่วมครั้งที่ 2 ด้วยวิธีที่เสนอ : สำหรับในกรณีปัญหา นี้ ด้วยวิธีที่เสนอ ไม่สามารถหาตัวควบคุมให้ได้ร่วมได้ เพียงแต่สามารถหาเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะร่วมได้ แต่

	สภาวะที่ 1	สภาวะที่ 2	สภาวะที่ 3
ขั้ววงปิด	-36.8962	$-5.3124 \pm 30.3484i$	-13.9936
ของแต่ละ	-124.6389	$-60.5268 \pm 104.7928i$	-134.0409
สภาวะ	$-4.2905 \pm 29.2309i$	$-94.1354 \pm 31.7092i$	$-5.1594 \pm 26.9413i$
	$-65.6326 \pm 113.3178i$		$-66.2089 \pm 117.7111i$

ตารางที่ 5.16: ตำแหน่งขั้วระบบวงปิดแต่ละสภาวะของระบบ EMS ในตัวอย่างที่ 3 ของการออกแบบครั้งที่ 1 ด้วยวิธี CDA



รูปที่ 5.21: ผลตอบแบบจำลองระบบ EMS โดยใช้วิธี CDA ในการออกแบบครั้งที่ 1 เพื่อหาตัวควบคุมสำหรับทั้งสามสภาวะ

ว่าไม่สามารถหาเมทริกซ์สังเกตสถานะได้ไม่ว่าจะใช้ข้อมูลของสภาวะใด ในการสร้างตัวสังเกตสถานะ ดังนั้นจึงสรุปว่าวิธีที่เสนอนี้ไม่สามารถสร้างตัวควบคุมร่วมกันจากวิธีที่เสนอได้

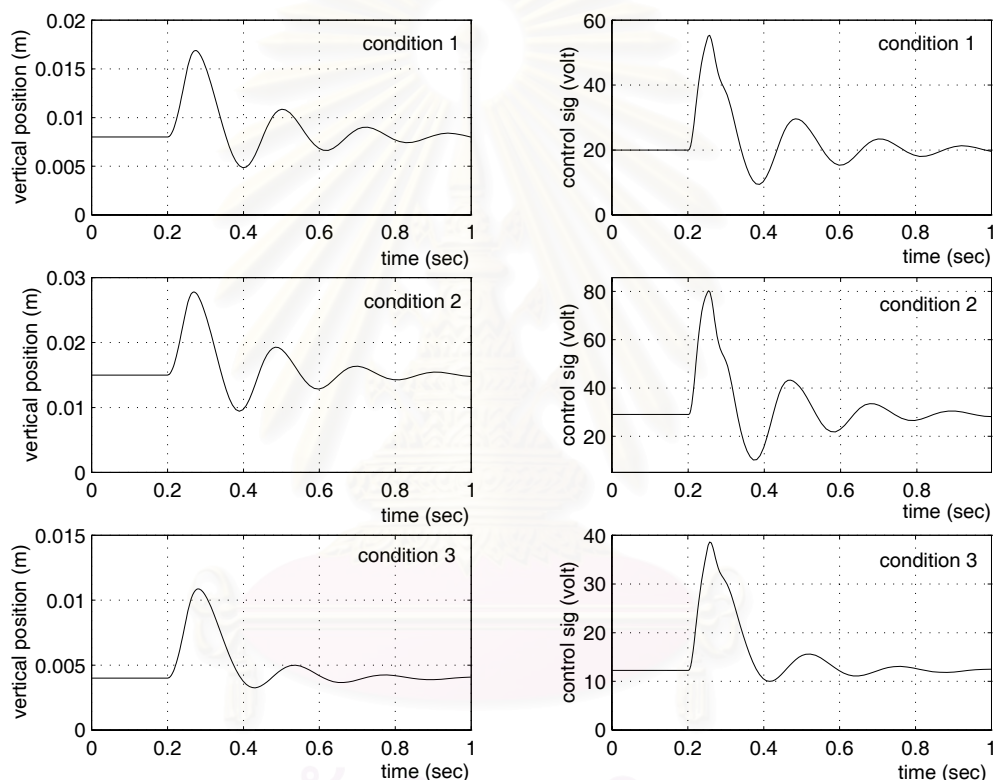
- การออกแบบตัวควบคุมร่วมครั้งที่ 2 ด้วยวิธี CDA โดยใช้เมทริกซ์ C_{1si} และ D_{12si} เดียวกันกับการทดลองที่ 1 เช่นกัน วิธีที่สองให้ตัวควบคุม

$$C(s) = \frac{4496467.0673(s^2 + 61.55s + 2543)}{(s + 155.3)(s^2 + 124.2s + 2.069 \times 10^4)}$$

ที่ทำให้ระบบวงปิดของแต่ละสภาวะ เป็นดังตารางที่ 5.17 และให้ผลตอบของระบบวงปิดเนื่องจากแรงกระทำภายนอก ตามรูปที่ 5.17

	สภาวะที่ 1	สภาวะที่ 2	สภาวะที่ 3
ขั้ววงปิด	-37.4096	$-5.3932 \pm 30.4359i$	-14.6250
ของแต่ละ	-128.2804	$-96.8190 \pm 29.4111i$	-137.2540
สภาวะ	$-4.3318 \pm 29.3890i$	$-57.4177 \pm 105.0667i$	$-5.0724 \pm 27.1083i$
	$-63.1691 \pm 113.0046i$		$-64.0288 \pm 117.3997i$

ตารางที่ 5.17: ตำแหน่งขั้วระบบวงปิดแต่ละสภาวะของระบบ EMS ในตัวอย่างที่ 3 ของการออกแบบครั้งที่ 1 ด้วยวิธี CDA



รูปที่ 5.22: ผลตอบแบบจำลองระบบ EMS โดยใช้วิธี CDA ในการออกแบบครั้งที่ 2 เพื่อหาตัวควบคุมสำหรับทั้งสามสภาวะ

สรุปตัวอย่างการออกแบบระบบ EMS

- เช่นเดียวกับกับตัวอย่างการออกแบบตัวควบคุมร่วมสำหรับมอเตอร์ ด้วยค่าเมทริกซ์ C_{1si} และ D_{21si} ค่าเดียวกัน วิธีที่เสนอจะให้ตัวควบคุมที่ให้ผลตอบที่ดีกว่า ตัวอย่างเช่นในการออกแบบครั้งที่ 2 โดยเปรียบเทียบรูปผลตอบรูปที่ 5.20 กับ 5.22 จะเห็นว่าแต่ละสภาวะการทำงาน ในรูปที่ 5.20 ซึ่งเป็นการควบคุมด้วยตัวควบคุมที่ได้จากวิธีที่เสนอ ผลกระทบของแรงรบกวนภายนอกที่มากกระทำต่อระบบวงปิด จะมีเวลาเข้าสู่ที่ดีกว่า การแกว่งแต่ละสภาวะน้อยกว่า และตำแหน่งแนวตั้งมีการเปลี่ยนแปลงน้อยกว่า แต่อย่างไรก็ตามขนาดสัญญาณควบคุมก็มีขนาดมากกว่า

2. เปรียบเทียบการออกแบบครั้งที่ 1 และ 2 ซึ่งเป็นการหาตัวควบคุมที่จากวิธี CDA สังเกตจากรูปที่ 29 และ 30 ว่า ในมีการเปลี่ยนตัวถ่วงนี้ ตัวควบคุมที่ได้ไม่ทำให้ผลตอบแตกต่างกันมากนัก และหากพิจารณาจากตัวควบคุมที่ได้ และตารางขั้ววงปิดของการออกแบบทั้งสองจะเห็นว่าตำแหน่งขั้วไม่แตกต่างกันมากนัก
3. หากเปรียบเทียบการออกแบบครั้งที่ 1 และ 2 ด้วยวิธีการหาตัวควบคุมที่หาจากวิธีที่เสนอนั้น ในการออกแบบครั้งแรก สามารถหาตัวควบคุมได้ แต่ในการออกแบบครั้งที่สอง เราให้สัญญาณควบคุมมีขนาดเล็กลง เสมือนเป็นการบีบเงื่อนไขใน อสมการเมทริกซ์ให้มากขึ้น ทำให้วิธีที่เสนอไม่สามารถหาคำตอบให้ได้

5.4 ตัวอย่างปัญหาการควบคุมแบบเชื่อถือได้

สำหรับตัวอย่างนี้เป็นตัวอย่างจาก [25] โดยใช้วิธี CDA ในการแก้ปัญหาการควบคุมแบบเชื่อถือได้ (reliable control) เราต้องการแสดงให้เห็นว่า วิธีที่เสนอนั้นสามารถนำมาแก้ปัญหาได้เช่นกัน ในตัวอย่างจะกำหนดระบบเชิงเส้นในสภาวะการทำงานปกติ เป็นระบบสองสัญญาณเข้า และสองสัญญาณออก หรือ เป็นระบบที่มีตัวขับเคลื่อน (actuator) สองตัว และตัวตรวจวัด (sensor) สองตัว โดยสมมุติว่ามีการผิดพลาดเกิดขึ้นที่ตัวขับเคลื่อน หรือตัวตรวจวัด ซึ่งแบ่งเป็น 5 สภาวะการทำงาน และใช้วิธีที่เสนอในการหาตัวควบคุมเพื่อรองรับกรณีที่จะเกิดขึ้นทั้ง 5 สภาวะ

ในกรณีระบบไม่มีการผิดพลาดระบบมีสมการสถานะบรรยาย ตามนี้

$$\dot{x} = Ax + B_{2si}u, \quad y = C_{2si}x$$

โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_{2p1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_{2p1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

เมื่อเกิดการผิดพลาดที่ตัวขับเคลื่อน เราได้ B_{2si} ดังนี้

$$B_{2p2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{2p3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

และเมื่อเกิดการผิดพลาดที่ตัวตรวจวัด เราได้ C_{2si} ดังนี้

$$C_{2p2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{2p3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เกิดสภาวะการทำงานต่าง ๆ ที่สนใจดังนี้

1. ที่สภาวะปกติ (A, B_{2p1}, C_{2p1})
2. เมื่อตัวขับเคลื่อนตัวที่ 1 ผิดพร้อม (A, B_{2p2}, C_{2p1})
3. เมื่อตัวขับเคลื่อนตัวที่ 2 ผิดพร้อม (A, B_{2p3}, C_{2p1})
4. เมื่อตัวตรวจวัดตัวที่ 1 ผิดพร้อม (A, B_{2p1}, C_{2p2})
5. เมื่อตัวตรวจวัดตัวที่ 2 ผิดพร้อม (A, B_{2p1}, C_{2p3})

ซึ่งรวมแล้วมีระบบเชิงเส้นทั้งหมด 5 ระบบที่ต้องการหาตัวควบคุมตัวเดียวที่ทำให้ระบบวงปิดยังคงใช้งานได้อยู่ ในที่นี้กำหนดให้

$$B_{1si} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{1si} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{12si} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{21si} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

สำหรับ $i = 1, 2, 3, 4, 5$ กล่าวคือ ชุดเมทริกซ์ดังกล่าวเท่ากันสำหรับทั้ง 5 ระบบเชิงเส้น

วิธีที่เสนอ โดยใช้วิธีที่เสนอ และใช้ข้อมูลที่สภาวะปกติในการหาเมทริกซ์สังเกตสถานะร่วม ได้ตัวควบคุมดังนี้

$$C(s) = \frac{1}{D_c} \begin{bmatrix} -6.95(s + 2.54)(s^2 + 2.71s + 10.75) & -4.37(s + 1.94)(s^2 + 2.8s + 8.0) \\ -8.85(s + 2.84)(s^2 + 2.91s + 11.51) & -5.82(s + 2.64)(s^2 + 3.21s + 11.52) \end{bmatrix}$$

$$\text{เมื่อ } D_c \triangleq (s + 7.525)(s + 3.715)(s^2 + 2.851s + 11.67)$$

ข้อของระบบวงปิดของแต่ละสภาวะการทำงานแสดงตามตารางที่ 5.18 ซึ่งแต่ละสภาวะตัวควบคุมที่ได้ทำให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพ ดังนั้นในกรณีตัวอย่างนี้ วิธีที่เสนอสามารถนำมาแก้ปัญหาการควบคุมแบบเชื่อถือได้

	สภาวะที่ 1	สภาวะที่ 2	สภาวะที่ 3	สภาวะที่ 4	สภาวะที่ 5
ช่วงปิด ของแต่ละ สภาวะ	-0.73	-0.13	-0.11	-0.07	-0.17
	-2.09	-2.29	-7.74	-2.65	-2.26
	-2.74	-3.45	$-1.17 \pm 3.01i$	-3.84	-3.01
	-7.64	-7.41	$-1.56 \pm 2.98i$	-7.01	-8.00
	$-1.27 \pm 2.60i$	$-1.60 \pm 3.11i$	$-2.86 \pm 0.11i$	$-1.18 \pm 2.48i$	$-1.42 \pm 3.18i$
	$-1.66 \pm 2.99i$	$-1.29 \pm 2.55i$		$-1.56 \pm 3.02i$	$-1.39 \pm 2.98i$

ตารางที่ 5.18: ตำแหน่งช่วงระบบวงปิดแต่ละสภาวะการทำงานต่าง ในตัวอย่างที่ 4 ด้วยตัวควบคุมที่ได้จากวิธีที่เสนอ

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 6

ข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

วิทยานิพนธ์นี้ได้เสนอวิธีการหาตัวควบคุมเต็มอันดับสำหรับควบคุมระบบหลายระบบ นอกจากนี้ ได้รวบรวมแนวความคิดและมุมมองของปัญหาการควบคุมระบบเชิงเส้นหลายระบบด้วยตัวควบคุมร่วมกัน วิธีที่เสนอแยกเป็นสองขั้นตอนได้แก่ ขั้นตอนการหาเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะร่วม และขั้นตอนการหาเมทริกซ์สังเกตสถานะร่วม แล้วจึงนำเมทริกซ์ทั้งสองมาสร้างตัวควบคุมแบบเต็มอันดับ ในแต่ละขั้นตอนผู้ทำวิทยานิพนธ์ได้ใส่เงื่อนไขสมรรถนะแบบ H_2 ลงไปด้วย เนื่องจากปัญหาการควบคุมระบบเชิงเส้นหลายระบบด้วยตัวควบคุมร่วมกันยังจัดว่าเป็นปัญหาเปิด วิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นจึงถูกนำมาใช้เป็นเครื่องมือในการหาคำตอบ

เราสามารถสังเกตได้ว่า ในขั้นตอนการหาเมทริกซ์สังเกตสถานะร่วมนั้น ต้องใช้ข้อมูลของระบบใดระบบหนึ่ง และเมื่อได้เมทริกซ์ดังกล่าวแล้ว ก็ต้องนำข้อมูลของระบบดังกล่าวไปสร้างตัวควบคุม ซึ่งทำให้เกิดความยุ่งยาก อีกวิธีหนึ่งที่ได้กล่าวถึงในวิทยานิพนธ์นี้ คือวิธี cross decomposition algorithm หรือ CDA เป็นวิธีที่เสนอโดย Geromel และคณะ [14] เพื่อแก้ปัญหาการควบคุมแบบเชื่อมต่อได้ ข้อเปรียบเทียบระหว่างสองวิธี และข้อเด่น ข้อด้อยของวิธีที่เสนอมีดังนี้

ลักษณะที่เหมือนกันของวิธีที่เสนอและวิธี CDA

1. ใช้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในการแก้ปัญหา
2. ตัวควบคุมที่ได้มีลักษณะเป็นตัวควบคุมแบบเต็มอันดับ
3. สมรรถนะที่พิจารณาเป็นสมรรถนะแบบ H_2
4. สามารถปรับสมรรถนะผลตอบของระบบวงปิดได้ด้วยการปรับเมทริกซ์ C_{1si} และ D_{12si}

ข้อแตกต่างระหว่างวิธีที่เสนอกับวิธี CDA

1. ลักษณะการหาตัวควบคุมที่ต่างกัน วิธี CDA หาเมทริกซ์ A_c , B_c , และ C_c โดยตรง แต่วิธีที่เสนอแยกหาเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะร่วม กับเมทริกซ์สังเกตสถานะร่วม แล้วจึงนำเมทริกซ์ทั้งสองและข้อมูลของระบบมาสร้างตัวควบคุม
2. วิธีที่เสนอมีความยุ่งยากกว่า เพราะต้องมีการเลือกระบบในขั้นตอนการหาเมทริกซ์สังเกตสถานะร่วม แต่อย่างไรก็ตามวิธีที่เสนอ ไม่ต้องทำการวนรอบ ซึ่งวิธี CDA ใช้การวนรอบในการหาคำตอบ
3. วิธีที่เสนอมีอย่างน้อย 1 ระบบที่มีคุณสมบัติ separation principle

ข้อเด่นของวิธีที่เสนอ

1. เนื่องจากวิธีที่เสนอได้ทำการแยกหาเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ และเมทริกซ์สังเกตสถานะ ทำให้ระบบหนึ่งระบบมีคุณสมบัติ separation principle ข้อเด่นนี้เมื่อนำมาพิจารณาเกี่ยวกับปัญหาการควบคุมแบบเชื่อมต่อได้ เราสามารถเลือกให้ระบบหลักในปัญหาดังกล่าว ให้มีคุณสมบัติ separation principle ได้
2. ไม่ต้องทำการวนรอบในการหาคำตอบ

ข้อด้อยของวิธีที่เสนอ

1. ในบางปัญหาวิธีที่เสนอไม่สามารถหาคำตอบให้ได้ ในขณะที่วิธี CDA สามารถหาคำตอบได้ในขั้นตอนที่ไม่สามารถหาคำตอบให้ได้สำหรับวิธีที่เสนอคือ ขั้นตอนหาเมทริกซ์สังเกตสถานะร่วม ซึ่งเราได้วิเคราะห์สาเหตุดังนี้ ในขั้นตอนดังกล่าวต้องใช้เมทริกซ์ป้อนกับสถานะร่วมที่หามาก่อน และระบบที่เลือกมา เพื่อหาเมทริกซ์สังเกตสถานะร่วม ซึ่งอาจจะไม่มีเมทริกซ์สังเกตสถานะร่วมใดที่สอดคล้องกับเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะร่วมที่ได้หามาก่อน และระบบที่เลือกมา ทำให้ขั้นตอนดังกล่าวไม่สามารถหาคำตอบให้ได้
2. ต้องมีการเลือกระบบที่จะนำมาใช้ในขั้นตอนหาเมทริกซ์สังเกตสถานะร่วม ในกรณีที่เราไม่มีระบบหลัก

ข้อเสนอแนะในงานวิจัยต่อไป

1. ปรับปรุงวิธีที่เสนอ ให้มีการปรับเงื่อนไขในขั้นตอนหาเมทริกซ์สังเกตสถานะร่วม เมื่อเกิดกรณีที่ขั้นตอนหาเมทริกซ์สังเกตสถานะร่วมไม่มีคำตอบ โดยหวังว่ามีการปรับเงื่อนไขในขั้นตอนหาเมทริกซ์สังเกตสถานะร่วม ขั้นตอนหาเมทริกซ์สังเกตสถานะร่วมจะได้มีคำตอบ
2. เปลี่ยน หรือเพิ่มเติมการพิจารณาสมรรถนะชนิดอื่น ๆ

รายการอ้างอิง

1. Saeks, R and Murray J. Fractional representations, algebraic geometry and the simultaneous stabilization problem. IEEE Trans. Aut. Control AC-27 (August 1982): 895–903.
2. Vidyasagar, M. Algebraic design techniques for reliable stabilization. IEEE Trans. Aut. Control AC-27 (October 1982): 1085–1095.
3. Looze, D. P. A dual optimization procedure for linear quadratic robust control problems. Automatica (1983): 299–302.
4. Kreisselmeier, F. and Steinhauser, R. Application of vector performance optimization to a robust control loop design for a fighter aircraft. Int. J. Control. (1983): 251–284.
5. Vidyasagar, M. Control System Synthesis: Factorization Approach. Cambridge, Ma: M.I.T. Press, 1985.
6. Minto, K. D. and Vidyasagar, M. A state-space approach to simultaneous stabilization. Control Theory Advanced Tech. vol. 2 (1986): 39-64.
7. Vidyasagar, M. Some results on simultaneous stabilization with multiple domains of stability. Automatica (July 1987): 535–540.
8. Vidyasagar, M. A state-space interpretation of simultaneous stabilization. IEEE Trans. Autt. Control (May 1988): 506–508.
9. Ghosh, B. K. An approach to simultaneous system design, II: non-switching gain and dynamic feedback compensation by algebraic geometric methods. SIAM J. Control and Optimization (July 1988): 919–963.
10. Chow, J. H. Pole-placement design approach for systems with multiple operating conditions. IEEE Trans. Aut. Control (March 1990): 278–288.
11. Toker, O. On the order of simultaneously stabilizing controllers. IEEE Trans. Aut. Control (March 1996): 430–433.
12. Luke, R. A.; Dorato, P. and Abdallah, C. T. Linear-quadratic simultaneous performance design. Proc. American Control Conference (June 1997): 3602–3605.
13. Cao, Y.Y.; Sun, Y.X. and Lam, J. Simultaneous stabilization via static output feedback and state feedback. IEEE Trans. Aut. Control (June 1999): 1277–1282.

รายการอ้างอิง (ต่อ)

14. Geromel, J. C.; Bernussou, J. and de Oliveira, M. C. H_2 -Norm optimization with constrained dynamic output feedback controllers: decentralized and reliable control. IEEE Trans. Aut. Control (July 1999): 1449–1454.
15. Iwasaki, T. A unified matrix inequality approach to linear control design Ph.D. dissertation, Purdue Univ., West Lafayette, IN, (December 1993).
16. Nett, C. N.; Jacobsen, C. A. and Balas, M. J. A connection between state-space and doubly coprime factorizations. IEEE Trans. Aut. Control (September 1984): 831–832.
17. Kailath, T. Linear Systems Prentice Hall, 1980.
18. Green, M. and Limebeer, D. J. Linear robust control Prentice Hall, 1995.
19. Gahinet P.; Nemirovskii, A.; Laub, A.J. and Chilali, M. LMI Control Toolbox The MathWorks Inc. 1995.
20. Tanaka, H. and Sugie, T. New characterization of fixed-order controller based on LMI. Int. J. Control. (1999): .58–74.
21. Boyd, S. P.; Ghaoui, L. El.; Feron, E. and Balakrishnan, V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM, Philadelphia, 1994.
22. Ghaoui, L. E. and Niculescu, S. E. Advance in Linear Matrix Inequality Methods in Control. SIAM, Philadelphia, 2000.
23. Belanger, F. R. Control Engineering Saunders College, 1995.
24. SungJun, J. and Seo, H. Design and analysis of the nonlinear feedback linearizing control for an electromagnetic suspension system. IEEE Trans. Aut. Control (January 1997): 135–144.
25. de Oliveira, M. C.; Farias D.P. and Geromel J.C. LMI solver; A Tutorial <http://www.dt.fee.unicamp.br/carvalho/software.html> (May 1997)



ภาคผนวก

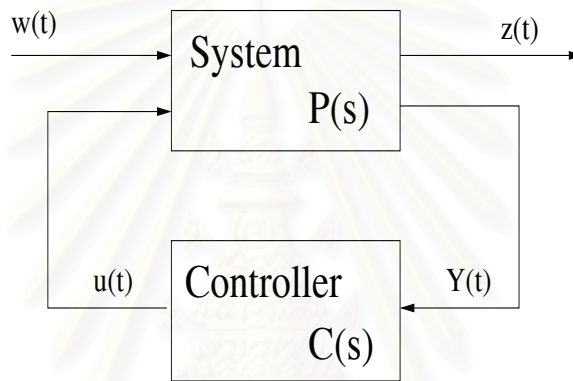
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาคผนวก ก

ระบบ เสถียรภาพและ สมรรถนะ

ก.1 ระบบที่พิจารณา

ในวิทยานิพนธ์นี้ เราจะพิจารณาระบบที่อยู่ในรูปแบบทั่วไป ในลักษณะดังรูปที่ ก.1



รูปที่ ก.1: ระบบป้อนกลับ

โดยที่ $P(s)$ คือระบบที่จะทำการควบคุม เป็นระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา และมีมิติจำกัด (linear time-invariant and finite-dimensional system) บรรยายได้ด้วยสมการสถานะ

$$P(s) : \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (ก.1)$$

$C(s)$ คือตัวควบคุมที่ต้องการออกแบบ เป็นตัวควบคุมเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา และมีมิติจำกัด (linear time-invariant and finite-dimensional controller) เช่นกัน บรรยายได้ด้วยสมการสถานะ

$$C(s) : \begin{bmatrix} u \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x_c \end{bmatrix} \quad (ก.2)$$

เพื่อความสะดวก เรานิยามชุดเมทริกซ์ใน (ก.2) ด้วยตัวแปร

$$\mathbb{K} \triangleq \begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix}$$

และนิยามสัญลักษณ์ $\mathbb{H}(P(s), C(s))$ แทนระบบที่มีลักษณะการป้อนกลับแบบรูปที่ ก.1 ส่วนตัวแปรต่างๆ ในสมการ (ก.1) และ (ก.2) มีความหมายดังนี้ $x \in \mathbb{R}^{n_p}$ เป็นตัวแปรสถานะของระบบ $P(s)$,

$z \in \mathcal{R}^{n_z}$ เป็นสัญญาณที่จะควบคุม (controlled output), $y \in \mathcal{R}^{n_y}$ เป็นสัญญาณออกที่วัดได้ (measured output) ของระบบ $P(s)$, $w \in \mathcal{R}^{n_w}$ เป็นสัญญาณรบกวนภายนอก (external disturbances), $u \in \mathcal{R}^{n_u}$ เป็นสัญญาณควบคุม (controlling input), $x_c \in \mathcal{R}^{n_c}$ เป็นตัวแปรสถานะของตัวควบคุม $C(s)$ เราเรียกเมทริกซ์ A ใน (ก.1) ว่าเมทริกซ์ลักษณะสมบัติของระบบ และชุดเมทริกซ์ (A, B_2, C_2, D_{22}) ว่าข้อมูลของระบบ $P(s)$

โดยไม่สูญเสียความทั่วไป เราสามารถพิจารณาระบบที่มี D_{22} แทนด้วยระบบที่ไม่มี D_{22} ได้ เพราะ ระบบที่มี D_{22} หรือมีสัญญาณออกเป็น $y = C_2x + D_{12}w + D_{22}u$ สามารถแทนด้วยปัญหาที่มีสัญญาณออก $\tilde{y} = C_2x + D_{12}w$ แล้วออกแบบตัวควบคุม $u = \tilde{\mathbb{K}}\tilde{y}$ หรือ $u = \mathbb{K}(y - D_{22}u)$ ซึ่งสมมูลกับ $u = (I + \mathbb{K}D_{22})^{-1}\mathbb{K}y$ ดังนั้นปัญหาที่มี D_{22} ก็จะสามารถแทนได้ด้วยปัญหาที่ไม่มี D_{22} ภายใต้เงื่อนไข $I + \mathbb{K}D_{22}$ หาผกผันได้

ก.2 เสถียรภาพ

ในวิชานี้เสถียรภาพ (Stability) เราหมายถึงเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ (asymptotically stability) สำหรับระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (\text{ก.3})$$

เสถียรภาพเชิงเส้นกำกับมีนิยามดังนี้

นิยาม 2 [15] ระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา (ก.3) มีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ ถ้า

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

สำหรับทุก ๆ ค่าเริ่มต้น $x(0)$ □

ซึ่งหมายความว่าค่าเฉพาะ (eigenvalue) ทุกตัวของเมทริกซ์ A ใน (ก.3) มีส่วนจริงน้อยกว่าศูนย์ เราเรียกเมทริกซ์จัตุรัสที่มีคุณสมบัติดังกล่าวว่า เมทริกซ์เสถียร (stable matrix) นอกจากนี้ปัญหาเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับยังวิเคราะห์ได้จาก ทฤษฎีเสถียรภาพของเลียปูนอฟ (Lyapunov's stability theory) ดังนี้

บทตั้ง 3 [15] พิจารณาระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา (ก.3) ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

- ระบบมีเสถียรภาพเชิงเส้นกำกับ
- มีเมทริกซ์สมมาตร $Y = Y^T$ ที่สอดคล้องกับ

$$Y > 0, \quad YA + A^TY < 0$$

เรียกว่าอสมการเลียปูนอฟ (Lyapunov inequality) □

บทพิสูจน์ หาได้จากเอกสารอ้างอิงใน [15] และหนังสือการควบคุมสมัยใหม่ทั่วไป □
 ดังนั้นในการวิเคราะห์ เสถียรภาพเชิงเส้นกำกับของระบบเชิงเส้นใดๆ เราสามารถใช้สมการเลียปูนอฟวิเคราะห์แทนได้ และเรียก เมทริกซ์ Y ว่าเมทริกซ์เลียปูนอฟ (Lyapunov matrix) ซึ่งนำไปใช้ในเลียปูนอฟฟังก์ชัน, $V(x(t)) = x^T(t)Yx(t)$, เพื่อพิสูจน์เสถียรภาพของระบบ (ก.3)

ก.3 สมรรถนะ

สมรรถนะ (Performance) ที่จะพิจารณาในวิทยานิพนธ์นี้เป็นสมรรถนะ H_2 ซึ่งมีความหมายและนิยามจากระบบเชิงเส้น

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ d(t) \end{bmatrix} \quad (\text{ก.4})$$

โดยที่ $\xi \in \mathcal{R}^{n_\xi}, e \in \mathcal{R}^{n_e}, d \in \mathcal{R}^{n_d}$ เมทริกซ์ A, B, C เป็นเมทริกซ์ค่าคงตัว และเมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์เสถียร สมรรถนะแบบ H_2 ของระบบ (ก.4) หรือแทนด้วยสัญลักษณ์ $\|T_{ed}\|_2$ เมื่อ T_{ed} แทนฟังก์ชันถ่ายโอนจากสัญญาณ $d(t)$ ไปยัง $e(t)$ นิยามดังต่อไปนี้

นิยาม 3 [15] เรานิยามสมรรถนะกำลังสองเชิงเส้น (Linear Quadratic Performance; LQ performance) จากพลังงานของสัญญาณ $e(t)$

$$J_{\delta_2}(d_0) \triangleq \int_0^\infty \|e(t)\|^2 dt \quad (\text{ก.5})$$

ที่มีผลจากการใส่สัญญาณเข้าแบบอิมพัลส์ (impulsive input), $d(t) = d_0\delta(t)$ โดยที่ค่าเริ่มต้นของตัวแปรสถานะเป็นศูนย์ และ $\delta(t)$ เป็นเดลต้าฟังก์ชัน (delta function) □

ในนิยามนี้ สัญลักษณ์ $\|\cdot\|$ ที่ใช้คือ

$$\begin{aligned} \|e(t)\|^2 &= e^T(t)e(t) \\ &= \xi^T(t)C^T C \xi(t) \end{aligned} \quad (\text{ก.6})$$

นิยาม 4 [15] สมรรถนะแบบ H_2 เป็นค่าเฉลี่ยของสมรรถนะกำลังสองเชิงเส้น

$$J_{\sigma_2\text{ave}} \triangleq \sum_{i=1}^{n_d} J_{\delta_2}(d_i) \quad (\text{ก.7})$$

เมื่อ d_i เป็นในเวกเตอร์ซึ่งมีค่าเป็น 1 ในสมาชิกตัวที่ i นอกนั้นเป็น 0 □

กล่าวคือสมรรถนะ H_2 เป็นค่าเฉลี่ยพลังงานของสัญญาณ $e(t)$ เมื่อใส่สัญญาณเข้าเป็นแบบอิมพัลส์ นอกจากนี้สมรรถนะ H_2 ยังหาได้จาก [15]

$$J_{\sigma_2\text{ave}} = \text{trace}(CPC^T) = \text{trace}(B^TQB) = \|T_{ed}\|_2^2$$

โดยที่มีเมทริกซ์สมมาตร $P > 0$ และ $Q > 0$ ที่สอดคล้องกับสมการ

$$AP + PA^T + BB^T = 0 \quad (\text{ก.8})$$

และ

$$QA + A^TQ + C^TC = 0 \quad (\text{ก.9})$$

ตามลำดับ เรียกสมการ P ว่า controllability gramian matrix และเรียก Q ว่า observability gramian matrix และถ้ามีเมทริกซ์ \tilde{P} ที่สอดคล้องกับ

$$A\tilde{P} + \tilde{P}A^T + BB^T < 0 \quad (\text{ก.10})$$

จะให้

$$\|\tilde{T}_{ed}\|_2^2 = \text{trace}(C\tilde{P}C^T) > \text{trace}(CPC^T)$$

เสมอและในทำนองเดียวกัน ถ้ามีเมทริกซ์ \tilde{Q} ที่สอดคล้องกับ

$$\tilde{Q}A + A^T\tilde{Q} + C^TC < 0 \quad (\text{ก.11})$$

ก็จะให้

$$\|\tilde{T}_{ed}\|_2^2 = \text{trace}(B^T\tilde{Q}B) > \text{trace}(B^TB)$$

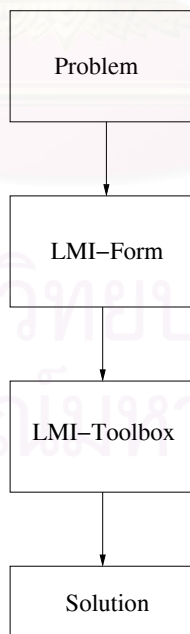
เสมอเช่นกัน ดังนั้นปัญหาสมรรถนะแบบ H_2 สำหรับระบบที่อยู่ในรูปแบบ (ก.4) สามารถแทนได้ด้วยปัญหา $\min \text{trace}(C\tilde{P}C^T)$ โดยมีสมการ (ก.10) เป็นเงื่อนไข หรือปัญหา $\min \text{trace}(B^T\tilde{Q}B)$ โดยมีสมการ (ก.11) เป็นเงื่อนไขได้เช่นเดียวกัน

ภาคผนวก ข

อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

หลายๆ ปัญหาทางด้านระบบควบคุม ยังเป็นปัญหาเปิด (open problem) กล่าวคือเราไม่สามารถหาผลเฉลยของปัญหาได้อย่างชัดเจน อาทิเช่น ปัญหาการป้อนกลับสัญญาณออกสถิตย์ (static output feedback), ปัญหาการควบคุมด้วยตัวควบคุมที่เสถียร (strong stabilization) หรือแม้แต่ปัญหาการควบคุมร่วมกันสำหรับหลายระบบ ก็จัดว่ายังคงเป็นปัญหาเปิดเช่นกัน แม้ว่าจะมีทฤษฎีที่ยืนยันถึงการมีตัวควบคุมร่วมกันแล้วก็ตาม แต่ตัวควบคุมตัวนั้น ยังไม่สามารถหาออกมาได้อย่างชัดเจนในรูปผลเฉลยปิด (closed form solution) ดังนั้นขั้นตอนการค้นหา (searching algorithm) จึงถูกนำมาใช้เพื่อหาคำตอบในปัญหาเหล่านั้น

อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น เป็นรูปแบบหนึ่งของการแก้ปัญหาที่มีลักษณะปัญหาเป็นคอนเว็กซ์ (convex) ซึ่งสามารถแก้ได้ด้วยคอนเว็กซ์โปรแกรมมิ่ง (convex programming) ทั่วไป ปัญหาที่เป็นคอนเว็กซ์นี้มีข้อดีตรงที่ ให้คำตอบที่เป็นคำตอบวงกว้าง (global solution) เราจึงนำมาใช้เป็นเครื่องมือในการหาคำตอบให้กับปัญหาการร่วมกันสำหรับหลายระบบ โดยที่เราจัดปัญหาที่พิจารณาให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น แล้วใช้คอนเว็กซ์โปรแกรมมิ่งหาคำตอบให้กับปัญหาเรา ดูรูปที่ ข.1



รูปที่ ข.1: ขั้นตอนการแก้ปัญหาใช้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

ข.1 รูปแบบอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

ในการแก้ปัญหาโดยใช้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น มีหลักแนวความคิดคือ การออปติไมซ์ (optimization) ปัญหาที่มีฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (objective function) เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น และมีชุดของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเป็นเงื่อนไข (constraints) ถ้าสมมติให้ $\phi \in \mathcal{R}^m$ เป็นตัวแปรที่เราต้องการจะหา เราเขียนปัญหาในรูปแบบอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นดังนี้

$$\min c^T \phi \quad \text{s.t.} \quad F(\phi) > 0 \quad (\text{ข.1})$$

โดยที่ $c \in \mathcal{R}^m$, $F(\phi)$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรที่มีลักษณะเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นในตัวแปร ϕ และคำย่อ ‘s.t.’ มาจาก ‘subject to’ นอกจากนี้ $F(\phi)$ สามารถเขียนแยกได้เป็น

$$F(\phi) = F_0 + \sum_{i=1}^m \phi_i F_i > 0 \quad (\text{ข.2})$$

โดยที่เมทริกซ์ F_i เป็นเมทริกซ์สมมาตรที่กำหนดมาให้ อย่างไรก็ตามโดยทั่วไปแล้ว $F(\phi) > 0$ ใน (ข.2) สามารถเขียนแยกได้เป็น

$$\begin{bmatrix} Q(\phi) & S(\phi) \\ S^T(\phi) & R(\phi) \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{ข.3})$$

โดยที่ $Q(\phi) = Q^T(\phi)$, $R(\phi) = R^T(\phi)$, และ $S(\phi)$ เป็นเมทริกซ์ฟังก์ชันเชิงเส้นในตัวแปร ϕ จาก Schur complement (ข.3) สมมูลกับ

$$Q(\phi) > 0 \quad \text{และ} \quad R(\phi) - S^T(\phi)Q^{-1}(\phi)S(\phi) > 0 \quad (\text{ข.4})$$

$$R(\phi) > 0 \quad \text{และ} \quad Q(\phi) - S(\phi)R^{-1}(\phi)S^T(\phi) > 0 \quad (\text{ข.5})$$

ถ้าปัญหาที่เราพิจารณาอยู่ในรูปอสมการทั้งสอง เราก็สามารถอาศัยการสมมูลกัน ทำให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (ข.3) เพื่อนำไปใช้ในวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้

ลักษณะของปัญหาทางอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นที่พบในปัญหาทางระบบควบคุม สามารถแยกได้ดังนี้ [19]

1. ปัญหาที่ต้องการทราบเพียงว่าเงื่อนไขที่กำหนดมีคำตอบหรือไม่ (feasibility problem) เป็นการหาเพียง ϕ ที่ทำให้

$$F(\phi) < 0$$

2. ปัญหาการหาค่าต่ำสุดสำหรับฟังก์ชันเชิงเส้นที่กำหนดไว้ (minimization problem) อยู่ในลักษณะ

$$\min c^T \phi \quad \text{s.t.} \quad F(\phi) < 0$$

3. ปัญหาหาค่าเจาะจงต่ำสุดทั่วไป (generalized eigenvalue minimization problem) มีรูปแบบดังนี้

$$\min \lambda \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} A(\phi) < \lambda B(\phi) \\ B(\phi) > 0 \\ C(\phi) < 0 \end{cases}$$

ใน LMI-Toolbox ของ Matlab [19] มีฟังก์ชันเพื่อแก้ปัญหาทั้งสามลักษณะข้างต้น ดังนั้นเราพยายามจัดปัญหาของเราให้มีรูปแบบในสามลักษณะปัญหาข้างต้น แล้วใช้ฟังก์ชันใน LMI-Toolbox ของ Matlab มาช่วยในการหาและวิเคราะห์คำตอบ

ข.2 แนวทางจัดปัญหาให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

ส่วนใหญ่ปัญหาทางระบบควบคุมไม่อยู่ในรูปของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นโดยตรง จึงต้องมีวิธีการแปลง หรือจัดรูปปัญหาเพื่อให้อยู่ในรูปแบบของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ตัวอย่างเช่นการหาเมทริกซ์ป้อนกลับสถานะ F ที่ทำให้ระบบ

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u = Fx$$

มีเมทริกซ์ $A + BF$ เป็นเมทริกซ์เสถียร ปัญหานี้สมมูลกับ มีเมทริกซ์สมมาตร $P > 0$ ที่สอดคล้องกับ

$$(A + BF)P + P(A + BF)^T < 0 \quad (\text{ข.6})$$

เราสามารถสังเกตได้ว่ามีทั้ง F และ P เป็นตัวแปรที่ทำให้ไม่เป็นเชิงเส้น วิธีทำให้ปัญหาข้างต้นเป็นเชิงเส้นมีอยู่ 2 วิธี [20] ดังนี้

1. วิธีกำจัดตัวแปร (eliminated variable type) โดยนิยามเมทริกซ์ตั้งฉาก B^\perp เป็นเมทริกซ์ที่มีค่าลำดับเท่ากับจำนวนแถว (full row rank matrix) ที่ทำให้ $B^\perp B = 0$ เรานำเมทริกซ์ตั้งฉากนี้คูณทางซ้ายและขวาของ (ข.6) จะได้

$$P > 0, \quad B^\perp (AP + PA^T) B^{\perp T} < 0 \quad (\text{ข.7})$$

โดยทฤษฎีบทของ Finsler [15], [21] สามารถบอกได้ว่ามี F ที่ทำให้เมทริกซ์ $A + BF$ เป็นเมทริกซ์เสถียร ถ้าสามารถหา $P > 0$ ที่สอดคล้องกับ (ข.7) ได้ ผู้ที่สนใจสามารถหารายละเอียดจาก [15], [21] เป็นต้น

2. วิธีเปลี่ยนตัวแปร (change of variable type) จากตัวอย่างปัญหา (ข.6) นอกจากจะใช้วิธีการแยกตัวแปรออกแล้ว ยังมีวิธีการเปลี่ยนตัวแปร โดยนิยามตัวแปรใหม่ $M = FP$ แล้วแก้ปัญหาดังต่อไปนี้

$$P > 0, \quad (AP + BM) + (AP + BM)^T < 0 \quad (\text{ข.8})$$

ถ้ามี $P > 0$ และ M ที่สอดคล้องกับ (ข.8) ก็จะสามารถหา $F = MP^{-1}$ รายละเอียดวิธีนี้หาได้จากใน [20], [21] เป็นต้น

ในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้การจัดรูปปัญหาให้อยู่ในรูปอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น โดยใช้วิธีการเปลี่ยนตัวแปร เพราะง่ายต่อความเข้าใจ และมีขั้นตอนที่น้อยกว่า เช่นในตัวอย่างข้างต้น ถ้าเราใช้วิธีการกำจัดตัวแปร เราต้องหา P จาก (ข.7) ก่อน เมื่อได้ P แล้ว วิธีหนึ่งที่จะหา F คือแทน

P ใน (ข.6) ซึ่งจะเป็นสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในตัวแปร F ซึ่งต้องแก้สมการเมทริกซ์อีกครั้งหนึ่งเพื่อหา F แต่หากใช้วิธีการเปลี่ยนตัวแปร เราสามารถแก้หา P และ M ได้ในขั้นตอนเดียว เพราะตัวแปรทั้งสองไม่ได้ทำให้ความเป็นเชิงเส้นของปัญหาหายไป เมื่อได้ทั้ง P และ M แล้วจึงหา F จาก $F = MP^{-1}$ แต่อย่างไรก็ตามวิธีการเปลี่ยนตัวแปรนี้ทำให้ตัวแปรที่เราจะต้องแก้ในสมการเมทริกซ์เชิงเส้นมากขึ้น



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประวัติผู้เขียน

นายวฤต ศิลป์ศรีกุล เกิดเมื่อวันที่ 22 สิงหาคม พ.ศ. 2519 กรุงเทพมหานครเป็นบุตรของนายประดิษฐ์ ศิลป์ศรีกุล และนางรีนจิตต์ ศิลป์ศรีกุล สำเร็จการศึกษาปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า จากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2539 และศึกษาต่อในหลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สังกัดห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุม เมื่อ พ.ศ. 2540 ระหว่างทำงานวิจัยได้รับทุนสนับสนุนจากโครงการศิษย์ก้นกุฏิ ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย