การประดิษฐ์และการประเมินเอลิเมนต์เมทริกซ์รูปแบบปิดของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสี่จุดต่อสำหรับปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อน

นางสาวเบญจาภา ยนต์สกุล

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2560

DERIVATION AND EVALUATION OF CLOSED-FORM FOUR-NODE QUADRILATERAL ELEMENT MATRIX FOR THERMAL STRESS PROBLEM

Miss Benjapa Yontsakul

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering Program in Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2017

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การประดิษฐ์และการประเมินเอลิเมนต์เมทริกซ์รูปแบบปิดของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสี่จุดต่อสำหรับปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อน

โดย นางสาวเบญจาภา ยนต์สกุล

สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. นิพนธ์ วรรณโสภาคย์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

....คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(รองศาสตราจารย์ ดร. สุพจน์ เตชวรสินสกุล)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

....ประธานกรรมการ

(ศาสตราจารย์ ดร. ปราโมทย์ เดชะอำไพ)

....อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. นิพนธ์ วรรณโสภาคย์)

....กรรมการ

(ดร. สรัล ศาลากิจ)

....กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(ดร. ชัชธานนท์ โพธิคุณ)

เบญจาภา ยนต์สกุล : การประดิษฐ์และการประเมินเอลิเมนต์เมทริกซ์รูปแบบปิดของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสี่จุดต่อสำหรับปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อน (DERIVATION AND EVALUATION OF CLOSED-FORM FOUR-NODE QUADRILATERAL ELEMENT MATRIX FOR THERMAL STRESS PROBLEM) อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: ผศ. ดร.นิพนธ์ วรรณโสภาคย์, หน้า.

การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ สี่จุดต่อในอดีตนั้นมีความยุ่งยากมากเนื่องจากไม่สามารถหาสมการรูปแบบปิดของการอินทิเกรตได้เหมือนกับในกรณีของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามจุดต่อ ดังนั้นเทคนิคการอินทิเกรตเชิงตัวเลขจึงถูกนำมาใช้เพื่อหาผลของการอินทิเกรตโดยประมาณ และเทคนิคที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายมากที่สุดวิธีหนึ่งก็คือวิธีของเกาส์-เลอจองด์ ผลลัพธ์ที่ได้แม้จะเป็นผลเฉลยโดยประมาณแต่ก็สามารถเพิ่มความถูกต้องให้มากขึ้นได้ด้วยการเพิ่มจำนวนจุดเกาส์ในการอินทิเกรต แต่อย่างไรก็ดีการเพิ่มจำนวนจุดเกาส์ทำให้ใช้เวลาในการคำนวณเพิ่มขึ้นอย่างมากด้วยเช่นกัน ในวิทยานิพนธ์นี้จึงนำเสนอวิธีการหาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์รูปแบบปิดของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ สี่จุดต่อสำหรับปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อน โดยการใช้โปรแกรมคณิตศาสตร์สัญลักษณ์หรือก็คือโปรแกรมแมทมาทิกา (Mathematica) ร่วมกับการจัดรูปสมการด้วยตนเอง ผลการประดิษฐ์สมการรูปแบบปิดนั้นสามารถจัดรูปออกมาได้สี่กลุ่มตามรูปร่างของเอลิเมนต์ซึ่งการจัดกลุ่มนี้ทำให้การคำนวณมีประสิทธิภาพเพิ่มมากขึ้น โดยผลลัพธ์ของเอลิเมนต์เมทริกซ์รูปแบบปิดที่ประดิษฐ์ขึ้นมานี้สามารถนำไปใช้ในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง จากนั้นคอมพิวเตอร์โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นถูกนำไปตรวจสอบความถูกต้องและเวลาที่ใช้ในการคำนวณกับปัญหาทดสอบเอลิเมนต์เดี่ยว และปัญหาที่มีและไม่มีผลเฉลยแม่นตรง ตามลำดับ ผลการคำนวณพบว่าวิธีรูปแบบปิดให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูงเทียบได้กับการอินเทรทด้วยวิธีเกาส์-เลอจองด์ที่ใช้จำนวนจุดเกาส์ 8x8 จุด ยิ่งไปกว่านั้นวิธีการที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้ยังใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีเกาส์-เลอจองด์ด้วย

ภาควิชา	วิศวกรรมเครื่องกล	ลายมือชื่อนิสิต	....
สาขาวิชา	วิศวกรรมเครื่องกล	ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาหลัก	....
ปีการศึกษา	2560		

5970235921 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING

KEYWORDS: CLOSED FORM EXPRESSION / FOUR-NODE QUADRILATERAL ELEMENT / THERMAL STRESS / FINITE ELEMENT / SYMBOLIC ALGEBRA PROGRAM

BENJAPA YONTSAKUL: DERIVATION AND EVALUATION OF CLOSED-FORM FOUR-NODE QUADRILATERAL ELEMENT MATRIX FOR THERMAL STRESS PROBLEM. ADVISOR: ASSOC. PROF. NIPHON WANSOPHARK, Ph.D., pp.

In the past, the derivation of finite element equation using quadrilateral element is very difficult because there is no closed-form solution as triangular element. Therefore, the widely used numerical integration, Gauss-Legendre method, is applied to obtain the approximated numerical result. The accuracy of the numerical integration can be improved by increasing the number of Gauss's point but also increase the computational time. In this research, the closed-form four-node quadrilateral element matrices for thermal stress problem are derived by using the symbolic algebra software, Mathematica, along with hand manipulation. The proposed closed-form expression can be classified into four cases based on the element's shape to increase the performance of the computational process. The finite element matrices are also presented in detail and can be used to create the computer program directly. The accuracy and computational time of the derived closed-form expression are evaluated by the single element test problem and the problems with and without exact solution for heat transfer and thermal stress problems, respectively. The computational results show that the derived closed-form expression can provide the high solution accuracy comparing up to 8x8 Gauss's point. Moreover, the presented method also spends less CPU time comparing with the conventional method.

Department:	Mechanical Engineering	Student's Signature	....
Field of Study:	Mechanical Engineering	Advisor's Signature	....
Academic Year:	2017		

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นิพนธ์ วรรณโสภาคย์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์เป็นอย่างสูงที่เป็นผู้มอบความรู้ คำแนะนำต่าง ๆ ให้คำปรึกษาในทุก ๆ เรื่อง และสนับสนุนผลักดันให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร. ปราโมทย์ เดชะอำไพ ประธานกรรมการ ที่กรุณาประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ซึ่งเป็นพื้นฐานของการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ทั้งยังกรุณาให้คำแนะนำที่มีประโยชน์ และให้กำลังใจมาโดยตลอด

ขอขอบพระคุณอาจารย์ ดร. สรัลศาลากิจและอาจารย์ ดร. ชัชธานนท์ โพธิคุณ กรรมการ ที่ได้ให้คำแนะนำ ข้อคิดเห็นซึ่งเป็นประโยชน์และทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์มากขึ้น

ท้ายที่สุดนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา และครอบครัวยนต์สกุล ที่สนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัย คอยดูแล ส่งเสริมและเป็นกำลังใจตลอดระยะเวลาที่ทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ อนึ่ง ประโยชน์และคุณค่าอันใดที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์นี้ ขอมอบเป็นกตัญญุตาบูชาแด่บิดามารดา ครูอาจารย์ และมีผู้มีพระคุณทุกท่าน

สารบัญ

หน้า

หน้า

หน้า

สารบัญตาราง

สารบัญรูปภาพ

คำอธิบายตัวย่อ

$[\hat{B}]$	เมทริกซ์แสดงค่าความชันของอุณหภูมิ (temperature gradient interpolation matrix)
$[B]$	เมทริกซ์แสดงค่าความชันของการเคลื่อนที่ (displacement gradient interpolation matrix)
$[C]$	เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของความแข็งเกร็ง
E	ค่ามอดูลัสของยังส์ (Young’s Modulus)
$\{F_L\}$	เวกเตอร์โหลดตั้งฉากที่พื้นที่ผิว (surface traction vector)
$\{F_T\}$	เวกเตอร์โหลดเนื่องจากความร้อน
h	สัมประสิทธิ์การพาความร้อน
$\hat{i}$	เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง x
$\hat{j}$	เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง y
J	เมทริกซ์จาโคเบียน
k	สัมประสิทธิ์การนำความร้อนของวัสดุ
$[K]$	เมทริกซ์แข็งเกร็ง (stiffness matrix)
$[K_C]$	เมทริกซ์การนำความร้อน
$[K_h]$	เมทริกซ์การพาความร้อน
l	ระยะห่างระหว่างจุดต่อ 2 จุด
L	ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์
N	ฟังก์ชันประมาณภายใน (interpolation function)
NG	จำนวนจุดเกาส์
NN	จำนวนจุดต่อ
p	ความดัน
q	อัตราการถ่ายเทความร้อน
Q	อัตราความร้อนที่ผลิตขึ้นเอง
$\{Q_C\}$	เวกเตอร์เกรเดียนต์การนำความร้อน
$\{Q_h\}$	เวกเตอร์ของอุณหภูมิบรรยากาศที่ส่งผลต่อการพาความร้อน
$\{Q_q\}$	เวกเตอร์ของฟลักซ์ความร้อนที่ผิว
$\{Q_Q\}$	เวกเตอร์ของความร้อนที่ผลิตเองได้

R	เศษตกค้าง (residual)
t	ความหนาของแผ่น
T	อุณหภูมิ
T_0	อุณหภูมิตั้งต้นของวัสดุที่ยังไม่มีความเค้น
T_S	อุณหภูมิที่ผิว
T_∞	อุณหภูมิบรรยากาศ
u	การเคลื่อนที่ในทิศทางแนวแกน x
v	การเคลื่อนที่ในทิศทางแนวแกน y
W	ฟังก์ชันน้ำหนัก , น้ำหนัก
α	สัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากความร้อนของวัสดุ (thermal expansion coefficient)
$\varepsilon_x,\ \varepsilon_y$	ความเครียดในทิศทางแนวแกน x และ y
ε_T	ความเครียดที่เกิดจากจากความร้อน
γ_{xy}	ความเครียดเฉือนบนระนาบ xy
$\sigma_x,\ \sigma_y$	ความเค้นตั้งฉากแกน x และ y
τ_{xy}	ความเค้นเฉือนบนระนาบ xy
υ	อัตราส่วนของปัวส์ซง (Poisson ratio)
Γ	ขอบเขตของเอลิเมนต์
Ω	โดเมนของเอลิเมนต์
$[\partial]$	เมทริกซ์การดำเนินการเชิงอนุพันธ์

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของวิทยานิพนธ์

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) เป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ถูกนำมาใช้อย่างแพร่หลาย โดยเฉพาะอย่างยิ่งในการแก้ไขปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์เพราะสามารถแก้ปัญหาที่มีความซับซ้อนและนำมาซึ่งผลเฉลยที่มีความถูกต้องแม่นยำได้ หากพิจารณาปัญหาทางวิศวกรรมโดยทั่วไปแล้ว พบว่าล้วนมีพื้นฐานมาจากปรากฏการณ์ทางธรรมชาติที่สามารถอธิบายได้ด้วยกฎทางฟิสิกส์ และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์และความสัมพันธ์ต่าง ๆ ได้ แต่ปัญหาทางวิศวกรรมนั้นจะประกอบไปด้วยเงื่อนไขและรูปร่างที่ซับซ้อนมากขึ้น จึงทำให้การหาผลเฉลยแม่นตรงเป็นเรื่องที่ยุ่งยาก ใช้เวลามาก หรือในบางกรณีก็ไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ได้ ดังนั้นระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมตน์จึงถูกนำมาใช้และมีบทบาทสำคัญสำหรับงานทางวิศวกรรมในปัจจุบันอย่างยิ่ง

หากพิจารณาปัญหาในสองมิติแล้ว เรานิยมแบ่งโดเมน (domain) ด้วยเอลิเมนต์ 2 รูปแบบ คือ เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม และเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยม เอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมมักจะถูกเลือกนำมาใช้เนื่องจากฟังก์ชันประมาณ (interpolation function) ภายในเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมจะให้การกระจายตัวแบบเชิงเส้นคู่ (bilinear) ที่จะมีลักษณะเป็นผิวโค้ง ในขณะที่ฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมจะให้การกระจายตัวเชิงเส้นแบบแผ่นเรียบ จึงทำให้เอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมให้ผลลัพธ์ที่มีความแย่นยำมากกว่าเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม แต่หากพิจารณาถึงประเด็นการนำไปใช้ จะพบว่าเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมมีสมการรูปแบบปิด ในขณะที่เอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ สมการไฟไนต์เอลิเมนต์มีความยุ่งยากซับซ้อนมากกว่า ดังนั้นโดยทั่วไปเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมจึงต้องอินทิเกรตด้วยการประมาณเชิงตัวเลข (numerical integration) หรือวิธีเกาส์-เลอจองด์ (Gauss-Legendre) ซึ่งเป็นที่ทราบกันว่าการประมาณเชิงตัวเลขนำมาซึ่งค่าความคาดเคลื่อน ซึ่งในที่นี้วิธีเกาส์-เลอจองด์สามารถลดค่าความคลาดเคลื่อนได้ โดยการเพิ่มจุดเกาส์ในการคำนวณ แต่อย่างไรก็ดีจำนวนจุดเกาส์ที่เพิ่มขึ้นส่งผลต่อเวลาที่คอมพิวเตอร์ใช้ในการคิดคำนวณ ดังนั้นควรพิจารณาทั้งความแม่นยำของผลลัพธ์และประสิทธิภาพในการคิดคำนวณเพื่อนำไปใช้ในการแก้ปัญหาเชิงปฏิบัติอย่างเหมาะสม

ในปัจจุบันโปรแกรมคอมพิวเตอร์เชิงสัญลักษณ์ถูกพัฒนาอย่างต่อเนื่อง พบว่ามีนักวิจัยหลายท่านได้นำประโยชน์จากความสามารถของโปรแกรมคอมพิวเตอร์เชิงสัญลักษณ์เข้ามาช่วยในการคำนวณระเบียบวิธีไฟ-ไนต์เอลิเมนต์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการพยายามคำนวณหาเอลิเมนต์เมทริกซ์

รูปแบบปิด โดยโปรแกรมคณิตศาสตร์เชิงสัญลักษณ์ที่นิยมใช้ได้แก่ ALTRAN, FORMAC, MACSYMA, REDUCE, SCRATCHPAD และSYMBAL เป็นต้น ความพยายามดังกล่าววิ่งออกไปเป็นสองแนวทาง แนวทางแรกพิจารณาวิเคราะห์ตามลักษณะรูปร่างหรือคุณสมบัติพิเศษของเอลิเมนต์ เช่น เพื่อใช้แก้ปัญญาบางประการที่ถูกลดทอนความซับซ้อนแล้ว เพื่อใช้แก้ปัญหาบนเอลิเมนต์รูปร่างลักษณะเฉพาะ หรือการประมาณตัวแปรบางตัว เป็นต้น แนวทางที่สองคือการพิจารณาจัดกลุ่ม หรือเลือกคุณสมบัติของความสมมาตรมาใช้ประโยชน์ในการสร้างเอลิเมนต์เมทริกซ์ [1]

อย่างไรก็ดี การหาสมการเอลิเมนต์รูปแบบปิดของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ ยังคงอยู่ในรูปสมการที่มีความซับซ้อนมาก ส่งผลต่อเวลาที่ใช้ในการคำนวณมากขึ้นไปด้วย ดังนั้นวิทยานิพนธ์นี้จึงมีความพยายามในการใช้โปรแกรมคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ เพื่อหาสมการรูปแบบปิดของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ สี่จุดต่อสำหรับแก้ปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อน พร้อมทั้งตรวจสอบความแม่นยำและเวลาที่ใช้ในการคำนวณเปรียบเทียบกับวิธีเกาส์-เลอจองด์

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1) ประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์รูปแบบปิดของเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ สี่จุดต่อ
2) ประยุกต์ใช้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์รูปแบบปิดของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ สี่จุดต่อกับปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อน

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

1) ศึกษาและประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์รูปแบบปิดของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ สี่จุดต่อ
2) ศึกษาพฤติกรรมของปัญหาของแข็งภายในสองมิติ โดยพิจารณาภายใต้โหลดภาระความร้อนที่สภาวะคงตัว
3) วิเคราะห์และเปรียบเทียบความแม่นยำของผลลัพธ์ระหว่างวิธีการคำนวณด้วยสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์รูปแบบปิด และวิธีการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์
4) เปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างวิธีการคำนวณด้วยสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์รูปแบบปิด และวิธีการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ โดยพิจารณาจากเวลาที่ใช้ในการคำนวณ

1.4 ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย

1) ศึกษาทฤษฎีพื้นฐานของการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์สองมิติรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ สี่จุดต่อและการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์

2) ศึกษาทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับปัญหาความร้อนเชิงเส้นภายใต้สถานะอยู่ตัว ปัญหาของแข็งโดยเฉพาะความเค้นและความเครียดบนแผ่นระนาบสองมิติ และปัญหาความสัมพันธ์ของความเค้นเนื่องจากปัญหาความร้อน

3) ประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหา

4) ใช้โปรแกรมคณิตศาสตร์สัญลักษณ์แมทมาทิกา (Mathematica) [2]เพื่อช่วยในการอินทิเกรตสัญลักษณ์และการจัดรูปสมการ

5) ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ด้วยแมทแลบ (Matlab) เพื่อใช้ในการคำนวณแก้ปัญหาความร้อน และปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อน ตามลำดับ

6) ทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมกับปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นตรง

7) ทดสอบความแม่นยำและประสิทธิภาพของวิธีการคำนวณหาเอลิเมนต์เมทริกซ์รูปแบบปิดเปรียบเทียบกับการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ โดยเลือกทดสอบกับปัญหาที่มีและไม่มีผลเฉลยแม่นตรง

8) วิเคราะห์ อภิปรายผลของการเปรียบเทียบความแม่นยำและประสิทธิภาพของวิธีการคำนวณหาเอลิเมนต์เมทริกซ์รูปแบบปิด เพื่อสรุปผลการวิจัยและทำรายงาน

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1) มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ สี่จุดต่อ เพื่อแก้ปัญหาความร้อนและปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อน

2) มีทักษะในการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ทั้งแมทแลบและแมทมาทิกาในส่วนของคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ เข้าใจขอบเขตและความสามารถของโปรแกรมคอมพิวเตอร์เหล่านั้น

3) สามารถประดิษฐ์โปรแกรมเพื่อนำไปแก้ปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อนใน 2 มิติอย่างมีประสิทธิภาพได้

บทที่ 2
เอกสารผลงานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวข้อง

เป็นที่ทราบกันดีว่าเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ จะให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำกว่าเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมที่มีจำนวนจุดต่อเท่ากัน แต่เนื่องจากการอินทิเกรตบนพื้นที่สี่เหลี่ยมใด ๆ มีความยุ่งยากซับซ้อน การอินทิเกรตเชิงตัวเลข (numerical integration) จึงยังคงเป็นที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลาย สำหรับวิธีการอินทิเกรตเชิงตัวเลขที่นิยมใช้ในปัจจุบันคือวิธีของเกาส์-เลอจองด์ (Gauss-Lengendre method) แต่อย่างไรก็ดี การอินทิเกรตเชิงตัวเลขเป็นการหาผลเฉลยโดยประมาณ การเพิ่มความแม่นยำในการคำนวณก็จำเป็นต้องใช้จุดในการอินทิเกรตเพิ่มมากขึ้น ซึ่งทำให้การประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น ทั้งยังเพิ่มเวลาในการคำนวณขึ้นเป็นอย่างมาก ดังนั้นแนวความคิดที่จะพยายามคำนวณหาเอลิเมนต์เมทริกซ์ด้วยการอินทิเกรตโดยตรงจึงเกิดขึ้น โดยหากพิจารณาผลงานวิจัยต่าง ๆ จะสามารถแบ่งรูปแบบงานวิจัยได้ 3 แนวคิด คือ 1. การคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ด้วยการอินทิเกรตเชิงวิเคราะห์ 2. เชิงกึ่งวิเคราะห์ และ 3. เชิงคำนวณ

2.1 การคำนวณหาเอลิเมนต์เมทริกซ์โดยการอินทิเกรตเชิงวิเคราะห์ (analytical method)

ในยุคแรกความพยายามในการหาสมการรูปแบบปิด นิยมใช้ความรู้ทฤษฎีเชิงคณิตศาสตร์ ในปี 1981 Okabe [3] ได้พิจารณาเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ สี่จุดต่อ และใช้หลักการของทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ (divergence theorem) เพื่อเปลี่ยนแปลงขอบเขตของการอินทิเกรตจากการอินทิเกรตบนพื้นที่เป็นการอินทิเกรตเชิงเส้น และจัดรูปสมการเอลิเมนต์เมทริกซ์ อ้างว่าสามารถลดความซับซ้อนของสมการและช่วยประหยัดเวลาในการคำนวณลงได้ แต่ไม่มีการทดลองนำไปใช้หรือแสดงผลการเปรียบเทียบกับปัญหาใด ๆ

หลังจากนั้น ในปี 1986 Mizukami [4] ได้พิจารณาเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านขนาน สี่จุดต่อสำหรับปัญหาการนำความร้อน และนำเสนอการจัดรูปสมการเชิงพีชคณิตของพิกัดจุดต่อ 3 สมการเพื่อลดความซับซ้อนของการสร้างอินทิแกรน (integrant) พบว่าการจัดรูปสมการเชิงพีชคณิต 3 สมการนี้ ช่วยทำให้การประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ทำได้ง่ายขึ้นและลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณ แต่ด้วยเงื่อนไขของเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความแม่นยำสูงสุดเทียบเท่ากับการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์เพียง 2×2 จุด นอกจากนั้นความผิดพลาดจะยิ่งเพิ่มขึ้นเมื่อรูปร่างของเอลิเมนต์บิดเบี้ยวไปจากสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ในปี 1987 Rathod [5] ได้เสนอแนวคิดการอินทิเกรตเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ สี่จุดต่อ ที่มีด้านประกอบด้านหนึ่งขนานกับแนวแกน x หรือแนวแกน y พบว่ารูปแบบเอลิเมนต์นี้ให้ผลลัพธ์ที่มี

ความแม่นยำค่อนข้างสูงหรือเทียบเท่ากับการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ ที่ 6×6 จุด แต่สมการที่ได้ยังมีความซับซ้อนมากและเนื่องจากมีข้อจำกัดเรื่องรูปร่างของเอลิเมนต์ จึงยังไม่สามารถนำไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาจริงได้

การอินทิเกรตเชิงวิเคราะห์ยังมีปัญหาในเรื่องข้อกำจัดของรูปร่างเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม จึงยังไม่สามารถนำมาใช้แก้ปัญหาจริงได้ และสมการที่คำนวณได้มีความซับซ้อน เข้าใจยาก ดังนั้นเมื่อนำไปประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ จึงทำให้เกิดความยุ่งยากและใช้เวลาในการคำนวณค่อนข้างมาก

2.2 การคำนวณหาเอลิเมนต์เมทริกซ์โดยการอินทิเกรตกึ่งวิเคราะห์ (semi-analytical method)

การคำนวณหาเอลิเมนต์เมทริกซ์ เริ่มมีการนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์คณิตศาสตร์สัญลักษณ์เข้ามาช่วย เพื่อหาสมการรูปแบบปิด โดยในปี 1994 Griffiths [6] เสนอการคำนวณหาเอลิเมนต์เมทริกซ์รูปแบบปิดจากการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ ที่ 2×2 จุด โดยใช้เทคนิคการจัดกลุ่มสมาชิกในเอลิเมนต์เมทริกซ์เป็น 6 กลุ่ม ซึ่งแต่ละกลุ่มถูกแบ่งตามองศาอิสระ (degree of freedom) และใช้โปรแกรม MAPLE เพื่อหาสมการรูปแบบปิด ทำให้การประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ง่ายขึ้น เทคนิคสำคัญคือการนำค่าตัวแปรใหม่แทนที่ในสมการเดิม สามารถลดเวลาการคำนวณจากวิธีดั้งเดิมได้ถึง 2-4 เท่า เนื่องจากวิธีนี้ลดความซับซ้อนและลดเวลาในการคำนวณ จึงได้รับความนิยมจนถึงปัจจุบัน จะเห็นได้จาก ปี 2006 Zhou และ Vecchio [7] ได้นำรูปแบบวิธีนี้มาลดรูปอย่างง่าย สำหรับปัญหาอีลาสติกเชิงเส้น (linear elastic) และปัญหาอีลาสติกไม่เชิงเส้น (non-linear elastic) พบว่าใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์แบบดั้งเดิม แต่ยังใช้เวลามากกว่าเมื่อเทียบกับสมการรูปแบบปิดที่เกิดจากการอินทิเกรตโดยตรงของสี่เหลี่ยมผืนผ้า Lozada *et al* [8] ได้นำแนวคิดของ Griffiths ปรับใช้กับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ แปดจุดต่อสำหรับปัญหาอีลาสติก ซึ่งสามารถลดเวลาในการคำนวณลง 37 เปอร์เซ็นต์เมื่อเทียบกับการอินทิเกรตเชิงตัวเลขของเกาส์-เลอจองด์ และต่อมาในปี 2010 Lozada *et al.* [9] พัฒนาสมการรูปแบบปิดเพื่อใช้กับสี่เหลี่ยมใด ๆ แปดจุดต่อสำหรับปัญหาอีลาสติกที่มีความสมมาตรรอบแกน ซึ่งอ้างว่าสามารถลดเวลาในการคำนวณลง 50 เปอร์เซ็นต์

แนวคิดนี้มีความโดดเด่นในเรื่องการลดเวลาการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ แต่อย่างไรก็ดีความแม่นยำสูงสุดของแนวคิดนี้มีค่าเท่ากับการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ ที่ 2×2 จุดเท่านั้น

2.3 การคำนวณหาเอลิเมนต์เมทริกซ์โดยการอินทิเกรตเชิงคำนวณ (computational method)

ในปี 1988 Kent L. Lawrence และ Rajiv V. Nambiar [10] พิจารณาโครงสร้างวัสดุท่อน (beam element) โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์คณิตศาสตร์สัญลักษณ์เพื่อหาสมการสัญลักษณ์ชัดแจ้ง (explicit symbolic expression) ของเมทริกซ์การแปลงค่า (element coordination transformation matrix) ได้ แม้ว่าจะการหาสมการดังกล่าวจะสามารถคิดคำนวณด้วยมือได้ แต่ก็เป็นการพิสูจน์ความสามารถของโปรแกรมที่ช่วยแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เชิงสัญลักษณ์ได้ ซึ่งในยุคนั้นปัญหาของเวลาที่ใช้ในการคำนวณยังไม่สามารถแก้ไขได้

ในปี 1989 Kikuchi [11] ได้พิจารณาเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ สี่จุดต่อ สำหรับปัญหาอีลาสติกและปัญหาอีลาสติก-พลาสติก โดยได้เริ่มใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์คณิตศาสตร์สัญลักษณ์เพื่ออินทิเกรตหาเอลิเมนต์เมทริกซ์โดยตรง โดยเลือกใช้โปรแกรม REDUCE วิธีนี้ให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูงและไม่ขึ้นกับรูปร่างของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม แต่สมการพีชคณิตที่ได้มีความซับซ้อนและมีขนาดใหญ่มาก ส่งผลให้ใช้เวลาในการคำนวณมากตามไปด้วย เมื่อเปรียบเทียบระหว่างการอินทิเกรตโดยตรงกับการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ พบว่ากรณีทั่วไปการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์จะใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าการอินทิเกรตโดยตรง แต่กรณีที่เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมอยู่ในรูปแบบที่ไม่เหมาะสม ผลลัพธ์จากการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์มีความคลาดเคลื่อนมาก ต้องเพิ่มจำนวนจุดเกาส์ถึง 10×10 จุดในการคำนวณเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำเทียบเท่ากับการอินทิเกรตโดยตรง จึงทำให้การอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองใช้เวลาในการคำนวณมากถึง 1.55 เท่าของวิธีการอินทิเกรตโดยตรง และกรณีแก้ปัญหาอิลาสติก-พลาสติกซึ่งเป็นปัญหาที่ซับซ้อนขึ้น การอินทิเกรตโดยตรงต้องใช้เวลาในการคำนวณมาก จึงยังไม่เหมาะสมที่จะนำมาใช้แก้แก้ปัญหาดังกล่าว

Yagawa, 1990 [12] ได้เสนอแนวทางการอินทิเกรตเชิงตัวเลขรูปแบบใหม่ ที่ได้รวมระเบียบวิธีเชิงตัวเลข วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และการใช้โปรแกรมคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ โดยเลือกใช้โปรแกรม MACSYMA ซึ่งปรากฏว่าสามารถลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณลงได้อย่างมาก เมื่อเทียบกับการอินทิเกรตเชิงตัวเลขโดยปกติ และเมื่อทดสอบกับการสร้างเอลิเมนต์เมทริกซ์ของสี่เหลี่ยมใด ๆ พบว่าให้ความแม่นยำเทียบเท่ากับการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่ 2×2 จุด และใช้เวลาในการคำนวณเพียง 14.5 เปอร์เซ็นของวิธีอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ที่ 2×2 จุด

Lee และ Hobbs 1998 [13] ได้เสนอแนวคิดของการหาสมการเอลิเมนต์รูปแบบปิดของไฮบริดเอลิเมนต์ ซึ่งประกอบไปด้วยเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ สี่จุดต่อ และ แปดจุดต่อโดยใช้

โปรแกรม MAPLE และ Mathematica แต่ไม่ได้ชี้แจงอย่างชัดเจนเกี่ยวกับการใช้โปรแกรมคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ในการหาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์รูปแบบปิด

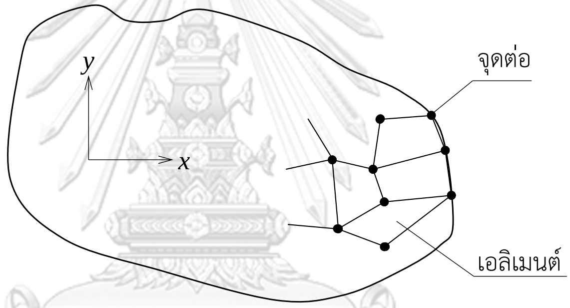
ในปี 2007 Videla et al. [14] ได้พิจารณาเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ แปดจุดต่อสำหรับปัญหาอีลาสติก และใช้โปรแกรม MAPLE เพื่ออินทิเกรตหาเอลิเมนต์เมทริกซ์ โดยมีการแบ่งกลุ่มสมาชิกในเอลิเมนต์เมทริกซ์เป็น 6 กลุ่ม แต่ละกลุ่มจะใช้รูปแบบอินทิแกรนเดียวกันในการอินทิเกรตที่เรียกว่า Characteristic basic equation อ้างว่าการอินทิเกรตต้องการหน่วยความจำคอมพิวเตอร์จำนวนมาก และสมการที่ได้มีขนาดใหญ่ และซับซ้อน แต่วิธีการอินทิเกรตโดยตรงให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูงซึ่งมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรงมาก จากนั้นจึงพยายามจัดรูปสมการและกำจัดพจน์ซ้ำบางพจน์ พบว่าสามารถลดเวลาในการคำนวณลงได้น้อยกว่าการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ถึง 50 เปอร์เซ็นต์

จนมาในปี 2013 Roque [15] ได้พิจารณาเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมมุมฉากสำหรับปัญหาการโก่งของแผ่น โดยเขียนโปรแกรม MATLAB 2 โปรแกรม คือโปรแกรมสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เชิงสัญลักษณ์ และโปรแกรมคำนวณสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อหาคำตอบ พบว่าสมการที่ได้จากโปรแกรมสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เชิงสัญลักษณ์มีขนาดใหญ่และซับซ้อน ทำให้เวลาที่ให้มากตามไปด้วย แม้ว่าเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขจะต้องเริ่มสร้างสมการใหม่ทุกครั้ง แต่ก็ทำให้ความสามารถในการแก้ปัญหากว้างขึ้น ไม่ถูกจำกัดด้วยรูปร่างเอลิเมนต์หรือเงื่อนไขขอบเขต

จากงานวิจัยในอดีตที่กล่าวข้างต้น จะแสดงให้เห็นว่า แม้ว่าการอินทิเกรตโดยตรงด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์สัญลักษณ์จะให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูง แต่ทว่าพบปัญหาตรงที่สมการพีชคณิตที่ได้จากการอินทิเกรตมักจะมีขนาดใหญ่และซับซ้อน หรือบางกรณีก็ใช้เวลาในการคำนวณค่อนข้างมาก เนื่องจากปัจจุบันความสามารถของโปรแกรมคอมพิวเตอร์สัญลักษณ์ได้พัฒนาขึ้นอย่างต่อเนื่อง จึงเห็นว่าแนวทางนี้ยังสามารถพัฒนาปรับปรุงเพื่อหาสมการรูปแบบปิดสำหรับการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ได้อย่างมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น เพื่อจะเป็นประโยชน์ต่อการนำไปใช้แก้ปัญหาทางวิศวกรรมต่อไป

บทที่ 3
ทฤษฎีพื้นฐานของไฟไนต์เอลิเมนต์

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นเทคนิควิเคราะห์เชิงตัวเลขที่นิยมนำมาใช้แก้ปัญหาทางวิศวกรรมที่โดยส่วนใหญ่จะมีรูปร่างของปัญหาที่ซับซ้อน เพื่อให้ได้มาซึ่งผลลัพธ์ที่สอดคล้องกับสมการอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตตั้งต้น วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะเริ่มจากการแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์ออกเป็นชิ้นเล็ก ๆ หรือที่เรียกว่า “เอลิเมนต์” เพื่อหาค่าประมาณของผลลัพธ์ โดยที่แต่ละเอลิเมนต์จะประกอบขึ้นจากการเชื่อมจุดต่อ (node) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่จะคำนวณหาค่าตัวแปรตาม (dependent variable) ที่ต้องการ ความแม่นยำของคำตอบจึงขึ้นอยู่กับขนาดและจำนวนของเอลิเมนต์ด้วย โดยยิ่งแบ่งเอลิเมนต์ให้มีความละเอียดมากขึ้น จะยิ่งเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์มากขึ้น [16]



รูปที่ 3.1 การแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ สี่จุดต่อ

3.1 ขั้นตอนทั่วไปในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

การวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ หลังจากแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ แล้ว (เอลิเมนต์แบบอย่างดังแสดงในรูปที่ 3.1) จะเริ่มประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของปัญหา กำหนดฟังก์ชันประมาณภายใน (interpolation function) ที่ใช้ภายในเอลิเมนต์ สำหรับเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ สี่จุดต่อจะอธิบายรายละเอียดในหัวข้อ 3.2 ซึ่งหากการกระจายตัวของฟังก์ชันประมาณภายในมีแนวโน้มความสัมพันธ์ไปในทิศทางเดียวกับการกระจายตัวของผลเฉลยแม่นตรง จะยิ่งทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความแม่นยำมากขึ้น จากนั้นจึงสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งในการศึกษานี้เลือกวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง โดยรายละเอียดของวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างได้อธิบายในหัวข้อ 3.3 เมื่อสามารถสร้างสมการของแต่ละเอลิเมนต์ได้แล้ว จึงรวมสมการของแต่ละเอลิเมนต์เข้าด้วยกันเป็นระบบสมการรวม กำหนดเงื่อนไขขอบเขตก่อนแก้ระบบสมการดังกล่าว เพื่อหาค่าของตัวแปรที่ต้องการต่อไป

3.2 ฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ สี่จุดต่อ

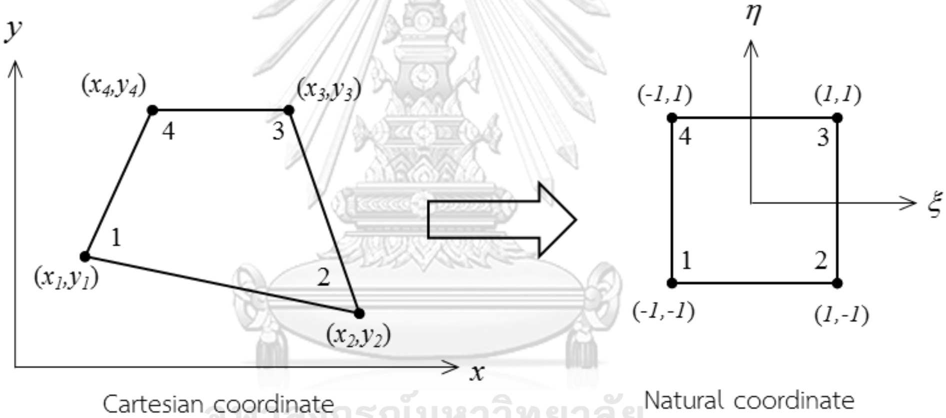
เอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ สี่จุดต่อเป็นหนึ่งในรูปร่างเอลิเมนต์ที่นิยมใช้ การสร้างฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยม เริ่มจากการกำหนดให้การกระจายตัวของตัวแปรที่ต้องการบนเอลิเมนต์มีลักษณะแบบเชิงเส้นคู่ (bilinear) ซึ่งสอดคล้องกับสมการ (3.1)

$$\phi(x,y)=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y+\alpha_4 xy \tag{3.1}$$

โดย ϕ คือ ตัวแปรที่พิจารณา

α คือ ค่าคงที่

เพื่อให้การกระจายตัวบนเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมสอดคล้องกับการกระจายตัวเชิงเส้นคู่ กล่าวคือตลอดทั้งแนวแกน x และแนวแกน y มีความสัมพันธ์เชิงเส้นตรง จะต้องแปลงระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinate system) x - y ไปสู่ระบบพิกัดฐานธรรมชาติ (natural coordinated system) ξ - η



รูปที่ 3.2 การแปลงระบบพิกัดจาก x - y สู่ ξ - η

รูปที่ 3.2 แสดงระบบพิกัดฐานธรรมชาติ ซึ่งถูกนิยามให้มีขอบเขตระยะหนึ่งหน่วยจากจุดกำเนิดทุกทิศทาง ดังนั้นเมื่อพิจารณาปัญหาใน 2 มิติจึงมีขอบเขตระหว่าง -1 ถึง 1 ทั้งแนวแกน ξ และ η ทำให้เกิดเป็นโดเมนสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 2×2 โดยที่ความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดคาร์ทีเซียน x - y และระบบพิกัดฐานธรรมชาติ ξ - η สามารถเขียนได้ดังสมการ (3.2) และ (3.3)

$$x=N_1x_1+N_2x_2+N_3x_3+N_4x_4 \tag{3.2}$$

$$y=N_1y_1+N_2y_2+N_3y_3+N_4y_4 \tag{3.3}$$

โดย N_i , i =1,2,3,4 เป็นฟังก์ชันสันฐาน (shape function) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ ξ - η ดังนี้

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \qquad N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$
$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \qquad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \tag{3.4}$$

หลังจากได้ฟังก์ชันสันฐานบนระบบพิกัดธรรมชาติแล้ว เนื่องพิจารณาเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ สี่จุดต่อแบบไอโซพาราเมทริกซ์เอลิเมนต์ (isoparametric element) การกระจายตัวของตัวแปรที่พิจารณาบนเอลิเมนต์จึงสามารถเขียนอยู่ในรูปของค่าตัวแปรที่จุดต่อ ได้ดังสมการ (3.5) โดยฟังก์ชันประมาณภายในใช้สมการเดียวกับฟังก์ชันสันฐาน

$$\phi(\xi,\eta) = N_1\phi_1 + N_2\phi_2 + N_3\phi_3 + N_4\phi_4 = \sum_{i=1}^{4} N_i\phi_i \tag{3.5}$$

โดย ϕ_i , i =1,2,3,4 เป็นค่าของตัวแปรที่จุดต่อ i

เมื่อได้ฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์ของตัวแปรที่พิจารณาแล้ว จึงเข้าสู่กระบวนการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไป

3.3 การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง

วิธีสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์มีหลายวิธี เช่น ระเบียบวิธีโดยตรง ระเบียบวิธีแปรผัน และระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง เป็นต้น ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weighted residuals method) ถูกเลือกนำมาใช้ในการศึกษานี้ เนื่องจากเป็นวิธีการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาได้โดยตรง ไม่จำเป็นต้องหาฟังก์ชันอื่น ๆ ที่สอดคล้องมาช่วยในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์

ขั้นตอนการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง เริ่มจากหาสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์ จัดรูปสมการเชิงอนุพันธ์ให้ข้างขวามีค่าเท่ากับ 0 หรือมาสามารถเขียนได้ในรูปสมการ (3.6)

$$L(\bar{\phi}) = 0 \tag{3.6}$$

โดย L คือตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์

$\bar{\phi}$ คือผลเฉลยแม่นตรง

จากนั้นกำหนดให้ผลเฉลยโดยประมาณมีลักษณะการกระจายตัวบนเอลิเมนต์ดังสมการ (3.5) และแทนค่าผลเฉลยโดยประมาณลงไปในสมการเชิงอนุพันธ์ตั้งต้น (3.6) การแทนค่าโดยประมาณนี้จะทำให้เกิดค่าความคลาดเคลื่อน ซึ่งถูกเรียกว่า “เศษตกค้าง” (residual) จะสามารถเขียนในรูปสมการได้ดังนี้

$$L(\phi) = L(\sum_{i=1}^{4} N_i \phi_i) = R \tag{3.7}$$

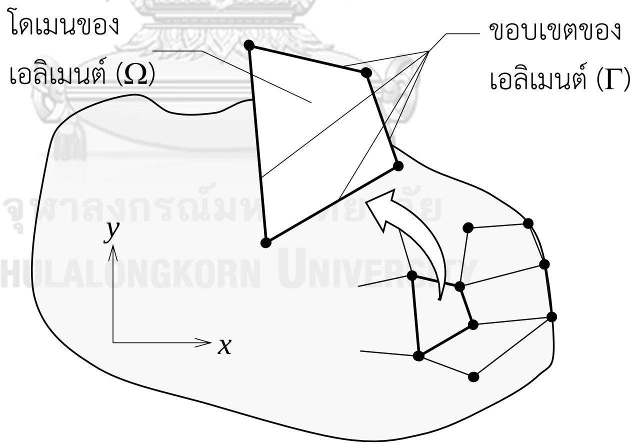
โดย R คือเศษตกค้างที่เกิดจากความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น หรือเศษตกค้าง

และพยายามลดเศษตกค้างที่เกิดขึ้นให้มีค่าเท่ากับศูนย์ ซึ่งจะหมายความว่าผลเฉลยโดยประมาณมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรง โดยหากพิจารณาวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างของกาเลอร์คืน (Galerkin) วิธีนี้จะนำฟังก์ชันน้ำหนัก (weighting function, W) คูณกับเศษตกค้าง จากนั้นอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมน แล้วกำหนดให้ผลลัพธ์ที่ได้มีค่าเท่ากับศูนย์ ซึ่งโดยปกติจะนิยมเลือกวิธีกาเลอร์คืนแบบบับโนฟ-กาเลอร์คิน (Bubnov-Galerkin) มาใช้ คือการกำหนดให้ฟังก์ชันน้ำหนักเท่ากับฟังก์ชันประมาณภายใน (W=N) ดังนั้นจะสามารถเขียนได้ดังสมการ (3.8)

$$\int_{\Omega} W_i R \, d\Omega = \int_{\Omega} N_i R \, d\Omega = 0 \qquad i = 1, 2, 3, 4 \tag{3.8}$$

เมื่อทำการอินทิเกรตสมการ (3.8) ทีละส่วน (integrate by part) จะได้พจน์จากการอินทิเกรต 2 พจน์ คือพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขต (Γ) และพจน์ที่เกี่ยวข้องกับโดเมน (Ω)

$$\int_{\Omega} N_i L(\sum_{i=1}^{4} N_i \phi_i) \, d\Omega = \int_{\Gamma} (N_i, \phi_i) \, d\Gamma + \int_{\Omega} (N_i, \phi_i) \, d\Omega = 0 \tag{3.9}$$



รูปที่ 3.3 ลักษณะรูปร่างการแบ่งปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์

นำเงื่อนไขขอบเขตประยุกต์กับพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตอย่างเหมาะสม ก็จะได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของเอลิเมนต์นั้น ๆ ทำเช่นนี้กับทุก ๆ เอลิเมนต์จนครบแล้วจึงรวมสมการแต่ละเอลิเมนต์ให้เป็นระบบสมการรวมของปัญหา และแก้ระบบสมการเพื่อหาค่าของตัวแปรที่สนใจที่แต่ละจุดต่อ

บทที่ 4
ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับปัญหาของความเค้นเนื่องจากความร้อน

ในบทนี้จะกล่าวถึงการนำระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อแก้ปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อน โดยจะเริ่มจากการพิจารณาการวิเคราะห์ปัญหาความร้อนหรือการกระจายตัวของอุณหภูมิก่อน เพื่อนำผลจากการกระจายตัวของอุณหภูมิที่แตกต่างกันในแต่ละจุดต่อไปใช้เพื่อวิเคราะห์ความเค้นเนื่องจากความร้อนในลำดับต่อไปได้ โดยในบทนี้จะอธิบายทฤษฎีพื้นฐานของการถ่ายเทความร้อน การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาความร้อน ทฤษฎีพื้นฐานของความเค้นในวัตถุ และการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อน ตามลำดับ

4.1 ทฤษฎีพื้นฐานของการถ่ายเทความร้อน

สำหรับปัญหาความร้อนที่จะพิจารณานี้ เป็นปัญหาความร้อนบนวัสดุแผ่นความหนา t พิจารณาเป็นปัญหาใน 2 มิติที่สภาวะคงตัว (steady state) ของวัสดุไอโซทรอปิก (isotropic material) ซึ่งจะมีคุณสมบัติของวัสดุเหมือนกันทุกทิศทาง ปัญหาดังกล่าวนี้สามารถอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ของกฎการอนุรักษ์พลังงานคือ

$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}\right)+Q=0 \tag{4.1}$$

โดย q_x, q_y คืออัตราการถ่ายเทความร้อนในทิศทางแนวแกน x และ y ตามลำดับ

Q คืออัตราความร้อนที่ผลิตขึ้นได้เอง

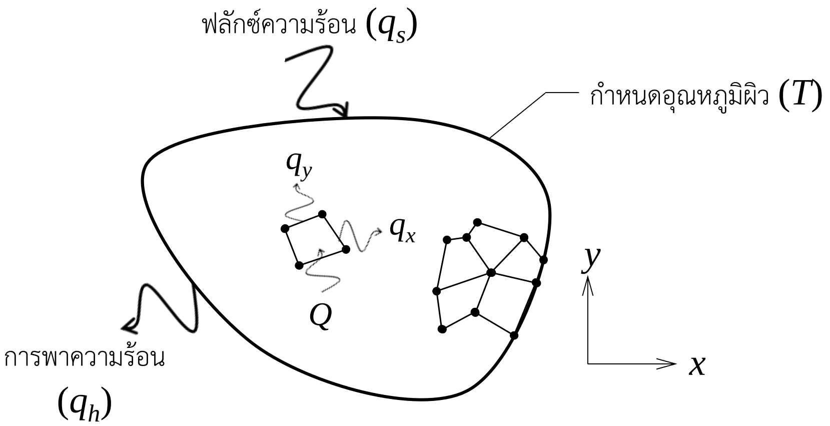
จากกฎของฟูเรียร์ (Fourier’s law) ซึ่งอธิบายว่าอัตราการถ่ายเทความร้อนที่เคลื่อนที่ในทิศทางใดทิศทางหนึ่ง จะมีค่าแปรผันตรงกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิในทิศทางนั้น ดังนั้นอัตราการถ่ายเทความร้อนในทิศทางแนวแกน x และ y สามารถเขียนได้ด้วยสมการ (4.2)

$$q_x=-k\frac{\partial T}{\partial x} \quad , \quad q_y=-k\frac{\partial T}{\partial y} \tag{4.2}$$

ดังนั้นเมื่อแทนความสัมพันธ์ (4.2) ลงในสมการที่ (4.1) จะสามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+Q=0 \tag{4.3}$$

โดย k คือสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของวัสดุ



รูปที่ 4.1 การถ่ายเทความร้อนโดยทั่วไป

รูปที่ 4.1 แสดงเงื่อนไขขอบเขตที่สามารถเกิดขึ้นได้ในปัญหาการถ่ายเทความร้อนโดยทั่วไป ซึ่งอาจประกอบไปด้วย การกำหนดอุณหภูมิคงที่ (T) หรือกำหนดอัตราความร้อนที่ผ่านเข้าออก (q_s) หรือกำหนดให้มีอัตราการพาความร้อนที่เกิดขึ้นที่ผิวใดผิวหนึ่ง (q_h) ซึ่งอัตราการพาความร้อนจะสอดคล้องกับสมการ (4.4)

$$q_h = h\left(T_S - T_\infty\right) \tag{4.4}$$

โดย h คือ สัมประสิทธิ์การพาความร้อน

T_S , T_∞ คือ อุณหภูมิที่ผิว และอุณหภูมิบรรยากาศตามลำดับ

4.2 การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาความร้อน

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ (4.3) และประยุกต์ใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างซึ่งรายละเอียดปรากฏในหัวข้อที่ 3.3 จะสามารถเขียนได้ในรูปสมการดังนี้

$$\int_\Omega N_i \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + Q \right) d\Omega = 0 \qquad i = 1,2,3,4 \tag{4.5}$$

จากนั้นอินทิเกรตสมการ (4.5) ทีละส่วน จะได้พจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขต (Γ) และพจน์ที่เกี่ยวข้องกับโดเมน (Ω) ดังแสดงในสมการ (4.6)

$$\int_\Gamma N_i \left(k\frac{\partial T}{\partial x} n_x + k\frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma - \int_\Omega \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} k\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} k\frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega + \int_\Omega \left(N_i Q \right) d\Omega = 0 \tag{4.6}$$

หากปัญหาที่พิจารณาประกอบด้วยเงื่อนไขขอบเขตที่มีการพาความร้อนและมีฟลักซ์ความร้อนผ่านบริเวณผิวของปัญหาแล้ว สมการ (4.6) จะสามารถเขียนเป็นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาทั่วไปของการถ่ายเทความร้อนได้ดังนี้

$$\int_{\Gamma} N_i \left(k\frac{\partial T}{\partial x} n_x + k\frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} k\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} k\frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} N_i\, h\left(T - T_{\infty}\right) d\Gamma$$
$$+\int_{\Omega} \left(N_i Q\right) d\Omega + \int_{\Gamma} \left(N_i q_s\right) d\Gamma = 0 \tag{4.7}$$

เพื่อให้สะดวกในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยม จึงเขียนสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\int_{\Gamma} \{N\} \left(k\frac{\partial T}{\partial x} n_x + k\frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\} k\frac{\partial T}{\partial x} + \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\} k\frac{\partial T}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} \{N\}\, h\, T\, d\Gamma$$
$$+\int_{\Gamma} \{N\}\, hT_{\infty}\, d\Gamma + \int_{\Omega} \{N\}\, Q\, d\Omega + \int_{\Gamma} \{N\}\, q_s\, d\Gamma = 0 \tag{4.8}$$

โดยในแต่ละเอลิเมนต์ จะกำหนดลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิบนเอลิเมนต์ดังสมการ (4.9) และสามารถหาค่าอนุพันธ์ของอุณหภูมิเทียบกับ x และ y ได้ดังสมการ (4.10)

$$T \;=\; \sum_{i=1}^{4} N_i T_i \;=\; \lfloor N \rfloor \{T\} \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor \{T\} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor \{T\} \tag{4.10}$$

จากสมการ (4.8) จะสามารถจัดรูปใหม่ดังสมการ (4.11)

$$\underbrace{\int_{\Omega} k \left(\left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\} \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor + \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\} \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor \right) d\Omega}_{[K_C]} \{T\} + \underbrace{\int_{\Gamma} h \{N\} \lfloor N \rfloor d\Gamma}_{[K_h]} \{T\} =$$
$$\underbrace{\int_{\Gamma} \{N\} \left(k\frac{\partial T}{\partial x} n_x + k\frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) d\Gamma}_{\{Q_C\}} + \underbrace{\int_{\Omega} Q \{N\} d\Omega}_{\{Q_Q\}} + \underbrace{\int_{\Gamma} q_S \{N\} d\Gamma}_{\{Q_q\}} + \underbrace{\int_{\Gamma} hT_{\infty} \{N\} d\Gamma}_{\{Q_h\}} \tag{4.11}$$

$$\left(\left[K_C\right] + \left[K_h\right]\right)\{T\} = \{Q_C\} + \left\{Q_Q\right\} + \left\{Q_q\right\} + \{Q_h\} \tag{4.12}$$

โดย $\left[K_C\right]$ คือเมทริกซ์การนำความร้อน

$\left[K_h\right]$ คือเมทริกซ์การพาความร้อน

$\left\{Q_C\right\}$ คือเวกเตอร์เกรเดียนต์การนำความร้อน

$\left\{Q_Q\right\}$ คือเวกเตอร์ของความร้อนที่ผลิตเองได้

$\left\{Q_q\right\}$ คือเวกเตอร์ของฟลักซ์ความร้อนที่ผิว

$\left\{Q_h\right\}$ คือเวกเตอร์ของอุณหภูมิบรรยากาศที่ส่งผลต่อการพาความร้อน

จากสมการ (4.11) จะพบว่าการคำนวณเมทริกซ์การนำความร้อนอยู่ในรูปการอินทิเกรต ซึ่งพจน์ของอินทิแกรน อยู่ในรูปอนุพันธ์ของ N เทียบกับ x และ y ($\frac{\partial N}{\partial x}$ และ $\frac{\partial N}{\partial y}$) โดย N เป็นฟังก์ชันของ ξ และ η ดังนั้นจะต้องประยุกต์ใช้กฎลูกโซ่ (chain rule) ดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial \xi} &= \frac{\partial N}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} &= \frac{\partial N}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}\end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{\underset{(2\times 2)}{[J]}} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{4.13}$$

โดย $\left[J\right]$ คือ จาโคเบียนเมทริกซ์

$$\left[J\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sum_{i=1}^{4} N_i x_i\right) & \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sum_{i=1}^{4} N_i y_i\right) \\ \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sum_{i=1}^{4} N_i x_i\right) & \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sum_{i=1}^{4} N_i y_i\right) \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

จากสมการ (4.13) สามารถหาอนุพันธ์ของ N เทียบกับ x และ y จากการคูณด้วยอินเวอร์สเมทริกซ์ (inversed matrix) ของจาโคเบียนเมทริกซ์ทั้งสองข้าง ดังนั้นจะสามารถเขียนได้ในรูปสมการ (4.15)

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix} = \left[J\right]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \left[J^*\right] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{4.15}$$

โดย $\left[J^*\right]$ คือ อินเวอร์สของจาโคเบียนเมทริกซ์

$$\left[J^*\right] = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|}\begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

นำเมทริกซ์การนำความร้อน $\left[K_C\right]$ จากสมการ (4.11) มาประยุกต์สมการจากกฎลูกโซ่ ดังแสดงในสมการ (4.17)

$$k\int_{\Omega}\left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor+\left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor d\Omega \quad = k\int_{\Omega}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\quad\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor\left\{\begin{matrix}\frac{\partial N}{\partial x}\\ \frac{\partial N}{\partial y}\end{matrix}\right\}d\Omega \tag{4.17}$$

$$= k\int_{\Omega}\underbrace{\left(\left[J^{*}\right]\left\{\begin{matrix}\frac{\partial N}{\partial \xi}\\ \frac{\partial N}{\partial \eta}\end{matrix}\right\}\right)^{T}}_{[\hat{B}]^{T}}\underbrace{\left(\left[J^{*}\right]\left\{\begin{matrix}\frac{\partial N}{\partial \xi}\\ \frac{\partial N}{\partial \eta}\end{matrix}\right\}\right)}_{[\hat{B}]}d\Omega$$

โดย $\left[\hat{B}\right]$ คือเมทริกซ์แสดงค่าความชันของอุณหภูมิ

$$\left[\hat{B}(\xi,\eta)\right]=\begin{bmatrix}J_{11}^{*} & J_{12}^{*}\\ J_{21}^{*} & J_{22}^{*}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi}\\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta}\end{bmatrix} \tag{4.18}$$

เมื่อนำมาประยุกต์การเปลี่ยนแปลงระบบพิกัดและกฎลูกโซ่ จะสามารถแสดงสมการได้ดังตาราง 4.1 กำหนดขอบเขตการอินทิเกรตโดย Ω แทนโดเมนของเอลิเมนต์ และ Γ แทนขอบเขตของเอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข ส่วนของการพิสูจน์ $dxdy=|J|\,d\xi d\eta$ แสดงในภาคผนวกของเอกสารอ้างอิง [16]

ตารางที่ 4.1 การเปลี่ยนแปลงจากระบบพิกัดคาร์ทีเซียนเป็นระบบพิกัดธรรมชาติของสมการเอลิเมนต์เมทริกซ์สำหรับปัญหาความร้อน

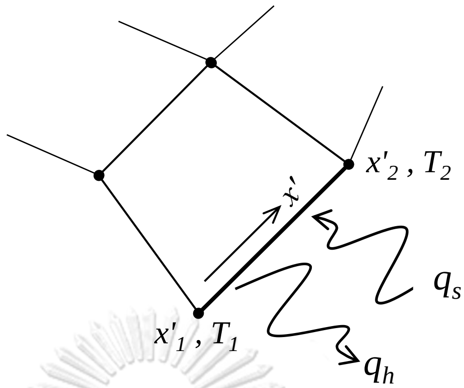
สมการเมทริกซ์ในพิกัดคาร์ทีเซียน	**สมการเมทริกซ์ในพิกัดธรรมชาติ**
$\left[K_C\right]=\iint_{\Omega}k\left(\left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor+\left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor\right)t\,dxdy$	$\left[K_C\right]=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k\left[\hat{B}(\xi,\eta)\right]^{T}\left[\hat{B}(\xi,\eta)\right]\left\|J(\xi,\eta)\right\|t\,d\xi d\eta$
$\left\{Q_Q\right\}=\iint_{\Omega}Q\left\{N\right\}tdxdy$	$\left\{Q_Q\right\}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}Q\left\{N(\xi,\eta)\right\}\left\|J(\xi,\eta)\right\|td\xi d\eta$

ลำดับถัดมาพิจารณาพจน์ที่มีการอินทิเกรตตามแนวขอบของเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยม ได้แก่ เมทริกซ์การพาความร้อน $\left[K_h\right]$, เวกเตอร์ของฟลักซ์ความร้อนที่ผิว $\left\{Q_q\right\}$ และเวกเตอร์ของอุณหภูมิบรรยากาศที่ส่งผลต่อการพาความร้อน $\left\{Q_h\right\}$ ซึ่งขอบของเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมจะเกิดจากการเชื่อมจุดต่อสองจุดเข้าด้วยกัน ดังนั้นฟังก์ชันประมาณภายในจึงกำหนดให้เป็นความสัมพันธ์เส้นตรงสอดคล้องกับสมการ (4.19)

$$T(x') = \alpha_1 + \alpha_2 x' \tag{4.19}$$

โดย α_1, α_2 คือ ค่าคงที่

x' คือ พิกัดภายใน



รูปที่ 4.2 การถ่ายเทความร้อนตามแนวขอบ

เมื่อแทนค่าเงื่อนไขที่จุดต่อ และนำมาเขียนในรูปเมทริกซ์จะได้ว่า

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \tag{4.20}$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} l & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} \tag{4.21}$$

โดย l แทนระยะห่างระหว่างจุดต่อ

แทนค่าคงที่ $\{\alpha\}$ ลงในสมการตั้งต้น (4.19) จะสามารถเขียนได้ว่า

$$T(x) = N_1 T_1 + N_2 T_2 = \lfloor N_1 \quad N_2 \rfloor \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} \tag{4.22}$$

โดย $\lfloor N_1 \quad N_2 \rfloor = \left\lfloor 1 - \frac{x'}{l} \quad \frac{x'}{l} \right\rfloor$

เมื่อนำมาพิจารณากับเมทริกซ์การพาความร้อน $[K_h]$ เวกเตอร์ของฟลักซ์ความร้อนที่ผิว $\{Q_q\}$ และเวกเตอร์ของอุณหภูมิบรรยากาศที่ส่งผลต่อการพาความร้อน $\{Q_h\}$ จะสามารถหาสมการรูปแบบปิดสำหรับเมทริกซ์และเวกเตอร์ดังกล่าวดังสมการ (4.23) – (4.25)

$$[K_h] = \int_{\Gamma} h\{N\}\lfloor N \rfloor d\Gamma = \int_{x_1'}^{x_2'} h\{N\}\lfloor N \rfloor t\, dx' = \frac{h\,t\,l}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

$$\{Q_q\} = \int_{\Gamma} q_s \{N\}\, d\Gamma = \int_{x_1'}^{x_2'} q_s \{N\}\, t\, dx' = \frac{q_s\, t\, l}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{4.24}$$

$$\{Q_h\} = \int_{\Gamma} hT_{\infty}\{N\}\, d\Gamma = \int_{x_1'}^{x_2'} hT_{\infty}\{N\}\, t\, dx' = \frac{hT_{\infty}\, t\, l}{2}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix} \qquad (4.25)$$

4.3 ปัญหาของความเค้นเนื่องจากความร้อน

การวิเคราะห์ปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อน กำหนดปัญหาแผ่นบางที่มีความหนา t จะพิจารณาเป็นปัญหา 2 มิติ ในสภาวะคงตัว และวัสดุไอโซทรอปิก โดยมีสมบัติเป็นอีลาสติกยืดหยุ่นเชิงเส้น (linear elastic properties) เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าวจะต้องพิจารณาสมการและความสัมพันธ์ต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

4.3.1 สมการสมดุลแรง (equilibrium equation)

สมการสมดุลแรง หรือผลรวมของแรงในทุกทิศทางมีค่าเท่ากับศูนย์ เมื่อพิจารณาปัญหาในสองมิติและละผลจากแรงของน้ำหนัก (body force) จะสามารถแสดงในรูปสมการคือ

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0 \qquad (4.26)$$

โดย σ_x, σ_y คือความเค้นตั้งฉากในแนวแกน x และแนวแกน y ตามลำดับ

τ_{xy} คือความเค้นเฉือนในระนาบ xy

4.3.2 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและอุณหภูมิ

เมื่อแต่ละตำแหน่งในวัสดุมีอุณหภูมิที่ไม่เท่ากันแล้ว จะเกิดการยืดตัวหรือหดตัวของวัสดุที่แตกต่างกัน ความเครียดที่เกิดขึ้นจากอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงนั้นสามารถเขียนในรูปสมการได้ดังนี้

$$\varepsilon_T = \alpha\,(T - T_0) \qquad (4.27)$$

โดย ε_T คือความเครียดที่เกิดจากความร้อน

α คือสัมประสิทธิ์การขยายตัวของวัสดุ (thermal expansion coefficient)

T คืออุณหภูมิที่สนใจ

T_0 คืออุณหภูมิตั้งต้นของวัสดุขณะที่ยังไม่มีความเค้น

4.3.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการเคลื่อนที่ (strain and displacement relation)

หากพิจารณาความเครียดหรือการเสียรูปของวัสดุ จะพบว่ามีความสัมพันธ์กับการเคลื่อนที่ โดยกำหนดการเคลื่อนที่ในทิศทางแนวแกน x และแนวแกน y ด้วยตัวแปร u และ v ตามลำดับ จะสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะการเคลื่อนที่และความเครียดในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}\ ,\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}\ ,\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (4.28)$$

โดย $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ คือความเครียดในทิศทางตามแนวแกน x และ y ตามลำดับ

γ_{xy} คือความเครียดเฉือนบนระนาบ xy

4.3.4 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด (stress-strain relation)

จากกฎของฮุค (Hooke's law) สามารถอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดใน 2 มิติ ได้ดังสมการ (4.29) – (4.31) และจากสมการ (4.31) จะสังเกตได้ว่าอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปไม่ส่งผลกระทบต่อความเค้นเฉือนและการเสียรูปเชิงมุม

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \upsilon\sigma_y\right] + \alpha(T - T_0) \tag{4.29}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \upsilon\sigma_x\right] + \alpha(T - T_0) \tag{4.30}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\upsilon)}{E}\tau_{xy} \tag{4.31}$$

โดย E คือโมดูลัสของสภาพยืดหยุ่น (modulus of elasticity)

υ คืออัตราส่วนของปัวส์ซง (Poisson's ratio)

จากความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดในสมการ (4.29) – (4.31) นำมาเขียนในรูปของเมทริกซ์ ได้ดังนี้

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon - \varepsilon_T\} \tag{4.32}$$

เมื่อแทนสมการ (4.27) ลงในสมการ (4.32) จะได้

$$\{\sigma\} = [C]\left(\{\varepsilon\} - \{\alpha\}(T - T_0)\right) \tag{4.33}$$

โดย $\{\sigma\}$ = $\lfloor \sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \rfloor^T$

$\{\varepsilon\}$ = $\lfloor \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy} \rfloor^T$

$[C]$ คือ เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของความแข็งเกร็ง

$\{\alpha\}$ คือ เวกเตอร์สัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากความร้อน

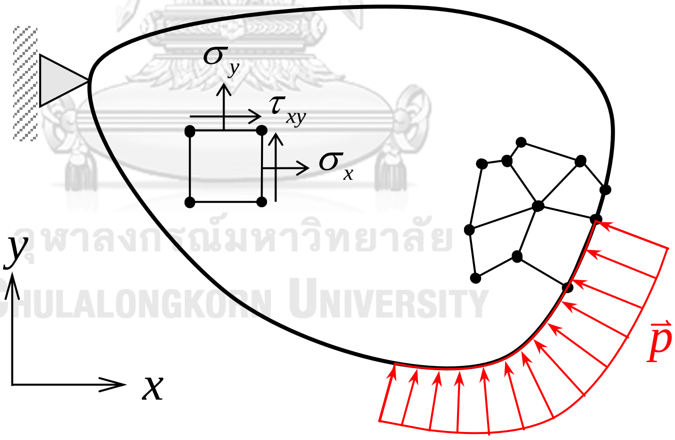
เมื่อพิจารณาปัญหาเพียง 2 มิติ จะสามารถจำแนกลักษณะปัญหาออกได้เป็น 2 กรณี คือ ความเค้นระนาบ (plane stress) และความเครียดระนาบ (plane strain) ทั้งสองลักษณะปัญหาตั้งอยู่บนสมมติฐานบางประการ ซึ่งเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ของความแข็งเกร็ง $[C]$ และเวกเตอร์สัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากความร้อน $\{\alpha\}$ ของแต่ละกรณีจะแตกต่างกันดังนี้

<u>ปัญหาความเค้นระนาบ</u> ใช้พิจารณาปัญหาแผ่นระนาบบาง โดยสมมติฐานคือความเค้นที่เกิดขึ้นในทิศทางแกนเดียวกับความหนาของแผ่น หรือตั้งฉากกับผิวระนาบมีค่าน้อยมาก หรือมีค่าเท่ากับศูนย์

$$[C]=\frac{E}{1-\upsilon^2}\begin{bmatrix}1 & \upsilon & 0\\ \upsilon & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\upsilon}{2}\end{bmatrix}, \qquad \{\alpha\}=\begin{Bmatrix}\alpha\\ \alpha\\ 0\end{Bmatrix} \tag{4.34}$$

<u>ปัญหาความเครียดระนาบ</u> ใช้พิจารณาปัญหาที่มีหน้าตัดสม่ำเสมอและมีความลึกมาก เช่น ปัญหาท่อ หรือปัญหาเขื่อน เป็นต้น โดยสมมติฐานคือความเครียดที่เกิดขึ้นในทิศทางแกนเดียวกับความลึกหรือทิศทางแกน z มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับทิศทางอื่น ๆ จนสามารถละทิ้งได้

$$[C]=\frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\begin{bmatrix}1-\upsilon & \upsilon & 0\\ \upsilon & 1-\upsilon & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-2\upsilon}{2}\end{bmatrix}, \qquad \{\alpha\}=\begin{Bmatrix}\alpha(1+\upsilon)\\ \alpha(1+\upsilon)\\ 0\end{Bmatrix} \tag{4.35}$$



รูปที่ 4.3 ปัญหาของความเค้นและขอบเขตเงื่อนไขโดยทั่วไป

ตลอดผิวรอบนอกของวัตถุ อาจจะประกอบด้วยการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตชนิดต่าง ๆ โดยรูปที่ 4.3 จะแสดงเงื่อนไขขอบเขตโดยทั่วไปที่อาจจะเกิดขึ้น ตัวอย่างเช่น กำหนดการเคลื่อนที่ตามแนวขอบ ซึ่งจะมีอยู่ 2 ลักษณะคือ 1. กำหนดตรึงจุดนั้นโดยไม่มีการเคลื่อนที่ในทุกทิศทาง (fixed condition) หรือ 2. อนุญาตให้สามารถเคลื่อนที่ในทิศทางใดทิศทางหนึ่งได้ เช่น สามารถเคลื่อนที่ในทิศทาง x ได้อิสระแต่ไม่สามารถเคลื่อนที่ในทิศทาง y ได้ หรือไม่สามารถเคลื่อนที่ในทิศทาง x ได้แต่สามารถเคลื่อนที่ในทิศทาง y ได้อย่างอิสระ เป็นต้น

นอกจากนี้ อาจจะถูกกำหนดให้มีความดันกระทำตั้งฉากกับพื้นผิว ซึ่งสมการที่สอดคล้องคือ

$$\vec{p} = p_x\hat{i} + p_y\hat{j}$$

โดย p_x , p_y แทนความเค้นที่ผิวในทิศทาง x และ y ตามลำดับ

4.4 การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อน

เพื่อแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ตั้งต้นหรือสมการสมดุลของแรง ในที่นี้เลือกใช้วิธีสูตรการเคลื่อนที่ (displacement formulation approach) โดยมีหลักการคือ นำความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการเคลื่อนที่สมการ (4.28) แทนลงในสมการ (4.33) คือความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด จากนั้นจึงนำไปแทนในสมการสมดุลแรง (4.26) โดยตัวแปรที่ต้องการคำนวณหาในแต่ละจุดต่อ คือ การเคลื่อนที่ในทิศทางแนวแกน x และ y

ขั้นตอนการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อน จะอธิบายอย่างละเอียดโดยเริ่มต้นจากสมมติการกระจายตัวของการเคลื่อนที่ในทิศทางแนวแกน x และ y ดังนี้

$$u = \sum_{i=1}^{4} N_i u_i \text{ และ } v = \sum_{i=1}^{4} N_i v_i \tag{4.36}$$

นำสมการ (4.28) มาเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์จะได้สมการ (4.37) และแทนค่าการเคลื่อนที่จากสมการ (4.36) ลงในสมการ (4.37) จะได้สมการ (4.38) จากนั้นเพื่อสะดวกต่อการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในลำดับต่อไป จึงเขียนอยู่ในรูปย่อดังสมการ (4.39)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \tag{4.37}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}}_{[B]} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \tag{4.38}$$

$$\underset{(3\times1)}{\{\varepsilon\}} = \underset{(3\times2)}{[\partial]}\underset{(2\times8)}{[N]}\underset{(8\times1)}{\{\delta\}} = \underset{(3\times8)}{[B]}\underset{(8\times1)}{\{\delta\}} \tag{4.39}$$

โดย $[\partial]$ แทนเมทริกซ์การดำเนินการเชิงอนุพันธ์

$[B]$ แทนเมทริกซ์แสดงค่าความชันของการเคลื่อนที่

$$[B(x,y)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

จากนั้นพิจารณาสมการอนุพันธ์ของสมดุลแรง (4.26) สามารถเขียนในรูปของเมทริกซ์ของอนุพันธ์ของความเครียดได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{หรือ} \quad \underset{(2\times3)}{[\partial]^T} \underset{(3\times1)}{\{\sigma\}} = 0 \tag{4.41}$$

เมื่อประยุกต์ใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างแบบบับโนฟ-กาเลอร์คินกับสมการ (4.41) จะสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\int_\Omega \underset{(8\times2)}{[N]^T} \underset{(2\times3)}{[\partial]^T} \underset{(3\times1)}{\{\sigma\}} \, d\Omega = 0 \tag{4.42}$$

แทนสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด (4.32) ลงในพจน์เวกเตอร์ความเค้นของสมการ (4.42) จะได้ดังสมการ (4.43)

$$\int_\Omega \underset{(8\times2)}{[N]^T} \underset{(2\times3)}{[\partial]^T} \left(\underset{(3\times3)}{[C]}\underset{(3\times1)}{\{\varepsilon\}} - \underset{(3\times3)}{[C]}\underset{(3\times1)}{\{\varepsilon_T\}} \right) d\Omega = 0 \tag{4.43}$$

นำสมการ (4.39) แทนลงในเวกเตอร์ความเครียดของสมการ (4.43) จะได้

$$\int_\Omega \underbrace{\left(\underset{(3\times2)}{[\partial]} \underset{(2\times8)}{[N]} \right)^T}_{[B]^T} \left(\underset{(3\times3)}{[C]} \underbrace{\underset{(3\times2)}{[\partial]}\underset{(2\times8)}{[N]}}_{[B]} \underset{(8\times1)}{\{\delta\}} - \underset{(3\times3)}{[C]}\underset{(3\times1)}{\{\varepsilon_T\}} \right) d\Omega = 0 \tag{4.44}$$

$$\int_\Omega \underset{(8\times3)}{[B]^T} \underset{(3\times3)}{[C]} \underset{(3\times8)}{[B]} \underset{(8\times1)}{\{\delta\}} - \underset{(8\times3)}{[B]^T} \underset{(3\times3)}{[C]} \underset{(3\times1)}{\{\varepsilon_T\}} \, d\Omega = 0 \tag{4.45}$$

อินทิเกรตสมการ (4.45) ทีละส่วน

$$\underbrace{\int_{\Gamma}[B][C]\begin{bmatrix}\hat{n}_x & 0\\ 0 & \hat{n}_y\\ 0 & 0\end{bmatrix}\{\delta\}\,d\Gamma}_{\{F_L\}}-\underbrace{\int_{\Omega}[B]^T[C][B]\,d\Omega}_{[K]}\{\delta\}+\underbrace{\int_{\Omega}[B]^T[C]\{\varepsilon_T\}\,d\Omega}_{\{F_T\}}=0 \quad (4.46)$$

ในท้ายที่สุดจะได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อนในรูปเมทริกซ์ดังนี้

$$[K]\{\delta\}=\{F_L\}+\{F_T\} \quad (4.47)$$

โดย $[K]$ คือเมทริกซ์ความแข็งเกร็ง

$\{F_L\}$ คือเวกเตอร์โหลดตั้งฉากพื้นที่ผิว

$\{F_T\}$ คือเวกเตอร์โหลดเนื่องจากความร้อน

เมื่อได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์แล้ว จึงดำเนินการเปลี่ยนแปลงจากระบบพิกัดคาร์ทีเซียนเป็นระบบพิกัดธรรมชาติ โดยประยุกต์กฎลูกโซ่ จากสมการ (4.15) เข้ากับเมทริกซ์ $[B]$ จะสามารถเขียนเมทริกซ์ $[B]$ ในรูประบบพิกัดธรรมชาติ (ξ - η) ได้ดังนี้

$$[B(\xi,\eta)]=\begin{bmatrix}b_{11} & 0 & b_{13} & 0 & b_{15} & 0 & b_{17} & 0\\ 0 & b_{22} & 0 & b_{24} & 0 & b_{26} & 0 & b_{28}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} & b_{37} & b_{38}\end{bmatrix} \quad (4.48)$$

โดย

$$b_{11}=J_{11}^{*}\frac{\partial N_1}{\partial\xi}+J_{12}^{*}\frac{\partial N_1}{\partial\eta} \qquad b_{31}=J_{21}^{*}\frac{\partial N_1}{\partial\xi}+J_{22}^{*}\frac{\partial N_1}{\partial\eta} \qquad b_{22}=b_{31} \qquad b_{32}=b_{11}$$

$$b_{13}=J_{11}^{*}\frac{\partial N_2}{\partial\xi}+J_{12}^{*}\frac{\partial N_2}{\partial\eta} \qquad b_{33}=J_{21}^{*}\frac{\partial N_2}{\partial\xi}+J_{22}^{*}\frac{\partial N_2}{\partial\eta} \qquad b_{24}=b_{33} \qquad b_{34}=b_{13}$$

$$b_{15}=J_{11}^{*}\frac{\partial N_3}{\partial\xi}+J_{12}^{*}\frac{\partial N_3}{\partial\eta} \qquad b_{35}=J_{21}^{*}\frac{\partial N_3}{\partial\xi}+J_{22}^{*}\frac{\partial N_3}{\partial\eta} \qquad b_{26}=b_{35} \qquad b_{36}=b_{15}$$

$$b_{17}=J_{11}^{*}\frac{\partial N_4}{\partial\xi}+J_{12}^{*}\frac{\partial N_4}{\partial\eta} \qquad b_{37}=J_{21}^{*}\frac{\partial N_4}{\partial\xi}+J_{22}^{*}\frac{\partial N_4}{\partial\eta} \qquad b_{28}=b_{37} \qquad b_{38}=b_{17}$$

หลังจากนั้นจึงสามารถเขียนสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในรูปของระบบพิกัดธรรมชาติ (ξ - η) ได้ดังนี้

ตารางที่ 4.2 การเปลี่ยนแปลงจากระบบพิกัดคาร์ทีเซียนเป็นระบบพิกัดธรรมชาติของสมการปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อน

สมการเมทริกซ์ในพิกัดคาร์ทีเซียน	**สมการเมทริกซ์ในพิกัดธรรมชาติ**
$[K]=\iint_{\Omega}[B(x,y)]^T[C][B(x,y)]\,t\,dxdy$	$[K]=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[B(\xi,\eta)]^T[C][B(\xi,\eta)]\lvert J(\xi,\eta)\rvert\,t\,d\xi d\eta$
$\{F_T\}=\iint_{\Omega}[B(x,y)]^T[C]\{\varepsilon_T\}\,t\,dxdy$	$\{F_T\}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[B(\xi,\eta)]^T[C]\{\varepsilon_T\}\lvert J(\xi,\eta)\rvert\,t\,d\xi d\eta$

บทที่ 5
การสร้างสมการไฟไนต์รูปแบบปิดสำหรับเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมใด ๆ สี่จุดต่อ

เมื่อสามารถสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากบทที่ 4 สำหรับวิเคราะห์ปัญหาความร้อน และปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อนแล้ว จะกล่าวถึงรายละเอียดการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์รูปแบบปิดในบทนี้

การสร้างสมการรูปแบบปิดจะใช้โปรแกรมคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ซึ่งในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เลือกใช้โปรแกรมแมทมาทิกา (Mathermatica) มาช่วยในการคำนวน เนื่องจากเมื่อพิจารณาพจน์อินทิแกรนของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จะพบว่าตัวแปรต้นปรากฎอยู่ในรูปของเศษและส่วน ดังนั้นการอินทิเกรตด้วยทฤษฎีเชิงคณิตศาสตร์จึงทำได้ยาก สำหรับวิธีการหาสมการรูปแบบปิด [17] เพื่อให้เกิดความเข้าใจและนำไปประยุกต์เพื่อหาสมการรูปแบบปิดของเอลิเมนต์เมทริกซ์และเวกเตอร์อื่น ๆ ได้โดยง่าย รายละเอียดขั้นตอนจะถูกอธิบายเรียงลำดับจากการสร้างสมการรูปแบบปิดของเมทริกซ์การนำความร้อน เวกเตอร์ของความร้อนที่ผลิตเองได้ เมทริกซ์แข็งเกร็ง และเวกเตอร์โหลดเนื่องจากความร้อน ตามลำดับ

5.1 การสร้างสมการรูปแบบปิดของเมทริกซ์การนำความร้อน

การสร้างสมการรูปแบบปิดของเมทริกซ์การนำความร้อน จะเริ่มจากการพิจารณาสมการอินทิเกรตของเมทริกซ์การนำความร้อนจากตารางที่ 4.1

$$[K_C] = kt\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[B(\xi,\eta)\right]^T\left[B(\xi,\eta)\right]\left|J(\xi,\eta)\right|d\xi d\eta \qquad (5.1)$$

เมื่อคูณกระจายและจัดรูปสมการใหม่ให้อยู่ในรูปเศษส่วนพหุนาม สมาชิกแต่ละตัวในเอลิเมนต์เมทริกซ์จะสามารถจเขียนให้อยู่ในรูปแบบสมการดังนี้

$$K_{C_{ij}} = k\,t\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{h_{ij}+f_{ij}\xi+g_{ij}\eta+l_{ij}\xi^2+m_{ij}\eta^2+n_{ij}\xi\eta}{p+q\xi+r\eta}\,d\xi d\eta \qquad (5.2)$$

โดย h_{ij} , f_{ij} , g_{ij} , l_{ij} , m_{ij} , n_{ij} , p , q และ r เป็นฟังก์ชันของพิกัดจุดต่อของเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยม ซึ่ง i และ j มีค่าเท่ากับ $1, 2, 3, 4$ จากนั้นใช้โปแกรมแมทมาทิกาช่วยในการอินทิเกรต จะได้ผลลัพธ์ที่มีขนาดใหญ่และซับซ้อนดังแสดงในรูปที่ 5.1

In[1]:= $$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{h+f\times\xi+g\times\eta+l\times\xi\times\xi+m\times\eta\times\eta+n\times\xi\times\eta}{p+q\times\xi+r\times\eta}\,d\xi\,d\eta$$

Out[1]= $$\begin{aligned}
&\text{ConditionalExpression}\Big[\frac{1}{q^3}\\
&\Big(-4\,l\,p\,q+4\,f\,q^2+\frac{1}{6\,r^3}\big(-8\,m\,p\,q^3\,r+2\,n\,p\,q^2\,r^2+6\,g\,q^3\,r^2-2\,m\,q^3\,r^2+\\
&\quad 4\,l\,p\,q\,r^3-6\,f\,q^2\,r^3+2\,n\,q^2\,r^3-2\,l\,q\,r^4+2\,m\,p^3\,q^2\,\text{Log}[p-q-r]-\\
&\quad 6\,m\,p^2\,q^3\,\text{Log}[p-q-r]+6\,m\,p\,q^4\,\text{Log}[p-q-r]-2\,m\,q^5\,\text{Log}[p-q-r]+\\
&\quad n\,p^3\,q\,r\,\text{Log}[p-q-r]-3\,g\,p^2\,q^2\,r\,\text{Log}[p-q-r]+6\,g\,p\,q^3\,r\,\text{Log}[p-q-r]-\\
&\quad 3\,n\,p\,q^3\,r\,\text{Log}[p-q-r]-3\,g\,q^4\,r\,\text{Log}[p-q-r]+2\,n\,q^4\,r\,\text{Log}[p-q-r]+\\
&\quad 2\,l\,p^3\,r^2\,\text{Log}[p-q-r]-3\,f\,p^2\,q\,r^2\,\text{Log}[p-q-r]+6\,h\,p\,q^2\,r^2\,\text{Log}[p-q-r]+\\
&\quad 3\,f\,q^3\,r^2\,\text{Log}[p-q-r]-6\,h\,q^3\,r^2\,\text{Log}[p-q-r]-2\,l\,q^3\,r^2\,\text{Log}[p-q-r]-\\
&\quad 6\,l\,p^2\,r^3\,\text{Log}[p-q-r]+6\,f\,p\,q\,r^3\,\text{Log}[p-q-r]-3\,n\,p\,q\,r^3\,\text{Log}[p-q-r]+\\
&\quad 3\,g\,q^2\,r^3\,\text{Log}[p-q-r]-6\,h\,q^2\,r^3\,\text{Log}[p-q-r]-2\,m\,q^2\,r^3\,\text{Log}[p-q-r]+\\
&\quad 6\,l\,p\,r^4\,\text{Log}[p-q-r]-3\,f\,q\,r^4\,\text{Log}[p-q-r]+2\,n\,q\,r^4\,\text{Log}[p-q-r]-\\
&\quad 2\,l\,r^5\,\text{Log}[p-q-r]-2\,m\,p^3\,q^2\,\text{Log}[p+q-r]-6\,m\,p^2\,q^3\,\text{Log}[p+q-r]-\\
&\quad 6\,m\,p\,q^4\,\text{Log}[p+q-r]-2\,m\,q^5\,\text{Log}[p+q-r]-n\,p^3\,q\,r\,\text{Log}[p+q-r]+\\
&\quad 3\,g\,p^2\,q^2\,r\,\text{Log}[p+q-r]+6\,g\,p\,q^3\,r\,\text{Log}[p+q-r]+3\,n\,p\,q^3\,r\,\text{Log}[p+q-r]+\\
&\quad 3\,g\,q^4\,r\,\text{Log}[p+q-r]+2\,n\,q^4\,r\,\text{Log}[p+q-r]-2\,l\,p^3\,r^2\,\text{Log}[p+q-r]+\\
&\quad 3\,f\,p^2\,q\,r^2\,\text{Log}[p+q-r]-6\,h\,p\,q^2\,r^2\,\text{Log}[p+q-r]-3\,f\,q^3\,r^2\,\text{Log}[p+q-r]-\\
&\quad 6\,h\,q^3\,r^2\,\text{Log}[p+q-r]-2\,l\,q^3\,r^2\,\text{Log}[p+q-r]+6\,l\,p^2\,r^3\,\text{Log}[p+q-r]-\\
&\quad 6\,f\,p\,q\,r^3\,\text{Log}[p+q-r]+3\,n\,p\,q\,r^3\,\text{Log}[p+q-r]-3\,g\,q^2\,r^3\,\text{Log}[p+q-r]+\\
&\quad 6\,h\,q^2\,r^3\,\text{Log}[p+q-r]+2\,m\,q^2\,r^3\,\text{Log}[p+q-r]-6\,l\,p\,r^4\,\text{Log}[p+q-r]+\\
&\quad 3\,f\,q\,r^4\,\text{Log}[p+q-r]-2\,n\,q\,r^4\,\text{Log}[p+q-r]+2\,l\,r^5\,\text{Log}[p+q-r]\big)-\\
&\frac{1}{6\,r^3}\big(8\,m\,p\,q^3\,r-2\,n\,p\,q^2\,r^2-6\,g\,q^3\,r^2-2\,m\,q^3\,r^2-4\,l\,p\,q\,r^3+6\,f\,q^2\,r^3+\\
&\quad 2\,n\,q^2\,r^3-2\,l\,q\,r^4+2\,m\,p^3\,q^2\,\text{Log}[p-q+r]-6\,m\,p^2\,q^3\,\text{Log}[p-q+r]+\\
&\quad 6\,m\,p\,q^4\,\text{Log}[p-q+r]-2\,m\,q^5\,\text{Log}[p-q+r]+n\,p^3\,q\,r\,\text{Log}[p-q+r]-\\
&\quad 3\,g\,p^2\,q^2\,r\,\text{Log}[p-q+r]+6\,g\,p\,q^3\,r\,\text{Log}[p-q+r]-3\,n\,p\,q^3\,r\,\text{Log}[p-q+r]-\\
&\quad 3\,g\,q^4\,r\,\text{Log}[p-q+r]+2\,n\,q^4\,r\,\text{Log}[p-q+r]+2\,l\,p^3\,r^2\,\text{Log}[p-q+r]-\\
&\quad 3\,f\,p^2\,q\,r^2\,\text{Log}[p-q+r]+6\,h\,p\,q^2\,r^2\,\text{Log}[p-q+r]+\\
&\quad 3\,f\,q^3\,r^2\,\text{Log}[p-q+r]-6\,h\,q^3\,r^2\,\text{Log}[p-q+r]-2\,l\,q^3\,r^2\,\text{Log}[p-q+r]+\\
&\quad 6\,l\,p^2\,r^3\,\text{Log}[p-q+r]-6\,f\,p\,q\,r^3\,\text{Log}[p-q+r]-3\,n\,p\,q\,r^3\,\text{Log}[p-q+r]+\\
&\quad 3\,g\,q^2\,r^3\,\text{Log}[p-q+r]+6\,h\,q^2\,r^3\,\text{Log}[p-q+r]+2\,m\,q^2\,r^3\,\text{Log}[p-q+r]+\\
&\quad 6\,l\,p\,r^4\,\text{Log}[p-q+r]-3\,f\,q\,r^4\,\text{Log}[p-q+r]-2\,n\,q\,r^4\,\text{Log}[p-q+r]+\\
&\quad 2\,l\,r^5\,\text{Log}[p-q+r]-2\,m\,p^3\,q^2\,\text{Log}[p+q+r]-6\,m\,p^2\,q^3\,\text{Log}[p+q+r]-\\
&\quad 6\,m\,p\,q^4\,\text{Log}[p+q+r]-2\,m\,q^5\,\text{Log}[p+q+r]-n\,p^3\,q\,r\,\text{Log}[p+q+r]+\\
&\quad 3\,g\,p^2\,q^2\,r\,\text{Log}[p+q+r]+6\,g\,p\,q^3\,r\,\text{Log}[p+q+r]+3\,n\,p\,q^3\,r\,\text{Log}[p+q+r]+\\
&\quad 3\,g\,q^4\,r\,\text{Log}[p+q+r]+2\,n\,q^4\,r\,\text{Log}[p+q+r]-2\,l\,p^3\,r^2\,\text{Log}[p+q+r]+\\
&\quad 3\,f\,p^2\,q\,r^2\,\text{Log}[p+q+r]-6\,h\,p\,q^2\,r^2\,\text{Log}[p+q+r]-3\,f\,q^3\,r^2\,\text{Log}[p+q+r]-\\
&\quad 6\,h\,q^3\,r^2\,\text{Log}[p+q+r]-2\,l\,q^3\,r^2\,\text{Log}[p+q+r]-6\,l\,p^2\,r^3\,\text{Log}[p+q+r]+\\
&\quad 6\,f\,p\,q\,r^3\,\text{Log}[p+q+r]+3\,n\,p\,q\,r^3\,\text{Log}[p+q+r]-3\,g\,q^2\,r^3\,\text{Log}[p+q+r]-\\
&\quad 6\,h\,q^2\,r^3\,\text{Log}[p+q+r]-2\,m\,q^2\,r^3\,\text{Log}[p+q+r]-6\,l\,p\,r^4\,\text{Log}[p+q+r]+\\
&\quad 3\,f\,q\,r^4\,\text{Log}[p+q+r]+2\,n\,q\,r^4\,\text{Log}[p+q+r]-2\,l\,r^5\,\text{Log}[p+q+r]\big)\Big),
\end{aligned}$$

รูปที่ 5.1 ผลจากการอินทิเกรตด้วยโปรแกรมแมทมาทิกา

จากนั้นพิจารณาสมการสัญลักษณ์ที่อินทิเกรตได้และจัดรูปสมการด้วยมือจะได้

$$\left[K_C\right]=kt\left(A+\frac{B_1+B_2+B_3+B_4}{6q^3r^3}\right) \tag{5.3}$$

โดย

$$A=\frac{2(-3g^2r+2mpq^2+3fqr^2+npqr-4lpr^2)}{3q^2r^2}+\frac{4(gr-mp)}{r^2}$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= \quad E_1\log E_1\Big\{r\Big[r\big(3q(2hq-fE_3)+2l\big(C_1+p(q-2r)-qr\big)\big)-3gq^2E_2 \\
&\qquad +nq\big(C_2+p(q+\mathrm{r})+2qr\big)\Big]+2mq^2\big(C_1-p(2q-r)-qr\big)\Big\} \\
B_2 &= -E_2\log E_2\Big\{r\Big[r\big(3q(2hq-fE_4)+2l\big(C_1+p(q-2r)-qr\big)\big)-3gq^2E_2 \\
&\qquad +nq\big(C_2+p(q+\mathrm{r})+2qr\big)\Big]+2mq^2\big(C_1+p(2q-r)-qr\big)\Big\} \\
B_3 &= \quad E_3\log E_3\Big\{r\Big[-r\big(3q(2hq-fE_1)+2l\big(C_1-p(q+2r)+qr\big)\big)+3gq^2E_4 \\
&\qquad +nq\big(-C_2+p(q-\mathrm{r})+2qr\big)\Big]+2mq^2\big(-C_1-p(2q+r)-qr\big)\Big\} \\
B_4 &= -E_4\log E_4\Big\{r\Big[-r\big(3q(2hq-fE_2)+2l\big(C_1-p(q-2r)+qr\big)\big)+3gq^2E \\
&\qquad +nq\big(-C_2+p(q+\mathrm{r})-2qr\big)\Big]+2mq^2\big(-C_1-p(2q-r)+qr\big)\Big\}
\end{aligned}$$

$E_1=p-q-r$, $\quad E_2=p-q+r$, $\quad E_3=p+q-r$, $\quad E_4=p+q+r$

$C_1=p^2+q^2+r^2$, $\quad C_2=p^2-2q^2-2r^2$

หากพิจารณาสมการ (5.3) จะพบว่า มีพจน์ที่ตัวแปร q และ r เป็นส่วน ซึ่งหากกรณีที่ตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์จะทำให้เกิดค่าอนันต์ จึงได้ศึกษาลงไปในรายละเอียดของแต่ละตัวแปร พบว่า $p+q\xi+r\eta$ เป็นขนาดของจาโคเบียนเมทริกซ์, $|J|$, ดังนั้นตัวแปร p , q และ r เป็นค่าคุณสมบัติของเอลิเมนต์นั้น ๆ ซึ่งสมาชิกทุกตัวในเอลิเมนต์เมทริกซ์จะมีค่าเท่ากัน นั่นคือ

$$\begin{aligned}
|J|=\frac{1}{8}\Big\{&\underbrace{\big((x_1-x_3)(y_2-y_4)-(x_2-x_4)(y_1-y_3)\big)}_{p} \\
&+\underbrace{\big((x_3-x_4)(y_1-y_2)-(x_1-x_2)(y_3-y_4)\big)}_{q}\xi \\
&+\underbrace{\big((x_2-x_3)(y_1-y_4)-(x_1-x_4)(y_2-y_3)\big)}_{r}\eta\Big\}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

หรือ
$$|J|=\frac{1}{8}\left(p+q\xi+r\eta\right) \tag{5.5}$$

โดย
$$p=\left(x_1-x_3\right)\left(y_2-y_4\right)-\left(x_2-x_4\right)\left(y_1-y_3\right)$$

$$q = (x_3 - x_4)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y_3 - y_4)$$
$$r = (x_2 - x_3)(y_1 - y_4) - (x_1 - x_4)(y_2 - y_3)$$

จากนั้นจึงพิจารณาแต่ละกรณี ได้แก่ กรณีที่ตัวแปร $q = 0$ และ $r = 0$ ตามลำดับ โดยนำสมการของพิกัดจุดต่อข้างต้นกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 0 และจัดรูปสมการดังนี้

กรณี $q = 0$

$$q = (x_3 - x_4)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y_3 - y_4) = 0 \tag{5.6}$$

$$\frac{(y_1 - y_2)}{(x_1 - x_2)} = \frac{(y_3 - y_4)}{(x_3 - x_4)} \tag{5.7}$$

เมื่อจัดให้อยู่ในรูปอัตราส่วน จะพบว่าความชันของด้านระหว่างจุดต่อ 1 และ 2 เท่ากับความชันของด้านระหว่างจุดต่อ 3 และ 4 หรืออาจกล่าวได้ว่าด้าน $\overline{12}$ ขนานกับด้าน $\overline{34}$ จะทำให้ค่าตัวแปร q มีค่าเท่ากับศูนย์ ตัวอย่างรูปร่างเอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าวแสดงในรูปที่ 5.2

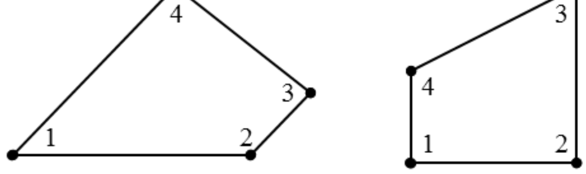
รูปที่ 5.2 เอลิเมนต์รูปที่เหลี่ยมที่ด้าน $\overline{12}$ ขนานกับด้าน $\overline{34}$

กรณี $r = 0$

$$r = (x_2 - x_3)(y_1 - y_4) - (x_1 - x_4)(y_2 - y_3) = 0 \tag{5.8}$$

$$\frac{(y_1 - y_4)}{(x_1 - x_4)} = \frac{(y_2 - y_3)}{(x_2 - x_3)} \tag{5.9}$$

เมื่อจัดให้อยู่ในรูปอัตราส่วน จะพบว่าความชันของด้านระหว่างจุดต่อ 1 และ 4 เท่ากับความชันของด้านระหว่างจุดต่อ 2 และ 3 หรืออาจกล่าวได้ว่าด้าน $\overline{14}$ ขนานกับด้าน $\overline{23}$ จะทำให้ค่าตัวแปร r มีค่าเท่ากับศูนย์ ตัวอย่างรูปร่างเอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าวแสดงในรูปที่ 5.3



รูปที่ 5.3 เอลิเมนต์รูปที่เหลี่ยมที่ด้าน $\overline{14}$ ขนานกับด้าน $\overline{23}$

จากที่กล่าวข้างต้น q หรือ r มีโอกาสที่จะมีค่าเท่ากับศูนย์ เมื่อลักษณะของเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมสอดคล้องกับเงื่อนไขด้านที่ขนานกัน ดังนั้นเพื่อหลีกเลี่ยงการเกิดค่าอนันต์ การคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์จึงถูกแบ่งออกเป็น 4 กรณี คือ 1) เอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมที่ไม่มีด้านใดขนานกัน 2) เอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมที่ด้าน $\overline{12}$ ขนานกับด้าน $\overline{34}$ 3) เอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมด้าน $\overline{14}$ ขนานกับด้าน $\overline{23}$ และ 4) เอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน นอกจากนี้ยังพบว่า การแบ่งกรณีดังกล่าวมีประโยชน์ในการสร้างและคำนวณสมการรูปแบบปิด เนื่องจากเมื่อบางพจน์มีค่าเท่ากับศูนย์ จะทำให้อินทิแกรนมีความซับซ้อนน้อยลง ส่งผลให้สมการที่ได้จากการอินทิเกรตสั้นลงและง่ายต่อการเขียนโปรแกรมอีกด้วย รายละเอียดของแต่กรณีแสดงดังนี้

<u>กรณีที่ 1</u> เอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมที่ไม่มีด้านใดขนานกัน

กรณีนี้จะให้สมการรูปแบบปิด ซึ่งรายละเอียดดังแสดงในสมการ (5.3)

<u>กรณีที่ 2</u> เอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมที่ด้าน $\overline{12}$ ขนานกับด้าน $\overline{34}$

เมื่อด้าน $\overline{12}$ ขนานกับด้าน $\overline{34}$ ทำให้ $q = 0$ ดังนั้นเมทริกซ์การนำความร้อนจะถูกลดรูปดังสมการ (5.10) และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการพีชคณิตได้ดังสมการ (5.11)

$$K_C = kt\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{h+f\xi+g\eta+l\xi^2+m\eta^2+n\xi\eta}{p+r\eta}d\xi d\eta \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}K_C = \frac{kt}{3r^3}\Big[&-12mpr+12gr^2\\&-\left(6mp^2-6gpr+6hr^2+2lr^2\right)\left(\log\left(p-r\right)-\log\left(p+r\right)\right)\Big]\end{aligned} \tag{5.11}$$

<u>กรณีที่ 3</u> เอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมด้าน $\overline{14}$ ขนานกับด้าน $\overline{23}$

เมื่อด้าน $\overline{14}$ ขนานกับด้าน $\overline{23}$ ทำให้ $r = 0$ ดังนั้นเมทริกซ์การนำความร้อนจะถูกลดรูปดังสมการ (5.12) และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการพีชคณิตได้ดังสมการ (5.13)

$$K_C = kt\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{h+f\xi+g\eta+l\xi^2+m\eta^2+n\xi\eta}{p+q\xi}d\xi d\eta \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}K_C = \frac{kt}{3q^3}\Big[&-12lpq+12fq^2\\&-\left(6lp^2-6fpq+6hq^2+2mq^2\right)\left(\log\left(p-q\right)-\log\left(p+q\right)\right)\Big]\end{aligned} \tag{5.13}$$

<u>กรณีที่ 4</u> เอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

กรณีเอลิเมนต์รูปที่เหลี่ยมด้านขนาน หรือเอลิเมนต์มีด้านขนาน 2 คู่ จะทำให้ทั้ง q และ r มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นเมทริกซ์การนำความร้อนจะถูกลดรูปดังสมการ (5.14) และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการพีชคณิตได้ดังสมการ (5.15)

$$K_C = kt\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{h+f\xi+g\eta+l\xi^2+m\eta^2+n\xi\eta}{p}\,d\xi d\eta \tag{5.14}$$

$$K_C = \frac{kt}{3p}\left(4\left(3h+l+m\right)\right) \tag{5.15}$$

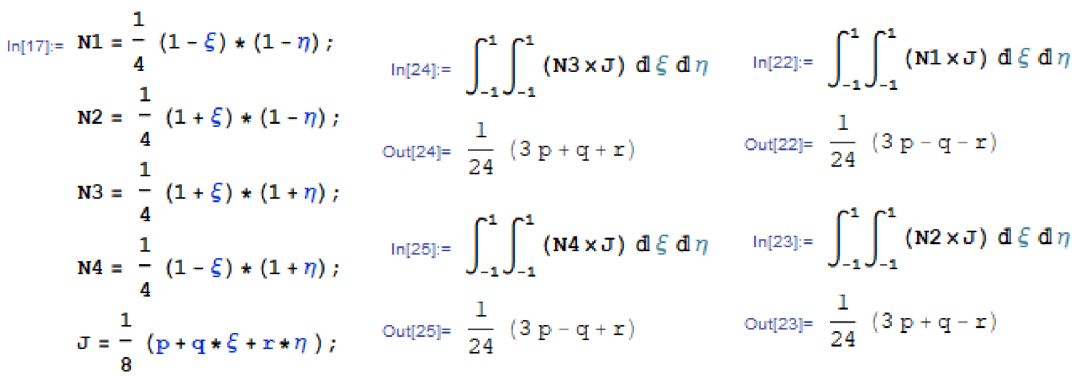
5.2 การสร้างสมการรูปแบบปิดของเวกเตอร์ของความร้อนที่ผลิตเองได้

การสร้างสมการรูปแบบปิดของเวกเตอร์ของความร้อนที่ผลิตขึ้นเอง จะเริ่มจากการพิจารณาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากตารางที่ 4.1

$$\{Q_Q\} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} Q\{N(\xi,\eta)\}|J(\xi,\eta)|t\,d\xi d\eta \tag{5.16}$$

โดย $\{N\} = \frac{1}{4}\begin{Bmatrix}(1-\xi)(1-\eta)\\(1+\xi)(1-\eta)\\(1+\xi)(1+\eta)\\(1-\xi)(1+\eta)\end{Bmatrix}$ และ $|J| = \frac{1}{8}(p+q\xi+r\eta)$

จะพบว่าอินทิแกรนที่ได้มีความซับซ้อนไม่มากนัก คือเมื่อกระจายและจัดรูปจะได้พหุนามที่ไม่อยู่ในรูปเศษส่วน ดังนั้นจึงสามารถจัดการได้โดยง่ายด้วยโปรแกรมแม็ทมาทิกาโดยตรง ดังแสดงด้วยภาพด้านล่าง



รูปที่ 5.4 การหาสมการรูปแบบปิดของเวกเตอร์ของความร้อนที่ผลิตเองด้วยโปรแกรมแมทมาทิกา

ดังนั้นสมการรูปแบบปิดของเวกเตอร์ของความร้อนที่ผลิตได้เอง สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\left\{Q_Q\right\} = \frac{Qt}{24}\begin{Bmatrix} 3p-q-r \\ 3p+q-r \\ 3p+q+r \\ 3p-q+r \end{Bmatrix} \tag{5.17}$$

5.3 การสร้างสมการรูปแบบปิดของเมทริกซ์แข็งเกร็ง

สำหรับการสร้างสมการรูปแบบปิดของเอลิเมนต์เมทริกซ์แข็งเกร็ง, $[K]$, ขั้นตอนการประดิษฐ์สมการรูปแบบปิดจะมีกระบวนการลักษณะคล้ายคลึงกับการสร้างเมทริกซ์การนำความร้อน โดยเริ่มจากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากตารางที่ 4.2

$$[K] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[B(\xi,\eta)\right]^T [C]\left[B(\xi,\eta)\right]\left|J(\xi,\eta)\right| t\,d\xi\,d\eta \tag{5.18}$$

โดย

$$[B(\xi,\eta)] = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} & 0 & b_{15} & 0 & b_{17} & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & b_{24} & 0 & b_{26} & 0 & b_{28} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} & b_{37} & b_{38} \end{bmatrix} \tag{4.46}$$

$$b_{11} = J_{11}^*\frac{\partial N_1}{\partial\xi} + J_{12}^*\frac{\partial N_1}{\partial\eta} \qquad b_{31} = J_{21}^*\frac{\partial N_1}{\partial\xi} + J_{22}^*\frac{\partial N_1}{\partial\eta} \qquad b_{22} = b_{31} \qquad b_{32} = b_{11}$$

$$b_{13} = J_{11}^*\frac{\partial N_2}{\partial\xi} + J_{12}^*\frac{\partial N_2}{\partial\eta} \qquad b_{33} = J_{21}^*\frac{\partial N_2}{\partial\xi} + J_{22}^*\frac{\partial N_2}{\partial\eta} \qquad b_{24} = b_{33} \qquad b_{34} = b_{13}$$

$$b_{15} = J_{11}^*\frac{\partial N_3}{\partial\xi} + J_{12}^*\frac{\partial N_3}{\partial\eta} \qquad b_{35} = J_{21}^*\frac{\partial N_3}{\partial\xi} + J_{22}^*\frac{\partial N_3}{\partial\eta} \qquad b_{26} = b_{35} \qquad b_{36} = b_{15}$$

$$b_{17} = J_{11}^*\frac{\partial N_4}{\partial\xi} + J_{12}^*\frac{\partial N_4}{\partial\eta} \qquad b_{37} = J_{21}^*\frac{\partial N_4}{\partial\xi} + J_{22}^*\frac{\partial N_4}{\partial\eta} \qquad b_{28} = b_{37} \qquad b_{38} = b_{17}$$

ซึ่งจะสามารถจัดรูปสมาชิกในเมทริกซ์ $[B]$ ให้อยู่ในรูปพหุนาม โดยสัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร ξ และ η เป็นพจน์ของพิกัดจุดบนระบบคาร์ทีเซียน x - y ดังแสดงตามสมการด้านล่าง

$$b_{11} = \frac{1}{8|J|}\left(\quad (y_2-y_4)-(y_3-y_4)\xi-(y_2-y_3)\eta\right)$$

$$b_{13} = \frac{1}{8|J|}\left(-(y_1-y_3)+(y_3-y_4)\xi+(y_1-y_4)\eta\right)$$

$$b_{15} = \frac{1}{8|J|}\left(-(y_2-y_4)+(y_1-y_2)\xi-(y_1-y_4)\eta\right)$$

$$b_{17} = \frac{1}{8|J|}\left(\quad (y_1-y_3)-(y_1-y_2)\xi+(y_2-y_3)\eta\right)$$

$$b_{31} = \frac{1}{8|J|}\Big(-\big(x_2 - x_4\big) + \big(x_3 - x_4\big)\xi + \big(x_2 - x_3\big)\eta\Big)$$
$$b_{33} = \frac{1}{8|J|}\Big(\quad \big(x_1 - x_3\big) - \big(x_3 - x_4\big)\xi - \big(x_1 - x_4\big)\eta\Big)$$
$$b_{35} = \frac{1}{8|J|}\Big(\quad \big(x_2 - x_4\big) - \big(x_1 - x_2\big)\xi + \big(x_1 - x_4\big)\eta\Big)$$
$$b_{37} = \frac{1}{8|J|}\Big(-\big(x_1 - x_3\big) + \big(x_1 - x_2\big)\xi - \big(x_2 - x_3\big)\eta\Big)$$

จากสมการ (4.34) และ (4.35) แสดงให้เห็นว่าปัญหาความเค้นระนาบและความเครียดระนาบจะใช้เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ความแข็งเกร็ง $[C]$ ที่แตกต่างกัน ดังนั้นเพื่อให้ประยุกต์ใช้ได้ทั้งปัญหาความเค้นระนาบและความเครียดระนาบ จึงกำหนดให้เมทริกซ์ $[C]$ มีรูปทั่วไปดังสมการ (5.19) สำหรับใช้อธิบายสมการต่าง ๆ ในลำดับถัดไป

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

เมื่อพิจารณาเฉพาะอินทิแกรนของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (5.18) โดยคูณกระจายทั้งหมดจะได้เมทริกซ์สมมาตรขนาด 8×8 ดังนี้

$$\big[B(\xi,\eta)\big]^T [C]\big[B(\xi,\eta)\big] =$$

$$\begin{bmatrix}
c_1b_{11}^2 + c_3b_{31}^2 & (c_2+c_3)b_{11}b_{31} & c_1b_{11}b_{13} + c_3b_{31}b_{33} & c_3b_{13}b_{31} + c_2b_{11}b_{33} & c_1b_{11}b_{15} + c_3b_{31}b_{35} & c_3b_{15}b_{31} + c_2b_{11}b_{35} & c_1b_{11}b_{17} + c_3b_{31}b_{37} & c_3b_{17}b_{31} + c_2b_{11}b_{37} \\
 & c_1b_{31}^2 + c_3b_{11}^2 & c_3b_{11}b_{33} + c_2b_{13}b_{31} & c_1b_{31}b_{33} + c_3b_{11}b_{13} & c_3b_{11}b_{35} + c_2b_{15}b_{31} & c_1b_{31}b_{35} + c_3b_{11}b_{15} & c_3b_{11}b_{37} + c_2b_{17}b_{31} & c_1b_{31}b_{37} + c_3b_{11}b_{17} \\
 & & c_1b_{13}^2 + c_3b_{33}^2 & (c_2+c_3)b_{13}b_{33} & c_1b_{13}b_{15} + c_3b_{33}b_{35} & c_3b_{15}b_{33} + c_2b_{13}b_{35} & c_1b_{13}b_{17} + c_3b_{33}b_{37} & c_3b_{17}b_{33} + c_2b_{13}b_{37} \\
 & & & c_1b_{33}^2 + c_3b_{13}^2 & c_3b_{13}b_{35} + c_2b_{15}b_{33} & c_1b_{33}b_{35} + c_3b_{13}b_{15} & c_3b_{13}b_{37} + c_2b_{17}b_{33} & c_1b_{33}b_{37} + c_3b_{13}b_{17} \\
 & & & & c_1b_{15}^2 + c_3b_{35}^2 & (c_2+c_3)b_{15}b_{35} & c_1b_{15}b_{17} + c_3b_{35}b_{37} & c_3b_{17}b_{35} + c_2b_{15}b_{37} \\
 & & & & & c_1b_{35}^2 + c_3b_{15}^2 & c_3b_{15}b_{37} + c_2b_{17}b_{35} & c_1b_{35}b_{37} + c_3b_{15}b_{17} \\
 & \text{SYMMETRY} & & & & & c_1b_{17}^2 + c_3b_{37}^2 & (c_2+c_3)b_{17}b_{37} \\
 & & & & & & & c_1b_{37}^2 + c_3b_{17}^2
\end{bmatrix}$$

จากนั้นพิจารณาสมาชิกแต่ละตัวในเมทริกซ์ข้างต้น จะพบว่ามีรูปแบบซ้ำ ๆ กัน และสามารถจัดกลุ่มทั้งหมด 4 กลุ่ม ดังแสดงในแผนภาพด้านล่าง

1	2	3	4	3	4	3	4
	1	4	3	4	3	4	3
		1	2	3	4	3	4
			1	4	3	4	3
				1	2	3	4
					1	4	3
	SYM					1	2
							1

รูปที่ 5.5 แผนภาพการจัดกลุ่มในเมทริกซ์แข็งเกร็ง

นอกจากนี้ยังพบว่า ในแต่ละกลุ่มจะมีสมาชิกที่มีความสัมพันธ์กันเป็นคู่ ๆ ดังนั้นเพื่อลดการคำนวณสมการที่ยุ่งยากเหลือเพียงครั้งเดียว การเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้ จึงสร้างผลลัพธ์ระหว่างกระบวนการ (intermediate parameter) หรือกำหนดตัวแปร $[I]$ ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

$$[I]=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\begin{bmatrix} b_{11}^2 & b_{11}b_{31} & b_{11}b_{13} & b_{13}b_{31} & b_{11}b_{15} & b_{15}b_{31} & b_{11}b_{17} & b_{17}b_{31} \\ & b_{31}^2 & b_{11}b_{33} & b_{31}b_{33} & b_{11}b_{35} & b_{31}b_{35} & b_{11}b_{37} & b_{31}b_{37} \\ & & b_{13}^2 & b_{13}b_{33} & b_{13}b_{15} & b_{15}b_{33} & b_{13}b_{17} & b_{17}b_{33} \\ & & & b_{33}^2 & b_{13}b_{35} & b_{33}b_{35} & b_{13}b_{37} & b_{33}b_{37} \\ & & & & b_{15}^2 & b_{15}b_{35} & b_{15}b_{17} & b_{17}b_{35} \\ & & & & & b_{35}^2 & b_{15}b_{37} & b_{35}b_{37} \\ & \mathrm{SYM} & & & & & b_{17}^2 & b_{17}b_{37} \\ & & & & & & & b_{37}^2 \end{bmatrix} d\xi d\eta$$

โดยสมาชิกแต่ละตัวในเมทริกซ์ $[I]$ หลังจากดำเนินการคูณกระจายภายในอินทิแกรน และจัดรูปด้วยมือแล้ว จะพบพจน์ที่มีรูปแบบคล้ายกับสมการ (5.2) ดังนี้

$$I_{ij}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{h_{ij}+f_{ij}\xi+g_{ij}\eta+l_{ij}\xi^2+m_{ij}\eta^2+n_{ij}\xi\eta}{p+q\xi+r\eta}d\xi d\eta \tag{5.20}$$

โดยตัวแปร $h_{ij}, f_{ij}, g_{ij}, l_{ij}, m_{ij}$ และ n_{ij} เป็นสมการพีชคณิตของพิกัดจุด จะมีค่าแตกต่างกันไปตามตำแหน่งในเอลิเมนต์เมทริกซ์ $[I]$ ซึ่งสมการรูปแบบปิดของตัวแปรเหล่านี้จะแตกต่างจากการหาค่าตัวแปรย่อยเมทริกซ์การนำความร้อน ยกตัวอย่างเช่น

I_{11} จะเกิดจากการอินทิเกรตสมการ (5.20) ซึ่งมีค่าตัวแปรย่อยคือ

$$h_{11}=y_{24}^2 \qquad f_{11}=-2y_{24}y_{34} \qquad g_{11}=-2y_{23}y_{24}$$

$$l_{11} = y_{34}^2 \qquad m_{11} = y_{23}^2 \qquad n_{11} = 2y_{23}y_{34}$$

I_{12} จะเกิดจากการอินทิเกรตสมการ (5.20) ซึ่งมีค่าตัวแปรย่อยคือ

$$h_{12} = -x_{24}y_{24} \qquad f_{12} = x_{24}y_{34} + x_{34}y_{24} \qquad g_{12} = x_{23}y_{24} + x_{24}y_{23}$$

$$l_{12} = -x_{34}y_{34} \qquad m_{12} = -x_{23}y_{23} \qquad n_{12} = -x_{23}y_{34} - x_{34}y_{23}$$

โดยตัวห้อยของตัวแปรย่อย h , f, g , l , m และ n หมายถึงตำแหน่งบนเอลิเมนต์เทมริกซ์ ในขณะที่ตัวห้อยของ x และ y หมายถึงผลต่างของค่า x และ y ระหว่างจุดต่อ 2 จุดต่อนั้น ๆ รายละเอียดของตัวแปรย่อยเหล่านี้แสงในภาคผนวก ข.

แต่อย่างไรก็ตามการอินทิเกรตสมการ (5.20) มีลักษณะคล้ายคลึงกับการหาสมการรูปแบบปิดของเมทริกซ์การนำความร้อน จึงแบ่งการพิจารณาออกเป็น 4 กรณีตามลักษณะรูปร่างของเอลิเมนต์เช่นเดียวกันคือ

กรณีที่ 1 เอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมที่ไม่มีด้านใดขนานกัน

$$I = A + \frac{B_1 + B_2 + B_3 + B_4}{6q^3r^3}$$

กรณีที่ 2 เอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมที่ด้าน $\overline{12}$ ขนานกับด้าน $\overline{34}$

$$I = \frac{1}{3r^3}\Big[-12mpr + 12gr^2 - \left(6mp^2 - 6gpr + 6hr^2 + 2lr^2\right)\left(\log(p-r) - \log(p+r)\right)\Big]$$

กรณีที่ 3 เอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมด้าน $\overline{14}$ ขนานกับด้าน $\overline{23}$

$$I = \frac{1}{3q^3}\Big[-12lpq + 12fq^2 - \left(6lp^2 - 6fpq + 6hq^2 + 2mq^2\right)\left(\log(p-q) - \log(p+q)\right)\Big]$$

กรณีที่ 4 เอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$$I = \frac{1}{3p}\left(4\left(3h + l + m\right)\right)$$

เมื่อคำนวณหาค่า I_{ij} แต่ละตัวในเมทริกซ์จนครบทั้งหมดแล้ว จึงจะนำค่าที่ได้คูณกับค่าคงที่ตามรูปแบบของแต่ละกลุ่มดังแสดงในตารางที่ 5. และประกอบเป็นเอลิเมนต์เมทริกซ์แข็งเกร็ง $[K]$ เพื่อนำไปใช้ในโปรแกรมหลักต่อไป ตัวอย่างการคำนวณสมาชิกในเอลิเมนต์เมทริกซ์แข็งเกร็งเช่น

กลุ่มที่ 1 : $k_{11} = c_1 I_{11} + c_3 I_{22} \qquad k_{22} = c_1 I_{22} + c_3 I_{11}$

กลุ่มที่ 2 : $k_{12} = \left(c_2 + c_3\right) I_{12} \qquad k_{34} = \left(c_2 + c_3\right) I_{34}$

กลุ่มที่ 3 : $k_{13} = c_1 I_{13} + c_3 I_{24}$ $k_{24} = c_1 I_{24} + c_3 I_{13}$

กลุ่มที่ 4 : $k_{14} = c_3 I_{14} + c_2 I_{23}$ $k_{23} = c_3 I_{23} + c_2 I_{14}$

ตารางที่ 5.1 รูปแบบการดำเนินการของผลลัพธ์ระหว่างกระบวนการ เพื่อสร้างเมทริกซ์แข็งเกร็ง

	รูปแบบ	**สมาชิก**	i	j	k	l
กลุ่มที่ 1	$c_1 I_{ii} + c_3 I_{jj}$	k_{11}	1	2	-	-
		k_{22}	2	1	-	-
		k_{33}	3	4	-	-
		k_{44}	4	3	-	-
		k_{55}	5	6	-	-
		k_{66}	6	5	-	-
		k_{77}	7	8	-	-
		k_{88}	8	7	-	-
กลุ่มที่ 2	$(c_2 + c_3) I_{ij}$	k_{12}	1	2	-	-
		k_{34}	3	4	-	-
		k_{56}	5	6	-	-
		k_{78}	7	8	-	-
กลุ่มที่ 3	$c_1 I_{ij} + c_3 I_{kl}$	k_{13}	1	3	2	4
		k_{24}	2	4	1	3
		k_{15}	1	5	2	6
		k_{26}	2	6	1	5
		k_{17}	1	7	2	8
		k_{28}	2	8	1	7
		k_{35}	3	5	4	6
		k_{46}	4	6	3	5
		k_{37}	3	7	4	8
		k_{48}	4	8	3	7
		k_{57}	5	7	6	8
		k_{68}	6	8	5	7

	รูปแบบ	สมาชิก	i	j	k	l
กลุ่มที่ 4	$c_3 I_{ij} + c_2 I_{kl}$	k_{14}	1	4	2	3
		k_{23}	2	3	1	4
		k_{16}	1	6	2	5
		k_{25}	2	5	1	6
		k_{18}	1	8	2	7
		k_{27}	2	7	1	8
		k_{36}	3	6	4	5
		k_{45}	4	5	3	6
		k_{38}	3	8	4	7
		k_{47}	4	7	3	8
		k_{58}	5	8	6	7
		k_{67}	6	7	5	8

5.4 การสร้างสมการรูปแบบปิดของเวกเตอร์โหลดเนื่องจากความร้อน

การสร้างสมการรูปแบบปิดของเวกเตอร์โหลดเนื่องจากความร้อน เริ่มจากพิจารณาจากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากตารางที่ 4.2

$$\{F_T\} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[B(\xi,\eta)\right]^T [C]\{\alpha\}\left(\lfloor N(\xi,\eta)\rfloor\{T\} - T_0\right)\left|J(\xi,\eta)\right| t\,d\xi\,d\eta \qquad (5.21)$$

เมื่อพิจารณาเฉพาะอินทิแกรนในสมการ (5.21) คูณกระจายจะสามารถจักรูปสมการและลดรูปได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \left[B(\xi,\eta)\right]^T [C]\{\alpha\} &= (c_1 + c_2)\alpha \lfloor b_{11} \quad b_{31} \quad b_{13} \quad b_{33} \quad b_{15} \quad b_{35} \quad b_{17} \quad b_{37} \rfloor^T \\ \lfloor N(\xi,\eta)\rfloor\{T\} &= \frac{1}{4}\left(a_1 + a_2\eta + a_3\xi + a_4\xi\eta\right) \end{aligned}$$

โดย
$$\begin{aligned} a_1 &= \quad T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \\ a_2 &= -T_1 - T_2 + T_3 + T_4 \\ a_3 &= -T_1 + T_2 + T_3 - T_4 \\ a_4 &= \quad T_1 - T_2 + T_3 - T_4 \end{aligned}$$

เมื่อแทนกลับเข้าไปแล้วอินทิเกรตด้วยโปรแกรมแมทมาทิกาช่วยในการคำนวณ จะได้สมการรูปแบบปิดของเวกเตอร์โหลดเนื่องจากความร้อน ซึ่งมีขนาด 8×1 ดังนี้

$$\{F_T\} = \frac{(c_1 + c_2)\alpha t}{24}\begin{Bmatrix} 3a_1y_{24} - a_2y_{23} - a_3y_{34} \\ -3a_1x_{24} + a_2x_{23} + a_3x_{34} \\ -3a_1y_{13} + a_2y_{14} + a_3y_{34} \\ 3a_1x_{13} - a_2x_{14} - a_3x_{34} \\ -3a_1y_{24} - a_2y_{14} + a_3y_{12} \\ 3a_1x_{24} + a_2x_{14} - a_3x_{12} \\ 3a_1y_{13} + a_2y_{23} - a_3y_{12} \\ -3a_1x_{13} - a_2x_{23} + a_3x_{12} \end{Bmatrix} \tag{5.22}$$

จากบทนี้ได้เสนอวิธีการสร้างสมการรูปแบบปิด เพื่อนำไปใช้แก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนและปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อนแล้ว จากนั้นจะนำสมการรูปแบบปิดเหล่านี้ไปประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้คำนวณหาค่าผลลัพธ์ของการแก้ปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อนในบทถัดไป

บทที่ 6
ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมสำหรับวิเคราะห์ความเค้นเนื่องจากความร้อน

การประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมเพื่อแก้วิเคราะห์ปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อนจะช่วยให้การคำนวณทำได้สะดวกมากขึ้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งปัญหาที่มีความสลับซับซ้อน เพื่อให้ได้คำตอบที่มีความแม่นยำต้องการความละเอียดของการแบ่งเอลิเมนต์เพิ่มขึ้น ดังนั้นโปรแกรมคอมพิวเตอร์จะช่วยจัดการการคำนวณของเอลิเมนต์จำนวนมากได้อย่างยอดเยี่ยม หลังจากสามารถสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์รูปแบบปิด ซึ่งได้อธิบายรายละเอียดในบทที่ 5 แล้ว จึงนำสมการเหล่านั้นมาประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์โปแกรม QUADCF โดยเขียนจากโปรแกรมแมทแลบ (MATLAB)

6.1 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม QUADCF

โปรแกรม QUADCF ประกอบด้วยโปรแกรมหลัก (main program) และโปรแกรมย่อย (subroutine) ต่าง ๆ โดยโปรแกรมหลักจะถูกแบ่งเป็น 2 ส่วนใหญ่ ๆ ด้วยกัน ประกอบด้วย ส่วนที่ 1 คือส่วนของการแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อน และส่วนที่ 2 คือส่วนของการแก้ปัญหาความเค้น รายละเอียดขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมอธิบายได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 : อ่านไฟล์ข้อมูลนำเข้า (input file)

ไฟล์ข้อมูลนำเข้าจะประกอบไปด้วยข้อมูลต่าง ๆ ของปัญหานั้น ได้แก่ จำนวนจุดต่อ จำนวนเอลิเมนต์ จำนวนจุดที่มีแรงกระทำ ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน ความร้อนกำเนิดเอง ค่าโมดูลัสของยังส์ อัตราส่วนปัวส์ซง สัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากความร้อน อุณหภูมิอ้างอิงขณะปัญหาไม่มีความเค้น ความหนาของแผ่น ชุดข้อมูลพิกัดของจุดต่อบนระบบคาร์ทีเซียน และชุดข้อมูลของจุดต่อในแต่ละเอลิเมนต์ รายละเอียดของไฟล์ข้อมูลนำเข้าจะถูกอธิบายโดยละเอียดในหัวข้อ 6.2

ขั้นที่ 2 : แก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อน

การวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อน เริ่มจากการสร้างเมทริกซ์การนำความร้อนและเวกเตอร์ของความร้อนของแต่ละเอลิเมนต์โดยโปรแกรมย่อย [HeatCF] จากนั้นนำเมทริกซ์ของแต่ละเอลิเมนต์มารวมเป็นระบบสมการของปัญหานั้น ๆ พิจารณาขอบเขตว่ามีการพาความร้อนหรือไม่ หากมีการพาความร้อนจะถูกคำนวณโดยโปรแกรมย่อย [Conv] และรวมผลเนื่องจากการพาความร้อนเข้ากับเวกเตอร์ของความร้อนของระบบสมการ และพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตที่ถูกกำหนดค่าอุณหภูมิ จากนั้นจึงแก้ระบบสมการ เพื่อคำนวณหาอุณหภูมิของแต่ละจุดต่อ

ขั้นที่ 3 : แก้ปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อน

การวิเคราะห์ปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อน จะสร้างเอลิเมนต์เมทริกซ์ของความแข็งเกร็ง อุณภูมิของแต่ละจุดต่อจากขั้นที่ 2 จะถูกนำมาใช้เพื่อนำมาสร้างเวกเตอร์แรงเนื่องจากการขยายตัวจากความร้อน โดยชั้นตอนนี้จะใช้โปรแกรมย่อย [StiffCF] จากนั้นจึงรวมเมทริกซ์แข็งเกร็งของแต่ละเอลิเมนต์ให้เป็นระบบสมการของปัญหานั้น จึงพิจารณาขอบเขตในลำดับถัดมาว่ามีแรงกระทำหรือไม่ หากมีแรงกระทำในรูปของแรงดันจะถูกคำนวณด้วยโปรแกรมย่อย [Press] และกรณีที่จุดต่อใด ๆ ถูกกำหนดบังคับเงื่อนไขการเคลื่อนที่ จะถูกพิจารณาในขั้นตอนประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต จากนั้นจึงแก้ระบบสมการเพื่อหาค่าการเคลื่อนที่ในทิศทาง x และ y ของแต่ละจุดต่อ

ขั้นที่ 4 : คำนวณหาค่าความเค้น

หลังจากคำนวณหาค่าการเคลื่อนที่ในแต่ละจุดต่อได้แล้ว จะนำมาคำนวณหาความเค้นตั้งฉากในทิศทางแกน x ความเค้นตั้งฉากในทิศทางแกน y และความเค้นเฉือนในระนาบ xy โดยคำนวณด้วยโปรแกรมย่อย [Stress] โดยขั้นตอนในการคำนวณทั้งหมดของโปรแกรม QUADCF แสดงในรูปที่ 6.1

6.2 รายละเอียดของไฟล์ข้อมูลนำเข้า

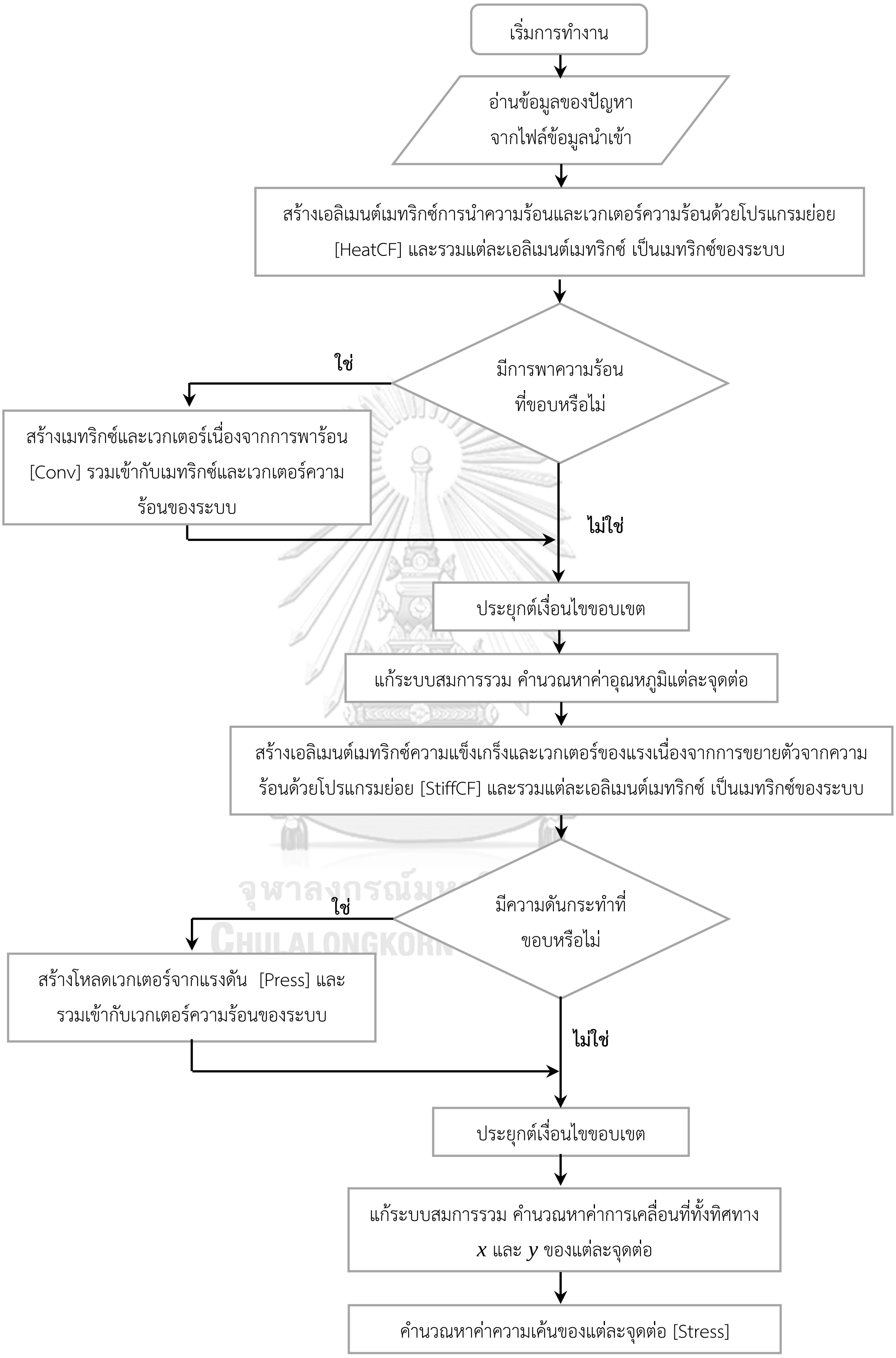
ไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับใช้กับโปรแกรม QUADCF จะถูกแบ่งออกเป็น 7 ส่วนตามลำดับ

ส่วนที่ 1 : ประโยคของคำอธิบายลักษณะของปัญหา โดยบรรทัดแรกจะเป็นตัวเลขแสดงจำนวนบรรทัดของคำอธิบายที่ตามมาด้านล่าง และบรรทัดถัดไปเป็นคำอธิบายต่าง ๆ เพื่อระบุลักษณะของปัญหา ตัวอย่างแสดงดังรูปข้างล่าง

```
2
WASHER PLATE WITH INTERNAL PRESSURE
LINEAR TEMPERATURE DISTRIBUTION
```

ส่วนที่ 2 : จำนวนจุด จำนวนเอลิเมนต์ จำนวนเอลิเมนต์ที่มาการพาความร้อนที่ขอบ และจำนวนเอลิเมนต์ที่มีแรงมากระทำ โดยบรรทัดแรกจะเป็นคำบรรยายของตัวแปร และบรรทัดถัดมาจะเป็นตัวเลขของจำนวนนั้น ๆ ตัวอย่างแสดงดังด้านล่าง

```
NNODE    NELE    NCONV    NFORCE
1201     1119    42       23
```



รูปที่ 6.1 แผนผังขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรม QUADCF

ส่วนที่ 3 : คุณสมบัติของแผ่น โดยบรรทัดแรกจะเป็นตัวย่อซึ่งระบุตัวแปร และบรรทัดถัดมาตามด้วยตัวเลขที่เป็นค่าของตัวแปรนั้น ๆ โดยตัวย่อยต่าง ๆ มีความหมายดังนี้

TK = ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน

Q = ค่าของอัตราความร้อนที่เกิดขึ้นเอง

H = ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน

Ta = อุณหภูมิบรรยากาศ

E = ค่าโมดูลัสของยังส์ (Young’s modulus)

PR = อัตราส่วนปัวส์ซง (Poisson ratio)

ALPHA = สัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากความร้อน

T0 = อุณหภูมิเริ่มต้นที่แผ่นไม่มีความเค้น

THICK = ความหนาของแผ่น

ตัวอย่างของลักษณะของส่วนที่ 3 แสดงดังนี้

```
TK        Q       H        Ta
100       50      1        25
E         PR      ALPHA    T0     THICK
2.07E+9   0.25    12.6E-6  25     0.0025
```

ส่วนที่ 4 : ลักษณะพิกัดจุดต่อ ข้อมูลจะถูกจัดเรียงเป็น 6 คอลัมน์ ประกอบด้วย

คอลัมน์ที่ 1 แสดงหมายเลขของจุดต่อ

คอลัมน์ที่ 2 และคอลัมน์ที่ 3 แสดงพิกัด x และ y ของจุดต่อ ตามลำดับ

คอลัมน์ที่ 4 และคอลัมน์ที่ 5

แสดงเงื่อนไขขอบเขตการเคลื่อนที่ในทิศทาง x และ y โดยหากมีค่าเท่ากับ 0 หมายถึงการเคลื่อนที่ในทิศทางนั้นเคลื่อนที่ได้อิสระ ในขณะที่หากมีค่าเท่ากับ 1 หมายถึงจุดนั้นมีการบังคับไม่ให้เคลื่อนที่ในทิศทางนั้น ๆ หรือการเคลื่อนที่ในทิศนั้น ๆ มีค่าเท่ากับศูนย์

คอลัมน์ที่ 6 แสดงการกำหนดอุณหภูมิขอบเขต หากมีการกำหนดอุณหภูมิให้ใส่ค่าเท่ากับ 1 แต่หากจุดนั้นไม่ถูกกำหนดอุณหภูมิให้ใส่ค่าเท่ากับ 0

คอลัมน์ที่ 7 แสดงค่าของอุณหภูมิที่ถูกกำหนด ซึ่งจะมีค่าก็ต่อเมื่อคอลัมน์ที่ 6 มีค่าเท่ากับ 1 เท่านั้น

ตัวอย่างข้อมูลส่วนที่ 3 แสดงดังด้านล่าง

NODE	X	Y	BCX	BCY	BCT	TEMP
1	0.0000000	100.0000000	1	0	1	30
2	9.8017140	99.5184727	0	0	1	30
3	19.5090322	98.0785280	0	0	1	30
4	29.0284677	95.6940336	0	0	1	30

5	38.2683432	92.3879533	0	0	1	30
6	47.1396737	88.1921264	0	0	1	30
7	55.5570233	83.1469612	0	0	1	30
8	63.4393284	77.3010453	0	0	1	30
9	70.7106781	70.7106781	0	0	1	30
10	77.3010453	63.4393284	0	0	1	30

ส่วนที่ 5 : ลักษณะของเอลิเมนต์ ประกอบด้วยจุดต่อ 4 จุด โดยเรียงในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ตัวอย่างของข้อมูลส่วนที่ 5 แสดงดังนี้

ELE	N1	N2	N3	N4
1	2	3	56	55
2	3	4	57	56
3	4	5	58	57
4	5	6	59	58
5	6	7	60	59
6	7	8	61	60
7	8	9	62	61
8	9	10	63	62
9	10	11	64	63
10	11	12	65	64

ส่วนที่ 6 : กำหนดการพาความร้อนตลอดแนวขอบของเอลิเมนต์ โดยจะแสดงในรูปแบบ 3 คอลัมน์

คอลัมน์ที่ 1 แสดงลำดับของขอบที่ถูกพิจารณา

คอลัมน์ที่ 2 และคอลัมน์ที่ 3 แสดงจุดต่อสองจุดของขอบที่มีการพาความร้อน

ตัวอย่างของข้อมูลส่วนที่ 6 ถูกแสดงดังนี้

Heat convection on Boundary

No	N1	N2
1	67	68
2	68	69
3	69	70
4	70	71
5	71	72
6	72	73
7	73	74
8	74	75

ส่วนที่ 7 : ลักษณะการกำหนดแรงที่กระทำที่ขอบ โดยจะแสดงในรูปแบบ 4 คอลัมน์

คอลัมน์ที่ 1 แสดงลำดับของขอบที่ถูกพิจารณา

คอลัมน์ที่ 2 และคอลัมน์ที่ 3 แสดงจุดต่อสองจุด ซึ่งจะต้องมีลำดับทวนเข็มนาฬิกาเช่นเดียวกับจุดต่อของเอลิเมนต์

คอลัมน์ที่ 4 แสดงขนาดของความดันที่กระทำตั้งฉากที่ผิวขอบ โดยจะมีค่าเป็นบวก เมื่อแรงดันพุ่งเข้าผิววัตถุและจะมีค่าเป็นลบเมื่อแรงดันพุ่งออกจากวัตถุ

ตัวอย่างของข้อมูลส่วนที่ 7 ถูกแสดงดังนี้

```
Pressure on Boundary
No      N1      N2      PRESSURE-MPa
1       1       2       0.5
1       2       3       0.5
2       3       4       0.5
3       4       5       0.5
4       5       6       0.5
5       6       7       0.5
6       7       8       0.5
7       8       9       0.5
8       9       10      0.5
```

6.3 รายละเอียดของการแสดงผลลัพธ์

เมื่อสร้างข้อมูลนำเข้าและกดรันโปรแกรม QUADCF เพื่อแก้ปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อนเสร็จเรียบร้อยแล้ว ข้อมูลของผลลัพธ์ที่ได้จะส่งออกมาเป็น 2 ลักษณะคือ

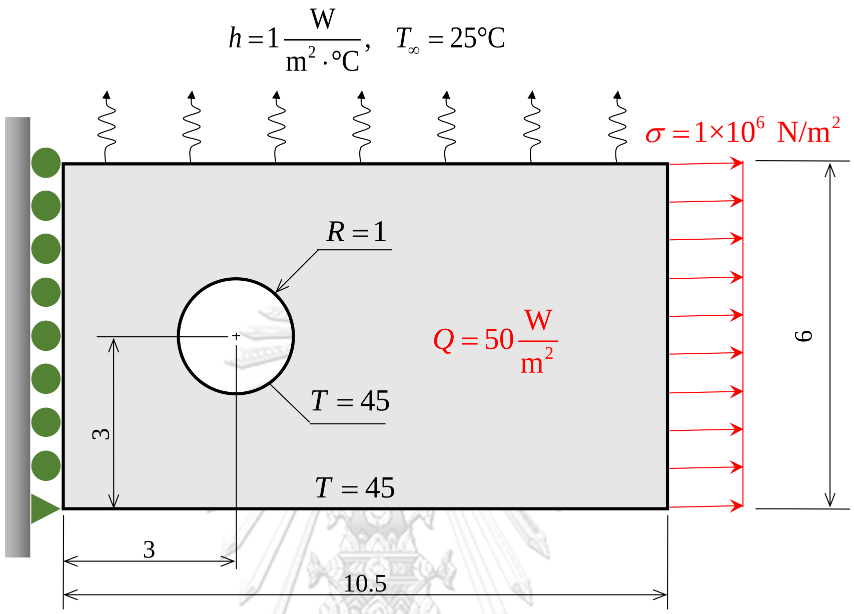
1) ไฟล์ out.txt จะเป็นไฟล์ตัวหนังสือแสดงค่าผลลัพธ์ต่าง ๆ ได้แก่ การเคลื่อนที่ในแนวแกน x การเคลื่อนที่ในแนวแกน y ความเค้นตั้งฉากแกน x ความเค้นตั้งฉากแกน y และความเค้นเฉือนบนระนาบ xy ณ จุดต่อนั้น ๆ เรียงตามลำดับ
2) การแสดงผลด้วยกราฟฟิก จะแสดงในรูปของเกรเดียนต์การกระจายตัวของผลลัพธ์ ซึ่งผู้ใช้จะต้องเลือกผลลัพธ์ที่จะนำมาแสดง โดยการพิมพ์ตัวหนังสือ ป้อนข้อมูลลงไปดังนี้

   "u" แทนผลของการเคลื่อนที่ในแนวแกน x
   "v" แทนผลของการเคลื่อนที่ในแนวแกน y
   "sxx" แทนผลของความเค้นตั้งฉากแกน x
   "syy" แทนผลของความเค้นตั้งฉากแกน y
   "sxy" แทนผลของความเค้นเฉือนบนระนาบ xy

6.4 ตัวอย่างการใช้โปรแกรม QUADCF กับปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อน

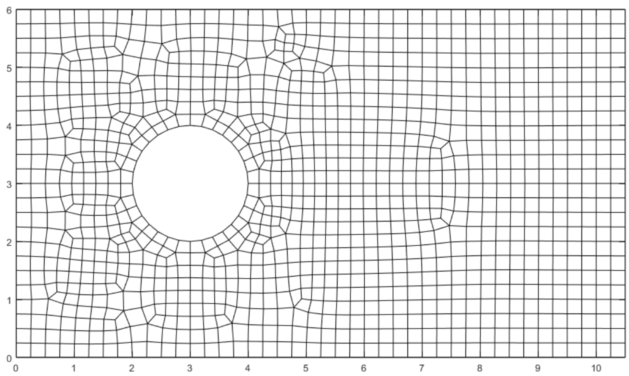
เพื่อให้เกิดความเข้าใจการใช้โปรแกรม QUADCF มากขึ้น จะขอนำเสนอกับตัวอย่างการใช้ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมเจาะรู ซึ่งมีความหนา 0.0025 เมตร ขอบทั้งหมดของโมเดล ยกเว้นขอบบนถูกกำหนดอุณหภูมิมีค่าเท่ากับ 45 องศาเซลเซียส ขอบบนมีการพาความร้อน โดยสัมประสิทธิ์การพาความร้อนคือ 1 วัตต์ต่อตารางเมตร-องศาเซลเซียส และอุณหภูมิบรรยากาศมีค่า 25 องศาเซลเซียส ภายในกำหนดอัตราความร้อนที่ผลิตได้เองเท่ากับ 50 วัตต์ต่อตารางเมตร โดยตลอดของด้านขวาของโดเมนถูกดึงออกด้วยแรง p = 1×10^6 นิวตันต่อตารางเมตร คุณสมบัติของวัสดุนี้ ได้แก่ ค่าสัมประสิทธิ์

การนำความร้อนเท่ากับ 100 วัตต์ต่อเมตร-องศาเซลเซียส, ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิเท่ากับ 12.7×10^{-6} ต่อองศาเซลเซียส อุณหภูมิอ้างอิงที่แผ่นระนายไม่เกิดความเค้นเท่ากับ 25 องศาเซลเซียส ค่าโมดูลัสของยังส์เท่ากับ 2.07×10^{9} นิวตันต่อตารางเมตร และค่าอัตราส่วนปัวส์ซงเท่ากับ 0.25 รายละเอียดของปัญหานี้ แสดงดังรูปที่ 6.2



รูปที่ 6.2 ปัญหาแผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

จากข้อมูลข้างต้น จะทำการสร้างแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยแบ่งโดเมนออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ด้วยโปรแกรม Automesh2D [18] ซึ่งในที่นี้ทำการแบ่งปัญหาเป็น 1,119 เอลิเมนต์จากจุดต่อจำนวน 1,201 จุด ผลจากการแบ่งเอลิเมนต์ย่อย ๆ และลักษณะของเอลิเมนต์แสดงในรูปที่ 6.2



รูปที่ 6.3 ตัวอย่างการแบ่งปัญหาเป็นเอลิเมนต์ย่อย

โดยรายละเอียดของไฟล์นำเข้ามีดังต่อไปนี้

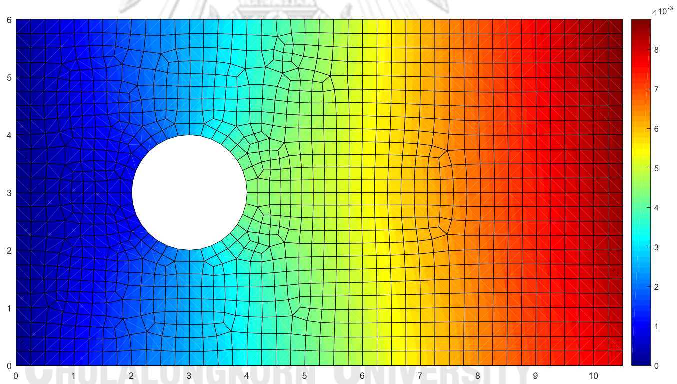
```
2
RECTANGULAR PLATE WITH A HOLE
HEAT GENERATION AND APPILED STRESS AT EDGE
          NNODE     NELE      NCONV     NFORCE
          1201      1119      42        23
          TK         Q         H          Ta
          100       50        1         25
          E         PR        ALPHA         T0       THICK
          2.07E+9   0.25      12.6E-6       25       0.0025
NODE   X               Y               BCX    BCY    BCT    TEMP
1      0.0000000       0.0000000       1      1      1      45
2      0.2500000       0.0000000       0      0      1      45
3      0.5000000       0.0000000       0      0      1      45
4      0.7500000       0.0000000       0      0      1      45
5      1.0000000       0.0000000       0      0      1      45
:          :               :           :      :      :      :
21     5.0000000       0.0000000       0      0      1      45
22     5.2500000       0.0000000       0      0      1      45
23     5.5000000       0.0000000       0      0      1      45
24     5.7500000       0.0000000       0      0      1      45
25     6.0000000       0.0000000       0      0      1      45
:          :               :           :      :      :      :
126    0.0000000       1.7500000       1      0      1      45
127    0.0000000       1.5000000       1      0      1      45
128    0.0000000       1.2500000       1      0      1      45
129    0.0000000       1.0000000       1      0      1      45
130    0.0000000       0.7500000       1      0      1      45
:          :               :           :      :      :      :
1199   9.9997852       5.4989836       0      0      0      0
1200   9.9994428       4.7477471       0      0      0      0
1201   9.9995229       4.9980046       0      0      0      0
ELE    N1          N2          N3          N4
1      2           3           174         173
2      3           4           175         174
3      4           5           176         175
4      5           6           177         176
5      6           7           178         177
:      :           :           :           :
1115   1200        1201        1191        1190
1116   1201        1198        1192        1191
1117   272         273         1200        1122
1118   273         274         1201        1200
1119   274         275         1198        1201
Heat convection on Boundary
No        N1       N2
1         67       68
2         68       69
3         69       70
:         :        :
40        106      107
41        107      108
42        108      109
```

```
Pressure on Boundary
No       N1       N2       PRESSURE-MPa
1        44       45       -1E+6
2        45       46       -1E+6
3        46       47       -1E+6
⋮        ⋮        ⋮          ⋮
21       64       65       -1E+6
22       65       66       -1E+6
23       66       67       -1E+6
```

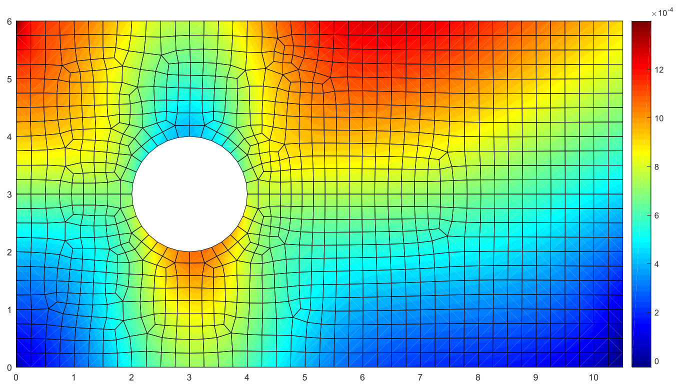
และตัวอย่างผลลัพธ์ของปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมเจาะรูนี้ แสดงรูปด้านล่าง

```
OUTPUT DATA
NodeID x              y              u              v              Sxx            Syy            Sxy
     1 0.00000000E+00 0.00000000E+00 0.00000000E+00 0.00000000E+00 1.56645756E+06 3.30316693E+05 1.76019169E+05
     2 2.50000000E-01 0.00000000E+00 2.63017375E-04 1.13609422E-04 1.50761864E+06 1.62059064E+05 9.95383535E+04
     3 5.00000000E-01 0.00000000E+00 5.01562355E-04 1.59687526E-04 1.42846503E+06 -7.75725495E+02 1.70369279E+04
     4 7.50000000E-01 0.00000000E+00 7.36257775E-04 2.07307376E-04 1.39421285E+06 1.15872821E+03 1.16363582E+04
     5 1.00000000E+00 0.00000000E+00 9.68728988E-04 2.58750808E-04 1.36447311E+06 -2.44226775E+03 1.49783629E+04
     6 1.25000000E+00 0.00000000E+00 1.19738937E-03 3.17128547E-04 1.32727178E+06 -3.06446282E+03 2.13538590E+04
     7 1.50000000E+00 0.00000000E+00 1.42024989E-03 3.82127041E-04 1.27767272E+06 -3.74829140E+03 2.93732618E+04
     8 1.75000000E+00 0.00000000E+00 1.63476752E-03 4.51867005E-04 1.21476603E+06 -3.28786925E+03 3.80383365E+04
     9 2.00000000E+00 0.00000000E+00 1.83877910E-03 5.22371182E-04 1.14235823E+06 -1.37338341E+03 4.42393268E+04
    10 2.25000000E+00 0.00000000E+00 2.03155713E-03 5.88666749E-04 1.06696895E+06 1.45409020E+03 4.44163802E+04
```

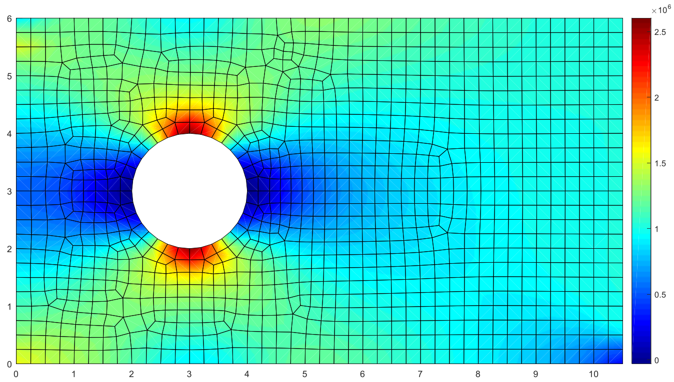
รูปที่ 6.4 ตัวอย่างของผลจากไฟล์ out.txt



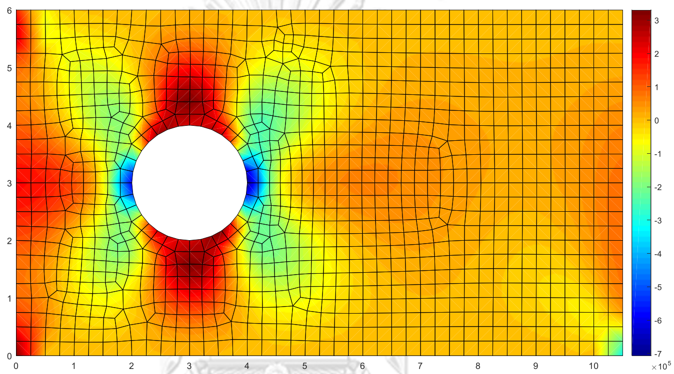
รูปที่ 6.5 ตัวอย่างของผลการเคลื่อนที่ในแนวแกน x



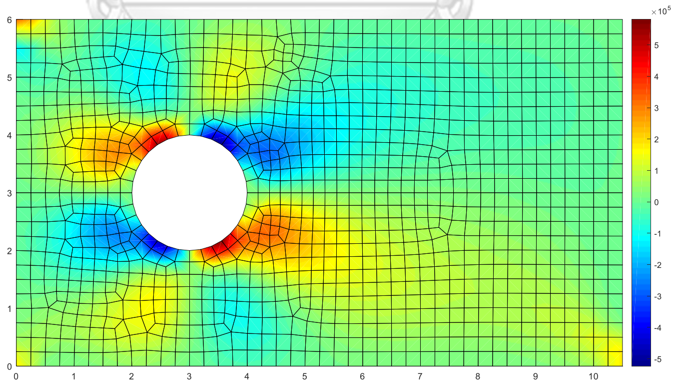
รูปที่ 6.6 ตัวอย่างของผลการเคลื่อนที่ในแนวแกน y



รูปที่ 6.7 ตัวอย่างของผลความเค้นตั้งฉากแกน x



รูปที่ 6.8 ตัวอย่างของผลความเค้นตั้งฉากแกน y



รูปที่ 6.9 ตัวอย่างของผลและความเค้นเฉือนบนระนาบ xy

บทที่ 7
ผลการทดสอบโปรแกรมสมการรูปแบบปิด

ในบทนี้ สมการรูปแบบปิดที่ประดิษฐ์ขึ้นจะถูกนำมาตรวจสอบผลความแม่นยำและเวลาที่ใช้ในการคำนวณโดยเปรียบเทียบกับวิธีทั่วไป (วิธีเกาส์-เลอจองด์) การตรวจสอบจะดำเนินไปทีละขั้น เริ่มจากการทดสอบกับปัญหาการถ่ายเทความความร้อนก่อน แล้วจึงนำไปทดสอบกับการแก้ปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อนตามลำดับต่อไป โดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้ถูกรันโดยคอมพิวเตอร์ที่มีระบบประมวลผลคือ Intel® Core™ i7-4770 CPU 3.40GHz RAM 4.0GB

7.1 การตรวจสอบโปแกรมสมการรูปแบบปิดกับปัญหาการถ่ายเทความร้อน

ตัวอย่างปัญหาที่ถูกใช้ในการตรวจสอบความแม่นยำและเวลาที่ใช้ในการคำนวณของสมการรูปแบบปิดประกอบไปด้วยปัญหา 6 รูปแบบด้วยกัน ได้แก่

- ปัญหาเอลิเมนต์เดี่ยว
- ปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่ไม่มีการสร้างความร้อนขึ้นเอง
- ปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นสามเหลี่ยม ที่มีการสร้างความร้อนขึ้นเอง
- ปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัส ที่มีการสร้างความร้อนขึ้นเอง
- ปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัส ที่มีการพาความร้อนตามขอบ
- ปัญหาการนำความร้อนของแผ่นสี่เหลี่ยมเจาะรู

7.1.1 ปัญหาเอลิเมนต์เดี่ยว

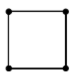
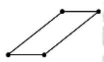
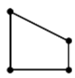
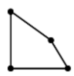
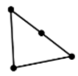
การทดสอบโปรแกรมของวิธีรูปแบบปิดด้วยปัญหาเอลิเมนต์เดี่ยว เป็นการพิจารณาความแม่นยำในการสร้างเมทริกซ์การนำความร้อน, $[K_C]$, ของหนึ่งเอลิเมนต์เทียบกับผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีเกาส์-เลอจองด์ โดยพิจารณาจากหลักที่ว่า จำนวนจุดเกาส์ที่ใช้ในการคำนวณเป็นตัวบ่งบอกถึงความแม่นยำของวิธีเกาส์-เลอจองด์ นั่นคือ ถ้าใช้จำนวนจุดเกาส์มากก็แสดงว่าผลลัพธ์ที่ได้มีความแม่นยำสูง และถ้าค่าที่คำนวณได้จากวิธีรูปแบบปิดมีค่าใกล้กับค่าที่ได้จากวิธีของเกาส์-เลอจองด์ที่ใช้จำนวนจุดเกาส์มาก ๆ ก็น่าจะสรุปได้ว่าวิธีรูปแบบปิดที่ประดิษฐ์ขึ้นมีความแม่นยำสูงด้วยเช่นกัน โดยการทดสอบจะทำกับเอลิเมนต์ที่มีรูปร่างต่าง ๆ กัน 9 แบบ และใช้ผลรวมของผลต่างสัมพัทธ์ยกกำลังสองของสมาชิกแต่ละตัวในเมทริกซ์การนำความร้อน ดังสมการ (7.1) เป็นค่าสำหรับบ่งบอกความแม่นยำในการคำนวณ

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\left(\frac{K_{ij}^{ClosedForm}-K_{ij}^{GaussLegendre}}{K_{ij}^{ClosedForm}}\right)^{2}}\times 100\% \qquad (7.1)$$

รูปแบบเอลิเมนต์ต่าง ๆ กันทั้ง 9 แบบที่นำมาทดสอบ มีลักษณะของรูปร่างดังนี้

- <u>กรณี A</u> : สี่เหลี่ยมมุมฉาก - มีด้านคู่ขนาน 2 คู่
- <u>กรณี B</u> : สี่เหลี่ยมด้านขนาน
- <u>กรณี C</u> : สี่เหลี่ยมคางหมู – มีด้านคู่ขนาน 1 คู่, มุมฉาก 2 มุม, มุมแหลม 1 มุม, มุมป้าน 1 มุม
- <u>กรณี D</u> : สี่เหลี่ยมคางหมู – มีด้านคู่ขนาน 1 คู่, มุมฉาก 2 มุม, มุมแหลม 2 มุม
- <u>กรณี E</u> : สี่เหลี่ยมใด ๆ – มุมฉาก 1 มุม, มุมแหลม 1 มุม และมุมป้าน 2 มุม
- <u>กรณี F</u> : สี่เหลี่ยมใด ๆ – มุมฉาก 1 มุม, มุมแหลม 2 มุม และมุมป้าน 1 มุม
- <u>กรณี G</u> : สี่เหลี่ยมใด ๆ – มุมแหลม 3 มุม และมุมป้าน 1 มุม
- <u>กรณี H</u> : สี่เหลี่ยมใด ๆ – มุมแหลม 2 มุม และมุมป้าน 2 มุม
- <u>กรณี I</u> : สี่เหลี่ยมใด ๆ – มุม 180 องศา 1 มุม

ตารางที่ 7.1 ผลต่างความแม่นยำของเมทริกซ์การนำความร้อนระหว่างสมการรูปแบบปิดกับวิธีเกาส์-เลอจองด์

จำนวนจุดเกาส์	กรณี A	กรณี B	กรณี C	กรณี D	กรณี E	กรณี F	กรณี G	กรณี H	กรณี I
									
2×2	**0.00**	**0.00**	200.03	34.74	9.81	137.02	14.40	37.17	193.20
3×3	-	-	7.07	9.91	0.23	8.17	0.44	3.65	93.40
4×4	-	-	0.18	2.76	0.01	0.55	0.02	0.52	55.41
5×5	-	-	0.01	0.76	**0.00**	0.04	**0.00**	0.09	37.77
6×6	-	-	**0.00**	0.21	-	**0.00**	-	0.02	27.21
7×7	-	-	-	0.06	-	-	-	**0.00**	19.63
8×8	-	-	-	0.02	-	-	-	-	15.25
9×9	-	-	-	**0.00**	-	-	-	-	12.20
10×10	-	-	-	-	-	-	-	-	9.98

ตารางที่ 7.1 แสดงให้เห็นว่า ในกรณีที่เอลิเมนต์มีรูปร่างไม่บิดเบี้ยว (กรณี A และ B) ผลการคำนวณด้วยวิธีรูปแบบปิดให้ค่าแม่นยำเท่ากับการใช้จุดเกาส์สองจุด และการเพิ่มจำนวนจุดเกาส์มากกว่านี้ก็ไม่ได้ให้ผลที่แตกต่าง แต่เมื่อเอลิเมนต์มีรูปร่างที่บิดเบี้ยวมากยิ่งขึ้น (กรณี C, E, F, G และ

H) วิธีเกาส์-เลอจองด์ที่จำนวนจุดเกาส์น้อย ๆ มีความแตกต่างจากวิธีรูปแบบปิดมาก แต่เมื่อเพิ่มจำนวนจุดเกาส์จะพบว่า ความแตกต่างดังกล่าวมีค่าลดลงเรื่อย ๆ โดยต้องเพิ่มจำนวนจุดเกาส์ขึ้นไปในปริมาณหนึ่งจึงจะได้ค่าเทียบเท่ากับวิธีรูปแบบปิด และเมื่อรูปร่างเอลิเมนต์บิดเบี้ยวไปมาก ๆ ดังเช่นกรณี D วิธีของเกาส์-เลอจองด์ต้องใช้จุดเกาส์ถึง 9×9 จุด ถึงจะได้เมทริกซ์การนำความร้อนที่มีความแม่นยำเทียบเท่ากับสมการรูปแบบปิด หรืออย่างในกรณี I ที่ถึงแม้จะใช้จุดเกาส์มากถึง 10 x 10 จุดแล้ว แต่ก็ยังไม่ได้ผลลัพธ์ที่เท่ากับวิธีในรูปแบบปิด จากตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่าวิธีรูปแบบปิดที่ประดิษฐ์ขึ้นให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูงในทุก ๆ รูปร่างของเอลิเมนต์ที่นำมาทดสอบ

ในขณะที่ประสิทธิภาพของวิธีรูปแบบปิด สามารถแสดงได้จากค่าสัดส่วนเวลาที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์การนำความร้อนของวิธีเกาส์-เลอจองด์ต่อเวลาของวิธีรูปแบบปิด โดยค่าที่คำนวณได้จะเป็นตัวบ่งบอกว่าวิธีของเกาส์-เลอจองด์ใช้เวลาในการคำนวณเป็นกี่เท่าเมื่อเทียบกับวิธีรูปแบบปิด

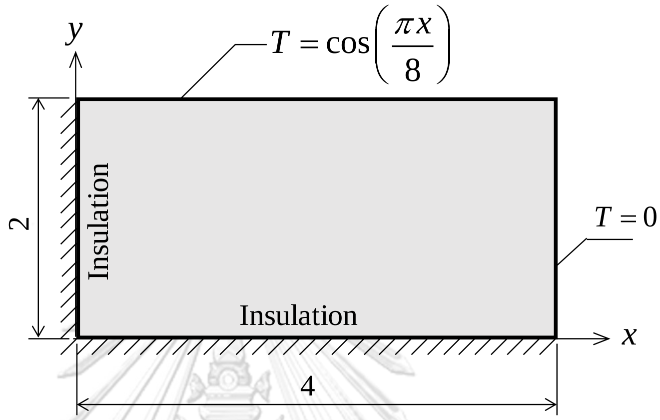
ตารางที่ 7.2 อัตราส่วนเวลาที่ใช้ในการคำนวณด้วยวิธีของเกาส์-เลอจองด์ต่อสมการรูปแบบปิด

จำนวนจุดเกาส์	กรณี A	กรณี B	กรณี C	กรณี D	กรณี E	กรณี F	กรณี G	กรณี H	กรณี I
2×2	2.09	2.08	2.09	1.98	1.51	1.47	1.51	1.48	1.48
3×3	-	-	2.08	2.06	1.55	1.56	1.55	1.52	1.57
4×4	-	-	2.20	2.16	1.61	1.61	1.61	1.59	1.60
5×5	-	-	2.38	2.26	1.71	1.65	1.71	1.72	1.68
6×6	-	-	2.49	2.47	-	1.80	-	1.81	1.78
7×7	-	-	-	2.59	-	-	-	1.95	1.93
8×8	-	-	-	2.78	-	-	-	-	2.11
9×9	-	-	-	3.05	-	-	-	-	2.24
10×10	-	-	-	-	-	-	-	-	2.42

ในกรณีของเวลาที่ใช้ในการคำนวณ วิธีของเกาส์-เลอจองด์ใช้เวลามากกว่าวิธีรูปแบบปิดในทุก ๆ กรณีตั้งแต่นานกว่าประมาณ 1.5 เท่าไปจนถึงประมาณ 3 เท่า ดังแสดงในตารางที่ 7.2 และหากพิจารณาเวลาที่ใช้ในการคำนวณของวิธีสมการรูปแบบปิดเพียงอย่างเดียวจะพบว่า ถ้าเอลิเมนต์มีด้านคู่ขนานอยู่ด้วย จะช่วยลดเวลาในการคำนวณลงโดยเฉลี่ยประมาณ 25% เมื่อเปรียบเทียบกับกรณีที่ไม่มีด้านใดขนานกันเลย

7.1.2 ปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่ไม่มีการสร้างความร้อนขึ้นเอง

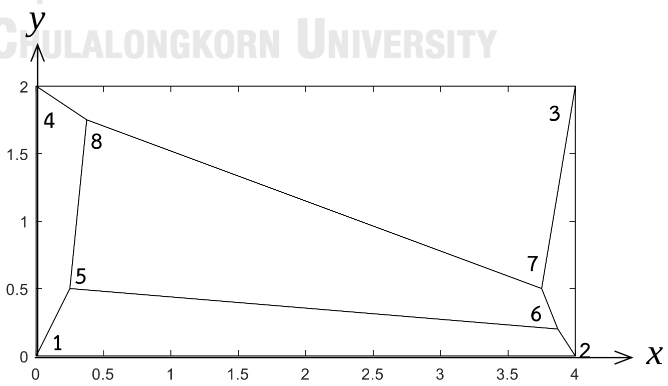
โดเมนของปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นสี่เหลียมผืนผ้า ที่ไม่มีการสร้างความร้อนขึ้นเอง โดยมีขนาดดังแสดงในรูปที่ 7.1 กำหนดให้ขอบด้านซ้ายและด้านล่างเป็นฉนวนกันความร้อน ขอบด้านขวาถูกกำหนดอุณหภูมิให้มีค่าเท่ากับศูนย์ ส่วนขอบด้านบนถูกกำหนดอุณหภูมิในรูปของฟังก์ชันโคซายน์ ซึ่งปัญหาดังกล่าวมีผลเฉลยแม่นตรงของการกระจายตัวของอุณหภูมิ [19] ดังสมการ 7.2



รูปที่ 7.1 ปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้า

$$T(x,y) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi y}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{8}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{4}\right)} \tag{7.2}$$

การทดสอบเริ่มต้นด้วยการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ 5 เอลิเมนต์ ดังรูปที่ 7.2

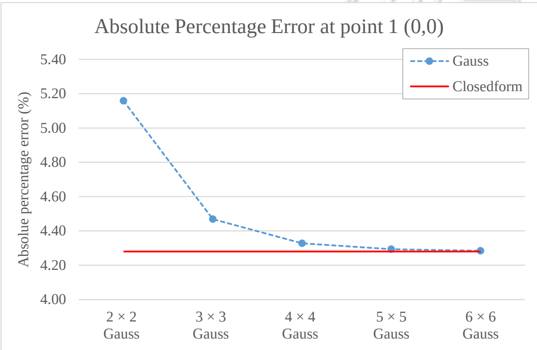


รูปที่ 7.2 การแบ่งเอลิเมนต์ของปัญหา

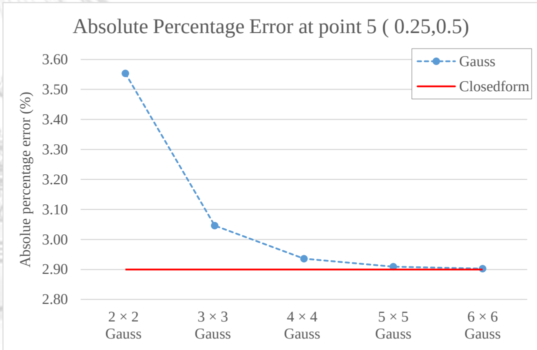
จากนั้นทำการวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีรูปแบบปิดและวิธีเกาส์-เลอจองด์ แล้วนำผลลัพธ์ของอุณหภูมิที่คำนวณได้ไปเปรียบเทียบกับค่าผลเฉลยแม่นตรง โดยพิจารณาจากค่าเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ของจุดต่อแต่ละจุดต่อด้วยสมการ (7.3)

$$error = \left| \frac{T - T^{Exact}}{T^{Exact}} \right| \times 100\% \tag{7.3}$$

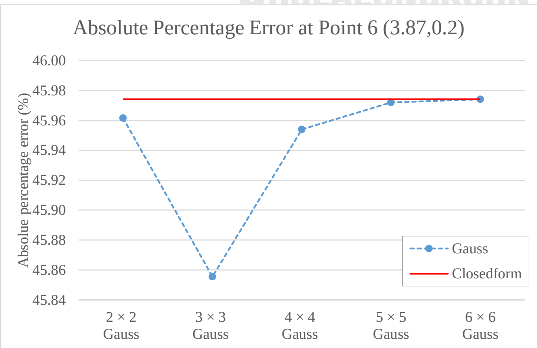
รูปที่ 7.3 (ก) - (ฉ) แสดงค่าความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ที่แต่ละจุดต่อของวิธีรูปแบบปิดเปรียบเทียบกับผลของวิธีเกาส์-เลอจองด์ที่ใช้จำนวนจุดเกาส์ต่าง ๆ กัน พบว่าที่แต่ละจุดต่อ การเพิ่มจำนวนจุดเกาส์ให้มากขึ้น จะทำให้ค่าคลาดเคลื่อนสมบูรณ์มีค่าเข้าใกล้ค่าคลาดเคลื่อนสมบูรณ์จากวิธีรูปแบบปิด นอกจากนี้ยังพบว่าที่บางจุดต่อ ซึ่งได้แก่ จุดต่อที่ 6 และ 7 แม้ว่าวิธีของเกาส์-เลอจองด์ 3×3 จุด จะให้ความแม่นยำที่มากกว่าวิธีรูปแบบปิด แต่เมื่อเพิ่มจำนวนจุดเกาส์ ค่าคลาดเคลื่อนกลับขยับเข้าใกล้วิธีรูปแบบปิด ซึ่งเป็นแนวโน้มลักษณะเดียวกันกับจุดต่ออื่น ๆ ส่วนรูปที่ 7.3 (ฉ) เป็นกราฟแสดงค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนของจุดต่อทั้งหมด



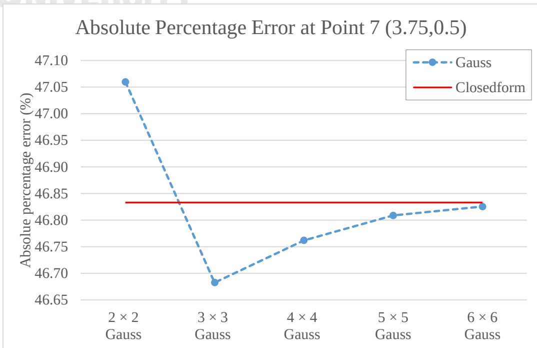
ก) ค่าความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ ณ จุดที่ 1



ข) ค่าความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ ณ จุดที่ 5

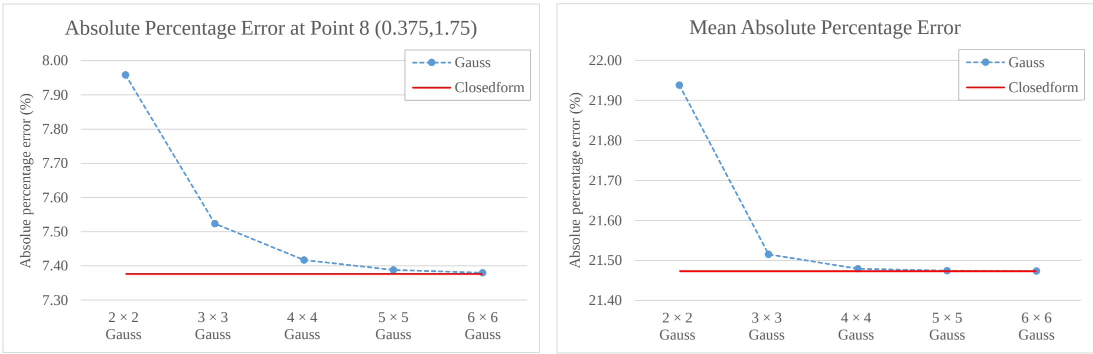


ค) ค่าความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ ณ จุดที่ 6



ง) ค่าความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ ณ จุดที่ 7

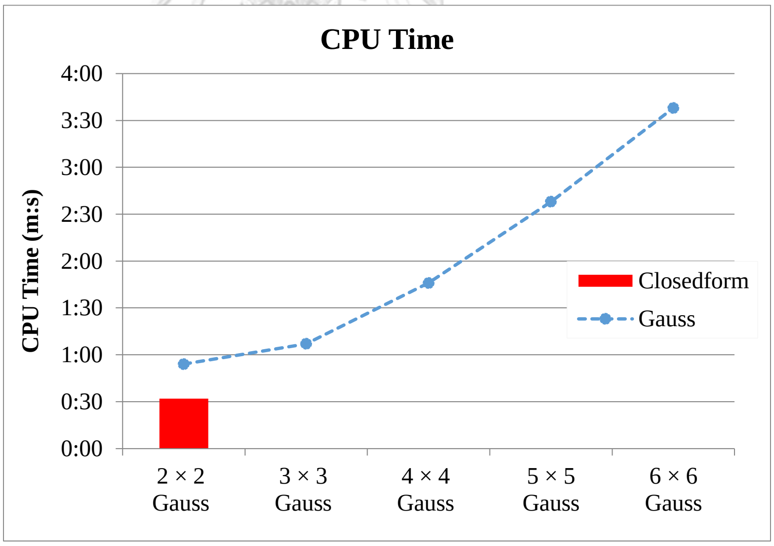
รูปที่ 7.3 กราฟเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ระหว่างวิธีรูปแบบปิดและวิธีเกาส์-เลอจองด์



จ) ค่าความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ ณ จุดที่ 8 ฉ) ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์

รูปที่ 7.3 กราฟเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ระหว่างวิธีรูปแบบปิดและวิธีเกาส์-เลอจองด์ (ต่อ)

ในส่วนของเวลาที่ใช้ในการคำนวณ พิจารณาจากเวลาที่ใช้ในการสร้างเมทริกซ์การนำความร้อนของระบบ โดยคำนวณแบบวนซ้ำ 100,000 รอบ เพื่อลดผลที่เกิดจากการแกว่งของข้อมูล พบว่าการเพิ่มจำนวนจุดเกาส์ส่งผลต่อเวลาที่ใช้ในการคำนวณเพิ่มมากขึ้นอย่างเห็นได้ชัด ส่วนเวลาในการคำนวณของวิธีรูปแบบปิดใช้เวลาประมาณครึ่งหนึ่งของวิธีเกาส์-เลอจองด์ 2×2 จุดเกาส์เท่านั้น ดังแสดงในรูปที่ 7.4

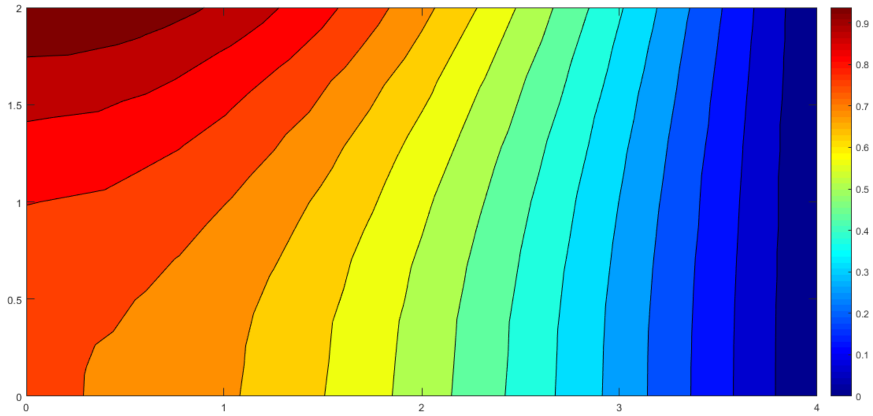


รูปที่ 7.4 กราฟแสดงเวลาที่ใช้ในการคำนวณระหว่างวิธีรูปแบบปิดและวิธีเกาส์-เลอจองด์

จากนั้นทำการพิจารณาปัญหาเดิมโดยเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์เป็น 118 เอลิเมนต์ ซึ่งผลการกระจายตัวของอุณหภูมิบนแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าจากการคำนวณจากสมการรูปแบบปิดได้แสดงไว้ในรูปที่ 7.5 การเปรียบเทียบความแม่นยำของผลลัพธ์จากวิธีรูปแบบปิดกับวิธีของเกาส์-เลอจองด์ สามารถทำได้โดยพิจารณาจากค่าเฉลี่ยของเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ (mean absolute percentage error, MAPE) ดังแสดงในสมการ (7.4)

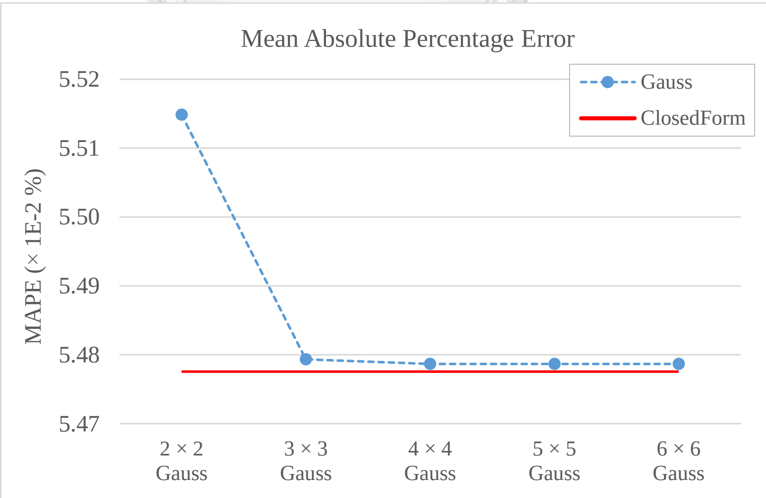
$$MAPE = \frac{1}{NN}\sum_{n=1}^{NN}\left|\frac{T_n - T_n^{Exact}}{T_n^{Exact}}\right| \times 100\% \tag{7.4}$$

โดย NN คือ จำนวนจุดต่อทั้งหมด

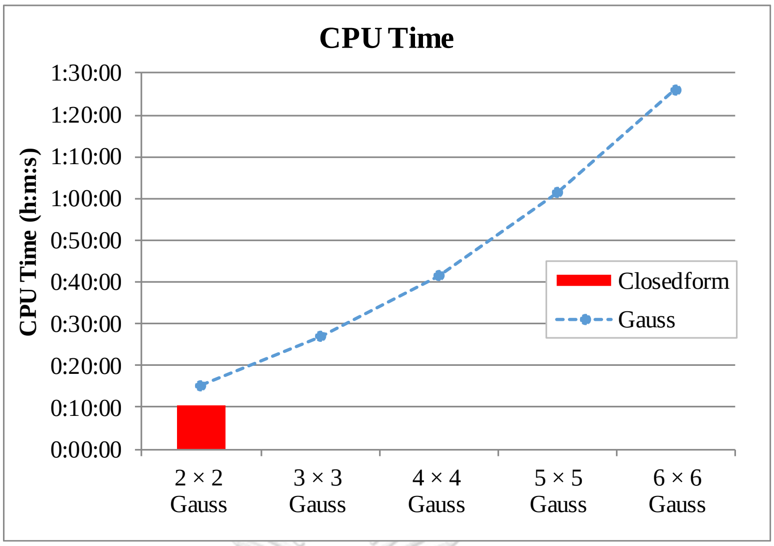


รูปที่ 7.5 การกระจายตัวของอุณหภูมิบนแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยคำนวณจากสมการรูปแบบปิด

จากรูปที่ 7.6 แสดงว่า เมื่อเพิ่มจำนวนจุดเกาส์ในการคำนวณจะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนจากวิธีของเกาส์-เลอจองด์ลดลงเข้าใกล้ค่าที่ได้จากวิธีรูปแบบปิด และเมื่อพิจารณาเวลาในการคำนวน โดยทดสอบจากการคำนวณเฉพาะเมทริกซ์การนำความร้อนที่วนซ้ำเป็นจำนวน 100,000 รอบ จะพบว่าวิธีรูปแบบปิดใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีของเกาส์-เลอจองด์ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง เมื่อเพิ่มจำนวนจุดเกาส์ในการคำนวณ จะยิ่งใช้เวลาในการคำนวณสูงขึ้น ดังรูปที่ 7.7



รูปที่ 7.6 ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์

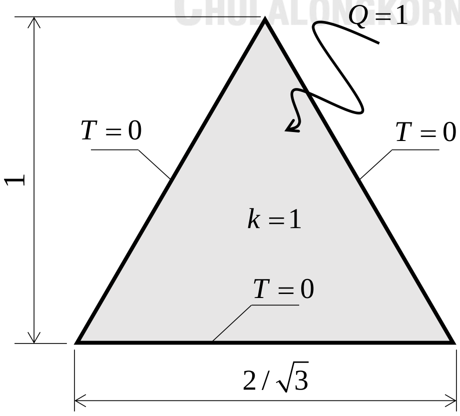


รูปที่ 7.7 เวลาที่ใช้ในการคำนวนเมทริกซ์การนำความร้อน

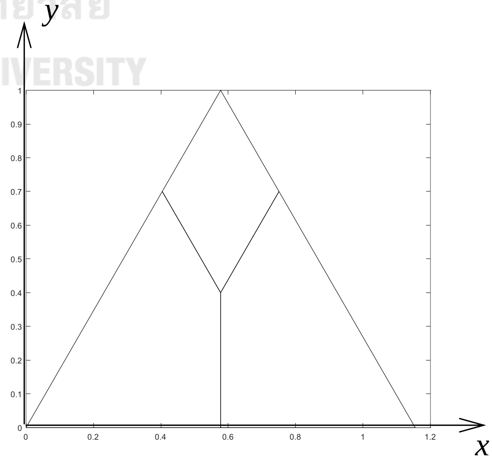
7.1.3 ปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นสามเหลี่ยม ที่มีการสร้างความร้อนขึ้นเอง

โดเมนของปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นรูปสามเหลี่ยมมีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 7.8 โดยกำหนดให้อุณหภูมิตลอดขอบมีค่าเท่ากับศูนย์และมีการสร้างความร้อนขึ้นเองหนึ่งหน่วย ปัญหาดังกล่าวมีผลเฉลยแม่นตรงของการกระจายตัวของอุณหภูมิ [20] ดังสมการ (7.5)

$$T(x,y)=\frac{Q}{4k}\left(y-2+\sqrt{3}x\right)\left(y-\sqrt{3}x\right)y \tag{7.5}$$

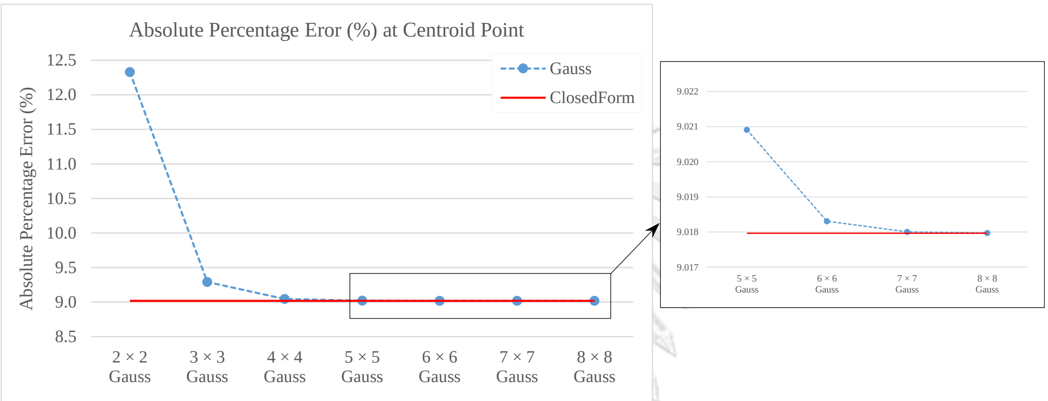


รูปที่ 7.8 ปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นสามเหลี่ยม



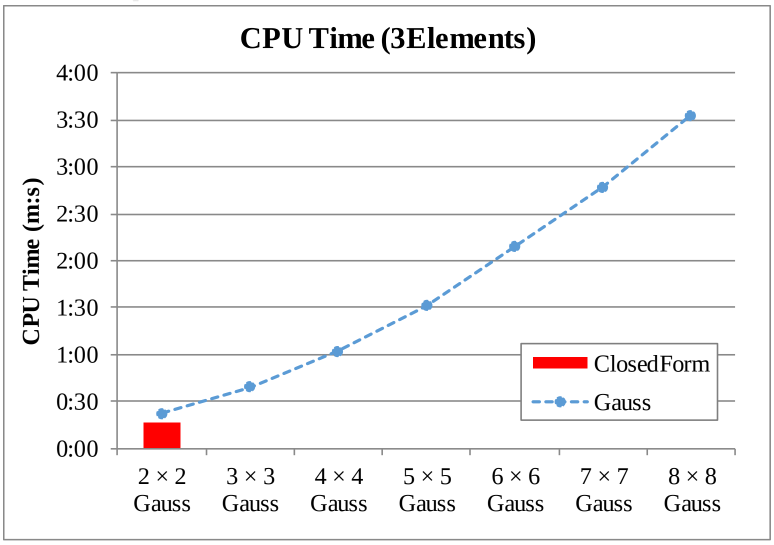
รูปที่ 7.9 การแบ่งเอลิเมนต์ของปัญหา

ปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นรูปสามเหลี่ยมถูกแบ่งออกเป็น 3 เอลิเมนต์ย่อย ๆ ดังแสดงในรูปที่ 7.9 ผลลัพธ์ที่คำนวณได้ทั้งจากวิธีรูปแบบปิดและวิธีของเกาส์-เลอจองด์ถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง โดยพิจารณาจากค่าเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ (absolute percentage error) ที่ตำแหน่งจุดเซนทรอยด์ (centroid) ของแผ่นสามเหลี่ยม จากการคำนวณค่าเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์พบว่า การเพิ่มจำนวนจุดเกาส์ทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ของวิธีเกาส์-เลอจองด์ลดลงและเข้าใกล้ค่าความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ที่คำนวณได้จากวิธีรูปแบบปิด ดังแสดงในรูปที่ 7.10



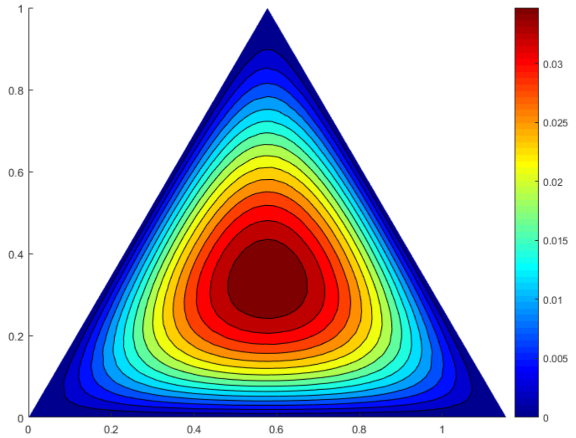
รูปที่ 7.10 ค่าความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์

หากเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวนระหว่างวิธีรูปแบบปิด และวิธีของเกาส์-เลอจองด์ จะพบว่าวิธีรูปแบบปิดใช้เวลาน้อยกว่าวิธีของเกาส์ 2×2 จุด และรูปที่ 7.11แสดงให้เห็นว่าการเพิ่มจำนวนจุดเกาส์ในการคำนวณ จะยิ่งใช้เวลาในการคำนวณเพิ่มมากขึ้น



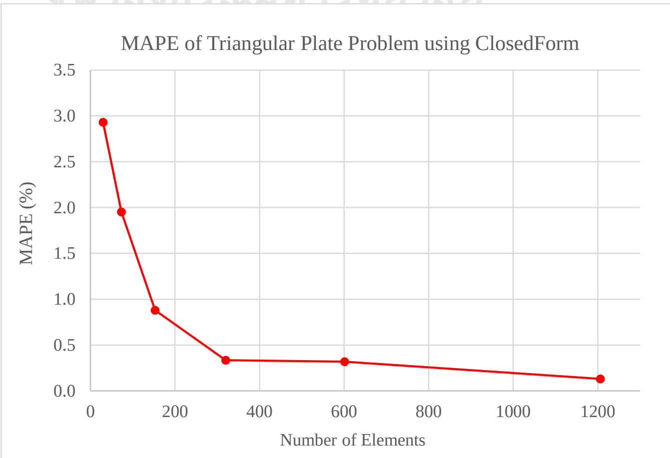
รูปที่ 7.11 เวลาที่ใช้ในการคำนวณของปัญหาการนำความร้อนในแผ่นสามเหลี่ยม

จากนั้นทำการตรวจสอบความแม่นยำของวิธีรูปแบบปิดที่ประดิษฐ์ขึ้นเพิ่มเติม ด้วยการใช้โปรแกรม AUTOMESH2D ในการสร้างเอลิเมนต์ภายในโดเมนสามเหลี่ยมเป็นจำนวน 30, 73, 153, 320, 601 และ 1,206 เอลิเมนต์ตามลำดับ การกระจายตัวของอุณหภูมิจากการคำนวณด้วยวิธีรูปแบบปิดบนการแบ่งโดเมนเป็น 1,206 เอลิเมนต์ แสดงดังรูปที่ 7.12

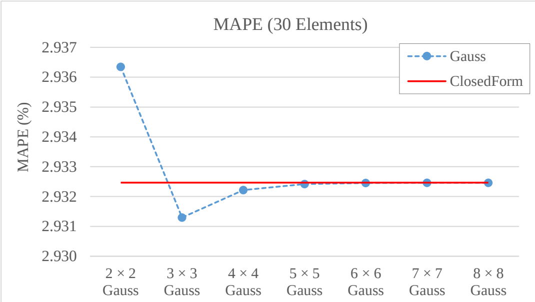


รูปที่ 7.12 การกระจายตัวของอุณหภูมิบนแผ่นแผ่นรูปสามเหลี่ยม

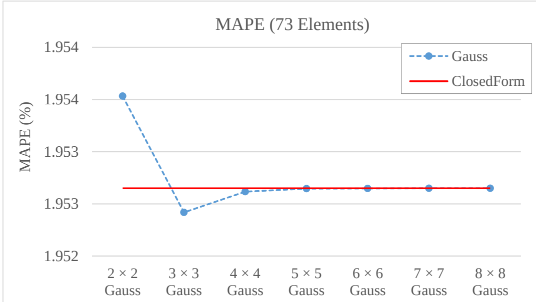
จากรูปที่ 7.13 พบว่าการเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ส่งผลต่อความแม่นยำที่เพิ่มขึ้น โดยค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์จากการคำนวณด้วยวิธีรูปแบบปิดลดลงตามจำนวนเอลิเมนต์ที่เพิ่มขึ้น และหากพิจารณาค่าความแม่นยำในแต่ละกรณีของการเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์เปรียบเทียบกับวิธีของเกาส์-เลอจองด์ พบว่าเมื่อเพิ่มจำนวนจุดเกาส์ในการคำนวณ ค่าความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์จะมีค่าลู่เข้าสู่ค่าความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ที่ได้จากวิธีรูปแบบปิด ดังแสดงในรูปที่ 7.14 (ก) – (ฉ)



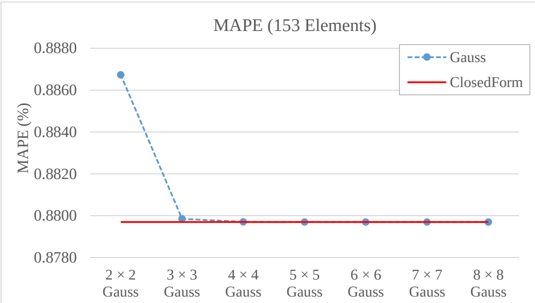
รูปที่ 7.13 ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์เมื่อเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ของวิธีรูปแบบปิด



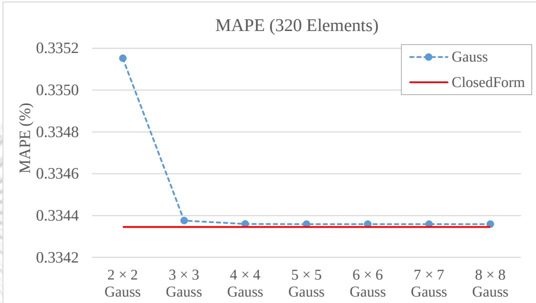
ก) แบ่งปัญหาเป็น 30 เอลิเมนต์



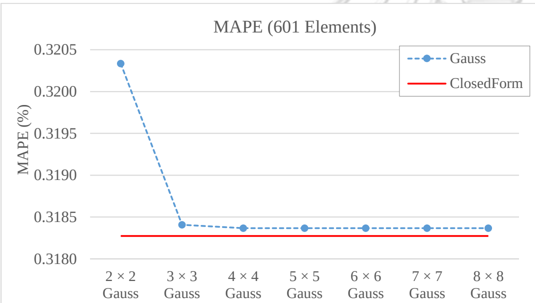
ข) แบ่งปัญหาเป็น 73 เอลิเมนต์



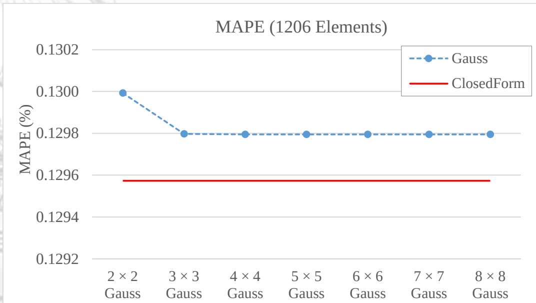
ค) แบ่งปัญหาเป็น 153 เอลิเมนต์



ง) แบ่งปัญหาเป็น 320 เอลิเมนต์



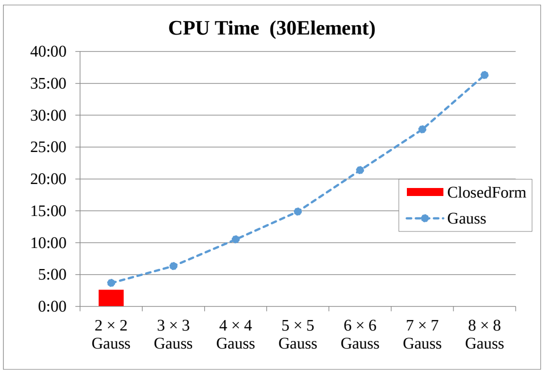
จ) แบ่งปัญหาเป็น 601 เอลิเมนต์



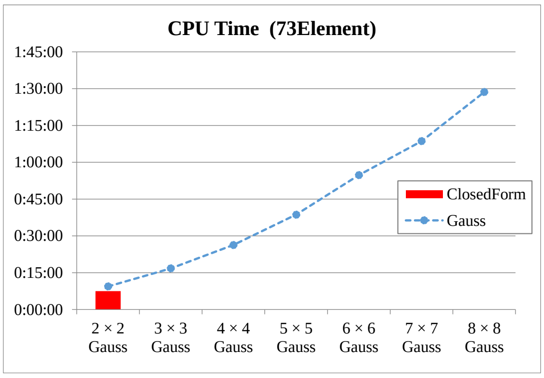
ฉ) แบ่งปัญหาเป็น 1,206 เอลิเมนต์

รูปที่ 7.14 ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อน

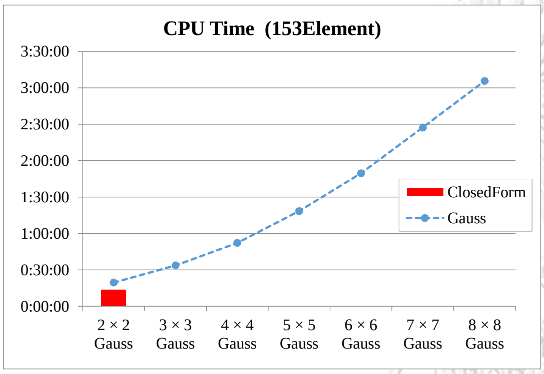
รูปที่ 7.15 (ก) – (ฉ) แสดงการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณในแต่ละกรณีของการเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ พบว่าการเพิ่มจำนวนจุดเกาส์เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำเพิ่มขึ้นจะส่งผลให้เวลาที่ใช้ในการคำนวณเพิ่มมากขึ้นด้วย แต่ในกรณีของวิธีรูปแบบปิดซึ่งมีผลการคำนวณที่มีความแม่นยำนั้น ใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีของเกาส์-เลอจองด์ที่ใช้จุดเกาส์ 2x2 จุดในทุกกรณี



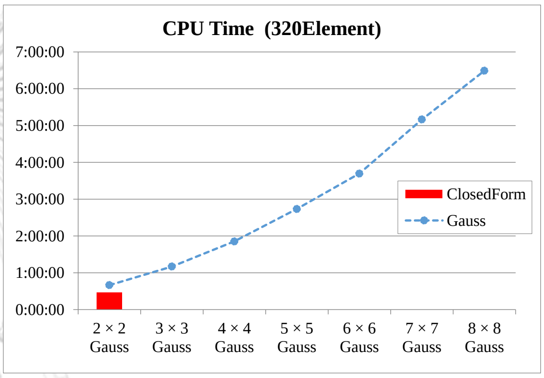
ก) แบ่งปัญหาเป็น 30 เอลิเมนต์



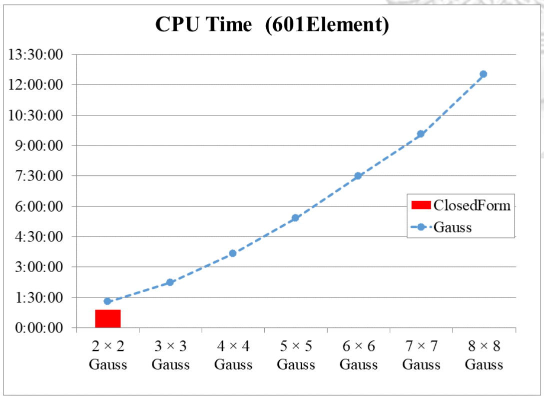
ข) แบ่งปัญหาเป็น 73 เอลิเมนต์



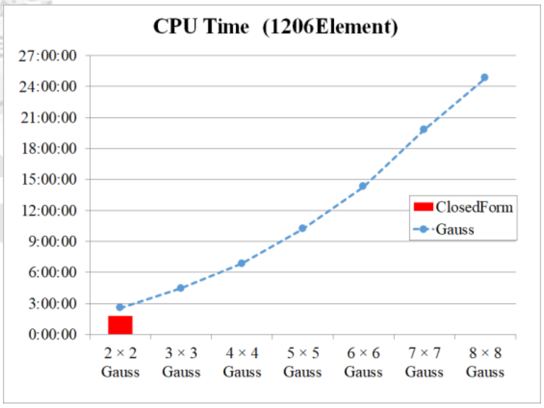
ค) แบ่งปัญหาเป็น 153 เอลิเมนต์



ง) แบ่งปัญหาเป็น 320 เอลิเมนต์



จ) แบ่งปัญหาเป็น 601 เอลิเมนต์



ฉ) แบ่งปัญหาเป็น 1,206 เอลิเมนต์

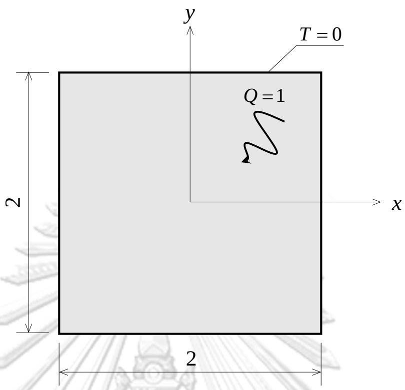
รูปที่ 7.15 เวลาที่ใช้ในการคำนวณปัญหาแผ่นรูปสามเหลี่ยม

7.1.4 ปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัส ที่มีการสร้างความร้อนขึ้นเอง

ลักษณะของปัญหาการนำความร้อนในหัวข้อนี้เป็นแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 2×2 หน่วย ที่กำหนดอุณหภูมิตลอดขอบมีค่าเท่ากับศูนย์ และมีอัตราความร้อนที่สร้างขึ้นเอง $Q = 1$ โดยกำหนดให้

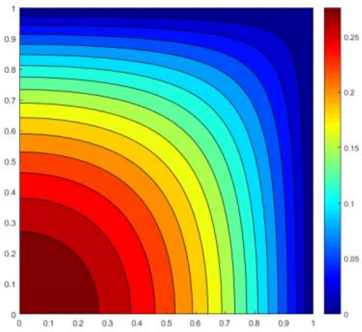
สัมประสิทธิ์การนำความร้อนของแผ่นสี่เหลี่ยม $k = 1$ ดังแสดงในรูปที่ 7.16 ส่วนผลเฉลยแม่นตรงของการกระจายตัวของอุณหภูมิสามารถคำนวณได้จากสมการในรูปอนุกรมอนันต์ [20] ดังสมการ (7.6)

$$T(x,y) = \frac{(1-x^2)}{2} - \frac{16}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right)\cosh\left(\frac{(2n+1)\pi y}{2}\right)}{(2n+1)^3 \cosh\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)} \tag{7.6}$$

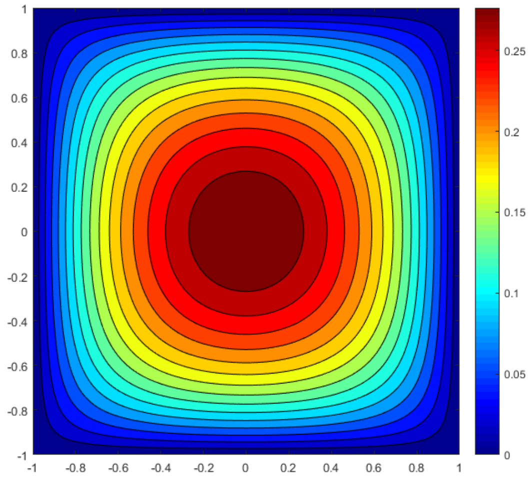


รูปที่ 7.16 ปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัส

เนื่องจากปัญหามีลักษณะสมมาตรตามแนวแกน x และ y จึงสามารถพิจารณาเพียงหนึ่งในสี่ของปัญหาทั้งหมดได้ โดยในตัวอย่างนี้จะพิจารณาโดเมนของปัญหาในจตุภาคที่ 1 ที่มีขนาด 1×1 หน่วย โดยกำหนดเงื่อนไขขอบเขตตลอดขอบบนและขอบขวาให้มีค่าอุณหภูมิเท่ากับศูนย์ ส่วนขอบซ้ายและขอบล่างซึ่งเป็นแนวสมมาตร จะถูกกำหนดให้อัตราความร้อนที่ผ่านขอบมีค่าเท่ากับศูนย์ โดเมนของปัญหาถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ จำนวน 47, 239, 404, 845 และ 1,606 ตามลำดับ เพื่อเปรียบเทียบความแม่นยำและค่าความถูกต้องเมื่อเทียบกับผลเฉลยแม่นตรงระหว่างวิธีรูปแบบปิดและวิธีของเกาส์-เลอจองด์ โดยการกระจายของอุณหภูมิ เมื่อได้รับฟลักซ์ความร้อน แสดงดังรูปที่ 7.17 โดยผลลัพธ์ที่แสดงนี้คำนวณมากจากวิธีรูปแบบปิดที่แบ่งปัญหาเป็น 1,606 เอลิเมนต์



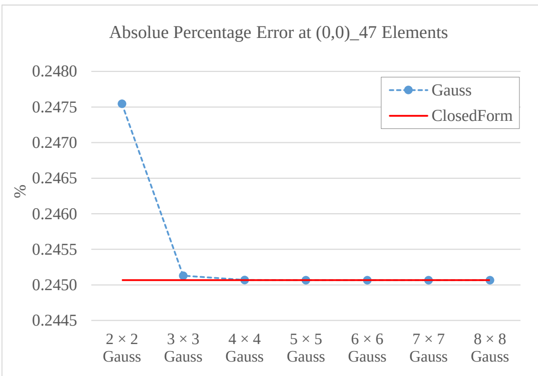
ก) ผลของ 1/4 ส่วนของปัญหา



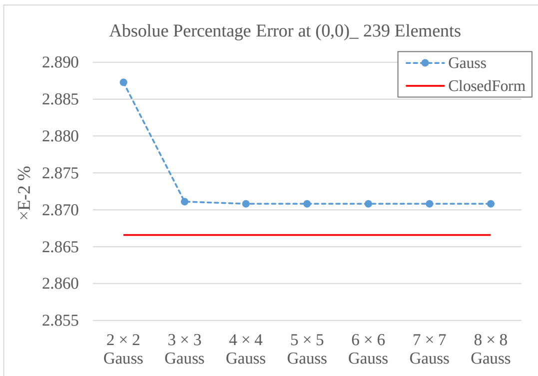
ข) ผลของปัญหาทั้งหมด

รูปที่ 7.17 การกระจายตัวของอุณหภูมิบนแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัส (1,606 เอลิเมนต์)

รูปที่ 7.18 (ก) – (จ) แสดงการเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ของอุณหภูมิที่จุด (0,0) ที่คำนวณได้จากวิธีรูปแบบปิดกับวิธีของเกาส์-เลอจองด์ที่ใช้จำนวนจุดเกาส์เพิ่มขึ้น และในกรณีที่ใช้จำนวนเอลิเมนต์ต่าง ๆ กัน จากรูปจะเห็นได้ว่าเมื่อเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ค่าความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ของทุกกรณีจะมีค่าลดลง และเมื่อพิจารณาในกรณีที่ใช้จำนวนเอลิเมนต์ใด ๆ แล้ว พบว่าวิธีของเกาส์-เลอจองด์ต้องเพิ่มจำนวนจุดเกาส์เพื่อให้ค่าความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์มีค่ากลับมาประมาณใกล้เคียงกับค่าของวิธีรูปแบบปิด และเมื่อเปลี่ยนจากการพิจารณาผลการคำนวณที่จุดเพียงจุดเดียว เป็นการพิจารณาค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ของ ทุก ๆ จุดภายในโดเมน ก็ยังคงได้แนวโน้มในลักษณะเดียวกัน ดังแสดงในรูปที่ 7.19

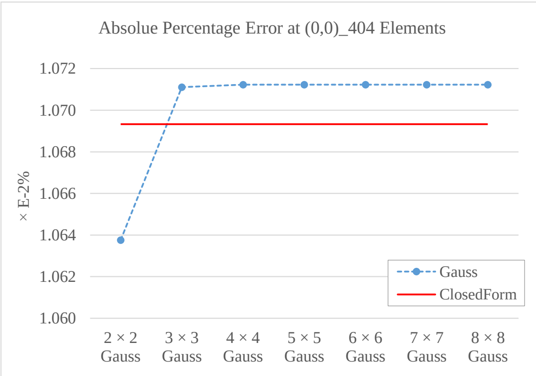


ก) แบ่งปัญหาเป็น 47 เอลิเมนต์

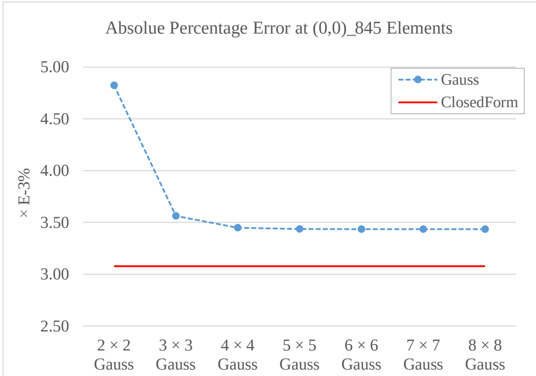


ข) แบ่งปัญหาเป็น 239 เอลิเมนต์

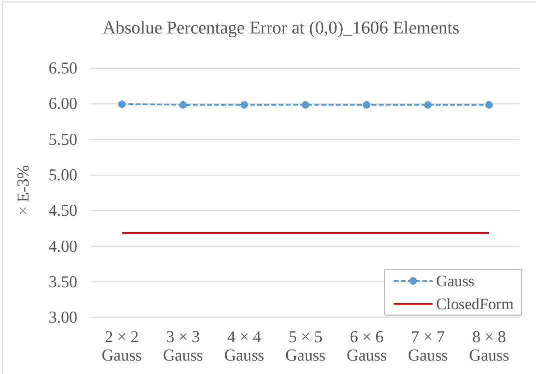
รูปที่ 7.18 ค่าคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ ณ จุด (0,0)



ค) แบ่งปัญหาเป็น 404 เอลิเมนต์

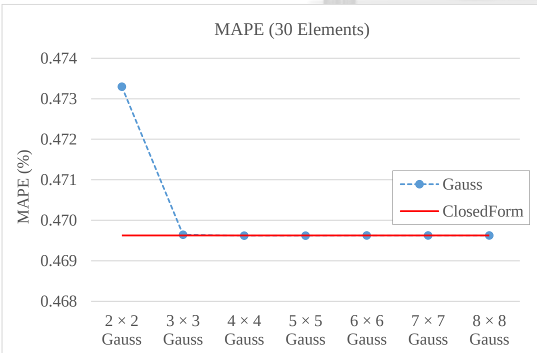


ง) แบ่งปัญหาเป็น 845 เอลิเมนต์

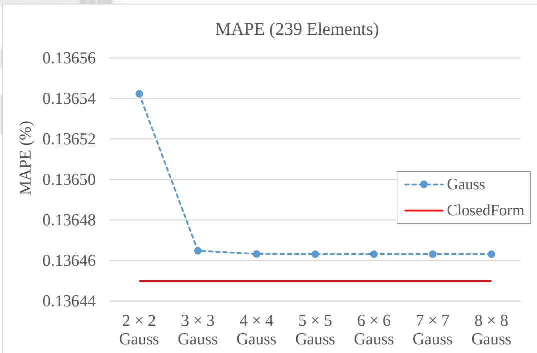


จ) แบ่งปัญหาเป็น 1,606 เอลิเมนต์

รูปที่ 7.18 ค่าคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ ณ จุด (0,0) (ต่อ)

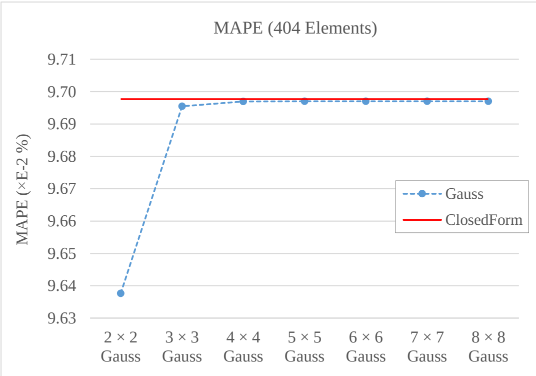


ก) แบ่งปัญหาเป็น 47 เอลิเมนต์

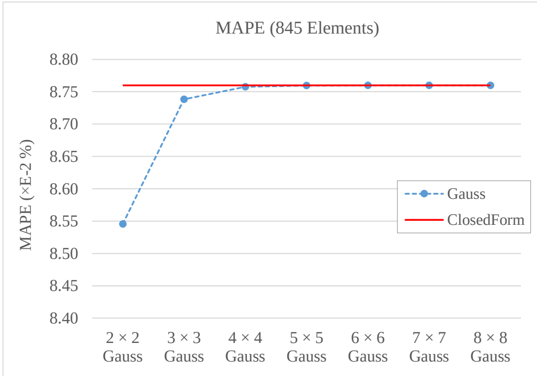


ข) แบ่งปัญหาเป็น 239 เอลิเมนต์

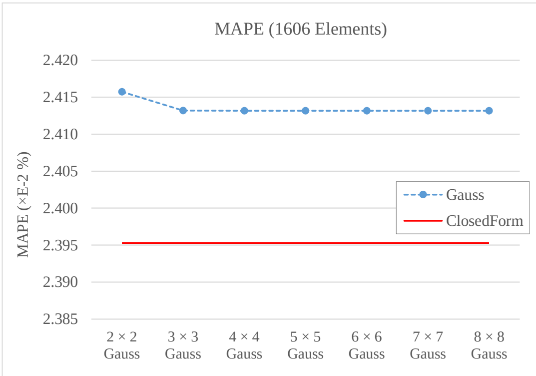
รูปที่ 7.19 ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ของปัญหาทั้งหมด



ค) แบ่งปัญหาเป็น 404 เอลิเมนต์



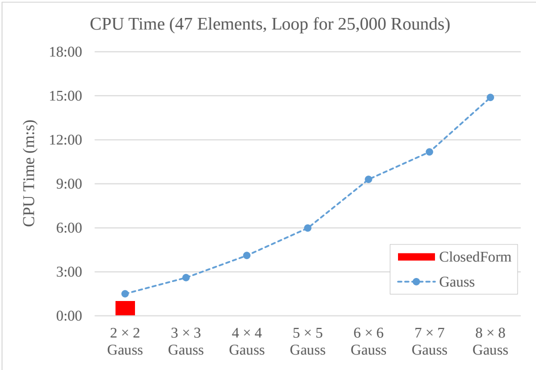
ง) แบ่งปัญหาเป็น 845 เอลิเมนต์



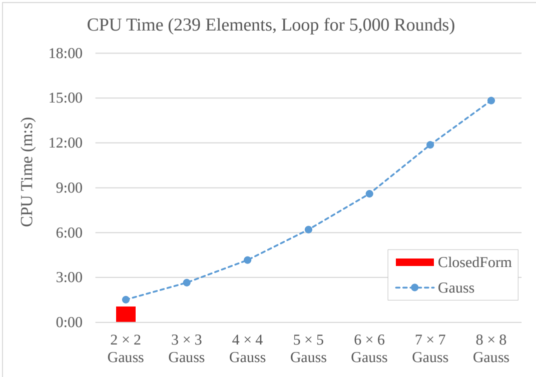
จ) แบ่งปัญหาเป็น 1,606 เอลิเมนต์

รูปที่ 7.19 ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ของปัญหาทั้งหมด (ต่อ)

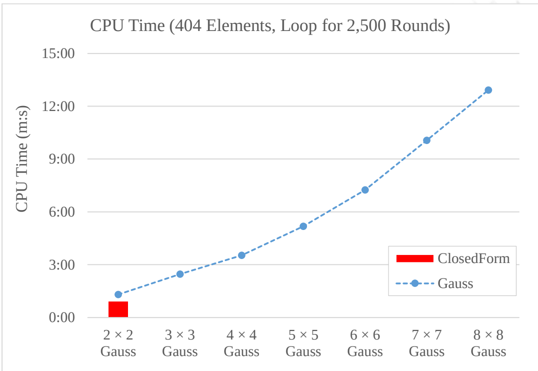
สำหรับการพิจารณาเวลาที่ใช้ในการคำนวณของตัวอย่างก่อนหน้านี้ ถูกกำหนดด้วยจำนวนการคำนวณซ้ำที่ 100,000 รอบ ในกรณีของปัญหาเอลิเมนต์เดี่ยว การคำนวณก็จะพอดีที่ 100,000 รอบ แต่ในกรณีของตัวปัญหาในหัวข้อ 7.1.3 ซึ่งเมื่อเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ในการทดสอบ การคำนวณซ้ำจึงเกิดขึ้นมากกว่า 100,000 รอบไปมาก ส่งผลให้เวลาโดยรวมเพิ่มมากขึ้นเกินความจำเป็น ดังนั้นในตัวอย่างนี้จะพิจารณาเวลาที่ใช้สร้างเมทริกซ์การนำความร้อนของทั้งระบบเช่นเดิม แต่จะกำหนดจำนวนรอบการคำนวณซ้ำโดยรวมให้มีค่าค่อนข้างคงที่ประมาณ 1,000,000 รอบ นั่นคือ จำนวนรอบการวนซ้ำจะขึ้นกับจำนวนการแบ่งเอลิเมนต์ในแต่ละกรณี เช่น ในกรณีที่แบ่งเอลิเมนต์จำนวน 239 เอลิเมนต์ จะทำการคำนวณซ้ำ 5,000 รอบ แต่เมื่อเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ไปเป็น 1,606 เอลิเมนต์ จะลดจำนวนการคำนวณซ้ำเหลือเพียง 625 รอบเท่านั้น จากการทดสอบพบว่าในแต่ละกรณีของการเปลี่ยนจำนวนเอลิเมนต์ เวลาที่ใช้ในการคำนวณของวิธีรูปแบบปิดจะน้อยกว่าวิธีของเกาส์-เลอจองด์ 2 x 2 เสมอ และเมื่อเพิ่มจำนวนจุดเกาส์ก็จะทำให้เวลาที่ใช้ในการคำนวณเพิ่มมากขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 7.20 (ก) – (จ)



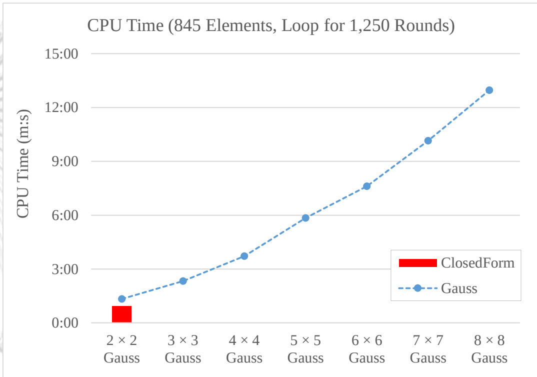
ก) แบ่งปัญหาเป็น 47 เอลิเมนต์



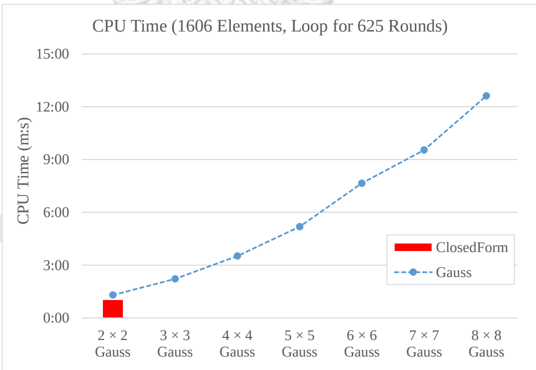
ข) แบ่งปัญหาเป็น 239 เอลิเมนต์



ค) แบ่งปัญหาเป็น 404 เอลิเมนต์



ง) แบ่งปัญหาเป็น 845 เอลิเมนต์



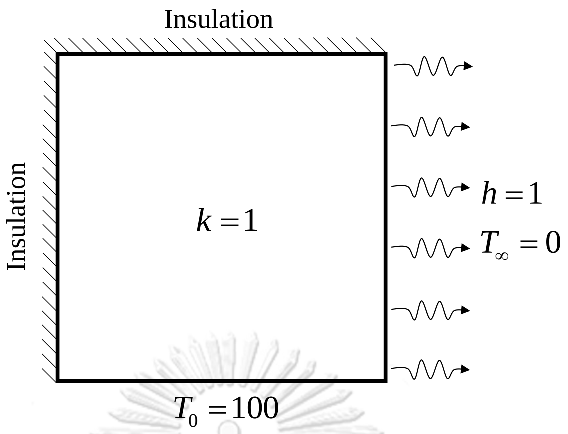
จ) แบ่งปัญหาเป็น 1,606 เอลิเมนต์

รูปที่ 7.20 เวลาที่ใช้ในการคำนวณระหว่างวิธีรูปแบบปิดและวิธีของเกาส์-เลอจองด์

7.1.5 ปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัส ที่มีการพาความร้อนตามขอบ

ปัญหาในหัวข้อนี้ มีลักษณะเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1×1 หน่วย มีความหนา 0.1 หน่วย กำหนดอุณหภูมิที่ขอบล่างมีค่าเท่ากับ 100°C ขอบบนและขอบซ้ายเป็นฉนวน สัมประสิทธิ์การนำความร้อน $k = 1$ และมีการพาความร้อนที่ขอบขวา โดยสัมประสิทธิ์การพาความร้อน $h = 1$ และ

อุณหภูมิบรรยากาศ $T_\infty = 0$ ดังรูปที่ 7.21 ปัญหานี้มีผลเฉลยแม่นตรงของการกระจายตัวของอุณหภูมิ [20] ดังแสดงด้วยสมการ (7.7)



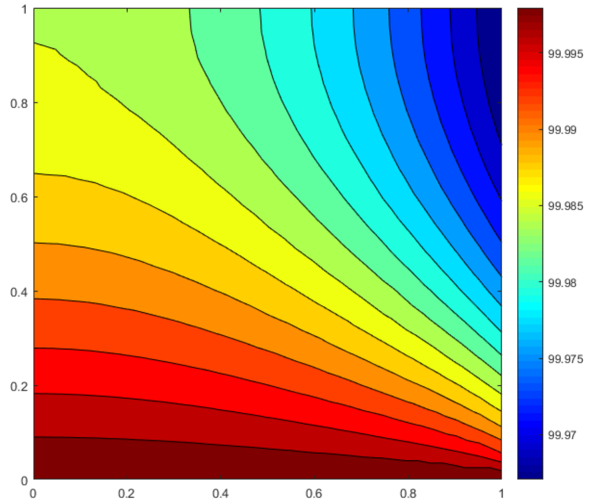
รูปที่ 7.21 ปัญหาการนำความร้อนแผ่นสี่เหลี่ยม

$$T(x,y) = 2hT_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\alpha_n x)\cosh(\alpha_n(1-y))}{(\alpha_n{}^2 + h^2 + h)\cos\alpha_n \cosh\alpha_n} \tag{7.7}$$

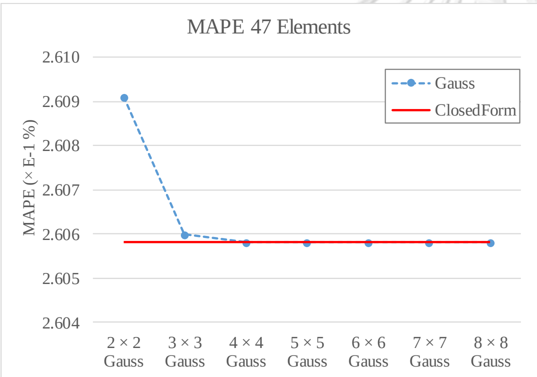
โดย α_n เป็นรากค่าบวกของสมการ $\alpha\tan(\alpha) = h$

การทดสอบเริ่มจากการแบ่งปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ จำนวน 43, 239, 404 และ 1,606 เอลิเมนต์ตามลำดับ แล้วทำการคำนวณหาค่าอุณหภูมิที่แต่ละจุดต่อด้วยวิธีรูปแบบปิดและวิธีของเกาส์-เลอจองด์ที่ใช้จำนวนจุดเกาส์ต่าง ๆ กัน จากนั้นนำค่าที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง ด้วยการคำนวณค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ พบว่าถ้าพิจารณาผลของการคำนวณด้วยวิธีรูปแบบปิดเพียงอย่างเดียว ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์จะมีค่าลดลงเมื่อเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ขึ้น ยกตัวอย่างเช่น กรณีที่ใช้เอลิเมนต์จำนวน 47 เอลิเมนต์ จะให้ค่าความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์เท่ากับ 0.26% เมื่อเพิ่มเอลิเมนต์เป็น 239 เอลิเมนต์ ค่าความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ลดลงอยู่ที่ 0.037% เป็นต้น และเมื่อพิจารณารายละเอียดในแต่ละกรณีของการแบ่งเอลิเมนต์พบว่า การเพิ่มจำนวนจุดเกาส์จะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ของวิธีของเกาส์-เลอจองด์ลดลงเข้าใกล้ค่าที่คำนวณได้จากวิธีรูปแบบปิด แต่อย่างไรก็ตามหากจำนวนเอลิเมนต์มีความละเอียดมากเพียงพอ จะไม่สามารถสังเกตเห็นความเปลี่ยนแปลงได้อย่างชัดเจน แม้จะเพิ่มจุดเกาส์ในการคำนวณให้มากขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 7.23 (ก) – (ง)

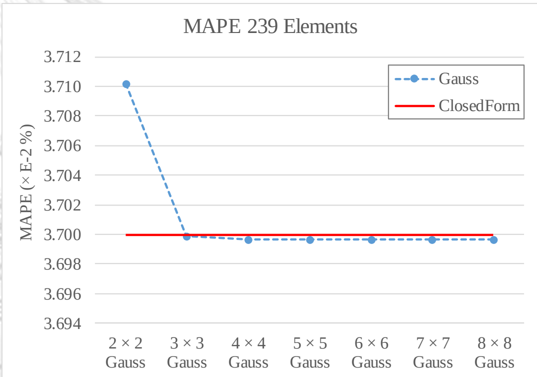
รูปที่ 7.22 แสดงผลการกระจายตัวของอุณหภูมิบนแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสจากการคำนวณด้วยรูปแบบปิด บนการแบ่งปัญหา 1,606 เอลิเมนต์ อุณหภูมิสูงสุดปรากฏที่บริเวณขอบล่าง หรือขอบเขตที่ถูกกำหนดอุณภูมิ 100°C และค่อย ๆ ลดลงไปขอบทางขวามือที่มีการพาความร้อน



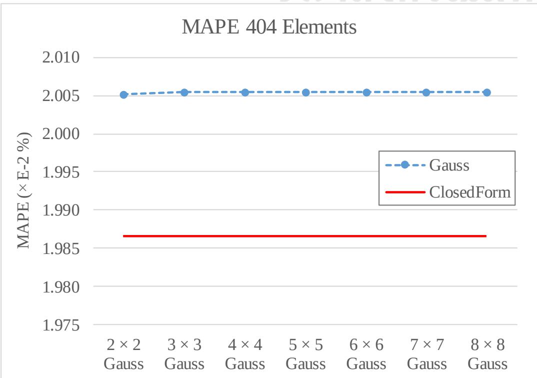
รูปที่ 7.22 การกระจายตัวของอุณหภูมิบนแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัส



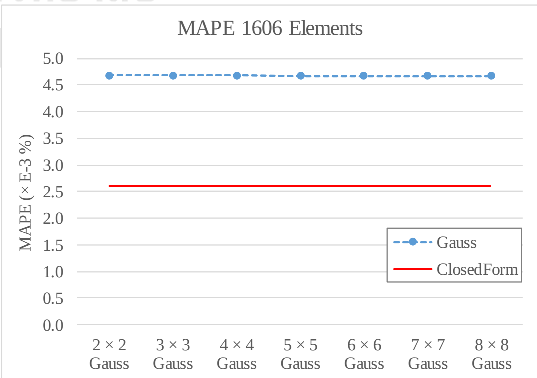
ก) แบ่งปัญหาเป็น 47 เอลิเมนต์



ข) แบ่งปัญหาเป็น 239 เอลิเมนต์



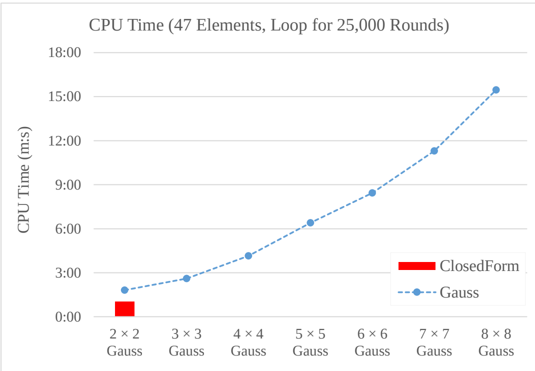
ค) แบ่งปัญหาเป็น 404 เอลิเมนต์



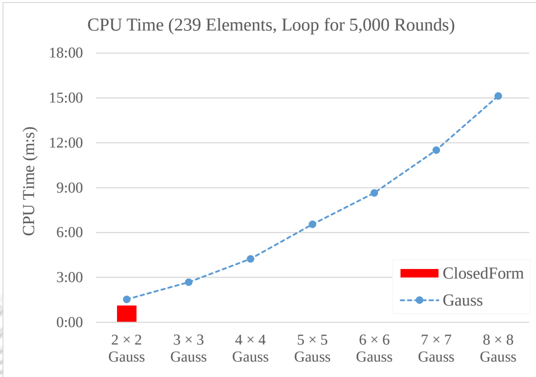
ง) แบ่งปัญหาเป็น 1,606 เอลิเมนต์

รูปที่ 7.23 ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์

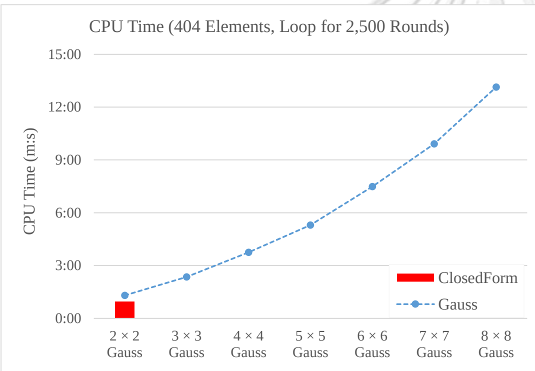
เมื่อพิจารณาประสิทธิภาพจากเวลาที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์การนำความร้อน เปรียบเทียบกันระหว่างวิธีรูปแบบปิดและวิธีของเกาส์-เลอจองด์ พบว่าวิธีรูปแบบปิดใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าในทุกกรณีของการแบ่งจำนวนเอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 7.24



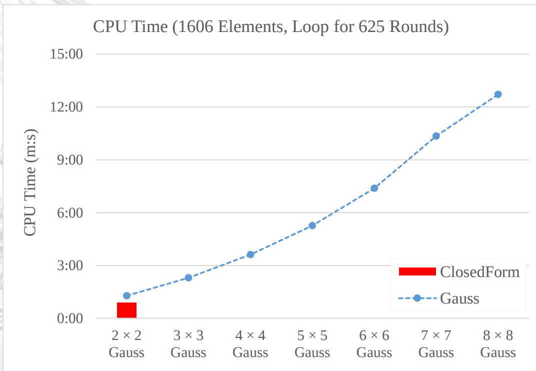
ก) แบ่งปัญหาเป็น 47 เอลิเมนต์



ข) แบ่งปัญหาเป็น 239 เอลิเมนต์



ค) แบ่งปัญหาเป็น 404 เอลิเมนต์

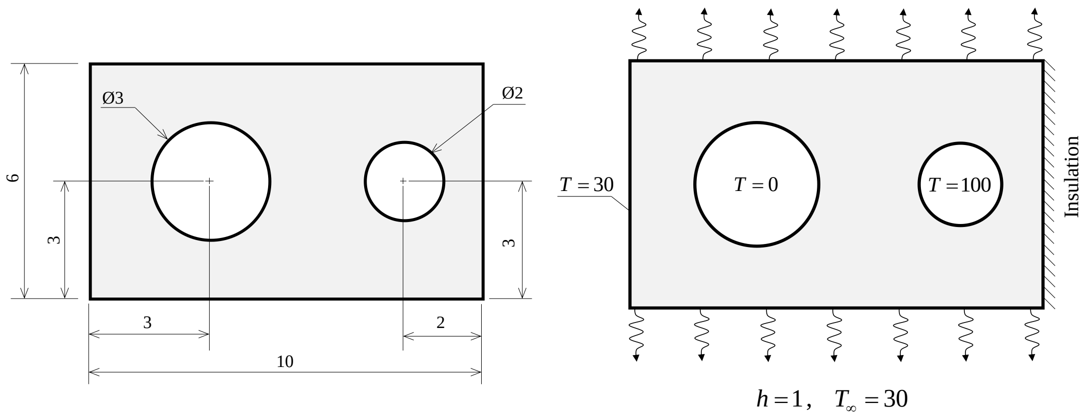


ง) แบ่งปัญหาเป็น 1,606 เอลิเมนต์

รูปที่ 7.24 เวลาที่ใช้ในการคำนวณระหว่างวิธีรูปแบบปิดและวิธีเกาส์-เลอจองด์

7.1.6 ปัญหาการนำความร้อนของแผ่นสี่เหลี่ยมเจาะรู

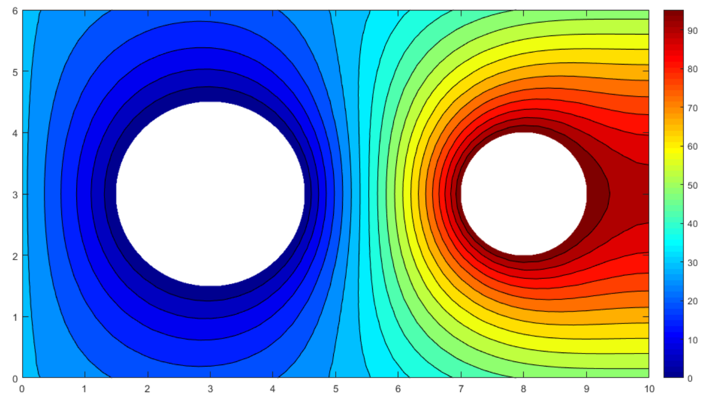
ลักษณะของปัญหาเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมขนาด 6×10 หน่วย ความหนา 0.1 หน่วย เจาะรูขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 3 หน่วยและ 2 หน่วย วางตัวในลักษณะดังรูปที่ 7.16 กำหนดให้สัมประสิทธิ์การนำความร้อน $k = 1$, อุณหภูมิขอบซ้าย T = 30 ขอบขวากำหนดเป็นฉนวนกันความร้อน ขอบบนและขอบล่างมีการพาความร้อนโดยสัมประสิทธิ์การนำความร้อน $h = 1$ และอุณหภูมิบรรยากาศ $T_{\infty} = 30$ ส่วนขอบรูใหญ่กำหนดให้มีอุณหภูมิเท่ากับ 0 และขอบรูเล็กกำหนดให้มีอุณหภูมิเท่ากับ 100



ก) ขนาดและตำแหน่งของปัญหา ข) เงื่อนไขขอบเขตของปัญหา

รูปที่ 7.25 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าเจาะรู

ทำการวิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวด้วยการแบ่งโดเมนของปัญหาเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ จำนวน 1,280 เอลิเมนต์ พบว่ามีการกระจายตัวของอุณหภูมิดังแสดงในรูปที่ 7.26



รูปที่ 7.26 การกระจายตัวของอุณหภูมิบนแผ่นเจาะรู

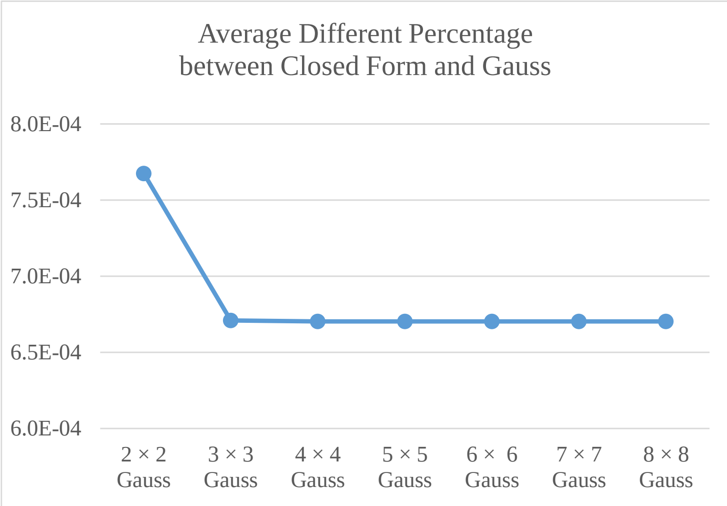
เนื่องจากปัญหามีรูปร่างซับซ้อนการหาค่าผลเฉลยแม่นตรงจึงไม่สามารถทำได้โดยง่าย ดังนั้นการตรวจสอบความแม่นยำจะใช้การเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากวิธีรูปแบบปิดกับผลลัพธ์จากวิธีเกาส์-เลอจองด์ ด้วยสมการดังนี้

$$\frac{1}{NN}\sum_{i=1}^{NN}\left|\frac{T_n^{ClosedForm}-T_n^{GaussLegendre}}{T_n^{ClosedForm}}\right|\times 100\% \tag{7.8}$$

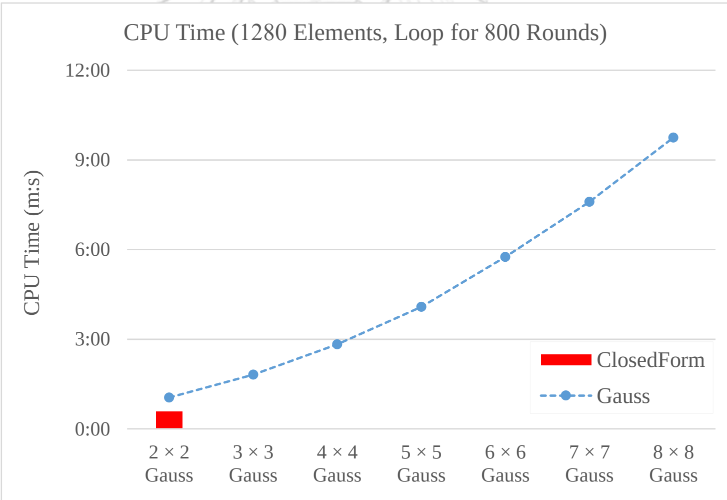
โดย NN คือ จำนวนจุดต่อทั้งหมด

รูปที่ 7.27 แสดงค่าเฉลี่ยของเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างสัมพัทธ์เมื่อใช้จำนวนจุดเกาส์ที่แตกต่างกัน พบว่าเมื่อเพิ่มจำนวนจุดเกาส์จาก 2x2 ไปเป็น 3x3 ค่าเฉลี่ยของเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างสัมพัทธ์ระหว่างวิธีรูปแบบปิดและวิธีของเกาส์-เลอจองด์ลดลง แต่เมื่อเพิ่มจำนวนจุดเกาส์ตั้งแต่ 4x4

จุดเป็นต้นไป ค่าดังกล่าวไม่เปลี่ยนแปลงไปมากนัก ส่วนรูปที่ 7.28 แสดงการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์การนำความร้อนของปัญหา โดยคำนวณแบบวนซ้ำจำนวน 800 รอบ พบว่า วิธีรูปแบบปิดใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีของเกาส์-เลอจองด์ในทุกกรณี



รูปที่ 7.27 ค่าเฉลี่ยความแตกต่างของวิธีเกาส์-เลอจองด์ที่จุดต่าง ๆ เปรียบเทียบกับวิธีรูปแบบปิด



รูปที่ 7.28 เวลาที่ใช้ในการคำนวณของวิธีเกาส์-เลอจองด์ที่จุดต่าง ๆ เปรียบเทียบกับวิธีรูปแบบปิด

เมื่อได้ทำการตรวจสอบความถูกต้องของวิธีรูปแบบปิดในการคำนวณปัญหาการนำความร้อนจนเกิดความมั่นใจในความถูกต้องของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นแล้ว ในหัวข้อถัดไปจะนำโปรแกรมดังกล่าวไปพัฒนาต่อเพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาความเค้นเนื่องมาจากความร้อนต่อไป

7.2 การตรวจสอบโปแกรมสมการรูปแบบปิดกับปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อน

การตรวจสอบโปรแกรมสำหรับวิเคราะห์ปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อน ทำได้ด้วยการทดสอบกับปัญหาต่าง ๆ กัน 5 ปัญหา ซึ่งจะพิจารณาทั้งเรื่องความแม่นยำของผลลัพธ์และเวลาที่ใช้ในการคำนวณโดยเปรียบเทียบกับวิธีของเกาส์-เลอจองด์ สำหรับปัญหาที่นำมาทดสอบ ได้แก่

- ปัญหาเอลิเมนต์เดี่ยว
- ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่รับภาระของอุณหภูมิที่กระจายตัวเชิงเส้นตามแกน x
- ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่รับภาระของอุณหภูมิแบบหลังคาบ้าน
- ปัญหาคานถูกตรึงปลายทั้งสองข้างและรับภาระของอุณหภูมิที่กระจายตัวเชิงเส้นตามแกน x
- ปัญหาแผ่นวงแหวนบางรับภาระของอุณหภูมิกระจายตัวเชิงเส้นตามแนวรัศมี และภาระจากความดันตลอดขอบด้านใน

7.2.1 ปัญหาเอลิเมนต์เดี่ยว

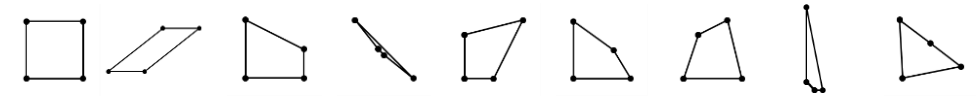
การทดสอบโปรแกรมของวิธีรูปแบบปิดด้วยปัญหาเอลิเมนต์เดี่ยวนี้ เป็นการพิจารณาความแม่นยำเฉพาะการสร้างเมทริกซ์แข็งเกร็ง, $[K]$, ของหนึ่งเอลิเมนต์เปรียบเทียบกับวิธีของเกาส์-เลอจองด์ โดยพิจารณาเอลิเมนต์รูปร่างต่าง ๆ กัน 9 แบบ และพิจารณาความแม่นยำจากการคำนวณผลรวมของผลต่างสัมพัทธ์ยกกำลังสองของสมาชิกแต่ละตัวในเมทริกซ์แข็งเกร็ง เช่นเดียวกับหัวข้อ 7.1.1 ซึ่งสมการที่ใช้ในการคำนวณคือสมการ (7.1) ในส่วนของการทดสอบประสิทธิภาพของวิธีรูปแบบปิด จะแสดงจากสัดส่วนเวลาที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์แข็งเกร็งด้วยวิธีเกาส์-เลอจองด์ต่อเวลาที่คำนวณด้วยวิธีรูปแบบปิด

จากตารางที่ 7.3 การเปรียบเทียบความแม่นยำของวิธีรูปแบบปิด พบว่า กรณีที่เอลิเมนต์มีรูปร่างปกติ (กรณี A และ กรณี B) ผลการคำนวณด้วยวิธีรูปแบบปิดให้ค่าความแม่นยำเท่ากับการคำนวณด้วยวิธีของเกาส์ 2×2 จุด ในขณะที่เอลิเมนต์ที่มีรูปร่างบิดเบี้ยวมากขึ้น (กรณี C – H) จะต้องเพิ่มจำนวนจุดเกาส์ในการคำนวณ เพื่อลดความแตกต่างที่เกิดขึ้น จึงจะสามารถได้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำเท่ากับกับวิธีรูปแบบปิด และกรณีที่มีมุมภายในด้านหนึ่งเท่ากับ 180° (กรณี I) แสดงให้เห็นว่าแม้จะใช้จุดเกาส์จำนวน 10×10 จุดในการคำนวณ ยังไม่สามารถให้ผลลัพธ์ได้เทียบเท่าวิธีรูปแบบปิด ดังนั้นสามารถกล่าวได้ว่าวิธีรูปแบบปิดที่ประดิษฐ์ขึ้นนี้ ให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูงทุก ๆ รูปร่างของเอลิเมนต์ที่นำมาทดสอบ

เมื่อพิจารณาเวลาที่ใช้ในการคำนวณ จากตารางที่ 7.4 แสดงให้เห็นว่าวิธีของเกาส์-เลอจองด์ใช้เวลาในการคำนวณมากกว่าวิธีรูปแบบปิดทุกกรณี และจะสังเกตผลอันเนื่องมาจากการแบ่งกรณี

ตามลักษณะเอลิเมนต์อย่างชัดเจน โดยเปรียบเทียบที่วิธีของเกาส์ 2×2 จุด กรณีที่มีด้านคู่ขนาน 2 คู่ วิธีรูปแบบปิดจะใช้เวลาน้อยกว่าถึง 7 เท่า กรณีที่มีด้านคู่ขนานด้านเดียว วิธีรูปแบบปิดจะใช้เวลาน้อยกว่าประมาณ 5 เท่า และกรณีที่ไม่มีด้านคู่ขนานกันเลย วิธีรูปแบบปิดจะใช้เวลาน้อยกว่าถึง 3 เท่า

ตารางที่ 7.3 ผลต่างความแม่นยำของเมทริกซ์แข็งเกร็งระหว่างวิธีรูปแบบปิดกับวิธีเกาส์-เลอจองด์

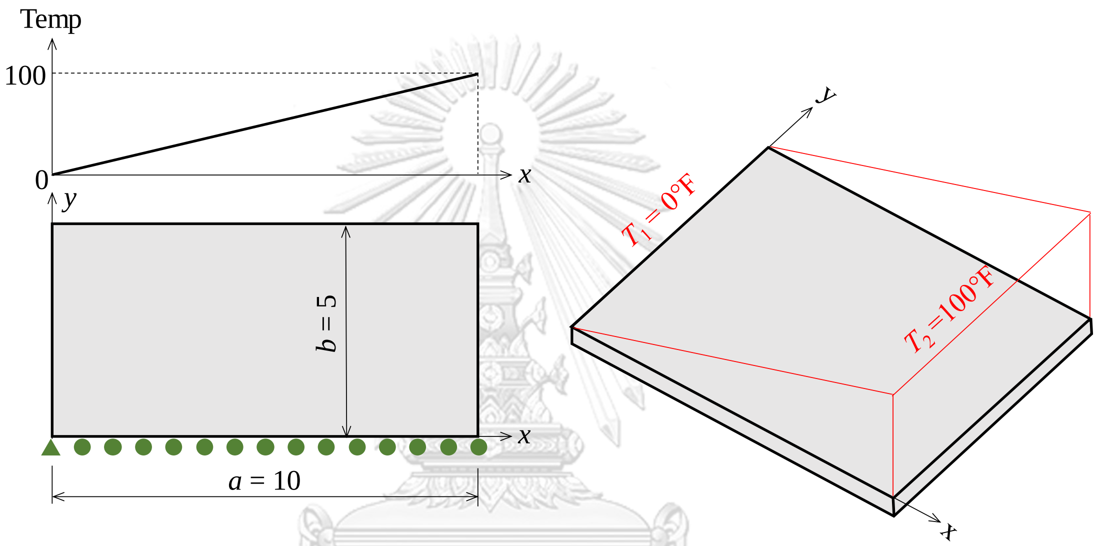
จำนวนจุดเกาส์	กรณี A	กรณี B	กรณี C	กรณี D	กรณี E	กรณี F	กรณี G	กรณี H	กรณี I
									
2×2	**0.00**	**0.00**	5.63	69.50	5.20	172.08	4.20	16.50	1266.78
3×3	-	-	0.17	19.83	0.12	11.51	0.14	1.82	646.90
4×4	-	-	0.01	5.53	**0.00**	0.82	0.01	0.28	388.81
5×5	-	-	**0.00**	1.52	-	0.06	**0.00**	0.05	259.03
6×6	-	-	-	0.42	-	**0.00**	-	0.01	184.87
7×7	-	-	-	0.11	-	-	-	**0.00**	138.57
8×8	-	-	-	0.03	-	-	-	-	107.72
9×9	-	-	-	0.01	-	-	-	-	86.14
10×10	-	-	-	**0.00**	-	-	-	-	70.46

ตารางที่ 7.4 อัตราส่วนเวลาที่ใช้ในการคำนวณด้วยวิธีของเกาส์-เลอจองด์ต่อวิธีรูปแบบปิด

จำนวนจุดเกาส์	กรณี A	กรณี B	กรณี C	กรณี D	กรณี E	กรณี F	กรณี G	กรณี H	กรณี I
2×2	7.18	7.23	5.42	5.38	3.15	3.01	3.17	3.33	3.20
3×3	-	-	9.87	9.58	5.77	5.40	5.85	6.07	5.83
4×4	-	-	16.03	15.45	9.48	8.70	9.49	10.23	9.47
5×5	-	-	24.25	23.03	-	12.89	14.13	14.83	14.18
6×6	-	-	-	32.48	-	18.25	-	20.72	20.00
7×7	-	-	-	43.15	-	-	-	28.15	27.31
8×8	-	-	-	55.73	-	-	-	-	35.01
9×9	-	-	-	70.33	-	-	-	-	43.56
10×10	-	-	-	85.72	-	-	-	-	53.92

7.2.2 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่รับภาระของอุณหภูมิที่กระจายตัวเชิงเส้นตามแกน x

พิจารณาแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาดกว้าง 5 นิ้ว ยาว 10 นิ้ว หนา 1 นิ้ว ซึ่งถูกยึดแน่นที่มุมซ้ายล่าง และขอบด้านล่างตลอดทั้งแนวถูกบังคับไม่ให้เคลื่อนที่ในแนวแกน y แต่เคลื่อนที่อิสระในแนวแกน x อุณหภูมิกระจายตัวเชิงเส้นตลอดแผ่นตามสมการ $T(x)=10x$ ดังแสดงในรูป 7.27 โดยคุณสมบัติของวัสดุแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าได้แก่ ค่าโมดูลัสของยังส์ $E=30\times10^{6}\text{psi}$ อัตราส่วนปัวส์ซง $\upsilon=0.25$ ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิ $\alpha=9.44\times10^{-6}/{}^{\circ}\text{F}$ และอุณหภูมิอ้างอิงที่ไม่ทำให้แผ่นมีความเค้นมีค่าเท่ากับ $T_0=0^{\circ}\text{F}$ อธิบายปัญหาดังที่กล่าวดังรูปที่ 7.29



รูปที่ 7.29 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่รับภาระของอุณหภูมิที่กระจายตัวเชิงเส้นตามแกน x

ผลเฉลยแม่นตรงที่สอดคล้องกับปัญหาข้างต้นอยู่ในรูปของการเคลื่อนที่แนวแกน x หรือ u และการเคลื่อนที่แนวแกน y หรือ v [20] แสดงในสมการ (7.9) และ (7.10) ตามลำดับ

$$u(x,y)=\alpha T_1 x+\frac{\alpha}{2a}(x^2-y^2)(T_2-T_1) \tag{7.9}$$

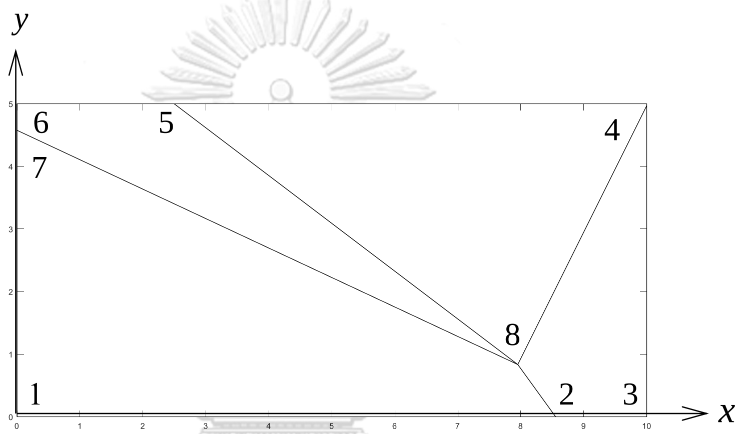
$$v(x,y)=\alpha T_1 y+\frac{\alpha}{a}xy(T_2-T_1) \tag{7.10}$$

การพิจารณาความแม่นยำจะเปรียบเทียบปริมาตรใต้พื้นผิวของการเคลื่อนที่ โดยการคำนวณปริมาตรใต้ผิวแบ่งออกเป็น 2 กรณี ได้แก่ 1. กรณีผลเฉลยแม่นตรง จะคำนวณจากการอินทิเกรตฟังก์ชัน $u(x,y)$ และ $v(x,y)$ บนพื้นที่โดเมนปัญหาทั้งหมด และ 2. กรณีไฟไนต์เอลิเมนต์ จะคำนวณปริมาตรใต้พื้นผิวจากผลรวมของการอินทิเกรตแต่ละเอลิเมนต์ ซึ่งการกระจายตัวของผลลัพธ์บนเอลิเมนต์จะสอดคล้องกับฟังก์ชันประมาณภายใน (interpolation function) จากนั้นจึงนำปริมาตร

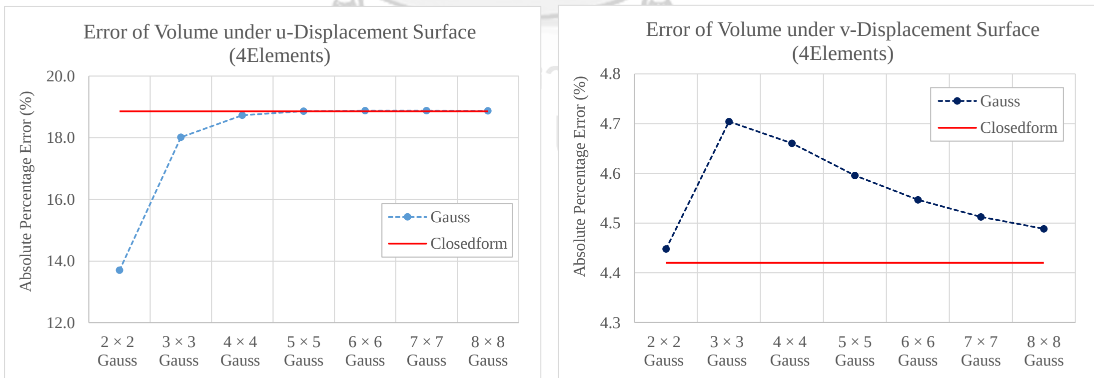
ใต้พื้นผิวที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เปรียบเทียบกับปริมาตรใต้พื้นผิวของผลเฉลยแม่นตรง ด้วยค่าเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนโดยปริมาตร ดังสมการ

$$\left|\frac{V - V^{exact}}{V^{exact}}\right| \times 100\% \tag{7.11}$$

การทดสอบโปรแกรมของวิธีรูปแบบปิดเริ่มต้นจากการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็น 4 เอลิเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 7.30 จากนั้นเปรียบเทียบความแม่นยำระหว่างเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนโดยปริมาตรของวิธีรูปแบบปิดและวิธีเกาส์-เลอเจองด์ที่ใช้จำนวนจุดเกาส์ในการคำนวณต่าง ๆ กัน แสดงในรูป 7.31 โดยรูปซ้ายคือการเคลื่อนที่ในแนวแกน x และรูปขวาคือการเคลื่อนที่ในแนวแกน y



รูปที่ 7.30 ลักษณะการแบ่งปัญหาเป็น 4 เอลิเมนต์



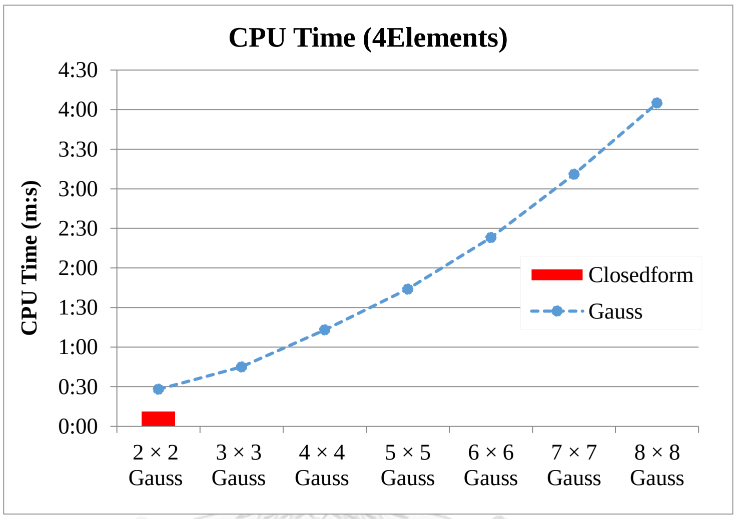
ก) การเคลื่อนที่แนวแกน $x\,(u)$ ข) การเคลื่อนที่แนวแกน $y\,(v)$

รูปที่ 7.31 เปรียบเทียบความแม่นยำระหว่างวิธีรูปแบบปิดและวิธีของเกาส์

รูปที่ 7.31 แสดงให้เห็นว่าการเพิ่มจุดเกาส์ในการคำนวณ จะทำให้ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจากวิธีเกาส์-เลอจองด์มีค่าเข้าใกล้ค่าคลาดเคลื่อนที่จากวิธีรูปแบบปิด รูปที่ 7.31 (ก) แม้ว่าวิธีเกาส์-

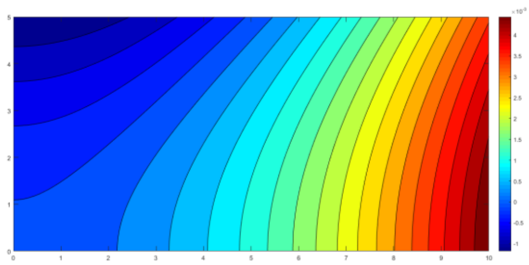
เลอจองด์ 2×2 จุดจะให้ค่าคลาดเคลื่อนต่ำกว่าวิธีรูปแบบปิด แต่เมื่อเพิ่มจำนวนจุดเกาส์ ค่าคลาดเคลื่อนกลับขยับขึ้นมาเข้าใกล้วิธีรูปแบบปิด

ในส่วนของเวลาที่ใช้ในการคำนวณ จะแสดงเวลาที่ใช้ในการสร้างเมทริกซ์แข็งเกร็ง โดยคำนวณแบบวนซ้ำ 100,000 รอบ พบว่าเวลาที่ใช้ในการคำนวณด้วยวิธีรูปแบบปิดน้อยกว่าวิธีของเกาส์-เลอจอง 2×2 จุด และเมื่อเพิ่มจำนวนจุดเกาส์ จะทำให้เวลาที่ใช้ในการคำนวณเพิ่มขึ้นด้วย ดังแสดงในรูปที่ 7.32

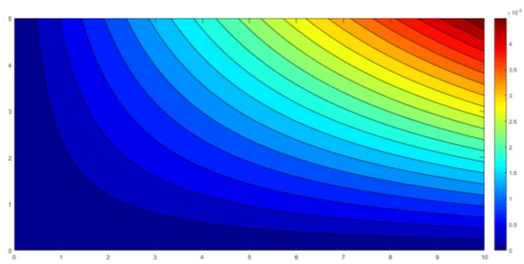


รูปที่ 7.32 เวลาที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์แข็งเกร็ง

จากนั้นตรวจสอบความแม่นยำของวิธีรูปแบบปิดเพิ่มเติม ด้วยการแบ่งโดเมนของปัญหาอีก 4 กรณี คือ 202 , 1,044 , 5,083 และ 10,100 เอลิเมนต์ตามลำดับ โดยผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากวิธีรูปแบบปิดบนการแบ่งปัญหาที่ละเอียดที่สุดคือ 10,100 เอลิเมนต์ สามารถพล็อตโครงร่างเพื่อแสดงการกระจายตัวของการเคลื่อนที่ในแนวแกน x และในแนวการ y บนโดเมนสี่เหลี่ยมผืนผ้า แสดงดังรูปที่ 7.33 (ก) และ (ข)



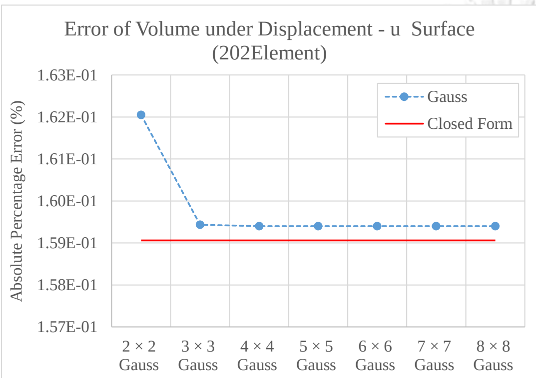
ก) การเคลื่อนที่ในแนวแกน x (u)



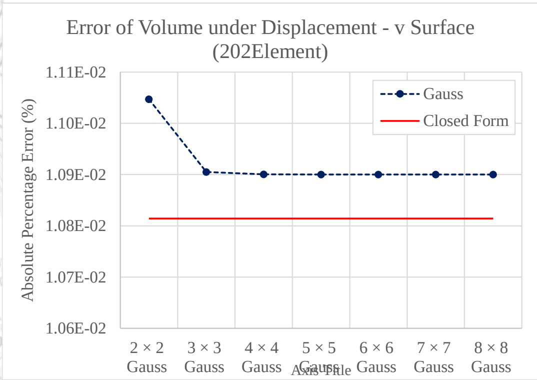
ข) การเคลื่อนที่ในแนวแกน y (v)

รูปที่ 7.33 การกระจายของการเคลื่อนที่บนปัญหาสี่เหลี่ยมผืนผ้า

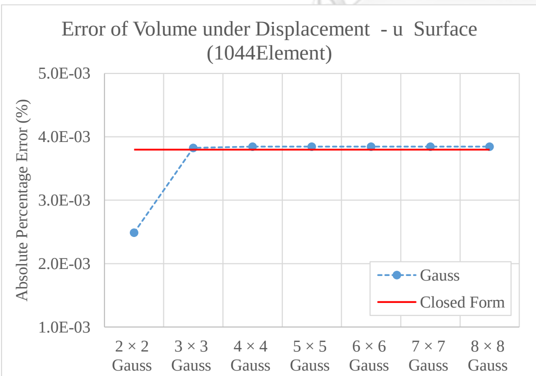
การพิจารณาความแม่นยำจากค่าคลาดเคลื่อนของปริมาตรใต้พื้นผิวการเคลื่อนที่จากวิธีรูปแบบปิดและวิธีเกาส์-เลอจองด์ที่ใช้จุดเกาส์ต่าง ๆ กัน แสดงดังรูปที่ 7.34 (ก) - (ซ) โดยคอลัมน์ซ้ายจะแสดงผลของการเคลื่อนที่ในแนวแกน x (u) และคอลัมน์ขวาแสดงผลของการเคลื่อนที่ในแนวแกน y (v) พบว่าแต่ละกรณีมีแนวโน้มไปในทิศทางเดียวกันคือ เมื่อเพิ่มจุดเกาส์ในการคำนวณ จะทำให้ค่าคลาดเคลื่อนของปริมาตรใต้พื้นผิวจากวิธีของเกาส์มีค่าเข้าใกล้ค่าคลาดเคลื่อนที่ได้จากวิธีรูปแบบปิด แต่อย่างไรก็ตามกรณี 10,100 เอลิเมนต์ (รูปที่ 7.34 ช - ซ) แสดงให้เห็นว่า เมื่อเพิ่มความละเอียดของเอลิเมนต์ให้มากขึ้นถึงจุดหนึ่ง การเพิ่มจุดเกาส์ในการคำนวณจะไม่ส่งผลการเปลี่ยนแปลงความแม่นยำ



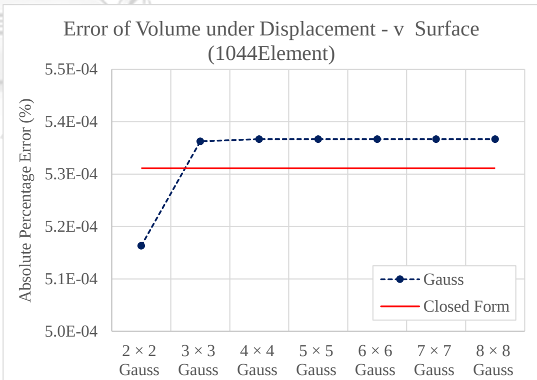
ก) การเคลื่อนที่ในแนวแกน x (202 เอลิเมนต์)



ข) การเคลื่อนที่ในแนวแกน y (202 เอลิเมนต์)

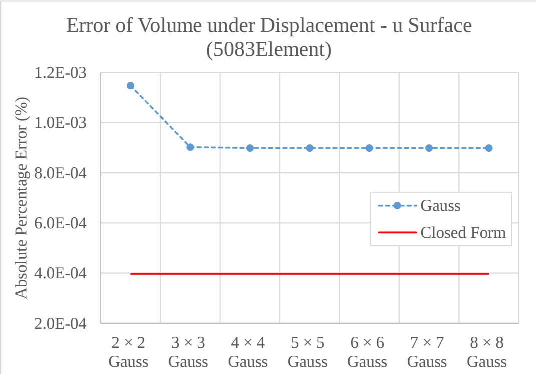


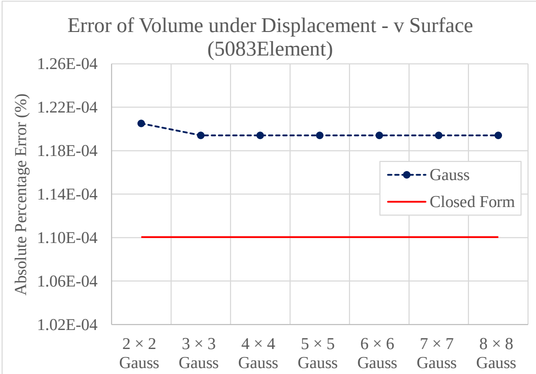
ค) การเคลื่อนที่ในแนวแกน x (1,044 เอลิเมนต์)



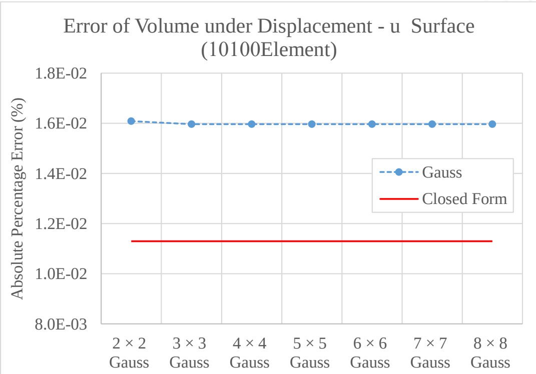
ง) การเคลื่อนที่ในแนวแกน y (1,044 เอลิเมนต์)

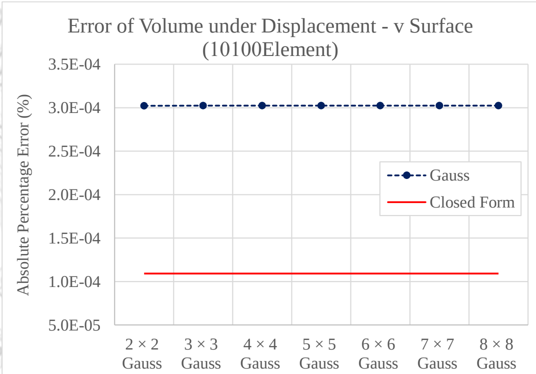
รูปที่ 7.34 ค่าคลาดเคลื่อนของปริมาตรใต้พื้นผิวการเคลื่อนที่ ณ จำนวนเอลิเมนต์ต่าง ๆ กัน





จ) การเคลื่อนที่ในแนวแกน x (5,083 เอลิเมนต์) ฉ) การเคลื่อนที่ในแนวแกน y (5,038 เอลิเมนต์)

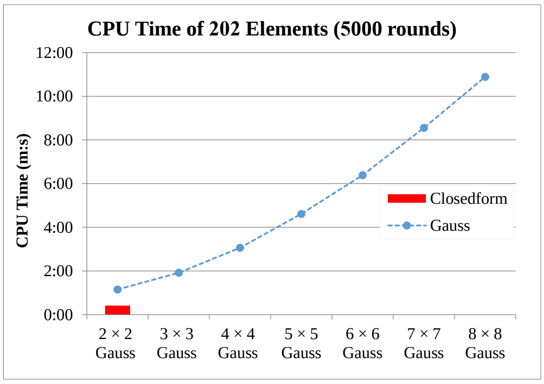


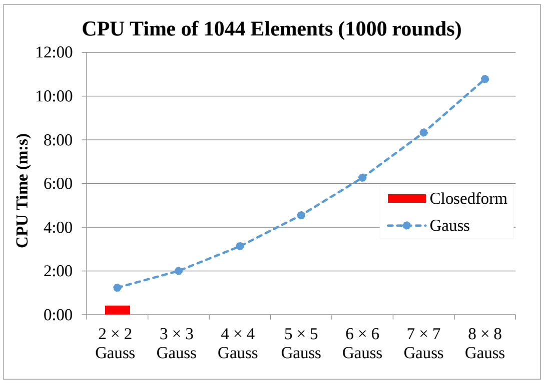


ช) การเคลื่อนที่ในแนวแกน x (10,100 เอลิเมนต์) ซ) การเคลื่อนที่ในแนวแกน y (10,100 เอลิเมนต์)

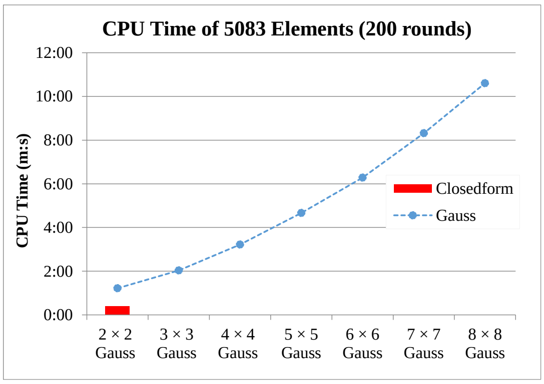
รูปที่ 7.34 ค่าคลาดเคลื่อนของปริมาตรใต้พื้นผิวการเคลื่อนที่ ณ จำนวนเอลิเมนต์ต่าง ๆ กัน (ต่อ)

รูปที่ 7.35 (ก) – (ง) แสดงการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์แข็งเกร็ง โดยการคำนวณแบบวนซ้ำ ซึ่งจำนวนรอบที่ใช้ในการคำนวณแบบวนซ้ำจะแปรผกผันกับจำนวนเอลิเมนต์ พบว่าวิธีเกาส์-เลอจองด์จะใช้เวลาในการคำนวณมากกว่าวิธีรูปแบบปิดทุกกรณี โดยเฉพาะอย่างยิ่งการเพิ่มจุดเกาส์ในการคำนวณ จะยิ่งเพิ่มเวลาที่ใช้ในการคำนวณ

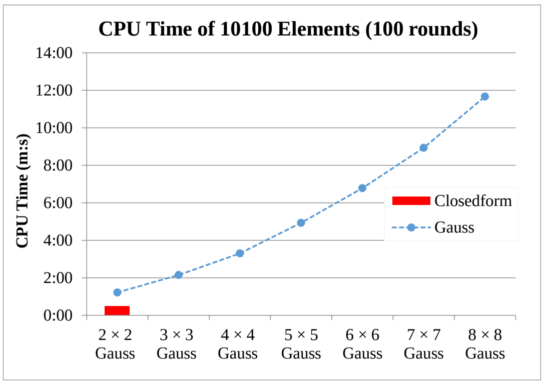




ก) 202 เอลิเมนต์ ข) 1,044 เอลิเมนต์



ค) 5,083 เอลิเมนต์

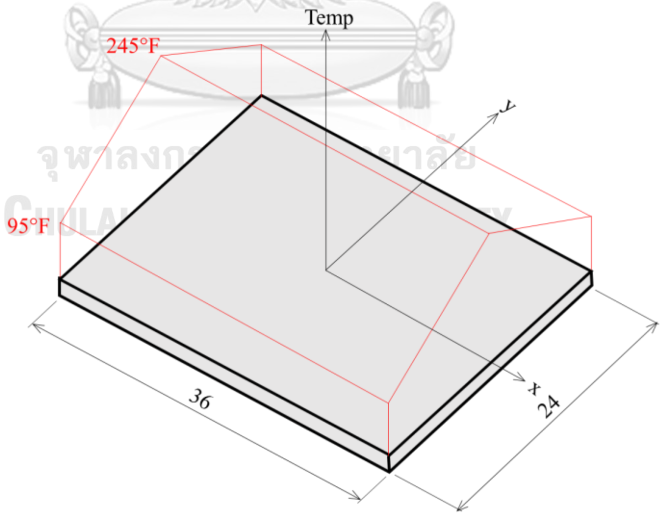


ง) 10,100 เอลิเมนต์

รูปที่ 7.35 เวลาที่ใช้ในการคำนวณบนปัญหาสีเหลี่ยมผืนผ้า ณ จำนวนเอลิเมนต์ต่างกัน

7.2.3 แผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่รับภาระของอุณหภูมิแบบหลังคาบ้าน

พิจารณาแผ่นโลหะขนาด 36×24 ตารางนิ้ว หนา 1 นิ้ว วิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนเพื่อให้เกิดการกระจายตัวของอุณหภูมิแบบหลังคาบ้าน ดังแสดงในรูปที่ 7.36 และวิเคราะห์การกระจายตัวของความเค้น กำหนดให้แผ่นโลหะนี้ทำจากอลูมิเนียมซึ่งมีค่าโมดูลัสของยังส์ $E = 10.4\times10^{6}\text{psi}$ อัตราส่วนปัวส์ซง $\upsilon = 0.29$ ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิ $\alpha = 12.7\times10^{-6}/°\text{F}$ และอุณหภูมิอ้างอิงที่ไม่ทำให้แผ่นมีความเค้นมีค่าเท่ากับ $T_{\infty} = 80°\text{F}$



รูปที่ 7.36 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมผื่นผ้าที่รับภาระของอุณหภูมิแบบหลังคาบ้าน

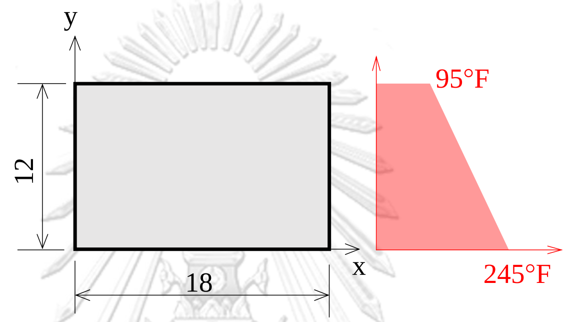
ผลเฉลยแม่นตรงที่สอดคล้องกับปัญหาข้างต้น ในรูปของความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือน [21] ดังแสดงในสมการด้านล่าง

$$\sigma_x = 1651(y-6)\begin{bmatrix} 1-0.0987\sinh(0.1759x)\sin(0.0923x) \\ -0.1528\cosh(0.1759x)\cos(0.0923x) \end{bmatrix} \tag{7.12}$$

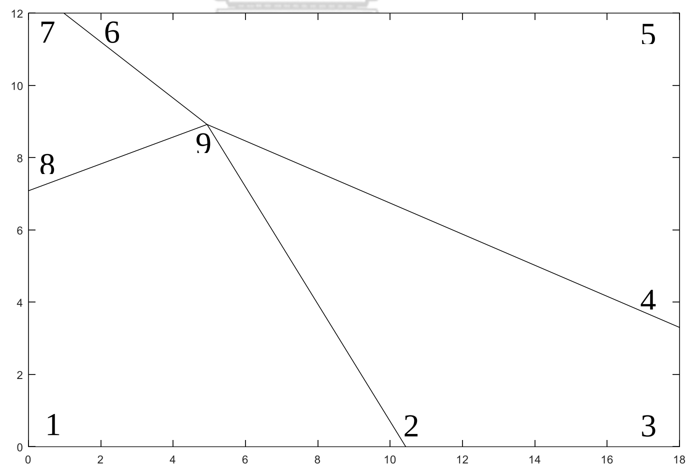
$$\sigma_y = 2.752\left(y^3 - 18y^2 + 864\right)\begin{bmatrix} 0.2750\sinh(0.1759x)\sin(0.0923x) \\ -0.6634\cosh(0.1759x)\cos(0.0923x) \end{bmatrix} \tag{7.13}$$

$$\tau_{xy} = 82.55\left(y^2 - 12y\right)\begin{bmatrix} 0.0326\sinh(0.1759x)\sin(0.0923x) \\ +0.36\sinh(0.1759x)\cos(0.0923x) \end{bmatrix} \tag{7.14}$$

เนื่องจากปัญหานี้มีความสมมาตร จึงพิจารณาเพียงหนึ่งในสี่ส่วนของปัญหาทั้งหมด ดังนั้นโดเมนที่สนใจจะมีขนาด 18×12 ตารางนิ้ว กำหนดอุณหภูมิตลอดขอบบนเท่ากับ 95°F และอุณหภูมิตลอดขอบล่างเท่ากับ 245°F เงื่อนไขขอบเขตตลอดขอบซ้ายจะไม่มีการเคลื่อนที่ทีทิศทาง x และขอบล่างจะไม่มีการเคลื่อนที่ในทิศทาง y



รูปที่ 7.37 ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ที่ถูกพิจารณาเพียงหนึ่งในสี่ส่วน

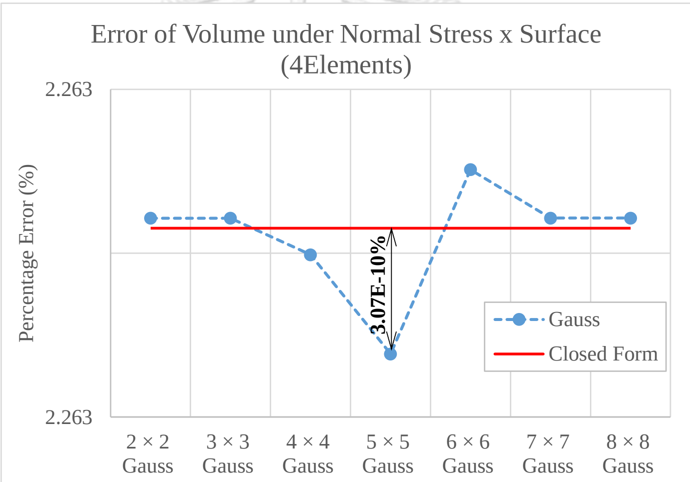


รูปที่ 7.38 การแบ่งปัญหาเป็น 4 เอลิเมนต์

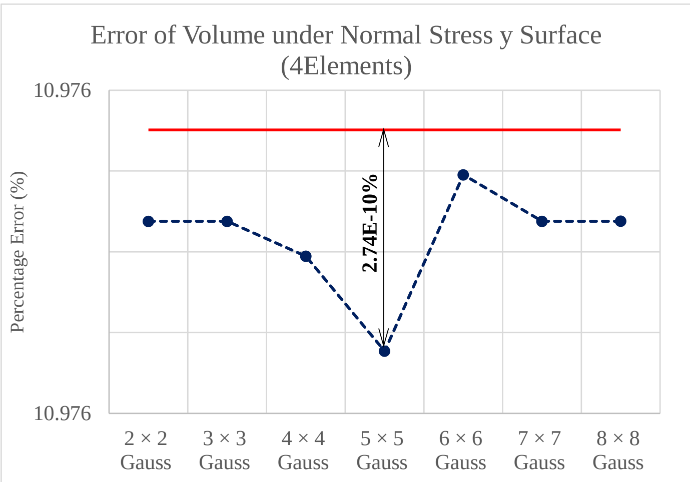
ทดสอบความแม่นยำของวิธีรูปแบบปิดเริ่มจากการแบ่งโดเมนของปัญหาเป็น 4 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 7.38 ซึ่งการพิจารณาความแม่นยำจะเปรียบเทียบปริมาตรใต้พื้นผิวความเค้น โดยการคำนวณปริมาตรใต้ผิวความเค้นแบ่งออกเป็น 2 กรณี ได้แก่ 1. กรณีผลเฉลยแม่นตรง จะคำนวณจากการอินทิเกรตสมการความเค้นหรือสมการ (7.12) – (7.14) บนพื้นที่โดเมนปัญหาทั้งหมด และ 2.

กรณีไฟไนต์เอลิเมนต์ จะคำนวณปริมาตรใต้พื้นผิวของความเค้นจากผลรวมปริมาตรย่อย ๆ ในแต่เอลิเมนต์ โดยปริมาตรย่อย ๆ นี้เกิดจากผลคูณของค่าความเค้นของเอลิเมนต์กับพื้นที่ของเอลิเมนต์นั้น ๆ และเนื่องจากผลลัพธ์ของความเค้นกระจายอยู่ในช่วงลบและบวก จึงขยับกราฟทั้งหมดขึ้นไปในช่วงบวกด้วยการบวกด้วยค่าต่ำสุดของกราฟนั้น ๆ ก่อนการคำนวณปริมาตรใต้พื้นผิวความเค้น จากนั้นเมื่อได้ปริมาตรใต้พื้นผิวความเค้นจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แล้ว จึงนำมาเปรียบเทียบกับปริมาตรใต้ผิวความเค้นจากผลเฉลยแม่นตรง ดังสมการ (7.11)

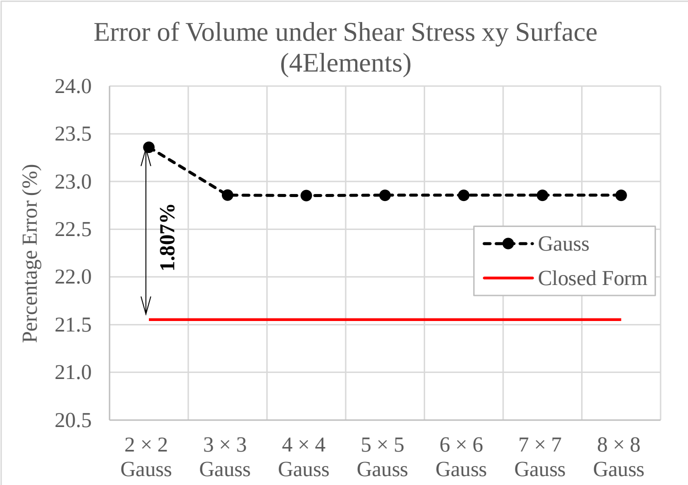
จากรูปที่ 7.39 ถึงรูปที่ 7.41 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนของปริมาตรใต้พื้นผิวความเค้นระหว่างวิธีรูปแบบปิดและวิธีเกาส์-เลอจองด์ พบว่าสำหรับกรณีความเค้นตั้งฉากแนวแกน x และแกน y ทั้งวิธีรูปแบบปิดและวิธีของเกาส์ให้ความแม่นยำต่างกันน้อยมาก ในขณะที่กรณีความเค้นเฉือน วิธีรูปแบบปิดให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำกว่าวิธีของเกาส์เพียง 1.807%



รูปที่ 7.39 ความคลาดเคลื่อนของปริมาตรใต้พื้นผิวความเค้นตั้งฉากแกน x

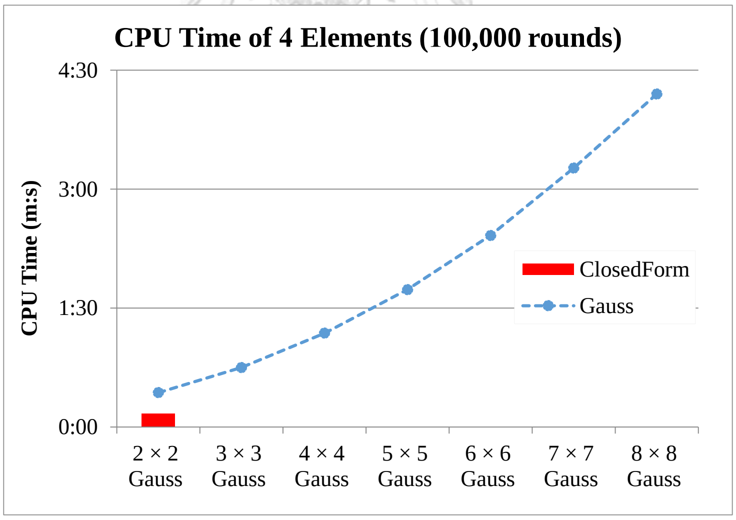


รูปที่ 7.40 ความคลาดเคลื่อนของปริมาตรใต้พื้นผิวความเค้นตั้งฉากแกน y



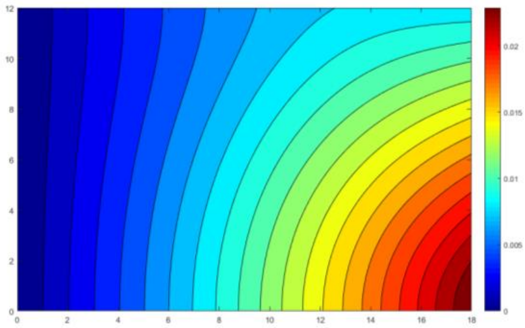
รูปที่ 7.41 ความคลาดเคลื่อนของปริมาตรใต้พื้นผิวความเค้นเฉือนระนาบ xy

ในส่วนของประสิทธิภาพของวิธีรูปแบบปิด พิจารณาจากเวลาที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์แข็งเกร็ง โดยการคำนวณแบบวนซ้ำเป็นจำนวน 100,000 รอบ รูปที่ 7.42 แสดงการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณระหว่างวิธีรูปแบบปิดและวิธีเกาส์-เลอจองด์ที่ใช้จำนวนจุดเกาส์ต่าง ๆ พบว่าวิธีรูปแบบปิดใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีเกาส์-เลอจองด์ทุกกรณี

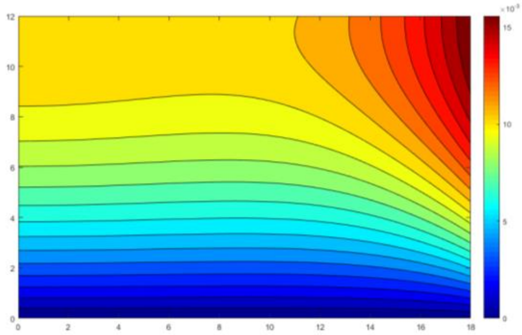


รูปที่ 7.42 เวลาที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์แข็งเกร็งของการแบ่งปัญหา 4 เอลิเมนต์

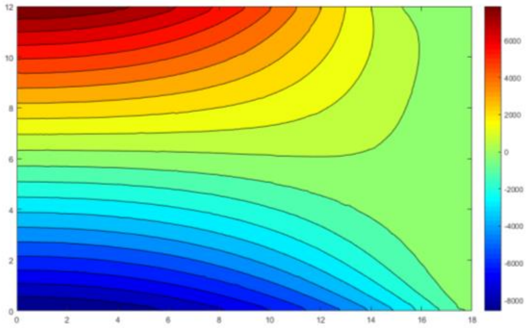
จากนั้นทดสอบความแม่นยำของวิธีรูปแบบปิดเพิ่มเติม โดยแบ่งโดเมนของปัญหาอีก 5 กรณี คือ 226, 1011, 3080, 5083 และ 10,071 เอลิเมนต์ตามลำดับ โดยรูปที่ 7.43 ถึง รูปที่ 7.47 แสดงการกระจายตัวของการเคลื่อนที่และความเค้นที่คำนวณได้จากวิธีรูปแบบปิดบนการแบ่งโดเมนของปัญหา 10,071 เอลิเมนต์



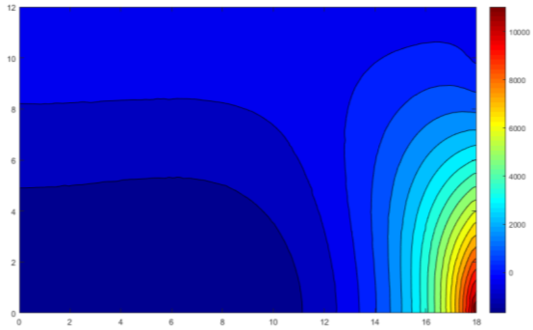
รูปที่ 7.43 การเคลื่อนที่แนวแกน x (u)



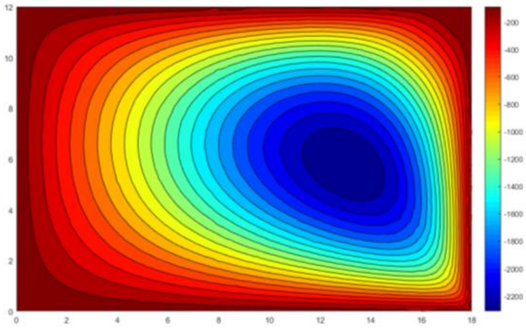
รูปที่ 7.44 การเคลื่อนที่แนวแกน y (v)



รูปที่ 7.45 ความเค้นตั้งฉากแกน x

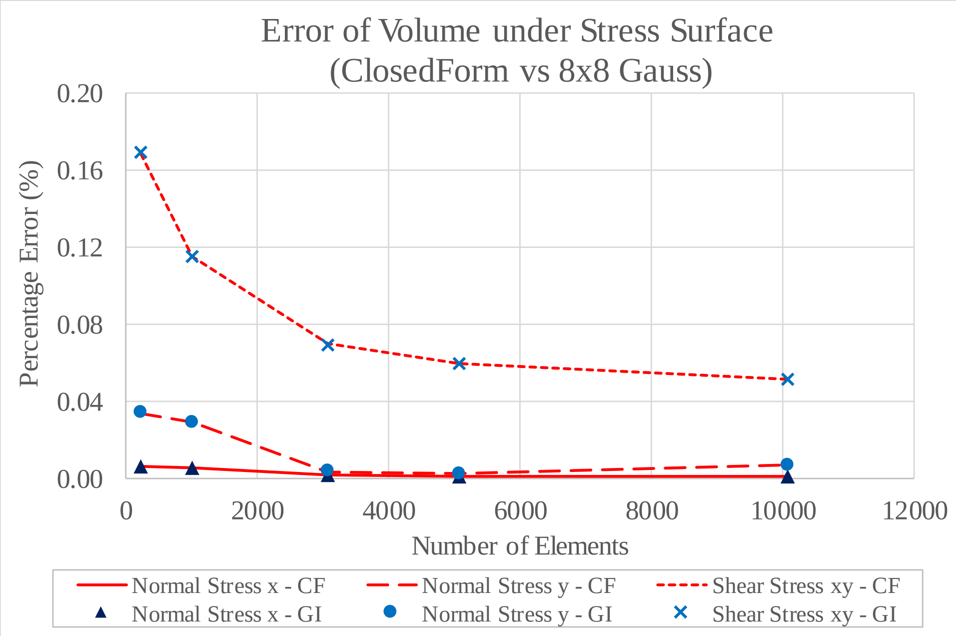


รูปที่ 7.46 ความเค้นตั้งฉากแกน y



รูปที่ 7.47 ความเค้นเฉือนในระนาบ xy

จากการทดสอบกับการแบ่งโดเมนของปัญหาเพิ่มเติมอีก 5 กรณี พบว่าความแตกต่างของความคลาดเคลื่อนระหว่างวิธีรูปแบบปิดและวิธีของเกาส์แตกต่างกันไม่มาก จึงขอแสดงเฉพาะกรณีวิธีของเกาส์ 8×8 ซึ่งเป็นกรณีที่มีความแม่นยำสูงเปรียบเทียบกับวิธีรูปแบบปิด แสดงดังรูปที่ 7.48 โดยกราฟเส้นแสดงความคลาดเคลื่อนของปริมาตรจากวิธีรูปแบบปิด และจุดแสดงค่าคลาดเคลื่อนของปริมาตรจากวิธีของเกาส์-เลอจองด์ พบว่ามีเพียงกรณีความเค้นเฉือนบนระนาบ xy เท่านั้นสังเกตเห็นความแตกต่างของความคลาดเคลื่อนคือวิธีของเกาส์ให้ค่าความคลาดเคลื่อนมากกว่าวิธีรูปแบบปิด 0.04% อย่างไรก็ตามทั้งสองวิธีให้ค่าคลาดเคลื่อนมี เมื่อเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์มากขึ้น รายละเอียดของค่าคลาดเคลื่อนในกรณีต่าง ๆ แสดงในภาคผนวก ค



รูปที่ 7.48 เวลาที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์แข็งเกร็งของการแบ่งปัญหา 4 เอลิเมนต์

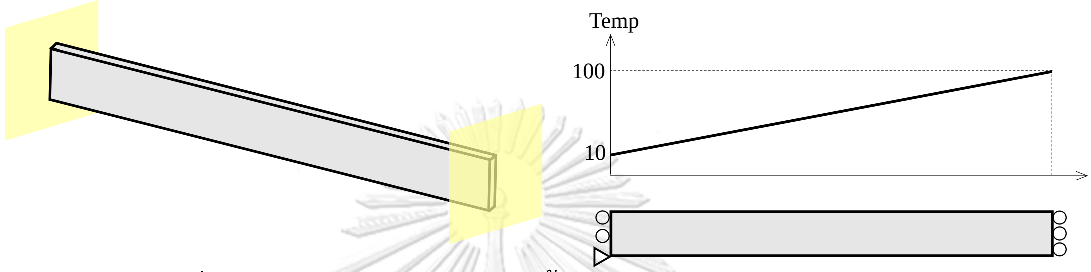
สำหรับเวลาที่ใช้ในการคำนวณ พิจารณาจากเวลาที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์แข็งเกร็ง โดยการคำนวณแบบวนซ้ำ จากตัวอย่างที่ข้างต้นพบว่าวิธีของเกาส์-เลอจองด์ 2×2 จุด เป็นกรณที่ใช้เวลาน้อยที่สุดของวิธีของเกาส์ และเมื่อเพิ่มจุดเกาส์ในการคำนวณจะส่งผลให้ใช้เวลาในการคำนวณเพิ่มขึ้น ดังนั้นตารางที่ 7.5 แสดงเวลาที่ใช้ในการคำนวณโดยเลือกแสดงเฉพาะที่ 2×2 จุด เปรียบเทียบกับวิธีของรูปแบบปิด จะเห็นได้ว่าวิธีรูปแบบปิดใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีของเกาส์ทุกกรณีที่จำนวนเอลิเมนต์แตกต่างกัน และสามารถกล่าวได้ว่าวิธีรูปแบบปิดใช้เวลาน้อยกว่าวิธีเกาส์-เลอจองด์ที่ใช้จุดเกาส์ในการคำนวณมากกว่า 2×2 จุดอีกด้วย

ตารางที่ 7.5 เวลาที่ใช้ในการคำนวณด้วยวิธีรูปแบบปิดและวิธีของเกาส์-เลอจองด์

จำนวนเอลิเมนต์	**จำนวนรอบวนซ้ำ**	**เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (นาที : วินาที)**	
		วิธีรูปแบบปิด	**วิธีของเกาส์ 2×2 จุด**
226	5,000	0:31	1:18
1,011	1,000	0:25	1:08
3,080	350	0:25	1:09
5,027	200	0:25	1:07
10,071	100	0:24	1:08

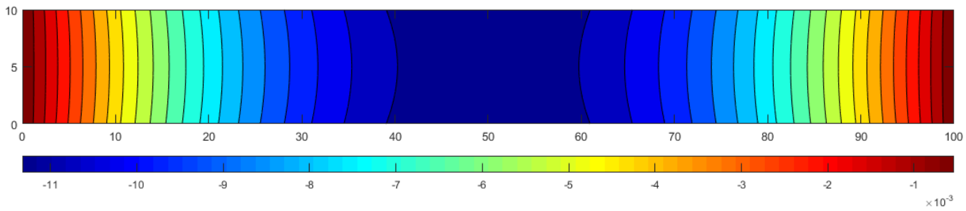
7.2.4 ปัญหาคานถูกตรึงปลายทั้งสองข้างและรับภาระของอุณหภูมิที่กระจายตัวเชิงเส้นตามแกน x

แผ่นโลหะยาว 100 หน่วย กว้าง 10 หน่วย และหนา 0.2 หน่วย ดังแสดงในรูปที่ 7.49 พิจารณาโหลดของอุณหภูมิที่มีการกระจายตัวเชิงเส้น โดยคุณสมบัติของวัสดุ มีค่าโมดูลัสของยังส์ $E = 10\times10^{6}\text{psi}$ อัตราส่วนปัวส์ซง $\upsilon = 0.3$ ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิ $\alpha = 10\times10^{-6}/^{\circ}\text{F}$ และอุณหภูมิอ้างอิงเมื่อไม่เกิดความเค้นในวัสดุ $T_0 = 0^{\circ}\text{F}$

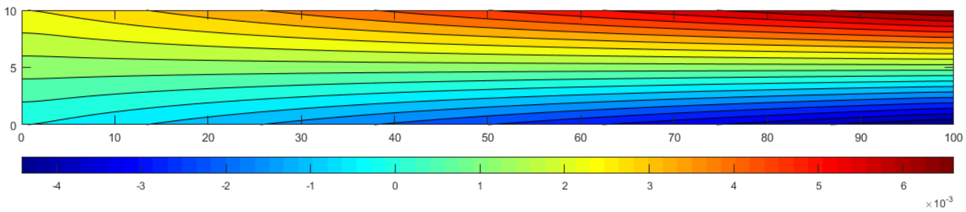


รูปที่ 7.49 ปัญหาคานถูกตรึงปลายทั้งสองข้างและรับภาระของอุณหภูมิที่กระจายตัวเชิงเส้นตามแกน x

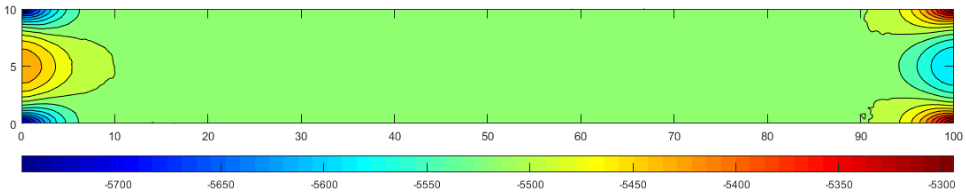
การทดสอบความแม่นยำของวิธีรูปแบบปิดพิจารณาจากการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็น 539, 1,077 , 3,026 , 5,144 และ 9,237 เอลิเมนต์ตามลำดับ รูปที่ 7.50 ถึง รูปที่ 7.54 แสดงการกระจายตัวของผลลัพธ์ที่คำนวณจากวิธีรูปแบบปิดประกอบด้วยการเคลื่อนที่ในแนวแกน x, การเคลื่อนที่ในแนวแกน y, ความเค้นตั้งฉากแกน x, ความเค้นตั้งฉากแกน y และความเค้นเฉือนบนระนาบ xy โดยผลลัพธ์ที่แสดงนี้คำนวณจากการแบ่งปัญหาเป็น 9,237 เอลิเมนต์



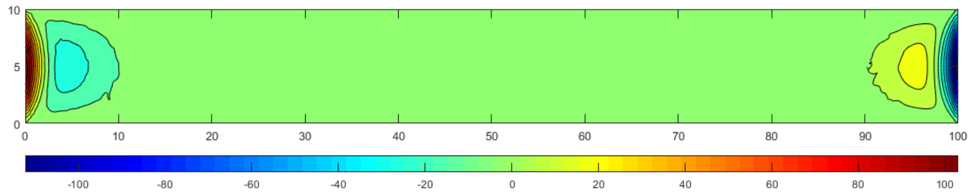
รูปที่ 7.50 การเคลื่อนที่ในแนวแกน x



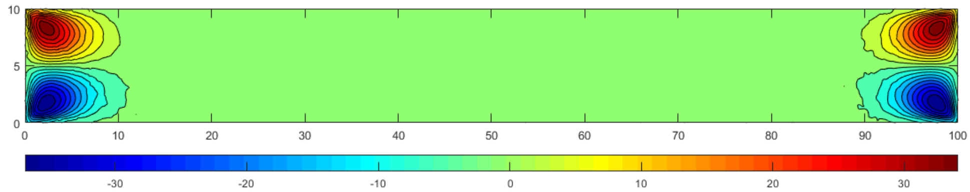
รูปที่ 7.51 การเคลื่อนที่ในแนวแกน y



รูปที่ 7.52 ความเค้นตั้งฉากแกน x

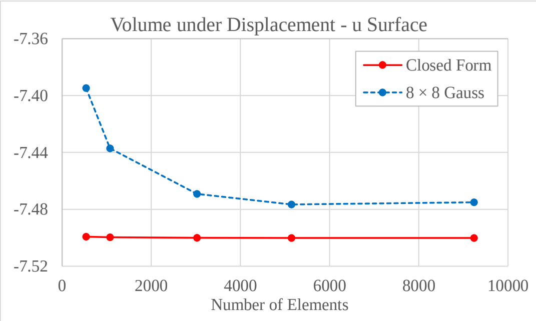


รูปที่ 7.53 ความเค้นตั้งฉากแกน y

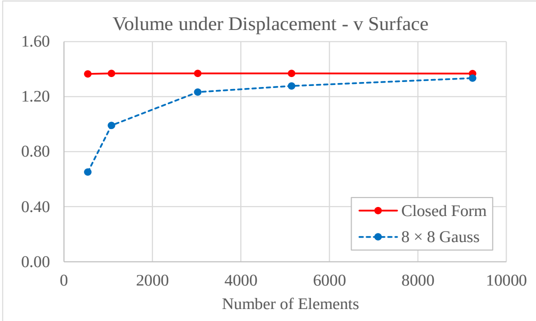


รูปที่ 7.54 ความเค้นเฉือนบนระนาบ xy

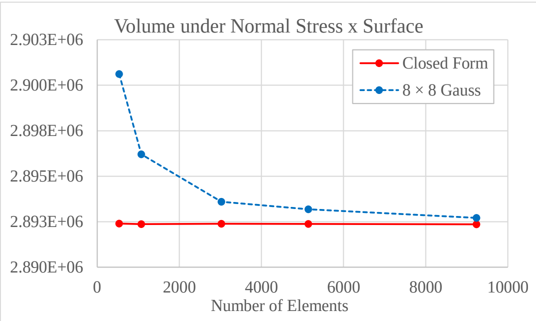
เนื่องจากการปัญหาข้างต้นไม่มีผลเฉลยแม่นตรง การพิจารณาความแม่นยำจะเปรียบเทียบปริมาตรใต้พื้นผิวการเคลื่อนที่และความเค้นระหว่างวิธีรูปแบบปิดและวิธีของเกาส์ ในกรณีนี้เลือกแสดงผลของการคำนวณด้วย 8×8 จุดเกาส์ซึ่งมีความแม่นยำสูงสุดเปรียบเทียบกับวิธีรูปแบบปิด ณ เอลิเมนต์แตกต่างกัน ซึ่งโดยปกติการเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ จะยิ่งเพิ่มความแม่นยำให้กับผลลัพธ์ จากรูปที่ 7.55 (ก) – (จ) พบว่า ปริมาตรใต้พื้นผิวที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีรูปแบบปิดที่การแบ่งเอลิเมนต์หยาบและเอลิเมนต์ละเอียดให้ค่าที่ใกล้เคียงกัน ในขณะที่วิธีเกาส์-เลอจองด์ การเพิ่มของเอลิเมนต์ทำให้ผลลัพธ์ได้วิ่งเข้าใกล้ผลจากวิธีรูปแบบปิด สมารถกล่าวได้ว่า ณ ปัญหาเอลิเมนต์หยาบ ๆ ผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีรูปแบบปิดมีความแม่นยำว่าวิธีของเกาส์ 8×8 จุดเกาส์ โดยเฉพาะผลลัพธ์ของการเคลื่อนที่ (รูปที่ 7.55 ก - ข) และความเค้นตั้งฉากแกน x (รูปที่ 7.55 ค)



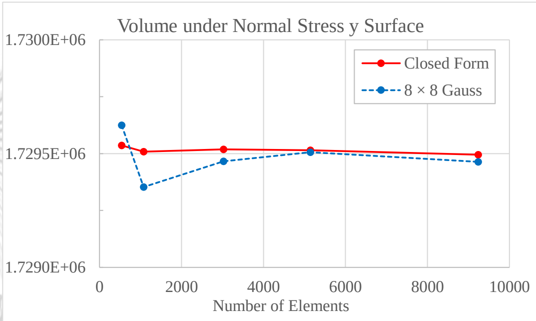
ก) การเคลื่อนที่ในแนวแกน x (u)



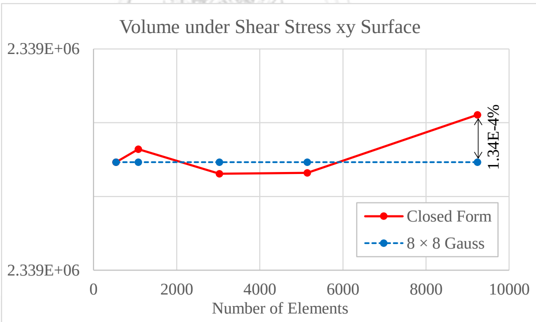
ข) การเคลื่อนที่ในแนวแกน y (v)



ค) ความเค้นตั้งฉากแกน x



ง) ความเค้นตั้งฉากแกน y



จ) ความเค้นเฉือนระนาบ xy

รูปที่ 7.55 การเปรียบเทียบปริมาตรใต้พื้นผิวระหว่างวิธีรูปแบบปิดและวิธีเกาส์-เลอจองด์ 8×8 จุด ที่การแบ่งเอลิเมนต์แตกต่างกัน

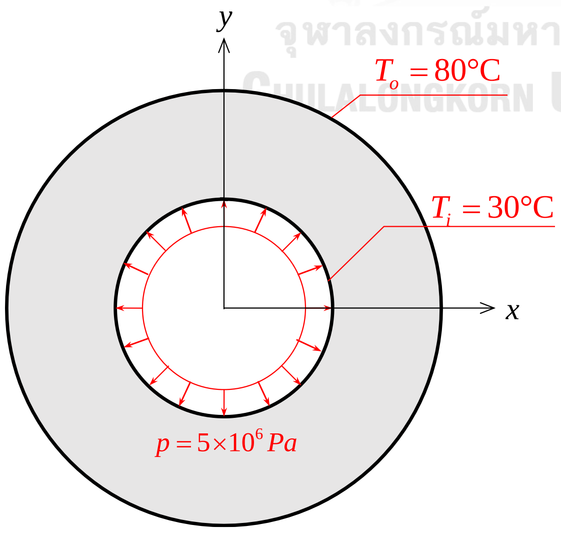
พิจารณาประสิทธิภาพของวิธีรูปแบบปิด จากการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์แข็งเกร็งของระบบแบบวนซ้ำระหว่างวิธีรูปแบบปิดและวิธีเกาส์-เลอจองด์ แสดงในตารางที่ 7.6 พบว่าวิธีรูปแบบปิดใช้เวลาน้อยกว่าวิธีของเกาส์ 2×2 จุดทุกกรณีที่จำนวนเอลิเมนต์แตกต่างกัน ดังนั้นวิธีรูปแบบปิดจะใช้เวลาน้อยกว่าวิธีของเกาส์ที่จำนวนจุดเกาส์ต่าง ๆ ด้วย เรายละเอียดแสดงในภาคผนวก ค ยกตัวอย่างเช่น กรณีที่แบ่งโดเมนของปัญหาเป็น 539 เอลิเมนต์ หากใช้ดจุดเกาส์ 8×8 จุด ในการคำนวณแบบวนซ้ำ 2,000 รอบ จะใช้เวลา 11 นาที 40 วินาที เป็นต้น

ตารางที่ 7.6 เวลาที่ใช้ในการคำนวณด้วยวิธีรูปแบบปิดและวิธีของเกาส์-เลอจองด์

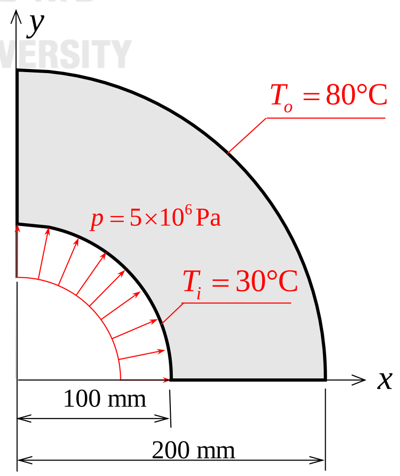
จำนวนเอลิเมนต์	จำนวนรอบวนซ้ำ	เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (นาที : วินาที)	
		วิธีรูปแบบปิด	วิธีของเกาส์ 2x2 จุด
539	2,000	0:26	1:10
1,077	1,000	0:26	1:10
3,026	350	0:25	1:10
5,144	200	0:23	1:07
9,237	150	0:32	1:37

7.2.5 ปัญหาแผ่นวงแหวนบางกำหนดอุณหภูมิขอบในและขอบนอก รับโหลดจากความดันตลอดขอบด้านใน

แผ่นวงแหวนขนาดรัศมีภายในเท่ากับ 100 มิลลิเมตรและรัศมีภายนอกเท่ากับ 200 มิลลิเมตร ความหนา 1 มิลลิเมตร กำหนดอุณหภูมิที่ขอบในมีค่าเท่ากับ $T_i = 30°\mathrm{C}$ ในขณะที่อุณหภูมิขอบนอกมีค่าเท่ากับ $T_o = 80°\mathrm{F}$ รับโหลดแรงดันจากขอบด้านในขนาด $p = 5\times10^6 \mathrm{Pa}$ โดยคุณสมบัติของวัสดุแผ่นวงแหวน ประกอบด้วยค่าโมดูลัสของยังส์ $E = 200$ GPa อัตราส่วนปัวส์ซง $\upsilon = 0.25$ ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิ $\alpha = 6\times10^{-6}$ /°C และอุณหภูมิอ้างอิงเมื่อไม่เกิดความเค้นในวัสดุ $T_0 = 0°\mathrm{C}$ ดังแสดงรายละเอียดในรูปที่ 7.56



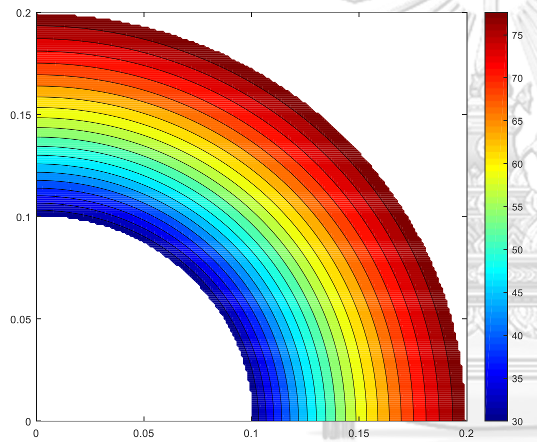
รูปที่ 7.56 ปัญหาบนแผ่นวงแหวน



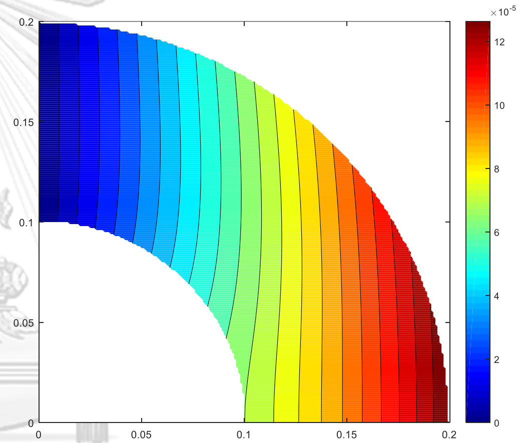
รูปที่ 7.57 ลักษณะปัญหาที่นำมาพิจารณา

เนื่องจากความสมมาตรของปัญหาจึงพิจารณาเพียงหนึ่งในสี่ของปัญหาทั้งหมด ดังรูปที่ 7.57 เงื่อนไขขอบเขตถูกกำหนดโดย ตลอดขอบ $x = 0$ มีพฤติกรรมการเคลื่อนที่สมมาตรกับแกน y และตลอดขอบ $y = 0$ มีพฤติกรรมการเคลื่อนที่สมมาตรกับแกน x โดยแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็น 169 , 532 , 1,081 , 2,537 และ 5,176 เอลิเมนต์ เพื่อทดสอบความแม่นยำของวิธีรูปแบบปิด

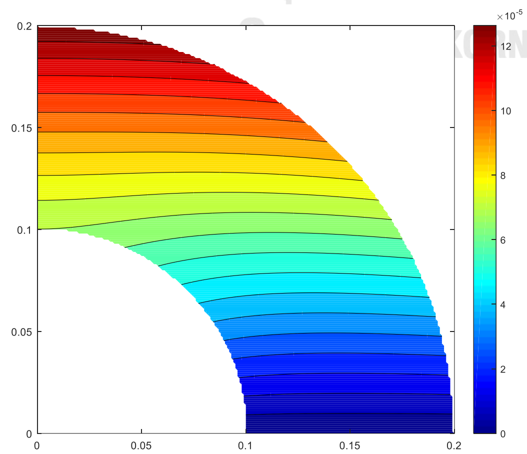
สำหรับปัญหานี้ จะใช้โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ในการคำนวณ ตั้งแต่การแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อน โดยจะได้ผลลัพธ์เป็นอุณหภูมิจุดต่อ จากนั้นนำอุณหภูมิจุดต่อมาคำนวณหาการเคลื่อนที่และความเค้นตามลำดับ ผลการกระจายตัวของผลลัพธ์บนแผ่นรูปวงแหวนซึ่งคำนวณจากวิธีรูปแบบปิดบนการแบ่งปัญหา 5,176 เอลิเมนต์ แสดงในแผนภาพดังรูปที่ 7.59 ถึง รูปที่ 7.63 โดยแสดงการกระจายตัวของอุณหภูมิ การเคลื่อนที่ในแนวแกน x การเคลื่อนที่ในแนวแกน y ความเค้นตั้งฉากแกน x ความเค้นตั้งฉากแกน y และความเค้นเฉือนบนระนาบ xy ตามลำดับ



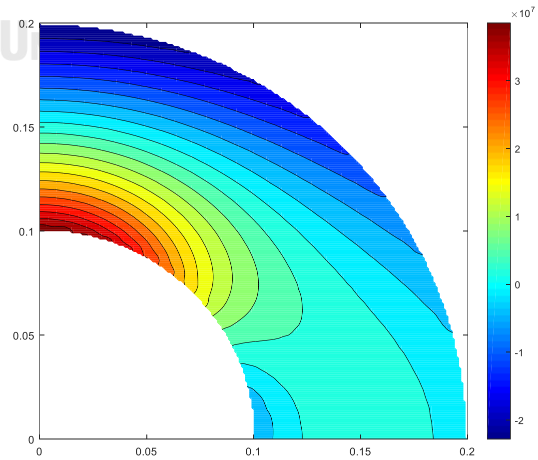
รูปที่ 7.58 การกระจายตัวของอุณหภูมิ



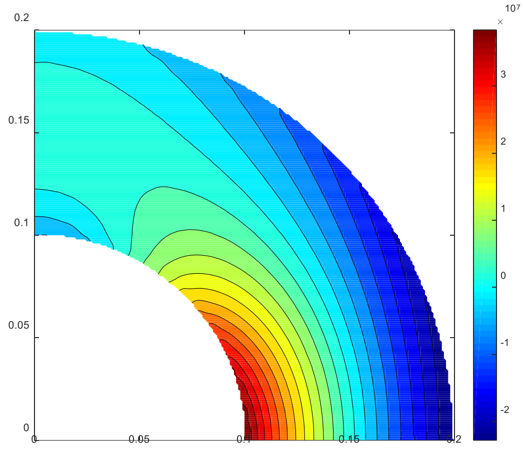
รูปที่ 7.59 การเคลื่อนที่ในแนวแกน x (u)



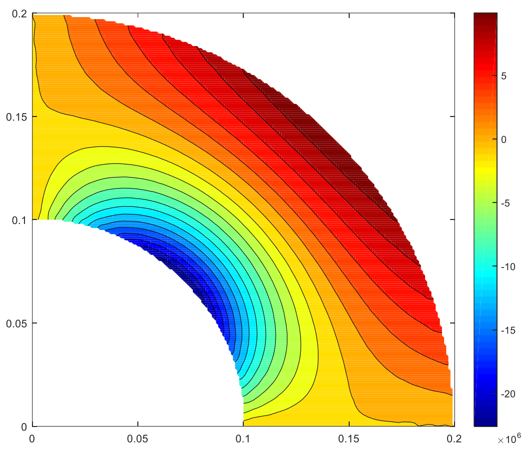
รูปที่ 7.60 การเคลื่อนที่ในแนวแกน y (v)



รูปที่ 7.61 ความเค้นตั้งฉากแกน x (σ_x)

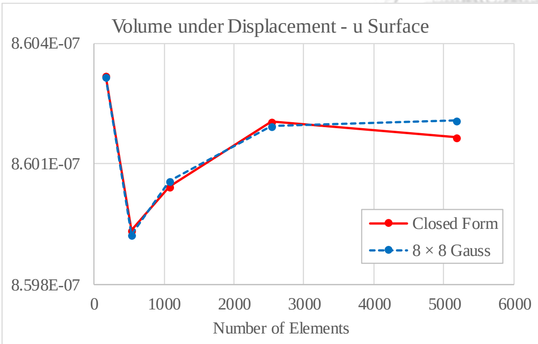


รูปที่ 7.62 ความเค้นตั้งฉากแกน y (σ_y)

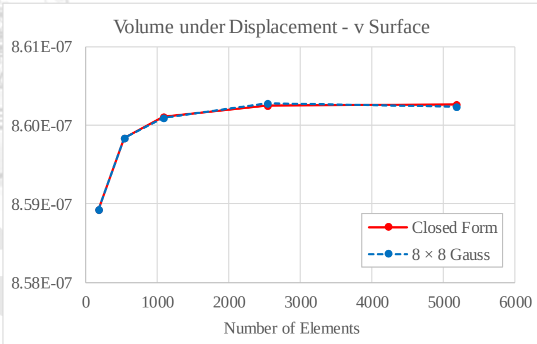


รูปที่ 7.63 ความเค้นเฉือนบนระนาบ xy (τ_{xy})

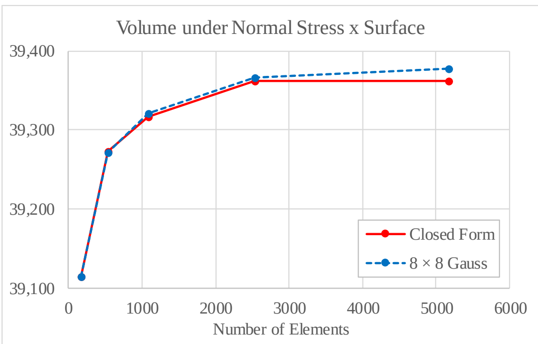
รูปที่ 7.64 แสดงการเปรียบเทียบปริมาตรใต้พื้นผิวการเคลื่อนที่และความเค้นระหว่างวิธีรูปแบบปิดและวิธีของเกาส์ 8×8 จุดเกาส์ซึ่งเป็นกรณีที่มีความแม่นยำสูง พบว่าทั้งวิธีรูปแบบปิดและวิธีของเกาส์ให้ผลลัพธ์ที่ค่าใกล้เคียงกัน ดังนั้นสามารถกล่าวได้ว่า จากปัญหานี้วิธีรูปแบบปิดให้ความแม่นยำเทียบเคียงได้เท่ากับวิธีเกาส์-เลอจองด์ 8×8 จุด



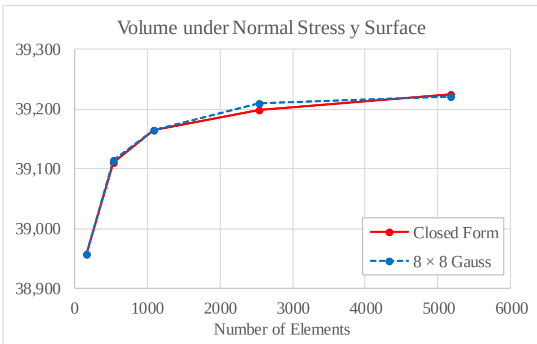
ก) การเคลื่อนที่แนวแกน x (u)



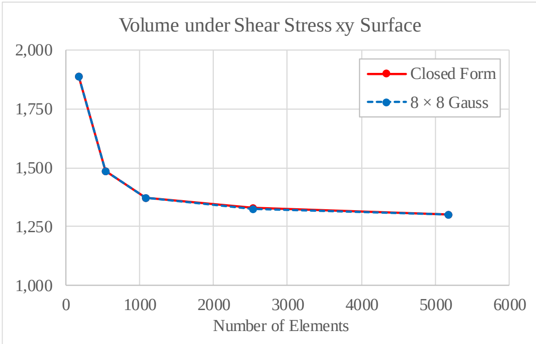
ข) การเคลื่อนที่แนวแกน y (v)



ค) ความเค้นตั้งฉากแกน x (σ_x)



ง) ความเค้นตั้งฉากแกน y (σ_y)



จ) ความเค้นเฉือนระนาบ xy (τ_{xy})

รูปที่ 7.64 ปริมาตรใต้พื้นผิวของปัญหาวงแหวน ณ เอลิเมนต์ต่าง ๆ

การทดสอบประสิทธิภาพของวิธีรูปแบบปิด จะพิจารณาเวลาที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์แข็งเกร็งแบบวนซ้ำกับเปรียบเทียบกับวิธีเกาส์-เลอจองด์ 2×2 จุด เนื่องจากเป็นกรณีที่ใช้เวลาน้อยที่สุดในการคำนวณของวิธีของเกาส์ จากตารางที่ 7.7 จะพบว่า วิธีรูปแบบปิดใช้เวลาน้อยกว่าวิธีของเกาส์-เลอจองด์ทุก ๆ กรณีที่เอลิเมนต์มีจำนวนแตกต่างกัน นอกจากนี้ยังแสดงให้เห็นว่าวิธีรูปแบบปิดยังใช้เวลาน้อยกว่าวิธีเกาส์-เลอจองด์เมื่อใช้จำนวนจุดเกาส์มากขึ้นอีกด้วย เช่น กรณี 5,176 เอลิเมนต์ หากใช้จุดเกาส์ 8×8 จุดในการคำนวณแบบวนซ้ำ 200 รอบ จะใช้เวลา 10 นาที 28 วินาที เป็นต้น รายละเอียดของเวลาที่ใช้ในการคำนวณที่จำนวนจุดเกาส์อื่น ๆ แสดงในภาคผนวก ค

ตารางที่ 7.7 เวลาที่ใช้ในการคำนวณด้วยวิธีรูปแบบปิดและวิธีของเกาส์-เลอจองด์

จำนวนเอลิเมนต์	**จำนวนรอบวนซ้ำ**	**เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (นาที : วินาที)**	
		วิธีรูปแบบปิด	**วิธีของเกาส์ 2×2 จุด**
169	6000	0:24	1:04
532	2000	0:24	1:07
1,081	1000	0:25	1:17
2,537	400	0:23	1:12
5,176	200	0:22	1:15

ในบทนี้ได้นำเสนอการตรวจสอบความถูกต้องของวิธีรูปแบบปิดทั้งในการแก้ปัญหาการนำความร้อนและการแก้ปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อนแล้ว ซึ่งพบว่าผลลัพธ์ที่ได้มีความแม่นยำสูงเทียบเท่ากับวิธีเกาส์-เลอจองด์ที่ใช้จุดเกาส์จำนวนมาก ในขณะเดียวกันวิธีรูปแบบปิดก็ใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีเกาส์-เลอจองด์

บทที่ 8
บทสรุป ปัญหาที่พบ และข้อเสนอแนะ

8.1 บทสรุปของงานวิจัย

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอการประดิษฐ์เอลิเมนต์เมทริกซ์รูปแบบปิดสำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมใด ๆ สี่จุดต่อเพื่อนำไปใช้แก้ปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อน พร้อมทั้งประเมินความสามารถของวิธีรูปแบบปิดทั้งความแม่นยำและประสิทธิภาพ โดยจะเริ่มต้นจากการทบทวนวรรณกรรมเพื่อให้ทราบถึงพัฒนาการของการหาสมการรูปแบบปิด เพื่อพยายามลดความคลาดเคลื่อนเนื่องจากการอินทิเกรตเชิงคำนวณ (numerical integration) จากนั้นได้อธิบายทฤษฎีพื้นฐานของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างถูกเลือกมาใช้ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ถัดมาได้อธิบายทฤษฎีพื้นฐานของการถ่ายเทความร้อนและอีลาสติก โดยแสดงสมการปริพันธ์ความคุม (governing equation) ตั้งต้น แสดงการหาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ทีละขั้นตอนจนกระทั่งได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สมบูรณ์ แล้วประยุกต์การอินทิเกรตซึ่งในส่วนนี้จะแบ่งออกเป็น 2 วิธีคือ 1. วิธีแบบดั้งเดิม หรือวิธีของเกาส์-เลอจองด์ ซึ่งเป็นวิธีที่ถูกนำมาใช้อ้างอิงในการจรวจสอบความแม่นยำและประสิทธิภาพของวิธีรูปแบบปิด 2. วิธีรูปแบบปิด ในส่วนนี้อธิบายขั้นตอนการหาสมการรูปแบบปิด เริ่มจากการจัดรูปสมการพีชคณิตของตำแหน่งจุดต่อ ใช้โปรแกรมแมทาเมทิกา (Mathematica) ช่วยอินทิเกรตและจัดรูปสมการด้วยมืออีกครั้ง นอกจากนั้นยังพิจารณาเงื่อนไขรูปร่างของเอลิเมนต์ แล้วจึงนำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ซึ่งรายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์อธิบายไว้ในบทที่ 6

ผลการทดสอบความแม่นยำและประสิทธิภาพของวิธีรูปแบบปิดถูกนำเสนอเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนที่ทดสอบกับปัญหาความร้อน และส่วนที่ทดสอบกับปัญหาอีลาสติก โดยการทดสอบกับปัญหาความร้อนเริ่มจากนำไปทดสอบกับปัญหาเอลิเมนต์เดี่ยว เปรียบเทียบระหว่างวิธีรูปแบบปิดกับวิธีเกาส์-เลอจองด์ พบว่าวิธีรูปแบบปิดให้ผลที่มีความแม่นยำสูง โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อเอลิเมนต์ที่มีรูปร่างบิดเบี้ยว และจะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าวิธีรูปแบบปิดให้ความแม่นยำเทียบเท่ากับวิธีของเกาส์ที่ใช้จุดเกาส์จำนวนมาก ๆ ในการคำนวณ สำหรับประสิทธิภาพในการหาเอลิเมนต์เมทริกซ์การนำความร้อนด้วยวิธีแบบปิดกับปัญหาเอลิเมนต์เดี่ยวพบว่าวิธีรูปแบบปิดใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีเกาส์-เลอจองด์ทุกกรณี เมื่อนำมาทดสอบแก้ไขปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่ไม่มีการสร้างความร้อนขึ้นเอง โดยเริ่มพิจารณาจากการแบ่งปัญหาเป็น 5 เอลิเมนต์ การทดสอบความถูกต้องแม่นยำทำโดยการนำผลคำนวณไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นตรง พบว่าความแม่นยำของวิธีรูปแบบปิดเทียบเท่ากับวิธีเกาส์-เลอจองด์ที่จำนวนจุดเกาส์มาก ๆ และยังใช้เวลาในการคำนวณน้อย

กว่าวิธีเกาส์-เลอจองด์อีกด้วย จากนั้นทดสอบเพิ่มเติมกับปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นสามเหลี่ยมที่มีการสร้างความร้อนขึ้นเอง ปัญหานี้ทดสอบจากการแบ่งโดเมนของปัญหาจากจำนวนเอลิเมนต์น้อย ๆ และค่อย ๆ เพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ให้ละเอียดขึ้น ผลการคำนวณพบว่าได้ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัส ที่มีการสร้างความร้อนขึ้นเอง คือวิธีรูปแบบปิดให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำเทียบกับวิธีเกาส์-เลอจองด์ที่จำนวนจุดเกาส์มาก อีกทั้งยังใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีของเกาส์-เลอจองด์อีกด้วย นอกจากนี้ยังนำไปทดสอบกับปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัส ที่มีการพาความร้อนตามขอบ ซึ่งก็ได้ผลลัพธ์ไปในทิศทางเดียวกัน กรณีสุดท้ายที่นำโปรแกรมของวิธีรูปแบบปิดไปทดสอบคือ ปัญหาการนำความร้อนของแผ่นสี่เหลี่ยมเจาะรูซึ่งเป็นกรณีที่โดเมนของปัญหามีรูปร่างซับซ้อนและมีการประยุกต์การพาความร้อนตามแนวขอบ การทดสอบนี้พิจารณาความแม่นยำจากค่าเฉลี่ยของเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างสัมพัทธ์เมื่อใช้จำนวนจุดเกาส์ที่แตกต่างกัน พบว่าเมื่อเพิ่มจำนวนจุดเกาส์ในการคำนวณจะทำให้ความแตกต่างนี้ลดลง แสดงว่าวิธีรูปแบบปิดให้ผลลัพธ์เทียบเท่ากับวิธีเกาส์-เลอจองด์ที่ใช้จุดเกาส์ในการคำนวณมาก ๆ ส่วนเวลาที่ใช้ในการคำนวณวิธีรูปแบบปิดก็ยังใช้เวลาน้อยกว่าวิธีเกาส์-เลอจองด์เช่นกัน

เมื่อมาพิจารณาส่วนของการแก้ปัญหาอีลาสติก โดยเริ่มจากการทดสอบเอลิเมนต์เดี่ยว เนื่องจากขนาดของเอลิเมนต์เมทริกซ์ที่ใหญ่ขึ้น จากเมทริกซ์การนำความร้อนขนาด 4×4 เป็นเมทริกซ์แข็งเกร็งขนาด 8×8 ทำให้เห็นผลต่างของเวลาที่ใช้ในการคำนวณระหว่างสองวิธีนี้แตกต่างชัดเจนมากยิ่งขึ้น และยังคงแสดงให้เห็นว่าวิธีรูปแบบปิดให้ความแม่นยำที่สูง โดยเฉพาะเอลิเมนต์ที่มีรูปร่างบิดเบี้ยวสามารถให้ผลลัพธ์ที่แม่นยำในขณะที่วิธีเกาส์-เลอจองด์ จะต้องใช้จำนวนจุดเกาส์เพิ่มมากขึ้น เมื่อนำมาทดสอบกับปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่รับภาระของอุณหภูมิที่กระจายตัวเชิงเส้นตามแกน x โดยแบ่งปัญหาออกเป็น 4 เอลิเมนต์และพิจารณาความแม่นยำจากการเปรียบเทียบปริมาตรใต้พื้นผิวของค่าการเคลื่อนที่ พบว่าการเพิ่มจำนวนจุดเกาส์ในการคำนวณ จะทำให้ค่าคลาดเคลื่อนของปริมาตรที่คำนวณได้จากวิธีเกาส์-เลอจองด์มีค่าเข้าใกล้ค่าคลาดเคลื่อนที่ได้จากวิธีรูปแบบปิด จากนั้นแบ่งปัญหาโดยใช้จำนวนเอลิเมนต์มากขึ้น พบว่าทำให้ความคลาดเคลื่อนที่คำนวณได้ลดลงทั้ง 2 วิธี แล้วเมื่อเปรียบเทียบระหว่างวิธีรูปแบบปิดและวิธีเกาส์-เลอจองด์ ก็ยังพบว่าค่าคลาดเคลื่อนที่ได้จากวิธีรูปแบบปิดมีค่าเทียบเท่ากับการใช้จุดเกาส์จำนวนมากในการคำนวณ สำหรับเวลาที่ใช้ในการคำนวณจะพบว่าวิธีรูปแบบปิดใช้เวลาน้อยกว่าวิธีเกาส์-เลอจองด์ทุกรณี เมื่อพิจารณากับแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่รับภาระของอุณหภูมิแบบหลังคาบ้าน ซึ่งพิจารณาความแม่นยำจากปริมาตรใต้พื้นผิวความเค้น พบว่าความคลาดเคลื่อนจากผลเฉลยแม่นตรงมีค่าน้อยมากทั้งวิธีรูปแบบปิดและวิธีเกาส์-เลอจองด์ แต่อย่างไรก็ดี วิธีรูปแบบปิดยังใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีเกาส์-เลอจองด์ทุกกรณีที่พิจารณา เมื่อนำไปทดสอบกับปัญหาอื่น ๆ ได้แก่ ปัญหาคานถูกตรึงปลายทั้งสองข้างและรับภาระของอุณหภูมิที่

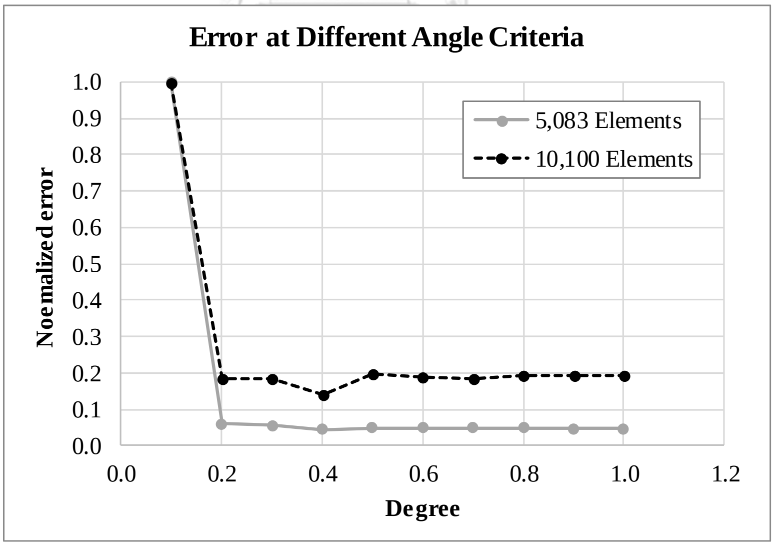
กระจายตัวเชิงเส้นตามแกน x กรณีนี้ไม่มีผลเฉลยแม่นตรงจึงพิจารณาเปรียบเทียบปริมาตรใต้พื้นผิวของผลลัพธ์ระหว่างวิธีรูปแบบปิดและวิธีเกาส์-เลอจองด์ ที่การแบ่งเอลิเมนต์ต่าง ๆ กัน พบว่าวิธีรูปแบบปิดให้ความแม่นยำที่ดีแม้กรณีที่แบ่งเอลิเมนต์หยาบ ๆ ในขณะที่วิธีของเกาส์ ต้องใช้จำนวนจุดเกาส์ที่มากขึ้น หรือแบ่งเอลิเมนต์ให้ละเอียดมากพอจึงจะให้ความแม่นยำเทียบเคียงกับวิธีรูปแบบปิด อีกทั้งวิธีรูปแบบปิดยังใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีเกาส์-เลอจองด์อีกด้วย ปัญหาสุดท้ายที่ใช้ทดสอบเป็นปัญหาแผ่นวงแหวนบางกำหนดอุณหภูมิขอบในและขอบนอก รับโหลดจากความดันตลอดขอบด้านใน โดยใช้การคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตั้งแต่การถ่ายเทความร้อน จนได้อุณหภูมิ ณ จุดต่อและคำนวณหาค่าการเคลื่อนที่ และความเค้นตามลำดับ พบว่าค่าปริมาตรใต้ผลลัพธ์ที่สนใจจากวิธีรูปแบบปิดและวิธีเกาส์-เลอจองด์มีค่าใกล้เคียงกัน แต่อย่างไรก็ดี วิธีรูปแบบปิดก็ยังใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีเกาส์-เลอจองด์ทุก ๆ การใช้จำนวนเอลิเมนต์ที่แตกต่างกัน

งานวิจัยนี้แสดงให้เห็นความสามารถและประสิทธิภาพของวิธีรูปแบบปิด ว่าสามารถคำนวณหาผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูง ซึ่งจะเป็นประโยชน์อย่างยิ่งในกรณีที่ปัญหามีรูปร่างที่ซับซ้อนขึ้น จนทำให้แบ่งเอลิเมนต์ที่มีรูปร่างที่สมบูรณ์ได้ยากหรือทำให้การแบ่งเอลิเมนต์มีลักษณะบิดเบี้ยวมาก นอกจากนี้จากการทดสอบดังที่กล่าวไว้ข้างต้น จะเห็นว่าวิธีรูปแบบปิดให้ความแม่นยำที่ดี แม้ว่าจะมีปริมาณเอลิเมนต์น้อย ซึ่งจะเป็นประโยชน์ต่อการแก้ปัญหาเชิงปฏิบัติ เพราะสามารถลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณที่ไม่จำเป็นจากการสร้างเอลิเมนต์ที่มีความละเอียดมาก ๆ โดยที่ยังได้รับผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูงอยู่ และจากการทดสอบกรณีต่าง ๆ ยิ่งแสดงให้เห็นว่าวิธีรูปแบบปิดใช้เวลาในการคำนวณน้อย เมื่อเทียบกับวิธีแบบดั้งเดิมเนื่องจากเขียนโปรแกรมด้วยหลักการเวกเตอร์ไรเซชัน (vectorization) หรือการดำเนินการคำสั่งเพียงครั้งเดียวกับข้อมูลจำนวนมาก ช่วยลดเวลาในการคำนวณอย่างมากเมื่อเทียบกับการคำนวณแบบวนซ้ำ

8.2 ปัญหาที่พบในงานวิจัย

จากการนำโปรแกรมที่ประดิษฐ์จากวิธีรูปแบบปิดไปทดสอบกับปัญหาหลากหลายรูปแบบแล้ว พบปัญหาความคลาดเคลื่อนเนื่องจากการคำนวณ (numerical error) เพราะถ้าหากสังเกตสมการรูปแบบปิดของเมทริกซ์ความร้อนในกรณีที่ 1 เมื่อเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่พิจารณาไม่มีด้านใดขนานกันเลย จะพบว่าสมการเมทริกซ์รูปแบบปิดของเอลิเมนต์จะอยู่ในรูปแบบของเศษส่วน เมื่อตัวส่วนมีค่าน้อยมาก ๆ เข้าใกล้ศูนย์ จะทำให้ผลจากการคำนวณรวมมีค่ามากเกินกว่าความเป็นจริง ซึ่งกรณีที่จะทำให้ตัวส่วนมีค่าน้อยมาก ๆ นั้น เกิดจากด้านตรงข้ามของเอลิเมนต์เกือบขนานกันและส่งผลให้ตัวส่วนมีค่าเกือบเป็นศูนย์ จึงยังไม่ถูกจัดให้อยู่ในประเภทของเอลิเมนต์ที่มีด้านขนานกัน ดังนั้นจึงมีการพิจารณาเกณฑ์การแบ่งกรณีเพิ่มเติมสำหรับการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ โดยใช้หลักการทางคณิตศาสตร์ที่ว่า ถ้าด้านตรงข้ามของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมขนานกัน ด้านทั้งสองจะต้องมีความชัน

เท่ากัน หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่าด้านทั้งสองจะต้องทำมุม 0 องศาซึ่งกันและกัน ดังนั้น หากพิจารณาเอลิเมนต์ใด ๆ แล้ว พบว่ามุมระหว่างด้านตรงข้ามทั้งสองของเอลิเมนต์มีขนาดเล็กมาก ๆ ต่ำกว่าค่าที่กำหนดไว้ค่าหนึ่ง จะถือว่าเอลิเมนต์ดังกล่าวอยู่ในกลุ่มที่มีด้านขนานกันไปเลย เพื่อขจัดปัญหาการหารด้วยค่าใกล้ศูนย์ การหาเกณฑ์มุมองศาที่แตกต่างกันเพื่อจัดกลุ่มชนิดของเอลิเมนต์ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ได้จากการทดสอบในปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่รับภาระของอุณหภูมิที่กระจายตัวเชิงเส้นตามแกน x (หัวข้อ 7.2.2) ซึ่งค่าคลาดเคลื่อนที่สูงผิดปกตินี้ จะพบเมื่อใช้เอลิเมนต์จำนวนมากหรือเอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็ก โดยรูปที่ 8.1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าคลาดเคลื่อนของผลการคำนวณที่ผ่านการทำนอร์มัลไลซ์แล้ว (แกน y) กับเกณฑ์ความแตกต่างของมุมที่ใช้กำหนดให้ด้านของเอลิเมนต์ขนานกัน (แกน x) โดยค่าที่แสดงบนแกน y นี้คำนวณจากการนำค่าร้อยละของความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ที่สูงสุด (maximum absolute percentage error) ที่คำนวณได้ในแต่ละค่ามุมองศาที่แตกต่างกันหารด้วยค่าร้อยละของความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ที่สูงสุดที่คำนวณได้ในกรณีที่ใช้จำนวนเอลิเมนต์เท่ากัน จากกราฟจะสังเกตเห็นว่าที่ค่ามุมองศาที่แตกต่างกันเท่ากับ 0.4 จะให้ค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าต่ำสุด ดังนั้นในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงเลือก 0.4 องศาเป็นเกณฑ์ในการพิจารณาว่าด้านตรงข้ามของเอลิเมนต์ใด ๆ ขนานกันหรือไม่ กล่าวคือหากด้านที่อยู่ตรงข้ามกันทำมุมต่างกันน้อยกว่า 0.4 องศา จะถือว่าด้านทั้งสองขนานกัน

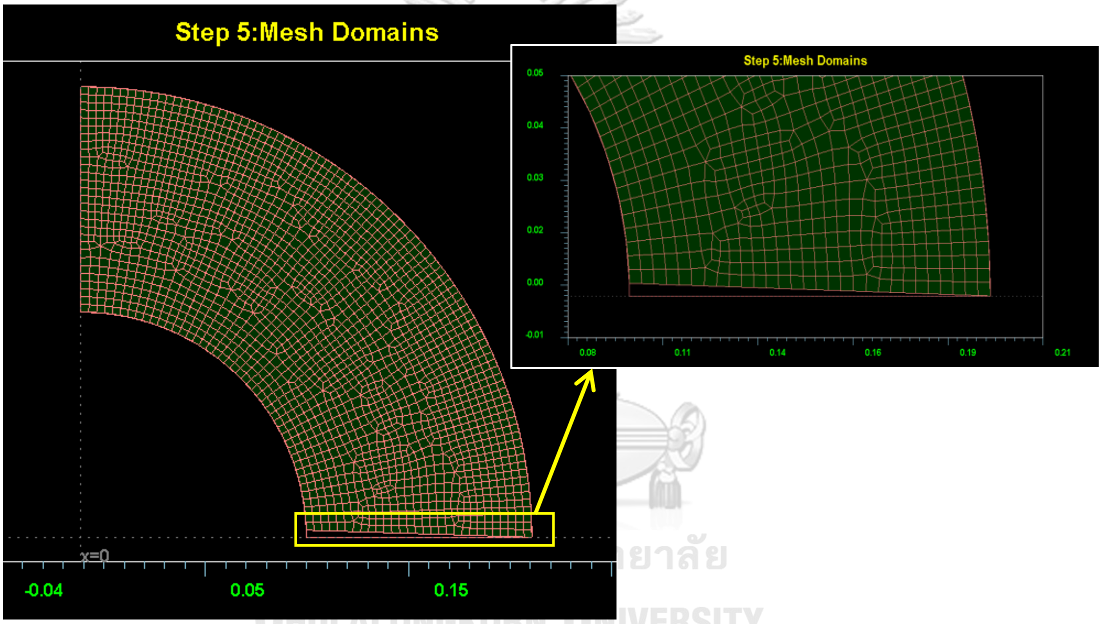


รูปที่ 8.1 ค่าคลาดเคลื่อนเมื่อเกณฑ์การขนานที่องศาต่าง ๆ กัน

ปัญหาที่พบในลำดับต่อมาเกี่ยวข้องกับการใช้โปรแกรม Automesh2D เนื่องจากการเลือกปัญหาพื้นฐานเพื่อนำมาทดสอบมีรูปร่างของปัญหาที่ไม่ซับซ้อนซึ่งง่ายต่อการสร้างเอลิเมนต์ และโปรแกรม Automesh2D เป็นโปรแกรมที่ถูกพัฒนาสำหรับการแบ่งเอลิเมนต์ของปัญหาสองมิติ เพื่อนำไปใช้แก้ปัญหาจริง ดังนั้นโปรแกรมจึงถูกออกแบบมาให้สร้างเอลิเมนต์ที่มีรูปร่างสมบูรณ์มากที่สุดที่

จะสามารถสร้างได้และมีความบิดเบี้ยวน้อยที่สุด แต่อย่างไรก็ตาม การทดสอบความแม่นยำต้องการพิจารณาเอลิเมนต์ที่มีความไม่สมบูรณ์เพราะการแก้ปัญหาเชิงปฏิบัติอาจจะต้องพบกับปัญหามีรูปร่างที่ซับซ้อน ดังนั้นจึงต้องรบกวนการสร้างเอลิเมนต์ของโปรแกรม ทำให้ไม่สามารถควบคุมระดับความบิดเบี้ยวได้ ว่ามีความบิดเบี้ยวมากน้อยเพียงใด

นอกจากนี้การสร้างเอลิเมนต์ในรูปร่างที่ประกอบขึ้นจากส่วนโค้งด้วยโปรแกรม Automesh2D พบปัญหาในกรณีของกรณีปัญหาวงแหวน เพราะหลังจากสร้างเอลิเมนต์แล้วขอบเขตโดเมนจะมีการเปลี่ยนแปลง ยกตัวอย่างเช่น ขอบล่างของปัญหาวงแหวน ดังแสดงในรูปที่ 8.2รูปที่ 8. โดยเฉพาะอย่างยิ่งบริเวณที่ต้องกำหนดเงื่อนไขขอบเขต ดังนั้นจะต้องตรวจสอบและทำการแก้ไขด้วยมือก่อนนำไปใช้



รูปที่ 8.2 ปัญหาการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของโดเมนหลังการสร้างเอลิเมนต์

8.3 ข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัยในอนาคต

จากข้างต้นแสดงให้เห็นประโยชน์ของวิธีรูปแบบปิดที่ถูกนำไปใช้แก้ปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อน นอกจากให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำแล้ว ยังใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธีดั้งเดิมอีกด้วย ดังนั้นหากนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาอื่น ๆ ที่มีความซับซ้อนยิ่งขึ้นไป เช่น ปัญหาของไหล การโก่งของแผ่น หรือพัฒนาต่อไปในระดับการแก้ปัญหา 3 มิติ ที่ใช้เอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมทรง 6 หน้า (hexahedron element) เพื่อขยายขอบเขตการใช้งานให้กว้างขวางยิ่งขึ้น น่าจะได้รับประโยชน์อย่างมา

รายการอ้างอิง

[1] M. Pavlović, "Symbolic computation in structural engineering," *Computers & structures,* vol. 81, no. 22-23, pp. 2121-2136, 2003.

[2] Wolfram Research, " Mathematica," vol. Version 10.4, ed. Champaign,IL, 2016.

[3] M. Okabe, "Analytical integral formulae related to convex quadrilateral finite elements," *Computer methods in Applied mechanics and Engineering,* vol. 29, no. 2, pp. 201-218, 1981.

[4] A. Mizukami, "Some integration formulas for a four-node isoparametric element," *Computer methods in applied mechanics and engineering,* vol. 59, no. 1, pp. 111-121, 1986.

[5] H. Rathod, "Some analytical integration formulae for a four node isoparametric element," *Computers & structures,* vol. 30, no. 5, pp. 1101-1109, 1988.

[6] D. Griffiths, "Stiffness matrix of the four-node quadrilateral element in closed form," *International Journal for numerical methods in engineering,* vol. 37, no. 6, pp. 1027-1038, 1994.

[7] C. Zhou and F. J. Vecchio, "Closed-form stiffness matrix for the four-node quadrilateral element with a fully populated material stiffness," *Journal of engineering mechanics,* vol. 132, no. 12, pp. 1392-1395, 2006.

[8] I. Lozada, J. Osorio, D. Griffiths, and M. Cerrolaza, "Semi-analytical integration of the 8-node plane element stiffness matrix using symbolic computation," *Numerical Methods for Partial Differential Equations,* vol. 22, no. 2, pp. 296-316, 2006.

[9] I. Lozada, D. Griffiths, and M. Cerrolaza, "Semi-analytical integration of the elastic stiffness matrix of an axisymmetric eight-noded finite element," *Numerical Methods for Partial Differential Equations,* vol. 26, no. 6, pp. 1624-1635, 2010.

[10] K. L. Lawrence and R. V. Nambiar, "Explicit expressions for element coordinate transformations by symbolic manipulation," *Computers & structures,* vol. 32, no. 2, pp. 277-280, 1989.

[11] M. Kikuchi, "Application of the symbolic mathematics system to the finite element program," *Computational mechanics,* vol. 5, no. 1, pp. 41-47, 1989.

[12] G. Yagawa, G. W. Ye, and S. Yoshimura, "A numerical integration scheme for finite element method based on symbolic manipulation," *International journal for numerical methods in engineering,* vol. 29, no. 7, pp. 1539-1549, 1990.

[13] C. Lee and R. Hobbs, "Closed form stiffness matrix solutions for some commonly used hybrid finite elements," *Computers & structures,* vol. 67, no. 6, pp. 463-482, 1998.

[14] L. Videla, M. Cerrolaza, and N. Aparicio, "Explicit integration of the stiffness matrix of a four‐noded‐plane‐elasticity finite element," *Communications in numerical methods in engineering,* vol. 12, no. 11, pp. 731-743, 1996.

[15] C. Roque, "Symbolic and numerical analysis of plates in bending using Matlab," *Journal of Symbolic Computation,* vol. 61, pp. 3-11, 2014.

[16] ปราโมทย์ เดชะอำไพ, ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม, 6 ed. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2560.

[17] เมธิศา จิตมานะ, "การประดิษฐ์และประเมินเมทริกซ์การนำความร้อนในรูปแบบปิดสำหรับไฟไนต์เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อ," ปริญญาวิศวกรรมศาสตร์บัณฑิต, วิศวกรรมเครื่องกล, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2558.

[18] X. Ma, G. Zhao, and L. Sun, "AUTOMESH‐2D/3D: robust automatic mesh generator for metal forming simulation," *Materials Research Innovations,* vol. 15, no. sup1, pp. s482-s486, 2011.

[19] P. Dechaumphai, *Finite Element Method: Fundamentals and Applications*. Alpha Science International Limited, 2010.

[20] Pramote Dechaumpai and Sutthisak Phongthanapanich, *Easy finite element method with software*. Chulalongkorn university press, 2007.

[21] ณัฐชนนท์ ประสมสุข, "การเพิ่มความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ปัญหาของแข็งด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบปรับขนาดได้ที่ใช้ฟลักซ์เชิงเส้น," ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต, วิศวกรรมเครื่องกล, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2556.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
การสร้างสมการรูปแบบปิดสำหรับปัญหาความร้อน

สำหรับการแก้ปัญหาการนำความร้อนในสองมิติของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสี่จุดต่อ ภายใต้สถานะคงตัว ซึ่งในบทนี้จะอธิบายรายละเอียดเพิ่มเติมสำหรับการสร้างเมทริกซ์การนำความร้อน $\left[K_C\right]$ และโหลดเวกเตอร์ของความร้อนที่ผลิตขึ้นเอง

จากบทที่ 5 ได้แสดงขั้นตอนการหาสมการรูปแบบปิดของเมทริกซ์การนำความร้อนขนาด 4×4 โดยเริ่มจากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ จากนั้นใช้โปรแกรมคณิตศาสตร์สัญลักษณ์ Mathematica ช่วยในหารอินทิเกรตและจัดรูปจนกระทั่งได้สมการพีชคณิตแต่ละกรณีจากเกณฑ์ที่แบ่งตามรูปร่างของเอลิเมนต์ 4 กรณีคือ

<u>กรณีที่ 1</u> เอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมที่ไม่มีด้านใดขนานกัน

$$K_C = kt\left(A + \frac{B_1 + B_2 + B_3 + B_4}{6q^3r^3}\right)$$

<u>กรณีที่ 2</u> เอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมที่ด้าน $\overline{12}$ ขนานกับด้าน $\overline{34}$

$$K_C = \frac{kt}{3r^3}\begin{bmatrix} -12mpr + 12gr^2 \\ -\left(6mp^2 - 6gpr + 6hr^2 + 2lr^2\right)\left(\log\left(p-r\right) - \log\left(p+r\right)\right) \end{bmatrix}$$

<u>กรณีที่ 3</u> เอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมด้าน $\overline{14}$ ขนานกับด้าน $\overline{23}$

$$K_C = \frac{kt}{3q^3}\begin{bmatrix} -12lpq + 12fq^2 \\ -\left(6lp^2 - 6fpq + 6hq^2 + 2mq^2\right)\left(\log\left(p-q\right) - \log\left(p+q\right)\right) \end{bmatrix}$$

<u>กรณีที่ 4</u> เอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$$K_C = \frac{kt}{3p}\left(4\left(3h + l + m\right)\right)$$

โดยตัวแปร p, q และ r เป็นสมบัติของเอลิเมนต์หรือกล่าวคือ สมาชิกทุกตัวในเอลิเมนต์เมทริกซ์ จะใช้ค่าเดียวกัน ซึ่งสมการรูปแบบปิด คือ

$$p = x_{13}y_{24} - x_{24}y_{13}$$
$$q = x_{34}y_{12} - x_{12}y_{34}$$
$$r = x_{23}y_{14} - x_{14}y_{23}$$

สำหรับสมการรูปแบบปิดของตัวแปรย่อย ได้แก่ h, f, g, l, m และ n แสดงรายละเอียดดังนี้ โดยตัวห้อยของตัวแปรย่อย หรือ ij หมายถึงตำแหน่งบนเอลิเมนต์เทมริกซ์

<u>สมการรูปแบบปิดของตัวแปรย่อย h</u>

$$h_{11} = -x_{24}^2 - y_{24}^2 \qquad h_{12} = x_{13}x_{24} + y_{13}y_{24}$$
$$h_{13} = x_{24}^2 + y_{24}^2 \qquad h_{14} = -x_{13}x_{14} - y_{13}y_{14}$$
$$h_{22} = -x_{13}^2 - y_{13}^2 \qquad h_{23} = -x_{13}x_{24} - y_{13}y_{24}$$
$$h_{24} = x_{13}^2 + y_{13}^2 \qquad h_{33} = -x_{24}^2 - y_{24}^2$$
$$h_{34} = x_{13}x_{24} + y_{13}y_{24} \qquad h_{44} = -x_{13}^2 - y_{13}^2$$

<u>สมการรูปแบบปิดของตัวแปรย่อย f</u>

$$f_{11} = 2\left(x_{24}x_{34} + y_{24}y_{34}\right)$$
$$f_{12} = -x_{34}\left(x_1 + x_2\right) - y_{34}\left(y_1 + y_2\right) + x_3^2 - x_4^2 + y_3^2 - y_4^2$$
$$f_{13} = -x_{13}x_{24} - y_{13}y_{24} + x_2^2 - x_4^2 + y_2^2 - y_4^2$$
$$f_{14} = x_{12}x_{24} + x_{13}x_{34} + y_{12}y_{24} + y_{13}y_{34}$$
$$f_{22} = 2\left(x_{13}x_{34} + y_{13}y_{34}\right)$$
$$f_{23} = x_{12}x_{13} + x_{24}x_{34} + y_{12}y_{13} + y_{24}y_{34}$$
$$f_{24} = x_{13}x_{24} + y_{13}y_{24} + x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2$$
$$f_{33} = 2\left(x_{12}x_{24} + y_{12}y_{24}\right)$$
$$f_{34} = x_{12}\left(x_3 + x_4\right) + y_{12}\left(y_3 + y_4\right) + x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2$$
$$f_{44} = 2\left(x_{12}x_{13} + y_{12}y_{13}\right)$$

<u>สมการรูปแบบปิดของตัวแปรย่อย g</u>

$$g_{11} = 2\left(x_{23}x_{24} + y_{23}y_{24}\right)$$
$$g_{12} = -x_{13}x_{23} - x_{14}x_{24} - y_{13}y_{23} - y_{14}y_{24}$$
$$g_{13} = x_{13}x_{24} + y_{13}y_{24} + x_4^2 - x_2^2 + y_4^2 - y_2^2$$
$$g_{14} = x_{14}x_{23} + y_{14}y_{23} + x_3^2 - x_2^2 + y_3^2 - y_2^2$$
$$g_{22} = 2\left(x_{13}x_{14} + y_{13}y_{14}\right)$$
$$g_{23} = x_{14}x_{23} + y_{14}y_{23} + x_4^2 - x_1^2 + y_4^2 - y_1^2$$
$$g_{24} = x_{13}x_{24} + y_{13}y_{24} + x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2$$
$$g_{33} = -2\left(x_{14}x_{24} + y_{14}y_{24}\right)$$
$$g_{34} = x_{13}x_{14} + x_{23}x_{24} + y_{13}y_{14} + y_{23}y_{24}$$
$$g_{44} = -2\left(x_{13}x_{23} + y_{13}y_{23}\right)$$

<u>สมการรูปแบบปิดของตัวแปรย่อย l</u>

$l_{11} = -x_{34}^2 - y_{34}^2$ $\qquad$ $l_{12} = x_{34}^2 + y_{34}^2$

$l_{13} = x_{12}x_{34} + y_{12}y_{34}$ $\qquad$ $l_{14} = -x_{12}x_{34} - y_{12}y_{34}$

$l_{22} = -x_{34}^2 - y_{34}^2$ $\qquad$ $l_{23} = -x_{12}x_{34} - y_{12}y_{34}$

$l_{24} = x_{12}x_{34} + y_{12}y_{34}$ $\qquad$ $l_{33} = -x_{12}^2 - y_{12}^2$

$l_{34} = x_{12}^2 + y_{12}^2$ $\qquad$ $l_{44} = -x_{12}^2 - y_{12}^2$

<u>สมการรูปแบบปิดของตัวแปรย่อย m</u>

$m_{11} = -x_{23}^2 - y_{23}^2$ $\qquad$ $m_{12} = x_{14}x_{23} + y_{14}y_{23}$

$m_{13} = -x_{14}x_{23} - y_{14}y_{23}$ $\qquad$ $m_{14} = x_{23}^2 + y_{23}^2$

$m_{22} = -x_{14}^2 - y_{14}^2$ $\qquad$ $m_{23} = x_{14}^2 + y_{14}^2$

$m_{24} = -x_{14}x_{23} - y_{14}y_{23}$ $\qquad$ $m_{33} = -x_{14}^2 - y_{14}^2$

$m_{34} = x_{14}x_{23} + y_{14}y_{23}$ $\qquad$ $m_{44} = -x_{23}^2 - y_{23}^2$

<u>สมการรูปแบบปิดของตัวแปรย่อย n</u>

$$n_{11} = -2\left(x_{23}x_{34} + y_{23}y_{34}\right)$$
$$n_{12} = x_{12}x_{34} + y_{12}y_{34} + x_4^2 - x_3^2 + y_4^2 - y_3^2$$
$$n_{13} = x_{12}x_{23} - x_{14}x_{34} + y_{12}y_{23} - y_{14}y_{34}$$
$$n_{14} = -x_{14}x_{23} - y_{14}y_{23} + x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2$$
$$n_{22} = -2\left(x_{14}x_{34} + y_{14}y_{34}\right)$$
$$n_{23} = x_{14}x_{23} + y_{14}y_{23} + x_4^2 - x_1^2 + y_4^2 - y_1^2$$
$$n_{24} = x_{12}x_{14} - x_{23}x_{34} + y_{12}y_{14} - y_{23}y_{34}$$
$$n_{33} = 2\left(x_{12}x_{14} + y_{12}y_{14}\right)$$
$$n_{34} = x_{12}x_{34} + y_{12}y_{34} + x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2$$
$$n_{44} = 2\left(x_{12}x_{23} + y_{12}y_{23}\right)$$

ภาคผนวก ข
การสร้างสมการรูปแบบปิดสำหรับปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อน

ภาคผนวกบทนี้จะอธิบายรายละเอียดเพิ่มเติมในการสร้างเอลิเมนต์เมทริกซ์แข็งแกร็ง $[K]$ และจากเนื้อหาในบทที่ 5 ซึ่งได้จะแสดงขั้นตอนในการคำนวณและสมการรูปแบบปิดของตัวแปรย่อยต่าง ๆ ของเมทริกซ์แข็งเกร็งตั้งแต่เริ่มตั้งสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ การจัดรูป แนะนำตัวแปรระหว่างการดำเนินการ I จนถึงขั้นตอนประกอบเป็นเอลิเมนต์เมทริกซ์แข็งเกร็ง

สมการรูปแบบปิดของตัวแปรย่อยสำหรับสร้างเมทริกซ์แข็งเกร็ง ได้แก่ ค่า h , f, g , l , m และ n โดยตัวห้อยของตัวแปรย่อยหมายถึงตำแหน่งบนเอลิเมนต์เทมริกซ์ ในขณะที่ตัวห้องของ x และ y หมายถึงผลต่างของค่า x และ y ระหว่างจุดต่อ 2 จุดต่อนั้น ๆ เช่น $x_{12} = x_1 - x_2$, $y_{34} = y_3 - y_4$ หรือ $x_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2$ เป็นต้น

<u>สมการรูปแบบปิดของตัวแปรย่อย h</u>

กลุ่มที่ 1 : $h_{11} = y_{24}^2$ $h_{22} = x_{24}^2$

$h_{33} = y_{13}^2$ $h_{44} = x_{13}^2$

$h_{55} = y_{24}^2$ $h_{66} = x_{24}^2$

$h_{77} = y_{13}^2$ $h_{88} = x_{13}^2$

กลุ่มที่ 2 : $h_{12} = -x_{24}y_{24}$ $h_{34} = -x_{13}y_{13}$

$h_{56} = -x_{24}y_{24}$ $h_{78} = -x_{13}y_{13}$

กลุ่มที่ 3 : $h_{13} = -y_{13}y_{24}$ $h_{24} = -x_{13}x_{24}$

$h_{35} = y_{13}y_{24}$ $h_{46} = x_{13}x_{24}$

$h_{57} = -y_{13}y_{24}$ $h_{68} = -x_{13}x_{24}$

$h_{17} = y_{13}y_{24}$ $h_{28} = x_{13}x_{24}$

$h_{15} = -y_{24}^2$ $h_{26} = -x_{24}^2$

$h_{37} = -y_{13}^2$ $h_{48} = -x_{13}^2$

กลุ่มที่ 4 : $h_{14} = x_{24}y_{13}$ $h_{23} = x_{13}y_{24}$

$h_{18} = -x_{24}y_{13}$ $h_{27} = -x_{13}y_{24}$

<u>สมการรูปแบบปิดของตัวแปรย่อย f</u>

กลุ่มที่ 1 : $f_{11} = -2y_{24}y_{34}$ $f_{22} = -2x_{24}x_{34}$

$f_{33} = -2y_{13}y_{34}$ $f_{44} = -2x_{13}x_{34}$

$f_{55} = -2y_{12}y_{24}$ $f_{66} = -2x_{12}x_{24}$

$f_{77} = -2y_{12}y_{13}$ $f_{88} = -2x_{12}x_{13}$

กลุ่มที่ 2 : $f_{12} = x_{24}y_{34} + x_{34}y_{24}$ $f_{34} = x_{13}y_{34} + x_{34}y_{13}$

$f_{56} = x_{12}y_{24} + x_{24}y_{12}$ $f_{78} = x_{12}y_{13} + x_{13}y_{12}$

กลุ่มที่ 3 : $f_{13} = y_{34}\left(y_{13} + y_{34}\right)$ $f_{24} = x_{34}\left(x_{13} + x_{34}\right)$

$f_{15} = y_{24}\left(y_{12} + y_{34}\right)$ $f_{26} = x_{24}\left(x_{12} + x_{34}\right)$

$f_{17} = -y_{12}y_{24} - y_{13}y_{34}$ $f_{28} = -x_{12}x_{24} - x_{13}x_{34}$

$f_{35} = -y_{12}y_{13} - y_{24}y_{34}$ $f_{46} = -x_{12}x_{13} - x_{24}x_{34}$

$f_{37} = y_{13}\left(y_{12} + y_{34}\right)$ $f_{48} = x_{13}\left(x_{12} + x_{34}\right)$

$f_{57} = y_{12}\left(y_{13} + y_{24}\right)$ $f_{68} = x_{12}\left(x_{13} + x_{24}\right)$

กลุ่มที่ 4 : $f_{14} = -x_{24}y_{34} - x_{34}y_{13}$ $f_{23} = -x_{13}y_{34} - x_{34}y_{24}$

$f_{16} = -x_{24}y_{12} - x_{34}y_{24}$ $f_{25} = -x_{12}y_{24} - x_{24}y_{34}$

$f_{18} = x_{24}y_{12} + x_{34}y_{13}$ $f_{27} = x_{12}y_{24} + x_{13}y_{34}$

$f_{36} = x_{13}y_{12} + x_{34}y_{24}$ $f_{45} = x_{12}y_{13} + x_{24}y_{34}$

$f_{38} = -x_{13}y_{12} - x_{34}y_{13}$ $f_{47} = -x_{12}y_{13} - x_{13}y_{34}$

$f_{58} = -x_{12}y_{13} - x_{24}y_{12}$ $f_{67} = -x_{12}y_{24} - x_{13}y_{12}$

<u>สมการรูปแบบปิดของตัวแปรย่อย g</u>

กลุ่มที่ 1 : $g_{11} = -2y_{23}y_{24}$ $g_{22} = -2x_{23}x_{24}$

$g_{33} = -2y_{13}y_{14}$ $g_{44} = -2x_{13}x_{14}$

$g_{55} = 2y_{14}y_{24}$ $g_{66} = 2x_{14}x_{24}$

$g_{77} = 2y_{13}y_{23}$ $g_{88} = 2x_{13}x_{23}$

กลุ่มที่ 2 : $g_{12} = x_{23}y_{24} + x_{24}y_{23}$ $g_{34} = x_{13}y_{14} + x_{14}y_{23}$

$g_{56} = -x_{14}y_{24} - x_{24}y_{14}$ $g_{78} = -x_{13}y_{23} - x_{23}y_{13}$

กลุ่มที่ 3 : $g_{13} = y_{13}y_{23} + y_{14}y_{24}$ $g_{24} = x_{13}x_{23} + x_{14}x_{24}$

$g_{15} = y_{24}\left(y_{23} - y_{14}\right)$ $g_{26} = x_{24}\left(x_{23} - x_{14}\right)$

$g_{17} = y_{23}\left(y_{24} - y_{13}\right)$ $g_{28} = x_{23}\left(x_{24} - x_{13}\right)$

$g_{35} = y_{14}\left(y_{13} - y_{24}\right)$ $g_{46} = x_{14}\left(x_{13} - x_{24}\right)$

$g_{37} = y_{13}\left(y_{14} - y_{23}\right)$ $g_{37} = x_{13}\left(x_{14} - x_{23}\right)$

	$g_{57} = -y_{13}y_{14} - y_{23}y_{24}$	$g_{68} = -x_{13}x_{14} - x_{23}x_{24}$
กลุ่มที่ 4 :	$g_{14} = -x_{23}y_{13} - x_{24}y_{14}$	$g_{14} = -x_{13}y_{23} - x_{14}y_{24}$
	$g_{16} = x_{24}y_{14} - x_{23}y_{24}$	$g_{25} = x_{14}y_{24} - x_{24}y_{23}$
	$g_{18} = -x_{24}y_{23} + x_{23}y_{13}$	$g_{27} = x_{13}y_{23} - x_{23}y_{24}$
	$g_{36} = -x_{13}y_{14} + x_{14}y_{24}$	$g_{45} = -x_{14}y_{13} + x_{24}y_{14}$
	$g_{38} = x_{13}y_{23} - x_{14}y_{13}$	$g_{47} = -x_{13}y_{14} + x_{23}y_{13}$
	$g_{58} = x_{14}y_{13} + x_{24}y_{23}$	$g_{67} = x_{13}y_{14} + x_{23}y_{24}$

<u>สมการรูปแบบปิดของตัวแปรย่อย l</u>

กลุ่มที่ 1 :	$l_{11} = y_{34}^2$	$l_{22} = x_{34}^2$
	$l_{33} = y_{34}^2$	$l_{44} = x_{34}^2$
	$l_{55} = y_{12}^2$	$l_{66} = x_{12}^2$
	$l_{77} = y_{12}^2$	$l_{88} = x_{12}^2$
กลุ่มที่ 2 :	$l_{12} = -x_{34}y_{34}$	$l_{34} = -x_{34}y_{34}$
	$l_{56} = -x_{12}y_{12}$	$l_{78} = -x_{12}y_{12}$
กลุ่มที่ 3 :	$l_{13} = -y_{34}^2$	$l_{24} = -x_{34}^2$
	$l_{15} = -y_{12}y_{34}$	$l_{26} = -x_{12}x_{34}$
	$l_{17} = y_{12}y_{34}$	$l_{28} = x_{12}x_{34}$
	$l_{35} = y_{12}y_{34}$	$l_{46} = x_{12}x_{34}$
	$l_{37} = -y_{12}y_{34}$	$l_{48} = -x_{12}x_{34}$
	$l_{57} = -y_{12}^2$	$l_{68} = -x_{12}^2$
กลุ่มที่ 4 :	$l_{14} = x_{34}y_{34}$	$l_{23} = x_{34}y_{34}$
	$l_{16} = x_{34}y_{12}$	$l_{25} = x_{12}y_{34}$
	$l_{18} = -x_{34}y_{12}$	$l_{27} = -x_{12}y_{34}$
	$l_{36} = -x_{34}y_{12}$	$l_{25} = -x_{12}y_{34}$
	$l_{38} = x_{34}y_{12}$	$l_{47} = x_{12}y_{34}$
	$l_{58} = x_{12}y_{12}$	$l_{67} = x_{12}y_{12}$

<u>สมการรูปแบบปิดของตัวแปรย่อย m</u>

กลุ่มที่ 1 :	$m_{11} = y_{23}^2$	$m_{22} = x_{23}^2$
	$m_{33} = y_{14}^2$	$m_{44} = x_{14}^2$

$m_{55} = y_{14}^2$ $m_{66} = x_{14}^2$

$m_{77} = y_{23}^2$ $m_{88} = x_{23}^2$

กลุ่มที่ 2 : $m_{12} = -x_{23}y_{23}$ $m_{34} = -x_{14}y_{14}$

$m_{56} = -x_{14}y_{14}$ $m_{78} = -x_{23}y_{23}$

กลุ่มที่ 3 : $m_{13} = -y_{14}y_{23}$ $m_{24} = -x_{14}x_{23}$

$m_{15} = y_{14}y_{23}$ $m_{26} = x_{14}x_{23}$

$m_{17} = -y_{23}^2$ $m_{28} = -x_{23}^2$

$m_{35} = -y_{14}^2$ $m_{46} = -x_{14}^2$

$m_{37} = y_{14}y_{23}$ $m_{48} = x_{14}x_{23}$

$m_{57} = -y_{14}y_{23}$ $m_{68} = -x_{14}x_{23}$

กลุ่มที่ 4 : $m_{14} = x_{23}y_{14}$ $m_{23} = x_{14}y_{23}$

$m_{16} = -x_{23}y_{14}$ $m_{25} = -x_{14}y_{23}$

$m_{18} = x_{23}y_{23}$ $m_{27} = x_{23}y_{23}$

$m_{36} = x_{14}y_{14}$ $m_{45} = x_{14}y_{14}$

$m_{38} = -x_{14}y_{23}$ $m_{47} = -x_{23}y_{14}$

$m_{58} = x_{14}y_{23}$ $m_{67} = x_{23}y_{14}$

<u>สมการรูปแบบปิดของตัวแปรย่อย n</u>

กลุ่มที่ 1 : $n_{11} = 2y_{23}y_{34}$ $n_{22} = 2x_{23}x_{34}$

$n_{33} = 2y_{14}y_{34}$ $n_{44} = 2x_{14}x_{34}$

$n_{55} = -2y_{12}y_{14}$ $n_{66} = -2x_{12}x_{14}$

$n_{77} = -2y_{12}y_{23}$ $n_{88} = -2x_{12}x_{23}$

กลุ่มที่ 2 : $n_{12} = -x_{23}y_{34} - x_{34}y_{23}$ $n_{34} = -x_{14}y_{34} - x_{34}y_{14}$

$n_{56} = x_{12}y_{14} + x_{14}y_{12}$ $n_{78} = x_{12}y_{23} + x_{23}y_{12}$

กลุ่มที่ 3 : $n_{13} = y_{34}\left(-y_{14} - y_{23}\right)$ $n_{24} = x_{34}\left(-x_{14} - x_{23}\right)$

$n_{15} = -y_{12}y_{23} + y_{14}y_{34}$ $n_{26} = -x_{12}x_{23} + x_{14}x_{34}$

$n_{17} = y_{23}\left(y_{12} - y_{34}\right)$ $n_{28} = x_{23}\left(x_{12} - x_{34}\right)$

$n_{35} = y_{14}\left(y_{12} - y_{34}\right)$ $n_{46} = x_{14}\left(x_{12} - x_{34}\right)$

$n_{37} = -y_{12}y_{14} + y_{23}y_{34}$ $n_{48} = -x_{12}x_{14} + x_{23}x_{34}$

$n_{57} = y_{12}\left(y_{14} + y_{23}\right)$ $n_{68} = x_{12}\left(x_{14} + x_{23}\right)$

กลุ่มที่ 4 : $n_{14} = x_{23}y_{34} + x_{34}y_{14}$ $n_{23} = x_{14}y_{34} + x_{34}y_{23}$

$$n_{16} = x_{23}y_{12} - x_{34}y_{14} \qquad n_{25} = x_{12}y_{23} - x_{14}y_{34}$$

$$n_{18} = -x_{23}y_{12} + x_{34}y_{23} \qquad n_{27} = -x_{12}y_{23} + x_{23}y_{34}$$

$$n_{36} = -x_{14}y_{12} + x_{34}y_{14} \qquad n_{45} = -x_{12}y_{14} + x_{14}y_{34}$$

$$n_{38} = x_{14}y_{12} - x_{34}y_{23} \qquad n_{47} = x_{12}y_{14} - x_{23}y_{34}$$

$$n_{58} = -x_{12}y_{23} - x_{14}y_{12} \qquad n_{67} = -x_{12}y_{14} - x_{23}y_{12}$$

รายละเอียดการสร้างเวกเตอร์โหลดเนื่องจากความร้อน

การสร้างสมการรูปแบบปิดของเวกเตอร์โหลดเนื่องจากความร้อน เริ่มจากพิจารณาจากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในบทที่ 4

$$\{F_T\} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[B(\xi,\eta)\right]^T [C]\{\alpha\}\left(\lfloor N(\xi,\eta)\rfloor\{T\} - T_0\right)\left|J(\xi,\eta)\right| t\, d\xi\, d\eta \tag{5.21}$$

เมื่อพิจารณาเฉพาะอินทิแกรน หากคูณกระจายจะสามารถลดรูปได้ดังนี้

$$\left[B(\xi,\eta)\right]^T [C]\{\alpha\} = (c_1 + c_2)\alpha \lfloor b_{11} \quad b_{31} \quad b_{13} \quad b_{33} \quad b_{15} \quad b_{35} \quad b_{17} \quad b_{37} \rfloor^T$$

$$\lfloor N(\xi,\eta)\rfloor\{T\} = \frac{1}{4}\left(a_1 + a_2\eta + a_3\xi + a_4\xi\eta\right)$$

โดย $a_1 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$

$$a_2 = -T_1 - T_2 + T_3 + T_4$$

$$a_3 = -T_1 + T_2 + T_3 - T_4$$

$$a_4 = T_1 - T_2 + T_3 - T_4$$

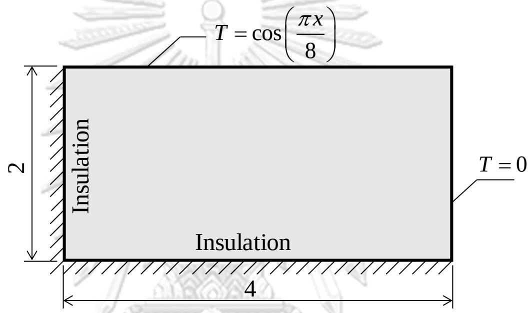
เมื่อแทนกลับเข้าไปแล้วอินทิเกรต จะได้สมการรูปแบบปิดของเวกเตอร์โหลดเนื่องจากความร้อน ซึ่งมีขนาด 8×1 ดังนี้

$$\{F_T\} = \frac{(c_1 + c_2)\alpha t}{24}\begin{Bmatrix} 3a_1y_{24} - a_2y_{23} - a_3y_{34} \\ -3a_1x_{24} + a_2x_{23} + a_3x_{34} \\ -3a_1y_{13} + a_2y_{14} + a_3y_{34} \\ 3a_1x_{13} - a_2x_{14} - a_3x_{34} \\ -3a_1y_{24} - a_2y_{14} + a_3y_{12} \\ 3a_1x_{24} + a_2x_{14} - a_3x_{12} \\ 3a_1y_{13} + a_2y_{23} - a_3y_{12} \\ -3a_1x_{13} - a_2x_{23} + a_3x_{12} \end{Bmatrix}$$

ภาคผนวก ค
รายละเอียดผลการทดสอบโปรแกรมของวิธีรูปแบบปิด

การทดสอบโปรแกรมจากบทที่ 7 แสดงให้เห็นว่าการทดสอบแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ การทดสอบกับปัญหาการถ่ายเทความร้อน และการทดสอบกับปัญหาความเค้นเนื่องจากความร้อน โดยในภาคผนวกนี้จะแสดงรายละเอียดของผลการตรวจสอบที่แสดงในบทที่ 7 ทั้งการทดสอบความแม่นยำและเวลาที่ใช้ในการคำนวณ เรียงตามลำดับตามบทที่ 7 ยกเว้นผลของเอลิเมนต์เดี่ยวจะไม่นำเสนอในภาคผนวกนี้

ปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่ไม่มีการสร้างความร้อนขึ้นเอง (7.1.2)



ตารางที่ ค.1 ผลของอุณหภูมิจุดต่อที่คำนวณของปัญหาการนำความร้อนของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้า (5 เอลิเมนต์)

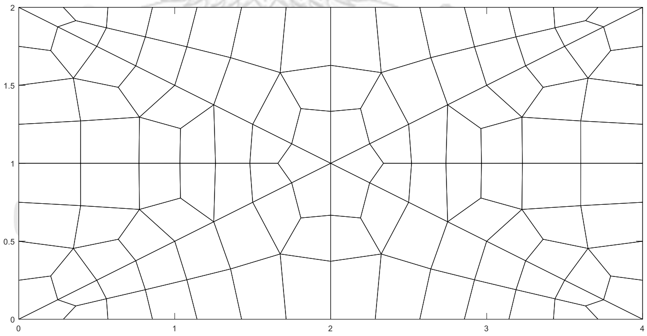
จุดต่อ	อุณหภูมิของจุดต่อ						
	ผลเฉลยแม่นตรง	วิธีรูปแบบปิด	วิธีเกาส์ 2x2 จุด	วิธีเกาส์ 3x3 จุด	วิธีเกาส์ 4x4 จุด	วิธีเกาส์ 5x5 จุด	วิธีเกาส์ 6x6 จุด
1	0.754940	0.722627	0.715999	0.721208	0.722272	0.722531	0.722600
5	0.765834	0.743626	0.738619	0.742507	0.743349	0.743553	0.743606
6	0.038642	0.020877	0.020882	0.020923	0.020885	0.020878	0.020877
7	0.075428	0.040103	0.039932	0.040216	0.040156	0.040121	0.040109
8	0.930159	0.861543	0.856132	0.860177	0.861167	0.861436	0.861512

ตารางที่ ค.2 ค่าเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ของจุดต่อของปัญหาการนำความร้อนของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้า (5 เอลิเมนต์)

จุดต่อ	ค่าเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ของจุดต่อ (%)					
	วิธีรูปแบบปิด	วิธีเกาส์ 2x2 จุด	วิธีเกาส์ 3x3 จุด	วิธีเกาส์ 4x4 จุด	วิธีเกาส์ 5x5 จุด	วิธีเกาส์ 6x6 จุด
1	4.280234	5.158170	4.468198	4.327205	4.292885	4.283794
5	2.899735	3.553579	3.045855	2.935923	2.909358	2.902420
6	45.974142	45.961617	45.855460	45.954052	45.971986	45.974124
7	46.832985	47.059742	46.682544	46.761905	46.808749	46.825416
8	7.376877	7.958532	7.523709	7.417227	7.388293	7.380169
ค่าเฉลี่ย	21.472794	21.938328	21.515153	21.479262	21.474254	21.473185

ตารางที่ ค.3 เวลาที่ใช้ในการคำนวนเมทริกซ์ของจุดต่อของปัญหาการนำความร้อนของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้า (5 เอลิเมนต์)

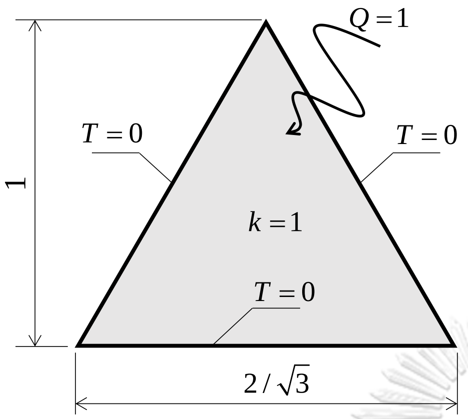
	วิธีรูปแบบปิด	วิธีเกาส์ – เลอจองด์				
		2x2 จุด	3x3 จุด	4x4 จุด	5x5 จุด	6x6 จุด
เวลาที่ใช้ในการคำนวน (นาที:วินาที)	0:32	0:54	1:07	1:46	2:38	3:38

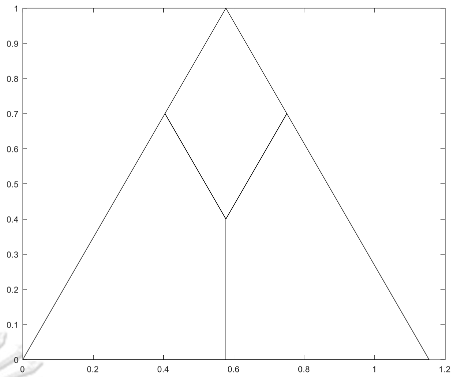


ตารางที่ ค.4 ค่าความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์และเวลาที่ใช้ในการคำนวณของงปัญหาการนำความร้อนของแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้า (118 เอลิเมนต์)

	วิธีรูปแบบปิด	วิธีเกาส์ – เลอจองด์				
		2x2 จุด	3x3 จุด	4x4 จุด	5x5 จุด	6x6 จุด
ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ (%)	0.054776	0.055148	0.054793	0.054787	0.054787	0.054787
เวลาที่ใช้ในการคำนวน (ชั่งโมง:นาที:วินาที)	0:10:14	0:15:10	0:26:57	0:41:32	1:01:26	1:25:58

ปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นสามเหลี่ยม ที่มีการสร้างความร้อนขึ้นเอง (7.1.3)





ผลเฉลยแม่นตรงของอุณหภูมิที่จุดเซนทรอยด์มีค่าเท่ากับ 0.037037

ตารางที่ ค.5 ผลของการถ่ายเทความร้อนบนแผ่นรูปสามเหลี่ยม

รายการ	วิธีรูปแบบปิด	วิธีเกาส์ – เลอจองด์						
		2x2 จุด	3x3 จุด	4x4 จุด	5x5 จุด	6x6 จุด	7x7 จุด	8x8 จุด
อุณภูมิจุดเซนทรอยด์	0.040377	0.041603	0.040478	0.040387	0.040378	0.040377	0.040377	0.040377
ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ (%)	9.017966	12.328945	9.290625	9.044963	9.020912	9.018308	9.018007	9.017971
เวลาที่ใช้ในการคำนวณ (นาที : วินาที)	0:16	0:22	0:39	1:02	1:31	2:09	2:47	3:33

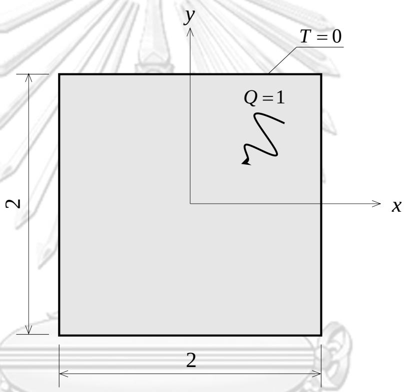
ตารางที่ ค.6 ค่าเฉลี่ยของค่าคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ของปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นรูปสามเหลี่ยม

จำนวนเอลิเมนต์	วิธีรูปแบบปิด	วิธีเกาส์ – เลอจองด์						
		2x2 จุด	3x3 จุด	4x4 จุด	5x5 จุด	6x6 จุด	7x7 จุด	8x8 จุด
30	2.932463	2.936345	2.931293	2.932217	2.932420	2.932456	2.932462	2.932463
73	1.952649	1.953532	1.952418	1.952618	1.952645	1.952648	1.952649	1.952649
153	0.879701	0.886738	0.879853	0.879703	0.879699	0.879699	0.879699	0.879699
320	0.334346	0.335152	0.334376	0.334360	0.334359	0.334359	0.334359	0.334359
601	0.318273	0.320336	0.318408	0.318368	0.318367	0.318367	0.318367	0.318367
1206	0.129574	0.129993	0.129797	0.129795	0.129795	0.129795	0.129795	0.129795

ตารางที่ ค.7 เวลาที่ใช้ในการคำนวณเมทริกซ์การนำความร้อนบนปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นรูปสามเหลี่ยม (ชั่วโมง:นาที:วินาที)

จำนวนเอลิเมนต์	วิธีรูปแบบปิด	วิธีเกาส์ – เลอจองด์						
		2x2 จุด	3x3 จุด	4x4 จุด	5x5 จุด	6x6 จุด	7x7 จุด	8x8 จุด
30	2:37	3:41	6:20	10:31	14:53	21:22	27:46	36:17
73	0:07:29	0:09:25	0:16:45	0:26:19	0:38:40	0:54:47	1:08:39	1:28:38
153	0:13:24	0:19:33	0:33:41	0:52:17	1:18:28	1:49:37	2:27:23	3:05:45
320	0:27:50	0:39:47	1:10:12	1:51:10	2:43:58	3:41:42	5:09:53	6:29:26
601	0:52:50	1:16:23	2:13:03	3:39:23	5:24:59	7:28:47	9:32:55	12:29:37
1206	1:46:56	2:33:26	4:26:33	6:50:20	10:11:46	14:17:39	19:49:25	24:48:37

ปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัส ที่มีการสร้างความร้อนขึ้นเอง (7.1.4)



ตารางที่ ค.8 ค่าคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ ณ จุด (0,0) ของปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีความร้อนผลิตได้เอง

จำนวนเอลิเมนต์	วิธีรูปแบบปิด	วิธีเกาส์ – เลอจองด์						
		2x2 จุด	3x3 จุด	4x4 จุด	5x5 จุด	6x6 จุด	7x7 จุด	8x8 จุด
47	0.245067	0.247546	0.245129	0.245069	0.245067	0.245066	0.245066	0.245066
239	0.028666	0.028873	0.028711	0.028708	0.028708	0.028708	0.028708	0.028708
404	0.010693	0.010638	0.010711	0.010712	0.010712	0.010712	0.010712	0.010712
845	0.003077	0.004825	0.003562	0.003448	0.003436	0.003435	0.003435	0.003435
1606	0.004186	0.005997	0.005987	0.005987	0.005987	0.005987	0.005987	0.005987

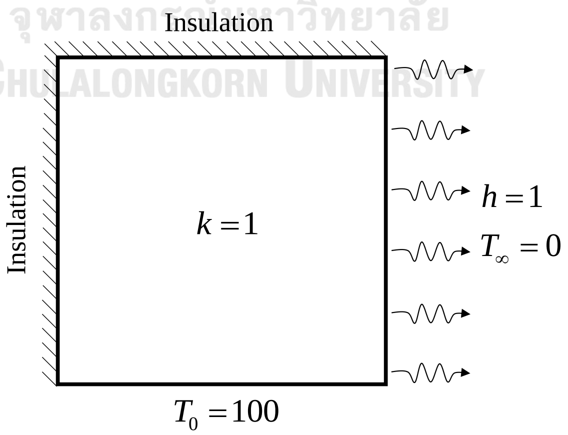
ตารางที่ ค.9 ค่าเฉลี่ยของคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ของปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีความร้อนผลิตได้เอง

จำนวนเอลิเมนต์	วิธีรูปแบบปิด	วิธีเกาส์ – เลอจองด์						
		2x2 จุด	3x3 จุด	4x4 จุด	5x5 จุด	6x6 จุด	7x7 จุด	8x8 จุด
47	0.469623	0.473297	0.469641	0.469622	0.469623	0.469623	0.469623	0.469623
239	0.136450	0.136542	0.136465	0.136463	0.136463	0.136463	0.136463	0.136463
404	0.096977	0.096377	0.096955	0.096970	0.096970	0.096970	0.096970	0.096970
845	0.087597	0.085456	0.087382	0.087576	0.087596	0.087598	0.087598	0.087598
1606	0.023953	0.024157	0.024132	0.024132	0.024132	0.024132	0.024132	0.024132

ตารางที่ ค.10 เวลาที่ใช้ในการคำนวณของปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีความร้อนผลิตได้เอง

จำนวนเอลิเมนต์	จำนวนรอบของการวนซ้ำ	วิธีรูปแบบปิด	วิธีเกาส์ – เลอจองด์						
			2x2 จุด	3x3 จุด	4x4 จุด	5x5 จุด	6x6 จุด	7x7 จุด	8x8 จุด
47	25,000	1:00	1:30	2:36	4:07	5:59	9:18	11:10	14:53
239	5,000	1:03	1:31	2:39	4:10	6:12	8:36	11:52	14:50
404	2,500	0:54	1:18	2:28	3:32	5:11	7:15	10:04	12:55
845	1,250	0:56	1:20	2:20	3:43	5:51	7:37	10:09	12:58
1606	625	1:01	1:18	2:13	3:31	5:11	7:39	9:32	12:37

ปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัส ที่มีการพาความร้อนตามขอบ (7.1.5)



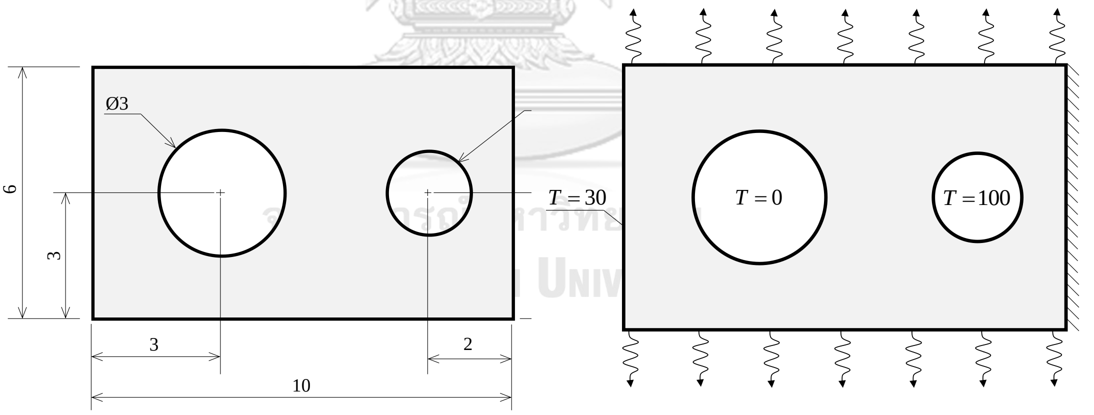
ตารางที่ ค.11 ค่าเฉลี่ยของคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ของปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมที่มีการพาความร้อน (%)

จำนวน	วิธี	วิธีเกาส์ – เลอจองด์						
เอลิเมนต์	รูปแบบปิด	2x2 จุด	3x3 จุด	4x4 จุด	5x5 จุด	6x6 จุด	7x7 จุด	8x8 จุด
47	0.260582	0.260911	0.260599	0.260583	0.260582	0.260581	0.260581	0.260581
239	0.037000	0.037102	0.036999	0.036997	0.036997	0.036997	0.036997	0.036997
404	0.019865	0.020051	0.020054	0.020054	0.020054	0.020054	0.020054	0.020054
1606	0.002601	0.004695	0.004695	0.004695	0.004695	0.004695	0.004695	0.004695

ตารางที่ ค.12 เวลาที่ใช้ในการคำนวณของปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมที่มีการพาความร้อน

จำนวน	จำนวนรอบของ	วิธี	วิธีเกาส์ – เลอจองด์						
เอลิเมนต์	การวนซ้ำ	รูปแบบปิด	2x2 จุด	3x3 จุด	4x4 จุด	5x5 จุด	6x6 จุด	7x7 จุด	8x8 จุด
47	25,000	1:02	1:49	2:36	4:09	6:24	8:26	11:18	15:28
239	5,000	1:07	1:32	2:41	4:14	6:33	8:39	11:31	15:08
404	2,500	0:56	1:18	2:21	3:45	5:18	7:29	9:55	13:08
1606	625	0:54	1:17	2:18	3:37	5:16	7:23	10:21	12:43

ปัญหาการนำความร้อนของแผ่นสี่เหลี่ยมเจาะรู

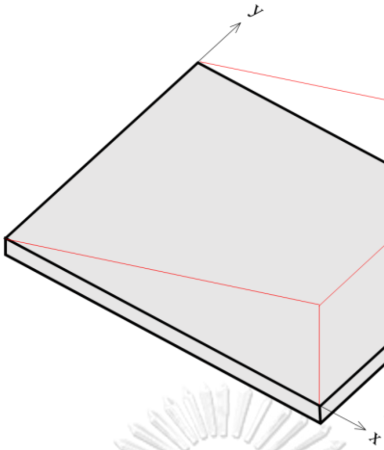


$h = 1, \quad T_\infty = 30$

ตารางที่ ค.13 ค่าเฉลี่ยของเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างสัมพัทธ์ และเวลาที่ใช้ในการคำนวณของปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมเจาะรู

	วิธี	วิธีเกาส์ – เลอจองด์						
	รูปแบบปิด	2x2 จุด	3x3 จุด	4x4 จุด	5x5 จุด	6x6 จุด	7x7 จุด	8x8 จุด
ค่าเฉลี่ยของเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างสัมพัทธ์ (×E-4%)	-	7.674680	6.708709	6.702421	6.702321	6.702320	6.702320	6.702320
เวลาที่ใช้ในการคำนวณ	0:35	1:03	1:49	2:50	4:05	5:45	7:36	9:45

ปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่รับภาระของอุณหภูมิที่กระจายตัวเชิงเส้นตามแกน x (7.2.2)



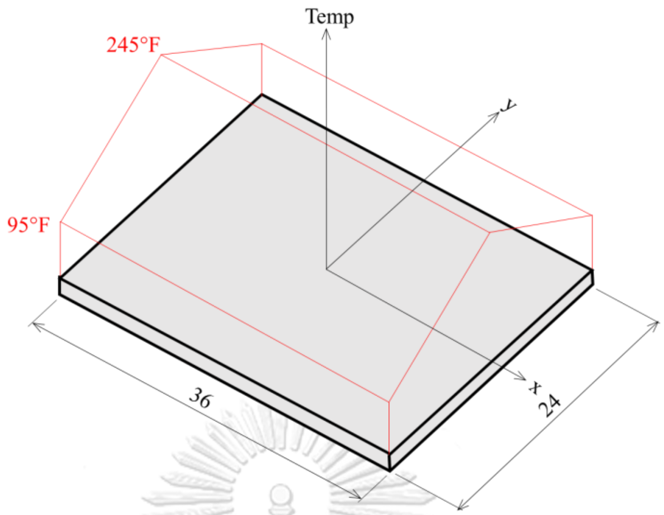
ตารางที่ ค.14 ค่าคลาดเคลื่อนของปริมาตรใต้พื้นผิวของปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้ารับภาระของอุณหภูมิเชิงเส้น

จำนวนเอลิเมนต์	วิธีรูปแบบปิด	วิธีเกาส์ – เลอจองด์ 2x2 จุด	3x3 จุด	4x4 จุด	5x5 จุด	6x6 จุด	7x7 จุด	8x8 จุด
ค่าคลาดเคลื่อนของปริมาตรใต้พื้นผิวการเคลื่อนที่ในแนวแกน x (%)								
4	18.85816	13.70290	18.01799	18.73247	18.86309	18.88191	18.88014	18.87570
202	1.59059E-1	1.62049E-1	1.59433E-1	1.59401E-1	1.59401E-1	1.59401E-1	1.59401E-1	1.59401E-1
1,044	3.79794E-3	2.49050E-3	3.82696E-3	3.84649E-3	3.84664E-3	3.84663E-3	3.84663E-3	3.84663E-3
5,083	3.97363E-4	1.14801E-3	9.02725E-4	8.99137E-4	8.99075E-4	8.99074E-4	8.99074E-4	8.99074E-4
10,100	1.12960E-2	1.60888E-2	1.59678E-2	1.59663E-2	1.59662E-2	1.59662E-2	1.59662E-2	1.59662E-2
ค่าคลาดเคลื่อนของปริมาตรใต้พื้นผิวการเคลื่อนที่ในแนวแกน y (%)								
4	4.42035	4.44813	4.70425	4.66038	4.59587	4.54675	4.51241	4.48836
202	1.08142E-2	1.10472E-2	1.09050E-2	1.09004E-2	1.09002E-2	1.09002E-2	1.09002E-2	1.09002E-2
1,044	5.31092E-4	5.16331E-4	5.36247E-4	5.36675E-4	5.36687E-4	5.36688E-4	5.36688E-4	5.36688E-4
5,083	1.10038E-4	1.20511E-4	1.19411E-4	1.19401E-4	1.19401E-4	1.19401E-4	1.19401E-4	1.19401E-4
10,100	1.09094E-4	3.02162E-4	3.02324E-4	3.02328E-4	3.02328E-4	3.02328E-4	3.02328E-4	3.02328E-4

ตารางที่ ค.15 เวลาที่ใช้ในการคำนวณของปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้ารับภาระของอุณหภูมิเชิงเส้น

จำนวนเอลิเมนต์	จำนวนรอบของการวนซ้ำ	วิธีรูปแบบปิด	วิธีเกาส์ – เลอจองด์ 2x2 จุด	3x3 จุด	4x4 จุด	5x5 จุด	6x6 จุด	7x7 จุด	8x8 จุด
4	100,000	0:11	0:28	0:45	1:13	1:44	2:23	3:11	4:05
202	5,000	0:25	1:09	1:55	3:04	4:37	6:23	8:33	10:53
1,044	1,000	0:25	1:14	2:00	3:08	4:33	6:16	8:20	10:47
5,083	200	0:24	1:13	2:02	3:13	4:40	6:17	8:19	10:36
10,100	100	0:29	1:13	2:09	3:18	4:56	6:47	8:56	11:40

แผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่รับภาระของอุณหภูมิแบบหลังคาบ้าน (7.2.3)



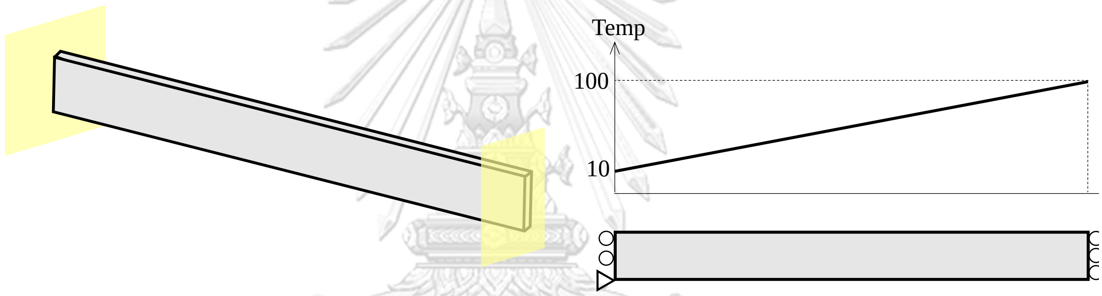
ตารางที่ ค.16 ค่าคลาดเคลื่อนของปริมาตรใต้พื้นผิวของปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้ารับภาระของอุณหภูมิแบบหลังคาบ้าน

จำนวนเอลิเมนต์	วิธีรูปแบบปิด	วิธีเกาส์ – เลอจองด์						
		2x2 จุด	3x3 จุด	4x4 จุด	5x5 จุด	6x6 จุด	7x7 จุด	8x8 จุด
ค่าคลาดเคลื่อนของปริมาตรใต้พื้นผิวความเค้นตั้งฉากแกน x (%)								
4	2.26255	2.26255	2.26255	2.26255	2.26255	2.26255	2.26255	2.26255
226	6.31252E-3	6.37109E-3	6.37109E-3	6.37109E-3	6.37109E-3	6.37109E-3	6.37109E-3	6.37109E-3
1,011	5.28783E-3	5.30815E-3	5.30815E-3	5.30815E-3	5.30815E-3	5.30815E-3	5.30815E-3	5.30815E-3
3,080	1.3225E-03	1.3778E-03	1.3778E-03	1.3778E-03	1.3778E-03	1.3778E-03	1.3778E-03	1.3778E-03
5,027	1.13714E-3	1.18028E-3	1.18028E-3	1.18028E-3	1.18028E-3	1.18028E-3	1.18028E-3	1.18028E-3
10,071	8.20595E-4	7.40548E-4	7.40548E-4	7.40548E-4	7.40548E-4	7.40548E-4	7.40548E-4	7.40548E-4
ค่าคลาดเคลื่อนของปริมาตรใต้พื้นผิวความเค้นตั้งฉากแกน y (%)								
4	10.97558	10.97558	10.97558	10.97558	10.97558	10.97558	10.97558	10.97558
226	3.33629E-2	3.39877E-2	3.39877E-2	3.39877E-2	3.39877E-2	3.39877E-2	3.39877E-2	3.39877E-2
1,011	2.89728E-2	2.88299E-2	2.88299E-2	2.88299E-2	2.88299E-2	2.88299E-2	2.88299E-2	2.88299E-2
3,080	3.3134E-03	3.6128E-03	3.6128E-03	3.6128E-03	3.6128E-03	3.6128E-03	3.6128E-03	3.6128E-03
5,027	2.34544E-3	2.65412E-3	2.65412E-3	2.65412E-3	2.65412E-3	2.65412E-3	2.65412E-3	2.65412E-3
10,071	6.92620E-3	6.66637E-3	6.66637E-3	6.66637E-3	6.66637E-3	6.66637E-3	6.66637E-3	6.66637E-3
ค่าคลาดเคลื่อนของปริมาตรใต้พื้นผิวความเค้นเฉือนระนาบ xy (%)								
4	21.55262	23.36010	22.85835	22.85313	22.85634	22.85717	22.85734	22.85738
226	1.68400E-1	1.69714E-1	1.69010E-1	1.68993E-1	1.68992E-1	1.68992E-1	1.68992E-1	1.68992E-1
1,011	1.14929E-1	1.15178E-1	1.14996E-1	1.14993E-1	1.14993E-1	1.14993E-1	1.14993E-1	1.14993E-1
3,080	6.9652E-02	6.9446E-02	6.9434E-02	6.9434E-02	6.9434E-02	6.9434E-02	6.9434E-02	6.9434E-02
5,027	5.96182E-2	5.96985E-2	5.96540E-2	5.96534E-2	5.96534E-2	5.96534E-2	5.96534E-2	5.96534E-2
10,071	5.15477E-2	5.14104E-2	5.13818E-2	5.13814E-2	5.13814E-2	5.13814E-2	5.13814E-2	5.13814E-2

ตารางที่ ค.17 เวลาที่ใช้ในการคำนวณปัญหาแผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้ารับภาระของอุณหภูมิแบบหลังคาบ้าน

จำนวน	จำนวนรอบของ	วิธี	วิธีเกาส์ – เลอจองด์						
เอลิเมนต์	การวนซ้ำ	รูปแบบปิด	2x2 จุด	3x3 จุด	4x4 จุด	5x5 จุด	6x6 จุด	7x7 จุด	8x8 จุด
4	100,000	0:10	0:26	0:45	1:11	1:44	2:25	3:16	4:12
226	5,000	0:31	1:18	2:16	3:35	5:16	7:19	9:46	12:52
1,011	1,000	0:25	1:08	2:01	3:12	4:42	6:34	8:42	11:16
3,080	350	0:25	1:09	2:01	3:12	4:43	6:36	8:50	11:12
5,027	200	0:25	1:07	2:00	3:10	4:43	6:31	8:42	11:08
10,071	100	0:24	1:08	2:02	3:11	4:43	6:26	8:40	11:16

ปัญหาคานที่ถูกตรึงปลายทั้งสองข้างและรับภาระของอุณหภูมิที่กระจายตัวเชิงเส้นตามแกน x (7.2.4)



ตารางที่ ค.18 ปริมาตรใต้พื้นผิวของปัญหาคานที่ถูกตรึงปลายทั้งสองข้าง

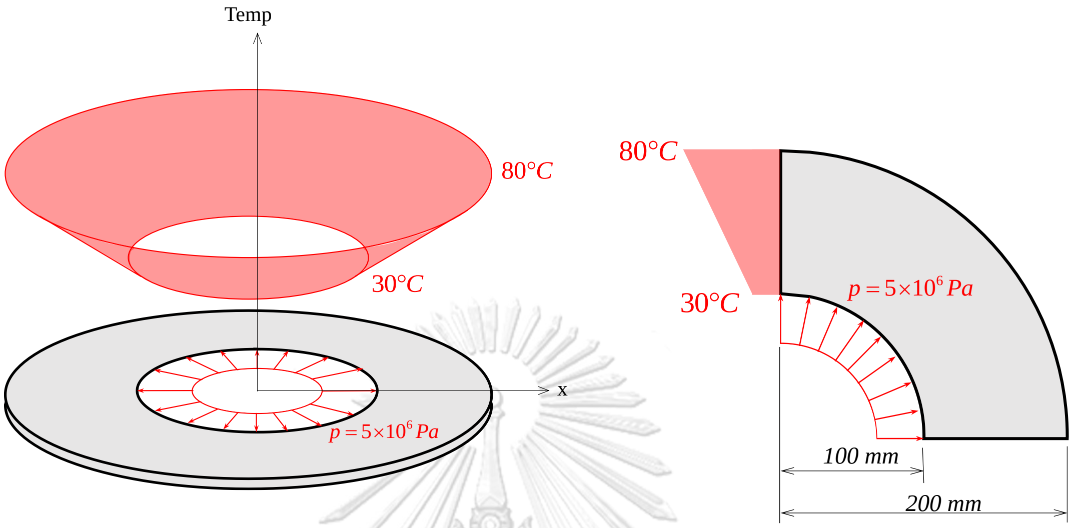
จำนวน	วิธี	วิธีเกาส์ – เลอจองด์						
เอลิเมนต์	รูปแบบปิด	2x2 จุด	3x3 จุด	4x4 จุด	5x5 จุด	6x6 จุด	7x7 จุด	8x8 จุด
ปริมาตรใต้พื้นผิวการเคลื่อนที่ในทิศทางแนวแกน x								
539	-7.49926	-7.39477	-7.39476	-7.39476	-7.39476	-7.39476	-7.39476	-7.39476
1,077	-7.49969	-7.43712	-7.43711	-7.43711	-7.43711	-7.43711	-7.43711	-7.43711
3,026	-7.50003	-7.46915	-7.46914	-7.46914	-7.46914	-7.46914	-7.46914	-7.46914
5,144	-7.50010	-7.47654	-7.47654	-7.47654	-7.47654	-7.47654	-7.47654	-7.47654
9,237	-7.50015	-7.47500	-7.47500	-7.47500	-7.47500	-7.47500	-7.47500	-7.47500
ปริมาตรใต้พื้นผิวการเคลื่อนที่ในทิศทางแนวแกน y								
539	1.36485	0.65163	0.65169	0.65169	0.65169	0.65169	0.65169	0.65169
1,077	1.36867	0.99067	0.99064	0.99064	0.99064	0.99064	0.99064	0.99064
3,026	1.36787	1.23273	1.23273	1.23273	1.23273	1.23273	1.23273	1.23273
5,144	1.36837	1.27751	1.27751	1.27751	1.27751	1.27751	1.27751	1.27751
9,237	1.36764	1.33480	1.33480	1.33480	1.33480	1.33480	1.33480	1.33480

จำนวน เอลิเมนต์	วิธี รูปแบบปิด	วิธีเกาส์ – เลอจองด์						
		2x2 จุด	3x3 จุด	4x4 จุด	5x5 จุด	6x6 จุด	7x7 จุด	8x8 จุด
ปริมาตรใต้พื้นผิวความเค้นตั้งฉากแกน x								
539	2.89240E+6	2.90062E+6	2.90062E+6	2.90062E+6	2.90062E+6	2.90062E+6	2.90062E+6	2.90062E+6
1,077	2.89238E+6	2.89621E+6	2.89621E+6	2.89621E+6	2.89621E+6	2.89621E+6	2.89621E+6	2.89621E+6
3,026	2.89239E+6	2.89360E+6	2.89360E+6	2.89360E+6	2.89360E+6	2.89360E+6	2.89360E+6	2.89360E+6
5,144	2.89238E+6	2.89319E+6	2.89319E+6	2.89319E+6	2.89319E+6	2.89319E+6	2.89319E+6	2.89319E+6
9,237	2.89236E+6	2.89272E+6	2.89272E+6	2.89272E+6	2.89272E+6	2.89272E+6	2.89272E+6	2.89272E+6
ปริมาตรใต้พื้นผิวความเค้นตั้งฉากแกน y								
539	1.72954E+6	1.72962E+6	1.72962E+6	1.72962E+6	1.72962E+6	1.72962E+6	1.72962E+6	1.72962E+6
1,077	1.72951E+6	1.72935E+6	1.72935E+6	1.72935E+6	1.72935E+6	1.72935E+6	1.72935E+6	1.72935E+6
3,026	1.72952E+6	1.72947E+6	1.72947E+6	1.72947E+6	1.72947E+6	1.72947E+6	1.72947E+6	1.72947E+6
5,144	1.72951E+6	1.72951E+6	1.72951E+6	1.72951E+6	1.72951E+6	1.72951E+6	1.72951E+6	1.72951E+6
9,237	1.72950E+6	1.72946E+6	1.72946E+6	1.72946E+6	1.72946E+6	1.72946E+6	1.72946E+6	1.72946E+6
ปริมาตรใต้พื้นผิวความเค้นเฉือนระนาบ xy								
539	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6
1,077	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6
3,026	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6
5,144	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6
9,237	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6	2.33873E+6

ตารางที่ ค.19 เวลาที่ใช้ในการคำนวณของปัญหาคานที่ถูกตรึงปลายทั้งสองข้าง

จำนวน เอลิเมนต์	จำนวนรอบของ การวนซ้ำ	วิธี รูปแบบปิด	วิธีเกาส์ – เลอจองด์						
			2x2 จุด	3x3 จุด	4x4 จุด	5x5 จุด	6x6 จุด	7x7 จุด	8x8 จุด
539	2,000	0:26	1:10	2:05	3:18	4:51	6:46	9:01	11:40
1,077	1,000	0:26	1:10	2:04	3:18	4:52	6:46	9:04	11:36
3,026	350	0:25	1:10	2:04	3:15	4:48	6:43	8:55	11:32
5,144	200	0:23	1:07	1:59	3:10	4:40	6:28	8:36	11:08
9,237	150	0:32	1:37	2:41	4:17	6:17	8:38	11:07	14:25

ปัญหาแผ่นวงแหวนบางรับภาระของอุณหภูมิกระจายตัวเชิงเส้นตามแนวรัศมี และภาระจากความดันตลอดขอบด้านใน (7.2.5)



ตารางที่ ค.20 ปริมาตรใต้พื้นผิวของปัญหาแผ่นวงแหวนบาง

จำนวน เอลิเมนต์	วิธี รูปแบบปิด	วิธีเกาส์ – เลอจองด์						
		2x2 จุด	3x3 จุด	4x4 จุด	5x5 จุด	6x6 จุด	7x7 จุด	8x8 จุด
ปริมาตรใต้พื้นผิวการเคลื่อนที่ในทิศทางแนวแกน x								
169	8.6032E-07	8.6032E-07	8.6032E-07	8.6032E-07	8.6032E-07	8.6032E-07	8.6032E-07	8.6032E-07
532	8.59934E-07	8.5992E-07	8.5992E-07	8.5992E-07	8.5992E-07	8.5992E-07	8.5992E-07	8.5992E-07
1,081	8.6004E-07	8.6006E-07	8.6006E-07	8.6006E-07	8.6006E-07	8.6006E-07	8.6006E-07	8.6006E-07
2,537	8.6021E-07	8.6019E-07	8.6019E-07	8.6019E-07	8.6019E-07	8.6019E-07	8.6019E-07	8.6019E-07
5,176	8.6017E-07	8.6021E-07	8.6021E-07	8.6021E-07	8.6021E-07	8.6021E-07	8.6021E-07	8.6021E-07
ปริมาตรใต้พื้นผิวการเคลื่อนที่ในทิศทางแนวแกน y								
169	8.5893E-07	8.5893E-07	8.5893E-07	8.5893E-07	8.5893E-07	8.5893E-07	8.5893E-07	8.5893E-07
532	8.5984E-07	8.5985E-07	8.5985E-07	8.5985E-07	8.5985E-07	8.5985E-07	8.5985E-07	8.5985E-07
1,081	8.6011E-07	8.6010E-07	8.6010E-07	8.6010E-07	8.6010E-07	8.6010E-07	8.6010E-07	8.6010E-07
2,537	8.6026E-07	8.6028E-07	8.6028E-07	8.6028E-07	8.6028E-07	8.6028E-07	8.6028E-07	8.6028E-07
5,176	8.6027E-07	8.6024E-07	8.6024E-07	8.6024E-07	8.6024E-07	8.6024E-07	8.6024E-07	8.6024E-07
ปริมาตรใต้พื้นผิวความเค้นตั้งฉากแกน x								
169	3.9115E+04	3.9115E+04	3.9115E+04	3.9115E+04	3.9115E+04	3.9115E+04	3.9115E+04	3.9115E+04
532	3.9272E+04	3.9271E+04	3.9271E+04	3.9271E+04	3.9271E+04	3.9271E+04	3.9271E+04	3.9271E+04
1,081	3.9317E+04	3.9321E+04	3.9321E+04	3.9321E+04	3.9321E+04	3.9321E+04	3.9321E+04	3.9321E+04
2,537	3.9363E+04	3.9366E+04	3.9366E+04	3.9366E+04	3.9366E+04	3.9366E+04	3.9366E+04	3.9366E+04
5,176	3.9363E+04	3.9378E+04	3.9378E+04	3.9378E+04	3.9378E+04	3.9378E+04	3.9378E+04	3.9378E+04

จำนวนเอลิเมนต์	วิธีรูปแบบปิด	วิธีเกาส์ – เลอจองด์						
		2x2 จุด	3x3 จุด	4x4 จุด	5x5 จุด	6x6 จุด	7x7 จุด	8x8 จุด
ปริมาตรใต้พื้นผิวความเค้นตั้งฉากแกน y								
169	3.8957E+04	3.8958E+04	3.8958E+04	3.8958E+04	3.8958E+04	3.8958E+04	3.8958E+04	3.8958E+04
532	3.9111E+04	3.9114E+04	3.9114E+04	3.9114E+04	3.9114E+04	3.9114E+04	3.9114E+04	3.9114E+04
1,081	3.9164E+04	3.9164E+04	3.9164E+04	3.9164E+04	3.9164E+04	3.9164E+04	3.9164E+04	3.9164E+04
2,537	3.9199E+04	3.9209E+04	3.9209E+04	3.9209E+04	3.9209E+04	3.9209E+04	3.9209E+04	3.9209E+04
5,176	3.9224E+04	3.9221E+04	3.9221E+04	3.9221E+04	3.9221E+04	3.9221E+04	3.9221E+04	3.9221E+04
ปริมาตรใต้พื้นผิวความเค้นเฉือนระนาบ xy								
169	1.8909E+03	1.8900E+03	1.8911E+03	1.8911E+03	1.8911E+03	1.8911E+03	1.8911E+03	1.8911E+03
532	1.4840E+03	1.4835E+03	1.4836E+03	1.4836E+03	1.4836E+03	1.4836E+03	1.4836E+03	1.4836E+03
1,081	1.3700E+03	1.3704E+03	1.3704E+03	1.3704E+03	1.3704E+03	1.3704E+03	1.3704E+03	1.3704E+03
2,537	1.3267E+03	1.3248E+03	1.3248E+03	1.3248E+03	1.3248E+03	1.3248E+03	1.3248E+03	1.3248E+03
5,176	1.2999E+03	1.2987E+03	1.2987E+03	1.2987E+03	1.2987E+03	1.2987E+03	1.2987E+03	1.2987E+03

ตารางที่ ค.21 เวลาที่ใช้ในการคำนวณของปัญหาแผ่นวงแหวนบาง

จำนวนเอลิเมนต์	จำนวนรอบของการวนซ้ำ	วิธีรูปแบบปิด	วิธีเกาส์ – เลอจองด์						
			2x2 จุด	3x3 จุด	4x4 จุด	5x5 จุด	6x6 จุด	7x7 จุด	8x8 จุด
169	6,000	0:24	1:04	1:52	2:57	4:19	6:03	8:02	10:25
532	2,000	0:24	1:07	1:57	3:24	4:40	6:26	8:28	10:48
1,081	1,000	0:25	1:17	2:03	3:14	4:39	6:26	8:35	11:03
2,537	400	0:23	1:12	1:56	3:02	4:24	6:05	8:06	10:24
5,176	200	0:22	1:15	2:01	3:07	4:30	6:15	8:20	10:28

ภาคผนวก ง
รายละเอียดโปรแกรม QUADCF

```
%  QUADCF Program
%
%  Finite element program for 4-node quadrilateral element using
%  closed-form expression to analyze a plane stress problem of
%  an arbitrary shaped plate subjected to thermal loadings.
%
%
clear all; clc;
fid = fopen('Example1.msh', 'r');
%
%  Read the title of computation:
%
ntitle = fscanf(fid,'%i',1);
for i = 1 : ntitle+1
    text1 = fgetl(fid);
end
%
%  Read input data:
%
text2 = fgetl(fid);
nnode = fscanf(fid,'%i',1);
nele  = fscanf(fid,'%i',1);
nconv = fscanf(fid,'%i',1);
nforce= fscanf(fid,'%i',1);
for i = 1:2
    text3 = fgetl(fid);
end
tk   = fscanf(fid,'%f',1);
Q    = fscanf(fid,'%f',1);
H    = fscanf(fid,'%f',1);
Ta   = fscanf(fid,'%f',1);

for i = 1:2
    text4 = fgetl(fid);
end
elas  = fscanf(fid,'%f',1);
pr    = fscanf(fid,'%f',1);
alpha = fscanf(fid,'%f',1);
T0    = fscanf(fid,'%f',1);
t     = fscanf(fid,'%f',1);

for i=1:2
    text5 = fgetl(fid);
end
noddata = fscanf(fid,'%i %f %f %i %i %i %f',[7 nnode]);
noddata = noddata';
%
nodid = squeeze(noddata(:,1));
bcx   = squeeze(noddata(:,4));
bcy   = squeeze(noddata(:,5));
bct   = squeeze(noddata(:,6));
coorxy(:,1) = squeeze(noddata(:,2));
coorxy(:,2) = squeeze(noddata(:,3));
temp  = squeeze(noddata(:,7));
%
for i=1:2
    text6 = fgetl(fid);
```

```
end
eledata = fscanf(fid,'%i %i %i %i %i',[5 nele]);
eledata = eledata';
%
eleid = squeeze(eledata(:,1));
elenod(:,1) = squeeze(eledata(:,2));
elenod(:,2) = squeeze(eledata(:,3));
elenod(:,3) = squeeze(eledata(:,4));
elenod(:,4) = squeeze(eledata(:,5));

for i=1:3
    text7 = fgetl(fid);
end
nodconv = fscanf(fid,'%i %f %f',[3 nconv]);
nodconv = nodconv';
nodc(:,1) = squeeze(nodconv(:,2));
nodc(:,2) = squeeze(nodconv(:,3));

for i=1:3
    text8 = fgetl(fid);
end
nodforce = fscanf(fid,'%i %f %f %f',[4 nforce]);
nodforce = nodforce';
%
nodfid = squeeze(nodforce(:,1));
nodf(:,1) = squeeze(nodforce(:,2));
nodf(:,2) = squeeze(nodforce(:,3));
P = squeeze(nodforce(:,4));
%
fclose(fid);
%
% -------- HEAT TRANSFER ANALYSYS --------
% Computing system conduction matrix and heat generation vector
%
Kc = zeros(nnode);
QQ  = zeros(nnode,1);

for i = 1 : nele
    eq = elenod(i,:);
    [kc, qc] = HeatCF(tk, Q, t, coorxy(eq,:));
    Kc(eq,eq) = Kc(eq,eq) + kc;
    QQ(eq) = QQ(eq) + qc;
end

% Computing conduction matrix and ambient temperature load vector
%
if nconv > 0
    [Kc,QQ] = Conv(nodc, coorxy, H, t, Ta, Kc, QQ);
end

% Applying boundary condition and solve system of equations to
% find temperature
%
dbct = find(bct == 0);
bc = find(bct == 1);
Kcsol = Kc(dbct,dbct);
QQsol = QQ(dbct) - Kc(dbct,bc)*temp(bc,1);
temp(dbct) = Kcsol\QQsol;

% -------- ELASTIC PLANE STRESS ANALYSIS --------
% Computing system stiffness matrix and system load vector

neq  = 2*nnode;
```

```
sysk = zeros(neq);
sysf = zeros(neq, 1);
temp = temp - T0;

for i = 1 : nele
    eqele = elenod(i,:);
    [k, f] = StiffCF(coorxy(eqele,:), elas, pr, alpha, t, temp(eqele));

    eqs = [2*eqele(1)-1, 2*eqele(1), 2*eqele(2)-1, 2*eqele(2),...
           2*eqele(3)-1, 2*eqele(3), 2*eqele(4)-1, 2*eqele(4)];

    sysk(eqs,eqs) = sysk(eqs,eqs) + k;
    sysf(eqs) = sysf(eqs) + f;
end

% Computing load vector due to pressure
%
if nforce > 0
    sysf = Press(nodf, coorxy, P, t, sysf);
end

% Applying boundary condition and solve system of equations to find
% displacement
%
dbcx = find(bcx == 0);
dbcy = find(bcy == 0);
rem  = [2*dbcx-1; 2*dbcy];
rem  = sort(rem);

disp = zeros(nnode,1);
Ksol = sysk(rem,rem);
Fsol = sysf(rem);
disp(rem) = Ksol\Fsol;

ii = 1: nnode;
u(nodid) = disp(2*ii-1);
v(nodid) = disp(2*ii);

% Computing stress
%
[sxx, syy, sxy] = Stress(nnode, nele, elenod, coorxy, elas,...
                  pr, alpha, temp, disp);

% -------- RESULT SECTION --------
% Writing output file
%
Result = zeros(nnode,8);
Result(:,1) = ii;   Result(:,2) = coorxy(ii,1); Result(:,3) = coorxy(ii,2);
Result(:,4) = u;    Result(:,5) = v;
Result(:,6) = sxx;  Result(:,7) = syy;  Result(:,8) = sxy;
fileID = fopen('out.txt','w');
fprintf(fileID,'OUTPUT DATA\n');
fprintf(fileID,'%6s %1s %14s %14s %14s %16s %14s %14s\n',...
               'NodeID','x','y','u','v','Sxx','Syy','Sxy');
fprintf(fileID,'%6i %3.8E %3.8E %3.8E %3.8E %3.8E %3.8E %3.8E \n',Result');
fclose(fileID);

% Gaphic display
%
stop = 0;
    x = coorxy(:,1);
    y = coorxy(:,2);
```

```
    xmax = max(x);  xmax = ceil(xmax);
    xmin = min(x);  xmin = floor(xmin);
    ymax = max(y);  ymax = ceil(ymax);
    ymin = min(y);  ymin = floor(ymin);

while stop == 0
    fprintf('Which data you would like to see the fringe plot?\n');
    p = input('u/v/sxx/syy/sxy:', 's');
    if strcmp (p, 'u') == 1
        trisurf(elenod,x,y,0*x,u,'edgecolor','k','facecolor','interp')
        view(2),axis([xmin xmax ymin ymax]),axis equal,colorbar, grid off
    elseif strcmp (p, 'v') == 1
        trisurf(elenod,x,y,0*x,v,'edgecolor','k','facecolor','interp')
        view(2),axis([xmin xmax ymin ymax]),axis equal,colorbar, grid off
    elseif strcmp (p, 'sxx') == 1
        trisurf(elenod,x,y,0*x,sxx,'edgecolor','k','facecolor','interp')
        view(2),axis([xmin xmax ymin ymax]),axis equal,colorbar, grid off
    elseif strcmp (p, 'syy') == 1
        trisurf(elenod,x,y,0*x,syy,'edgecolor','k','facecolor','interp')
        view(2),axis([xmin xmax ymin ymax]),axis equal,colorbar, grid off
    elseif strcmp (p, 'sxy') == 1
        trisurf(elenod,x,y,0*x,sxy,'edgecolor','k','facecolor','interp')
        view(2),axis([xmin xmax ymin ymax]),axis equal,colorbar, grid off
    else
    fprintf('Your request is NOT avialable.\n')
    end

    yn = input('Would you like you to see other data? y/n:' , 's');
    if yn == 'n'
        stop = 1;
    end
end
```

```
function [sysk, sysq] = HeatCF(tk, Q, th, nodexy)

% Subroutine for computing element conduction matrix and heat generation
% vector using closed-form expressions.
%
x1 = nodexy(1,1); x2 = nodexy(2,1); x3 = nodexy(3,1); x4 = nodexy(4,1);
y1 = nodexy(1,2); y2 = nodexy(2,2); y3 = nodexy(3,2); y4 = nodexy(4,2);


x12 = x1 - x2; x13 = x1 - x3; x14 = x1 - x4;
x23 = x2 - x3; x24 = x2 - x4; x34 = x3 - x4;
y12 = y1 - y2; y13 = y1 - y3; y14 = y1 - y4;
y23 = y2 - y3; y24 = y2 - y4; y34 = y3 - y4;
xy24 = ( x2^2 - x4^2 + y2^2 - y4^2);
xy13 = ( x1^2 - x3^2 + y1^2 - y3^2);

% Group 1: K(1,1), K(2,2), K(3,3), K(4,4)
h(1,1) = (x24)^2 + (y24)^2; h(2,2) = (x13)^2 + (y13)^2;
h(3,3) =  h(1,1); h(4,4) = h(2,2);
f(1,1) =  ((x24)*(x34) + (y24)*(y34))*(-2);
f(2,2) =  ((x13)*(x34) + (y13)*(y34))*(-2);
f(3,3) =  ((x12)*(x24) + (y12)*(y24))*(-2);
f(4,4) =  ((x12)*(x13) + (y12)*(y13))*(-2);
g(1,1) =  ((x23)*(x24) + (y23)*(y24))*(-2);
g(2,2) =  ((x13)*(x14) + (y13)*(y14))*(-2);
g(3,3) =  ((x14)*(x24) + (y14)*(y24))*2;
g(4,4 )=  ((x13)*(x23) + (y13)*(y23))*2;
l(1,1) = (x34)^2 + (y34)^2; l(2,2) =  l(1,1);
l(3,3) = (x12)^2 + (y12)^2; l(4,4) =  l(3,3);
m(1,1) = (x23)^2 + (y23)^2; m(4,4) =  m(1,1);
m(2,2) = (x14)^2 + (y14)^2; m(3,3) =  m(2,2);
```

```
% Group 2: K(2,1), K(4,3)
h(2,1) = -(x13)*(x24) - (y13)*(y24); h(4,3)=  h(2,1);
f(2,1) =  (x1 + x2)*(x34) + (y1 + y2)*(y34) - x3^2 + x4^2 - y3^2 + y4^2;
f(4,3) = -(x3 + x4)*(x12) - (y3 + y4)*(y12) + x1^2 - x2^2 + y1^2 - y2^2;
g(2,1) =  (x13)*(x23) + (x14)*(x24) + (y13)*(y23) + (y14)*(y24);
g(4,3) = -(x13)*(x14) - (x23)*(x24) - (y13)*(y14) - (y23)*(y24);
l(2,1) = -(x34)^2 - (y34)^2;
l(4,3) = -(x12)^2 - (y12)^2;
m(2,1) = -(x14)*(x23) - (y14)*(y23); m(4,3) = m(2,1);

% Group 3: K(3,2), K(4,1)
h(3,2) =  (x13)*(x24) + (y13)*(y24); h(4,1)=  h(3,2);
f(3,2) = -(x12)*(x13) - (x24)*(x34) - (y12)*(y13) - (y24)*(y34);
f(4,1) = -(x12)*(x24) - (x13)*(x34) - (y12)*(y24) - (y13)*(y34);
g(3,2) = -(x2 + x3)*(x14) - (y2 + y3)*(y14) + x1^2 - x4^2 + y1^2 - y4^2;
g(4,1) = -(x1 + x4)*(x23) - (y1 + y4)*(y23) + x2^2 - x3^2 + y2^2 - y3^2;
l(3,2) =  (x12)*(x34) + (y12)*(y34); l(4,1) = l(3,2);
m(3,2) = -(x14)^2 - (y14)^2;
m(4,1) = -(x23)^2 - (y23)^2;

% Group 4: K(3,1), K(4,2)
h(3,1) = -(x24)^2 - (y24)^2;
h(4,2) = -(x13)^2 - (y13)^2;
f(3,1) =  (x1 + x3)*(x24) + (y1 + y3)*(y24) - xy24;
f(4,2) = -(x2 + x4)*(x13) - (y2 + y4)*(y13) + xy13;
g(3,1) = -(x1 + x3)*(x24) - (y1 + y3)*(y24) + xy24;
g(4,2) = -(x2 + x4)*(x13) - (y2 + y4)*(y13) + xy13;
l(3,1) = -(x12)*(x34) - (y12)*(y34);
l(4,2) = -(x12)*(x34) - (y12)*(y34);
m(3,1) =  (x14)*(x23) + (y14)*(y23); m(4,2) = m(3,1);

% The parameters p q r are in similar forms for K(i,j):
p = (x13*y24-x24*y13)*8;
q = (x34*y12-x12*y34)*8;
r = (x23*y14-x14*y23)*8;


% Calculating angle between opposite side in order to classify into
% 4 cases. 0.4 degree is selected for this study from validating with
% rectangular plate with linear temperature
u12 = sqrt(x12*x12+y12*y12);      u34 = sqrt(x34*x34+y34*y34);
u23 = sqrt(x23*x23+y23*y23);      u14 = sqrt(x14*x14+y14*y14);
ssr = r/8/u14/u23;                ssq = q/8/u12/u34;
sall = sind(0.4);

if abs(ssr) < sall
    r = 0;
end
if abs(ssq) < sall
    q = 0;
end

% If edge 12 is parallel with edge 43 and edge 23 is parallel with edge 14,
% then q == 0 and r==0:
if q==0 && r==0
K(1,1) = zeroqr(p,h(1,1),l(1,1),m(1,1));
K(2,1) = zeroqr(p,h(2,1),l(2,1),m(2,1));
K(3,1) = zeroqr(p,h(3,1),l(3,1),m(3,1));
K(4,1) = zeroqr(p,h(4,1),l(4,1),m(4,1));
K(2,2) = zeroqr(p,h(2,2),l(2,2),m(2,2));
K(3,2) = zeroqr(p,h(3,2),l(3,2),m(3,2));
```

```
K(4,2) = zeroqr(p,h(4,2),l(4,2),m(4,2));
K(3,3) = zeroqr(p,h(3,3),l(3,3),m(3,3));
K(4,3) = zeroqr(p,h(4,3),l(4,3),m(4,3));
K(4,4) = zeroqr(p,h(4,4),l(4,4),m(4,4));
% If edge 12 is parallel with edge 43 then q == 0:
elseif q==0 && r~=0
K(1,1) = zeroq(p,r,h(1,1),g(1,1),l(1,1),m(1,1));
K(2,1) = zeroq(p,r,h(2,1),g(2,1),l(2,1),m(2,1));
K(3,1) = zeroq(p,r,h(3,1),g(3,1),l(3,1),m(3,1));
K(4,1) = zeroq(p,r,h(4,1),g(4,1),l(4,1),m(4,1));
K(2,2) = zeroq(p,r,h(2,2),g(2,2),l(2,2),m(2,2));
K(3,2) = zeroq(p,r,h(3,2),g(3,2),l(3,2),m(3,2));
K(4,2) = zeroq(p,r,h(4,2),g(4,2),l(4,2),m(4,2));
K(3,3) = zeroq(p,r,h(3,3),g(3,3),l(3,3),m(3,3));
K(4,3) = zeroq(p,r,h(4,3),g(4,3),l(4,3),m(4,3));
K(4,4) = zeroq(p,r,h(4,4),g(4,4),l(4,4),m(4,4));
% If edge 23 is parallel with edge 14 then r == 0:
elseif r==0 && q~=0
K(1,1) = zeror(p,q,h(1,1),f(1,1),l(1,1),m(1,1));
K(2,1) = zeror(p,q,h(2,1),f(2,1),l(2,1),m(2,1));
K(3,1) = zeror(p,q,h(3,1),f(3,1),l(3,1),m(3,1));
K(4,1) = zeror(p,q,h(4,1),f(4,1),l(4,1),m(4,1));
K(2,2) = zeror(p,q,h(2,2),f(2,2),l(2,2),m(2,2));
K(3,2) = zeror(p,q,h(3,2),f(3,2),l(3,2),m(3,2));
K(4,2) = zeror(p,q,h(4,2),f(4,2),l(4,2),m(4,2));
K(3,3) = zeror(p,q,h(3,3),f(3,3),l(3,3),m(3,3));
K(4,3) = zeror(p,q,h(4,3),f(4,3),l(4,3),m(4,3));
K(4,4) = zeror(p,q,h(4,4),f(4,4),l(4,4),m(4,4));

else
n(1,1) = ((x23)*(x34) + (y23)*(y34))*2;
n(2,2) = ((x14)*(x34) + (y14)*(y34))*2;
n(3,3) = ((x12)*(x14) + (y12)*(y14))*(-2);
n(4,4) = ((x12)*(x23) + (y12)*(y23))*(-2);
n(2,1) = -(x1 + x2)*(x34) - (y1 + y2)*(y34) + x3^2 - x4^2 + y3^2 - y4^2;
n(4,3) = -(x3 + x4)*(x12) - (y3 + y4)*(y12) + x1^2 - x2^2 + y1^2 - y2^2;
n(3,2) = -(x2 + x3)*(x14) - (y2 + y3)*(y14) + x1^2 - x4^2 + y1^2 - y4^2;
n(4,1) =  (x1 + x4)*(x23) + (y1 + y4)*(y23) - x2^2 + x3^2 - y2^2 + y3^2;
n(3,1) = -(x12)*(x23) + (x14)*(x34) - (y12)*(y23) + (y14)*(y34);
n(4,2) = -(x12)*(x14) + (x23)*(x34) - (y12)*(y14) + (y23)*(y34);

% The following parameters are also in similar form for K(i,j):
E1 = p-q-r; E2 = p-q+r; E3 = p+q-r; E4 = p+q+r;
C1 = p^2+q^2+r^2; C2 = p^2-2*q^2-2*r^2;

K(1,1) = calK(p,q,r,h(1,1),f(1,1),g(1,1),l(1,1),m(1,1),n(1,1), ...
              E1,E2,E3,E4,C1,C2);
K(2,1) = calK(p,q,r,h(2,1),f(2,1),g(2,1),l(2,1),m(2,1),n(2,1), ...
              E1,E2,E3,E4,C1,C2);
K(3,1) = calK(p,q,r,h(3,1),f(3,1),g(3,1),l(3,1),m(3,1),n(3,1), ...
              E1,E2,E3,E4,C1,C2);
K(4,1) = calK(p,q,r,h(4,1),f(4,1),g(4,1),l(4,1),m(4,1),n(4,1), ...
              E1,E2,E3,E4,C1,C2);
K(2,2) = calK(p,q,r,h(2,2),f(2,2),g(2,2),l(2,2),m(2,2),n(2,2), ...
              E1,E2,E3,E4,C1,C2);
K(3,2) = calK(p,q,r,h(3,2),f(3,2),g(3,2),l(3,2),m(3,2),n(3,2), ...
              E1,E2,E3,E4,C1,C2);
K(4,2) = calK(p,q,r,h(4,2),f(4,2),g(4,2),l(4,2),m(4,2),n(4,2), ...
              E1,E2,E3,E4,C1,C2);
K(3,3) = calK(p,q,r,h(3,3),f(3,3),g(3,3),l(3,3),m(3,3),n(3,3), ...
              E1,E2,E3,E4,C1,C2);
K(4,3) = calK(p,q,r,h(4,3),f(4,3),g(4,3),l(4,3),m(4,3),n(4,3), ...
              E1,E2,E3,E4,C1,C2);
K(4,4) = calK(p,q,r,h(4,4),f(4,4),g(4,4),l(4,4),m(4,4),n(4,4), ...
```

```
              E1,E2,E3,E4,C1,C2);
end
K(1,2) = K(2,1); K(1,3) = K(3,1); K(1,4) = K(4,1);
K(2,3) = K(3,2); K(2,4) = K(4,2); K(3,4) = K(4,3);
sysk = tk*th*K;

qq(1,1) =  p - q/3 - r/3;
qq(2,1) =  p + q/3 - r/3;
qq(3,1) =  p + q/3 + r/3;
qq(4,1) =  p - q/3 + r/3;

sysq = Q*th*qq/64;
```

```
function KK = zeroqr(p,h,l,m)
% For the case of q = 0 and r = 0:

KK = ((3*h + l + m)*4)/(3*p);

end
```

```
function KK = zeroq(p,r,h,g,l,m)
% For the case of q = 0:

KK = (-12*p*r*m + 12*r*r*g - (6*p*p*m - 6*p*r*g + 6*r*r*h + ...
        2*r*r*l)*(log(p - r) - log(p + r)))./(3*r^3);

end
```

```
function KK = zeror(p,q,h,f,l,m)
% For the case of r = 0:

KK = (-12*p*q*l + 12*q*q*f - (6*p*p*l - 6*p*q*f + ...
        6*q*q*h + 2*q*q*m)*(log(p - q) - log(p + q)))./(3*q^3);

end
```

```
function KK = calK(p,q,r,h,f,g,l,m,n,E1,E2,E3,E4,C1,C2)
% For the case of both q and r not equal zero:

A = ((- 3*q*q*r*g + 2*p*q*q*m + 3*q*r*r*f + p*q*r*n - ...
      4*p*r*r*l).*2/3/(q^2*r^2)) + ((g*r-m*p)*4/r^2);

part1 = (((( p*(q - 2*r) - q*r + C1)*2*l + 3*q*(2*q*h - E3*f))*  r  - ...
         3*q*q*E2*g + q*( 2*q*r + p*(q + r)+ C2)*n)*r + ...
         (-q*r - p*(2*q - r)+ C1)*2*q*q*m)*  E1 *log(E1);
part2 = (((( p*(q + 2*r) + q*r + C1)*2*l + 3*q*(2*q*h - E4*f))*  r  - ...
         3*q*q*E1*g - q*( 2*q*r - p*(q - r)- C2)*n)*r + ...
         ( q*r - p*(2*q + r)+ C1)*2*q*q*m)*  E2 *log(E2);
part3 = ((((-p*(q + 2*r) + q*r + C1)*2*l + 3*q*(2*q*h - E1*f))*(-r) + ...
         3*q*q*E4*g + q*( 2*q*r + p*(q - r)- C2)*n)*r - ...
         ( q*r + p*(2*q + r)+ C1)*2*q*q*m)*(-E3)*log(E3);
part4 = ((((-p*(q - 2*r) - q*r + C1)*2*l + 3*q*(2*q*h - E2*f))*(-r) + ...
         3*q*q*E3*g + q*(-2*q*r + p*(q + r)- C2)*n)*r - ...
         (-q*r + p*(2*q - r)+ C1)*2*q*q*m)*(-E4)*log(E4);
KK = A + (part1-part2-part3+part4)./(6*q^3*r^3);
End
```

```
function [sysk,sysq] = Conv(nodc, coorxy, H, th, Ta, sysk, sysq)

% Subroutine for computing element convection matrix and ambient
% temperature load vector.
%
for i = size(nodc,1)

    eq = nodc(i,:);
```

```
    x1 = coorxy(eq(1),1);       y1 = coorxy(eq(1),2);
    x2 = coorxy(eq(2),1);       y2 = coorxy(eq(2),2);
    dx = x1 - x2;               dy = y1 - y2;
    L = sqrt(dx*dx + dy*dy);

    % Compute heat convection matrix
    fac = H*th*L/6;
    sysk(eq,eq) = sysk(eq,eq) + [2*fac, fac; fac,2*fac];

    % Compute ambient temperature vecter
    qh = H*Ta*th*L/2;
    sysq(eq) = sysq(eq) + [qh; qh];
end
end
```

```
function [K, F] = StiffCF(coorxy, elas, pr, alpha, t, temp)
% Subroutine for computing element stiffness matrix and temperature
% loading vector using closed-form expressions.
%
x1 = coorxy(1,1); x2 = coorxy(2,1); x3 = coorxy(3,1); x4 = coorxy(4,1);
y1 = coorxy(1,2); y2 = coorxy(2,2); y3 = coorxy(3,2); y4 = coorxy(4,2);

x12 = x1 - x2; x13 = x1 - x3; x14 = x1 - x4;
x23 = x2 - x3; x24 = x2 - x4; x34 = x3 - x4;
y12 = y1 - y2; y13 = y1 - y3; y14 = y1 - y4;
y23 = y2 - y3; y24 = y2 - y4; y34 = y3 - y4;

p = (x13*y24 -x24*y13)*8;
q = (x34*y12 -x12*y34)*8;
r = (x23*y14 -x14*y23)*8;

% Calculating angle between opposite side in order to classify into
% 4 cases. 0.4 degree is selected for this study from validating with
% rectangular plate with linear temperature
% where u is a magnitude of line , ssr = sine seta of 14 and 23
% ssq = sine seta of 12 and 34 , sall = allowable sine value
u12 = sqrt(x12*x12+y12*y12);      u34 = sqrt(x34*x34+y34*y34);
u23 = sqrt(x23*x23+y23*y23);      u14 = sqrt(x14*x14+y14*y14);
ssr = r/8/u14/u23;                ssq = q/8/u12/u34;
sall = sind(0.4);
if abs(ssr)<sall
    r = 0;
end
if abs(ssq)<sall
    q = 0;
end

%-------- STIFFNESS MATRIC CALCULATION --------
% Computing intermediated parameter I
%
% Assign h matrix
h = zeros(8);
h(1,1) = y24*y24;        h(2,2) = x24*x24;        h(3,3) = y13*y13;
h(4,4) = x13*x13;        h(5,5) = y24*y24;        h(6,6) = x24*x24;
h(7,7) = y13*y13;        h(8,8) = x13*x13;

h(1,2) = -x24*y24;       h(3,4) = -x13*y13;
h(5,6) = h(1,2);         h(7,8) = h(3,4);

h(1,3) = -y13*y24;       h(2,4) = -x13*x24;       h(3,5) = y13*y24;
h(4,6) = x13*x24;        h(5,7) = h(1,3);         h(6,8) = h(2,4);
h(1,7) = h(3,5);         h(2,8) = h(4,6);         h(1,5) = -y24*y24;
h(2,6) = -x24*x24;       h(3,7) = -y13*y13;       h(4,8) = -x13*x13;

h(1,4) =  x24*y13;       h(2,3) =  x13*y24;       h(1,8) = -x24*y13;
```

```
h(2,7) = -x13*y24;       h(3,6) = h(2,7);         h(4,5) = h(1,8);
h(5,8) = h(1,4);         h(6,7) = h(2,3);         h(1,6) = x24*y24;
h(2,5) = h(1,6);         h(4,7) = x13*y13;        h(3,8) = h(4,7);

% Assign l matrix
l = zeros(8);
l(1,1) = y34*y34;        l(2,2) = x34*x34;        l(3,3) = y34*y34;
l(4,4) = x34*x34;        l(5,5) = y12*y12;        l(6,6) = x12*x12;
l(7,7) = y12*y12;        l(8,8) = x12*x12;

l(1,2) = -x34*y34;       l(3,4) = l(1,2);
l(5,6) = -x12*y12;       l(7,8) = l(5,6);

l(1,3) = -y34*y34;       l(2,4) = -x34*x34;       l(3,5) =  y12*y34;
l(4,6) =  x12*x34;       l(5,7) = -y12*y12;       l(6,8) = -x12*x12;
l(1,7) =  l(3,5);        l(2,8) =  l(4,6);        l(1,5) = -y12*y34;
l(2,6) = -x12*x34;       l(3,7) =  l(1,5);        l(4,8) =  l(2,6);

l(1,4) =  x34*y34;       l(2,3) =  l(1,4);        l(1,8) = -x34*y12;
l(2,7) = -x12*y34;       l(3,6) =  l(1,8);        l(4,5) =  l(2,7);
l(5,8) =  x12*y12;       l(6,7) =  l(5,8);        l(1,6) =  x34*y12;
l(2,5) =  x12*y34;       l(4,7) =  l(2,5);        l(3,8) =  l(1,6);

% Assign m matrix
m = zeros(8);
m(1,1) = y23*y23;        m(2,2) = x23*x23;        m(3,3) = y14*y14;
m(4,4) = x14*x14;        m(5,5) = y14*y14;        m(6,6) = x14*x14;
m(7,7) = y23*y23;        m(8,8) = x23*x23;

m(1,2) = -x23*y23;       m(3,4) = -x14*y14;
m(5,6) =  m(3,4);        m(7,8) =  m(1,2);

m(1,3) = -y14*y23;       m(2,4) = -x14*x23;       m(3,5) = -y14*y14;
m(4,6) = -x14*x14;       m(5,7) =  m(1,3);        m(6,8) =  m(2,4);
m(1,7) = -y23*y23;       m(2,8) = -x23*x23;       m(1,5) =  y14*y23;
m(2,6) =  x14*x23;       m(3,7) =  m(1,5);        m(4,8) =  m(2,6);

m(1,4) =  x23*y14;       m(2,3) =  x14*y23;       m(1,8) =  x23*y23;
m(2,7) =  m(1,8);        m(3,6) =  x14*y14;       m(4,5) =  m(3,6);
m(5,8) =  m(2,3);        m(6,7) =  m(1,4);        m(1,6) = -x23*y14;
m(2,5) = -x14*y23;       m(4,7) =  m(1,6);        m(3,8) =  m(2,5);

% Assign f matrix
if q ~= 0
f = zeros(8);
f(1,1) = -2*y24*y34;             f(2,2) = -2*x24*x34;
f(3,3) = -2*y13*y34;             f(4,4) = -2*x13*x34;
f(5,5) = -2*y12*y24;             f(6,6) = -2*x12*x24;
f(7,7) = -2*y12*y13;             f(8,8) = -2*x12*x13;

f(1,2) = x24*y34 + x34*y24;      f(3,4) = x13*y34 + x34*y13;
f(5,6) = x12*y24 + x24*y12;      f(7,8) = x12*y13 + x13*y12;

f(1,3) = (y13 + y24)*y34;        f(2,4) = (x13 + x24)*x34;
f(3,5) = -y12*y13 -y24*y34;      f(4,6) = -x12*x13 -x24*x34;
f(5,7) = (y13 + y24)*y12;        f(6,8) = (x13 + x24)*x12;
f(1,7) = -y12*y24 -y13*y34;      f(2,8) = -x12*x24 -x13*x34;
f(1,5) = (y12 + y34)*y24;        f(2,6) = (x12 + x34)*x24;
f(3,7) = (y12 + y34)*y13;        f(4,8) = (x12 + x34)*x13;

f(1,4) = -x24*y34 - x34*y13;     f(2,3) = -x13*y34 - x34*y24;
f(1,8) =  x24*y12 + x34*y13;     f(2,7) =  x12*y24 + x13*y34;
f(3,6) =  x13*y12 + x34*y24;     f(4,5) =  x12*y13 + x24*y34;
f(5,8) = -x12*y13 - x24*y12;     f(6,7) = -x12*y24 - x13*y12;
```

```
f(1,6) = -x24*y12 - x34*y24;    f(2,5) = -x12*y24 - x24*y34;
f(4,7) = -x12*y13 - x13*y34;    f(3,8) = -x13*y12 - x34*y13;
end

% Assign g matrix
if r~=0
g = zeros(8);
g(1,1) = -2*y24*y23;            g(2,2) = -2*x24*x23;
g(3,3) = -2*y13*y14;            g(4,4) = -2*x13*x14;
g(5,5) =  2*y24*y14;            g(6,6) =  2*x24*x14;
g(7,7) =  2*y13*y23;            g(8,8) =  2*x13*x23;

g(1,2) =  x23*y24 + x24*y23;    g(3,4) =  x13*y14 + x14*y13;
g(5,6) = -x14*y24 - x24*y14;    g(7,8) = -x13*y23 - x23*y13;

g(1,3) =  y13*y23 + y14*y24;    g(2,4) =  x13*x23 + x14*x24;
g(3,5) = (y13 - y24)*y14;       g(4,6) = (x13 - x24)*x14;
g(5,7) = -y13*y14 - y23*y24;    g(6,8) = -x13*x14 - x23*x24;
g(1,7) = (y24 - y13)*y23;       g(2,8) = (x24 - x13)*x23;
g(1,5) = (y23 - y14)*y24;       g(2,6) = (x23 - x14)*x24;
g(3,7) = (y14 - y23)*y13;       g(4,8) = (x14 - x23)*x13;

g(1,4) = -x23*y13 - x24*y14;    g(2,3) = -x13*y23 - x14*y24;
g(1,8) = -x24*y23 + x23*y13;    g(2,7) =  x13*y23 - x23*y24;
g(3,6) = -x13*y14 + x14*y24;    g(4,5) = -x14*y13 + x24*y14;
g(5,8) =  x14*y13 + x24*y23;    g(6,7) =  x13*y14 + x23*y24;
g(1,6) =  x24*y14 - x23*y24;    g(2,5) =  x14*y24 - x24*y23;
g(4,7) = -x13*y14 + x23*y13;    g(3,8) =  x13*y23 - x14*y13;
end

% Assign n matrix
if r~=0 && q~=0
n = zeros(8);
n(1,1) =  2*y23*y34;            n(2,2) =  2*x23*x34;
n(3,3) =  2*y14*y34;            n(4,4) =  2*x14*x34;
n(5,5) = -2*y14*y12;            n(6,6) = -2*x14*x12;
n(7,7) = -2*y12*y23;            n(8,8) = -2*x12*x23;

n(1,2) = -x23*y34 - x34*y23;    n(3,4) = -x14*y34 - x34*y14;
n(5,6) =  x12*y14 + x14*y12;    n(7,8) =  x12*y23 + x23*y12;

n(1,3) = (-y14 - y23)*y34;      n(2,4) = (-x14 - x23)*x34;
n(3,5) = ( y12 - y34)*y14;      n(4,6) = ( x12 - x34)*x14;
n(5,7) = ( y14 + y23)*y12;      n(6,8) = ( x14 + x23)*x12;
n(1,7) = ( y12 - y34)*y23;      n(2,8) = ( x12 - x34)*x23;
n(1,5) = -y12*y23 + y14*y34;    n(2,6) = -x12*x23 + x14*x34;
n(3,7) = -y12*y14 + y23*y34;    n(4,8) = -x12*x14 + x23*x34;

n(1,4) =  x23*y34 + x34*y14;    n(2,3) =  x14*y34 + x34*y23;
n(1,8) = -x23*y12 + x34*y23;    n(2,7) = -x12*y23 + x23*y34;
n(3,6) = -x14*y12 + x34*y14;    n(4,5) = -x12*y14 + x14*y34;
n(5,8) = -x12*y23 - x14*y12;    n(6,7) = -x12*y14 - x23*y12;
n(1,6) =  x23*y12 - x34*y14;    n(2,5) =  x12*y23 - x14*y34;
n(4,7) =  x12*y14 - x23*y34;    n(3,8) =  x14*y12 - x34*y23;
end

% Calculate intermediate parameter [I] matrix
IN = zeros(8);
if q == 0 && r == 0
    IN = zeroqr(p,h,l,m);
elseif q == 0 && r ~= 0
    IN = zeroq(p,r,h,g,l,m);
elseif q ~= 0 && r == 0
    IN = zeror(p,q,h,f,l,m);
```

```
else
    E1 = p-q-r; E2 = p-q+r; E3 = p+q-r; E4 = p+q+r;
    C1 = p^2+q^2+r^2; C2 = p^2-2*q^2-2*r^2;
    IN = calK(p,q,r,h,f,g,l,m,n,E1,E2,E3,E4,C1,C2);
end

% Rearrange stiffness matrix [K]
K = zeros(8);
s = (1-pr)/2;
K(1,1) = IN(1,1) + s*IN(2,2);        K(2,2) = IN(2,2) + s*IN(1,1);
K(3,3) = IN(3,3) + s*IN(4,4);        K(4,4) = IN(4,4) + s*IN(3,3);
K(5,5) = IN(5,5) + s*IN(6,6);        K(6,6) = IN(6,6) + s*IN(5,5);
K(7,7) = IN(7,7) + s*IN(8,8);        K(8,8) = IN(8,8) + s*IN(7,7);

ss = (1+pr)/2;
K(1,2) = ss*IN(1,2);                 K(3,4) = ss*IN(3,4);
K(5,6) = ss*IN(5,6);                 K(7,8) = ss*IN(7,8);

K(1,3) = IN(1,3) + s*IN(2,4);        K(2,4) = IN(2,4) + s*IN(1,3);
K(3,5) = IN(3,5) + s*IN(4,6);        K(4,6) = IN(4,6) + s*IN(3,5);
K(5,7) = IN(5,7) + s*IN(6,8);        K(6,8) = IN(6,8) + s*IN(5,7);
K(1,7) = IN(1,7) + s*IN(2,8);        K(2,8) = IN(2,8) + s*IN(1,7);
K(1,5) = IN(1,5) + s*IN(2,6);        K(2,6) = IN(2,6) + s*IN(1,5);
K(3,7) = IN(3,7) + s*IN(4,8);        K(4,8) = IN(4,8) + s*IN(3,7);

K(1,4) = s*IN(1,4) + pr*IN(2,3);     K(2,3) = s*IN(2,3) + pr*IN(1,4);
K(1,8) = s*IN(1,8) + pr*IN(2,7);     K(2,7) = s*IN(2,7) + pr*IN(1,8);
K(3,6) = s*IN(3,6) + pr*IN(4,5);     K(4,5) = s*IN(4,5) + pr*IN(3,6);
K(5,8) = s*IN(5,8) + pr*IN(6,7);     K(6,7) = s*IN(6,7) + pr*IN(5,8);
K(1,6) = s*IN(1,6) + pr*IN(2,5);     K(2,5) = s*IN(2,5) + pr*IN(1,6);
K(4,7) = s*IN(4,7) + pr*IN(3,8);     K(3,8) = s*IN(3,8) + pr*IN(4,7);

% Symmetry matrix
K(2,1) = K(1,2);
K(3,1) = K(1,3);    K(3,2) = K(2,3);
K(4,1) = K(1,4);    K(4,2) = K(2,4);    K(4,3) = K(3,4);
K(5,1) = K(1,5);    K(5,2) = K(2,5);    K(5,3) = K(3,5);
K(5,4) = K(4,5);
K(6,1) = K(1,6);    K(6,2) = K(2,6);    K(6,3) = K(3,6);
K(6,4) = K(4,6);    K(6,5) = K(5,6);
K(7,1) = K(1,7);    K(7,2) = K(2,7);    K(7,3) = K(3,7);
K(7,4) = K(4,7);    K(7,5) = K(5,7);    K(7,6) = K(6,7);
K(8,1) = K(1,8);    K(8,2) = K(2,8);    K(8,3) = K(3,8);
K(8,4) = K(4,8);    K(8,5) = K(5,8);    K(8,6) = K(6,8);
K(8,7) = K(7,8);

K = elas/(1-pr*pr)*t*K;

%-------- THERMAL VECTOR CALCULATION --------
%
T1 = temp(1);   T2 = temp(2);   T3 = temp(3);   T4 = temp(4);
a1 =  T1 + T2 + T3 + T4;
a2 = -T1 - T2 + T3 + T4;
a3 = -T1 + T2 + T3 - T4;

b1 = [ y24; -x24; -y13;  x13; -y24;  x24;  y13; -x13];
b2 = [-y23;  x23;  y14; -x14; -y14;  x14;  y23; -x23];
b3 = [-y34;  x34;  y34; -x34;  y12; -x12; -y12;  x12];

F = elas/(1-pr)/24*t*alpha*(3*a1*b1 + a2*b2 + a3*b3);

end
```

```
function sysf = Press(nodf, coorxy, P, t, sysf)
% Subroutine for creating load vector due to pressure
```

```
%
    for i = 1: size(nodf,1)
        x1 = coorxy(nodf(i,1),1);      y1 = coorxy(nodf(i,1),2);
        x2 = coorxy(nodf(i,2),1);      y2 = coorxy(nodf(i,2),2);

        Fx1 = P(i)/2*t*(y1-y2);
        Fy1 = P(i)/2*t*(x2-x1);
        Fx2 = P(i)/2*t*(y1-y2);
        Fy2 = P(i)/2*t*(x2-x1);

        eq = [2*nodf(i,1)-1, 2*nodf(i,1), 2*nodf(i,2)-1, 2*nodf(i,2)];
        sysf(eq) = sysf(eq) + [Fx1; Fy1; Fx2; Fy2];
    end
end
```

```
function [sxx, syy, sxy] = Stress(nnode, nele, elenod, coorxy, elas, ...
          pr, alpha, temp, dispuv)
% Subroutine for computing stresses
%
sxx = zeros(nnode,1);
syy = zeros(nnode,1);
sxy = zeros(nnode,1);
count = zeros(nnode,1);

for i = 1:nele
sele = elenod(i,:);
eq = [2*sele(1)-1, 2*sele(2)-1, 2*sele(3)-1, 2*sele(4)-1,...
      2*sele(1),   2*sele(2),   2*sele(3),   2*sele(4)];
u1 = dispuv(eq(1));  u2 = dispuv(eq(2));
u3 = dispuv(eq(3));  u4 = dispuv(eq(4));
v1 = dispuv(eq(5));  v2 = dispuv(eq(6));
v3 = dispuv(eq(7));  v4 = dispuv(eq(8));

scoorxy = coorxy(sele,:);
x1 = scoorxy(1,1); x2 = scoorxy(2,1); x3 = scoorxy(3,1); x4 = scoorxy(4,1);
y1 = scoorxy(1,2); y2 = scoorxy(2,2); y3 = scoorxy(3,2); y4 = scoorxy(4,2);

x13 = x1 - x3;      x24 = x2 - x4;
y13 = y1 - y3;      y24 = y2 - y4;

p = (x13*y24 -x24*y13);

%  Compute plastic strain {ep}=[B]{u}
%  where considering at centriod of square (xi = eta = 0)

ep = zeros(3,1);
ep(1) =  y24*u1 - y13*u2 - y24*u3 + y13*u4;
ep(2) = -x24*v1 + x13*v2 + x24*v3 - x13*v4;
ep(3) = -x24*u1 + x13*u2 + x24*u3 - x13*u4 + ...
         y24*v1 - y13*v2 - y24*v3 + y13*v4;
ep = ep/p;

%Compute total strain {et}={ep}-{eT}

Tm = (temp(sele(1)) +  temp(sele(2)) + temp(sele(3)) +  temp(sele(4)))/4;
et = ep - [alpha*Tm; alpha*Tm; 0];

%  Compute stress {s} = [c]{et}
ssxx = et(1) + pr*et(2);
ssyy = et(2) + pr*et(1);
ssxy = (1-pr)/2*et(3);

sxx(sele) = sxx(sele) + ssxx;
syy(sele) = syy(sele) + ssyy;
sxy(sele) = sxy(sele) + ssxy;
```

```
count(sele) = count(sele) + 1.;
end

    fac = elas/(1-pr*pr);
    sxx = fac*sxx./count;
    syy = fac*syy./count;
    sxy = fac*sxy./count;

end
```

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาวเบญจาภา ยนต์สกุล เกิดเมื่อวันที่ 20 สิงหาคม พุทธศักราช 2532 จังหวัดกรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต จากภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2554 และเข้าศึกษาในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2559