5

เซมิฟิลด์ที่วางนัยทั่วไป

นาย สุเทพ สวนใต้

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2528

ISBN 974-566-008-6

GENERALIZED SEMIFIELDS

Mr. Sutep Suantai

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirement
for the Degree of Master of Science
Department of Mathematics
Graduate School
Chulalongkorn University
1985

Thesis Title Generalized Semifields

By Mr. Sutep Suantai

Department Mathematics

Thesis Advisor Dr. Sidney S. Mitchell

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in Partial Fulfillment of the requirements for the Master's Degree.

.........S. Bunnag.......... Dean of Graduate School

(Professor Supradit Bunnag Ph.D.)

Thesis Committee

..Yupaporn Kemprasit.......... Chairman

(Associate Professor Yupaporn Kemprasit Ph.D.)

..Patanee Udomkavanich.......... Member

(Dr. Patanee Udomkavanich Ph.D.)

..Sidney S. Mitchell.......... Member

(Dr. Sidney S. Mitchell Ph.D.)

หัวข้อวิทยานิพนธ์	เซมิฟิลด์ที่วางนัยทั่วไป
ชื่อนิสิต	นาย สุเทพ สวนใต้
อาจารย์ที่ปรึกษา	Dr.Sidney S.Mitchell
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2528

บทคัดย่อ

เซต S ที่ประกอบด้วยไบนารีโอเปอเรชัน + และ · จะเรียกว่าเป็นเซมิริงก็ต่อเมื่อ

(1) $(S,+)$ เป็นเซมิกรุปที่สลับที่ได้

(2) $(S,\cdot)$ เป็นเซมิกรุปที่สลับที่ได้

(3) สำหรับทุกสมาชิก x,y,z ใน S $(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$

เซมิริง $(D,+,\cdot)$ จะเรียกว่า เรโชเซมิริง ก็ต่อเมื่อ $(D,\cdot)$ เป็นกรุป

เซมิริง $(K,+,\cdot)$ จะเรียกว่าเป็นเซมิฟิลด์ที่วางนัยทั่วไป ก็ต่อเมื่อมี $a \in K$ ซึ่ง $(K\setminus\{a\},\cdot)$ เป็นกรุป

เพื่อความสะดวกในวิทยานิพนธ์นี้เราจะเรียกเซมิฟิลด์ที่วางนัยทั่วไปว่าเซมิฟิลด์

ทฤษฎีบท ให้ $(K,+,\cdot)$ เป็นเซมิฟิลด์ และ a เป็นสมาชิกใน K ซึ่ง $(K\setminus\{a\},\cdot)$ เป็นกรุป แล้วจะได้ว่า $ax = a$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน K หรือ $ax = x$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน K หรือ $ae \neq a$ และ $a^2 \neq a$ โดยที่ e เป็นเอกลักษณ์การคูณของ$(K\setminus\{a\},\cdot)$

จากทฤษฎีจะได้ว่า มีเซมิฟิลด์อยู่ 3 ชนิด คือ

(1) $ax = a$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน K

(2) $ax = x$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน K

(3) $ae \neq a$ และ $a^2 \neq a$ โดยที่ e เป็นเอกลักษณ์การคูณของ$(K\setminus\{a\},\cdot)$

ให้ D เป็นเซมิริง และ $d \in D$ จะเรียก $x \in S$ ว่าเป็น<u>เอกลักษณ์การบวกของ d</u> ก็ต่อเมื่อ $x+d = d$ และจะให้ $I_D(d)$ แทนเซ็ตของเอกลักษณ์การบวกของ d ทั้งหมดใน D

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ D เป็นเรโซเซมิริง และ a เป็นสัญลักษณ์ที่ไม่แทนสมาชิกใด ๆ ใน D ให้ $S \subseteq I_D(1)$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า $(S = \Phi)$ หรือ (S เป็นกรุปย่อยสำหรับการบวกของ $I_D(1)$ และ $D \setminus S$ เป็นไอดีลของ $(D,+)$ ถ้า D เป็นเรโซเซมิริงอนันต์)

ถ้าเราขยายการบวกและการคูณจาก D ไปยัง $K = D \cup \{a\}$ ดังต่อไปนี้

(1) $ax = xa = x$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน K

(2) $a+x = x+a = a$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน S และ

$a+x = x+a = 1+x$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน $D \setminus S$

(3) $a+a = \begin{cases} a \text{ หรือ } 1 & \text{ถ้า } 1+1=1 \\ 1+1 & \text{ถ้า } 1+1 \neq 1 \end{cases}$

แล้วจะได้ว่า $K = D \cup \{a\}$ เป็นเซมิฟิลด์ ชนิดที่ 2

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ D เป็นเรโซเซมิริง และ a เป็นสัญลักษณ์ที่ไม่แทนสมาชิกใด ๆ ใน D ให้ $d \in D$ และ $S \subseteq I_D(d)$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า $(S = \phi)$ หรือ (S เป็นกรุปย่อยสำหรับการบวกของ $I_D(d)$ และ $D \setminus S$ เป็นไอดีลของ $(D,+)$ ถ้า D เป็นเรโซเซมิริงอนันต์)

ถ้าเราขยายการบวกและการคูณจาก D ไปยัง $K = D \cup \{a\}$ ดังต่อไปนี้

(1) $ax = xa = dx$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน D และ $a^2 = d^2$

(2) $a+x = x+a = a$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน S และ

$a+x = x+a = d+x$ สำหรับทุกสมาชิก x ใน $D \setminus S$

(3) $a+a = \begin{cases} a \text{ หรือ } d & \text{ถ้า } 1+1=1 \\ d+d & \text{ถ้า } 1+1 \neq 1 \end{cases}$

เราจะได้ว่า $K = D \cup \{a\}$ เป็นเซมิฟิลด์ชนิดที่ 3

ในวิทยานิพนธ์นี้เรายังได้ศึกษา embedding theorem บนเซมิริง เรโซเซมิริง เซมิฟิลด์ และฟิลด์

ให้ (K,+,·) เป็นเซมิฟิลด์ แล้วไพร์มเซมิฟิลด์ของ K คือ เซมิฟิลด์ย่อยที่เล็กที่สุดของ K ในวิทยานิพนธ์นี้ได้ศึกษาทุก ๆ ไพร์มเซมิฟิลด์ของเซมิฟิลด์

Thesis Title	Generalized Semifields
Name	Mr. Sutep Suantai
Thesis Advisor	Dr. Sidney S.Mitchell
Department	Mathematics
Acadamic Year	1985

ABSTRACT

A triple $(S,+,\cdot)$ is said to be a <u>semiring</u> iff S is a set and + and $\cdot$ are binary operations on S such that

(1) $(S,+)$ is a commutative semigroup,

(2) $(S,\cdot)$ is a commutative semigroup,

(3) $(x+y)\cdot z = x\cdot z+y\cdot z$ for all $x,y,z \in S$.

A semiring $(D,+,\cdot)$ is said to be a <u>ratio semiring</u> iff $(D,\cdot)$ is a group.

A semiring $(K,+,\cdot)$ is said to be a <u>generalized semifield</u> iff there exists an element a in K such that $(K\setminus\{a\},\cdot)$ is a group.

In this thesis we still call generalized semifields "semifields".

<u>Theorem</u> Let $(K,+,\cdot)$ be a semifield and a an element in K such that $(K\setminus\{a\},\cdot)$ is a group. Then ($ax = a$ for all $x \in K$) or ($ax = x$ for all $x \in K$) or ($ae \neq a$ and $a^2 \neq a$ where e is the identity of $(K\setminus\{a\},\cdot)$).

From this theorem we have three types of semifields, they are :

(1) $ax = a$ for all $x \in K$ (called type I semifields w.r.t.a),

(2) $ax = x$ for all $x \in K$ (called type II semifields w.r.t.a),

(3) $a \cdot e \neq a$ and $a^2 \neq a$ where e is the identity of $(K \setminus \{a\}, \cdot)$ (called type III semifields).

Let D be a semiring and $d \in D$. Then $x \in S$ is said to be an <u>additive identity of d</u> iff $x+d = d$. The set of all additive identities of d in D denoted by $I_D(d)$.

<u>Theorem</u> Let D be a ratio semiring and a a symbol not representing any element in D. Let $S \subseteq I_D(1)$ be such that either $S = \Phi$ or S is an additive subsemigroup of $I_D(1)$ such that $D \setminus S$ is an ideal of $(D,+)$ if D is infinite . Then we can extend the binary operations of D to $K = D \cup \{a\}$ making K into a semifield of type II such that

(1) $ax = xa = x$ for all $x \in K$,

(2) $a+x = x+a = a$ for all $x \in S$ and

$a+x = x+a = 1+x$ for all $x \in D \setminus S$,

(3) $$a+a = \begin{cases} a \text{ or } 1 & \text{if } 1+1 = 1, \\ 1+1 & \text{if } 1+1 \neq 1. \end{cases}$$

<u>Theorem</u> Let D be a ratio semiring and a a symbol not representing any element in D. Let $d \in D$ and $S \subseteq I_D(d)$ be such that either $S = \Phi$ or S is additive subsemigroup of $I_D(d)$ such that $D \setminus S$ is an ideal of $(D,+)$ if D is infinite. Then we can extend the binary operations of D to $K = D \cup \{a\}$ making K into a semifield of type III such that

(1) $ax = xa = dx$ for all $x \in D$ and $a^2 = d^2$,

(2) $a+x = x+a = a$ for all $x \in S$ and

$a+x = x+a = d+x$ for all $x \in D \setminus S$,

$$(3)\ a+a = \begin{cases} a \text{ or } d & \text{if } 1+1 = 1, \\ d+d & \text{if } 1+1 \neq 1. \end{cases}$$

In this thesis we also study embedding theorems involving semirings, ratio semirings, semifields and fields.

Let $(K,+,\cdot)$ be a semifield. Then the prime semifield of K is the smallest semifield contained in K. In this thesis we show that prime semifields always exist and we determine all prime semifield of semifields.

ACKNOWLEDGEMENT

I am grateful to Dr.Sidney S.Mitchell, my thesis supervisor, for the invaluable guidance considerately offered in the preparation and completion of this thesis. Thanks are due to all of my teachers for their previous lectures.

In particular,deep gratitude and appreciation are shown to my beloved mother, father, brother and sister for their encouragement throughout my graduate study.

CONTENTS