ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนมัธยมศึกษาชั้นปีที่ 3

นายนฤพันธุ์ เพ่งพิศ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน
คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2561

EFFECTS OF ORGANIZING MATHEMATICS LEARNING ACTIVITIES USING MATHEMATICAL INVESTIGATION PROCESS AND OPEN-ENDED QUESTION ON MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING AND REASONING ABILITIES OF NINTH GRADE STUDENTS

Mr. Naruephan Pengpis

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Education in Mathematics Education
Department of Curriculum and Instruction
Faculty of Education
Chulalongkorn University
Academic Year 2018

หัวข้อวิทยานิพนธ์	ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนมัธยมศึกษาชั้นปีที่ 3
โดย	นายนฤพันธุ์ เพ่งพิศ
สาขาวิชา	การศึกษาคณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิณดิษฐ์ ละออปักษิณ

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะครุศาสตร์

(รองศาสตราจารย์ ดร.ศิริเดช สุชีวะ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง)

.... อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิณดิษฐ์ ละออปักษิณ)

.... กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถศาสน์ นิมิตรพันธ์)

นฤพันธุ์ เพ่งพิศ : ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนมัธยมศึกษาชั้นปีที่ 3. (EFFECTS OF ORGANIZING MATHEMATICS LEARNING ACTIVITIES USING MATHEMATICAL INVESTIGATION PROCESS AND OPEN-ENDED QUESTION ON MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING AND REASONING ABILITIES OF NINTH GRADE STUDENTS) อ.ที่ปรึกษาหลัก : ผศ. ดร.จิณดิษฐ์ ละออปักษิณ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด 2) เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดเทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 60 3) เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด 4) เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดเทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 60 โดยกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของโรงเรียนขนาดใหญ่ สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 กรุงเทพมหานคร จำนวน 48 คน เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง คือ แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล คือ แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ วิเคราะห์ข้อมูลโดยหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานและการทดสอบค่าที

ผลวิจัยพบว่า 1) นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 2) นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 3) นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 4) นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

สาขาวิชา	การศึกษาคณิตศาสตร์	ลายมือชื่อนิสิต	....
ปีการศึกษา	2561	ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาหลัก	....

5983334527 : MAJOR MATHEMATICS EDUCATION
KEYWORD: MATHEMATICAL INVESTIGATION PROCESS, OPEN-ENDED QUESTION, MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING, MATHEMATICAL REASONING

Naruephan Pengpis : EFFECTS OF ORGANIZING MATHEMATICS LEARNING ACTIVITIES USING MATHEMATICAL INVESTIGATION PROCESS AND OPEN-ENDED QUESTION ON MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING AND REASONING ABILITIES OF NINTH GRADE STUDENTS. Advisor: Asst. Prof. JINNADIT LAORPAKSIN, Ed.D.

The purposes of this research were: 1) to compare the mathematical problem solving abilities of ninth grade students before and after being taught by organizing mathematics learning activities using mathematical investigation process and open-ended question 2) to compare the mathematical problem solving abilities of ninth grade students after being taught by organizing mathematics learning activities using mathematical investigation process and open-ended question with the criteria of 60% 3) to compare the mathematical reasoning abilities of ninth grade students before and after being taught by organizing mathematics learning activities using mathematical investigation process and open-ended question 4) to compare the mathematical reasoning abilities of ninth grade students after being taught by organizing mathematics learning activities using mathematical investigation process and open-ended question with the criteria of 60%. The subjects were 48 ninth grade students of large school in Secondary Educational Service Area Office 1, Bangkok. The instruments used in the experiment were lesson plans using mathematical investigation process and open-ended question. The research instruments for data collection were mathematical problem solving ability test and mathematical reasoning ability test. The data were analyzed by arithmetic mean, standard deviation and t-test.

The results of the study revealed that: 1) the mathematical problem solving ability of ninth grade students after being taught by organizing mathematics learning activities using mathematical investigation process and open-ended question were higher than those of students before being taught by organizing mathematics learning activities using mathematical investigation process and open-ended question at a .05 level of significance 2) the mathematical problem solving ability of ninth grade students after being taught by organizing mathematics learning activities using mathematical investigation process and open-ended question were higher than criteria of 60% at .05 level of significance 3) the mathematical reasoning ability of ninth grade students after being taught by organizing mathematics learning activities using mathematical investigation process and open-ended question were higher than those of students before being taught by organizing mathematics learning activities using mathematical investigation process and open-ended question at a .05 level of significance 4) the mathematical reasoning ability of ninth grade students after being taught by organizing mathematics learning activities using mathematical investigation process and open-ended question were higher than criteria of 60% at .05 level of significance.

Field of Study:	Mathematics Education	Student's Signature ....
Academic Year:	2018	Advisor's Signature ....

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี เนื่องจากได้รับความเมตตาและความกรุณาอย่างสูงยิ่งจากการดูแลของอาจารย์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. จิณดิษฐ์ ละออปักษิณ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งอาจารย์ได้สละเวลาอันมีค่าของอาจารย์ในการให้คำปรึกษาและคำแนะนำที่เป็นประโยชน์ และได้ตรวจสอบปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ ในการทำวิทยานิพนธ์ด้วยความเอาใจใส่อย่างดี ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.อัมพร ม้าคนอง ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถศาสน์ นิมิตรพันธ์ กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ที่สละเวลาในการเป็นกรรมการสอบ ให้ข้อแนะนำ ข้อเสนอแนะต่าง ๆ ที่เป็นประโยชน์ต่อการทำวิทยานิพนธ์ ทำให้งานวิทยานิพนธ์มีความถูกต้องสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณผู้ทรงคุณวุฒิทุกท่านที่สละเวลาในการตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยให้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น รวมทั้งให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ในการทำเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณผู้อำนวยการโรงเรียนที่ให้ความอนุเคราะห์ในการทดลองใช้เครื่องมือและเก็บรวบรวมข้อมูลวิจัยในครั้งนี้ รวมทั้งคณะครูอาจารย์ที่ให้ความช่วยเหลือตลอดระยะเวลาในการทำวิจัย ขอบคุณนักเรียนที่ให้ความร่วมมือในการทำวิจัยเป็นอย่างดี

สุดท้ายนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ และพี่สาว ครอบครัวเพ่งพิศ เป็นอย่างสูงที่ให้การสนับสนุน คอยดูแล ให้ความช่วยเหลือและเป็นกำลังใจสำคัญในการทำงานตลอดมา ตลอดจนเพื่อน ๆ พี่ ๆ ที่คอยช่วยเหลือ ให้คำปรึกษา ให้กำลังใจ ในการทำวิทยานิพนธ์ด้วยดีเสมอมา

นฤพันธุ์ เพ่งพิศ

สารบัญ

หน้า

สารบัญตาราง

หน้า

สารบัญภาพ

หน้า

บทที่ 1
บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญ

คณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อความสำเร็จในการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 เนื่องจากคณิตศาสตร์ช่วยให้มนุษย์มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระเบียบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างรอบคอบและถี่ถ้วน ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา ได้อย่างถูกต้องเหมาะสม และสามารถนำไปใช้ในชีวิตจริงได้อย่างมีประสิทธิภาพ การศึกษาคณิตศาสตร์จึงจำเป็นต้องมีการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง เพื่อให้ทันสมัยและสอดคล้องกับสภาพเศรษฐกิจ สังคม และความรู้ทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีที่เจริญก้าวหน้าอย่างรวดเร็วในยุคโลกาภิวัตน์ (กระทรวงศึกษาธิการ, 2560)

การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในปัจจุบันให้ได้ผลตามจุดมุ่งหมายของหลักสูตรนั้น จึงจำเป็นต้องใช้เทคนิคและวิธีการสอนที่เหมาะสมทั้งในด้านของเนื้อหาสาระ ด้านการจัดกระบวนการเรียนรู้ รวมถึงด้านตัวครู แต่ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่ผ่านมา แม้ว่านักเรียนจะมีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาสาระเป็นอย่างดี แต่นักเรียนจำนวนไม่น้อยยังต้องเร่งพัฒนาเกี่ยวกับทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ เช่น ความสามารถเกี่ยวกับการแก้ปัญหา การแสดงหรือการอ้างเหตุผล การสื่อสารหรือการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยงระหว่างเนื้อหาคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ต่าง ๆ และความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ปัญหาเหล่านี้ทำให้นักเรียนไม่สามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตประจำวันและในการศึกษาต่อได้อย่างมีประสิทธิภาพ และเมื่อพิจารณาจากรายงานผลการประเมินผลการเรียนรู้จากทั้งในระดับประเทศและระดับนานาชาติ พบว่า นักเรียนไทยมีผลการประเมินวิชาคณิตศาสตร์ที่ต่ำกว่าคะแนนเฉลี่ยมาตรฐาน กล่าวคือ จากผลการทดสอบ Ordinary National Educational Test (O-NET) ซึ่งเป็นการทดสอบความรู้ขั้นพื้นฐานระดับชาติของผู้เรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2561 สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ พบว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนทั่วประเทศคือร้อยละ 30.04 ซึ่งอยู่ในระดับที่ต่ำกว่าครึ่งหนึ่งของคะแนนเต็ม (สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ, 2561) ซึ่งสอดคล้องกับผลการประเมินระดับนานาชาติ จากการทดสอบ PISA (Program for International Student Assessment) ที่ประเมินเกี่ยวกับการรู้เรื่องคณิตศาสตร์ ซึ่งวัดในสามด้าน คือ เนื้อหาคณิตศาสตร์ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ และการใช้คณิตศาสตร์ พบว่าในปี พ.ศ. 2558 นักเรียนไทยมีคะแนนเฉลี่ยการรู้เรื่องคณิตศาสตร์คือ 415 คะแนน ในขณะที่คะแนนเฉลี่ยของประเทศที่เข้าร่วมองค์การเพื่อความร่วมมือทางเศรษฐกิจและการพัฒนา (Organization for Economic Cooperation and Development หรือ OECD) คือ 490 ซึ่งประเทศไทยอยู่ช่วงลำดับที่ 49 - 55 จากจำนวน 72 ประเทศที่เข้าร่วมโครงการ (สถาบันส่งเสริม

การสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2558ก) และสอดคล้องกับผลการประเมินความสามารถด้านคณิตศาสตร์ของโครงการศึกษาแนวโน้มการจัดการศึกษาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ร่วมกับนานาชาติ ปี 2558 (Trend in International Mathematics and Science Study หรือ TIMSS 2015) ซึ่งเป็นการสอบที่ประเทศไทยมีผลคะแนนเฉลี่ยวิชาคณิตศาสตร์จัดอยู่ในอันดับที่ 26 จากประเทศที่เข้าร่วมประเมิน 45 ประเทศ และรัฐที่เข้าร่วม 14 รัฐ โดยประเทศไทยได้คะแนน 431 คะแนน ซึ่งต่ำกว่าค่าเฉลี่ยนานาชาติที่กำหนดไว้ที่ 500 คะแนน (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2558ข) จากการวิเคราะห์ผลการประเมินข้างต้นสะท้อนให้เห็นถึงสภาพปัญหาการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับการศึกษาขั้นพื้นฐานของโรงเรียน ซึ่งการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามปกติในปัจจุบันนั้น แม้นักเรียนจะได้รับความรู้ ความเข้าใจ ตามเนื้อหาสาระทางคณิตศาสตร์ แต่ยังต้องได้รับการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหา การคิดวิเคราะห์ การนำไปใช้หรือทักษะกระบวนการซึ่งเป็นความสามารถที่ต้องใช้ความคิดในระดับสูง เพื่อให้นักเรียนสามารถนำคณิตศาสตร์ไปใช้พัฒนาคุณภาพชีวิตได้อย่างมีประสิทธิภาพ

การแก้ปัญหา (Problem solving) เป็นทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่มีความสำคัญ ซึ่งนอกจากจะเป็นเป้าหมายของการเรียนรู้คณิตศาสตร์แล้ว ยังเป็นส่วนสำคัญในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยนักเรียนต้องได้รับโอกาสอย่างสม่ำเสมอ เพื่อที่จะกำหนดวิธีคิด เผชิญ และต่อสู้กับการแก้ปัญหาที่ซับซ้อน โดยในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ นักเรียนจะได้เรียนรู้วิธีคิด สร้างอุปนิสัยของความเพียรและความใฝ่รู้ใฝ่เรียน รวมทั้งความเชื่อมั่นในตัวเองในการเผชิญกับสถานการณ์ที่ไม่คุ้นเคยทั้งภายในและภายนอกห้องเรียนคณิตศาสตร์ได้เป็นอย่างดี (NCTM, 2000a) ซึ่งสอดคล้องกับ กนิษฐา ศรีวชิโรทัย (2554) ที่ได้กล่าวว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จะช่วยให้ผู้เรียนมีแนวทางการคิดที่หลากหลาย มีนิสัยกระตือรือร้นไม่ย่อท้อ และมีความมั่นใจในการแก้ปัญหาที่เผชิญอยู่ทั้งภายในและภายนอกห้องเรียน ตลอดจนเป็นทักษะพื้นฐานที่ผู้เรียนสามารถนำติดตัวไปใช้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้ตลอดชีวิต นอกจากนี้การแก้ปัญหายังเป็นทักษะที่มีความสำคัญยิ่งและมักรวมทักษะอื่น ๆ ที่สำคัญเข้าไว้ด้วย เช่น การให้เหตุผล การสื่อสารและการตัดสินใจ ผู้ที่มีทักษะการแก้ปัญหาที่ดีมักมีความรู้ ประสบการณ์ ระบบการคิด และการตัดสินที่ดีพอ เนื่องจากการแก้ปัญหาเป็นกระบวนการที่ซับซ้อนและเกี่ยวข้องกับความรู้ ทักษะ และความสามารถหลายอย่าง เช่น ความรู้ในเนื้อหา ความรู้เกี่ยวกับขั้นตอนการทำงาน ความสามารถในการคิดและความสามารถในการประเมินการทำงานของตนเอง (อัมพร ม้าคนอง, 2553) นอกจากนี้การแก้ปัญหายังเป็นกระบวนการที่ผู้เรียนควรจะเรียนรู้ ฝึกฝน และพัฒนาให้เกิดเป็นทักษะขึ้นในตัวนักเรียน

อีกหนึ่งทักษะทางคณิตศาสตร์ที่มีความสำคัญไม่น้อยไปกว่าการแก้ปัญหา คือ การให้เหตุผล ซึ่งการให้เหตุผลมักจะอยู่ในกิจกรรมในชีวิตประจำวันอยู่เสมอ เช่น การใช้เหตุผลในการเลือกซื้อสินค้า ในการเลือกประกอบอาชีพ หรือในการตัดสินคดีความต่าง ๆ การคิดอย่างมีเหตุผลจึงเป็นเครื่องมือ

สำคัญที่นักเรียนสามารถนำติดตัวไปใช้ในการพัฒนาตนเองในการเรียนรู้สิ่งใหม่ ๆ ในการทำงานและการดำรงชีวิต ดังนั้น การคิดอย่างมีเหตุผล จึงเป็นหัวใจสำคัญของการสอนคณิตศาสตร์ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2555ก) และยังเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพในการพัฒนาความคิด และแสดงข้อมูลเชิงลึกที่เกี่ยวข้องกับปรากฏการณ์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น บุคคลที่มีเหตุผลและการคิดวิเคราะห์มีแนวโน้มที่จะสังเกตแบบรูป โครงสร้าง หรือแบบแผน ที่เป็นสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์หรือสถานการณ์ในชีวิตจริง ซึ่งสิ่งที่ได้จากการสังเกตนั้นจะกลายเป็นข้อความคาดการณ์หรือข้ออ้างอิงทั่วไป วิธีการที่จะแสดงให้เห็นว่าข้อความคาดการณ์หรือข้ออ้างอิงเหล่านั้นมีความสมเหตุสมผล นั่นคือ การให้เหตุผล (Reasoning) และการอ้างความสมเหตุผล (Justification) (NCTM, 2000a) การให้เหตุผลในปัจจุบันจึงเป็นเรื่องใกล้ตัวที่ผู้เรียนสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาในการทำงานหรือในชีวิตประจำวันได้มากขึ้น เพื่อให้ผู้เรียนตระหนักว่าความรู้และสิ่งที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่สมเหตุสมผล ซึ่งกระบวนการคิดในลักษณะนี้ผู้เรียนต้องใช้การคิดหลายลักษณะ เช่น การคิดวิเคราะห์ คิดสังเคราะห์ คิดไตร่ตรอง คิดอย่างมีวิจารณญาณ เพื่อให้ได้ข้อสรุปที่ถูกต้อง (อัมพร ม้าคนอง, 2553) มีงานวิจัยจำนวนมากยืนยันว่าการสอนให้นักเรียนเข้าใจหลักการอย่างมีเหตุผลเป็นสิ่งที่ดีกว่าการสอนให้จำ เพราะนักเรียนจะสามารถนำความรู้ไปปรับใช้กับสถานการณ์ใหม่ได้ สามารถจดจำได้ดีและยาวนาน การเป็นผู้รู้จักคิดอย่างมีเหตุผลจะเป็นเครื่องมือสำหรับการเรียนรู้ตลอดชีวิต การเรียนคณิตศาสตร์ในลักษณะที่มีความเป็นเหตุเป็นผลจะส่งผลให้นักเรียนเกิดเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ เกิดความมั่นใจ และสามารถที่จะค้นพบสิ่งใหม่ ๆ ได้ด้วยตัวเอง (ปิยวดี วงษ์ใหญ่, 2548 อ้างถึงในวิษณุ นภาพันธ์, 2551) นอกจากนี้ความสามารถในการให้เหตุผลจะช่วยให้ผู้เรียนพัฒนาความสามารถนอกเหนือไปจากการจดจำข้อเท็จจริง กฎ หรือขั้นตอน วิธีการสอนที่เน้นการให้เหตุผลจะช่วยให้ผู้เรียนเห็นว่าคณิตศาสตร์มีความหมายและสามารถนำไปใช้เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้วิชาอื่น ๆ ได้อีกด้วย (Baroody and Coslick, 1993)

จากปัญหาที่พบและความสำคัญของทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ข้างต้น สะท้อนให้เห็นว่านักเรียนควรได้รับการปรับปรุงและพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลให้สูงขึ้น และเมื่อวิเคราะห์ถึงสาเหตุของปัญหาดังกล่าว พบว่าสาเหตุหนึ่งคือกิจกรรมการเรียนการสอนที่ครูเลือกมาใช้ในการสอนคณิตศาสตร์ยังมีประสิทธิภาพไม่เพียงพอ ซึ่งสอดคล้องกับ ยุพิน พิพิธกุล (2539 อ้างถึงในศิริมา วงษ์สกุลดี, 2558) ที่ได้กล่าวว่า ครูที่เลือกจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีการสอนแบบเก่า ที่เน้นการบรรยายเนื้อหาและฝึกเนื้อหา ซึ่งครูเป็นคนกำหนดรูปแบบการเรียนรู้ให้กับนักเรียน โดยไม่คำนึงถึงความแตกต่างระหว่างนักเรียนในห้องเรียน ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงได้ศึกษากระบวนการต่าง ๆ ที่จะส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผล เพื่อนำมาใช้ในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น ซึ่งกระบวนการหนึ่งที่ผู้วิจัยสนใจและน่าจะสามารถส่งเสริมและพัฒนาทักษะและกระบวนการทาง

คณิตศาสตร์ของนักเรียนได้ นั่นคือ กระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Investigation) ซึ่งเป็นกระบวนการตรวจสอบสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์เพื่อที่จะค้นหาข้อเท็จจริงพื้นฐาน หรือโครงสร้างบางอย่างทางคณิตศาสตร์ (Yeo, 2013) โดยกระบวนการดังกล่าว จะเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ตั้งปัญหาเพื่อสำรวจสถานการณ์และสร้างข้อความคาดการณ์จากสิ่งที่สังเกตได้ด้วยตนเอง และจากการศึกษากระบวนการดังกล่าว ผู้วิจัยพบว่ามีหลักสูตรของสถานศึกษาหลากหลายแห่งให้ความสำคัญกับกระบวนการสำรวจ เช่น หลักสูตรคณิตศาสตร์ประเทศออสเตรเลีย หน่วยงานการประเมินและรายงานทางการศึกษา กระทรวงศึกษาธิการของประเทศนิวซีแลนด์ เพราะว่ากระบวนการดังกล่าวจะช่วยพัฒนาการคิดและการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียน (Jaworski, 1994 อ้างถึงใน Yeo, 2012) และกระบวนการสำรวจยังสะท้อนกระบวนการปฏิบัติงานของนักคณิตศาสตร์ (Civil, 2002) ซึ่ง Yeo (2013) ได้แบ่งกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ออกเป็น 3 ระยะ โดยในแต่ละระยะจะแบ่งย่อยเป็นขั้นตอนหลัก รวมทั้งหมด 8 ขั้นตอน คือ ระยะที่หนึ่ง ระยะเข้าถึง (Entry) ประกอบไปด้วยสองขั้นตอนหลัก คือ 1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา (Understanding the Task) และ 2. ขั้นตั้งปัญหา (Problem Posing) ระยะที่สอง ระยะลงมือปฏิบัติ (Attack) ประกอบไปด้วยสี่ขั้นตอนหลัก คือ 3. ขั้นยกตัวอย่างเฉพาะหรือใช้กลวิธีแบบอื่น ๆ (Specialising or Using Other Heuristics) 4. ขั้นสร้างข้อความคาดการณ์ (Conjecturing) 5. ขั้นพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ (Justifying) และ 6. ขั้นวางนัยทั่วไป (Generalising) ระยะที่สาม ระยะทบทวน (Review) ประกอบไปด้วยสองขั้นตอนหลัก คือ 7. ขั้นตรวจสอบ (Checking) และ 8. ขั้นขยาย (Extension) ด้วยเหตุนี้กระบวนการสำรวจจึงเป็นเครื่องมือสำคัญของการปฏิรูปการศึกษาที่ได้รับการสนับสนุนจากทั่วโลก เพื่อที่จะปรับปรุงการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์และการพัฒนาสมรรถภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน (Baroody and Coslick, 1998 อ้างถึงใน Diezmann, 2005)

การใช้คำถามของครูผู้สอน เป็นอีกส่วนหนึ่งที่ควรจะนำไปบูรณาการร่วมกับการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ เนื่องจากในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ที่ผ่านมาพบว่านักเรียนสามารถหาคำตอบ ท่องจำสูตรและจดจำขั้นตอนเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาเท่านั้น โดยมีครูเป็นผู้สอนและบอกให้ความรู้เพียงอย่างเดียว ทำให้นักเรียนไม่สามารถวิเคราะห์และขยายความคิดออกไปได้ แต่ในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ในปัจจุบันเป็นการเรียนการสอนแบบเน้นผู้เรียนเป็นสำคัญส่งเสริมการสร้างความรู้ด้วยตนเอง และครูเปลี่ยนบทบาทเป็นผู้คอยให้คำชี้แนะ และสอนแบบแนะให้รู้คิด เพื่อส่งผลต่อการเรียนการสอนที่เน้นความเข้าใจต่อผู้เรียน (ปิยวดี วงษ์ใหญ่, 2551) เพราะเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่มีลักษณะเป็นนามธรรม ครูจึงต้องมีหน้าที่ในการอธิบาย ใช้คำถามกระตุ้นความคิดของนักเรียน เพื่อให้นักเรียนเกิดความสนใจและสามารถเรียนรู้คณิตศาสตร์ด้วยความเข้าใจ ดังนั้นการใช้คำถามในการเรียนการสอนจึงเป็นส่วนสำคัญในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์

(ระพีพัฒน์ แก้วอ่ำ, 2559) ซึ่งสอดคล้องกับ ชัยวัฒน์ สุทธิรัตน์ (2555) ที่ได้กล่าวว่า คำถามมีความสำคัญมากในการช่วยกระตุ้นให้ผู้เรียนเกิดการพัฒนาความคิด คำถามจะทำให้ผู้เรียนมีแง่มุมความคิดที่แปลกใหม่ เกิดการอภิปรายอย่างกว้างขวางนำไปสู่ความเข้าใจ และเกิดการเรียนรู้ตามจุดมุ่งหมายที่กำหนดไว้ ซึ่ง Jay McTighe (1991 อ้างถึงในชัยวัฒน์ สุทธิรัตน์, 2555) ได้กล่าวเกี่ยวกับการใช้คำถามไว้ว่า ครูที่ใช้คำถามที่ต้องใช้ทักษะการคิดขั้นสูง จะช่วยยกระดับการเรียนรู้ของผู้เรียนได้ ซึ่งประเภทของคำถามที่ครูควรจะใช้จำเป็นต้องเป็นคำถามที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิดวิเคราะห์ กระตุ้นความสนใจ และเปิดให้นักเรียนได้แสดงความคิดได้อย่างเต็มศักยภาพ จึงจะทำให้การเรียนการสอนมีประสิทธิภาพมากขึ้น คำถามปลายเปิด (Open-ended Question) เป็นคำถามที่เปิดโอกาสให้มีคำตอบได้หลากหลายมากกว่าหนึ่งคำตอบ และดึงเอาแนวคิดที่แตกต่างของนักเรียนออกมา ทำให้นักเรียนสามารถแสดงความคิดได้อย่างอิสระ พัฒนาทักษะการคิด การแก้ปัญหา การให้เหตุผล เน้นให้นักเรียนได้สื่อสารถึงแนวความคิด ทำให้ครูเข้าใจความคิดของนักเรียน ทำให้เกิดบรรยากาศในการเรียนรู้แลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน และทำให้การเรียนการสอนเป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ (ระพีพัฒน์ แก้วอ่ำ, 2559) จากการสำรวจในห้องเรียนปกติเกือบจะทุกวิชาคำถามส่วนใหญ่ของครูจะเป็นคำถามปลายปิดที่ถามข้อเท็จจริง หรือถามเพื่อให้นักเรียนคิดแบบเอกนัย (convergent thinking) ซึ่งเป็นการคิดแบบทิศทางเดียว มีงานวิจัยพบว่า เปอร์เซ็นต์ของการถามคำถามปลายเปิดที่เพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อยในห้องเรียนจะเพิ่มการคิดแบบอเนกนัย (divergent thinking) ซึ่งนักเรียนส่วนมากจะตอบด้วยการคิดไตร่ตรองมากขึ้น และแสดงออกซึ่งการคิดระดับสูงนอกจากนี้ คำตอบดังกล่าวยังนำไปสู่การแลกเปลี่ยนเรียนรู้ระหว่างนักเรียนด้วยกันอีกด้วย (Carin and Sund, 1978) ดังนั้น คำถามปลายเปิดจึงเป็นประเภทของคำถามที่ผู้วิจัยสนใจนำไปประยุกต์ใช้ในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ จากความสำคัญของการใช้คำถามและคำถามปลายเปิด สรุปได้ว่าครูควรมีบทบาทสำคัญในการเลือกใช้คำถามให้ถูกต้อง เพื่อกระตุ้นนักเรียนทุก ๆ คนให้เข้ามามีส่วนร่วมในการอภิปราย พยายามกระตุ้นจินตนาการของนักเรียน และควรใช้คำถามที่เปิดโอกาสสำหรับนักเรียนทุกคนได้ตอบ เพื่อแสดงความคิดของนักเรียนเอง (ชัยวัฒน์ สุทธิรัตน์, 2555)

นอกจากนี้ จากการศึกษาบทความวิชาการและงานวิจัย พบว่า คำถามปลายเปิดเป็นหนึ่งในกลยุทธ์สำคัญที่ถูกนำไปใช้ร่วมกับกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งใช้ควบคู่ไปกับการทำงานเป็นกลุ่มของนักเรียน (Margaret, Darren, and Michael, 2015) ซึ่งคำถามปลายเปิดน่าจะมีส่วนในการส่งเสริมกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น กล่าวคือส่งเสริมให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็นได้อย่างอิสระ เปิดโอกาสในการเลือกใช้วิธีการที่หลากหลายและอภิปรายข้อสรุปด้วยตนเอง ซึ่งสอดคล้องกับแนวทางการพัฒนาทักษะ และการคิดระดับสูงของนักเรียน

ด้วยเหตุทั้งหมดที่ได้กล่าวมาข้างต้น ผู้วิจัยจึงสนใจที่นำกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์และคำถามปลายเปิดมาใช้ร่วมกันในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนมัธยมศึกษาชั้นปีที่ 3 สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติมเรื่อง วงกลม ซึ่งเป็นเนื้อหาที่เหมาะสมกับการจัดกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ เนื่องจากการเรียนการสอนเรื่อง วงกลม มีลักษะส่วนใหญ่อยู่ในรูปของกิจกรรมที่นักเรียนจะต้องลงมือปฏิบัติโดยการสร้าง ศึกษาสำรวจ วิเคราะห์ ให้เหตุผล และสร้างข้อความคาดการณ์ เพื่อให้ได้ข้อสรุปที่เป็นสมบัติหรือทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับวงกลม (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2551ก) ซึ่งเอื้อต่อการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ โดยการวิจัยนี้จะศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลของนักเรียนในช่วงก่อนเรียนและหลังเรียน ซึ่งน่าจะเกิดประโยชน์ต่อการพัฒนาคุณภาพของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ต่อไป

คำถามวิจัย

1. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดช่วยให้นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงขึ้นหรือไม่
2. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดช่วยให้นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สูงขึ้นหรือไม่

วัตถุประสงค์การวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ

1. เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด
2. เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดเทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 60
3. เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด

4. เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดเทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 60

สมมติฐานการวิจัย

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหา ซึ่งผู้วิจัยพบว่า กระบวนการสืบเสาะหาความรู้ (Inquiry-based learning) เป็นหนึ่งในกระบวนการที่มีขั้นตอนและวิธีการคล้ายกับกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ โดยจะเปิดโอกาสให้นักเรียนสร้างความรู้ด้วยตนเอง ผ่านการสำรวจและสังเกตสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ มีรายละเอียดดังนี้

Ng (2003) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Investigation) ของนักเรียนเกรด 6 โปรแกรมความสามารถพิเศษ (Gifted Education Programme) ในประเทศสิงคโปร์ เรื่อง จัตุรัสกล กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชาย จำนวน 23 คน นักเรียนหญิงจำนวน 6 คน เป็นระยะเวลามากกว่า 6 เดือน และทำการเก็บรวบรวมข้อมูลโดยการบันทึกภาพและแบบบันทึกพฤติกรรมของนักเรียน พบว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์เป็นวิธีการที่ส่งเสริมความยืดหยุ่นและความคิดสร้างสรรค์ในการแก้ปัญหาของนักเรียน ช่วยให้นักเรียนสามารถสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์ ช่วยให้นักเรียนมีความอดทนพากเพียรต่อการแก้ปัญหา และกระตุ้นให้นักเรียนสร้างข้อความคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ได้ด้วยตนเอง

วรรณวิสา จันทร์สุนทราพร (2557) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กระบวนการสืบเสาะหาความรู้ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสุคนธีรวิทย์ จังหวัดนครปฐม เรื่อง ความคล้าย กลุ่มตัวอย่างจำนวน 35 คน เป็นระยะเวลา 20 คาบ คาบละ 50 นาที ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลักการจัดการเรียนรู้ด้วยกระบวนการสืบเสาะหาความรู้สูงกว่าก่อนจัดการเรียนรู้ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.1

จุลจิรา ปิ่นมั่น (2558) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการสังเคราะห์รูปแบบกิจกรรมการเรียนรู้แบบสืบเสาะหาความรู้ 5Es ร่วมกับกระบวนการแก้ปัญหาของโพลยาของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนวัดหนองน้ำเขียว จังหวัดชลบุรี เรื่อง การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว กลุ่มตัวอย่างนักเรียนจำนวน 36 คน ใช้เวลาในการทดลอง 11 ชั่วโมง ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์และทักษะการแก้ปัญหาทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียน หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบสืบเสาะหาความรู้ 5Es ร่วมกับกระบวนการแก้ปัญหาของโพลยาสูงกว่าก่อนจัดกิจกรรม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ชุติมา ฉุนอิ่ม และ วนินทร สุภาพ (2558) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์โดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับคำถามปลายเปิดของบาดแฮม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนท่าทองพิทยาคม จังหวัดพิษณุโลก-อุตรดิตถ์ เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว กลุ่มตัวอย่างนักเรียนจำนวน 27 คน ผลการวิจัยพบว่า การคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียน ด้านการแก้ปัญหาและการให้เหตุผล หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับคำถามปลายเปิดของบาดแฮมสูงกว่าก่อนจัดกิจกรรม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียน ด้านการแก้ปัญหาและการให้เหตุผล หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับคำถามปลายเปิดของบาดแฮมสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากงานวิจัยดังกล่าวผู้วิจัยจึงตั้งสมมติฐานในการวิจัยครั้งนี้ว่า

1. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05
2. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดที่ส่งผลต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ มีรายละเอียดดังนี้

Nana and Izlan (2017) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ของนักศึกษา คณะครุศาสตร์ ในประเทศอินโดนีเซีย โดยใช้สถานการณ์ปัญหาที่นักศึกษาไม่เคยพบในห้องเรียนผ่านกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างจำนวน 111 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 56 คน กลุ่มควบคุม 55 คน พบว่า นักศึกษาคณะครุศาสตร์ กลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ส่งผลทางบวกต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

เสาวรัตน์ รามแก้ว (2552) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้การสืบสอบแบบแนะแนวทางของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนพนมศึกษา จังหวัดสุราษฎร์ธานี กลุ่มตัวอย่างจำนวน 66 คน เป็นนักเรียนกลุ่มทดลอง จำนวน 34 คน และนักเรียนกลุ่มควบคุม จำนวน 32 คน ผลการวิจัยพบว่า พฤติกรรมการเรียนรู้มโนทัศน์และความสามารถในการให้เหตุผล

ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมีการพัฒนาขึ้นอย่างเป็นลำดับ นักเรียนสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของข้อมูล สร้างข้อความคาดการณ์ สรุป และตรวจสอบมโนทัศน์ได้ด้วยตัวของนักเรียนเอง

สุดารัตน์ ภิรมย์ราช (2555) ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลของการใช้เทคนิค Think-Talk-Write ร่วมกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสอบของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนราชินีบน กรุงเทพฯ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียน 80 คน กลุ่มทดลอง 40 คน กลุ่มควบคุม 40 คน ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียน หลังการเรียนโดยใช้เทคนิค Think-Talk-Write ร่วมกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสอบสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียนกลุ่มที่เรียนโดยใช้เทคนิค Think-Talk-Write ร่วมกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสอบสูงกว่านักเรียนกลุ่มที่เรียนโดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้ตามปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

พีชาณิกา เพชรสังข์ (2556) ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้รูปแบบการเรียนการสอน 5E ร่วมกับคำถามปลายเปิดของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนพุทธจักรวิทยา จำนวน 60 คน แบ่งเป็นนักเรียนกลุ่มทดลองจำนวน 30 คน และนักเรียนกลุ่มควบคุมจำนวน 30 คน ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการให้เหตุผลและการคิดอย่างมีวิจารณญาณของนักเรียน หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้รูปแบบการเรียนการสอน 5E ร่วมกับคำถามปลายเปิดสูงกว่าก่อนจัดกิจกรรม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และความสามารถในการให้เหตุผลและการคิดอย่างมีวิจารณญาณของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้รูปแบบการเรียนการสอน 5E ร่วมกับคำถามปลายเปิดสูงกว่านักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากงานวิจัยดังกล่าวผู้วิจัยจึงตั้งสมมติฐานในการวิจัยครั้งนี้ว่า

3. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

4. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ขอบเขตของการวิจัย

1. ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนมัธยมศึกษาสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 กรุงเทพมหานคร กระทรวงศึกษาธิการ

2. กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่กำลังศึกษาอยู่ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2561 โรงเรียนมัธยมศึกษาขนาดใหญ่ สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 กรุงเทพมหานคร กระทรวงศึกษาธิการ

3. เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยเป็นส่วนหนึ่งของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง วงกลม

4. ระยะเวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดใช้เวลารวม 12 คาบ (คาบละ 50 นาที)

5. ระยะเวลาในการเก็บรวบรวมข้อมูล ซึ่งประกอบด้วย แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนและหลังเรียน ฉบับละ 1 คาบ (คาบละ 50 นาที) และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนและหลังเรียน ฉบับละ 1 คาบ (คาบละ 50 นาที)

6. ตัวแปรที่ศึกษา

6.1 ตัวแปรต้น ได้แก่

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด

6.2 ตัวแปรตาม ได้แก่

6.2.1 ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

6.2.2 ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

คำจำกัดความที่ใช้ในงานวิจัย

1. กระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Investigation) หมายถึง กระบวนการสำรวจตรวจสอบสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ เพื่อค้นหาข้อเท็จจริง มโนทัศน์ หรือโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ โดยเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ใช้ทักษะการตั้งปัญหา สังเกต สำรวจ เพื่อสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์หรือให้เหตุผลสนับสนุนข้อความคาดการณ์นั้น ๆ แล้ววางนัยทั่วไปโดยกำหนดเป็นกฎหรือหลักการ เพื่อใช้เป็นข้อสรุปของคำตอบในการสำรวจ โดยกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์แบ่งออกเป็น 3 ระยะ 8 ขั้นตอน ตามแนวความคิดของ Yeo (2013) ดังนี้

1.1 ระยะเข้าถึง (Entry) เป็นระยะที่นักเรียนได้เผชิญกับสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย 2 ขั้นตอน คือ ทำความเข้าใจ และตั้งปัญหา

ขั้นตอนที่ 1 ทำความเข้าใจ (Understanding the Task) หมายถึง การทำความเข้าใจและรับทราบข้อมูลที่สถานการณ์กำหนดให้ โดยการอ่านอย่างละเอียด เน้นที่ข้อมูลสำคัญ

และการแสดงข้อมูลให้เห็นเป็นรูปธรรม (Visualising) โดยใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์มาช่วยในการทำความเข้าใจสถานการณ์

ขั้นตอนที่ 2 ตั้งปัญหา (Problem Posing) หมายถึง การกำหนดเป้าหมายในการสำรวจสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์โดยตั้งเป็นปัญหา ซึ่งปัญหาต้องเหมาะสมและสอดคล้องกับบริบทของสถานการณ์ โดยปัญหาที่ตั้งแบ่งเป็น 2 ประเภท คือ ปัญหาทั่วไปสำหรับค้นหาแบบรูป (General problem) และปัญหาเฉพาะ (Specific problem)

1.2 ระยะลงมือปฏิบัติ (Attack) เป็นระยะที่นักเรียนเข้าใจสถานการณ์ดีแล้ว และลงมือแก้ปัญหาประกอบด้วย 4 ขั้นตอน คือ ยกตัวอย่างเฉพาะและใช้กลวิธีแบบอื่น ๆ สร้างข้อความคาดการณ์ พิสูจน์ข้อความคาดการณ์ และวางนัยทั่วไป โดยในระหว่างดำเนินการในระยะนี้ นักเรียนจะใช้กลวิธีและการวางแผนที่หลากหลายเพื่อแก้ปัญหา

ขั้นตอนที่ 3 ยกตัวอย่างเฉพาะหรือใช้กลวิธีแบบอื่น ๆ (Specialising or Using Other Heuristics) หมายถึง การศึกษาข้อมูลที่สถานการณ์กำหนด โดยใช้วิธีการยกตัวอย่างเฉพาะ เช่น การยกตัวอย่างแบบสุ่ม การยกตัวอย่างแบบเป็นระบบ หรือใช้กลวิธีแบบอื่น ๆ เช่น การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive reasoning)

ขั้นตอนที่ 4 สร้างข้อความคาดการณ์ (Conjecturing) หมายถึง การสร้างและอธิบายข้อความคาดการณ์จากข้อมูลในขั้นตอนที่ 3 โดยการสังเกตและค้นหาความสัมพันธ์หรือแบบรูป จากตัวอย่างเฉพาะ หรือจากการใช้กลวิธีแบบอื่น ๆ ซึ่งทั้งสองวิธีเป็นเพียงแค่ข้อความคาดการณ์ที่ยังไม่มีการพิสูจน์

ขั้นตอนที่ 5 พิสูจน์ข้อความคาดการณ์ (Justifying) หมายถึง การแสดงเหตุผลเพื่อตรวจสอบความจริงของข้อความคาดการณ์ ซึ่งมีด้วยกัน 3 ประเภท คือ 1) การทดสอบค้าน (Naive testing) ซึ่งเป็นการพิสูจน์ว่าข้อความคาดการณ์นั้นไม่เป็นความจริงโดยใช้การยกตัวอย่างค้าน 2) การพิสูจน์โดยไม่ใช้หลักพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นการพิสูจน์ว่าข้อความคาดการณ์นั้นเป็นความจริงโดยใช้การอ้างเหตุผลเป็นข้อความ ข้อโต้แย้ง โดยปราศจากสัญลักษณ์และเครื่องหมายการดำเนินการทางพีชคณิต และ 3) การพิสูจน์โดยใช้หลักพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นการพิสูจน์ว่าข้อความคาดการณ์เป็นความจริงโดยใช้การอ้างเหตุผลเป็นข้อความ ข้อโต้แย้ง โดยใช้สัญลักษณ์และเครื่องหมายการดำเนินการทางพีชคณิต

ขั้นตอนที่ 6 วางนัยทั่วไป (Generalising) หมายถึง การพิจารณาและให้เหตุผลว่าข้อความคาดการณ์ที่พิสูจน์แล้วว่าเป็นจริงนั้น สามารถนำไปสร้างเป็นกฎหรือหลักการทั่วไปได้หรือไม่

1.3 ระยะทบทวน (Review) เป็นระยะที่นักเรียนแก้ปัญหาสำเร็จอย่างสมเหตุสมผล ประกอบด้วย 2 ขั้นตอน คือ ตรวจสอบ และขยาย

ขั้นตอนที่ 7 ตรวจสอบ (Checking) หมายถึง การทบทวนและตรวจสอบกระบวนการทำงานทั้งหมดหลังจากแก้ปัญหาเสร็จสิ้นแล้ว โดยนักเรียนจำเป็นต้องย้อนกลับไปสำรวจสิ่งที่เกิดขึ้นเพื่อปรับปรุงแก้ไขในส่วนที่ผิดพลาดให้ถูกต้อง

ขั้นตอนที่ 8 ขยาย (Extension) หมายถึง การขยายความคิดโดยการตั้งปัญหาใหม่ที่น่าสนใจ ซึ่งมีอยู่ด้วยกัน 2 วิธี คือ 1) ตั้งปัญหาใหม่โดยใช้บริบทเดียวกันกับสถานการณ์เดิมและไม่เปลี่ยนแปลงเงื่อนไข 2) ตั้งปัญหาใหม่โดยขยายจากสถานการณ์เดิมและเปลี่ยนแปลงเงื่อนไข

2. คำถามปลายเปิด (Open-ended question) หมายถึง คำถามที่ไม่จำกัดขอบเขตและวิธีคิด มีคำตอบที่ถูกต้องและเป็นไปได้มากกว่าหนึ่งคำตอบ และเปิดโอกาสให้นักเรียนแสดงแนวคิดและวิธีการแก้ปัญหาที่หลากหลาย โดยแนวทางในการหาคำตอบจะต้องใช้ประสบการณ์หรือความรู้ที่เรียนมาแล้วมาประมวลกันเพื่อตอบคำถาม

3. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด หมายถึง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มุ่งเน้นให้นักเรียนได้สำรวจตรวจสอบสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ โดยนักเรียนจะได้รับการสนับสนุน ชี้แนะแนวทาง และกระตุ้นความคิดให้เกิดการวิเคราะห์ข้อมูล ตั้งปัญหา สำรวจและสังเกตความสัมพันธ์ของข้อมูล เพื่อนำไปสร้างเป็นข้อความคาดการณ์ ผ่านการใช้คำถามปลายเปิดของครูในระหว่างขั้นจัดกิจกรรม ซึ่งในชั้นเรียนจะจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 4 ขั้นตอน ปรับปรุงตามแนวคิดของ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2545) โดยในขั้นจัดกิจกรรมจะนำกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ ตามแนวความคิดของ Yeo (2013) มาประยุกต์ใช้ร่วมกับคำถามปลายเปิด ซึ่งมีรายละเอียด ดังนี้

3.1 ขั้นเตรียมความพร้อม

เป็นขั้นเตรียมสภาพผู้เรียนให้พร้อมรับข้อมูลใหม่ ก่อนเข้าสู่เนื้อหาที่จะสอนโดยครูจะใช้วิธีต่าง ๆ ในการนำนักเรียนเข้าสู่บทเรียน เพื่อทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนที่จำเป็นและเกี่ยวข้องกับเรื่องที่ต้องการจะศึกษา และกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความสนใจต่อการเรียน

3.2 ขั้นจัดกิจกรรม

เป็นขั้นที่นำเสนอบทเรียนใหม่และตัวอย่างสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบไปด้วย 4 ขั้นตอน ดังนี้

3.2.1 ทำความเข้าใจเพื่อตั้งปัญหา ในขั้นตอนนี้ นักเรียนจะทำความเข้าใจสถานการณ์โดยการอ่านอย่างละเอียด เน้นข้อมูลสำคัญ และแสดงข้อมูลให้เห็นเป็นรูปธรรมโดยการใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์ เช่น การวาดภาพประกอบ หรือการลองใช้ตัวอย่างแบบสุ่มเพื่อทำความเข้าใจปัญหา หลังจากทำความเข้าใจปัญหาแล้ว นักเรียนจะกำหนดเป้าหมายโดยตั้งปัญหาเพื่อที่จะสำรวจสถานการณ์ โดยครูจะใช้คำถามปลายเปิดเพื่อช่วยนักเรียนทำความเข้าใจสถานการณ์

โดยการเชื่อมโยงข้อมูลที่สถานการณ์กำหนดและกระตุ้นให้นักเรียนพยายามตั้งปัญหาเพื่อสำรวจสถานการณ์

3.2.2 ใช้กลวิธีเพื่อสร้างข้อความคาดการณ์ ในขั้นตอนนี้ นักเรียนจะเลือกใช้วิธีเพื่อสำรวจและศึกษาข้อมูลของสถานการณ์ โดยการยกตัวอย่างเฉพาะหรือการเลือกใช้กลวิธีแบบอื่น ๆ ในระหว่างสำรวจข้อมูลนักเรียนจะต้องสังเกตและค้นหาความสัมพันธ์หรือแบบรูปเพื่อสร้างข้อความคาดการณ์ และอธิบายการได้มาของข้อความคาดการณ์ ซึ่งข้อความคาดการณ์จะเป็นคำตอบของปัญหาที่นักเรียนตั้งไว้ โดยครูจะใช้คำถามปลายเปิดที่ให้นักเรียนสำรวจข้อมูลและสังเกตลักษณะของความสัมพันธ์หรือแบบรูป แล้ววิเคราะห์สิ่งที่สังเกตได้เพื่อสร้างข้อความคาดการณ์

3.2.3 พิสูจน์ข้อความคาดการณ์และวางนัยทั่วไป ในขั้นตอนนี้ นักเรียนจะแสดงเหตุผลเพื่อตรวจสอบความจริงของข้อความคาดการณ์ ซึ่งมีด้วยกัน 2 ประเภท คือ การพิสูจน์โดยไม่ใช้หลักพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และการพิสูจน์โดยใช้หลักพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ถ้านักเรียนพิสูจน์แล้วว่าข้อความคาดการณ์ที่ได้ไม่เป็นความจริง นักเรียนจะต้องกลับไปยังขั้นตอนที่ 3.2.2 เพื่อค้นหาความสัมพันธ์หรือแบบรูป แล้วสร้างข้อความคาดการณ์ใหม่ หลังจากนักเรียนได้ข้อความคาดการณ์ที่พิสูจน์แล้วว่าเป็นจริง นักเรียนจะต้องพิจารณาและให้เหตุผลว่าข้อความคาดการณ์นั้น สามารถนำไปวางนัยทั่วไปแล้วสร้างเป็นกฎหรือหลักการทั่วไปได้หรือไม่ ซึ่งบางครั้งข้อความคาดการณ์ที่พิสูจน์แล้วว่าเป็นจริงอาจไม่สามารถสร้างเป็นกฎหรือหลักเกณฑ์ทั่วไปได้ ครูจะใช้คำถามปลายเปิดที่ให้นักเรียนได้อธิบายวิธีการและเหตุผลในการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ และพิจารณาเพื่อวางนัยทั่วไป

3.2.4 ทบทวนและขยายความคิด ในขั้นตอนนี้ นักเรียนจะทบทวนแต่ละขั้นตอนว่าตนเองปฏิบัติตามคำสั่งของกิจกรรมครบถ้วนหรือไม่ พร้อมทั้งตรวจสอบความถูกต้องของแต่ละขั้นตอนในกิจกรรม หลังจากนั้นนักเรียนจะพิจารณาว่าสามารถที่จะขยายปัญหาโดยการตั้งปัญหาใหม่ที่น่าสนใจเพื่อสำรวจต่อไป หรือจบกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ ครูจะใช้คำถามปลายเปิดเพื่อให้นักเรียนได้ขยายความคิดจากสิ่งที่เพิ่งวางนัยทั่วไปหรือค้นหาความรู้เพิ่มเติม

3.3 ขั้นพัฒนาทักษะ

เป็นขั้นที่นักเรียนจะได้ฝึกการนำความรู้ไปใช้ โดยการนำกฎหรือหลักการที่ได้จากการวางนัยทั่วไปมาประยุกต์ใช้กับปัญหาทางคณิตศาสตร์ในแบบฝึกหัด

3.4 ขั้นสรุปสิ่งที่เรียนรู้

เป็นขั้นที่นักเรียนร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับสิ่งที่ได้เรียนรู้มาทั้งหมด และสรุปเป็นสาระความรู้ที่ได้จากการสอนและการทำกิจกรรม โดยครูจะใช้คำถามที่ให้นักเรียนได้ร่วมกันแสดงความคิดเห็นและลงข้อสรุปร่วมกัน

4. ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการนำความรู้ ขั้นตอน/กระบวนการ และประสบการณ์ที่มีอยู่ไปใช้ในการค้นหาคำตอบของปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งจะต้องมีการวางแผนและดำเนินการแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบและมีประสิทธิภาพ เพื่อทำให้ได้คำตอบที่ถูกต้อง โดยวัดจากแบบวัดความสามารถทางคณิตศาสตร์ ตามความสามารถที่ใช้ในแต่ละขั้นตอนของกระบวนการแก้ปัญหาของ Krulik and Rudnick (1993) ซึ่งปรับปรุงจากแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของ กิตติพันธ์ วิบุลศิลป์ (2560) ซึ่งประกอบด้วย 4 ด้าน ดังนี้

4.1 ด้านความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหา หมายถึง ความสามารถในการระบุข้อมูลสำคัญ การระบุคำถาม และแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลในปัญหาโดยการวาดภาพประกอบ วาดกราฟ สร้างตาราง สร้างสมการ หรืออธิบายโดยใช้ข้อความ

4.2 ด้านความสามารถในการเลือกแผน หมายถึง ความสามารถในการเลือกวิธีการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม

4.3 ด้านความสามารถในการดำเนินการตามแผน หมายถึง ความสามารถในการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้องและเหมาะสมตามแผนที่วางไว้

4.4 ด้านความสามารถในการสะท้อนและขยายผล หมายถึง ความสามารถในการตรวจสอบความถูกต้องและความสมเหตุสมผลของคำตอบ และตั้งปัญหาใหม่ที่น่าสนใจโดยมีความเกี่ยวข้องหรือสัมพันธ์กับบริบทของปัญหาเดิม

ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สามารถวัดออกมาได้เป็นคะแนนจากแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

5. ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการใช้ความรู้และข้อมูลจากปัญหาในการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หาความสัมพันธ์ของข้อมูลและอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล เพื่อนำไปสร้างข้อความคาดการณ์หรือข้อสรุป พร้อมทั้งยืนยันหรือคัดค้านข้อความคาดการณ์ได้อย่างสมเหตุสมผล โดยยึดแนวคิดการให้เหตุผลของ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2555ก) ซึ่งประกอบไปด้วยการให้เหตุผลใน 2 ด้าน ดังนี้

5.1 การให้เหตุผลแบบอุปนัย หมายถึง ความสามารถในการสังเกตข้อเท็จจริงย่อย ๆ แล้วรวบรวมข้อมูลเพื่อหาแบบรูปที่จะนำไปสร้างเป็นข้อความคาดการณ์หรือข้อสรุป แล้วพยายามหากฎหรือหลักการทั่วไป

5.2 การให้เหตุผลแบบนิรนัย หมายถึง ความสามารถในการคิดหาข้อสรุปที่รู้ว่าเป็นจริงหรือยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ แล้วใช้เหตุผลตามหลักตรรกศาสตร์ อ้างจากสิ่งที่รู้ว่าเป็นจริงนั้นเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่เป็นส่วนย่อยหรือผลสรุปที่เพิ่มเติมขึ้นมาใหม่ อย่างสมเหตุสมผล

ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ สามารถวัดออกมาได้เป็นคะแนนจากแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

ประโยชน์ที่ได้รับ

1. เป็นแนวทางสำหรับครูและผู้ที่สนใจในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดไปจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

2. เป็นแนวทางให้แกนักวิจัยรุ่นต่อไปที่สนใจจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดในการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ทั้งในสาขาคณิตศาสตร์และสาขาอื่น ๆ ในแต่ละระดับการศึกษา

3. นักเรียนได้ร่วมกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ที่พัฒนาจากกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด ทำให้นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาและให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ดีขึ้น

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยเรื่อง ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนมัธยมศึกษาชั้นปีที่ 3 ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้า เอกสาร ตำรา บทความ และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำมาประกอบในการวิจัย และได้นำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

ตอนที่ 1 กระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์

1.1 ความหมายของการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์

1.2 ลักษณะของสถานการณ์ที่ใช้ในการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์

1.3 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดของการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์

1.4 ประโยชน์ของการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์

ตอนที่ 2 คำถามปลายเปิด

2.1 ความหมายของคำถามปลายเปิด

2.2 ความสำคัญของคำถามปลายเปิด

2.3 ลักษะและชนิดของคำถามปลายเปิด

2.4 การสร้างคำถามปลายเปิด

2.5 การใช้คำถามในการเรียนการสอน

ตอนที่ 3 ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

3.1 ความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

3.2 กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

3.3 กลยุทธ์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

3.4 การวัดและประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ตอนที่ 4 ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

4.1 ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

4.2 ประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

4.3 การวัดและประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ตอนที่ 5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

5.1 งานวิจัยต่างประเทศ

5.2 งานวิจัยในประเทศ

ตอนที่ 1 กระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์

1.1 ความหมายของกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์

นักการศึกษาและนักวิจัยหลายท่านได้ให้คำอธิบายเกี่ยวกับความหมายของการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

Evans (1987) กล่าวว่า การสำรวจเชิงคณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นกระบวนการเมื่อเทียบกับกระบวนการของการแก้ปัญหา

Ernest et al. (1991) กล่าวว่า การสำรวจเชิงคณิตศาสตร์คือการตรวจสอบสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ครูเป็นผู้นำเสนอหรือนักเรียนเป็นผู้ริเริ่มการสำรวจด้วยตนเอง โดยเริ่มต้นจากปัญหาทางคณิตศาสตร์ หรือปัญหาในชีวิตจริง

Jaworski (1994) กล่าวว่า กระบวนการสำรวจสำหรับการสอนคณิตศาสตร์จะเกี่ยวข้องกับการศึกษาตัวอย่างเฉพาะ การสร้างข้อความคาดการณ์ การพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ และการวางนัยทั่วไป

Delaney (1996) เชื่อว่านักเรียนจะมีความคิดที่เปิดกว้างขึ้นสำหรับกระบวนการสำรวจ

Skovsmose (2001) กล่าวว่า กระบวนการสำรวจจะเปิดโอกาสให้นักเรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอนโดยการสำรวจและอธิบาย

Ponte (2001) กล่าวว่า การสำรวจเชิงคณิตศาสตร์จะเน้นกระบวนการทางคณิตศาสตร์ เช่น การค้นหาวิธีการ การสร้างหรือการนิยาม การทดสอบ การให้เหตุผลและการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ การสะท้อนความคิด และการวางนัยทั่วไป เมื่อแรกเริ่มกระบวนการสำรวจ ปัญหาหรือคำถามที่โจทย์กำหนดจะยังไม่ชัดเจน ซึ่งขั้นตอนแรกที่สำคัญสำหรับเริ่มกระบวนการคือการตั้งคำถามของนักเรียน

Diezmann, Watters, and English (2001) กล่าวว่า การสำรวจเชิงคณิตศาสตร์จะเปิดโอกาสทางความคิดของผู้เรียนในการวิเคราะห์สถานการณ์ ให้เหตุผลในสิ่งที่คิด แสดงความคิดและพิสูจน์ข้อสรุปของตนเอง

Yeo and Yeap (2010) กล่าวว่า การสำรวจเชิงคณิตศาสตร์คือกิจกรรมที่เปิดกว้างในการสำรวจหรือกิจกรรมที่สร้างขึ้นเพื่อชี้นำให้นักเรียนเกิดการค้นพบทางคณิตศาสตร์

Quinnell (2010) ได้อธิบายลักษะของกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ที่นักเรียนต้องเผชิญซึ่งประกอบด้วย การตั้งคำถาม การเก็บรวบรวมข้อมูล การแก้ปัญหา การสร้างหลักการทั่วไป การแลกเปลี่ยนความคิด การอธิบายสิ่งที่ค้นพบ การประเมินและสะท้อนผลที่ได้

Calleja (2011) กล่าวว่า กระบวนการสำรวจเป็นวิธีการสอนที่นักเรียนมีส่วนร่วมกับการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของตนเองและพัฒนาทักษะทางปัญญาผ่านการโต้ตอบในชั้นเรียน

Yeo (2013) กล่าวว่า กระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ คือกระบวนการตรวจสอบปัญหาทางคณิตศาสตร์เพื่อที่จะค้นหาข้อเท็จจริงพื้นฐานหรือโครงสร้างทางคณิตศาสตร์

Nana and Izlan (2017) กล่าวว่า การสำรวจเชิงคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการเรียนรู้ที่เน้นการสำรวจในเชิงลึกของหัวข้อที่สนใจและเชื่อมโยงตัวแทนทางความคิดที่หลากหลาย โดยกระบวนการดังกล่าวจะอยู่บนพื้นฐานความสามารถของนักเรียนแต่ละคน เพื่อให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหา ค้นหาแบบรูป และค้นพบความรู้ด้วยตนเอง นอกจากนี้ยังลดบทบาทของครู โดยนักเรียนจะเลือกใช้กลวิธีหรือการคิดที่แตกต่างด้วยตนเองเพื่อที่จะมุ่งหน้าสู่การแก้ปัญหา

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า กระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการสำรวจตรวจสอบสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ เพื่อค้นหาข้อเท็จจริง มโนทัศน์ หรือโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ โดยเปิดโอกาสให้นักเรียนได้ใช้ทักษะการตั้งปัญหา สังเกต สำรวจ เพื่อสร้างข้อความคาดการณ์และพิสูจน์หรือให้เหตุผลสนับสนุนข้อความคาดการณ์นั้น ๆ แล้ววางนัยทั่วไป โดยกำหนดเป็นกฎหรือหลักการ เพื่อใช้เป็นข้อสรุปของคำตอบในการสำรวจ

1.2 ลักษณะของสถานการณ์ที่ใช้ในการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์

สถานการณ์หรือปัญหาที่เหมาะสมสำหรับกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ จะช่วยส่งเสริมการสำรวจของนักเรียนได้ดียิ่งขึ้น ซึ่งมีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงลักษณะของสถานการณ์หรือปัญหา ไว้ดังนี้

Ernest (2013) กล่าวว่า กระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์จะเริ่มต้นกระบวนการด้วยสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ตัวอย่างเช่น ให้นักเรียนสำรวจตรวจสอบผลรวมของมุมภายในรูปหลายเหลี่ยม หรือปัญหาในชีวิตจริง ตัวอย่างเช่น เราจะกำหนดความสูงของเสาธงในสนามหญ้าของโรงเรียนเรียนได้อย่างไร

Orton and Frobisher (2004) กล่าวว่า สถานการณ์สำหรับการสำรวจ คือ ภาระงานหรือโจทย์ที่มอบหมายให้นักเรียนทำ โดยสถานการณ์ดังกล่าวจะไม่ระบุหรือกำหนดเป้าหมายของสถานการณ์ให้ชัดเจน

Greenes (1996) กล่าวว่า การสำรวจจะนำเสนอสถานการณ์ ปัญหา และคำถามที่ดึงดูดความสนใจเพื่อกระตุ้นความอยากรู้ของนักเรียน

Morgan (1998) กล่าวว่า ปัญหาหรือสถานการณ์สำหรับการสำรวจถูกมองว่าเป็นปัญหารูปแบบใหม่ที่นักเรียนต้องตัดสินใจ วางแผน และเลือกวิธีการหรือความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปใช้แก้ปัญหาด้วยตนเอง

Ponte (2001) กล่าวว่า ปัญหาในการสำรวจจะเป็นปัญหาที่มีโครงสร้างและเปิดกว้างมากกว่าปัญหาทั่วไป ซึ่งจะเป็นสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์เพียงอย่างเดียวหรือเป็นสถานการณ์ที่อ้างถึงบริบทในชีวิตจริง

Bailey (2007) กล่าวว่า ปัญหาสำหรับการสำรวจเป็นปัญหาแบบปลายเปิดหรือเป็นสถานการณ์ที่นำไปสู่การสำรวจค้นหาความรู้หรือวิธีการทางคณิตศาสตร์

Stemn (2008) กล่าวว่า ภาระงานของการสำรวจคือสถานการณ์ที่เกิดขึ้นจริงหรือสถานการณ์ที่ไม่เคยพบในห้องเรียนมาก่อน ซึ่งสถานการณ์เหล่านี้จะเพิ่มความสนใจ ความอยากรู้และความกระตือรือร้นของนักเรียน แล้วส่งผลต่อความอยากเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มมากขึ้น

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า สถานการณ์ที่ใช้ในการสำรวจมีลักษณะเป็นสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์หรือสถานการณ์ในชีวิตจริง ที่เปิดกว้างให้นักเรียนได้ใช้ความคิดอย่างอิสระ และนำไปสู่ข้อค้นพบหรือวิธีการที่หลากหลาย โดยสถานการณ์นั้นจะไม่กำหนดคำถามหรือเป้าหมายที่ชัดเจนให้นักเรียน

1.3 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดของการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์

มีนักการศึกษาหลายท่านกล่าวถึงการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดของการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

Height (1989) ได้เสนอโมเดลวงจรการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ซึ่งประกอบด้วย 8 ขั้นตอน ดังนี้

1 นักเรียนต้องเข้าใจปัญหาและตั้งสถานการณ์เพื่อตรวจสอบโดยการกำหนดรูปแบบเริ่มต้นของปัญหา

2. นักเรียนต้องเก็บรวมรวบข้อมูล เช่น ลองยกตัวอย่าง

3. นักเรียนจัดระเบียบข้อมูลที่ได้และค้นหาแบบรูป

4. นักเรียนกำหนดสมมติฐาน

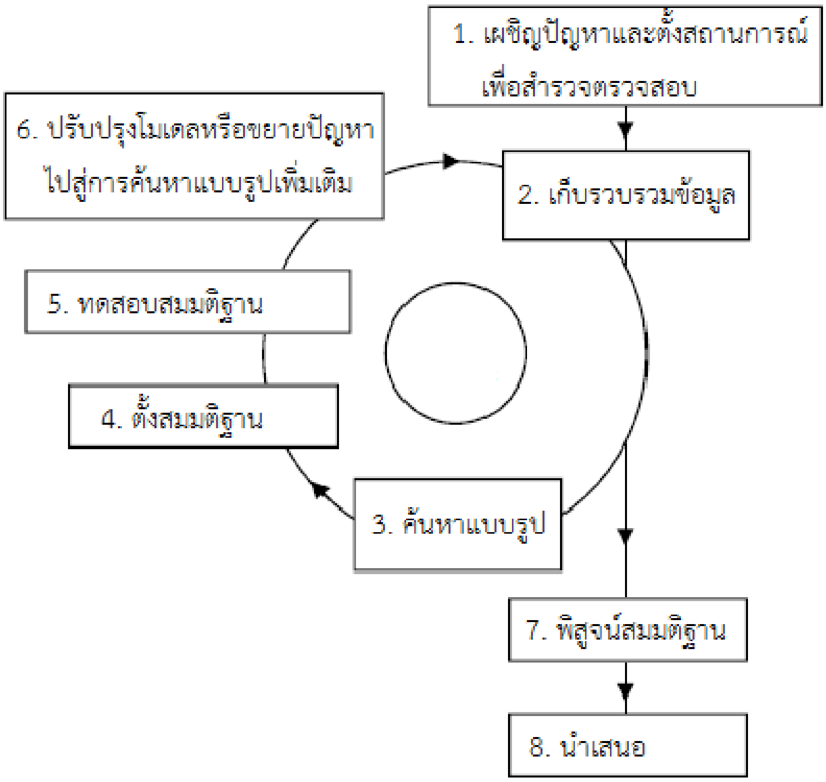
5. นักเรียนทดสอบสมมติฐานโดยใช้พื้นฐานของข้อมูลเชิงประจักษ์

6. นักเรียนปรับปรุงโมเดลของปัญหาหรือขยายขอบเขตซึ่งจะนำไปสู่การค้นหารูปแบบและดำเนินการตามวงจรต่อไป

7. นักเรียนพยายามพิสูจน์สมมติฐานและสร้างเป็นกฎหรือหลักการ

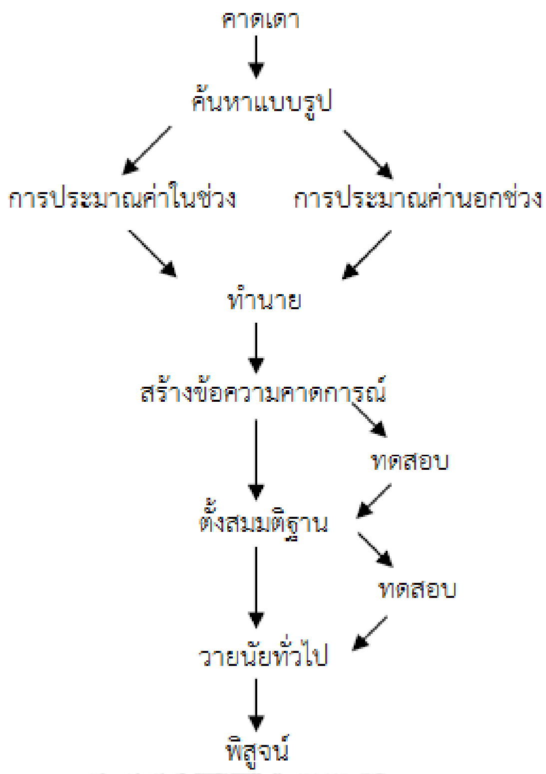
8. นักเรียนนำเสนอรายงานการทำงาน

โดยสามารถแสดงเป็นแผนภาพได้ดังนี้



ภาพประกอบที่ 1 โมเดลวงจรการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ ของ Height
(Height’s Multi-Cyclic Mathematical Investigation Model)

Frobisher (1994) ได้เสนอโมเดลกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ซึ่งประกอบไปด้วย การค้นหาแบบรูป การสร้างและทดสอบข้อความคาดการณ์ ตั้งและทดสอบสมมติฐาน เพื่อวางนัยทั่วไปและพิสูจน์ โดยสามารถแสดงเป็นแผนภาพได้ดังนี้



ภาพประกอบที่ 2 โมเดลกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ ของ Frobisher
(Frobisher’s Mathematical Investigation Model)

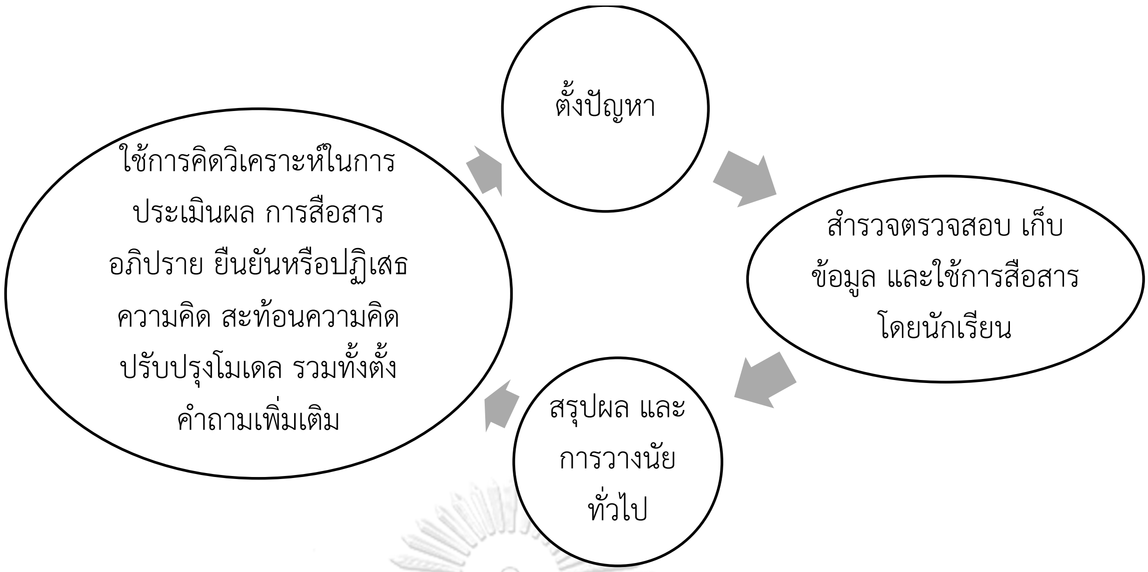
Ponte (2001) ได้เสนอกิจกรรมการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ซึ่งประกอบไปด้วย 3 ขั้นตอน ดังนี้

1. ขั้นเริ่มต้นกิจกรรม ครูจะนำนักเรียนเข้าสู่กิจกรรมการเรียนการสอนโดยการนำเสนอสถานการณ์ปัญหาให้กับนักเรียน

2. ขั้นระหว่างดำเนินกิจกรรม ครูจะสนับสนุนช่วยเหลือนักเรียนในขณะที่นักเรียนตั้งคำถาม แสดงข้อมูลที่โจทย์กำหนด สร้างและทดสอบข้อความคาดการณ์ แล้วพิสูจน์ข้อความคาดการณ์

3. ขั้นอภิปรายสรุป ครูจะให้นักเรียนเริ่มอภิปรายโดยการนำเสนอข้อสรุป วิธีการพิสูจน์ และสิ่งที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการทำงานของนักเรียน

Quinnell (2010) ได้เสนอกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ซึ่งนักเรียนจะได้แสดงความสามารถของตนเองผ่านกระบวนการดังกล่าว โดยเริ่มต้นจาก ตั้งปัญหา เก็บข้อมูล สำรวจและค้นหาคำตอบ แก้ปัญหา อธิบาย ประเมินผลที่ได้ พิสูจน์และสรุปคำตอขอบ รวมถึงตรวจสอบและปรับปรุงกระบวนการของตนเองแล้วอภิปราย โต้แย้ง แสดงความคิด ซึ่งทักษะเหล่านี้เป็นสิ่งที่ควรพัฒนาให้เกิดในห้องเรียนสมัยใหม่ โดยสามารถเขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้



ภาพประกอบที่ 3 กระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ ของ Lorna Quinnell
(Diagram of the investigative approach)

Yeo (2013) ได้เสนอกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ซึ่งประกอบด้วย 3 ระยะ 8 ขั้นตอน ดังนี้

1. ระยะเข้าถึง (Entry) เป็นระยะที่นักเรียนได้เผชิญกับปัญหาหรือสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์

1) ทำความเข้าใจ หมายถึง การทำความเข้าใจและรับทราบข้อมูลที่สถานการณ์กำหนดให้ โดยการอ่านอย่างละเอียด เน้นที่ข้อมูลสำคัญ และการแสดงข้อมูลให้เห็นเป็นรูปธรรม (Visualising) โดยใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์มาช่วยในการทำความเข้าใจสถานการณ์

2) ตั้งคำถาม หมายถึง การกำหนดเป้าหมายในการสำรวจสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์โดยตั้งเป็นปัญหา ซึ่งปัญหาต้องเหมาะสมและสอดคล้องกับบริบทของสถานการณ์ โดยปัญหาที่ตั้งแบ่งเป็น 2 ประเภท คือ ปัญหาทั่วไปสำหรับค้นหาแบบรูป (General problem) และปัญหาเฉพาะ (Specific problem)

2. ระยะลงมือปฏิบัติ (Attack) เป็นระยะที่นักเรียนเข้าใจปัญหาและคำถามดีแล้วและลงมือแก้ปัญหา

3) ยกตัวอย่างเฉพาะหรือใช้กลวิธีแบบอื่น ๆ (Specialising or Using Other Heuristics) หมายถึง การศึกษาข้อมูลที่สถานการณ์กำหนด โดยใช้วิธีการยกตัวอย่างเฉพาะ เช่น การยกตัวอย่างแบบสุ่ม การยกตัวอย่างแบบเป็นระบบ หรือใช้กลวิธีแบบอื่น ๆ เช่น การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive reasoning)

4) สร้างข้อความคาดการณ์ หมายถึง การสร้างและอธิบายข้อความคาดการณ์จากข้อมูลในขั้นตอนที่ 3 โดยการสังเกตและค้นหาความสัมพันธ์หรือแบบรูป จากตัวอย่างเฉพาะซึ่งแบบรูปที่ได้เรียกว่าแบบรูปจากการสังเกต หรือจากการใช้กลวิธีแบบอื่น ๆ ซึ่งทั้งสองวิธีเป็นเพียงแค่ข้อความคาดการณ์ที่ยังไม่มีการพิสูจน์

5) พิสูจน์ข้อความคาดการณ์ หมายถึง การแสดงเหตุผลเพื่อตรวจสอบความจริงของข้อความคาดการณ์ ซึ่งมีด้วยกัน 3 ประเภท คือ 1) การทดสอบค้าน (Naive testing) ซึ่งเป็นการพิสูจน์ว่าข้อความคาดการณ์นั้นไม่เป็นความจริงโดยใช้การยกตัวอย่างค้าน 2) การพิสูจน์โดยไม่ใช้หลักพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นการพิสูจน์ว่าข้อความคาดการณ์นั้นเป็นความจริงโดยใช้การอ้างเหตุผลเป็นข้อความ ข้อโต้แย้ง โดยปราศจากสัญลักษณ์และเครื่องหมายการดำเนินการทางพีชคณิต และ 3) การพิสูจน์โดยใช้หลักพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นการพิสูจน์ว่าข้อความคาดการณ์เป็นความจริงโดยใช้การอ้างเหตุผลเป็นข้อความ ข้อโต้แย้ง โดยใช้สัญลักษณ์และเครื่องหมายการดำเนินการทางพีชคณิต

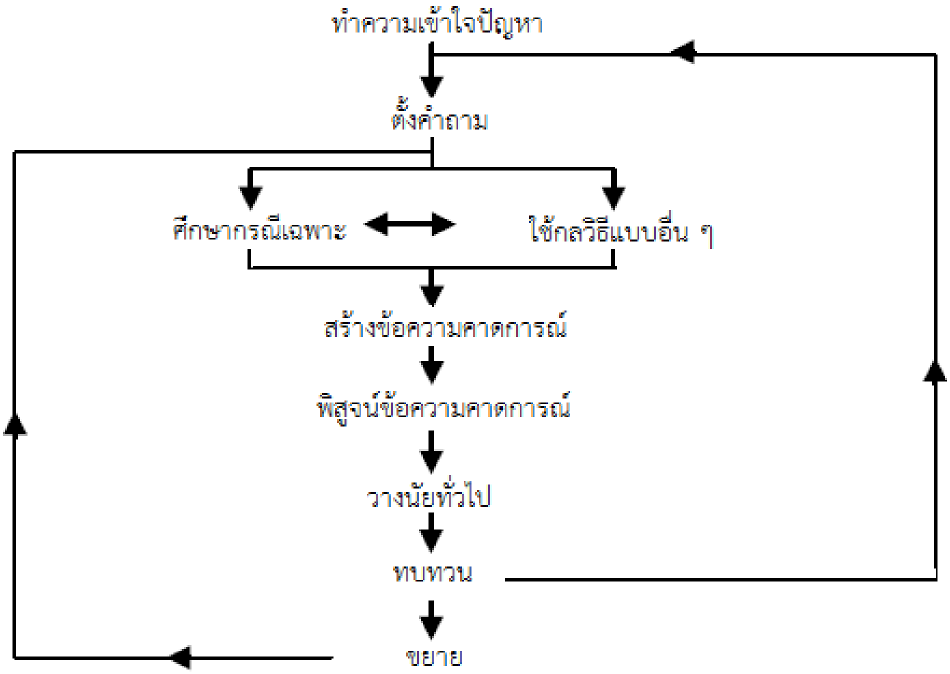
6) วางนัยทั่วไป หมายถึง การพิจารณาและให้เหตุผลว่าข้อความคาดการณ์ที่พิสูจน์แล้วว่าเป็นจริงนั้น สามารถนำไปสร้างเป็นกฎหรือหลักการทั่วไปได้หรือไม่

3. ระยะทบทวน (Review) เป็นระยะที่นักเรียนแก้ปัญหาสำเร็จอย่างสมเหตุสมผล

7) ตรวจสอบ หมายถึง การทบทวนและตรวจสอบกระบวนการทำงานทั้งหมดหลังจากแก้ปัญหาเสร็จสิ้นแล้ว โดยนักเรียนจำเป็นต้องย้อนกลับไปสำรวจสิ่งที่เกิดขึ้นเพื่อปรับปรุงแก้ไขในส่วนที่ผิดพลาดให้ถูกต้อง

8) ขยาย หมายถึง การขยายความคิดโดยการตั้งปัญหาใหม่ที่น่าสนใจ ซึ่งมีอยู่ด้วยกัน 2 วิธี คือ 1) ตั้งปัญหาใหม่โดยใช้บริบทเดียวกันกับสถานการณ์เดิมและไม่เปลี่ยนแปลงเงื่อนไข 2) ตั้งปัญหาใหม่โดยขยายจากสถานการณ์เดิมและเปลี่ยนแปลงเงื่อนไข ซึ่งการขยายปัญหาใหม่จะส่งผลให้กระบวนการทั้งหมดของการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์มีรูปแบบที่แตกต่างออกไป นอกจากนี้ยังสามารถจบกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ได้ตั้งแต่ขั้นตอนที่ 7

โดยแสดงเป็นแผนภาพได้ดังนี้



ภาพประกอบที่ 4 โมเดลการสำรวจของกระบวนการคิด ของ Yeo
(Investigation model of thinking processes)

Nguyen Thi (2014) ได้เสนอโมเดลกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ซึ่งประกอบด้วย 4 ขั้นตอนดังนี้

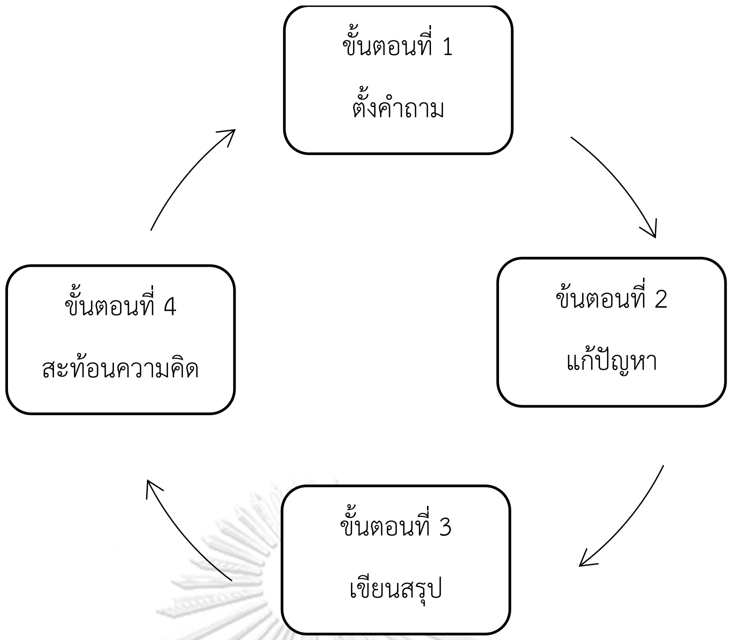
ขั้นตอนที่ 1 นักเรียนเผชิญกับปัญหา ตั้งคำถาม และสร้างข้อความคาดการณ์โดยใช้กิจกรรมการทดลองทางคณิตศาสตร์ตัวอย่างเช่น การยกตัวอย่าง การคาดเดา การทดสอบ หรือใช้ตัวแทนทางคณิตศาสตร์

ขั้นตอนที่ 2 นักเรียนเก็บรวบรวมข้อมูลเพื่อวิเคราะห์แล้วเลือกกลวิธีในการแก้ปัญหาและทดสอบข้อความคาดการณ์

ขั้นตอนที่ 3 นักเรียนเขียนสรุปแล้วสร้างเป็นหลักการทั่วไป

ขั้นตอนที่ 4 นักเรียนแบ่งปันและอธิบายสิ่งที่ค้นพบ สะท้อนความคิด ประเมินความถูกต้องของคำตอบ และตั้งคำถามหรือปัญหาที่สัมพันธ์กับปัญหาเดิมเพื่อดำเนินการสืบสวนสอบสวนต่อไป

โดยแสดงเป็นแผนภาพได้ดังนี้



ภาพประกอบที่ 5 โมเดลกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ ของ Nguyen

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า ผู้วิจัยเลือกใช้โมเดลการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ของ Yeo (2013) มาจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในการวิจัยครั้งนี้ เนื่องจากเป็นโมเดลที่มีรายละเอียดชัดเจนและครอบคลุมทั้งวิธีการและองค์ประกอบที่สำคัญของกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์

1.4 ประโยชน์ของการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์

มีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงประโยชน์ของการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ที่มีต่อการจัดกิจกรรมการเรียนรู้และต่อตัวนักเรียน ไว้ดังนี้

Ponte and Matos (1992) เชื่อว่าการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์มีประโยชน์ในการพัฒนามโนทัศน์และแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

Oliveira, Segurado, Ponte, and Cunha (1997) กล่าวว่า การสำรวจเชิงคณิตศาสตร์มีความสำคัญอย่างมากสำหรับการศึกษาคณิตศาสตร์ เนื่องจาก

1. ช่วยกระตุ้นให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการเรียนรู้
2. ให้นักเรียนเรียนรู้ตามระดับความสามารถของแต่ละคน
3. กระตุ้นวิธีการแบบองค์รวมของความคิด ความสัมพันธ์ และเงื่อนไขพื้นฐานสำหรับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
4. มีความสำคัญที่ทำให้นักเรียนเกิดมุมมองทางคณิตศาสตร์ที่สมบูรณ์

Boaler (1997) กล่าวว่า การสำรวจเชิงคณิตศาสตร์จะพัฒนาความใฝ่รู้ใฝ่เรียนและความสามารถในการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

Ponte, Segurado, and Oliveira (2003) เชื่อว่าการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์จะพัฒนาความสามารถระดับสูงของนักเรียนทำให้นักเรียนมีความเข้าใจที่ดีขึ้นและส่งเสริมกระบวนการให้เหตุผล

Van Reeuwijk and Wijers (2004) เชื่อว่าการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์จะเป็นวิธีการที่มีประสิทธิภาพในการรับข้อมูลเชิงลึกเกี่ยวกับความคิดของนักเรียนและสร้างความตื่นเต้นและสนุกสนานให้กับผู้เรียน

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า การสำรวจเชิงคณิตศาสตร์เป็นประโยชน์อย่างมากในการพัฒนาความสามารถในการคิดและส่งเสริมการให้เหตุผลของนักเรียน และช่วยกระตุ้นให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียนรู้

ตอนที่ 2 คำถามปลายเปิด

2.1 ความหมายของคำถามปลายเปิด

มีองค์กรต่างประเทศ นักการศึกษาต่างประเทศ และนักการศึกษาไทยได้กล่าวถึงความหมายของคำถามปลายเปิดไว้ดังนี้

California State Department of Education (1989) กล่าวว่า คำถามปลายเปิดเป็นคำถามที่กระตุ้นให้นักเรียนได้คิดเกี่ยวกับปัญหาแบบคณิตศาสตร์ และช่วยให้นักเรียนสามารถที่จะสื่อสารความคิดในการแก้ปัญหากับผู้อื่นได้

Stenmark (1991) กล่าวว่า คำถามปลายเปิดที่มีแนวทางเข้าสู่คำตอบได้อย่างหลากหลายและให้นักเรียนตอบได้อย่างหลากหลายวิธี

Hancock (1995) กล่าวว่า คำถามปลายเปิดเป็นคำถามที่ต้องการคำตอบที่เป็นไปได้มากกว่าหนึ่งคำตอบโดยใช้กระบวนการที่หลากหลายในการหาคำตอบ และเปิดโอกาสให้นักเรียนใช้ทักษะในการสื่อสารสื่อความหมายโดยการเขียนหรือพูด เพื่อแสดงความคิดหรือความเข้าใจในคณิตศาสตร์ ซึ่งคำถามปลายเปิดจะเป็นเครื่องมือสำคัญสำหรับครูในการประเมินความเข้าใจเชิงลึกของนักเรียน

Cai, Lane, and Jakabcsin (1996) กล่าวว่า คำถามปลายเปิดเป็นคำถามที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความสามารถในการคิด การให้เหตุผล การสื่อสารและการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ถึงแม้จะมีผู้หาคำตอบได้แล้วนักเรียนคนอื่นก็ยังมีโอกาสหาคำตอบอื่น ๆ ได้อีก ทำให้นักเรียนตอบคำถามได้ตามระดับความสามารถของตนเองซึ่งคำตอบที่ได้จะสะท้อนถึงระดับความเข้าใจของนักเรียนแต่ละคน

Becker and Shimada (1997) กล่าวว่า คำถามปลายเปิดเป็นคำถามที่สร้างขึ้นให้มีคำตอบที่ถูกต้องหลายคำตอบ ซึ่งคำถามประเภทนี้มักพบอยู่เสมอในการสอนตามปกติในชั้นเรียน เมื่อครูใช้

ถามนักเรียนโดยมีจุดมุ่งหมายในการพัฒนาความหลากหลายของวิธีการหรือแนวทางเข้าสู่การหาคำตอบของปัญหาที่กำหนด

Carroll (1999) กล่าวว่า คำถามปลายเปิดจะช่วยให้ครูสามารถตรวจสอบความคิดและความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ของนักเรียนได้อย่างรวดเร็ว

Husain, Bais, Hussain, and Samad (2012) กล่าวว่า คำถามปลายเปิดเป็นรูปแบบของคำถามที่ไม่ต้องการคำตอบที่ถูกต้องเพียงคำตอบเดียว และเป็นคำถามที่จำเป็นต้องใช้การคิดที่ซับซ้อนและวิธีการที่หลากหลายในการตอบ นอกจากนั้นยังเป็นกุญแจสำคัญที่นำไปสู่มโนทัศน์กระบวนการ และทักษะที่นอกเหนือจากเนื้อหาและสาระสำคัญซึ่งถูกกำหนดไว้ในการเรียนการสอนอยู่แล้ว

ดนัย ถนอมจิตร (2553) กล่าวว่า คำถามปลายเปิดหมายถึง คำถามที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงคำตอบหรือวิธีการอย่างหลากหลายในการแก้ปัญหา เป็นคำถามที่กระตุ้นให้คิด โดยนักเรียนที่มีความสามารถต่างกัน สามารถทำหรือแก้ปัญหาได้ตามความสามารถของตนเอง

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2544) กล่าวว่า คำถามปลายเปิดเป็นคำถามที่สร้างขึ้นให้มีคำตอบเปิดกว้าง มีคำตอบที่ถูกต้องหลายคำตอบหรือวิธีการหรือแนวทางหาคำตอบได้หลายวิธี

ปิยะรัตน์ เงาผ่อง (2551) กล่าวว่า คำถามปลายเปิดคือคำถามที่ให้นักเรียนได้แสดงถึงวิธีการแก้ปัญหาที่มีหลายคำตอบหรือมีความหลากหลายของการที่จะให้ได้มาซึ่งคำตอบด้วยความสามารถของตนเอง พัฒนาวิธีการแก้ปัญหาและการสื่อสารความคิดด้วยตนเอง

ระพีพัฒน์ แก้วอ่ำ (2559) กล่าวว่า คำถามปลายเปิดเป็นคำถามที่เปิดโอกาสให้มีคำตอบได้หลากหลายมากกกว่าหนึ่งคำตอบ และดึงเอาแนวคิดที่แตกต่างของนักเรียนออกมา ทำให้นักเรียนสามารถแสดงความคิดได้อย่างอิสระ พัฒนาทักษะการคิด การแก้ปัญหา การให้เหตุผล และเน้นให้นักเรียนได้สื่อสาร สื่อถึงแนวความคิด ทำให้ครูเข้าใจความคิดของนักเรียนและทำให้เกิดบรรยากาศในการเรียนรู้แลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน และทำให้การเรียนการสอนเป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า คำถามปลายเปิด หมายถึง คำถามที่ไม่จำกัดขอบเขตวิธีคิดมีคำตอบที่ถูกต้องและเป็นไปได้มากกว่าหนึ่งคำตอบ และเปิดโอกาสให้นักเรียนแสดงแนวคิดและวิธีการแก้ปัญหาที่หลากหลาย โดยแนวทางในการหาคำตอบจะต้องใช้ประสบการณ์หรือความรู้ที่เรียนมาแล้วมาประมวลกันเพื่อตอบคำถาม

2.2 ความสำคัญของคำถามปลายเปิด

มีนักการศึกษาต่างประเทศและนักการศึกษาไทยได้กล่าวถึงความสำคัญของคำถามปลายเปิดที่มีต่อการคิดของนักเรียน ไว้ดังนี้

Carin and Sund (1978) กล่าวว่า เปอร์เซ็นต์ของการถามคำถามปลายเปิดที่เพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อยในห้องเรียนจะเพิ่มการคิดแบบอเนกนัย (divergent thinking) ซึ่งนักเรียนส่วนมากจะตอบด้วยการคิดไตร่ตรองมากขึ้น และแสดงออกซึ่งการคิดระดับสูง นอกจากนี้ คำตอบดังกล่าวยังนำไปสู่การแลกเปลี่ยนเรียนรู้ระหว่างนักเรียนด้วยกันอีกด้วย

Husain et al. (2012) กล่าวถึงความสำคัญของคำถามปลายเปิดว่า เป็นหนึ่งในวิธีการที่มีประสิทธิภาพในการประเมินผลการเรียนรู้ของนักเรียน ซึ่งคำถามปลายเปิดสามารถให้ข้อมูลเกี่ยวกับสิ่งที่นักเรียนได้เรียนรู้ไปแล้ว ได้ชัดเจนกว่าคำถามแบบเลือกตอบหรือคำถามที่มีคำตอบเป็นตัวกำหนดและให้คำแนะนำที่ดีไปใช้ปรับปรุงกระบวนการสอน

วันเพ็ญ คำเทศ (2558) กล่าวว่า คำถามปลายเปิดมีความสำคัญที่ช่วยกระตุ้นให้นักเรียนมีการอภิปรายเพื่อแลกเปลี่ยนเรียนรู้ คำถามปลายเปิดต้องการให้นักเรียนมีสัดส่วนของโครงสร้างทางปัญญาที่กว้างหรือให้คิดแบบจากแคบไปกว้าง (divergent) หมายความว่าให้คิดกว้างตามลำดับของความเป็นไปได้

ระพีพัฒน์ แก้วอ่ำ (2559) กล่าวว่า การใช้คำถามปลายเปิดของครูจะช่วยดึงดูดความสนใจและเป็นการกระตุ้นให้นักเรียนคิดอย่างหลากหลาย การตั้งคำถามที่มีคำตอบได้หลายคำตอบ จะช่วยให้นักเรียนคิดได้อย่างรอบคอบและมีความระมัดระวังมากขึ้น

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า คำถามปลายเปิดมีความสำคัญต่อการคิดของนักเรียน โดยจะช่วยกระตุ้นให้นักเรียนคิดอย่างหลากหลาย และช่วยให้นักเรียนเกิดการอภิปราย แสดงความคิดเห็น เพื่อแลกเปลี่ยนเรียนรู้ซึ่งกันและกัน

2.3 ลักษณะและชนิดของคำถามปลายเปิด

มีนักการศึกษาหลายท่านได้อธิบายลักษณะและจำแนกประเภทของคำถามปลายเปิด โดยมีเกณฑ์การจำแนกที่แตกต่างกัน ไว้ดังนี้

California State Department of Education (1989) ได้เสนอลักษณะที่สำคัญของคำถามปลายเปิดไว้ 5 ลักษณะดังนี้

1. คำถามปลายเปิดต้องเปิดให้นักเรียนได้แสดงความคิดทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมเพื่อพัฒนาความคิดของนักเรียน

2. คำถามปลายเปิดต้องการให้นักเรียนสร้างคำตอบด้วยตนเอง แทนการเลือกคำตอบเพียงคำตอบเดียวจากตัวเลือกที่ถูกกำหนดไว้

3. คำถามปลายเปิดต้องให้นักเรียนได้แสดงหรืออธิบายถึงความใจที่ลึกซึ่งเกี่ยวกับปัญหา

4. คำถามปลายเปิดจะช่วยกระตุ้นให้นักเรียนแก้ปัญหาได้หลากหลายวิธี

5. คำถามปลายเปิดต้องเปิดกว้างสำหรับการถาม-ตอบ และการอภิปรายในชั้นเรียน

Becker and Shimada (1997) ได้แบ่งคำถามปลายเปิดออกเป็น 3 ประเภทดังนี้

1. คำถามที่เกี่ยวกับการหาความสัมพันธ์ (Finding Relations) คำถามประเภทนี้จะมีเป้าหมายเพื่อให้นักเรียนค้นหากฎเกณฑ์หรือความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ เช่น "87 เป็นจำนวนที่อยู่ในพจน์ใดพจน์หนึ่งของลำดับ 3, 10, 17, 24, 31 หรือไม่เพราะเหตุใด"

2. คำถามที่เกี่ยวกับการแยกประเภท (Classifying) เป็นคำถามเพื่อให้นักเรียนแยกประเภทหมวดหมู่ที่มีลักษณะแตกต่างกันโดยใช้เกณฑ์ของนักเรียนเอง ซึ่งจะนำไปสู่การสร้างความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์

3. คำถามที่เกี่ยวกับการประเมินหรือการประมาณของสิ่งต่าง ๆ หรือสถานการณ์ (Measuring) คำถามในลักษณะนี้มีเป้าหมายเพื่อให้นักเรียนประเมินสถานการณ์ที่เป็นปัญหาใด ๆ ที่เกี่ยวกับการคิดการตัดสินใจโดยใช้คณิตศาสตร์ นักเรียนจะได้รับการคาดหวังว่าจะประยุกต์ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์และทักษะพื้นฐานที่จะนำมาแก้ปัญหา เช่น "เศรษฐีคนหนึ่งมีลูกน้องชื่อบุญมาเป็นคนซื่อสัตย์และทำหน้าที่คอยดูแลกิจการแทนเศรษฐี ดังนั้นเศรษฐีจึงให้รางวัลแก่บุญมา โดยให้เลือกระหว่าง 1) เอาทองคำหนัก 50 บาท 2) รับเงินรายวันโดยเริ่มวันแรก 1 บาท วันที่สอง 2 บาท วันที่สาม 4 บาท ส่วนวันต่อ ๆ ไปจะได้รับเงินเป็นสองเท่าของวันที่ได้รับก่อนหน้านั้นทุกวันและจะได้รับเงินเพิ่มแบบนี้จนครบ 20 วัน บุญมาจะเลือกรับรางวัลแบบใดจงให้เหตุผล"

Foong (2000) ได้กำหนดลักษณะของคำถามปลายเปิดไว้ดังนี้

1. ปัญหาที่มีข้อมูลบางส่วนขาดหายไป

2. การนำเสนอปัญหาใหม่หลังจากแก้ปัญหาตนแบบได้แล้ว

3. ปัญหาที่ให้นักเรียนอธิบายความคิดรวบยอด กฎเกณฑ์ ความผิดพลาด ในการหาคำตอบต่าง ๆ

4. ปัญหาที่กำหนดให้นักเรียนค้นพบ

Partnership for Reform Initiatives in Sciences and Mathematics (PRISM) (2001 อ้างถึงในพีชาณิกา เพชรสังข์, 2556) ได้จัดประเภทของคำถามปลายเปิดไว้ดังนี้

1. คำถามปลายเปิดประเภทให้วิเคราะห์ เป็นคำถามที่มักให้อธิบายหรือยกตัวอย่างเพื่อแสดงถึงความเข้าใจของนักเรียน

2. คำถามปลายเปิดประเภทให้เปรียบเทียบ เป็นคำถามที่มีเป้าหมายให้นักเรียนชี้ถึงความแตกต่างของสิ่งที่สัมพันธ์กันอยู่

3. คำถามปลายเปิดประเภทให้แก้ปัญหา เป็นคำถามที่กระตุ้นให้นักเรียนพยายามหาแนวทางต่าง ๆ ที่จะใช้ในการแก้ปัญหา ทำให้นักเรียนทราบได้ว่านักเรียนมีทักษะการแก้ปัญหามากน้อยเพียงใด

Noda (1983 อ้างถึงในดนัย ถนอมจิตร, 2553) ได้แบ่งชนิดของคำถามปลายเปิดออกเป็น 3 ชนิด ดังนี้

1. กระบวนการเปิด (Process is Open) คำถามปลายเปิดชนิดนี้จะมีการระบุคำถามเพื่อให้นักเรียนได้พยายามหาแนวทางในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย แนวทางการหาคำตอบที่หลากหลายนั้น ทำให้นักเรียนดำเนินกิจกรรมไปตามความสามารถและความสนใจโดยอาศัยการอภิปรายกลุ่ม

2. ผลลัพธ์เปิด (End Product are open) คำถามปลายเปิดชนิดนี้มีคำตอบที่ถูกต้องหลากหลาย

3. แนวทางในการพัฒนาคำถามปลายเปิด (Way do Develop are Open) หลังจากแก้ปัญหาได้แล้วนักเรียนยังสามารถพัฒนาไปสู่ปัญหาใหม่ด้วยการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขหรือองค์ประกอบเดิม

ชัยวัฒน์ สุทธิรัตน์ (2555) กล่าวว่า คำถามปลายเปิดเป็นคำถามที่ให้ตอบแบบอิสระ ซึ่งมีลักษณะของคำถามเพื่อเสริมสร้างการเรียนรู้ กระตุ้นให้เกิดความคิด และคิดในแง่มุมที่แปลกใหม่ ซึ่งมีลักษณะดังต่อไปนี้

1. ฝึกการสนทนา โต้ตอบ เช่น นักเรียนชอบเหตุการณ์ตอนใดในสมัยอยุธยา?

2. ถามหาเหตุผล เป็นการฝึกการให้เหตุผล เช่น ทำไมเธอจึงชอบการทดลอง?

3. กระตุ้นความคิด ฝึกการเชื่อมโยงข้อมูล โดยใช้เหตุผล เช่น ถ้าโลกร้อนมากขึ้นกว่านี้ ประเทศไทยจะเป็นเช่นไร?

ระพีพัฒน์ แก้วอ่ำ (2559) ได้เสนอลักษณะของคำถามปลายเปิดไว้ดังนี้

1. คำถามที่มีคุณค่าทางคณิตศาสตร์ และมีความสำคัญในการจัดการเรียนรู้ ถามเพื่อพัฒนาความคิด แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน และเป็นคำถามที่ครูสามารถวัดความเข้าใจของนักเรียนได้อย่างชัดเจน ว่านักเรียนมีความเข้าใจหรือไม่ ทำให้เกิดบรรยากาศในการจัดการเรียนรู้เพราะคำถามจะเป็นตัวกระตุ้นความคิดของนักเรียนให้คิดค้นหาคำตอบ

2. คำถามที่พัฒนาทักษะการคิด เป็นคำถามที่ส่งเสริมการคิดของนักเรียนด้านการคิดวิเคราะห์ คิดแก้ปัญหา ให้เหตุผล เปรียบเทียบ และคิดเชิงคณิตศาสตร์ ทำให้นักเรียนกล้าแสดงออกทางความคิด เพราะคำถามจะเป็นตัวส่งเสริมทำให้นักเรียนอยากคิดและใฝ่เรียนรู้ เพื่อค้นหาคำตอบ

3. คำถามที่ต้องการอธิบายและสื่อสาร เป็นคำถามที่ต้องการให้นักเรียนได้อธิบายและนำเสนอแนวคิดของตนเอง เปิดโอกาสให้นักเรียนสามารถสื่อสารความคิดของตนเองได้อย่างเต็มที่ เพื่อแสดงถึงความรู้และความเข้าใจ เป็นการส่งเสริมการเรียนรู้แบบร่วมมือทำให้เกิดบรรยากาศแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน

4. คำถามมีจุดประสงค์และเป้าหมายที่ชัดเจน เป็นคำถามที่มีความชัดเจนว่าต้องการให้นักเรียนตอบคำถามแบบใด จึงจะตรงกับความต้องการของคำถาม แม้จะมีคำตอบหลากหลาย มีจุดประสงค์เพื่อสืบค้นความคิดของนักเรียน และสามารถวิเคราะห์ความคิดของนักเรียนได้จากคำตอบที่แสดงมา ว่านักเรียนมีความรู้ความเข้าใจในระดับใด ตรงตามเป้าหมายที่ต้องการหรือไม่

5. คำถามมีหลายคำตอบและหลายวิธีการหาคำตอบ เป็นคำถามที่ไม่ปิดกั้นคำตอบว่ามีเพียงคำตอบเดียวเท่านั้นที่ถูกต้อง ทำให้นักเรียนมีความสนใจในการหาคำตอบ อยากรู้ อยากเห็น และสามารถหาวิธีการหาคำตอบได้อย่างหลากหลาย ซึ่งเป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นได้อย่างอิสระ และพัฒนานักเรียนที่มีความสามารถแตกต่างกันได้

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า คำถามปลายเปิดมีลักษณะเป็นคำถามที่เปิดให้นักเรียนได้วิเคราะห์ เปรียบเทียบ อธิบายและนำเสนอแนวคิดของตนเอง เพื่อกระตุ้นให้เกิดการคิด ฝึกการเชื่อมโยง และใช้เหตุผล ซึ่งสามารถมีคำตอบที่เป็นไปได้หลายคำตอบและหลายวิธีการหาคำตอบ

2.4 การสร้างคำถามปลายเปิด

นักการศึกษาได้เสนอแนวทางและขั้นตอนในการสร้างคำถามปลายเปิด ไว้ดังนี้

Becker and Shimada (1997) กล่าวว่าเป็นการยากในการสร้างคำถามปลายเปิดที่ดีและเหมาะสมกับระดับความสามารถของนักเรียนที่แตกต่างกัน ซึ่งได้ให้ข้อเสนอแนะในการสร้างคำถามปลายเปิด ดังนี้

1. ตระเตรียมสถานการณ์เชิงกายภาพที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรเชิงปริมาณที่สามารถสังเกตความสัมพันธ์ได้

2. เปลี่ยนคำถามจากเดิมที่ให้พิสูจน์ทฤษฎีบทในรูป “ถ้า P แล้ว จะเกิดอะไร” เปลี่ยนเป็น “ถ้า P แล้วความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ ที่นักเรียนพบมีอะไรบ้าง” โดยจะต้องมีการกำหนดขอบเขตของคำว่า “สิ่งต่าง ๆ” ให้เฉพาะเจาะจงขึ้น

3. ในการสอนเกี่ยวกับทฤษฎีบท ควรเริ่มต้นด้วยการยกตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่างก่อนเพื่อให้นักเรียนได้สร้างข้อสรุปด้วยตนเอง

4. แสดงรายการที่เป็นลำดับหรือตารางของข้อมูลต่าง ๆ เพื่อให้นักเรียนได้ค้นหาความสัมพันธ์หรือกฎทางคณิตศาสตร์

5. ใช้ตัวอย่างจริงเพื่อให้นักเรียนได้เห็นภาพ

6. แสดงคำถามที่มีลักษณะคล้ายๆกันหลายคำถามเพื่อให้นักเรียนได้หาคำตอบและหาสมบัติที่คำถามเหล่านั้นมีร่วมกัน

7. จัดสถานการณ์ถึงคณิตศาสตร์ (Quasi - Mathematics) ซึ่งเป็นสถานการณ์ที่นักเรียนสามารถนำคณิตศาสตร์ไปใช้ในการช่วยอธิบายได้

8. แสดงตัวอย่างที่ชัดเจนของโครงสร้างทางพีชคณิต โดยแสดงตัวอย่างข้อมูลเชิงตัวเลขที่ง่ายในการพิจารณาเพื่อให้นักเรียนได้ค้นหากฎทางคณิตศาสตร์

Partnership for Reform Initiatives in Science and Mathematics (2001 อ้างถึงใน พีชาณิกา เพชรสังข์, 2556) ได้แนะนำขั้นตอนการสร้างคำถามปลายเปิดไว้ดังนี้

1. เลือกหัวเรื่องของคำถาม ซึ่งเป็นการกำหนดความคิดรวบยอดที่ต้องการใช้คำถามปลายเปิดประเมินพร้อมทั้งกำหนดเป้าหมายและเลือกส่วนของเนื้อหาบทเรียนที่จะใช้คำถามปลายเปิด

2. พิจารณาสิ่งที่ต้องการให้นักเรียนได้ปฏิบัติโดยต้องคำนึงถึงความเป็นไปได้ของรูปแบบที่ดีที่สุดที่นักเรียนจะใช้ เช่น เปรียบเทียบ อธิบาย ประเมินค่า ทำนาย เป็นต้น และควรมีการเชื่อมโยงเนื้อหากับความคาดหวังของครูที่ต้องการให้นักเรียนแสดงออกมา

3. ใช้รูปแบบ RAMPS ในการสร้างข้อคำถาม ดังนี้

3.1 เขียนสถานการณ์ของข้อคำถาม โดยมีการระบุถึงบทบาทของนักเรียน (Role: R) ผู้อ่านที่นักเรียนจะนำเสนอ (Audience: A) บริบทของปัญหา (Setting: S) ปัญหาที่ต้องการให้นักเรียนแก้ รวมถึงสมมติฐานของปัญหา (ถ้ามี)

3.2 เขียนความคาดหวังที่สัมพันธ์กับการแสดงออกของนักเรียนต่อคำถาม ได้แก่ รูปแบบหรือวิธีการที่เป็นไปได้ที่นักเรียนจะใช้ (Mode: M) เช่น การวางแผน การอธิบาย การสรุป เป็นต้น กำหนดเป้าหมายในการถาม (Purpose: P) เช่น ถามเพื่อประเมินค่าเปรียบเทียบ อธิบาย ทำนาย เป็นต้น นอกจากนี้ควรระบุความคาดหวังเฉพาะที่ต้องการให้นักเรียนอธิบาย ซึ่งอาจระบุให้นักเรียนอธิบายโดยการใช้แผนภาพ ไดอะแกรม หรือรูปภาพ

4. พัฒนาเกณฑ์การให้คะแนน

พร้อมพรรณ อุดมสิน (2547) ได้เสนอแนวทางหนึ่งที่สามารถสร้างคำถามปลายเปิดได้คือการปรับคำถามปลายปิดที่มีอยู่ในแบบเรียนให้เป็นคำถามปลายเปิดโดยใช้วิธีการ เช่น ตัดเงื่อนไขบางประการออกไป การย้ายคำถาม การเพิ่มข้อมูลที่ไม่จำเป็นเข้าไปในคำถาม

ระพีพัฒน์ แก้วอ่ำ (2559) ได้เสนอแนวทางการสร้างคำถามปลายเปิดในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์สามารถสร้างได้ในลักษณะต่าง ๆ ดังนี้

1. คำถามที่ให้นักเรียนสร้างตัวอย่างหรือสถานการณ์ที่สอดคล้องตามเงื่อนไขที่ต้องการ เช่น ให้สร้างจำนวนที่แตกต่างกัน 10 จำนวน มีมัธยฐานเป็น 9 จงอธิบายว่ารู้ได้อย่างไรว่ามีมัธยฐานเป็น 9

2. คำถามที่ให้อธิบายว่าใครตอบได้ถูกต้อง เพราะเหตุใด เช่น ให้พิจารณาแนวคิดของนักเรียนที่อธิบายการหาคำตอบของ 2^8 ว่าใครตอบได้ถูกต้อง จงอธิบาย แก้วอธิบาย 2^8= 2+2+2+2+2+2+2+2 = 16 ชายอธิบาย $2^8 = 2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 256$

3. คำถามที่ให้นักเรียนอธิบายว่าอะไรที่ผิด ทำไมจึงคิดเช่นนั้น เช่น กราฟ $y = (x-3)^2$ เกิดจากการเลื่อนแกนไปทางซ้ายตามแกน x 3 หน่วย ของกราฟ $y = x^2$

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า การสร้างคำถามปลายเปิดนั้นสามารถทำได้โดยการนำคำถามปลายปิดมาสร้างเป็นคำถามปลายเปิด ซึ่งจะยึดบริบทของสถานการณ์เดิมไว้ และตัดเงื่อนไขบางประการออกไป แล้วนำมาถามในแง่มุมใหม่ที่เปิดกว้างมากกว่าเดิม

2.5 การใช้คำถามในการเรียนการสอน

มีนักการศึกษาหลายท่านได้เสนอแนวทางในการใช้คำถามในการเรียนการสอน ไว้ดังนี้

รุ่งทิวา จักร์กร ((2527 อ้างถึงในสุจิตรา โอสถอภิรักษ์, 2538) กล่าวถึงการใช้คำถามที่ควรปฏิบัติ ซึ่งสรุปได้ดังนี้

1. ใช้คำถามด้วยความมั่นใจ คำถามที่ต้องใช้ความคิดอาจยาวเกินกว่าที่จะคิดได้ทันทีในขณะที่สอน ด้วยเหตุนี้ถ้าไม่เตรียมไว้จะขาดความมั่นใจในการถามถามวกไปวนมา จนทำให้นักเรียนไม่อาจหาคำตอบได้

2. มีความกลมกลืนในการถาม ในบางครั้งเวลาใช้อุปกรณ์การสอน หรือสาธิตการทดลอง ครูก็ตั้งใจปฏิบัติภารกิจนั้น ๆ จนเสร็จโดยไม่มีการถามเลย การกระทำเช่นนั้นทำให้ผลของการเรียนรู้จะไม่ดีเท่ากับการใช้คำถามให้กลมกลืนไปกับกิจกรรมนั้น

3. การเลือกถามคำถามนักเรียน ครูควรถามคนที่สมัครใจตอบพอ ๆ กับคนที่ไม่สมัครใจตอบ

4. ไม่ควรเรียกนักเรียนที่มีข้อบกพร่องส่วนตัวบางอย่างเช่น การพูด ติดอ่าง พูดไม่ชัด ครูอาจซักถามเป็นการส่วนตัวดีกว่าจะเรียกให้ตอบในชั้นเรียน

5. ใช้ท่าทางและน้ำเสียงเป็นส่วนประกอบในการถาม เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนสนใจคำถามมากยิ่งขึ้น

6. ใช้คำถามรุกในกรณีที่คำตอบของนักเรียนไม่ชัดเจน การที่ครูรู้จักป้อนคำถามต่อเนื่องไปอีกจะสามารถล้วงความรู้และขยายความคิดของนักเรียนมากยิ่งขึ้น บางครั้งการตอบครั้งแรกของนักเรียนอาจเกิดจากความไม่เข้าใจจริง เมื่อซักถามต่อไปจึงทำให้ครูแก้ไขความเข้าใจผิดของนักเรียนได้

พันทิพา อุทัยสุข (2532 อ้างถึงในชัยวัฒน์ สุทธิรัตน์, 2555) กล่าวว่า การใช้คำถามมีประโยชน์ต่อผู้เรียนอย่างมาก ผู้เรียนจะเกิดการเรียนรู้ได้ดีหรือไม่มากน้อยเพียงใด ขึ้นอยู่กับการถามคำถามของผู้สอนเป็นสำคัญ ซึ่งจะทำให้การเรียนการสอนมีคุณค่า ซึ่งการใช้คำถามที่ดีสรุปได้ดังนี้

1. ไม่เจาะจงผู้ตอบ ในการถามไม่ควรเจาะจงผู้ตอบหรือถามผู้เรียนตามลำดับ เพราะการรู้ตัวมาก่อนว่าจะตอบเมื่อใดนั้น จะทำให้ผู้ตอบไม่สนใจคำถามอื่น ๆ การเรียนรู้จึงไม่เกิดขึ้น

2. ถามให้ทั่วถึง ในการใช้คำถามไม่ควรถามผู้เรียนคนเดิมบ่อยครั้ง เพราะการปฏิบัติดังนี้ผู้เรียนคนอื่น ๆ จะเกิดความน้อยใจที่ผู้สอนไม่เห็นความสำคัญของตน จึงทำให้ไม่สนใจบทเรียน ควรมีการถามทั้งรายบุคคล ถามทั้งชั้น และถามผู้เรียนให้ทั่งถึง

3. ให้โอกาสคิด ในการตั้งคำถามไม่ควรเร่งรัดคำตอบจากผู้เรียนมากเกินไป เมื่อถามไปแล้วควรให้โอกาส ให้เด็กหยุดคิดค้นหาคำตอบบ้าง

4. ใช้ภาษาง่ายแต่เร้าความสนใจ การใช้คำถามควรใช้ภาษาพูดง่าย ๆ แล้วใช้น้ำเสียท่าทางประกอบเพื่อเร้าความสนใจของผู้ตอบ เน้นเสียงในจุดสำคัญของคำถาม ใช้ท่าทางถามแทนคำพูด มีการกวาดสายตาไปรอบ ๆ ชั้นเรียนในขณะถามรับคำตอบด้วยสีหน้า แววตา หรือคำพูด ซึ่งจะเป็นการกระตุ้นให้ผู้เรียนอยากตอบมากขึ้น

5. ให้กำลังใจ ขณะที่ผู้ตอบหยุดคิดหรือลังเลในการที่จะตอบออกไป ผู้สอนควรให้กำลังใจ ไม่ควรคาดคั้นคำตอบหรือแสดงความเบื่อหน่าย หรือเรียกผู้อื่นตอบแทนเพราะจะทำให้ผู้เรียนเสียกำลังใจ

6. เปิดโอกาสให้ตอบ ในการตอบคำถามหนึ่ง ผู้สอนไม่ควรคิดว่าต้องให้เด็กคนเดียวตอบคำถามนั้นควรเปิดโอกาสให้ผู้เรียนหลาย ๆ คนได้ตอบ เพราะจะเป็นการกระจายความคิดและทำให้มีข้อสรุปที่ดี

7. ให้ตอบตรงประเด็น ในการตอบคำถามของผู้เรียนอาจได้คำตอบที่ไม่ตรงกับข้อเท็จจริง หรือไม่ค่อยมีเหตุผลนัก ผู้สอนควรหาวิธีที่ทำให้ผู้เรียนเข้าใจ และสามารถหาคำตอบที่ถูกต้อง ไม่ปล่อยให้ผู้เรียนเข้าใจอย่างผิด ๆ ต่อไปโดยอาจถามคำถามใหม่ หรืออธิบายเพิ่มเติม

8. ชื่นชม ทบทวน หากผู้เรียนตอบถูก ผู้สอนควรแสดงความชื่นชม หากตอบผิด ผู้สอนควรให้กำลังใจและอาจให้เพื่อนช่วยตอบ หากไม่ตอบเลย ผู้สอนควรทวนคำถามหรืออธิบายคำถามซ้ำอีกครั้ง

9. ไม่ถามเองตอบเอง คุณค่าของการสอน โดยใช้คำถามจะหมดไป ถ้าครูเป็นผู้ถามเองตอบเองหรือถามคำถามในลักษณะที่ทบทวนความจำผู้เรียนมากเกินไป

10. เป็นกันเอง สร้างบรรยากาศที่เป็นกันเองในห้องเรียนเพื่อผู้เรียนรู้สึกอยากมีส่วนร่วมในการตอบคำถาม

11. หลากหลายคำตอบ ในการตอบคำถามหนึ่ง ๆ ควรให้ผู้เรียนช่วยกันหาคำตอบในหลาย ๆ แนว ไม่ควรจำกัดเฉพาะคำตอบเดียว

12. ถามให้สัมพันธ์กับประสบการณ์ ใช้คำถามที่ผู้เรียนมีความรู้และประสบการณ์เพียงพอ

13. ไม่ถามคนขาดเรียน ไม่ควรเลือกถามผู้เรียนที่ขาดเรียนตอบหรือบุคคลที่บกพร่องทางการพูด

14. ทบทวนคำถามตนเอง ควรวิเคราะห์คำถามที่เคยใช้ถามไปแล้ว เพื่อนำมาปรับปรุงแก้ไขไว้ในโอกาสต่อไป

สำนักงานคณะกรรมการการประถมศึกษาแห่งชาติ (2543 อ้างถึงในชัยวัฒน์ สุทธิรัตน์, 2555) ได้สรุปการใช้คำถามที่มีประสิทธิภาพจากการสังเกตขณะที่ครูสอนไว้ดังนี้

1. ครูควรละเว้นคำถามที่ต้องการคำตอบว่า ใช่-ไม่ใช่ อะไร ที่ไหน เมื่อไร

2. ครูควรเปลี่ยนคำถามหรือคำพูดใหม่ ถ้านักเรียนยังตอบไม่ได้

3. ครูควรแสดงการยอบรับคำตอบของนักเรียนโดยไม่ต้องหยุด อาจใช้ท่าทางประกอบได้ เช่น พยักหน้า สัมผัสตัว เป็นต้น

4. ครูควรถามคำถามก่อนเรียกชื่อนักเรียนตอบ

5. ครูพยายามให้นักเรียนตอบในลักษณะที่พูดกับเพื่อนทั้งชั้น ไม่ใช่พูดกับครูคนเดียว

6. ครูควรให้การเสริมแรงเมื่อนักเรียนตอบคำถามเสร็จแล้ว

7. ครูไม่ควรแนะแนวทางหรือคำตอบให้นักเรียนทันทีหลังจากถาม

8. ครูควรทอดระยะเวลาหลังถามคำถามแล้ว โดยหยุดหรือทอดระยะชั่วครู่หนึ่งคอยให้นักเรียนตอบ

9. ครูควรกระตุ้นให้ผู้เรียนมีโอกาสตอบคำถามได้หลายคน

10. ครูพยายามฝึกให้นักเรียนฟังและโต้ตอบซึ่งกันและกัน

นภเนตร ธรรมบวร (2544 อ้างถึงในชัยวัฒน์ สุทธิรัตน์, 2555) ได้สรุปการใช้คำถามเพื่อส่งเสริมกระบวนการคิด ไว้ดังนี้

1. ในการถามคำถามเด็กผู้สอนควรให้เวลาแก่เด็กในการคิดและแสดงออกซึ่งความคิดของตน โดยไม่เร่งเด็กให้ตอบคำถามมากเกินไป หรือกลายเป็นผู้ตอบคำถามเอง ถ้าผู้สอนให้เวลาแก่เด็กในการคิดหาคำตอบโดยใช้เวลาในการรอคอยคำตอบยาวขึ้น จำนวนเด็กที่จะตอบคำถามก็จะมีมากขึ้น ความล้มเหลวในการตอบคำถามจะลดน้อยลง การพูดคุย อภิปราย และสรุปองค์ความรู้ของเด็กจะเพิ่มมากขึ้น รวมตลอดจนจำนวนของคำถามที่เด็กถามก็จะมากขึ้นตามไปด้วย

2. คำถามที่ผู้สอนใช้ควรเป็นคำถามปลายเปิด ซึ่งคำถามปลายเปิดจะช่วยส่งเสริมการคิดแก้ปัญหา การเปรียบเทียบและทางเลือก คำถามที่ส่งเสริมให้เด็กแก้ปัญหานั้นจะต้องมีคำตอบที่ถูกอย่างหลากหลาย ไม่ใช่เพียงคำตอบเดียวทั้งนี้เพื่อให้เด็กมีความคิดที่เปิดกว้างสามารถคิดได้หลายทาง

3. คำถามที่ผู้สอนถามควรเป็นคำถามที่ช่วยให้เด็กเชื่อมโยงประสบการณ์เดิมของตนกับการเรียนรู้ปัจจุบันได้

4. ผู้สอนควรกระตุ้นและส่งเสริมให้เด็กเป็นผู้ตั้งคำถามด้วยตนเอง ซึ่งผู้สอนอาจช่วยกระตุ้นเด็กให้ถามคำถามโดยวิธีการต่าง ๆ

5. ผู้สอนควรใช้คำถามของเด็กในการกระตุ้นให้เด็กเรียนรู้และค้นหาคำตอบด้วยตนเอง ซึ่งการส่งเสริมให้เด็กตอบคำถามด้วยตนเอง จะนำสู่การถามคำถามต่อไป เนื่องจากทุกครั้งที่เด็กหาคำตอบได้ด้วยตนเอง เด็กจะมีความเชื่อมั่นในตนเองมากขึ้น เขาจะมีเจตคติในทางบวกต่อตนเอง ซึ่งจะช่วยให้เด็กเรียนรู้ที่จะถามคำถามต่าง ๆ ด้วยตนเองต่อไป

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า การใช้คำถามในการเรียนการสอนที่ดี ครูควรเลือกใช้คำถามที่เหมาะสมกับสถานการณ์ ไม่เจาะจงผู้ตอบ ใช้ภาษาที่ง่ายต่อการทำความเข้าใจของนักเรียน ใช้ประโยคคำถามที่มีลักษณะชัดเจน เปิดโอกาสให้นักเรียนทุกคนได้คิด และกระตุ้นความสนใจของนักเรียน

ตอนที่ 3 ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

3.1 ความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

มีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

Bell (1978) กล่าวไว้โดยสรุปว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นการหาคำตอบของสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ซึ่งผู้หาคำตอบพิจารณาแล้วว่าเป็นปัญหา

Branca (1980) ให้ความหมายของการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ไว้ 3 นัย ดังนี้

1. การแก้ปัญหาเป็นเป้าหมายของการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (Problem Solving as a goal)

2. การแก้ปัญหาเป็นกระบวนการ (Problem Solving as Process)

3. การแก้ปัญหาเป็นทักษะพื้นฐาน (Problem Solving as a Basic Skill)

Polya (1980) กล่าวว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นการหาวิธีการหรือทางออกในสิ่งที่ยุ่งยาก สิ่งที่เป็นอุปสรรค ซึ่งไม่สามารถที่จะคิดหาคำตอบได้ทันทีทันใด การแก้ปัญหาเป็นสำเร็จของสติปัญญาซึ่งเป็นความสามารถเฉพาะบุคคล

Kennedy, Tipps, and Johnson (2007) กล่าวไว้โดยสรุปว่า การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นการแสดงออกของแต่ละบุคคลในการตอบสนองสถานการณ์ปัญหา

NCTM (2000a) กล่าวว่า การแก้ปัญหา หมายถึง การทำงานที่ยังไม่รู้วิธีการที่ได้มาซึ่งคำตอบนั้นในทันที ซึ่งการหาคำตอบนักเรียนต้องนำความรู้ที่มีอยู่ไปเข้าสู่กระบวนการแก้ปัญหา เพื่อที่จะทำให้เกิดความรู้ใหม่ ๆ การแก้ปัญหาไม่ได้มีเป้าหมายเพียงการหาคำตอบแต่อยู่ที่วิธีการได้มาซึ่งคำตอบ นักเรียนควรได้ฝึกฝน ได้แก่ ปัญหาที่ซับซ้อนขึ้น และให้มีการสะท้อนความคิดในการแก้ปัญหาออกมาด้วย

Dossey (2002) ได้กล่าวว่า การแก้ปัญหาเป็น กระบวนการโดยให้ตอบคำถามหรือการจัดการกับสถานการณ์ปัญหาที่ยากและน่าเบื่อสำหรับบุคคลหนึ่ง อาจเป็นเรื่องปกติและการคำนวณที่คล่องแคล่วสำหรับอีกบุคคลหนึ่ง กระบวนการแก้ปัญหาจึงต้องใช้การสร้างองค์ความรู้ตามวิถีทางใหม่ ๆ หรือที่แตกต่างจากเดิมใช้หลักในการวางแผนหรือยุทธวิธีที่จะนำไปสู่เป้าหมายที่ต้องการ และการได้มาซึ่งความรู้ใหม่ที่เป็นไปได้ เกี่ยวกับสถานการณ์นั้น ๆ กระบวนการนี้อาจจะยุ่งยากซับซ้อนขึ้นเมื่อมีการสร้างการเชื่อมโยง ซึ่งนักเรียนจะได้ประสบการณ์จากกระบวนการนี้และสามารถพัฒนายุทธวิธีการแก้ปัญหาที่เหมาะสม

Mayer and Wittrock. (2006) กล่าวว่า การแก้ปัญหา คือ การดำเนินการทางความรู้โดยมุ่งความสนใจไปที่การบรรลุเป้าหมาย โดยที่เป้าหมายนั้นไม่มีวิธีการแก้ปัญหาที่ชัดเจน

ชมนาด เชื้อสุวรรณทวี (2542) กล่าวว่า การคิดเป็นส่วนสำคัญในการแก้ปัญหา การคิดแบบวิเคราะห์จะทำให้นักเรียนมองเห็นจุดเริ่มต้นในการแก้ปัญหา รู้ข้อเท็จจริง สามารถแยกแยะและวิเคราะห์สถานการณ์ เมื่อพิจารณาว่ามีสิ่งใดที่จะช่วยในการแก้ปัญหาได้บ้าง นอกจากนี้แล้วจะทำให้หาความสัมพันธ์และวางแผนในการแก้ปัญหานั้นได้

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2544) กล่าวว่า การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นการหาวิธีการเพื่อให้ได้คำตอบของปัญหา ซึ่งผู้แก้ปัญหาจะต้องใช้ความรู้ ความคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่ผสมผสานกับข้อมูลต่าง ๆ ที่กำหนดในปัญหาเพื่อกำหนดวิธีการหาคำตอบของปัญหา

เบญจมาศ ฉิมมาลี (2550) ได้ให้ความหมายของการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์สรุปได้ว่าการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นการหาวิธีการหรือคำตอบของปัญหาคณิตศาสตร์โดยอาศัยความรู้และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของผู้แก้ปัญหา

อัมพร ม้าคนอง (2553) กล่าวว่า การแก้ปัญหาเป็นการทำงานโดยใช้กระบวนการที่ยังไม่ทราบมาก่อนล่วงหน้าในการหาคำตอบของปัญหา เป็นทั้งทักษะและกระบวนการมักรวมทักษะอื่น ๆ ที่สำคัญเข้าไว้ด้วย นอกจากนั้นการแก้ปัญหายังเป็นกระบวนการที่ซับซ้อน เกี่ยวข้องกับความรู้ ทักษะ ความสามารถ ประสบการณ์ เจตคติ และความเชื่อของผู้แก้ปัญหาด้วย

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การนำความรู้ ขั้นตอน/กระบวนการ และประสบการณ์ที่มีอยู่ไปใช้ในการค้นหาคำตอบของปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งจะต้องมีการวางแผนและดำเนินการแก้ปัญหาอย่างเป็นระบบและมีประสิทธิภาพ เพื่อทำให้ได้คำตอบที่ถูกต้อง

3.2 กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

มีนักการศึกษาหลายท่านได้เสนอกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยมีขั้นตอนที่แตกต่างกันออกไป ไว้ดังนี้

Polya (1957) ได้เสนอกระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ว่าประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. ขั้นทำความเข้าใจปัญหา ขั้นตอนนี้เป็นการวิเคราะห์เพื่อทำความเข้าใจปัญหา ระบุส่วนสำคัญของปัญหา และสามารถบอกได้ว่าโจทย์กำหนดสิ่งใดมาให้

2. ขั้นวางแผนแก้ปัญหา ขั้นตอนนี้เป็นการเชื่อมโยงระหว่างข้อมูลในปัญหากับสิ่งที่ต้องการจะทราบ แล้วนำความสัมพันธ์นั้นมาผสมผสานกับประสบการณ์ในการแก้ปัญหา เพื่อกำหนดแนวทางหรือแผนในการแก้ปัญหา แล้วเลือกวิธีการแก้ปัญหาที่เหมาะสม

3. ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา ขั้นตอนนี้เป็นการลงมือปฏิบัติงานตามแผนที่วางไว้ ถ้าแผนหรือวิธีการที่เลือกไว้ไม่สามารถแก้ปัญหาได้ จะต้องค้นหาแผนหรือวิธีการใหม่อีกครั้ง จนสามารถหาคำตอบได้

4. ขั้นตรวจสอบ ขั้นตอนนี้เป็นการตรวจสอบคำตอบและความถูกต้องของวิธีการแก้ปัญหา ว่าสอดคล้องกับข้อมูลและเงื่อนไขที่กำหนดในปัญหาไว้หรือไม่ และมีความสมเหตุสมผลหรือไม่

Helton (1958 อ้างถึงในสุพัตรา จอมคำสิงห์, 2552) กล่าวถึงกระบวนการในการแก้ไขปัญหาคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. อ่านโจทย์ให้เข้าใจว่าโจทย์ต้องการอะไร และต้องการให้หาตัวไม่ทราบค่าเพียงตัวเดียวหรือมากกว่านั้น
2. กำหนดสัญลักษณ์แทนตัวที่ไม่ทราบค่า
3. หาความสัมพันธ์ของจำนวนต่าง ๆ ที่สอดคล้องกับโจทย์
4. เขียนสมการ
5. แก้สมการ
6. สรุปคำตอบและให้ความหมายของคำตอบ เช่น บอกหน่วย บอกคุณภาพ
7. ตรวจสอบคำตอบ

Marks, Purdy, and Kinney (1965) กล่าวถึงกระบวนการในการสอนแก้ปัญหา สรุปได้ดังนี้

1. ค้นหาว่าโจทย์ให้ข้อมูลอะไร และโจทย์ถามอะไร
2. ค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่ให้มาเพื่อจะนำไปสู่สิ่งที่โจทย์ต้องการให้หา
3. วิเคราะห์ข้อมูลและหาความสัมพันธ์เพื่อหาผลลัพธ์
4. ตรวจความถูกต้อง

LeBlanc (1977) ได้เสนอกระบวนการในการสอนแก้ปัญหาประกอบไปด้วย 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. การเข้าใจปัญหา เพื่อช่วยให้นักเรียนเข้าใจในปัญหาครูควรถามคำถามเพื่อให้นักเรียนหาว่าอะไรคือข้อมูลหรือเงื่อนไขที่ปัญหาให้มา และในที่สุดต้องทราบว่าปัญหาถามอะไร
2. ครูนำอภิปรายในการแก้ปัญหา ครูเสนอแนะกลวิธีที่เป็นไปได้ให้นักเรียนดูจากนั้นให้นักเรียนตัดสินใจเลือกเอาวิธีใดวิธีหนึ่ง
3. ลงมือแก้ปัญหา กลวิธีที่ใช้ในขั้นที่ 2 จะถูกนำออกมาใช้ บางครั้งแผนที่วางไว้ในขั้นที่ 2 อาจนำไปสู่คำตอบได้ ถ้าไม่เป็นเช่นนั้นนักเรียนจะต้องย้อนกลับไปสู่ขั้นที่ 2 อีก
4. ทบทวนปัญหาและคำตอบ ขั้นนี้เป็นขั้นที่สำคัญมากที่สุด โดยแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะ คือลักษณะแรกเป็นการมองขั้นตอนต่าง ๆ ย้อนกลับ และลักษณะที่สองเป็นการขยายสถานการณ์ปัญหาเพื่อจะนำไปใช้ในการแก้ปัญหาต่อไป

Krulik and Reys (1980) ได้เสนอกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. ทำความเข้าใจปัญหา เป็นขั้นที่พิจารณาว่าข้อมูลหรือเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมาให้นั้น มีอะไรบ้าง เพียงพอสำหรับการแก้ปัญหาหรือไม่ และสิ่งที่โจทย์ถามคืออะไร
2. วางแผนการแก้ปัญหา เป็นขั้นที่หาความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่โจทย์บอกกับสิ่งที่โจทย์ถาม ค้นหาทฤษฎี กฎ สูตร บทนิยาม เพื่อนำมาใช้วางแผนในการแก้ปัญหา
3. ดำเนินการตามแผน เป็นขั้นที่ดำเนินการตามแผนที่วางไว้
4. ตรวจสอบ เป็นขั้นที่ตรวจสอบการดำเนินการแก้ปัญหาทั้งหมดว่าได้ผลเป็นไปตามที่ต้องการครบถ้วนหรือไม่

Bell (1978) สรุปกระบวนการในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. เสนอปัญหาในรูปทั่วไป
2. เสนอปัญหาอีกครั้งในรูปแบบที่แสดงการแก้ปัญหา
3. ตั้งสมมติฐานและเลือกวิธีดำเนินการเพื่อให้ได้คำตอบของปัญหา
4. ตรวจสอบสมมติฐานและดำเนินการแก้ไขปัญหาเพื่อให้ได้คำตอบที่เป็นไปได้

Charles (1985) ได้เสนอขั้นตอนกระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ซึ่งประกอบไปด้วย 5 ขั้นตอน ดังนี้

1. ทำความเข้าใจปัญหา
2. การเลือกและเก็บข้อมูลที่ต้องการใช้แก้ปัญหา
3. การเลือกวิธีการหาคำตอบ
4. การตอบปัญหา
5. การประเมินความสมเหตุสมผลของปัญหา

Krulik and Rudnick (1993) ได้เสนอกระบวนการที่ใช้ในการแก้ปัญหาไว้ ดังนี้

1. ขั้นการอ่านและคิด (Read and think) หมายถึง ขั้นตอนในการระบุข้อเท็จจริง ระบุคำถาม สร้างภาพสถานการณ์และการกระทำในสถานการณ์ปัญหา และเปลี่ยนข้อความปัญหาให้เป็นข้อความของตนเอง

2. ขั้นการสำรวจและวางแผน (Explore and plan) หมายถึง ขั้นตอนในการรวบรวมและจัดระเบียบข้อมูล พิจารณาข้อมูลที่จำเป็นและไม่จำเป็นในการแก้ปัญหา พิจารณาความเพียงพอของข้อมูลที่ใช้ในการแก้ปัญหา และนำข้อมูลที่ได้มาสร้างแผนภูมิ ตาราง กราฟ หรือภาพประกอบการแก้ปัญหา

3. ขั้นการคัดเลือกกลยุทธ์ (Select a strategy) หมายถึง ขั้นตอนในการเลือกใช้กลยุทธ์หรือวิธีการที่เหมาะสมในการแก้ปัญหา

4. ขั้นการหาคำตอบ (Find an answer) หมายถึง ขั้นตอนในการประมาณค่าคำตอบ และการใช้ทักษะต่าง ๆ ในการหาคำตอบ เช่น ทักษะทางการคำนวณ ทักษะทางพีชคณิต และทักษะทางเรขาคณิต

5. ขั้นการสะท้อนและขยายผล (Reflect and extend) หมายถึง ขั้นตอนในการตรวจสอบความถูกต้อง ความเหมาะสม และความสมเหตุสมผลของคำตอบ ค้นหาวิธีการแก้ปัญหาด้วยทางเลือกอื่น ๆ บอกการเปลี่ยนแปลงของคำตอบเมื่อข้อเท็จจริงในสถานการณ์ปัญหาเปลี่ยนไป และขยายคำตอบไปสู่กรณีทั่วไปหรือมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ อภิปรายเกี่ยวกับวิธีแก้ปัญหา และสร้างปัญหาที่น่าสนใจที่แตกต่างจากปัญหาเดิม

Sternberg and Baron (1987) ได้กล่าวถึงขั้นตอนของกระบวนการแก้ปัญหาไว้ 7 ขั้นตอน ดังนี้

1. การระบุปัญหา (Problem Identification) เพื่อกำหนดขั้นตอนในการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้อง ควรระบุสาเหตุของปัญหาที่แท้จริงก่อน

2. การจำกัดความของปัญหา (Definition of Problem) เพื่อสามารถระบุปัญหาที่แท้จริงได้แล้ว จำเป็นต้องให้คำจำกัดความของปัญหา เพราะหากไม่มีการให้คำจำกัดความหรือคำจำความของปัญหานั้นคลาดเคลื่อนไปจากความเป็นจริง โอกาสในการแก้ปัญหาได้สำเร็จจะลดน้อยลง

3. การสร้างกลยุทธ์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหา (Constructing Strategy for Problem Solving) เป็นขั้นตอนในการวางแผนกลยุทธ์ต่าง ๆ และวิเคราะห์องค์ประกอบของปัญหาที่ซับซ้อนให้เป็นขั้นตอน หรือสังเคราะห์องค์ประกอบหลายชนิดที่มีความสัมพันธ์กันแล้วนำมาเชื่อโยงกัน เพื่อใช้ประโยชน์ในการแก้ปัญหา

4. การจัดระบบข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับปัญหา (Organizing Information about a Problem) เป็นการจัดระเบียบข้อมูลที่มีอยู่ เพื่อนำมาใช้ในการดำเนินการแก้ปัญหาให้ประสบผลสำเร็จ หรือการสร้างภาพในใจที่ช่วยในการกำหนดลำดับขั้นตอนในการแก้ปัญหาให้ชัดเจนยิ่งขึ้น

5. การจัดสรรทรัพยากรที่ใช้ในการแก้ปัญหา (Allocation of Resources) คนส่วนใหญ่จะเผชิญหน้ากับปัญหาโดยอยู่ในขอบเขตของทรัพยากรที่จำกัดในด้านต่าง ๆ การแก้ปัญหาแต่ละปัญหาต้องใช้ทรัพยากรในปริมาณที่แตกต่างกัน

6. การตรวจสอบการแก้ปัญหา (Monitoring Problem Solving) การแก้ปัญหาที่มีประสิทธิภาพจะต้องมีการตรวจสอบกระบวนการแก้ปัญหาอยู่ตลอดเวลา เพื่อให้รู้แน่ชัดว่าขั้นตอนต่าง ๆ ดำเนินไปอย่างถูกต้องและนำไปสู่เป้าหมายที่ต้องการหรือไม่

7. การประเมินผลการแก้ปัญหา (Evaluation Problem Solving) เป็นการประเมินความสำเร็จและทบทวนการทำงานในขั้นตอนต่าง ๆ

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า กระบวนการแก้ปัญหาเป็นขั้นตอนการแก้ปัญหาเพื่อนำไปสู่คำตอบของปัญหา ซึ่งมีด้วยกันหลายรูปแบบ ขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์และการนำไปใช้ สำหรับงานวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยเลือกใช้กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยยึดตามแนวคิดของ Krulik and Rudnick (1993) ซึ่งประกอบไปด้วย 5 ขั้นตอน คือ 1) ขั้นการอ่านและคิด 2) ขั้นการสำรวจและวางแผน 3) ขั้นการคัดเลือกกลยุทธ์ 4) ขั้นการหาคำตอบ และ 5) ขั้นการสะท้อนและขยายผล

3.3 กลยุทธ์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ผู้เรียนควรจะได้เรียนรู้และฝึกฝนทักษะการใช้ยุทธวิธีต่าง ๆ ให้ชำนาญเพื่อจะได้เป็นพื้นฐานในการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ต่อไป ซึ่งมีนักการศึกษาหลายท่านได้เสนอกลยุทธ์ที่ใช้ในการแก้ปัญหา ไว้ดังนี้

Musser and Shaughnessy (1980) ได้เสนอกลวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาในโรงเรียนไว้ 5 ประการ ดังนี้

1. การทดสอบวิธีต่าง ๆ และตัดวิธีที่ผิดทิ้ง (Trial and error) เป็นวิธีการแก้ปัญหาที่ตรงที่สุด ประยุกต์ใช้การดำเนินการทางคณิตศาสตร์กับข้อมูลที่กำหนดให้ วิธีการนี้นำไปสู่เรื่องราวที่สัมพันธ์กับความรู้และความรู้ที่ใช้นั้นไม่กว้างมากนัก

2. การค้นหาแบบรูป (Patterns) เป็นการหาคำตอบโดยสังเกตจากตัวอย่างข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ คำตอบที่ได้จะเป็นรูปทั่วไปที่ได้จากตัวอย่างที่โจทย์กำหนดให้นั้น

3. การแก้ปัญหาที่ง่ายกว่า (Solving a simpler problem) เป็นการหาคำตอบโดยการทำปัญหาให้งายลงจากปัญหาที่ซับซ้อน ทำให้สามารถกำหนดแนวคิดในการแก้ปัญหาและนำแนวคิดนั้นมาใช้แก้ปัญหาที่กำหนดไว้ วิธีการหนึ่งในการทำปัญหาให้ง่ายคือการแบ่งปัญหาออกเป็นส่วน ๆ หรือเริ่มด้วยปัญหาที่มีระดับความซับซ้อนน้อยลง

4. การทำย้อนกลับ (Working backward) เป็นการหาคำตอบโดยเริ่มต้นพิจารณาจากสิ่งที่ปัญหาต้องการหรือสิ่งที่จะพิสูจน์ แล้วเชื่อมโยงย้อนกลับไปสู่สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

5. การสร้างสถานการณ์จำลอง (Simulation) เป็นการหาคำตอบโดยการทดลองแสดงสถานการณ์ตามที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อสามารถตัดสินใจบนฐานการวิเคราะห์ข้อมูลและคำตอบที่ได้จากการทดลอง

Krulik and Rudnick (1982) กล่าวว่า กลวิธีในการแก้ปัญหามีหลากหลายต้องเลือกใช้ให้เหมาะสมกับปัญหา กลวิธีหนึ่งอาจจะเหมาะสมกับปัญหาหนึ่งแต่บางปัญหาอาจไม่ใช่ นอกจากนี้นั้นบางปัญหาอาจจะจำเป็นต้องใช้หลายกลวิธีในการแก้ปัญหา และเสนอแนะกลวิธีในการแก้ปัญหาไว้ 8 ประการ ดังนี้

1. การจำแนกแบบรูป (Pattern recognition)
2. การทำย้อนกลับ (Working backwards)
3. การเดาและตรวจสอบ (Guess and test)
4. การสร้างสถานการณ์จำลองหรือการทดลอง (Simulation or experimentation)
5. การย่อความ (Reduction)
6. การแจกแจงรายงานการ (Exhaustive listing)
7. การใช้ตรรกศาสตร์เชิงอนุมาน (Logical deduction)
8. การแสดงความหมายข้อมูล (Representing data) โดยใช้
    8.1 กราฟ (Graph)
    8.2 สมการ (Equation)
    8.3 นิพจน์เชิงพีชคณิต (Algebraic expression)
    8.4 ตาราง (Table)

8.5 แผนภูมิ (Chart)

8.6 ไดอะแกรม (Diagram)

Wilson, Fernandez, and Hadaway (1993) ได้เสนอวิธีการแก้ปัญหาไว้ 21 กลวิธี ดังนี้

1. กลวิธีเดาและตรวจสอบ เป็นการเดาคำตอบของปัญหาที่พบและตรวจสอบคำตอบที่ได้ว่าถูกต้องหรือไม่ ถ้าคำตอบที่ไม่ถูกต้อง ให้เดาคำตอบใหม่จนได้คำตอบที่ถูกโดยอาศัยเหตุผลจากการเดาครั้งที่ผ่านมา

2. กลวิธีใช้ตัวแปร (use a variable) เป็นการกำหนดตัวแปรของตัวแปรที่ไม่ทราบค่า หรือสิ่งที่โจทย์ถาม แล้วหาค่าของตัวแปรเพื่อให้ได้คำตอบที่โจทย์ถาม

3. กลวิธีค้นหารูปแบบ (look for a pattern) เป็นการหาคำตอบโดยสังเกตจากตัวอย่างที่โจทย์กำหนดมาให้ แล้วหารูปแบบจากตัวอย่างที่โจทย์กำหนดให้นั้น เป็นแนวทางในการหาคำตอบ

4. กลวิธีสร้างรายการ (make a list) เป็นการหาคำตอบโดยการสร้างรายการที่เป็นไปได้ของคำตอบตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด

5. กลวิธีแก้ปัญหาที่ง่ายกว่า (solve a simpler problem) เป็นการหาคำตอบโดยการสร้างปัญหาขึ้นมาใหม่ ซึ่งมีโครงสร้างของปัญหาที่คล้ายกับปัญหาเดิม แล้วนำวิธีการที่ใช้แก้ปัญหาที่สร้างขึ้นใหม่นั้น มาใช้เป็นแนวทางในการหาคำตอบของปัญหาเดิม

6. กลวิธีวาดภาพ (draw a picture) เป็นการวาดภาพเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่โจทย์ปัญหากำหนดมาให้ เพื่อเป็นแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหา

7. กลวิธีเขียนแผนภาพ (draw a diagram) เป็นการเขียนแสดงสาระสำคัญเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่โจทย์กำหนดมาให้ เพื่อเป็นแนวทางในการหาคำตอบของปัญหาต่าง ๆ จากกลวิธีวาดภาพตรงที่การเขียนแผนภาพจะไม่แสดงรายละเอียด จะบอกเพียงสาระสำคัญเท่านั้น

8. กลวิธีใช้การให้เหตุผลทางตรง (use direct reasoning) เป็นการใช้เหตุผลพิจารณาข้อมูลต่าง ๆ ที่โจทย์กำหนดมาให้ในการหาคำตอบ และมักเป็นกลวิธีที่ใช้ร่วมกับกลวิธีอื่น ๆ ในการแก้โจทย์ปัญหา

9. กลวิธีใช้การให้เหตุผลทางอ้อม (use indirect reasoning) เป็นการหาคำตอบของโจทย์ปัญหาโดยใช้การพิสูจน์เพื่อแสดงว่า คำตอบหนึ่งเป็นจริงแต่ไม่สามารถแสดงได้ ซึ่งจะเปลี่ยนการหาคำตอบเป็นหาเหตุผลมาแสดงว่าคำตอบที่มีทิศทางหรือเครื่องหมายตรงกันข้ามเป็นเท็จ และจึงสรุปคำตอบที่โจทย์กำหนดให้พิสูจน์เป็นจริง

10. กลวิธีใช้สมบัติของจำนวน (use properties of number) เป็นการหาคำตอบโดยใช้ความรู้เกี่ยวกับสมบัติของจำนวนมาใช้ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา

11. กลวิธีแก้โจทย์ปัญหาที่เหมือนกัน (solve an equivalent) เป็นการหาคำตอบโดยการเปลี่ยนภาษาของโจทย์ปัญหาเป็นภาษาของผู้แก้ปัญหาเอง โดยที่ความหมายไม่เปลี่ยนไปจากเดิม เพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจปัญหา

12. กลวิธีทำย้อนกลับ (work backward) เป็นการแก้โจทย์ปัญหาโดยพิจารณาจากผลลัพธ์หรือเหตุการณ์สุดท้ายที่โจทย์กำหนด แล้วทำย้อนกลับ เพื่อหาคำตอบที่โจทย์ต้องการ

13. กลวิธีแบ่งเป็นกรณี (use case) เป็นการหาคำตอบของโจทย์ปัญหาที่คำตอบ มีสาเหตุมาจากกรณีย่อย ๆ หลายกรณี แล้วพิจารณาคำตอบจากกรณีร่วมกันเป็นคำตอบที่โจทย์ต้องการ

14. กลวิธีแก้ปัญหาด้วยสมการ (use an equation) เป็นการหาคำตอบโดยการเขียนแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลให้อยู่ในรูปของการเท่ากัน แล้วจึงหาคำตอบ

15. กลวิธีค้นหาสูตร (look for a formula) เป็นการหาคำตอบโดยการใช้สูตรที่สอดคล้องกับข้อมูลที่โจทย์กำหนดมาให้ในการหาคำตอบ

16. กลวิธีสร้างสถานการณ์จำลอง (do a simulation) เป็นการหาคำตอบโดยการทดลองแสดงสถานการณ์ตามที่โจทย์กำหนดมาให้ โดยใช้วัสดุที่มีลักษณะ รูปร่าง ที่คล้ายกับข้อมูลที่โจทย์กำหนด

17. กลวิธีใช้แบบจำลอง (use a model) เป็นการหาคำตอบโดยการใช้แบบจำลองที่มีรูปร่างคล้ายกับที่โจทย์กำหนดมาให้ประกอบในการแก้โจทย์ปัญหา

18. กลวิธีวิเคราะห์เกี่ยวกับขนาด (use dimensional analysis) เป็นการหาคำตอบโดยใช้การแปลงหน่วยการวัดระยะทาง อัตราเวลา หรือโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับมาตรการวัดต่าง ๆ ทำให้ง่ายต่อการวิเคราะห์เกี่ยวกับขนาด

19. กลวิธีกำหนดเป้าหมายรอง (identify sub-goals) เป็นการหาคำตอบโดยการหาคำตอบจากส่วนย่อยมาก่อน แล้วจะทำให้ได้คำตอบของโจทย์ปัญหา

20. กลวิธีใช้หลายวิธีร่วมกัน (use coordinate) เป็นการหาคำตอบโดยใช้หลากหลายกลวิธีร่วมกัน

21. กลวิธีใช้การสมมาตร (use symmetry) เป็นการหาคำตอบโดยใช้คุณสมบัติของการเท่ากันของสิ่งของมาใช้ช่วยในการแก้โจทย์ปัญหา

Cruikshank and Sheffield (2000) เสนอยุทธวิธีในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ สรุปได้ดังนี้

1. การเดาหรือตรวจสอบ (Guess and Check)

2. การหาแบบรูป (Look for a Pattern)

3. เขียนรายละเอียดของโจทย์ (Make a Systematic List)

4. สร้างและวาดรูปหรือแบบจำลอง (Make and Use a Drawing or Model)

5. กำจัดสิ่งที่เป็นไปไม่ได้ (Eliminate Possibilities)

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า กลยุทธ์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้นเป็นเสมือนเครื่องมือที่สำคัญในการแก้ปัญหา ซึ่งการเลือกใช้กลยุทธ์ที่เหมาะสมและหลากหลาย จะช่วยให้ผู้แก้ปัญหาประสบความสำเร็จในการหาคำตอบและพัฒนาทักษะในการแก้ปัญหาได้

3.4 การวัดและประเมินความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

นักการศึกษาได้เสนอแนวทางการวัดและการประเมินการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

กรมวิชาการ (2546) เสนอเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

ตารางที่ 1 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของกรมวิชาการ

คะแนน	ความหมาย	ความสามารถในการแก้ปัญหาที่ปรากฏให้เห็น
4	ดีมาก	ใช้ยุทธวิธีดำเนินการแก้ปัญหาสำเร็จอย่างมีประสิทธิภาพ อธิบายถึงเหตุผลในการใช้วิธีการดังกล่าวได้อย่างชัดเจน
3	ดี	ใช้ยุทธ์วิธีการดำเนินการแก้ปัญหาสำเร็จ แต่น่าจะอธิบายถึงเหตุผลในการใช้วิธีการดังกล่าวได้ดีกว่านี้
2	พอใช้	มียุทธวิธีดำเนินการแก้ปัญหาสำเร็จเพียงบางส่วน อธิบายถึงเหตุผลในการใช้วิธีการดังกล่าวได้บางส่วน
1	ต้องปรับปรุง	มีร่องรอยการดำเนินการแก้ปัญหาบางส่วน เริ่มคิดว่าทำไมจึงต้องใช้วิธีการนั้นแล้วหยุด อธิบายต่อไม่ได้แก้ปัญหาไม่สำเร็จ
0	ไม่พยายาม	ทำได้ไม่ถึงเกณฑ์ข้างต้นหรือไม่มีร่องรอยการดำเนินการแก้ปัญหา

สิริพร ทิพย์คง (2554) ได้เสนอเกณฑ์การประเมินความสามารถในการแก้ปัญหา ควรจะมีวิธีที่มากกว่าการได้คำตอบที่ถูกต้อง เกณฑ์การประเมินการแก้ปัญหาควรมี ดังนี้

1. ความเข้าใจปัญหา

2 คะแนน สำหรับความเข้าปัญหาได้ถูกต้อง

1 คะแนน สำหรับการเข้าใจโจทย์บางส่วนไม่ถูกต้อง

0 คะแนน สำหรับมีหลักฐานที่แสดงว่าเข้าใจน้อยมากหรือไม่เข้าใจเลย

2. การเลือกยุทธวิธีการแก้ปัญหา

2 คะแนน สำหรับการเลือกวิธีการแก้ไขปัญหาได้ถูกต้องและเขียนประโยคคณิตศาสตร์ถูก

1 คะแนน สำหรับการเลือกวิธีการแก้ปัญหา ซึ่งอาจจะนำไปสู่คำตอบที่ถูก แต่ยังมีบางส่วนผิดโดยอาจเขียนประโยคคณิตศาสตร์ไม่ถูกต้อง

0 คะแนน สำหรับการเลือกวิธีการแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง

3. การใช้ยุทธวิธีการแก้ปัญหา

2 คะแนน สำหรับการนำยุทธวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ได้ถูกต้อง

1 คะแนน สำหรับการนำวิธีการแก้ปัญหาบางส่วนไปใช้ได้ถูก

0 คะแนน สำหรับการใช้ยุทธวิธีการแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง

4. การตอบ

2 คะแนน สำหรับการตอบคำถามได้ถูกต้อง สมบูรณ์

1 คะแนน สำหรับการตอบที่ไม่สมบูรณ์หรือใช้สัญลักษณ์ผิด

0 คะแนน เมื่อไม่ได้ระบุคำตอบ

อัมพร ม้าคนอง (2553) กล่าวถึงการประเมินความสามารถในการแก้ปัญหา ดังนี้

1. การแก้ปัญหาได้ เป็นความสามารถของผู้เรียนในการหาคำตอบ ผลเฉลย หรือแนวทางในการจัดการกับปัญหา

2. การสร้างโจทย์หรือประเด็นปัญหา เป็นความสามารถในการเชื่อมโยงข้อมูลที่มีอยู่เพื่อหาความสัมพันธ์ที่เป็นไปได้อันจะนำไปสู่การสร้างโจทย์ปัญหา สถานการณ์ หรือคำถาม

3. การใช้วิธีการแก้ปัญหาที่หลากหลาย เป็นความสามารถในการแก้ปัญหาโดยใช้วิธีการที่แตกต่างกันหลายวิธี

4. การตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบ เป็นความสามารถในการพิจารณาคำตอบหรือการแก้ปัญหาที่ได้ว่าเหมาะสม สอดคล้อง และสมเหตุสมผลเพียงใด

5. การขยายความคิดจากผลการแก้ปัญหา เป็นความสามารถในการนำผลจากการแก้ปัญหาไปคิดต่อ เช่น การมองเห็นรูปทั่วไป การเปลี่ยนแปลงที่จะเกิดขึ้นเมื่อเงื่อนไข ของปัญหาเปลี่ยนไป

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2555ข) ได้เสนอเกณฑ์การประเมินผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยกล่าวว่า การประเมินผลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์พิจารณาได้จากรายการประเมิน 4 องค์ประกอบ คือ ความเข้าใจปัญหา การเลือกยุทธวิธี การแก้ปัญหา การใช้ยุทธวิธีการแก้ปัญหาและการสรุปคำตอบ ทั้งนี้อาจกำหนดเกณฑ์การประเมินผลแบบวิเคราะห์ที่แบ่งระดับคุณภาพเป็น 3 ระดับ คือ 1, 2 และ 3 นอกจากนี้ครูอาจกำหนดน้ำหนักคะแนนของแต่ละปัญหาให้แตกต่างกันตามเนื้อหาหรือความเหมาะสมได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตารางที่ 2 ตัวอย่างเกณฑ์การประเมินผลแบบวิเคราะห์ของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

รายการประเมิน	คะแนน	ระดับคุณภาพ	เกณฑ์การพิจารณา
1. ความเข้าใจปัญหา	3	ดี	เข้าใจปัญหาได้อย่างถูกต้อง
	2	พอใช้	เข้าใจปัญหาได้อย่างถูกต้องบางส่วน
	1	ต้องปรับปรุง	เข้าใจปัญหาน้อยมากหรือไม่เข้าใจปัญหา
2. การเลือกยุทธวิธีการแก้ปัญหา	3	ดี	เลือกวิธีการที่สามารถแก้ปัญหาได้ถูกต้องเหมาะสม และสอดคล้องกับปัญหา
	2	พอใช้	เลือกวิธีการที่สามารถแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องแต่ยังไม่เหมาะสมหรือไม่ครบคลุมประเด็นปัญหา
	1	ต้องปรับปรุง	เลือกวิธีการแก้ปัญหาไม่ถูกต้อง หรือไม่สามารถเลือกวิธีการแก้ปัญหาได้
3. การใช้วิธีการแก้ปัญหา	3	ดี	นำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ได้อย่างถูกต้อง และแสดงการแก้ปัญหาเป็นลำดับขั้นตอนได้อย่างชัดเจน
	2	พอใช้	นำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ได้อย่างถูกต้อง แต่การแสดงลำดับขั้นตอนของการแก้ปัญหายังไม่ชัดเจน
	1	ต้องปรับปรุง	นำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้ไม่ถูกต้อง หรือไม่แสดงลำดับขั้นตอนการแก้ปัญหา
4. การสรุปคำตอบ	3	ดี	สรุปคำตอบได้ถูกต้อง สมบูรณ์
	2	พอใช้	สรุปคำตอบได้อย่างถูกต้องบางส่วน หรือสรุปคำตอบไม่ครบถ้วน
	1	ต้องปรับปรุง	ไม่มีการสรุปคำตอบ หรือสรุปคำตอบไม่ถูกต้อง

กิตติพันธ์ วิบุลศิลป์ (2560) ได้เสนอ เกณฑ์การประเมินผลความสามารถในการปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยอ้างอิงตามกระบวนการแก้ปัญหาของ Krulik and Rudnick (1993) ซึ่งเกณฑ์การประเมินจะประกอบไปด้วย 4 องค์ประกอบ ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3 เกณฑ์การตรวจให้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของกิตติพันธ์ วิบุลศิลป์

1. ความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหา

องค์ประกอบย่อย	เกณฑ์การพิจารณา	คะแนน
1.1 ระบุข้อเท็จจริงและคำถามในสถานการณ์ปัญหา	- ระบุข้อเท็จจริงและคำถามในสถานการณ์ปัญหาได้ถูกต้องทั้งหมด	2
	- ระบุข้อเท็จจริงในสถานการณ์ปัญหาได้ถูกต้องทั้งหมด แต่ระบุคำถามในสถานการณ์ปัญหาได้ถูกต้องบางส่วนหรือไม่ถูกต้อง - ระบุคำถามในสถานการณ์ปัญหาได้ถูกต้องทั้งหมด แต่ระบุข้อเท็จจริงในสถานการณ์ปัญหาถูกต้องบางส่วนหรือไม่ถูกต้อง - ระบุข้อเท็จจริงในสถานการณ์ปัญหาและระบุคำถามในสถานการณ์ปัญหาได้ถูกต้องบางส่วน	1
	- ระบุข้อเท็จจริงและคำถามในสถานการณ์ปัญหาได้ถูกต้องหรือไม่ได้เลย	0
1.2 แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลในปัญหา	- แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ถูกต้องทั้งหมด	2
	- แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ถูกต้องบางส่วน	1
	- แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ถูกต้องหรือไม่แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลด้วยวิธีใด ๆ เลย	0

2. ความสามารถในการเลือกแผน

องค์ประกอบย่อย	เกณฑ์การพิจารณา	คะแนน
2.1 เลือกวิธีการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม และลงมือแก้ปัญหาในขั้นตอนเริ่มต้น	- ระบุสิ่งแรกที่ต้องหาค่า อธิบายแนวทางที่นำไปสู่การหาคำตอบ และแสดงวิธีการแก้ปัญหาในขั้นตอนแรกได้อย่างถูกต้องทั้งหมด	4
	- อธิบายแนวทางที่นำไปสู่การหาคำตอบ และแสดงวิธีการแก้ปัญหาในขั้นตอนแรกได้ถูกต้อง แต่ระบุตัวแปรที่ต้องหาค่าไม่ถูกต้อง	3

องค์ประกอบย่อย	เกณฑ์การพิจารณา	คะแนน
	- ระบุตัวแปรแรกที่ต้องหาค่าและอธิบายแนวทางที่นำไปสู่การหาคำตอบได้ถูกต้อง แต่แสดงวิธีการแก้ปัญหาในขั้นตอนแรกได้ถูกต้องบางส่วน - ระบุตัวแปรแรกที่ต้องหาค่าและแสดงวิธีการแก้ปัญหาในขั้นตอนแรกได้ถูกต้อง แต่อธิบายแนวทางที่นำไปสู่การหาคำตอบได้ถูกต้องบางส่วน - ระบุตัวแปรแรกที่ต้องหาค่าได้ถูกต้อง และอธิบายแนวทางที่นำไปสู่การหาคำตอบและแสดงวิธีการแก้ปัญหาในขั้นตอนแรกได้ถูกต้องบางส่วน	2
	- ระบุตัวแปรที่ต้องการหาค่าได้ถูกต้อง แต่อธิบายแนวทางที่นำไปสู่การหาคำตอบและแสดงวิธีการแก้ปัญหาในขั้นตอนแรกไม่ถูกต้อง	1
	- ระบุสิ่งแรกที่ต้องหาค่า อธิบายแนวทางที่นำไปสู่การหาคำตอบ และแสดงวิธีการแก้ปัญหาในขั้นตอนแรกไม่ถูกต้องทั้งหมด หรือไม่ระบุและอธิบายเลย	0

3. ความสามารถในการดำเนินการตามแผน

องค์ประกอบย่อย	เกณฑ์การพิจารณา	คะแนน
3.1 ดำเนินการทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง	- แสดงวิธีการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องทั้งหมด และคำตอบถูกต้อง	4
	- แสดงวิธีการแก้ปัญหาได้ถูกต้องทั้งหมด แต่คำตอบไม่ถูกต้อง	3
	- แสดงวิธีการแก้ปัญหาได้ถูกต้องบางส่วนมากกว่าร้อยละ 50 และคำตอบไม่ถูกต้อง	2
	- แสดงวิธีการแก้ปัญหาได้ถูกต้องบางส่วนไม่เกินร้อยละ 50 และคำตอบไม่ถูกต้อง	1
	- แสดงวิธีการแก้ปัญหาไม่ถูกต้องทั้งหมดหรือไม่แสดงวิธีทำเลย	0

4. ความสามารถในการสะท้อนและขยายผล

องค์ประกอบย่อย	เกณฑ์การพิจารณา	คะแนน
4.1 สรุปคำตอบและตรวจสอบความถูกต้องและความสมเหตุสมผลของคำตอบ	- สรุปคำตอบและแสดงวิธีตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบได้ถูกต้องทั้งหมด	2
	- สรุปคำตอบได้ถูกต้อง แต่แสดงวิธีตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบได้ถูกต้องบางส่วนหรือไม่ถูกต้อง	1
	- สรุปคำตอบและแสดงวิธีตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบไม่ถูกต้องหรือไม่ได้สรุปคำตอบหรือแสดงวิธีตรวจสอบเลย	0
4.2 ระบุการเปลี่ยนแปลงคำตอบเมื่อข้อเท็จจริง ในสถานการณ์ปัญหาเปลี่ยนไป	- ระบุการเปลี่ยนแปลงคำตอบเมื่อเปลี่ยนข้อเท็จจริงในเงื่อนไขและระบุเหตุผลของการเปลี่ยนแปลงได้ถูกต้องทั้งหมด	2
	- ระบุการเปลี่ยนแปลงคำตอบเมื่อเปลี่ยนข้อเท็จจริงในเงื่อนไขได้ถูกต้อง แต่ระบุเหตุผลของการเปลี่ยนแปลงได้ถูกต้องบางส่วนหรือไม่ถูกต้อง	1
	- ระบุการเปลี่ยนแปลงคำตอบเมื่อเปลี่ยนข้อเท็จจริงในเงื่อนไขและระบุเหตุผลของการเปลี่ยนแปลงไม่ถูกต้องหรือไม่ระบุเลย	0

ตอนที่ 4 ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

4.1 ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

มีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงความหมายของการให้เหตุผลและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

Giere (1991) กล่าวว่า การให้เหตุผล หมายถึง ความสามารถในการคิดเชื่อมโยงระหว่างหลักการโดยทั่วไป (general principles) กับตัวอย่างที่เป็นรูปธรรม (concrete example)

O'Daffer and Thornquist (1993) ได้กล่าวว่า การให้เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Reasoning) เป็นส่วนหนึ่งของการคิดเชิงคณิตศาสตร์และให้ความหมายเกี่ยวกับความคิดทางคณิตศาสตร์ว่าหมายถึง การใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่อย่างหลากหลายในการทำความเข้าใจแนวคิด ค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างแนวคิด สร้างข้อสรุปหรือสนับสนุนข้อสรุปเกี่ยวกับแนวคิด และความสัมพันธ์ของแนวคิดและแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับแนวคิดนั้น

Alice and Shirel (1999) ได้กล่าวว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นส่วนหนึ่งที่ทำให้การแก้ปัญหามีความสมบูรณ์ นักเรียนจะไม่สามารถเข้าใจปัญหา วิเคราะห์ปัญหา หรือวางแผนในการแก้ปัญหาได้ หากปราศจากการให้เหตุผล จึงกล่าวได้ว่าการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์มีความสำคัญควบคู่ไปกับการแก้ปัญหา

NCTM (2000a) ได้กำหนดให้ การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็นมาตรฐานหนึ่งในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ และกล่าวว่า การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์นั้นจะเป็นแนวทางในการพัฒนาให้เกิดการแสดงออกถึงความเข้าใจอันลึกซึ้งเกี่ยวกับปรากฏการณ์ต่าง ๆ ได้ ซึ่งกำหนดมาตรฐานของการให้เหตุผลและการพิสูจน์ สำหรับนักเรียนในระดับอนุบาลถึงเกรด 12 ดังนี้

1. ตระหนักถึงความสำคัญของการให้เหตุผลและการพิสูจน์ในวิชาคณิตศาสตร์
2. สร้างและตรวจสอบข้อความคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ได้
3. พัฒนาและประเมินการอ้างเหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ได้
4. เลือกและใช้การให้เหตุผลและการพิสูจน์หลายประเภท

TIMSS (2015) ได้ให้ความหมายของความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า เป็นความสามารถในการคิดหาคำอธิบายหรือสร้างความสัมพันธ์ สร้างข้อความคาดการณ์ หาข้อสรุปที่สมเหตุสมผลโดยใช้ข้อมูลพื้นฐานหรือหลักฐาน และสามารถจำแนกข้อเท็จจริงโดยการสร้างข้อโต้แย้งในการสนับสนุนหรือคัดค้านได้

พนารัตน์ แช่มชื่น (2548) ได้กล่าวว่า ทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการแสดงความคิดเกี่ยวกับการสร้างหลักการหาความสัมพันธ์ของแนวคิดระหว่างเหตุและผล และการสรุปที่สมเหตุสมผลตามแนวคิดนั้น ๆ หรือสรุปความคิดรวบยอดแล้วขยายหลักการไปสู่สิ่งอื่น ๆ ซึ่งทักษะในการให้เหตุผลมี 3 องค์ประกอบ ดังนี้

1. ความสามารถในการวิเคราะห์ และระบุถึงความสัมพันธ์ของข้อมูล
2. ความสามารถในการหาข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์
3. ความสามารถในการยืนยันหรือคัดค้านข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์อย่างสมเหตุสมผล

พรรณทิพา พรหมรักษ์ (2552) กล่าวว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการแสดงแนวคิดเกี่ยวกับการสร้างหลักการ การวิเคราะห์ การหาความสัมพันธ์ และแสดงข้อสรุปของข้อมูลอย่างสมเหตุสมผลรวมทั้งความสามารถในการพิจารณาและยืนยันข้อสรุปที่สมเหตุสมผล

อัมพร ม้าคนอง (2553) ได้กล่าวถึงความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญมีดังต่อไปนี้

1. หาข้อสรุปที่เป็นเหตุเป็นผลเกี่ยวกับคณิตศาสตร์

2. ใช้ความรู้และข้อมูลในการวิเคราะห์สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ และในการอธิบายความคิดของตนเอง

3. เข้าใจและสามารถใช้กระบวนการให้เหตุผลในสถานการณ์เฉพาะใด ๆ

4. สร้าง ทดสอบ และประเมินข้อความคาดการณ์และข้อโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

5. ให้เหตุผลโดยใช้การอุปนัยและนิรนัยทางคณิตศาสตร์

6. ตรวจสอบและประเมินความคิดของตนเอง

7. เห็นคุณค่าและความสำคัญของการใช้เหตุผลซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของคณิตศาสตร์และสามารถนำไปใช้ได้

วรนารถ อยู่สุข (2555) ได้กล่าวว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เป็นความสามารถในการคิดอย่างเป็นเหตุเป็นผลเกี่ยวกับปัญหาหรือสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งความสามารถในการให้เหตุผลประกอบไปด้วยการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหาความสัมพันธ์ และความสามารถในการอธิบายข้อสรุปโดยใช้ข้อมูลในการสนับสนุนหรือคัดค้านได้อย่างสมเหตุสมผล

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2555ก) กล่าวว่า ความสามารถในการให้เหตุผล เป็นความสามารถที่ต้องใช้การคิดวิเคราะห์และใช้เหตุผลในการหาข้อสรุปที่สมเหตุสมผลของสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์จากข้อมูลที่กำหนด โดยเหตุผลที่ใช้อาจแสดงถึงแนวคิดเกี่ยวกับความรู้ที่เป็นข้อเท็จจริง หลักการ ข้อความคาดการณ์ หรือข้อสนับสนุนของข้อสรุปที่ได้จากสถานการณ์นั้น ๆ

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการใช้ความรู้และข้อมูลจากปัญหาในการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หาความสัมพันธ์ของข้อมูล และอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล เพื่อนำไปสร้างข้อความคาดการณ์หรือข้อสรุป พร้อมทั้งยืนยันหรือคัดค้านข้อความคาดการณ์ได้อย่างสมเหตุสมผล

4.2 ประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

นักการศึกษาและนักวิชาการได้แบ่งประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

O'Daffer (1990) ได้เสนอว่าทักษะการให้เหตุผลที่มีความสำคัญต่อความสำเร็จทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมี 2 ประเภท ดังนี้

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (inductive reasoning) เป็นกระบวนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ซึ่งเกี่ยวกับการใช้ข้อมูลในการสร้างหลักการใหม่ ค้นหารูปแบบทั่วไป รูปแบบทางคณิตศาสตร์ วิเคราะห์สถานการณ์ อธิบายสมบัติและโครงสร้างต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ เพื่อนำไปสู่

การสรุปเป็นมโนทัศน์ หรืออาจกล่าวได้ว่าการให้เหตุผลแบบอุปนัยเกิดจากผลของกรณีเฉพาะหลาย ๆ อย่างแล้วนำไปสู่การสรุปเป็นกฎเกณฑ์ทั่วไป

2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (deductive reasoning) เป็นกระบวนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ซึ่งใช้รูปแบบการลงความเห็นที่สมเหตุสมผลในการสรุปจากหลักฐานที่ปรากฏเป็นการพิสูจน์ข้อสรุป และตัดสินความถูกต้องของขั้นตอนการคิด การให้เหตุผลแบบนี้เป็นการให้เหตุผลที่เป็นระบบตรรกะ เป็นการให้เหตุผลที่ใช้โครงสร้างคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐาน คือ อนิยาม นิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีบท อาจกล่าวได้ว่าการให้เหตุผลแบบนิรนัยเป็นการให้เหตุผลที่ใช้ข้อสรุปที่เป็นกฎเกณฑ์ทั่วไปเป็นหลัก แล้วจะได้ผลสรุปของกรณีเฉพาะที่สอดคล้องกับกฎเกณฑ์ที่เป็นหลักการที่เป็นจริง

Baroody and Coslick (1993) ได้แบ่งประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ไว้ 3 ประเภท โดยเพิ่มการให้เหตุผลแบบสามัญสำนึก (Intuitive Reasoning) ซึ่งเป็นลักษณะของการให้เหตุผลที่เกิดจากการหยั่งรู้ (Insight) หรือเกิดจากลางสังหรณ์ไม่ได้มีข้อมูลที่จำเป็นทั้งหมดในการตัดสินใจ จึงตัดสินใจจากข้อมูลที่เห็นหรือจากความรู้สึกภายใน เหตุผลเชิงหยั่งรู้จึงเป็นเหตุผลที่วางอยู่บนสิ่งที่ปรากฏหรือข้อสมมติฐาน ซึ่งสิ่งที่ปรากฏอาจถูกหรือผิดก็ได้ ส่วนอีก 2 ประเภทคือ การให้เหตุผลแบบอุปนัยและการให้เหตุผลแบบนิรนัย โดยเขากล่าวว่า การให้เหตุผลทั้ง 3 ประเภท มีความสัมพันธ์กันคือในกระบวนการสืบค้นทางคณิตศาสตร์มักเริ่มต้นด้วยการสรุปจากการให้เหตุผลแบบสามัญสำนึกหรือแบบอุปนัย ที่เรียกว่าการสร้างข้อคาดเดาแล้วตรวจสอบพิสูจน์ข้อคาดเดาซึ่งก็คือการให้เหตุผลแบบนิรนัย

Stiggins and Chappuis (2012) ได้เสนอว่า การให้เหตุเหตุผลมี 6 ประเภท คือ

1. การให้เหตุผลแบบวิเคราะห์ (analytical reasoning) เป็นการให้เหตุผลโดยพิจารณาส่วนย่อยหรือส่วนประกอบ โดยใช้การวิเคราะห์เพื่อศึกษารายละเอียดหรือในกรณีที่ต้องการแก้ปัญหา นักเรียนจะต้องอาศัยการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา แล้วนำความรู้และการให้เหตุผลมาใช้ในการแก้ปัญหานั้น ๆ

2. การให้เหตุผลแบบเปรียบเทียบ (comparative reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่มุ่งพิจารณาว่าสิ่งนั้น ๆ มีอะไรที่เหมือนกันและมีอะไรที่ต่างกัน

3. การให้เหตุผลแบบประเมิน (evaluative reasoning) เป็นการให้เหตุผลเมื่อต้องการตัดสินคุณค่าหรือพิจารณาว่าสิ่งใดมีความเหมาะสมหรือไม่เหมาะสม โดยอาศัยความสมเหตุสมผลในการตัดสิน

4. การให้เหตุผลแบบสังเคราะห์ (synthesizing reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่ใช้วิธีการรวบรวมข้อมูลต่าง ๆ มาหลอมรวมกันเพื่อสร้างเป็นข้อสรุป

5. การให้เหตุผลแบบจำแนก (classifying reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่ใช้ในกรณีที่ต้องการแยกประเภทของสิ่งของต่าง ๆ ว่าสิ่งใดควรถูกจัดอยู่ในกลุ่มไหน เพราะเหตุใด

6. การให้เหตุผลแบบสรุปอ้างอิง (inferential reasoning) เป็นการให้เหตุผลแบบอุปนัยและการให้เหตุผลแบบนิรนัย

Streumer (2007) เสนอว่าการให้เหตุผลสามารถแบ่งได้ 2 ชนิด คือ การให้เหตุผลแบบอนุมาน (inferential reasoning) และการให้เหตุผลแบบไม่อนุมาน (non-inferential reasoning)

1.การให้เหตุผลแบบอนุมาน (inferential reasoning) กล่าวได้ว่า เหตุผลที่เกิดขึ้นเป็นการตอบสนองที่นำไปสู่การให้เหตุผลแบบกว้าง ๆ ซึ่งการตอบสนองนั้น ต้องมีอย่างน้อยหนึ่งเหตุผล

2. การให้เหตุผลแบบไม่อนุมาน (non-inferential reasoning) กล่าวได้ว่า เหตุผลที่เกิดขึ้นเป็นการตอบสนองของการให้เหตุผลแบบจำกัด ซึ่งการตอบสนองนั้นจะมีเหตุผลเพียงแค่หนึ่งเหตุผลเท่านั้น

Lawson (2010) ได้เสนอรูปแบบของการให้เหตุผลไว้ 4 รูปแบบ ดังนี้

1. การให้เหตุผลแบบสมมตินัย (abduction) เป็นการสร้างสมมติฐานจากการสังเกตปัญหา (puzzling observation) แล้วกลายเป็นคำอธิบายที่ได้จากการสังเกตซึ่งถูกรวบรวมไว้เป็นส่วนหนึ่งของความรู้ที่อธิบายได้ (declarative knowledge)

2. การให้เหตุผลแบบอธิบาย (retroduction) เป็นการนำสมมติฐานมาทำการทดสอบข้อกล่าวอ้าง โดยสมมติฐานนั้นเป็นการคาดคะเนเงื่อนไขของปรากฏการณ์เพื่ออธิบายข้อเท็จจริงจากหลักฐานที่สามารถยืนยันได้ กล่าวอีกนัยหนึ่งคือเป็นลักษณะในการประเมินค่าการอธิบายทางเลือกที่เกิดขึ้น

3. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (deduction) เป็นการสร้างการทดสอบที่มีความน่าเชื่อถือโดยอาศัยการพยากรณ์เพื่อให้ผลที่เกิดขึ้นเป็นไปตามสมมติฐานที่ตั้งไว้

4. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (induction) เป็นการลงข้อสรุปหรือลงข้อสรุป

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2555) ได้แบ่งประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ประเภท ดังนี้

1 การให้เหตุผลแบบอุปนัย หมายถึง ความสามารถในการสังเกตข้อเท็จจริงย่อย ๆ แล้วรวบรวมข้อมูลเพื่อหาแบบรูปที่จะนำไปสร้างเป็นข้อความคาดการณ์หรือข้อสรุป แล้วพยายามหากฎหรือหลักการทั่วไป

2 การให้เหตุผลแบบนิรนัย หมายถึง ความสามารถในการคิดหาข้อสรุปที่รู้ว่าเป็นจริงหรือยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ แล้วใช้เหตุผลตามหลักตรรกศาสตร์ อ้างจากสิ่งที่รู้ว่าเป็นจริงนั้นเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่เป็นส่วนย่อยหรือผลสรุปที่เพิ่มเติมขึ้นมาใหม่ อย่างสมเหตุสมผล

วิชัย เสวกงาม (2557 อ้างถึงในสุทธิชาติ เปรมกมล, 2558) ได้แบ่งการให้เหตุผลออกเป็น 5 ประเภท ดังนี้

1. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (deductive reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่เริ่มต้นด้วยการอ้างถึงกฎไปยังการยืนยันผลสรุปที่เฉพาะเจาะจง โดยการนิรนัยนั้นเป็นการยืนยันข้อสรุปที่เฉพาะเจาะจงจากกฎหรือข้อสรุปที่เป็นนัยโดยทั่วไป ถ้ากฎหรือข้อสรุปที่เป็นนัยโดยทั่วไปที่นำมาอ้างนั้นเป็นจริงแล้วข้อสรุปที่เกิดขึ้นต้องเป็นจริงด้วยและข้อสรุปนั้น ต้องเป็นไปตามข้ออ้างอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้

2. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (inductive reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่เริ่มต้นด้วยการสังเกตที่มีความเฉพาะเจาะจง และจำกัดอยู่ในขอบเขตและวิธีการที่จะได้ข้อสรุปทั่วไปที่อาจเป็นไปได้แต่อาจจะเกิดข้อผิดพลาด ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับหลักฐานเชิงประจักษ์ที่รวบรวมได้ กล่าวได้ว่าการให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นการอ้างข้อเท็จจริงเฉพาะย่อย ๆ ไปสู่ข้อสรุปที่เป็นนัยโดยทั่วไป

3. การให้เหตุผลเชิงอธิบาย (abductive reasoning) เป็นการให้เหตุผลที่พิจารณาข้ออ้างที่น่าจะเป็นไปได้มากที่สุดในการได้มาซึ่งข้อสรุปหรือเป็นการคาดเดาเหตุการณ์อย่างมีหลักการที่เป็นการอธิบายข้อสรุปที่เกิดขึ้น ทั้งนี้เป็นแค่เพียงการพิจารณาถึงความน่าจะเป็นแต่ไม่ยืนยันว่าเป็นเหตุการณ์ที่ถูกต้อง มักจะเริ่มต้นด้วยชุดที่ไม่สมบูรณ์ของการสังเกตและวิธีการที่จะอธิบายความเป็นไปได้ทั้งหมดสำหรับชุดที่ไม่สมบูรณ์นั้น การให้เหตุผลเชิงอธิบายทำให้การตัดสินใจที่ดีที่สุดในชีวิตประจำวันขึ้นกับข้อมูลที่มีอยู่ซึ่งมักจะไม่สมบูรณ์

4. การให้เหตุผลเชิงอุปมา (analogical reasoning) เป็นวิธีการประมวลผลข้อมูลที่เปรียบเทียบความคล้ายคลึงกันระหว่างแนวคิดใหม่กับแนวคิดที่เข้าใจแล้ว และใช้ความคล้ายคลึงกันนั้นเพื่อให้เข้าใจแนวคิดใหม่ การให้เหตุผลเชิงอุปมาเป็นรูปแบบของการให้เหตุผลแบบอุปนัยแบบหนึ่งที่มุ่งหวังจะทำความเข้าใจในสิ่งที่มีความเป็นไปได้ที่จะเป็นจริงมากกว่าการนิรนัยเพื่อพิสูจน์สิ่งที่เป็นจริง การให้เหตุผลเชิงอุปมานี้สามารถนำมาใช้เป็นวิธีการเรียนรู้ข้อมูลใหม่และเป็นส่วนหนึ่งของการอ้างเหตุผลที่ใช้อย่างแพร่หลาย

5. การให้เหตุผลเชิงจริยธรรม (moral reasoning) เป็นกิจกรรมทางจิตสำนึกที่ประกอบด้วยการเปลี่ยนแปลงในการกำหนดข้อมูลเกี่ยวกับผู้คนเพื่อให้สามารถเข้าถึงการตัดสินทางจริยธรรม เหตุผลเชิงจริยธรรมช่วยในการตัดสินใจว่าควรทำหรือไม่ควรทำอะไรเพื่อดำรงไว้ซึ่งจริยธรรม

จากที่กล่าวมาข้างต้น สรุปได้ว่า การแบ่งประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์มีด้วยกันหลายรูปแบบ ขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์และการนำไปใช้ สำหรับงานวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยเลือกใช้การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์โดยยึดตามแนวคิดของ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2555ก) ซึ่งประกอบไปด้วย 2 ด้าน คือ การให้เหตุผลแบบอุปนัย และการให้เหตุผลแบบนิรนัย

4.3 การวัดและประเมินความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

นักการศึกษาได้เสนอแนวทางการวัดและการประเมินการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

กรมวิชาการ (2546) ได้กำหนดเกณฑ์การประเมินการให้คะแนนการทำข้อสอบอัตนัย ทักษะ/กระบวนการให้เหตุผล ไว้ดังนี้

ตารางที่ 4 แสดงเกณฑ์การให้คะแนนผลการทำข้อสอบอัตนัย ทักษะ/การะบวนการให้เหตุของกรมวิชาการ

ระดับคะแนน/ความหมาย	ผลการทำข้อสอบอัตนัย	ความสามารถในการให้เหตุผล
4/ดีมาก	การแสดงวิธีทำชัดเจน สมบูรณ์ คำตอบถูกต้องครบถ้วน	มีการอ้างอิง เสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจอย่างสมเหตุสมผล
3/ดี	การแสดดงวิธีทำยังไม่ชัดเจนนัก แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง คำตอบถูกต้องครบถ้วน	มีการอ้างอิงที่ถูกต้องบางส่วนและเสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจ
2/พอใช้	การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจนหรือไม่แสดงวิธีทำ คำตอบถูกต้องครบถ้วน หรือการแสดงวิธีทำชัดเจน สมบูรณ์แต่ทำตอบไม่ถูกต้อง ขาดการตรวจสอบ	เสนอแนวคิดไม่สมเหตุสมผลในการประกอบการตัดสินใจ
1/ต้องปรับปรุง	การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจน แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง คำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่แสดงวิธีทำและคำตอบที่ได้ไม่ถูกต้อง แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง	มีความพยายามเสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจ
0/ไม่พยายาม	ทำได้ไม่ถึงเกณฑ์	ไม่มีแนวคิดประกอบการตัดสินใจ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2555ข) ได้กล่าวเกี่ยวกับเกณฑ์การประเมินผู้เรียนด้านการให้เหตุผล เพื่อเป็นแนวทาง ให้ครูผู้สอนใช้เป็นกรอบในการประเมินคุณภาพของผู้เรียน ดังนี้

ตารางที่ 5 แสดงเกณฑ์การประเมินเพื่อเป็นแนวทางให้ครูผู้สอนใช้เป็นกรอบในการประเมินคุณภาพของผู้เรียนด้านการให้เหตุผล

คะแนน/ความหมาย	ความสามารถในการให้เหตุผลที่ปรากฏให้เห็น
4/ดีมาก	มีการอ้างอิง เสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจอย่างสมเหตุสมผล

คะแนน/ความหมาย	ความสามารถในการให้เหตุผลที่ปรากฏให้เห็น
3/ดี	มีการอ้างอิงถูต้องบางส่วน และเสนอแนวคิดประกอบการตัดสินใจ
2/พอใช้	เสนอแนวคิดไม่สมเหตุสมผลในการประกอบการตัดสินใจ
1/ควรแก้ไข	มีความพยายามในการเสนอแนวคิดประกอบกาคัดสินใจ
0/ต้องปรับปรุง	ไม่มีแนวคิดประกอบการตัดสินใจ

อัมพร ม้าคนอง (2553) ได้กล่าวว่า การประเมินความสามารถในการให้เหตุผลมักประเมินตามประเภท ของการให้เหตุผลและลักษณะของเนื้อหาคณิตศาสตร์ โดยทั่วไปผู้สอนมักประเมินการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ 3 ประเภทต่อไปนี้

1. การให้เหตุผลเชิงตรรก เป็นการใช้หลักตรรกศาสตร์ในการอธิบายสิ่งต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น

1.1 การให้เหตุผลแบบอุปนัย เป็นการให้เหตุผลที่เกิดจากการสังเกตเห็นตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่างที่เหมือนกันหรือมีความสัมพันธ์แบบเดียวกัน จึงทำให้ได้ข้อสรุปที่มีเหตุผล

1.2 การให้เหตุผลแบบนิรนัย เป็นการให้เหตุผลที่เกิดจากการใช้หลักหรือกฎทั่วไปอ้างอิงไปสู่สิ่งที่กำลังพิจารณาในทางคณิตศาสตร์มักเป็นการให้เหตุผลที่อ้างอิง ทฤษฎีบท กฎ สูตร นิยาม ฯลฯ

2. การให้เหตุผลเชิงสัดส่วน เป็นการให้เหตุผลโดยใช้ความคิดเกี่ยวกับสัดส่วนของปริมาณที่หายไปหรือที่เปลี่ยนด้วยการเพิ่มขึ้นหรือลดลง เช่น การให้เหตุผลว่าเศษส่วนที่กำหนดให้จะมีค่าลดลง ถ้าตัวเศษลดลงในขณะที่ตัวส่วนมีค่าเท่ากัน

3. การให้เหตุผลเชิงปริภูมิ เป็นการให้เหตุผลเกี่ยวกับสิ่งที่ปรากฏเป็นมิติต่าง ๆ เช่น ภาพ 2 มิติ หรือทรง 3 มิติ เช่นการให้เหตุผลเพื่ออธิบายความสัมพันธ์หรือความเกี่ยวข้องกันระหว่างภาพ 2 มิติของวัตถุชิ้นหนึ่งกับภาพที่แสดงวัตถุนั้นใน 3 มิติ

ตอนที่ 5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

5.1 งานวิจัยต่างประเทศ

Ng (2003) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนเกรด 6 โปรแกรมความสามารถพิเศษในประเทศสิงคโปร์ เรื่อง จัตุรัสกล กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชายจำนวน 23 คน นักเรียนหญิงจำนวน 6 คน เป็นระยะเวลามากกว่า 6 เดือน และทำการเก็บรวบรวมข้อมูลโดยการบันทึกภาพและแบบบันทึกพฤติกรรมของนักเรียน พบว่าการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์เป็นวิธีการที่ส่งเสริมความยืดหยุ่นและความคิดสร้างสรรค์ในการแก้ปัญหาของนักเรียน ช่วยให้นักเรียนสามารถสร้าง

ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ช่วยให้นักเรียนมีความอดทนพากเพียรต่อการแก้ปัญหา และกระตุ้นให้นักเรียนสร้างข้อความคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ได้ด้วยตนเอง

Nana and Izlan (2017) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ของนักศึกษา คณะครุศาสตร์ ในประเทศอินโดนีเซีย โดยใช้สถานการณ์ปัญหาที่นักศึกษาไม่เคยพบในห้องเรียนผ่านกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างจำนวน 111 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 56 คน กลุ่มควบคุม 55 คน พบว่า นักศึกษาคณะครุศาสตร์ กลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ส่งผลทางบวกต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ

Kristanto, Amin, and Khabibah (2016) ได้ศึกษาและพัฒนาเกี่ยวกับสื่อการเรียนรู้โดยใช้คอมพิวเตอร์ มาช่วยในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ผ่านกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนเกรด 7 เรื่อง การสะท้อน กลุ่มตัวอย่างมีนักเรียนชาย 9 คน และนักเรียนหญิง 12 คน จากการวิเคราะห์และอภิปรายผลของการศึกษาในครั้งนี้ พบว่า สื่อคอมพิวเตอร์ที่ใช้ร่วมกับกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์มีคุณภาพที่ดี นักเรียนมีความกระตือรือร้นในระหว่างการทำกิจกรรม และนักเรียนให้การตอบสนองในเชิงบวกต่อการจัดกิจกรรม

Calleja (2011) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการบูรณากระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์เข้าไปสู่การเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาของครูคณิตศาสตร์ เป็นการวิจัยเชิงคุณภาพ ซึ่งมีผู้เข้าร่วมมีครูและนักเรียนหญิงจำนวน 19 คน พบว่า กระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์เป็นประโยชน์ต่อการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยนักเรียนจะการมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรม การทำงานเป็นกลุ่ม การอภิปราย และช่วยพัฒนาการสื่อสารสื่อความหมาย การนำเสนอ และความเข้าใจเชิงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนด้วย

5.2 งานวิจัยในประเทศ

วรรณวิสา จันทร์สุนทราพร (2557) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กระบวนการสืบเสาะหาความรู้ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสุคนธีรวิทย์ จังหวัดนครปฐม เรื่อง ความคล้าย กลุ่มตัวอย่างจำนวน 35 คน เป็นระยะเวลา 20 คาบ คาบละ 50 นาที ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลักการจัดการเรียนรู้ด้วยกระบวนการสืบเสาะหาความรู้สูงกว่าก่อนจัดการเรียนรู้ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.1

จุลจิรา ปิ่นมั่น (2558) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการสังเคราะห์รูปแบบกิจกรรมการเรียนรู้แบบสืบเสาะหาความรู้ 5Es ร่วมกับกระบวนการแก้ปัญหาของโพลยาของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนวัดหนองน้ำเขียว จังหวัดชลบุรี เรื่อง การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว กลุ่ม

ตัวอย่างนักเรียนจำนวน 36 คน ใช้เวลาในการทดลอง 11 ชั่วโมง ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์และทักษะการแก้ปัญหาทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียน หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบสืบเสาะหาความรู้ 5Es ร่วมกับกระบวนการแก้ปัญหาของโพลยาสูงกว่าก่อนจัดกิจกรรม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ชุติมา ฉุนอิ่ม และ วนินทร สุภาพ (2558) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์โดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับคำถามปลายเปิดของบาดแฮม ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนท่าทองพิทยาคม จังหวัดพิษณุโลก-อุตรดิตถ์ เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว กลุ่มตัวอย่างนักเรียนจำนวน 27 คน ผลการวิจัยพบว่า การคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนด้านการแก้ปัญหาและการให้เหตุผล หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับคำถามปลายเปิดของบาดแฮมสูงกว่าก่อนจัดกิจกรรม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียน ด้านการแก้ปัญหาและการให้เหตุผล หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิดร่วมกับคำถามปลายเปิดของบาดแฮมสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

เสาวรัตน์ รามแก้ว (2552) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้การสืบสอบแบบแนะแนวทางของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนพนมศึกษา จังหวัดสุราษฎร์ธานี กลุ่มตัวอย่างจำนวน 66 คน เป็นนักเรียนกลุ่มทดลอง จำนวน 34 คน และนักเรียนกลุ่มควบคุม จำนวน 32 คน ผลการวิจัยพบว่า พฤติกรรมการเรียนรู้มโนทัศน์และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมีการพัฒนาขึ้นอย่างเป็น ลำดับ นักเรียนสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของข้อมูล สร้างข้อความคาดการณ์ สรุป และตรวจสอบมโนทัศน์ได้ด้วย ตัวของนักเรียนเอง

สุดารัตน์ ภิรมย์ราช (2555) ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลของการใช้เทคนิค Think-Talk-Write ร่วมกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสอบของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนราชินีบน กรุงเทพฯ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียน 80 คน กลุ่มทดลอง 40 คน กลุ่มควบคุม 40 คน ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียน หลังการเรียนโดยใช้เทคนิค Think-Talk-Write ร่วมกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสอบสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และความสามารถในการให้เหตุผลของนักเรียนกลุ่มที่เรียนโดยใช้เทคนิค Think-Talk-Write ร่วมกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสอบสูงกว่านักเรียนกลุ่มที่เรียนโดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้ตามปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

พิฌาวรรณ แช่มชื่น ชมดง (2559) ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามรูปแบบ SSCS ร่วมกับการกระตุ้นโดยใช้คำถามของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนท่าคันโทวิทยาคาร จำนวน 65 คน แบ่งเป็นนักเรียนกลุ่มทดลองจำนวน 37 คน และนักเรียนกลุ่มควบคุมจำนวน 28 คน ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการให้เหตุผลและการ

แก้ปัญหาของนักเรียน หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามรูปแบบ SSCS ร่วมกับการกระตุ้นโดยใช้คำถามสูงกว่าก่อนจัดกิจกรรม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และความสามารถในการให้เหตุผลและการแก้ปัญหาของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามรูปแบบ SSCS ร่วมกับการกระตุ้นโดยใช้คำถามสูงกว่านักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

พีชาณิกา เพชรสังข์ (2556) ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้รูปแบบการเรียนการสอน 5E ร่วมกับคำถามปลายเปิดของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนพุทธจักรวิทยา จำนวน 60 คน แบ่งเป็นนักเรียนกลุ่มทดลองจำนวน 30 คน และนักเรียนกลุ่มควบคุมจำนวน 30 คน ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการให้เหตุผลและการคิดอย่างมีวิจารณญาณของนักเรียน หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้รูปแบบการเรียนการสอน 5E ร่วมกับคำถามปลายเปิดสูงกว่าก่อนจัดกิจกรรม อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และความสามารถในการให้เหตุผลและการคิดอย่างมีวิจารณญาณของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้รูปแบบการเรียนการสอน 5E ร่วมกับคำถามปลายเปิดสูงกว่านักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

บทที่ 3
วิธีการดำเนินการวิจัย

การวิจัยเรื่อง ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนมัธยมศึกษาชั้นปีที่ 3 ผู้วิจัยดำเนินการวิจัยตามขั้นตอน ดังนี้

1. การศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. การออกแบบงานวิจัย
3. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง
4. การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
    4.1 การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง
    4.2 การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล
5. การดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล
6. การวิเคราะห์ข้อมูล
7. สถิติที่ใช้ในการวิจัย

โดยแต่ละขั้นตอนมีรายละเอียดดังนี้

1. การศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งในและต่างประเทศ เพื่อเป็นข้อมูลและแนวทางในการวิจัย ดังนี้

1. ศึกษาเอกสาร วารสาร ตำรา ข้อมูลจากอินเทอร์เน็ต งานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งในประเทศและต่างประเทศที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ คำถามปลายเปิด ความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ เพื่อนำมาใช้เป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

2. ศึกษาหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 และหลักสูตรสถานศึกษาของโรงเรียนมัธยมศึกษาขนาดใหญ่ กรุงเทพมหานคร กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

3. ศึกษาเนื้อหาเรื่อง วงกลม จากหนังสือเรียนและคู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 และหนังสืออื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง เพื่อเป็นแนวทางในการทำแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์

4. ศึกษาเอกสาร วารสาร ตำรา ข้อมูลจากอินเทอร์เน็ต เกี่ยวกับวิธีวิจัย หลักการวัดและประเมินผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หลักการ ทฤษฎี วิธีการออกแบบและพัฒนาแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

2. การออกแบบการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยแบบศึกษากลุ่มเดียววัดสองครั้ง (The One-Group Pretest Posttest Design) ซึ่งประกอบด้วยกลุ่มทดลอง 1 กลุ่ม โดยมีรูปแบบการวิจัย ดังนี้

$$E \qquad O_1 \qquad X \qquad O_2$$

ตารางที่ 6 แสดงรูปแบบการวิจัย

กลุ่มตัวอย่าง	การทดสอบก่อนการทดลอง (O_1)	การทดลอง	การทดสอบหลังการทดลอง (O_2)
E	- ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ - ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์	X	- ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ - ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

สัญลักษณ์ที่ใช้ในรูปแบบการวิจัย

E แทน กลุ่มทดลอง (Experimental Group)

X แทน การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด

O_1 แทน การทดสอบก่อนการทดลอง (Pretest)

O_2 แทน การทดสอบหลังการทดลอง (Posttest)

3. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนมัธยมศึกษาสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 กรุงเทพมหานคร กระทรวงศึกษาธิการ

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยเลือกกลุ่มตัวอย่างแบบเจาะจง (Purposive sampling) เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาที่ 3 ที่ศึกษาอยู่ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2561 โรงเรียนมัธยมศึกษาขนาดใหญ่ สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 กรุงเทพมหานคร กระทรวงศึกษาธิการ จำนวน 1 ห้องเรียน โดยมีนักเรียนจำนวน 48 คน ซึ่งมีลักษณะคละ

ความสามารถในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนมีความพร้อมเชิงกายภาพเหมาะสมกับการจัดกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ ผู้บริหารและครูมีความสนใจ ให้ความร่วมมือ และอนุญาตให้ผู้วิจัยดำเนินการวิจัย

4. การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ แบ่งเป็น 2 ประเภท คือ เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง และเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ซึ่งมีรายละเอียด ดังนี้

4.1 การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

เครื่องมือที่ผู้วิจัยใช้ในการทดลองครั้งนี้ คือ แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด ซึ่งครอบคลุมสาระการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 12 แผน ระยะเวลา 12 คาบ (คาบละ 50 นาที) มีรายละเอียดในการดำเนินงาน ดังนี้

4.1.1 ศึกษาแนวคิด ทฤษฎี จากเอกสาร วารสาร ตำรา ข้อมูลจากอินเตอร์เน็ต และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด

4.1.2 ศึกษาหลักสูตรสถานศึกษาของโรงเรียนมัธยมศึกษาขนาดใหญ่ ที่พัฒนาตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

4.1.3 ศึกษาหลักการสอน วิธีการสอน การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้ และรายละเอียดของเนื้อหาเรื่อง วงกลม จากหนังสือเรียนและคู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

4.1.4 ศึกษาเนื้อหาเรื่อง วงกลม และแบ่งเนื้อหาให้เหมาะสมกับเวลาที่ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ซึ่งแบ่งได้ทั้งหมด 12 คาบ

4.1.5 เขียนแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้รายคาบครอบคลุมเนื้อหา วงกลม จำนวน 12 แผน โดยแต่ละแผนประกอบด้วย จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระสำคัญ สาระการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ สื่อ/แหล่งเรียนรู้ การวัดและการประเมินผล และบันทึกผลการจัดกิจกรรมเรียนรู้

4.1.6 นำแผนการจัดการเรียนรู้รายคาบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นจำนวน 12 แผน ให้อาจารย์ที่ปรึกษาตรวจพิจารณาความถูกต้องเหมาะสมของเนื้อหา และให้ข้อเสนอแนะเพื่อปรับปรุงแก้ไข ซึ่งมีประเด็นที่ต้องแก้ไข ดังนี้

4.1.6.1 กิจกรรมในการสำรวจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมีขั้นตอนในการดำเนินงานมากเกินไปควรปรับลดขั้นตอนให้เหมาะสมกับเวลาที่ใช้จัดกิจกรรม

4.1.6.2 ในบางแผนการจัดการเรียนรู้ควรเพิ่มตัวอย่างที่เข้าใจได้ง่ายและช่วยไต่ระดับความคิดของนักเรียนในการนำทฤษฎีบทไปใช้การแก้ปัญหา เช่น แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2, 4 และ 5

4.1.6.3 คำถามปลายเปิดที่ใช้กระตุ้นนักเรียนควรใช้คำพูดที่ชัดเจน เข้าใจได้ง่าย และเอื้อให้นักเรียนได้อธิบายเหตุผลของตัวเอง

4.1.6.4 ในบางแผนการจัดการเรียนรู้ควรจัดเตรียมสื่อการสอนเพื่อกระตุ้นความสนใจและการมีส่วนร่วมของนักเรียน รวมไปถึงจัดเตรียมวัสดุและอุปกรณ์ที่ใช้ในการดำเนินงานของนักเรียน เช่น แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 และ 2

4.1.7 นำแผนการจัดการเรียนรู้รายคาบที่ตรวจสอบและปรับปรุงแก้ไขแล้วนำไปใช้จริงกับกลุ่มทดลอง

สำหรับแผนการจัดการเรียนรู้ และกรอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดมีรายละเอียดดังนี้

ตารางที่ 7 แสดงแผนการจัดการเรียนรู้ที่จำแนกตามสาระการเรียนรู้ มโนทัศน์ และจำนวนคาบของแผนการเรียนรู้ เรื่อง วงกลม

สาระการเรียนรู้	แผนการจัดการเรียนรู้ที่	มโนทัศน์	จำนวนคาบ
วงกลม	1	**ส่วนประกอบของวงกลม** - วงกลม เป็นรูปเรขาคณิตบนระนาบที่แต่ละจุดบนรูปเรขาคณิตอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบเดียวกันเป็นระยะเท่ากัน - คอร์ด คือส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายทั้งสองอยู่บนวงกลมเดียวกัน - เส้นตัดวงกลม คือเส้นตรงที่ตัดวงกลมสองจุด - เส้นสัมผัสวงกลม คือเส้นตรงที่ตัดวงกลมเพียงจุดเดียวเท่านั้น และเรียกจุดนั้นว่าจุดสัมผัส - มุมที่จุดศูนย์กลาง คือ มุมที่มีจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นจุดยอดมุมและแขนทั้งสองของมุมตัดวงกลม	1

สาระการเรียนรู้	แผนการจัดการเรียนรู้ที่	มโนทัศน์	จำนวนคาบ
		- มุมในส่วนโค้งของวงกลม คือมุมที่มีจุดยอดมุมอยู่บนวงกลม และแขนทั้งสองของมุมตัดวงกลม - มุมในครึ่งวงกลม คือมุมที่มีจุดยอดมุมอยู่บนวงกลม และแขนทั้งสองของมุมผ่านจุดปลายทั้งสองของเส้นผ่านศูนย์กลางเส้นหนึ่ง	
มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม	2	**มุมในครึ่งวงกลม** - มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศาหรือหนึ่งมุมฉาก	1
	3	**มุมที่จุดศูนย์กลาง** - ในวงกลมเดียวกัน มุมที่จุดศูนย์กลาง จะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน	1
	4	**มุมในส่วนโค้งของวงกลม** - ในวงกลมเดียวกัน มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันจะมีขนาดเท่ากัน	1
	5	**มุมและส่วนโค้งที่รองรับมุม** - ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมวงเดียวกัน ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นจะยาวเท่ากัน	1
	6	**มุมและส่วนโค้งที่รองรับมุม** - ในวงวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมวงเดียวกัน ถ้ามุมในส่วนโค้งของวงกลมที่มีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน - ในวงวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมวงเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากัน แล้วมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน	1

สาระการเรียนรู้	**แผนการจัดการเรียนรู้ที่**	**มโนทัศน์**	**จำนวนคาบ**
		- ในวงวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมวงเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งยาวเท่ากัน แล้วมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งนั้นจะมีขนาดเท่ากัน	
คอร์ด	7	**รูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม** - ถ้ารูปสี่เหลี่ยมใด ๆ มีผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามเท่ากับสองมุมฉาก แล้วรูปสี่เหลี่ยมนั้นแนบในวงกลมได้	1
	8	**คอร์ดและส่วนโค้งของวงกลม** - ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้าคอร์ดยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองจะตัดวงกลมทำให้ส่วนโค้งน้อยยาวเท่ากัน และส่วนโค้งใหญ่ยาวเท่ากัน - ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองคอร์ดตัดวงกลมทำให้ส่วนโค้งน้อยยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน	1
	9	**คอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม** - ส่วนของเส้นตรงตั้งซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม และตัดคอร์ดที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลางจะมีสมบัติ ดังนี้ 1. ถ้าส่วนของเส้นตรงตั้งฉากกับคอร์ด แล้วส่วนของเส้นตรงนั้นจะแบ่งครึ่งคอร์ด 2. ถ้าส่วนของเส้นตรงแบ่งครึ่งคอร์ด แล้วส่วนของเส้นตรงนั้นจะตั้งฉากกับคอร์ด - เส้นตรงที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่งคอร์ดของวงกลมจะผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมนั้น	1
	10	**คอร์ดที่ยาวเท่ากัน** - ในวงกลมเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะทางเท่ากัน	1

สาระการเรียนรู้	แผนการจัดการเรียนรู้ที่	มโนทัศน์	จำนวนคาบ
		- ในวงกลมเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองเส้นอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นระยะเท่ากันแล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน	
เส้นสัมผัสวงกลม	11	**เส้นสัมผัสวงกลมและรัศมี** - เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส - เส้นตรงที่ตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดจุดหนึ่งบนวงกลมจะเป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดนั้น - ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุด ๆ หนึ่งภายนอกวงกลมมาสัมผัสวงกลมเดียวกันจะยาวเท่ากันและมีได้สองเส้น	1
	12	**เส้นสัมผัสและคอร์ด** - มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสของวงกลมที่จุดสัมผัสจะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น	1
		รวม	**12**

ตารางที่ 8 กรอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด

ขั้นตอนในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด
1. ขั้นเตรียมความพร้อม ครูใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนได้ทบทวนความรู้ที่ได้เรียนไปเมื่อคาบที่แล้ว ประกอบกับสื่อการสอนที่ครูจัดทำขึ้นเพื่อกระตุ้นความสนใจและการมีส่วนร่วมของนักเรียน
2. ขั้นจัดกิจกรรม ประกอบไปด้วย 4 ขั้นตอนย่อย ดังต่อไปนี้ *2.1 ทำความเข้าใจเพื่อตั้งปัญหา* ซึ่งในขั้นตอนนี้ ครูมีบทบาทในการนำเสนอกิจกรรม ใช้คำถามปลายเปิดเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความสนใจในการสำรวจ ช่วยแนะนำหรือยกตัวอย่างปัญหาเพื่อให้นักเรียนเห็นแนว

ขั้นตอนในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด
ทางการตั้งปัญหาและสามารถตั้งปัญหาเองได้ จากนั้นคัดเลือกปัญหาของนักเรียนที่ใกล้เคียงกับเนื้อหาที่จะเรียนมาเป็นปัญหาหลักในการสำรวจ นักเรียนมีบทบาทในการปฏิบัติตามคำสั่งของกิจกรรมและมีการสื่อสารโต้ตอบในชั้นเรียน ช่วยกันระดมความคิดและนำเสนอปัญหาที่ตนเองสนใจ กล่าวคือ ครูแจกเอกสารประกอบการทำกิจกรรมพร้อมทั้งนำเสนอกิจกรรมให้แก่นักเรียน แล้วให้นักเรียนทำความเข้าใจคำสั่งโดยการอ่านอย่างละเอียด และให้นักเรียนดำเนินการตามกิจกรรม ครูใช้คำถามปลายเปิดช่วยกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความสงสัย เพื่อนำไปสู่การสำรวจสถานการณ์ โดยการเชื่อมโยงความรู้ผ่านการยกตัวอย่างหรือสังเกตลักษณะที่คล้าย/ต่างกันของข้อมูล เพื่อทำความเข้าใจสถานการณ์และสามารถตั้งปัญหาเพื่อสำรวจสถานการณ์นั้น ๆ ตัวอย่างเช่น - นักเรียนลองยกตัวอย่างที่สอดคล้องกับสถานการณ์มาคนละหนึ่งตัวอย่างหน่อยสิ - นักเรียนคิดว่าข้อมูล/ตัวอย่างจากสถานการณ์มีลักษณะเป็นอย่างไร ทำไมถึงคิดเช่นนั้น ไหนลองอธิบายให้ฟังหน่อย จากนั้นครูเลือกปัญหาที่นักเรียนนำเสนอมาหนึ่งปัญหา เพื่อเป็นปัญหาหลักให้นักเรียนทั้งห้อง ดำเนินการสำรวจต่อไป <u>*2.2 ใช้กลวิธีเพื่อสร้างข้อความคาดการณ์*</u> ซึ่งในขั้นตอนนี้ ครูมีบทบาทในการกระตุ้นความคิดของผู้เรียนผ่านการใช้คำถามปลายเปิด เพื่อให้นักเรียนเกิดการสังเกตความสัมพันธ์จากข้อมูลที่นักเรียนสำรวจ และช่วยชี้แนะนักเรียนในการสร้างข้อความคาดการณ์ นักเรียนมีบทบาทในการเลือกใช้กลวิธีที่เหมาะสมเพื่อสำรวจหาข้อมูลหรือความสัมพันธ์ แล้วนำมาสร้างเป็นข้อความคาดการณ์ กล่าวคือ ครูให้นักเรียนดำเนินการตามกิจกรรมในขั้นของการหาคำตอบของปัญหาที่เลือก นักเรียนจะเลือกใช้กลวิธีเพื่อสำรวจและศึกษาข้อมูลของสถานการณ์ โดยการยกตัวอย่างเฉพาะหรือการเลือกใช้กลวิธีแบบอื่น ๆ ในระหว่างสำรวจข้อมูลนักเรียนจะสังเกตเห็นความสัมพันธ์หรือแบบรูป โดยครูจะใช้คำถามปลายเปิดที่ให้นักเรียนสังเกตลักษณะของความสัมพันธ์ เปรียบเทียบความเหมือนความต่างของข้อมูล ตัวอย่างเช่น - นักเรียนคิดว่าแต่ละกรณีของปัญหานี้ สัมพันธ์หรือเกี่ยวข้องกันอย่างไร ลองอธิบายให้ฟังหน่อย

ขั้นตอนในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด

- นักเรียนลองสังเกตว่าข้อมูล/ตัวอย่างของปัญหา แต่ละส่วนมีความเหมือนหรือแตกต่างกันอย่างไร ทำไมถึงคิดเช่นนั้น

เมื่อนักเรียนสามารถสังเกตเห็นความสัมพันธ์หรือแบบรูป ครูจะนำนักเรียนสร้างข้อความคาดการณ์ที่จะเป็นคำตอบของปัญหาที่ตั้ง

<u>*2.3 พิสูจน์ข้อความคาดการณ์และวางนัยทั่วไป*</u>

ซึ่งในขั้นตอนนี้ ครูมีบทบาทในการชี้แนะแนวทางในการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ผ่านการใช้คำถามปลายเปิด เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนเกิดแนวคิดหรือเชื่อมโยงความรู้ที่สามารถนำมาใช้เพื่อการพิสูจน์ นักเรียนมีบทบาทในการเขียนแสดงและอธิบายการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ที่สร้างขึ้นว่าเป็นจริงหรือไม่ กล่าวคือ

ครูให้นักเรียนพิสูจน์ข้อความคาดการณ์โดยใช้หลักพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยครูจะยกตัวอย่างประกอบการอธิบาย และคอยชี้แนะนักเรียนในการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ เพื่อให้นักเรียนเกิดแนวคิดในการพิสูจน์ และสามารถให้เหตุผลและใช้สัญลักษณ์/การดำเนินการทางพีชคณิตได้อย่างถูกต้องและสมเหตุสมผล ถ้านักเรียนพิสูจน์แล้วว่าข้อความคาดการณ์ที่ได้ไม่เป็นความจริง นักเรียนจะต้องกลับไปยังขั้นตอนที่ 2.2 เพื่อค้นหาความสัมพันธ์หรือแบบรูปแล้วสร้างข้อความคาดการณ์ใหม่ ครูคอยใช้คำถามปลายเปิดที่ให้นักเรียนได้อธิบายวิธีการและเหตุผลในการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์และช่วยให้นักเรียนสามารถดำเนินการพิสูจน์ได้ ตัวอย่างเช่น

- นักเรียนคิดว่ามีกฎ ทฤษฎี หรือความรู้อะไรที่สามารถนำมาใช้เพื่อการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์นี้ได้บ้าง

- นักเรียนคิดว่าตัวอย่างที่ครูแสดงแต่ละแบบ สามารถใช้ข้อความคาดการณ์นี้ในการหาคำตอบได้หรือไม่ เพราะเหตุใดถึงคิดเช่นนั้น

หลังจากนักเรียนพบว่าข้อความคาดการณ์ที่นักเรียนสร้างขึ้นนั้นเป็นจริง ครูนำนักเรียนวางนัยทั่วไป จากนั้นครูสรุปข้อความคาดการณ์เป็นทฤษฎีบทให้นักเรียนได้รับทราบ

<u>*2.4 ทบทวนและขยายความคิด*</u>

ซึ่งในขั้นตอนนี้ ครูมีบทบาทในการกระตุ้นให้นักเรียนทบทวนแต่ละขั้นตอนว่าตนเองปฏิบัติตามคำสั่งของกิจกรรมครบถ้วนหรือไม่ พร้อมทั้งตรวจสอบความถูกต้องของแต่ละขั้นตอนในกิจกรรม และครูใช้คำถามปลายเปิดเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนได้ขยายความคิดจากสิ่งที่เพิ่งวางนัยทั่วไปหรือค้นหาความรู้เพิ่มเติม นักเรียนมีบทบาทในการตรวจสอบความถูกต้องของกระบวนการ

ขั้นตอนในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด
ทำงานและร่วมกันเสนอความคิดเห็นเกี่ยวกับสิ่งที่นักเรียนสนใจเพิ่มเติม กล่าวคือ ครูให้นักเรียนทบทวนและตรวจสอบการทำงานว่าถูกต้องครบถ้วนหรือไม่ หลังจากนั้นครูใช้คำถามปลายเปิดให้นักเรียนได้ร่วมกันเสนอความคิดเห็นเกี่ยวกับสิ่งที่นักเรียนสนใจ เพื่อสำรวจและค้นหาความรู้เพิ่มเติม ตัวอย่างเช่น - นักเรียนคิดว่าสถานการณ์นี้ ยังข้อมูลส่วนไหนที่น่าสนใจในการสำรวจอีกบ้าง โดยหากมีประเด็นปัญหาใหม่ ครูจะเก็บความคิดเห็นของนักเรียนเพื่อไปสร้างปัญหาในการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ในคาบต่อไป
3. ขั้นพัฒนาทักษะ ครูให้นักเรียนนำความรู้และทฤษฎีบทที่ได้ไปใช้แก้ปัญหาในแบบฝึกหัด ของหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 3 เพื่อเป็นการทบทวนความรู้และทฤษฎีที่ได้เรียนรู้แล้ว โดยครูจะยกตัวอย่างประกอบการอธิบาย เพื่อเป็นตัวอย่างในการนำทฤษฎีบทไปใช้ในการแก้ปัญหา ครูคอยสนับสนุนและช่วยเหลือนักเรียนที่เกิดปัญหาในการทำแบบฝึกหัด โดยการชี้แนะแนวทางการคิดหรือยกตัวอย่างเพิ่มเติมเพื่อให้นักเรียนสามารถดำเนินการต่อไปได้
4. ขั้นสรุปสิ่งที่เรียนรู้ ครูนำนักเรียนร่วมกันอภิปราย เพื่อสรุปเป็นสาระความรู้ที่ได้จากการทำกิจกรรมและการทำแบบฝึกหัด และนักเรียนส่งใบกิจกรรมพร้อมแบบฝึกหัด

4.2 การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

เครื่องมือที่ผู้วิจัยใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลวิจัยครั้งนี้ ประกอบด้วย แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยมีรายละเอียดของการสร้างและพัฒนาเครื่องมือ ดังนี้

4.2.1 แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ มีจำนวน 2 ฉบับ คือ ฉบับก่อนเรียน เรื่อง การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และฉบับหลังเรียน เรื่อง วงกลม โดยแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ทั้งสองฉบับเป็นแบบอัตนัย ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นฉบับละ 7 ข้อ ใช้จริงฉบับละ 4 ข้อ (คะแนนเต็มข้อละ 16 คะแนน) ซึ่งมีขั้นตอนในกาสร้างและพัฒนาเครื่องมือ ดังนี้

1) ศึกษาเนื้อหาสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เพื่อสร้างแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยมีรายละเอียด ดังนี้

1. ศึกษาเนื้อหาสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ จากหนังสือเรียนและคู่มือครู เรื่อง การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตาม หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เพื่อสร้างแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียน

2. ศึกษาเนื้อหาสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ จากหนังสือเรียนและคู่มือครู เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นศึกษาพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เพื่อสร้างแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับหลังเรียน

2) ศึกษาความหมาย องค์ประกอบ และกำหนดกรอบการวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้วิจัยสร้างตามกระบวนแก้ปัญหาของ Krulik and Rudnick (1993) โดยปรับปรุงจากแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของ กิตติพันธ์ วิบุลศิลป์ (2560) ซึ่งประกอบด้วย 4 ด้าน ดังนี้

1. ด้านความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหา หมายถึง ความสามารถในการระบุข้อมูลสำคัญ การระบุคำถาม และแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลในปัญหาโดยการวาดแผนภาพ วาดกราฟ สร้างตาราง สร้างสมการ หรืออธิบายโดยใช้ข้อความ

2. ด้านความสามารถในการเลือกแผน หมายถึง ความสามารถในการเลือกวิธีการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม

3. ด้านความสามารถในการดำเนินการตามแผน หมายถึง ความสามารถในการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้องและเหมาะสมตามแผนที่วางไว้

4. ด้านความสามารถในการสะท้อนและขยายผล หมายถึง ความสามารถในการตรวจสอบความถูกต้องและความสมเหตุสมผลของคำตอบ และตั้งปัญหาใหม่ที่น่าสนใจโดยมีความเกี่ยวข้องหรือสัมพันธ์กับบริบทของปัญหาเดิม

3) สร้างแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ทั้งสองฉบับ คือ ฉบับก่อนเรียนและฉบับหลังเรียน โดยแต่ละฉบับเป็นข้อสอบอัตนัย 7 ข้อ

4) สร้างเกณฑ์การตรวจให้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ทั้งสองฉบับที่ปรับปรุงมาจากเกณฑ์การประเมินผลของ กิตติพันธ์ วิบุลศิลป์ (2560) ตามกรอบการสร้างแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่กำหนดไว้ แต่ละข้อคำถามของแบบวัดมี 6 องค์ประกอบย่อย ซึ่งมีรายละเอียดในการตรวจให้คะแนน ดังนี้

ตารางที่ 9 เกณฑ์การตรวจให้คะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

1. ด้านความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหา

เกณฑ์การพิจารณา	คะแนน
1.1 ระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดและคำถามในสถานการณ์ปัญหา	
- ระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ถูกต้องครบถ้วน และระบุสิ่งที่โจทย์ถามได้ถูกต้อง	2
- ระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ถูกต้องครบถ้วน แต่ระบุสิ่งที่โจทย์ถามไม่ถูกต้อง หรือ - ระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไม่ถูกต้องหรือไม่ครบถ้วน แต่ระบุสิ่งที่โจทย์ถามได้ถูกต้อง	1
- ระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ถามไม่ถูกต้อง หรือไม่ทำเลย	0
1.2 แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลในปัญหา	
- แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ได้ถูกต้องและสามารถหาความสัมพันธ์เพิ่มเติมได้	2
- แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ได้ถูกต้อง	1
- แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ไม่ถูกต้อง หรือไม่แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลเลย	0

2. ด้านความสามารถในการเลือกแผน

เกณฑ์การพิจารณา	คะแนน
2.1 เลือกวิธีการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม	
- ระบุสิ่งแรกที่ต้องหาค่า/สิ่งแรกที่ต้องดำเนินการ และอธิบายแนวทางที่นำไปสู่การหาคำตอบได้ถูกต้องครบถ้วน	4
- ระบุสิ่งแรกที่ต้องหาค่า/สิ่งแรกที่ต้องดำเนินการได้ถูกต้อง แต่อธิบายแนวทางที่นำไปสู่การหาคำตอบได้ถูกต้องบางส่วนมากกว่าร้อยละ 50 หรือ - ระบุสิ่งแรกที่ต้องหาค่า/สิ่งแรกที่ต้องดำเนินการไม่ถูกต้อง แต่อธิบายแนวทางที่นำไปสู่การหาคำตอบได้ถูกต้องครบถ้วน หรือ	3

เกณฑ์การพิจารณา	คะแนน
- ระบุสิ่งแรกที่ต้องหาค่า/สิ่งแรกที่ต้องดำเนินการได้ถูกต้อง แต่อธิบายแนวทางที่นำไปสู่การหาคำตอบได้ถูกต้องบางส่วนไม่เกินร้อยละ 50 หรือ - ระบุสิ่งแรกที่ต้องหาค่า/สิ่งแรกที่ต้องดำเนินการไม่ถูกต้อง แต่อธิบายแนวทางที่นำไปสู่การหาคำตอบคำตอบได้ถูกต้องบางส่วนมากกว่าร้อยละ 50	2
- ระบุสิ่งแรกที่ต้องหาค่า/สิ่งแรกที่ต้องดำเนินการได้ถูกต้อง แต่อธิบายแนวทางที่นำไปสู่การหาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือ - ระบุสิ่งแรกที่ต้องหาค่า/สิ่งแรกที่ต้องดำเนินการไม่ถูกต้อง แต่อธิบายแนวทางที่นำไปสู่การหาคำตอบได้ถูกต้องบางส่วนไม่เกินร้อยละ 50	1
- ระบุสิ่งแรกที่ต้องหาค่า/สิ่งแรกที่ต้องดำเนินการไม่ถูกต้อง และอธิบายแนวทางที่นำไปสู่การหาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่ระบุและอธิบายเลย	0

3. ความสามารถในการดำเนินการตามแผน

เกณฑ์การพิจารณา	คะแนน
3.1 ดำเนินการทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง	
- แสดวิธีการแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องทั้งหมด และคำตอบถูกต้อง	4
- แสดงวิธีการแก้ปัญหาได้ถูกต้องทั้งหมด แต่คำตอบไม่ถูกต้อง	3
- แสดงวิธีการแก้ปัญหาได้ถูกต้องบางส่วนมากกว่าร้อยละ 50 และคำตอบไม่ถูกต้อง	2
- แสดงวิธีการแก้ปัญหาได้ถูกต้องบางส่วนแต่ไม่เกินร้อยละ 50 และคำตอบไม่ถูกต้อง	1
- แสดงวิธีการแก้ปัญหาไม่ถูกต้องหรือไม่แสดงวิธีทำเลย	0

4. ความสามารถในการสะท้อนและขยายผล

เกณฑ์การพิจารณา	คะแนน
4.1 สรุปคำตอบและตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบ	
- สรุปคำตอบและแสดงวิธีตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบได้ถูกต้อง	2
- สรุปคำตอบได้ถูกต้อง แต่แสดงวิธีตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบไม่ถูกต้อง หรือ - สรุปคำตอบไม่ถูกต้อง แต่แสดงวิธีตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบได้ถูกต้อง	1

เกณฑ์การพิจารณา	คะแนน
- สรุปคำตอบและแสดงวิธีตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบไม่ถูกต้องหรือไม่ได้สรุปคำตอบหรือแสดงวิธีตรวจสอบเลย	0
4.2 ตั้งปัญหาใหม่ที่น่าสนใจ	
- ตั้งปัญหาใหม่ที่น่าสนใจโดยมีการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไข และสัมพันธ์กับบริบทของปัญหาเดิม	2
- ตั้งปัญหาใหม่ซึ่งสัมพันธ์กับบริบทของปัญหาเดิม แต่ไม่เปลี่ยนแปลงเงื่อนไข หรือ - ตั้งปัญหาใหม่โดยมีการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไข แต่ไม่สัมพันธ์กับบริบทของปัญหาเดิม	1
- ไม่ตั้งปัญหาใหม่เลย	0

5) นำแบบวัดที่สร้างขึ้น เสนออาจารย์ที่ปรึกษา เพื่อตรวจสอบความถูกต้องและให้คำแนะนำเพื่อนำไปปรับปรุงแก้ไข

6) นำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ได้ปรับปรุงตามคำแนะนำของอาจารย์ที่ปรึกษา ส่งให้ผู้ทรงคุณวุฒิจำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความตรงตามเนื้อหา ความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ และให้คำแนะนำเพื่อไปปรับปรุงแก้ไข โดยการพิจารณาความตรงเชิงเนื้อหาของแบบวัดโดยใช้ดัชนี IOC (item objective congruence) ที่ผู้วิจัยกำหนดเกณฑ์ว่าค่าดัชนี IOC ต้องมีค่าตั้งแต่ 0.67 ขึ้นไป จึงถือว่าข้อคำถามนั้นสอดคล้องกับโครงสร้างและนิยามที่ต้องการวัด ซึ่งผู้ทรงคุณวุฒิให้ข้อเสนอแนะโดยมีประเด็นที่ต้องแก้ไขคือ ควรปรับภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในโจทย์ปัญหาให้สื่อความหมายชัดเจน ถูกต้อง และเข้าใจได้ง่าย ตัวอย่างเช่น

<u>โจทย์เดิม</u>

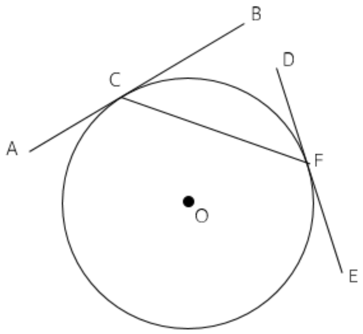
พ่อค้าซื้อแป้งสองชนิดมาผสมกันให้ได้ 50 กิโลกรัม เขาซื้อแป้งชนิดแรกกิโลกรัมละ 25 บาท ซื้อแป้งชนิดที่สองกิโลกรัมละ 15 บาท เมื่อนำมาผสมกันแล้วขายไปได้กำไร 25% คิดเป็นเงินทั้งหมด 225 บาท อยากทราบว่าพ่อค้าซื้อแป้งมาแต่ละชนิดอย่างละกี่กิโลกรัม

<u>โจทย์ที่ได้รับการแก้ไข</u>

พ่อค้าซื้อแป้งสองชนิดมาผสมกันให้ได้ 50 กิโลกรัม เขาซื้อแป้งชนิดแรกกิโลกรัมละ 25 บาท ซื้อแป้งชนิดที่สองกิโลกรัมละ 15 บาท เมื่อนำมาผสมกันแล้วขายไปได้กำไร 25% ซึ่งส่วนที่ได้กำไรคิดเป็นเงิน 225 บาท อยากทราบว่าพ่อค้าซื้อแป้งมาชนิดละกี่กิโลกรัม

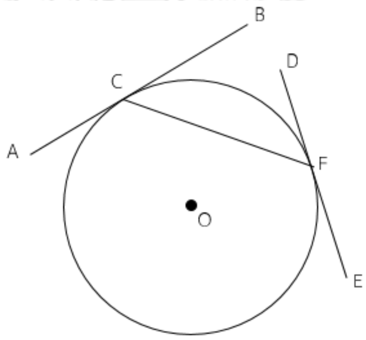
<u>โจทย์เดิม</u>

O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม AB สัมผัสวงกลมที่จุด C และ DE สัมผัสวงกลมที่จุด F มุม $C\hat{F}D = 50^\circ$ อยากทราบว่ามุม $A\hat{C}F$ มีขนาดกี่องศา



<u>โจทย์ที่ได้รับการแก้ไข</u>

O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $\overline{AB}$ สัมผัสวงกลมที่จุด C และ $\overline{DE}$ สัมผัสวงกลมที่จุด F $C\hat{F}D = 50^\circ$ อยากทราบว่า $A\hat{C}F$ มีขนาดกี่องศา



7) นำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ได้ปรับปรุงแก้ไขแล้วจากข้อ 6 ไปทดลองใช้ (Try out) กับนักเรียนที่มีลักษณะคละความสามารถในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในโรงเรียนที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง ซึ่งฉบับก่อนเรียนทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่กำลังศึกษาในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2561 และผ่านการเรียนเรื่อง การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว มาแล้วจำนวน 41 คน และฉบับหลังเรียนทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่กำลังศึกษาในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2561 และผ่านการเรียนเรื่อง วงกลม มาแล้วจำนวน 37 คน จากนั้นนำแบบวัดทั้งสองฉบับมาตรวจสอบให้คะแนน และหาคุณภาพของแบบวัด

8) นำคะแนนที่ได้จากข้อ 7 มาวิเคราะห์คุณภาพของแบบวัดทั้งสองฉบับหาค่าความเที่ยงของแบบวัดโดยใช้สูตรสัมประสิทธิ์แอลฟาของครอนบาค (Cronbach Alpha Coefficient) โดยกำหนดเกณฑ์ค่าความเที่ยงตั้งแต่ 0.6 ขึ้นไป ค่าความยาก (p) มีค่าอยู่ระหว่าง 0.20 - 0.80 และค่าอำนาจจำแนก (r) มีค่าตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป ซึ่งได้ผลการวิเคราะห์เป็นดังนี้

ประเด็นการวิเคราะห์คุณภาพแบบวัด	ฉบับก่อนเรียน	ฉบับหลังเรียน
ค่าความเที่ยง	0.75	0.73
ค่าความยาก (p)	0.11 - 0.37	0.21 - 0.36
ค่าอำนาจจำแนก (r)	0.08 - 0.55	0.18 - 0.48

9) เลือกข้อสอบที่มีค่าความเที่ยง ค่าความยาก (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ตามข้อ 8 มาสร้างเป็นแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียนและหลังเรียน ฉบับละ 4 ข้อ ซึ่งมีค่าความเที่ยง ค่าความยาก (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ดังนี้

ประเด็นการวิเคราะห์คุณภาพแบบวัด	ฉบับก่อนเรียน	ฉบับหลังเรียน
ค่าความเที่ยง	0.69	0.76
ค่าความยาก (p)	0.30 - 0.40	0.34 - 0.41
ค่าอำนาจจำแนก (r)	0.34 - 0.62	0.37 - 0.53

10) นำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ทั้งสองฉบับ ที่มีคุณภาพตามเกณฑ์ที่กำหนดไปใช้กับนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่างการวิจัย

4.2.2 แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ มีจำนวน 2 ฉบับ คือ ฉบับก่อนเรียน เรื่อง การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เส้นขนาน แบบรูปและความสัมพันธ์ พื้นฐานทางเรขาคณิต และฉบับหลังเรียน เรื่อง วงกลม การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เส้นขนาน แบบรูปและความสัมพันธ์ พื้นฐานทางเรขาคณิต โดยแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ทั้งสองฉบับเป็นแบบอัตนัย ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ฉบับละ 10 ข้อ ใช้จริงฉบับละ 6 ข้อ (คะแนนเต็มข้อละ 3 คะแนน) ซึ่งมีขั้นตอนในการสร้างและพัฒนาเครื่องมือ ดังนี้

1) ศึกษาเนื้อหาสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เพื่อสร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ โดยมีรายละเอียด ดังนี้

1. ศึกษาเนื้อหาสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ จากหนังสือเรียนและคู่มือครู เรื่อง การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เส้นขนาน แบบรูปและความสัมพันธ์ พื้นฐานทางเรขาคณิต ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เพื่อสร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียน

2. ศึกษาเนื้อหาสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ จากหนังสือเรียนและคู่มือครู เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นศึกษาพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เพื่อสร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ฉบับหลังเรียน

2) ศึกษาความหมาย องค์ประกอบ และกำหนดกรอบการวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้วิจัยสร้างตามแนวคิดการให้เหตุผลของ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2555ก) ประกอบด้วย 2 องค์ประกอบ ดังนี้

1. ความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย หมายถึง ความสามารถในการสังเกตข้อเท็จจริงย่อย ๆ แล้วรวบรวมข้อมูลเพื่อหาแบบรูปที่จะนำไปสร้างเป็นข้อคาดการณ์หรือข้อสรุป แล้วพยายามหากฎหรือหลักการทั่วไป

2. ความสามารถในการให้เหตุผลแบบนิรนัย หมายถึง ความสามารถในการคิดหาข้อสรุปที่รู้ว่าเป็นจริงหรือยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ แล้วใช้เหตุผลตามหลักตรรกศาสตร์ อ้างจากสิ่งที่รู้ว่าเป็นจริงนั้นเพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่เป็นส่วนย่อยหรือผลสรุปที่เพิ่มเติมขึ้นมาใหม่ อย่างสมเหตุสมผล

3) สร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ทั้งสองฉบับ คือ ฉบับก่อนเรียนและฉบับหลังเรียน โดยแต่ละฉบับเป็นข้อสอบอัตนัย 10 ข้อ โดยแบ่งเป็น 2 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 ความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย จำนวน 5 ข้อ

ตอนที่ 2 ความสามารถในการให้เหตุผลแบบนิรนัย จำนวน 5 ข้อ

4) สร้างเกณฑ์การตรวจให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ทั้งสองฉบับที่ปรับปรุงจากเกณฑ์การประเมินของ กรมวิชาการ (2546) ตามกรอบการสร้างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่กำหนดไว้ ซึ่งมีรายละเอียดในการตรวจให้คะแนน ดังนี้

ตารางที่ 10 เกณฑ์การตรวจให้คะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

1. ความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

เกณฑ์การพิจารณา	คะแนน
- แสดงการวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ของข้อมูล และสร้างข้อคาดการณ์หรือข้อสรุปได้ถูกต้องครบถ้วน	3
- แสดงการวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ถูกต้อง แต่สร้างข้อคาดการณ์หรือข้อสรุปได้ถูกต้องบางส่วน หรือ	2

เกณฑ์การพิจารณา	คะแนน
- แสดงการวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ของข้อมูลไม่ถูกต้อง แต่สร้างข้อคาดการณ์หรือข้อสรุปได้ถูกต้องครบถ้วน	
- แสดงการวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ของข้อมูลได้ถูกต้อง แต่สร้างข้อคาดการณ์หรือข้อสรุปไม่ถูกต้อง หรือ - แสดงการวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ของข้อมูลไม่ถูกต้อง แต่สร้างข้อคาดการณ์หรือข้อสรุปได้ถูกต้องบางส่วน	1
- แสดงการวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ของข้อมูลไม่ถูกต้อง และสร้างข้อคาดการณ์หรือข้อสรุปไม่ถูกต้อง หรือไม่แสดงเลย	0

2. ความสามารถในการให้เหตุผลแบบนิรนัย

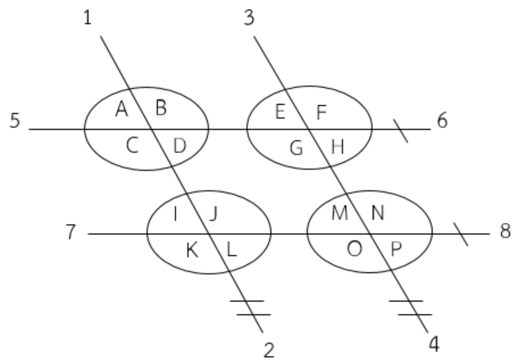
เกณฑ์การพิจารณา	คะแนน
- อธิบายเหตุผลโดยใช้กฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่เป็นส่วนย่อยหรือผลสรุปได้อย่างถูกต้องครบถ้วน	3
- อธิบายเหตุผลโดยใช้กฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่เป็นส่วนย่อยหรือผลสรุปได้ถูกต้องบางส่วนมากกว่าร้อยละ 50	2
- อธิบายเหตุผลโดยใช้กฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่เป็นส่วนย่อยหรือผลสรุปได้ถูกต้องบางส่วนแต่ไม่เกินร้อยละ 50	1
- อธิบายเหตุผลโดยใช้กฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปสู่ข้อสรุปที่เป็นส่วนย่อยหรือผลสรุปไม่ถูกต้อง หรือไม่อธิบายเลย	0

5) นำแบบวัดที่สร้างขึ้น เสนออาจารย์ที่ปรึกษา เพื่อตรวจสอบความถูกต้องและให้คำแนะนำเพื่อนำไปปรับปรุงแก้ไข

6) นำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ได้ปรับปรุงตามคำแนะนำของอาจารย์ที่ปรึกษา ส่งให้ผู้ทรงคุณวุฒิจำนวน 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความตรงตามเนื้อหา ความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ และให้คำแนะนำเพื่อไปปรับปรุงแก้ไข โดยการพิจารณาความตรงเชิงเนื้อหาของแบบวัดโดยใช้ดัชนี IOC (item objective congruence) ที่ผู้วิจัยกำหนดเกณฑ์ว่าค่าดัชนี IOC ต้องมีค่าตั้งแต่ 0.67 ขึ้นไป จึงถือว่าข้อคำถามนั้นสอดคล้องกับโครงสร้างและนิยามที่ต้องการวัด ซึ่งผู้ทรงคุณวุฒิให้ข้อเสนอแนะโดยมีประเด็นที่ต้องแก้ไขคือ ควรปรับภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในโจทย์ปัญหาให้สื่อความหมายชัดเจน ถูกต้อง และเข้าใจได้ง่าย ตัวอย่างเช่น

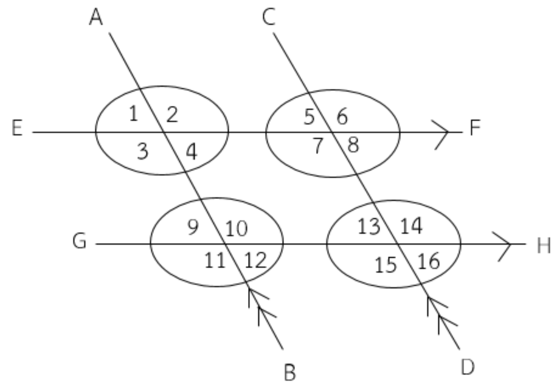
<u>โจทย์เดิม</u>

กำหนดให้ $\overline{12}$ // $\overline{34}$ และ $\overline{56}$ // $\overline{78}$ มุม D มีขนาดเท่ากับมุมใดบ้าง จงอธิบายและให้เหตุผล



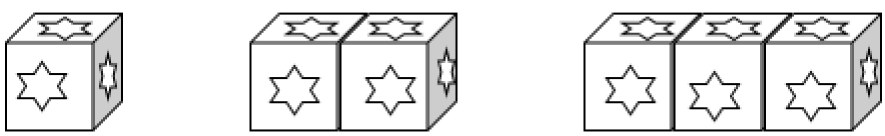
<u>โจทย์ที่ได้รับการแก้ไข</u>

กำหนดให้ $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$ และ $\overline{EF}$ // $\overline{GH}$ จงให้เหตุผลประกอบคำอธิบายถึงการเท่ากันของทุกมุมที่มีขนาดเท่ากับมุม 4



<u>โจทย์เดิม</u>

โรงงานผลิตเลโก้แห่งหนึ่งจะผลิตเลโก้ออกมามีลักษณะเป็นแท่งลูกบาศก์ติดกัน และจะติดสติ๊กเกอร์ 1 ชิ้น ต่อ 1 ด้านของลูกบาศก์เท่านั้น ดังภาพที่แสดง



1. ถ้าโรงงานผลิตแท่งเลโก้ที่มีลูกบาศก์ติดกัน 4 ลูก โรงงานจะใช้สติ๊กเกอร์น้อยที่สุดกี่ชิ้น

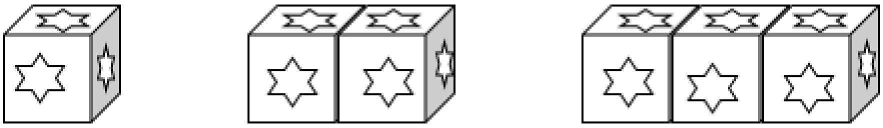
....

2. ถ้ากำหนดให้ x คือ จำนวนของลูกบาศก์ และ y คือ จำนวนของสติ๊กเกอร์ที่ต้องใช้ติด จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y

....

<u>โจทย์ที่ได้รับการแก้ไข</u>

โรงงานผลิตเลโก้แห่งหนึ่งจะผลิตเลโก้ออกมามีลักษณะเป็นแท่งลูกบาศก์ติดกันในแนวยาว และจะติดสติ๊กเกอร์ 1 ชิ้น ต่อ 1 ด้านของลูกบาศก์เท่านั้น ดังภาพที่แสดง



1. ถ้าโรงงานผลิตแท่งเลโก้ที่มีลูกบาศก์ติดกัน 4 ลูกในแนวยาวดังภาพ โรงงานจะใช้สติ๊กเกอร์น้อยที่สุดกี่ชิ้น

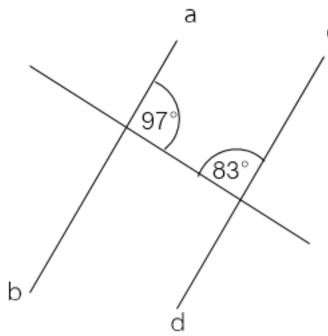
....

2. ถ้ากำหนดให้ x คือ จำนวนของลูกบาศก์ และ y คือ จำนวนของสติ๊กเกอร์ที่ต้องใช้ จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y

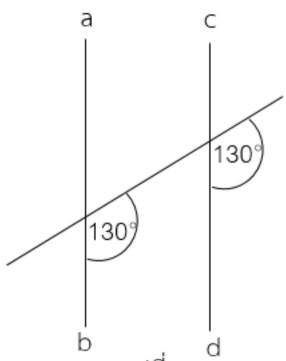
....

<u>โจทย์เดิม</u>

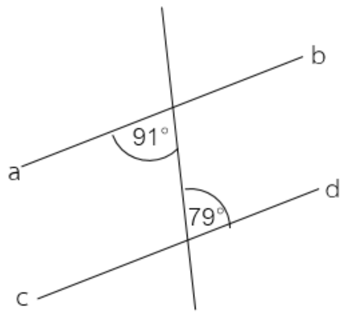
ส่วนของเส้นตรง $\overline{ab}$ และ $\overline{cd}$ ในรูปใดบ้างที่ขนานกัน เพราะเหตุใดจงอธิบาย



รูปที่ 1



รูปที่ 2



รูปที่ 3

1. ส่วนของเส้นตรงในรูปใดบ้างที่ขนานกัน

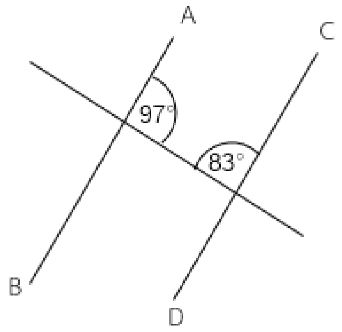
....

2. เพราะเหตุใด

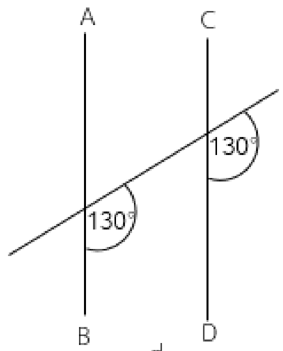
....

<u>โจทย์ที่ได้รับการแก้ไข</u>

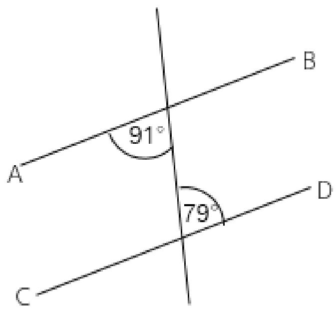
$\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ในรูปใดบ้างที่ขนานกัน เพราะเหตุใดจงอธิบาย



รูปที่ 1



รูปที่ 2



รูปที่ 3

1. $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ ในรูปใดบ้างที่ขนานกัน

....

2. เพราะเหตุใด

....

7) นำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ได้ปรับปรุงแก้ไขแล้วจากข้อ 6 ไปทดลองใช้ (Try out) กับนักเรียนที่มีลักษณะคละความสามารถในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในโรงเรียนที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง ซึ่งฉบับก่อนเรียนทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่กำลังศึกษาในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2561 และผ่านการเรียนเรื่อง การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เส้นขนาน แบบรูปและความสัมพันธ์ และพื้นฐานทางเรขาคณิต มาแล้วจำนวน 38 คน และฉบับหลังเรียนทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่กำลังศึกษาในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2561 และผ่านการเรียนเรื่อง วงกลม การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เส้นขนาน แบบรูปและความสัมพันธ์ และพื้นฐานทางเรขาคณิต มาแล้วจำนวน 33 คน จากนั้นนำแบบวัดทั้งสองฉบับมาตรวจสอบให้คะแนน และหาคุณภาพของแบบวัด

8) นำคะแนนที่ได้จากข้อ 7 มาวิเคราะห์คุณภาพของแบบวัดทั้งสองฉบับหาค่าความเที่ยงของแบบวัดโดยใช้สูตรสัมประสิทธิ์แอลฟาของครอนบาค (Cronbach Alpha Coefficient) โดยกำหนดเกณฑ์ค่าความเที่ยงตั้งแต่ 0.6 ขึ้นไป ค่าความยาก (p) มีค่าอยู่ระหว่าง 0.20 - 0.80 และค่าอำนาจจำแนก (r) มีค่าตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป ซึ่งได้ผลการวิเคราะห์เป็นดังนี้

ประเด็นการวิเคราะห์คุณภาพแบบวัด	**ฉบับก่อนเรียน**	**ฉบับหลังเรียน**
ค่าความเที่ยง	0.78	0.71
ค่าความยาก (p)	0.07 - 0.42	0.04 - 0.79
ค่าอำนาจจำแนก (r)	0.13 - 0.83	0.08 - 0.75

9) เลือกข้อสอบที่มีค่าความเที่ยง ค่าความยาก (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ตามข้อ 8 มาสร้างเป็นแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียนและหลังเรียน ฉบับละ 6 ข้อ โดยแบ่งเป็น 2 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 ความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย จำนวน 3 ข้อ

ตอนที่ 2 ความสามารถในการให้เหตุผลแบบนิรนัย จำนวน 3 ข้อ

ซึ่งมีค่าความเที่ยง ค่าความยาก (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ดังนี้

ประเด็นการวิเคราะห์คุณภาพแบบวัด	ฉบับก่อนเรียน	ฉบับหลังเรียน
ค่าความเที่ยง	0.80	0.67
ค่าความยาก (p)	0.25 - 0.45	0.35 - 0.79
ค่าอำนาจจำแนก (r)	0.30 - 0.80	0.38 - 0.75

10) นำแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ทั้งสองฉบับ ที่มีคุณภาพตามเกณฑ์ที่กำหนดไปใช้กับนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่างการวิจัย

5. การดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ดำเนินการทดลองสอนนักเรียนด้วยตนเอง โดยมีขั้นตอนการดำเนินการ ดังนี้

5.1 ขั้นเตรียมการ

ผู้วิจัยดำเนินการตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

5.1.1 ผู้วิจัยสร้างแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด เรื่อง วงกลม รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

5.1.2 ผู้วิจัยสร้างเครื่องมือในการเก็บรวบรวมข้อมูลทั้งหมดที่ใช้ในการวิจัยนี้ ทั้งฉบับก่อนเรียน และหลังเรียน

5.1.3 ผู้วิจัยจัดเตรียมสื่อ อุปกรณ์ และเอกสารที่เกี่ยวข้องกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด

5.1.4 ผู้วิจัยประสานขอความร่วมมือในการกำหนดตารางสอน และขอบเขตเนื้อหาที่ใช้ในการจัดการเรียนการสอนกับหัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนมัธยมศึกษาขนาดใหญ่

5.1.5 ผู้วิจัยทำหนังสือขอความร่วมมือในการทำวิจัยจากคณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์ มหาวิทยาลัยถึงผู้อำนวยการโรงเรียนมัธยมศึกษาขนาดใหญ่ สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่

การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 กรุงเทพมหานคร กระทรวงศึกษาธิการ เพื่อขอความร่วมมือในการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูลในการทำวิจัย

5.2 ขั้นดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยดำเนินการตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

5.2.1 ผู้วิจัยให้นักเรียนทำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียน โดยใช้เวลาฉบับละ 1 คาบ (คาบละ 50 นาที) จากนั้นผู้วิจัยนำแบบทดสอบที่นักเรียนทำมาดำเนินการตรวจให้คะแนนตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้ และนำผลการตรวจให้คะแนนนั้นมาวิเคราะห์ข้อมูล

5.2.2 ผู้วิจัยดำเนินการสอนนักเรียนตามแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด โดยสอนตามชั่วโมงปกติของโรงเรียน เนื้อหาที่ใช้สอนคือเรื่อง วงกลม โดยสอน 2 - 3 คาบต่อสัปดาห์ เป็นเวลา 5 สัปดาห์ รวมทั้งสิ้น 12 คาบ คาบละ 50 นาที ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2561

5.2.3 เมื่อดำเนินการสอนตามเนื้อหาที่กำหนดไว้ในแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ครบแล้ว ผู้วิจัยให้นักเรียนทำแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ฉบับหลังเรียน โดยให้นักเรียนทำแบบวัดแต่ละฉบับต่างช่วงเวลากัน และใช้เวลาทำแบบวัดแต่ละฉบับ 50 นาที

5.2.4 หลังจากที่นักเรียนทำแบบวัดทั้งสองฉบับเสร็จแล้ว ผู้วิจัยนำผลการทดสอบมาตรวจให้คะแนนตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้ และนำผลการตรวจให้คะแนนนั้นมาวิเคราะห์ข้อมูล

6. การวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยนำผลการทดลองจากแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมาวิเคราะห์ข้อมูลโดยทำการวิเคราะห์ข้อมูลแบ่งออกเป็น 4 ส่วน ตามวัตถุประสงค์การวิจัย ดังนี้

6.1 เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียน โดยนำคะแนนที่ได้จากแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น มาคำนวณค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยเลขคณิตด้วยการทดสอบค่าที (t-test dependent sample) ที่ระดับนัยสำคัญ .05

6.2 เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดกับเกณฑ์ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม โดยนำคะแนนที่ได้จากแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทาง

คณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น มาคำนวณค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน คะแนนเฉลี่ยร้อยละ และทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยเลขคณิตด้วยการทดสอบค่าที (t-test one sample) ที่ระดับนัยสำคัญ .05

6.3 เปรียบเทียบความสามารถในให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียน โดยนำคะแนนที่ได้จากแบบวัดความสามารถในเหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น มาคำนวณค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยเลขคณิตด้วยการทดสอบค่าที (t-test for dependent sample) ที่ระดับนัยสำคัญ .05

6.4 เปรียบเทียบความสามารถในให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดกับเกณฑ์ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม โดยนำคะแนนที่ได้จากแบบวัดความสามารถในเหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น มาคำนวณค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน คะแนนเฉลี่ยร้อยละ และทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยเลขคณิตด้วยการทดสอบค่าที (t-test for one sample) ที่ระดับนัยสำคัญ .05

7. สถิติที่ใช้ในการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ใช้สถิติเป็นส่วนหนึ่งในการวิเคราะห์ข้อมูลด้วยโปรแกรมวิเคราะห์ข้อมูลทางสถิติ โดยรายละเอียดของสถิติที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ แบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ สถิติทีใช้สำหรับตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย และสถิติที่ใช้สาหรับการวิเคราะห์ข้อมูล ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

7.1 สถิติที่ใช้สำหรับตรวจสอบคุณภาพของเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

7.1.1 ค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ของเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลและเครื่องมือที่ใช้ในการทดลองทั้งหมด

7.1.2 แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ทั้ง 2 ฉบับ ใช้การวิเคราะห์ข้อสอบอัตนัยหาค่าความเที่ยง ค่าความยาก (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบวัด โดยใช้โปรแกรมวิเคราะห์ข้อสอบอัตนัย (B-Index and non 0-1method item AnalysisProgram) ซึ่งผู้วิจัยดาว์โหลดมาจาก https://drive.google.com/file/d/0B6tkN3yu3JioWDdGYVhEdnhnVkE/view

7.2 สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ค่าเฉลี่ยร้อยละและการทดสอบค่าที *(t-test)* โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป

บทที่ 4
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยเรื่อง ผลของการจัดกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนมัธยมศึกษาชั้นปีที่ 3 มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยใช้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด ซึ่งผู้วิจัยนำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนี้

ตอนที่ 1 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

1.1 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดก่อนและหลังการจัดกิจกรรม วิเคราะห์ผลด้วยการวิเคราะห์ค่าที (t-test for dependent samples) ที่ระดับนัยสำคัญ .05 ซึ่งได้นำเสนอในตารางที่ 11

1.2 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดเทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม วิเคราะห์ผลด้วยการวิเคราะห์ค่าที (t-test for one samples) ที่ระดับนัยสำคัญ .05 ซึ่งได้นำเสนอในตารางที่ 12

ตอนที่ 2 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

2.1 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดก่อนและหลังการจัดกิจกรรม วิเคราะห์ผลด้วยการวิเคราะห์ค่าที (t-test for dependent samples) ที่ระดับนัยสำคัญ .05 ซึ่งได้นำเสนอในตารางที่ 13

2.2 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดเทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม วิเคราะห์ผลด้วยการวิเคราะห์ค่าที (t-test for one samples) ทีระดับนัยสำคัญ .05 ซึ่งได้นำเสนอในตารางที่ 14

ตอนที่ 1 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

1.1 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดก่อนและหลังการจัดกิจกรรม แสดงผลดังตารางที่ 11

ตารางที่ 11 แสดงค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\overline{X}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) และค่าที (t-test) ของคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เปรียบเทียบระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด ทั้งหมด 48 คน

ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	คะแนนเต็ม	ก่อนเรียน		หลังเรียน		t	Sig
		$\overline{X}$	S.D.	$\overline{X}$	S.D.		
	64	27.71	12.90	42.15	10.20	6.75	0.00*

*p < .05

จากตารางที่ 11 พบว่าคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดก่อนการจัดกิจกรรม มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 27.71 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 12.90 และคะแนนหลังการจัดกิจกรรม มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 42.15 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 10.20 และผลการทดสอบค่าที (t-test) เท่ากับ 6.75 สรุปได้ว่าคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดหลังการจัดกิจกรรมสูงกว่าก่อนการจัดกิจกรรมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

1.2 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดเทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม แสดงผลดังตารางที่ 12

ตารางที่ 12 แสดงค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\overline{X}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) คะแนนเฉลี่ยร้อยละ (M) และค่าที (t-test) ของคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เปรียบเทียบระหว่างหลังเรียนกับเกณฑ์ร้อยละ 60 ของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดทั้งหมด 48 คน

ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	คะแนนเต็ม	$\overline{X}$	S.D.	M	t	Sig
	64	42.15	10.20	65.85	2.54	0.00*

*p < .05

จากตารางที่ 12 พบว่าคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดหลังการจัดกิจกรรม มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 42.15 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 10.20 คะแนนเฉลี่ยร้อยละ 65.85 และผลการทดสอบค่าที (t-test) เท่ากับ 2.54 สรุปได้ว่าคะแนนความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดหลังการจัดกิจกรรมสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ตอนที่ 2 ผลการวิเคราะห์ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

2.1 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดก่อนและหลังการจัดกิจกรรม แสดงผลดังตารางที่ 13

ตารางที่ 13 แสดงค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\overline{X}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) และค่าที (t-test) ของคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เปรียบเทียบระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด ทั้งหมด 48 คน

ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์	คะแนนเต็ม	ก่อนเรียน		หลังเรียน		t	Sig
		$\overline{X}$	S.D.	$\overline{X}$	S.D.		
	18	9.83	3.26	11.83	3.26	2.75	0.00*

*p < .05

จากตารางที่ 13 พบว่าคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถาม

ปลายเปิดก่อนการจัดกิจกรรม มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 9.83 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 3.26 และคะแนนหลังการจัดกิจกรรม มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 11.83 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 3.26 และผลการทดสอบค่าที (t-test) เท่ากับ 2.75 สรุปได้ว่าคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดหลังการจัดกิจกรรมสูงกว่าก่อนการจัดกิจกรรมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2.2 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดเทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 60 ของคะแนนเต็ม แสดงผลดังตารางที่ 14

ตารางที่ 14 แสดงค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\overline{X}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) คะแนนเฉลี่ยร้อยละ (M) และค่าที (t-test) ของคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เปรียบเทียบระหว่างหลังเรียนกับเกณฑ์ร้อยละ 60 ของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดทั้งหมด 48 คน

ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์	คะแนนเต็ม	$\overline{X}$	S.D.	M	t	Sig
	18	11.83	3.26	65.74	2.19	0.01*

*p < .05

จากตารางที่ 14 พบว่าคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดหลังการจัดกิจกรรม มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 11.83 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 3.26 คะแนนเฉลี่ยร้อยละ 65.74 และผลการทดสอบค่าที (t-test) เท่ากับ 2.19 สรุปได้ว่าคะแนนความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดหลังการจัดกิจกรรมสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

ในการวิจัยเรื่องผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดที่มีผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีวัตถุประสงค์ในการวิจัยดังนี้

1. เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด

2. เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดเทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 60

3. เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด

4. เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดเทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 60

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ในโรงเรียนมัธยมศึกษาสังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 กรุงเทพมหานคร กระทรวงศึกษาธิการ

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยเลือกกลุ่มตัวอย่างแบบเจาะจง (Purposive sampling) เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาที่ 3 ที่ศึกษาอยู่ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2561 โรงเรียนมัธยมศึกษาขนาดใหญ่ สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 กรุงเทพมหานคร กระทรวงศึกษาธิการ จำนวน 1 ห้องเรียน โดยมีนักเรียนจำนวน 48 คน ซึ่งมีลักษณะคละความสามารถในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนมีความพร้อมเชิงกายภาพเหมาะสมกับการจัดกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ ผู้บริหารและครูมีความสนใจ ให้ความร่วมมือ และอนุญาตให้ผู้วิจัยดำเนินการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้แบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ

1. เครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง คือ แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด ซึ่งประกอบด้วย 4 ขั้นตอน คือ ขั้นเตรียมความพร้อม ขั้นจัดกิจกรรม ขั้นพัฒนาทักษะ และขั้นสรุปสิ่งที่เรียนรู้ โดยในขั้นจัดกิจกรรม

แบ่งเป็น 4 ขั้นตอนย่อย คือ ขั้นทำความเข้าใจเพื่อตั้งปัญหา ขั้นใช้กลวิธีเพื่อสร้างข้อความคาดการณ์ ขั้นพิสูจน์ข้อความคาดการณ์และวางนัยทั่วไป และขั้นทบทวนและขยายความคิด โดยใช้เนื้อหาเรื่อง วงกลม ในรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 จำนวน 12 แผน ใช้เวลาการทดลอง 12 คาบ (คาบละ 50 นาที) เป็นระยะเวลา 5 สัปดาห์

2. เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ประกอบด้วย แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนและหลังเรียน และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนและหลังเรียน โดยมีรายละเอียดดังนี้

2.1 แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นข้อสอบแบบอัตนัย จำนวน 4 ข้อ ใช้เวลาในการสอบ 50 นาที ซึ่งฉบับก่อนเรียนมีขอบเขตของเนื้อหาคือ เรื่อง การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และฉบับหลังเรียนมีขอบเขตของเนื้อหาคือ เรื่อง วงกลม ซึ่งมีค่าความเที่ยง ค่าความยาก (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ดังนี้

ประเด็นการวิเคราะห์คุณภาพแบบวัด	ฉบับก่อนเรียน	ฉบับหลังเรียน
ค่าความเที่ยง	0.69	0.76
ค่าความยาก (p)	0.30 - 0.40	0.34 - 0.41
ค่าอำนาจจำแนก (r)	0.34 - 0.62	0.37 - 0.53

2.2 แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นข้อสอบแบบอัตนัย จำนวน 6 ข้อ ใช้เวลาในการสอบ 50 นาที ซึ่งฉบับก่อนเรียนมีขอบเขตของเนื้อหาประกอบไปด้วย เรื่อง การประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เส้นขนาน แบบรูปและความสัมพันธ์ และพื้นฐานทางเรขาคณิต และฉบับหลังเรียนมีขอบเขตของเนื้อหาเหมือนกับฉบับก่อนเรียนและเพิ่มเติมเนื้อหาเรื่อง วงกลม ซึ่งมีค่าความเที่ยง ค่าความยาก (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ดังนี้

ประเด็นการวิเคราะห์คุณภาพแบบวัด	ฉบับก่อนเรียน	ฉบับหลังเรียน
ค่าความเที่ยง	0.80	0.67
ค่าความยาก (p)	0.25 - 0.45	0.35 - 0.79
ค่าอำนาจจำแนก (r)	0.30 - 0.80	0.38 - 0.75

การวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการทดลองสอนนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่เป็นกลุ่มทดลองด้วยตนเอง โดยมีขั้นตอนการดำเนินการดังนี้

1. ขั้นเตรียมการ

ผู้วิจัยสร้างแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดเสนออาจารย์ที่ปรึกษา เพื่อตรวจสอบความถูกต้องและให้คำแนะนำเพื่อนำไปปรับปรุงแก้ไข และจัดเตรียมสื่อ อุปกรณ์ และเอกสารที่เกี่ยวข้องกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ และสร้างแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุทางคณิตศาสตร์ทั้งฉบับก่อนเรียนและหลังเรียนเสนอให้ผู้ทรงคุณวุฒิ เพื่อตรวจสอบความตรงตามเนื้อหา ความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ และให้คำแนะนำเพื่อไปปรับปรุงแก้ไข จากนั้นนำแบบวัดที่ได้ปรับปรุงแก้ไขไปทดสอบหาคุณภาพของแบบวัด จากนั้นทำหนังสือขออนุญาตดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูลจากบัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ถึงผู้อำนวยการโรงเรียนมัธยมศึกษาขนาดใหญ่ สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 1 กรุงเทพมหานคร กระทรวงศึกษาธิการ

2. ขั้นดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยให้นักเรียนกลุ่มทดลองทำการทดสอบก่อนเรียน โดยใช้แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนและแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียน โดยใช้เวลาในการทำฉบับละ 1 คาบ (50 นาที) จากนั้นดำเนินการสอนนักเรียนตามแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2561 เป็นเวลา 5 สัปดาห์ สัปดาห์ละ 2 - 3 คาบ รวมทั้งสิ้น 12 คาบ (คาบละ 50 นาที) โดยเนื้อหาที่สอนคือ เรื่อง วงกลม และเมื่อดำเนินการสอนครบตามแผน ผู้วิจัยให้นักเรียนทำการทดสอบหลังเรียนโดยใช้แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับหลังเรียน และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ฉบับหลังเรียน โดยใช้เวลาในการทำฉบับละ 1 คาบ (50 นาที)

3. ขั้นการวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยนำคะแนนที่ได้จากแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง ทั้งฉบับก่อนเรียนและหลังเรียนมาตรวจให้คะแนนตามเกณฑ์ที่สร้างไว้และวิเคราะห์ข้อมูล โดยทำการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อการวิจัยทางสังคมศาสตร์ (Statistical Package for Social Science: SPSS) โดยมีการวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

3.1 เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองทั้งหมด 48 คน ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียน โดยคำนวณหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยด้วยการทดสอบค่าที (t-test for dependent sample) ที่ระดับนัยสำคัญ .05

3.2 เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองทั้งหมด 48 คน เทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 60 โดยคำนวณหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ค่าเฉลี่ยร้อยละ และทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยด้วยการทดสอบค่าที (t-test for one sample) ที่ระดับนัยสำคัญ .05

3.3 เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองทั้งหมด 48 คน ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียน โดยคำนวณหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยด้วยการทดสอบค่าที (t-test for dependent sample) ที่ระดับนัยสำคัญ .05

3.4 เปรียบเทียบความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองทั้งหมด 48 คน เทียบกับเกณฑ์ร้อยละ 60 โดยคำนวณหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ค่าเฉลี่ยร้อยละ และทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยด้วยการทดสอบค่าที (t-test for one sample) ที่ระดับนัยสำคัญ .05

สรุปผลการวิจัย

การวิจัยเรื่อง ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดที่มีผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3 สรุปผลการวิจัยดังนี้

1. นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2. นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

3. นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

4. นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด มีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

อภิปรายผลการวิจัย

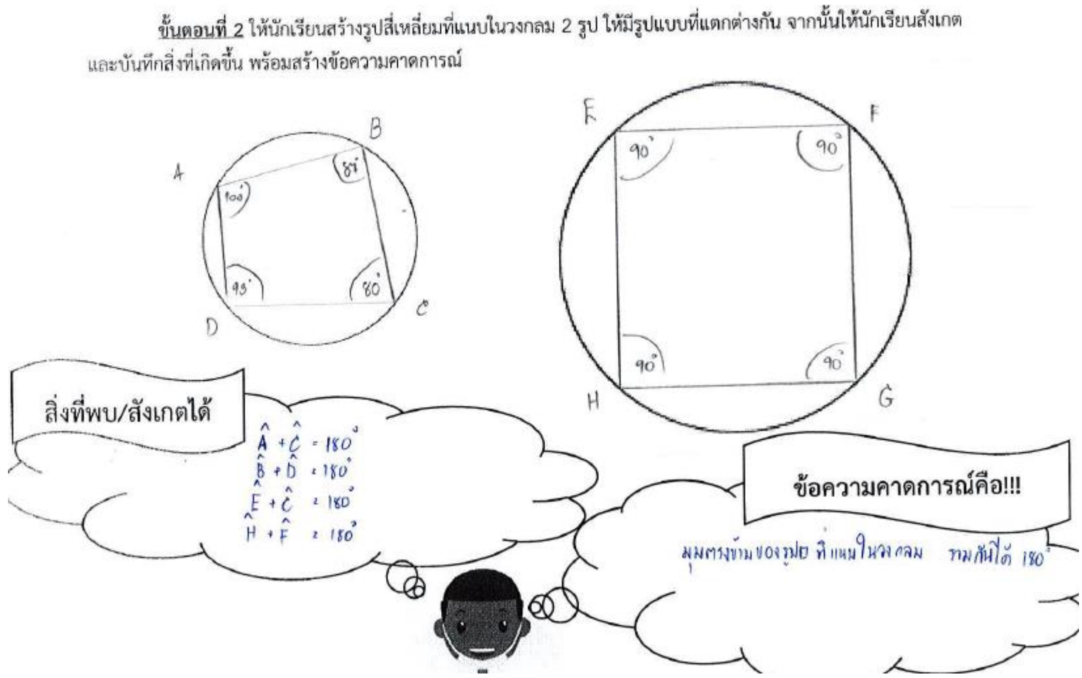
การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนมัธยมศึกษาชั้นปีที่ 3 ผู้วิจัยขอนำเสนอการอภิปรายผลการวิจัยตามสมมติฐานการวิจัย ดังนี้

1. จากผลการวิจัย พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน และสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานการวิจัยที่ตั้งไว้ในข้อที่ 1 และ 2 ที่เป็นเช่นนี้อาจเนื่องมาจากสาเหตุสำคัญ ดังนี้

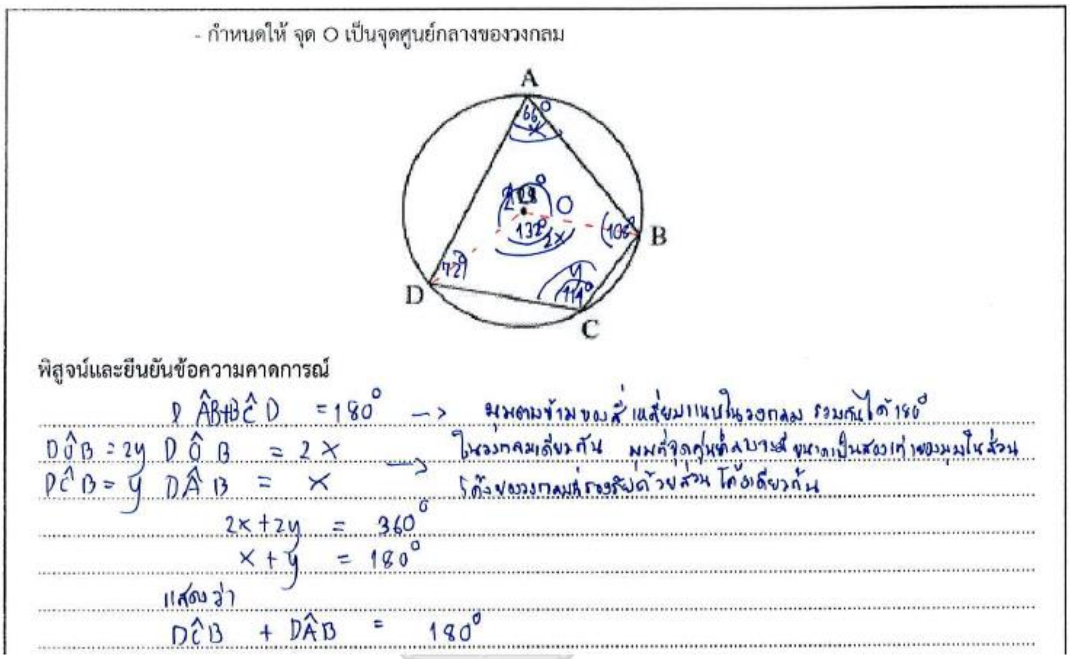
ประการที่หนึ่ง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด มีแนวทางในการออกแบบกิจกรรมทุกกิจกรรมให้มีลักษณะของสถานการณ์ที่เอื้อต่อการสำรวจ สืบสอบ หรือเป็นสถานการณ์แบบปลายเปิด โดยมีเฉพาะข้อมูลเบื้องต้นและข้อคำสั่งเพื่อเป็นแนวทางให้นักเรียนได้ทดลองดำเนินการเท่านั้น ซึ่งส่งผลให้นักเรียนได้ร่วมกันนำเสนอแนวคิด วางแผน ค้นหาวิธีการ หรือกลวิธี พร้อมทั้งแลกเปลี่ยนกลวิธีในการสำรวจสถานการณ์ได้อย่างอิสระ นักเรียนจึงเกิดความสนใจหรือข้อคำถามที่หลากหลาย ซึ่งนำมาตั้งเป็นประเด็นปัญหาหลักเพื่อสำรวจและศึกษาต่อไป ดังนั้นสถานการณ์ปลายเปิดและการทำงานเป็นกลุ่มจึงน่าจะเป็นหนึ่งในปัจจัยที่ส่งผลต่อความสามารถในการแก้ปัญหาที่ดีขึ้นของนักเรียน ซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดของ Morgan (1998) ซึ่งกล่าวไว้ว่า สถานการณ์สำหรับการสำรวจถูกมองว่าเป็นปัญหารูปแบบใหม่ที่กระตุ้นให้นักเรียนต้องตัดสินใจ วางแผน และเลือกวิธีการหรือความรู้ทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปใช้แก้ปัญหาด้วยตนเอง นอกจากนี้ยังเป็นกิจกรรมที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในการปฏิบัติกิจกรรมเป็นกลุ่ม ได้ร่วมกันระดมความคิด ร่วมกันแก้ปัญหา และค้นหาสิ่งที่นักเรียนสนใจด้วยตนเอง และสอดคล้องกับคำกล่าวของ Hanna and Yackel (2003) ที่ว่า การมีปฏิสัมพันธ์ในชั้นเรียนช่วยส่งเสริมความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน นอกจากนี้ยังสอดคล้องกับแนวคิดของ Adams and Hamm (1996) ที่กล่าวว่า การแก้ปัญหาร่วมกันเป็นกลุ่มจะทำให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหามากกว่าการแก้ปัญหาเพียงลำพังคนเดียว

ประการที่สอง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด ในส่วนของขั้นจัดกิจกรรม ซึ่งมี 4 ขั้นตอน คือ 1) ทำความเข้าใจเพื่อตั้งปัญหา 2) ใช้กลวิธีเพื่อสร้างข้อความคาดการณ์ 3) พิสูจน์ข้อความคาดการณ์และวางนัยทั่วไป 4) ทบทวนและขยายความคิด ซึ่งพบว่า ในขั้นแรก ทำความเข้าใจเพื่อตั้งปัญหา นักเรียนจะต้องพิจารณาและ

วิเคราะห์ข้อมูลจากสถานการณ์ที่พบ เพื่อที่จะปฏิบัติตามคำสั่งของใบกิจกรรมได้อย่างถูกต้อง จากนั้นครูใช้คำถามปลายเปิดเพื่อกระตุ้นนักเรียนให้เกิดข้อสงสัยในประเด็นต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ นักเรียนได้ร่วมกันแสดงความคิดเห็น แล้วนำข้อสงสัยนั้นไปตั้งเป็นปัญหาหลักเพื่อสำรวจร่วมกันในชั้นเรียน ในขั้นที่ 2 ใช้กลวิธีเพื่อสร้างข้อความคาดการณ์ และขั้นที่ 3 พิสูจน์ข้อความคาดการณ์และวางนัยทั่วไป คำถามปลายเปิดของครูช่วยกระตุ้นให้นักเรียนแสดงแนวคิดและวิธีการแก้ปัญหาที่หลากหลาย ได้ร่วมกันแก้ปัญหา อภิปรายและแลกเปลี่ยนแนวคิดในการแก้ปัญหาซึ่งกันและกัน ซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดของ Becker and Shimada (1997) ซึ่งกล่าวว่า ครูจะใช้คำถามปลายเปิดถามนักเรียนโดยมีจุดมุ่งหมายในการพัฒนาความหลากหลายของวิธีการหรือแนวทางเข้าสู่การหาคำตอบของปัญหาที่กำหนด และสอดคล้องกับงานวิจัยของ สัญญา ภัทรากรม (2552) ที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลการใช้การจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวา (active learning) พบว่า การให้นักเรียนได้อภิปรายเกี่ยวกับวิธีการที่ใช้ในการแก้ปัญหาร่วมกันกับผู้อื่น และเปิดโอกาสให้นักเรียนสามารถเลือกใช้วิธีการที่เหมาะสมในการหาคำตอบ จะช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ นอกจากนี้กิจกรรมดังกล่าวยังสนับสนุนให้นักเรียนได้สังเกตหาความสัมพันธ์จากแบบรูป หรือใช้องค์ความรู้เดิมเพื่อดำเนินการแก้ปัญหา และเมื่อได้ข้อสรุปของปัญหามาเป็นข้อความคาดการณ์ นักเรียนจะต้องพิสูจน์ข้อความคาดการณ์โดยใช้ทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และการวางแผนการพิสูจน์อย่างเป็นระบบ ซึ่งคำถามปลายเปิดมีส่วนช่วยให้นักเรียนสามารถเชื่อมโยงความรู้และชี้แนะแนวทางสำหรับการพิสูจน์ ตัวอย่างการทำใบกิจกรรมในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7 ของนักเรียน ดังแสดงในภาพประกอบที่ 6 และ 7



ภาพประกอบที่ 6 แสดงตัวอย่างการทำใบกิจกรรมในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7
ซึ่งนักเรียนได้สังเกตความสัมพันธ์ของมุมในรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลม



ขั้นตอนที่ 3 ให้นักเรียนแสดงวิธีการ อธิบาย หรือให้เหตุผลเพื่อพิสูจน์และยืนยันข้อความคาดการณ์ที่ได้ โดยใช้รูปวงกลมที่กำหนดให้ และสรุปผลการสำรวจประเด็นปัญหา พร้อมตั้งประเด็นปัญหาใหม่ที่นักเรียนสนใจเพื่อดำเนินการสำรวจเพิ่มเติมต่อไป

- กำหนดให้ จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

พิสูจน์และยืนยันข้อความคาดการณ์

$D\hat{A}B + B\hat{C}D = 180^\circ$ → มุมตรงข้ามของสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม รวมกันได้ 180°

$D\hat{O}B = 2y$ $\quad D\hat{O}B = 2x$ → ในวงกลมเดียวกัน มุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน

$D\hat{C}B = y$ $\quad D\hat{A}B = x$

$2x + 2y = 360^\circ$

$x + y = 180^\circ$

แสดงว่า

$D\hat{C}B + D\hat{A}B = 180^\circ$

ภาพประกอบที่ 7 แสดงตัวอย่างการทำใบกิจกรรมในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7
ซึ่งนักเรียนสามารถเขียนแสดงการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์พร้อมอธิบายวิธีการได้

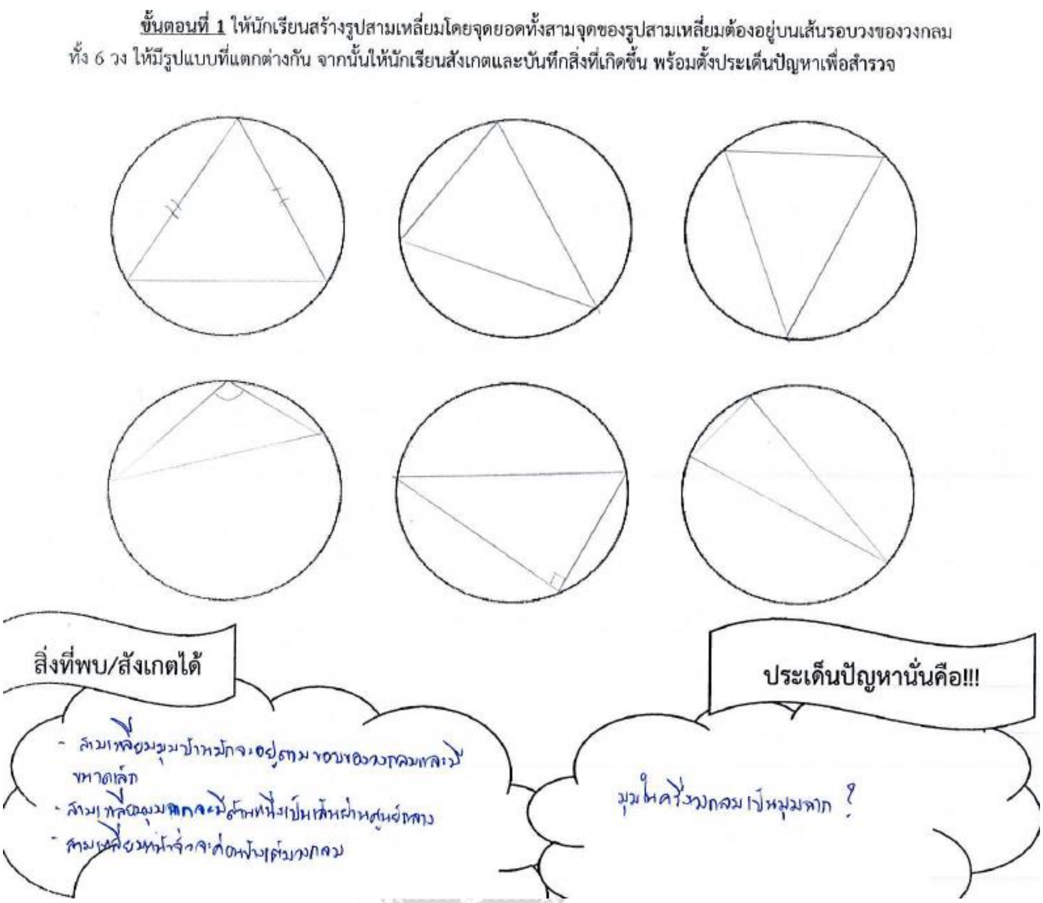
จากนั้นในขั้นสุดท้าย ทบทวนและขยายความคิด นักเรียนจะต้องตรวจสอบความถูกต้องของวิธีการดำเนินงานของตนเอง และนักเรียนจะได้ร่วมกันอภิปรายได้ขยายความคิดจากสิ่งที่เพิ่งวายนัยทั่วไปผ่านการใช้คำถามปลายเปิดของครู ซึ่งจากที่กล่าวมาข้างต้นกิจกรรมดังกล่าวจะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนได้ฝึกวิเคราะห์ข้อมูล สังเกตความสัมพันธ์ ค้นหาแบบรูป แสดงวิธีการคิดแก้ปัญหาอย่างอิสระ เชื่อมโยงความรู้เพื่อใช้ในการพิสูจน์ แสดงการพิสูจน์คำตอบ และร่วมกันอภิปรายเพื่อขยายความคิด ดังนั้นกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด จึงน่าจะเป็นปัจจัยสำคัญในการส่งเสริมและพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ นวลทิพย์ นวพันธุ์ (2552) ที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้การคิดแบบฮิวริสติกส์ของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ซึ่งการคิดแบบฮิวริสติกส์มีองค์ประกอบของขั้นตอนใกล้เคียงกับการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์เป็นอย่างมาก พบว่า กิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นให้นักเรียนสำรวจหาความสัมพันธ์ที่ซับซ้อนของข้อมูล วิเคราะห์องค์ประกอบของปัญหา ค้นหาวิธีการแก้ปัญหา ตรวจสอบคำตอบ อภิปรายข้อสรุป และสร้างปัญหาใหม่ จะส่งผลต่อการ

พัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน และสอดคล้องกับงานวิจัยของ วรรณวิสา จันทร์สุนทราพร (2557) ที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กระบวนการสืบเสาะหาความรู้ซึ่งเป็นกระบวนการที่มีขั้นตอนและวิธีการคล้ายกับกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ พบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลักการจัดการเรียนรู้ด้วยกระบวนการสืบเสาะหาความรู้สูงกว่าก่อนจัดการเรียนรู้ และสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 70 นอกจากนี้ยังสอดคล้องกับงานวิจัยของ ชนัต อินทะกนก (2559) ที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ที่บูรณาการการใช้คำถามแบบสืบสอบในกระบวนการจัดกิจกรรม ซึ่งคำถามดังกล่าวมีลักษณะคล้ายกับคำถามปลายเปิด จากงานวิจัยพบว่า การใช้คำถามแบบสืบสอบจะช่วยกระตุ้นให้นักเรียนเกิดการวิเคราะห์ปัญหา การเริ่มคิดแก้ปัญหา และเปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิดคำตอบอย่างอิสระ อีกทั้งยังเป็นส่วนสำคัญในการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียน

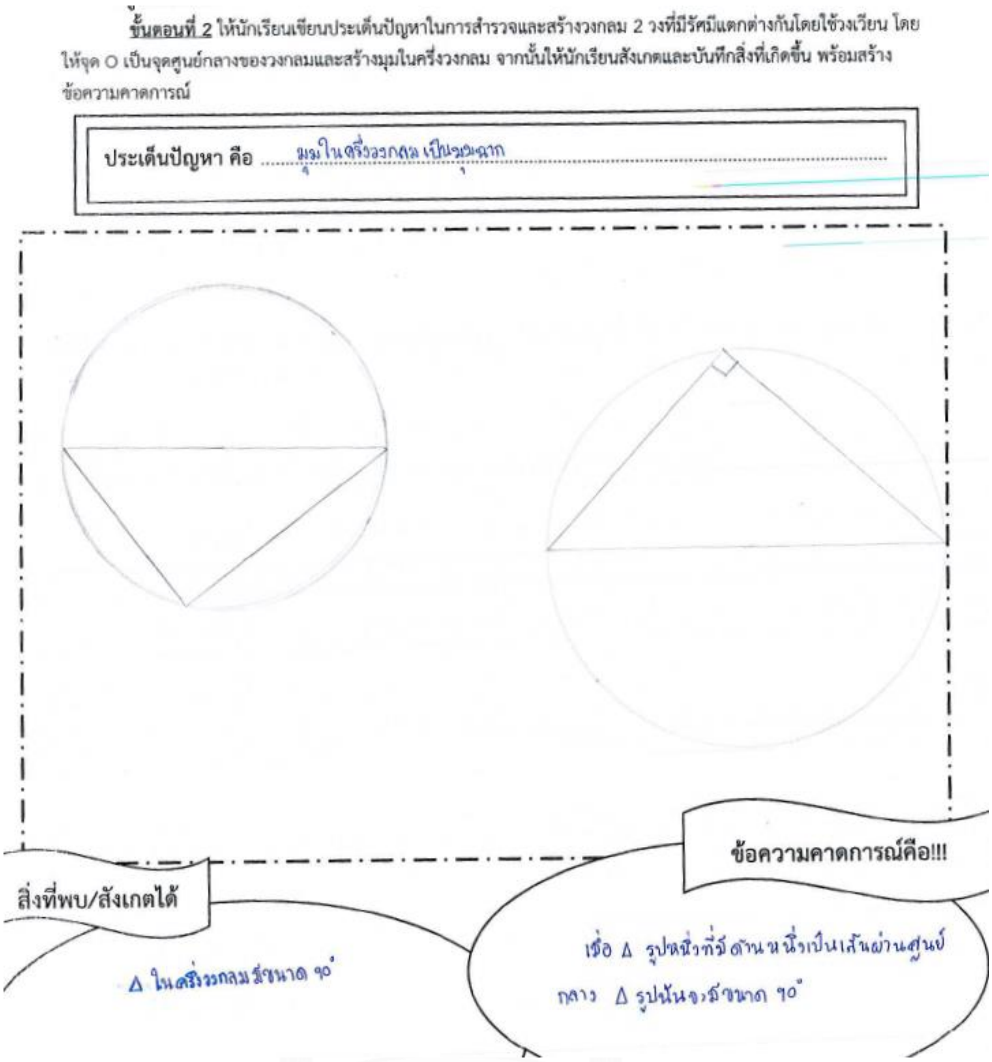
2. จากผลการวิจัย พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด ที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน และสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานการวิจัยที่ตั้งไว้ในข้อที่ 3 และ 4 ที่เป็นเช่นนี้อาจเนื่องมาจากสาเหตุสำคัญ ดังนี้

ประการที่หนึ่ง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด ผู้วิจัยเลือกใช้สถานการณ์แบบปลายเปิด โดยสถานการณ์ดังกล่าวมีความเหมาะสมในการส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ช่วยกระตุ้นให้นักเรียนได้อธิบายมุมมองที่มีต่อสถานการณ์และสืบค้นข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับบริบทของสถานการณ์ อีกทั้งยังเปิดโอกาสให้นักเรียนได้จำแนก แยกแยะ และระบุความสัมพันธ์ของข้อมูลด้วยตนเอง ซึ่งสอดคล้องกับแนวความคิดของ สุรัชน์ อินทสังข์ (2545) ที่ได้กล่าวว่า สถานการณ์หรือปัญหาแบบปลายเปิดจะเปิดโอกาสให้นักเรียนแต่ละคนได้เลือกวิธีการที่ตัวเองถนัดออกมาใช้ในการแก้ปัญหาเนื่องจากคำตอบที่ถูกต้องมีหลายคำตอบ นักเรียนแต่ละคนอาจได้คำตอบที่ไม่เหมือนกัน เหตุการณ์ลักษณะนี้จะสร้างแรงจูงใจให้นักเรียนอยากแลกเปลี่ยนและเปรียบเทียบคำตอบระหว่างกัน ซึ่งจะเกิดการพูดคุยสื่อสาร การยกเหตุผลเพื่อยืนยันและสนับสนุนคำตอบของตนเอง และเกิดการอภิปรายในชั้นเรียนซึ่งอาจได้ความรู้ใหม่หรือปัญหาใหม่ และยังสอดคล้องกับแนวคิดของ NCTM (2000b) ที่ว่า การให้นักเรียนทำกิจกรรมทางคณิตศาสตร์โดยให้อธิบายเหตุการณ์ต่าง ๆ อย่างเป็นเหตุเป็นผล นักเรียนจะมีเหตุผลของตนเองที่แตกต่างจากผู้อื่น และการให้นักเรียนได้อธิบายหรือชี้แจงเหตุผลจะช่วยให้นักเรียนได้ทบทวนการทำงานเพื่อสะท้อนความคิดของตน อีกทั้งนักเรียนจะได้ข้อสรุปหรือตัดสินความถูกต้องของสิ่งต่าง ๆ ด้วยตนเอง

ประการที่สอง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด ได้นำกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของ Yeo มาประยุกต์ใช้ในส่วนของขั้นจัดกิจกรรมในแต่ละกิจกรรม ซึ่งมี 4 ขั้นตอน คือ 1) ทำความเข้าใจเพื่อตั้งปัญหา 2) ใช้กลวิธีเพื่อสร้างข้อความคาดการณ์ 3) พิสูจน์ข้อความคาดการณ์และวางนัยทั่วไป 4) ทบทวนและขยายความคิด ซึ่งพบว่า ในขั้นแรก ทำความเข้าใจเพื่อตั้งปัญหา นักเรียนจะต้องพิจารณาและวิเคราะห์ข้อมูลจากสถานการณ์ที่พบ ครูใช้คำถามปลายเปิดเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนได้แสดงเหตุผลเพื่อสนับสนุนแนวคิดของตนเองผ่านการอภิปรายองค์ประกอบหรือข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ และนักเรียนร่วมกันนำเสนอปัญหาเพื่อดำเนินการสำรวจต่อไป ในขั้นตอนที่ 2 ใช้กลวิธีเพื่อสร้างข้อความคาดการณ์ กิจกรรมดังกล่าวมีการส่งเสริมและพัฒนาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยนักเรียนจะได้ลองยกตัวอย่างที่หลากหลาย สังเกตและค้นหาแบบรูปจากตัวอย่างที่นักเรียนยกขึ้นมา โดยครูคอยใช้คำถามปลายเปิดเพื่อกระตุ้นความคิดทำให้นักเรียนเกิดการจำแนกความเหมือนความต่าง หาความสัมพันธ์ และองค์ประกอบของข้อมูลหรือข้อเท็จจริงที่กำลังศึกษาอยู่ ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ สาวิตรี มูลสุวรรณ (2557) ที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ผ่านปัญหาหรือสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่เน้นให้นักเรียนพิจารณา จำแนกความสัมพันธ์ของข้อมูล และอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล ช่วยพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนได้ดีขึ้น จากนั้นนำความสัมพันธ์ที่ได้มาสร้างเป็นข้อความคาดการณ์ของประเด็นปัญหา กระบวนการดังกล่าวสอดคล้องกับกระบวนการให้เหตุผลแบบอุปนัยซึ่งเป็นหนึ่งในองค์ประกอบของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ตัวอย่างการทำใบกิจกรรมในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 ของนักเรียนดังแสดงในภาพประกอบที่ 8 และ 9

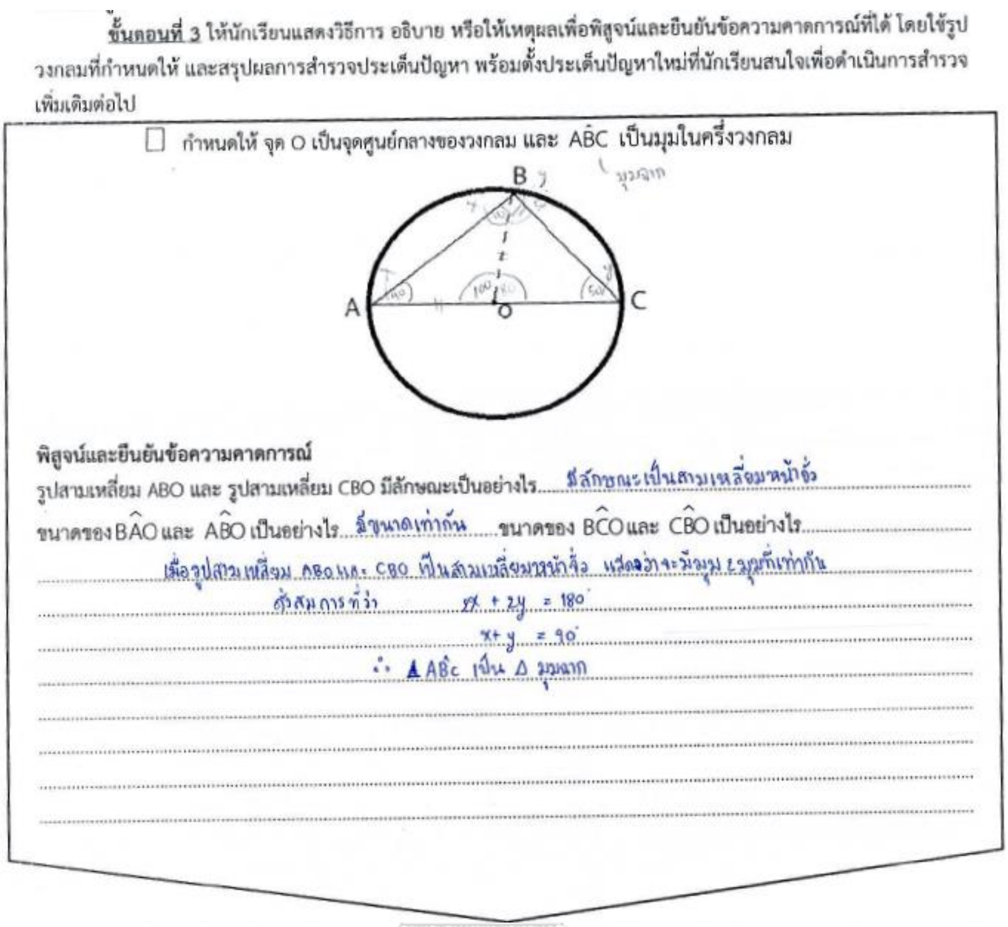


ภาพประกอบที่ 8 แสดงตัวอย่างการทำใบกิจกรรมในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 ซึ่งนักเรียนได้สังเกตความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมประเภทต่าง ๆ ที่แนบในวงกลม



ภาพประกอบที่ 9 แสดงตัวอย่างการทำใบกิจกรรมในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2
ซึ่งนักเรียนได้สำรวจรูปสามเหลี่ยมที่แนบในวงกลมที่มีรัศมีต่างกัน
จากนั้นนำสิ่งที่สังเกตได้มาสร้างเป็นข้อความคาดการณ์

ในขั้นตอนที่ 3 พิสูจน์ข้อความคาดการณ์และวางนัยทั่วไป นักเรียนจะได้ฝึกพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ที่ได้มาว่าถูกต้องหรือไม่ โดยคำถามปลายเปิดเข้ามามีส่วนช่วยชี้นำและกระตุ้นให้นักเรียนสามารถเชื่อมโยงทฤษฎีบท กฎ สูตร หรือบทนิยามที่เกี่ยวข้องสำหรับการพิสูจน์ ซึ่งทำให้นักเรียนได้เขียนแสดงการพิสูจน์พร้อมอธิบายเหตุผลประกอบด้วยตนเอง โดยกระบวนการที่นักเรียนทำนี้เป็นการให้เหตุผลแบบนิรนัยที่ซึ่งเป็นหนึ่งในองค์ประกอบของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ตัวอย่างการทำใบกิจกรรมในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 ของนักเรียน ดังแสดงในภาพประกอบที่ 10



<u>ขั้นตอนที่ 3</u> ให้นักเรียนแสดงวิธีการ อธิบาย หรือให้เหตุผลเพื่อพิสูจน์และยืนยันข้อความคาดการณ์ที่ได้ โดยใช้รูปวงกลมที่กำหนดให้ และสรุปผลการสำรวจประเด็นปัญหา พร้อมตั้งประเด็นปัญหาใหม่ที่นักเรียนสนใจเพื่อดำเนินการสำรวจเพิ่มเติมต่อไป

☐ กำหนดให้ จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ $A\hat{B}C$ เป็นมุมในครึ่งวงกลม

พิสูจน์และยืนยันข้อความคาดการณ์

รูปสามเหลี่ยม ABO และ รูปสามเหลี่ยม CBO มีลักษณะเป็นอย่างไร มีลักษณะเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ขนาดของ $B\hat{A}O$ และ $A\hat{B}O$ เป็นอย่างไร มีขนาดเท่ากัน ขนาดของ $B\hat{C}O$ และ $C\hat{B}O$ เป็นอย่างไร

เมื่อรูปสามเหลี่ยม ABO และ CBO เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แสดงว่าจะมีมุม 2 มุมที่เท่ากัน

ตั้งสมการที่ว่า $2x + 2y = 180^\circ$

$x + y = 90^\circ$

$\therefore \triangle A\hat{B}C$ เป็น $\triangle$ มุมฉาก

ภาพประกอบที่ 10 แสดงตัวอย่างการทำใบกิจกรรมในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 ซึ่งนักเรียนสามารถเขียนแสดงการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์พร้อมอธิบายเหตุผลประกอบได้

และในขั้นสุดท้าย ทบทวนและขยายความคิด นักเรียนได้ตรวจสอบความถูกต้องและความสมเหตุสมผลของวิธีการดำเนินงานด้วยตนเอง จากนั้นครูใช้คำถามปลายเปิดกระตุ้นให้นักเรียนได้ฝึกพูดอภิปรายและแลกเปลี่ยนความคิดเพื่อนำความรู้หรือข้อสรุปที่ได้มาขยายความไปสู่สิ่งที่นักเรียนสนใจอย่างสมเหตุสมผล ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของ Erin (2015) ที่ว่า การที่ครูส่งเสริมนักเรียนในการพูดคุยทางคณิตศาสตร์อย่างมีความหมาย จะช่วยให้นักเรียนสร้างข้อโต้แย้งและวิจารณ์การให้เหตุผลของผู้อื่น นักเรียนจะแสดงให้เห็นถึงเหตุผลตนเองขณะสื่อสารกับผู้อื่นและมีโอกาสในการเพิ่มความเข้าใจในมโนทัศน์และเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ได้ลึกซึ้งมากขึ้น เมื่อพิจารณาจากเหตุผลที่กล่าวมาข้างต้น ผู้วิจัยสรุปว่ากิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด จึงน่าจะเป็นอีกหนึ่งปัจจัยที่สำคัญในการส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ดีขึ้นของนักเรียน ซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดของ Ponte (2001) ที่ว่า การสำรวจเชิงคณิตศาสตร์จะเน้นกระบวนการทางคณิตศาสตร์ เช่น การค้นหาวิธีการ การสร้างหรือการนิยาม การทดสอบ การให้เหตุผลและการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ การสะท้อนความคิด และการวางนัยทั่วไป

ซึ่งกระบวนการเหล่านี้จะช่วยส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน และสอดคล้องกับงานวิจัยของ Nana and Izlan (2017) ที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ของนักศึกษา คณะครุศาสตร์ ในประเทศอินโดนีเซีย กลุ่มตัวอย่างจำนวน 111 คน พบว่า นักศึกษาคณะครุศาสตร์กลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้กระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ส่งผลทางบวกต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ นอกจากนี้ยังสอดคล้องกับงานวิจัยของ เจนสมุทร แสงพันธ์ (2548) ที่ได้ทำการวิจัยเรื่อง การใช้คำถามปลายเปิดในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยเชียงใหม่ พบว่า นักเรียนมีการพัฒนาทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ดีขึ้น ซึ่งหนึ่งในทักษะกระบวนการคณิตศาสตร์นั่นคือการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

ข้อเสนอแนะ

จากผลการวิจัยดังกล่าว ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะดังต่อไปนี้

ข้อเสนอแนะสำหรับการนำไปใช้

1. ถ้าครูมีเวลาในการจัดกิจกรรมมากพอ ในส่วนของขั้นตอนที่ให้นักเรียนตั้งปัญหาเพื่อสำรวจ ครูควรเลือกปัญหาที่นักเรียนนำเสนอมาอย่างน้อย 2 - 3 ปัญหา เพื่อให้นักเรียนได้ดำเนินการตามขั้นตอนของวงจรการสำรวจ นักเรียนจะได้ลองผิดลองถูก ได้เห็นมุมมองที่แตกต่าง และเกิดการเรียนรู้จากปัญหาที่ไม่สามารถหาข้อความคาดการณ์ซึ่งเป็นคำตอบของปัญหาได้

2. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดในระยะแรกอาจจะต้องใช้เวลานานกว่าปกติ เนื่องจากเป็นกิจกรรมที่นักเรียนจะต้องลงมือปฏิบัติด้วยตนเองและมีการพูดคุย โต้ตอบกันตลอดทั้งกิจกรรม ซึ่งแตกต่างจากเรียนการสอนแบบปกติ อาจส่งผลให้นักเรียนรู้สึกไม่คุ้นเคยและหากปฏิบัติกิจกรรมไม่ได้ นักเรียนอาจเกิดความรู้สึกท้อแท้ ครูจึงต้องให้เวลาและโอกาสแก่นักเรียนมากกว่าการเรียนแบบปกติ ตลอดจนมีความอดทนและยืดหยุ่นในการจัดกิจกรรมให้มีความเหมาะสมกับสภาพจริงของนักเรียน

ข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัยครั้งต่อไป

ในระหว่างที่ผู้วิจัยดำเนินการสอนตามแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด ผู้วิจัยสังเกตเห็นว่าเมื่อนักเรียนดำเนินการสำรวจสถานการณ์และเกิดการพูดคุย โต้แย้งและร่วมกันแสดงความคิด หลายครั้งนักเรียนจะค้นพบองค์ความรู้หรือมโนทัศน์ใหม่ ๆ ทางคณิตศาสตร์ได้ด้วยตนเอง ด้วยเหตุนี้จึงควรมีการศึกษาผลของการจัดกิจกรรมดังกล่าวที่มีต่อการพัฒนาองค์ความรู้หรือมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

บรรณานุกรม

Adams, D., & Hamm, M. (1996). *Cooperative Learning: Critical Thinking and Collaboration Across the Curriculum*: ERIC.

Alice, A., & Shirel, Y.-F. (1999). Mathematical reasoning during small-group problem solving. *Developing mathematical reasoning in grades K*-12, 61, 115.

Bailey, J. (2007). Mathematical Investigations: A Primary Teacher Educator's Narrative Journey of Professional Awareness. In Jane Watson & Kim Beswick (Eds.). *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA): Mathematics: Essential research, essential practice,* 1, 103-112.

Baroody, A. J., & Coslick, R. T. (1993). Problem solving, reasoning, and communicating, K-8. *Helping Children Think Mathematically*.

Becker, J. P., & Shimada, S. (1997). *The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics*: ERIC.

Bell, F. H. (1978). *Teaching and learning mathematics (in secondary schools)*: WC Brown Company.

Boaler, J. (1997). Reclaiming school mathematics: The girls fight back. *Gender and Education,* 9(3), 285-305.

Branca, N. A. (1980). Problem solving as a goal, process, and basic skill. *Problem solving in school mathematics*, 3-8.

Cai, J., Lane, S., & Jakabcsin, M. S. (1996). The role of open-ended tasks and holistic scoring rubrics: Assessing students' mathematical reasoning and communication. *Communication in mathematics, K*-12 *and beyond*, 137-145.

California State Department of Education. (1989). A question of thinking: A first look at students' performance on open-ended questions in mathematics. In: Author Sacramento, CA.

Calleja, J. (2011). *Integrating Investigations in Secondary School Mathematics.* Unpublished MEd dissertation, Faculty of Education, University of Malta,

Carin, A. A., & Sund, R. B. (1978). *Creative questioning and sensitive listening techniques:*

A self-concept approach: CE Merrill Pub. Co.

Carroll, W. M. (1999). Using short questions to develop and assess reasoning. *Developing mathematical reasoning in grades K-12,* 61, 247.

Charles, R. I. (1985). The Role of Problem Solving. *Arithmetic teacher,* 32(6), 48-50.

Civil, M. (2002). Everyday Mathematics, Mathematicians' Mathematics, and School Mathematics: Can We Bring Them Together? *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, 40-62.

Cruikshank, D. E., & Sheffield, L. J. (2000). *Teaching and learning elementary and middle school mathematics*. United states of America: Wiley.

Delaney, K. (1996). Exploring difficulties in teaching mathematics through investigations in the primary classroom. *For the Learning of Mathematics,* 16(1), 27-33.

Diezmann, C. M. (2005). Challenging mathematically gifted primary students. *Australasian Journal of Gifted Education,* 14(1), 50-57.

Diezmann, C. M., Watters, J. J., & English, L. D. (2001). *Implementing mathematical investigations with young children.* Paper presented at the Numeracy and Beyond: Proceedings of the 24th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia Incorporated, Sydney: MERGA.

Dossey, J. A. (2002). *Mathematics Modeling for Today's Mathematics Classroom: A Contemporary Approach to Teaching Grades* 7-12: Brooks/Cole.

Erin, L. W. (2015). Creating math talk communities. *Teaching children mathematics,* 22(4), 248-254.

Ernest, P. (2013). *Philosophy Mathematics Education*: Routledge.

Ernest, P., Skovsmose, O., Van Bendegem, J. P., Bicudo, M., Miarka, R., Kvasz, L., & Moeller, R. (1991). The philosophy of mathematics education.

Evans, J. (1987). Investigations: The state of the art. *Mathematics in School,* 16(1), 27-30.

Foong, P. Y. (2000). Using short open-ended mathematics questions to promote thinking and understanding.

Frobisher, L. (1994). Problems, investigations and an investigative approach. *Issues in teaching mathematics*, 150-173.

Giere, R. N. (1991). *Understanding scientific reasoning*. Retrieved from Harcourt Brace Jovanovich:

Greenes, C. (1996). Investigations: Vehicles for learning and doing mathematics. *Journal of Education,* 178(2), 35-49.

Hancock, C. L. (1995). Enhancing mathematics learning with open-ended questions. *The Mathematics Teacher,* 88(6), 496.

Hanna, G., & Yackel, E. (2003). Reasoning and proof. *A research companion to NCTM's Standards*, 227-236.

Height, T. P. (1989). *Mathematical investigations in the classroom*: Australia: Longman Cheshire.

Husain, H., Bais, B., Hussain, A., & Samad, S. A. (2012). How to construct open ended questions. *Procedia-Social and Behavioral Sciences,* 60, 456-462.

Jaworski, B. (1994). Investigating Mathematics Teaching: A Constructivist Enquiry. Studies in Mathematics Education Series: 5.

Kennedy, L., Tipps, S., & Johnson, A. (2007). *Guiding children's learning of mathematics*: Cengage Learning.

Kristanto, Y. D., Amin, S. M., & Khabibah, S. (2016). The Development of Investigative Learning Materials Using Computer Assisted Instruction in the Topic of Reflection for Grade VII. *(JRAMathEdu) Journal of Research and Advances in Mathematics Education,* 1(2), 172-182.

Krulik, S., & Reys, R. E. (1980). *Problem solving in school mathematics:* 1980 *yearbook*: National Council of Teachers of Mathematics.

Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1982). Teaching problem solving to preservice teachers. *The Arithmetic Teacher,* 29(6), 42-45.

Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1993). *Reasoning and problem solving: A handbook for elementary school teachers*: Allyn and Bacon.

Lawson, A. E. (2010). Basic inferences of scientific reasoning, argumentation, and discovery. *Science Education,* 94(2), 336-364.

LeBlanc, J. F. (1977). You Can Teach Problem Solving. *Arithmetic teacher,* 25(2), 16-20.

Margaret, M., Darren, C., & Michael, C. (2015). The use of Mathematical Investigations in a Queensland Primary School and Implications for Professional Development. *International Journal for Mathematics Teaching & Learning*.

Marks, J. L., Purdy, C. R., & Kinney, L. B. (1965). *Teaching elementary school* *mathematics for understanding*: McGraw-Hill.

Mayer, R. E., & Wittrock., R. C. (2006). Problem solving. *Handbook of educational psychology*, 287-303.

Morgan, C. (1998). *Writing Mathematically: The Discourse of Investigation*: London: Routledge/Falmer.

Musser, G. L., & Shaughnessy, J. M. (1980). Problem solving strategies in school mathematics. *Problem solving in school mathematics*, 136-145.

Nana, S., & Izlan, S. (2017). *Improving of prospective elementary teachers' reasoning: Learning geometry through mathematical investigation.* Paper presented at the AIP Conference Proceedings.

NCTM. (2000a). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA :: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM. (2000b). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The Council.

Ng, H. C. (2003). *Benefits of using investigative tasks in the primary classroom.* Nanyang Technological University,

Nguyen Thi , D. (2014). Designing High-level Tasks to Promote Mathematical Investigation. In *Innovations and Good Practices in Education: Global Perspectives*. Proceedings of the 7th International Conference on Educational: ICER.

O'Daffer, P. G. (1990). Activities. Inductive and Deductive Reasoning. *Mathematics Teacher,* 83(5), 378-384.

O'Daffer, P. G., & Thornquist, B. A. (1993). Critical thinking, mathematical reasoning, and proof. *Research ideas for the classroom: High school mathematics*.

Oliveira, H., Segurado, I., Ponte, J. P. d., & Cunha, H. (1997). Mathematical investigations in the classroom: A collaborative project. *Developing practice: Teachers' inquiry and educational change*, 135-142.

Orton, A., & Frobisher, L. (2004). *Insights into teaching mathematics*: London: Cassell.

Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspects of mathematical methods*: Prentice University Press.

Polya, G. (1980). On solving mathematical problems in high school. *Problem solving in* *school mathematics*, 1-2.

Ponte, J. P. (2001). Investigating mathematics and learning to teach mathematics. In *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 53-72): Springer.

Ponte, J. P., & Matos, J. F. (1992). Cognitive processes and social interactions in mathematical investigations. In *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies* (pp. 239-254): Springer.

Ponte, J. P., Segurado, M. I., & Oliveira, H. (2003). A collaborative project using narratives: What happens when pupils work on mathematical investigations? *Collaboration in teacher education: Examples from the context of mathematics education*, 85-97.

Quinnell, L. (2010). Why are mathematical investigations important? *Australian Mathematics Teacher, The,* 66(3), 35.

Skovsmose, O. (2001). Landscapes of investigation. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 33(4), 123-132.

Stemn, B. S. (2008). Building middle school students' understanding of proportional reasoning through mathematical investigation. *Education* 3–13*,* 36(4), 383-392.

Stenmark, J. K. (1991). *Mathematics Assessment: Myths, Models, Good Questions, and Practical Suggestions*: ERIC.

Sternberg, R. J., & Baron, J. B. E. (1987). *Teaching thinking skills: Theory and practice*: WH Freeman/Times Books/Henry Holt & Co.

Stiggins, R. J., & Chappuis, J. (2012). *An introduction to student-involved assessment for learning*: Pearson Boston, MA.

Streumer, B. (2007). Inferential and Non-Inferential Reasoning. *Philosophy and Phenomenological Research,* 74(1), 1-29.

TIMSS. (2015). TIMSS 2015 Assessment frameworks. Retrieved 11 พฤษภาคม 2562 https://timssandpirls.bc.edu/timss2015/downloads/T15_Frameworks_Full_Book.pdf

Van Reeuwijk, M., & Wijers, M. (2004). Investigations as thought-revealing assessment problems. *I ‘. A. Romberg (lid), Standards-based mathematics assessment in middle school: Rethinking classroom practice*, 137-151.

Wilson, J. W., Fernandez, M. L., & Hadaway, N. (1993). Mathematical problem solving.

Research ideas for the classroom: High school mathematics, 57-78.

Yeo, J. B. W. (2012). *Problem posing in mathematical investigation*. Paper presented at the 35th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia Incorporated (MERGA 2012), Singapore.

Yeo, J. B. W. (2013). *The Nature and Development of Processes in Mathematical Investigation.* (Doctoral dissertation), Nanyang Technological University,

Yeo, J. B. W., & Yeap, B. H. (2010). Characterising the cognitive processes in mathematical investigation. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*.

กนิษฐา ศรีวชิโรทัย. (2554). ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลการเสนอแนวคิดนำที่มีต่อ ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และเจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2. (ปริญญามหาบัณฑิต), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย,

กรมวิชาการ. (2546). การจัดสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544: กรุงเทพฯ: องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์.

กระทรวงศึกษาธิการ. (2560). ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. Retrieved from https://drive.google.com/file/d/1F4_wAe-ZF13-WhvnEAupXNiWchvpcQKW/view

กิตติพันธ์ วิบุลศิลป์. (2560). ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามแนวคิดห้องเรียนกลับทางร่วมกับการเรียนรู้เชิงรุกที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และความสามารถในการคิดอย่างมีวิจารณญาณของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 5. (ปริญญามหาบัณฑิต), คณะครุศาสตร์. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย,

จุลจิรา ปิ่นมั่น. (2558). ผลการสังเคราะห์รูปแบบกิจกรรมการเรียนรู้แบบสืบเสาะหาความรู้ 5Es ร่วมกับกระบวนการแก้ปัญหาของโพลยา เรื่องการ ประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวของนักเรียนชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 2. วารสารบัณฑิตศึกษามหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร, 12(59), 203-210.

เจนสมุทร แสงพันธ์. (2548). การใช้คำถามปลายเปิดในการจัดการเรียนการสอนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยเชียงใหม่. (ปริญญามหาบัณฑิต), คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่,

ชนัต อินทะกนก. (2559). ผลของการเรียนรู้โดยใช้กรณีตัวอย่างเป็นฐานร่วมกับการใช้คำถามแบบสืบสอบที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาเชิงวิทยาศาสตร์และเจตคติต่อวิทยาศาสตร์ของ

นักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น. (ปริญญามหาบัณฑิต), คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย,

ชมนาด เชื้อสุวรรณทวี. (2542). การสอนคณิตศาสตร์. คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, กรุงเทพฯ.

ชัยวัฒน์ สุทธิรัตน์. (2555). เทคนิคการใช้คำถามพัฒนาการคิด (พิมพ์ครั้งที่ 4. ed.). กรุงเทพฯ: วีพรินท์.

ชุติมา ฉุนอิ่ม และ วนินทร สุภาพ. (2558). การพัฒนาการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) ร่วมกับเทคนิคการใช้คำถามของบาดแฮม (Badham). *Journal of Community Development Research (Humanities and Social Sciences),* 8(3), 104-115.

ดนัย ถนอมจิตร. (2553). การจัดการเรียนรู้โดยเน้นการใช้คำถามปลายเปิด เพื่อส่งเสริมความคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนวชิรวิทย์ ฝ่ายมัธยม จังหวัดเชียงใหม่. (ปริญญาศึกษามหาบัณฑิต), มหาวิทยาลัยเชียงใหม่,

นวลทิพย์ นวพันธุ์. (2552). ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ที่มีต่อความคิดสร้างสรรค์ ความสามารถในการตั้งและแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1. (ปริญญามหาบัณฑิต), คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย,

เบญจมาศ ฉิมมาลี. (2550). ผลของการจัดกิจกรรมคณิตศาสตร์โดยใช้คำถามระดับสูงประกอบแนวทางพัฒนาความคิดทางคณิตศาสตร์ของฟรายวิลลิกที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ และการคิดอย่างมีวิจารณญาณของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. (ปริญญามหาบัณฑิต), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย,

ปรีชา เนาว์เย็นผล. (2544). กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้คำถามปลายเปิด สำหรับนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 1 (ปริญญาดุษฎีบัณฑิต), มหาวิทยาลัยศรีนทรวิโรฒ,

ปิยวดี วงษ์ใหญ่. (2551). การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แนวใหม่. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภา.

ปิยะรัตน์ เงาผ่อง. (2551). การ ใช้คำถามปลายเปิดเพื่อพัฒนาทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสารภีพิทยาคม จังหวัดเชียงใหม่. (ปริญญามหาบัณฑิต), มหาวิทยาลัยเชียงใหม่,

พนารัตน์ แช่มชื่น. (2548). ชุดกิจกรรมแบบปฏิบัติการเพื่อส่งเสริมทักษะการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่องแบบรูป. (ปริญญามหาบัณฑิต), บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ, กรุงเทพฯ.

พรรณทิพา พรหมรักษ์. (2552). การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนโดยใช้กระบวนการวางนัยทั่วไปเพื่อส่งเสริมความสามารถในการให้เหตุผลทางพีชคณิตและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3. (ปริญญาดุษฎีบัณฑิต), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย,

พร้อมพรรณ อุดมสิน. (2547). ประมวลบทความหลักการและแนวทางการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการ

เรียนรู้คณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร: ศูนย์ตำราและเอกสารทางวิชาการ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

พิฌาวรรณ แช่มชื่น ชมดง. (2559). ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามรูปแบบ *SSCS* ร่วมกับการกระตุ้นโดยใช้คำถามที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนปลาย. (ปริญญามหาบัณฑิต), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย,

พีชาณิกา เพชรสังข์. (2556). ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้รูปแบบการเรียนการสอน *5E* ร่วมกับคำถามปลายเปิดที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการคิดอย่างมีวิจารณญาณของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2. (ปริญญามหาบัณฑิต), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย,

ระพีพัฒน์ แก้วอ่ำ. (2559). การใช้คำถามปลายเปิดในการสอนคณิตศาสตร์. วารสารศรีนครินทรวิโรฒวิจัยและพัฒนา (สาขามนุษยศาสตร์และสังคมศาสตร์), 8(15), 206-211.

วรนารถ อยู่สุข. (2555). การพัฒนาความสามารถในการให้เหตุผลและความคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้ชุดกิจกรรมเสริมหลักสูตรคณิตศาสตร์และวงจรการเรียนรู้เชิงประสบการณ์. (ปริญญามหาบัณฑิต), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย,

วรรณวิสา จันทร์สุนทราพร. (2557). การพัฒนากิจกรรมการจัดการเรียนรู้ด้วยกระบวนการสืบเสาะหาความรู้ เพื่อส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาและความสามารถในการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ เรื่องความคล้ายของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. (ปริญญามหาบัณฑิต), คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ,

วันเพ็ญ คำเทศ. (2558). การใช้คำถามในการจัดการเรียนรู้วิทยาศาสตร์แบบ 5 ขั้นตอน. นิตยสาร สสวท. ออนไลน์ฉบับที่ 196.

วิษณุ นภาพันธ์. (2551). การศึกษาลักษณะการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย. (ปริญญาดุษฎีบัณฑิต), มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ,

ศิริมา วงษ์สกุลดี. (2558). ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ด้วยการเรียนรู้เชิงรุกที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เรื่องสถิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. *Veridian E-Journal Silpakorn University,* 8(2).

สถาบันทดสอบทางการศึกษาแห่งชาติ. (2561). สรุปผลการทดสอบทางการศึกษาระดับชาติขั้นพื้นฐาน (O-NET) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. Retrieved from http://www.newonetresult.niets.or.th/AnnouncementWeb/PDF/SummaryONETM3_2561.pdf

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2545). แนวทางการจัดการเรียนรู้. กรุงเทพฯ: คุรุ

สภา.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2551ก). หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2555ก). ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2555ข). การวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: 3-คิว มีเดีย จำกัด.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2558ก). สรุปผลการประเมิน PISA 2015. Retrieved from http://www.oic.go.th/FILEWEB/CABINFOCENTER6/DRAWER056/GENERAL/DATA0000/00000070.PDF

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2558ข). รายงานผลการวิจัยโครงการ TIMSS 2015. Retrieved from http://timssthailand.ipst.ac.th/timss/reports/TIMSS2015summary

สัญญา ภัทรากรม. (2552). ผลของการจัดการเรียนรู้อย่างมีชีวิตชีวาที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. (ปริญญามหาบัณฑิต), คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ,

สาวิตรี มูลสุวรรณ. (2557). ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยกลวิธีเอฟโอพีเอสที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และการใช้ตัวแทนความคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. (ปริญญามหาบัณฑิต), คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย,

สิริพร ทิพย์คง. (2554). การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ.

สุจิตรา โอสถอภิรักษ์. (2538). การวิเคราะห์การใช้คำถามของครูคณิตศาสตร์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น กรุงเทพมหานคร. (ปริญญามหาบัณฑิต), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย,

สุดารัตน์ ภิรมย์ราช. (2555). ผลของการใช้เทคนิค *Think-Talk-Write* ร่วมกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสอบที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลและการสื่อสารทางคณิตศาสตร์. (ปริญญาดุษฎีบัณฑิต), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย,

สุทธิชาติ เปรมกมล. (2558). ผลของการใช้การสืบสอบเน้นแบบจำลองเป็นฐานที่มีต่อความสามารถในการสร้างคำอธิบายเชิงวิทยาศาสตร์และการให้เหตุผลของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น. (ปริญญามหาบัณฑิต), คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย,

สุพัตรา จอมคำสิงห์. (2552). ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ตัวอย่างงานที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ และความคงทนในการเรียนคณิตศาสตร์ของ

นักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 3. (ปริญญามหาบัณฑิต), คณะครุศาสตร์. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย,

สุรัชน์ อินทสังข์. (2545). ปลายเปิด : ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ไม่คุ้นเคย. Retrieved from https://library.ipst.ac.th/handle/ipst/5443

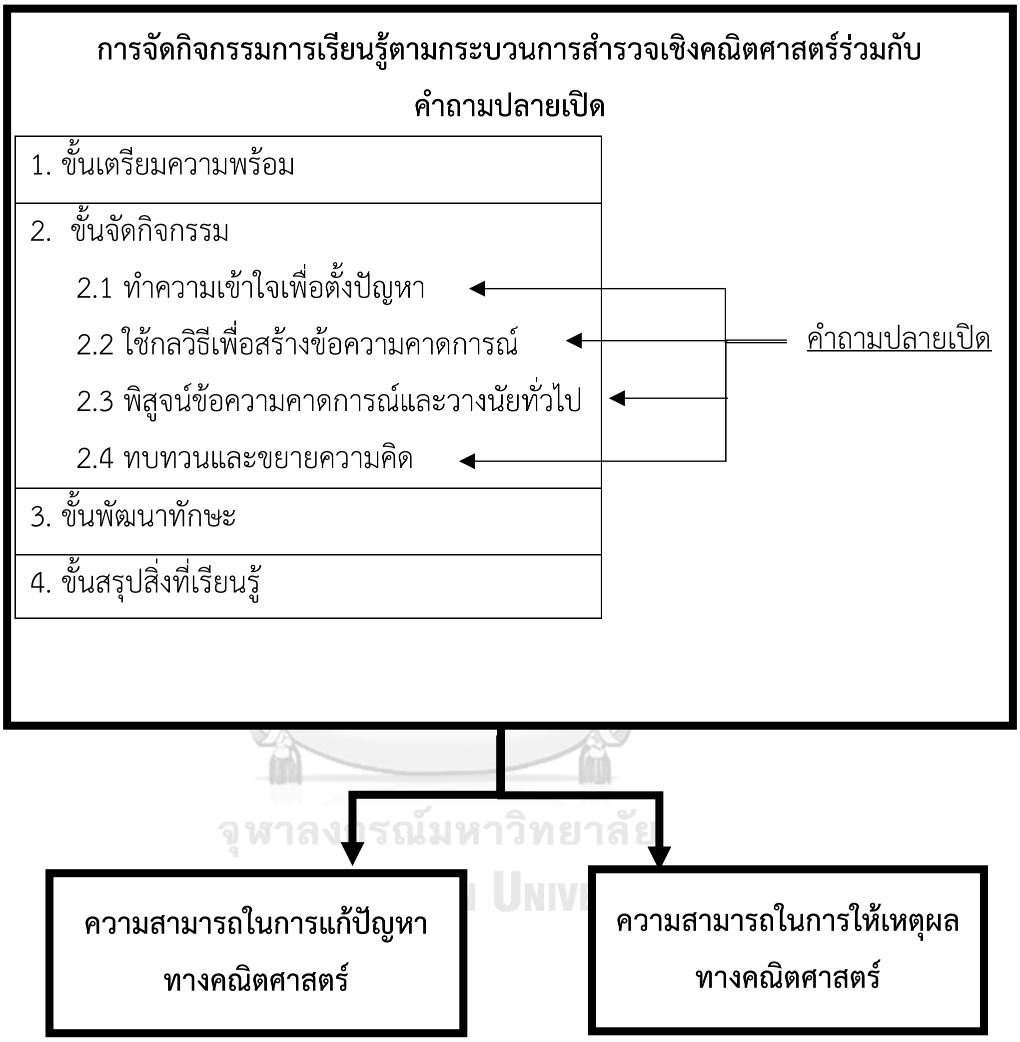
เสาวรัตน์ รามแก้ว. (2552). ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้การสืบสอบแบบแนะแนวทาง ที่มีต่อมโนทัศน์และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 2. (ปริญญามหาบัณฑิต), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย,

อัมพร ม้าคนอง. (2553). ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ : การพัฒนาเพื่อพัฒนาการ (พิมพ์ครั้งที่ 1. ed.). กรุงเทพฯ :: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

กรอบแนวคิดการวิจัย



กรอบแนวคิดการวิจัย

ภาคผนวก ข

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจสอบเครื่องมือวิจัย

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิในการตรวจสอบเครื่องมือวิจัย

ผู้ทรงคุณวุฒิที่ตรวจสอบแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียนและฉบับหลังเรียน มีรายนามดังนี้

1. รองศาสตราจารย์ ดร.ชานนท์ จันทรา	อาจารย์ประจำภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตบางเขน
2. อาจารย์วัฒนิตา นำแสงวานิช	อาจารย์ประจำกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม
3. อาจารย์กนกพร ศรีธนาอุทัยกร	ครูชำนาญการพิเศษและหัวหน้ากลุ่มสาระ การเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนโยธินบูรณะ

ผู้ทรงคุณวุฒิที่ตรวจสอบแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียนและฉบับหลังเรียน มีรายนามดังนี้

1. รองศาสตราจารย์ ดร.ชานนท์ จันทรา	อาจารย์ประจำภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตบางเขน
2. อาจารย์วัฒนิตา นำแสงวานิช	อาจารย์ประจำกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม
3. อาจารย์กนกพร ศรีธนาอุทัยกร	ครูชำนาญการพิเศษและหัวหน้ากลุ่มสาระ การเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนโยธินบูรณะ

ภาคผนวก ค

หนังสือเชิญผู้ทรงคุณวุฒิ หนังสือขอความร่วมมือในการทดลองใช้เครื่องมือ และหนังสือขอความร่วมมือในการเก็บข้อมูลวิจัย

ที่ ศธ 0512.6(2791.01)/61- 3830

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

28 กันยายน 2561

เรื่อง ขอเชิญเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจเครื่องมือวิจัย

เรียน รองศาสตราจารย์ ดร.ชานนท์ จันทรา

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นายนฤพันธุ์ เพ่งพิศ นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง “ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาชั้นปีที่ 3” โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิณดิษฐ์ ละออปักษิณ เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้จึงขอเชิญท่านเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจเครื่องมือวิจัย ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าวเพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุมาลี ชิโนกุล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

กลุ่มภารกิจบริการการศึกษา ฝ่ายสนับสนุนวิชาการ
โทร. 0-2218-2565-97 ต่อ 6732
เบอร์โทรศัพท์ผู้วิจัย: 063-1917700 email: naruephanp@gmail.com

บันทึกข้อความ

ส่วนงาน กลุ่มภารกิจบริการการศึกษา ฝ่ายสนับสนุนวิชาการ คณะครุศาสตร์ จุฬาฯ โทร. 82565-97 ต่อ 6732
ที่ ศธ 0512.6(2791.01)/61- 3831 **วันที่** 28 กันยายน 2561
เรื่อง ขอเชิญเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจเครื่องมือวิจัย

เรียน อาจารย์วัฒนิตา นำแสงวานิช

ด้วย นายนฤพันธุ์ เพ่งพิศ นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง "ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาชั้นปีที่ 3" โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิณดิษฐ์ ละออปักษิณ เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้จึงขอเชิญท่านเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจเครื่องมือวิจัย ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าวเพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุมาลี ชิโนกุล)
รองคณบดี

เบอร์โทรศัพท์ผู้วิจัย: 063-1917700 email: naruephanp@gmail.com

ที่ ศธ 0512.6(2791.01)/61-3882

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

28 กันยายน 2561

เรื่อง ขอเชิญเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจเครื่องมือวิจัย

เรียน อาจารย์กนกพร ศรีธนาอุทัยกร

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นายนฤพันธุ์ เพ่งพิศ นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง "ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาชั้นปีที่ 3" โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิณดิษฐ์ ละออปักษิณ เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้จึงขอเชิญท่านเป็นผู้ทรงคุณวุฒิตรวจเครื่องมือวิจัย ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดเป็นผู้ทรงคุณวุฒิดังกล่าวเพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุมาลี ชิโนกุล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

กลุ่มภารกิจบริการการศึกษา ฝ่ายสนับสนุนวิชาการ
โทร. 0-2218-2565-97 ต่อ 6732
เบอร์โทรศัพท์ผู้วิจัย: 063-1917700 email: naruephanp@gmail.com

ที่ ศธ 0512.6(2791.01)/61- 3883

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

28 กันยายน 2561

เรื่อง ขอทดลองใช้เครื่องมือวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนอนุราชประสิทธิ์

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นายนฤพันธุ์ เพ่งพิศ นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง “ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาชั้นปีที่ 3” โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิณดิษฐ์ ละออปักษิณ เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้นิสิตมีความจำเป็นต้องเก็บรวบรวมข้อมูลและทดลองใช้เครื่องมือ คือ แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนการจัดกิจกรรม และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนการจัดกิจกรรม กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ทั้งนิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดอนุญาตให้นิสิตได้ทดลองใช้เครื่องมือดังกล่าวเพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุมาลี ชิโนกุล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

กลุ่มภารกิจบริการการศึกษา ฝ่ายสนับสนุนวิชาการ
โทร. 0-2218-2565-97 ต่อ 6732
เบอร์โทรศัพท์ผู้วิจัย: 063-1917700 email: naruephanp@gmail.com

ที่ ศธ 0512.6(2791.01)/61-3884

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

28 กันยายน 2561

เรื่อง ขอทดลองใช้เครื่องมือวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนสุรศักดิ์มนตรี

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นายนฤพันธุ์ เพ่งพิศ นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง “ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาชั้นปีที่ 3” โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. จิณดิษฐ์ ละออปักษิณ เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้นิสิตมีความจำเป็นต้องเก็บรวบรวมข้อมูลและทดลองใช้เครื่องมือ คือ แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังการจัดกิจกรรม และแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังการจัดกิจกรรม กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ทั้งนิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดอนุญาตให้นิสิตได้ทดลองใช้เครื่องมือดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุมาลี ชิโนกุล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

กลุ่มภารกิจบริการการศึกษา ฝ่ายสนับสนุนวิชาการ
โทร. 0-2218-2565-97 ต่อ 6732
เบอร์โทรศัพท์ผู้วิจัย: 063-1917700 email: naruephanp@gmail.com

ที่ ศธ 0512.6(2791.01)/61- 3885

คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330

28 กันยายน 2561

เรื่อง ขอความร่วมมือในการเก็บข้อมูลวิจัยและทดลองใช้เครื่องมือ

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนโยธินบูรณะ

สิ่งที่ส่งมาด้วย เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ด้วย นายนฤพันธุ์ เพ่งพิศ นิสิตหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน อยู่ระหว่างการดำเนินงานวิจัยวิทยานิพนธ์เรื่อง "ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมัธยมศึกษาชั้นปีที่ 3" โดยมี ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิณดิษฐ์ ละออปักษิณ เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ในการนี้นิสิตมีความจำเป็นต้องเก็บรวบรวมข้อมูลและทดลองใช้เครื่องมือ คือ แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ และแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ทั้งนี้นิสิตผู้วิจัยจะได้ประสานงานในรายละเอียดต่อไป

จึงเรียนมาเพื่อขอความอนุเคราะห์จากท่านโปรดอนุญาตให้นิสิตได้ทำการเก็บรวบรวมข้อมูลและทดลองใช้เครื่องมือวิจัยดังกล่าว เพื่อประโยชน์ทางวิชาการต่อไป และขอขอบคุณมาในโอกาสนี้

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุมาลี ชิโนกุล)
รองคณบดี
ปฏิบัติการแทนคณบดี

กลุ่มภารกิจบริการการศึกษา ฝ่ายสนับสนุนวิชาการ
โทร. 0-2218-2565-97 ต่อ 6732
เบอร์โทรศัพท์ผู้วิจัย: 063-1917700 email: naruephanp@gmail.com

ภาคผนวก ง

ตัวอย่างเครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 วงกลม
เรื่องย่อย มุมในครึ่งวงกลม
ผู้สอน นายนฤพันธุ์ เพ่งพิศ จำนวน 1 คาบ

---

1. สาระที่ 3 เรขาคณิต

มาตรฐาน ค 3.2 ใช้การนึกภาพ (visualization) ใช้เหตุเกี่ยวกับปริภูมิ (spatial reasoning) และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต (geometric model) ในการแก้ปัญหา

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

1. ตั้งปัญหา สังเกต สำรวจ และสร้างข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับมุมในครึ่งวงกลมได้
2. นำทฤษฎีบทของมุมในครึ่งวงกลมไปใช้ในการแก้ปัญหาได้

ด้านทักษะ/กระบวนการ นักเรียนสามารถ

1. แก้ปัญหาที่ตั้งขึ้นด้วยวิธีการที่หลากหลาย
2. ให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เพื่อยืนยันข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับมุมในครึ่งวงกลม
3. ใช้การวาดรูปเพื่อแสดงหรืออธิบายความคิดได้

ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ นักเรียน

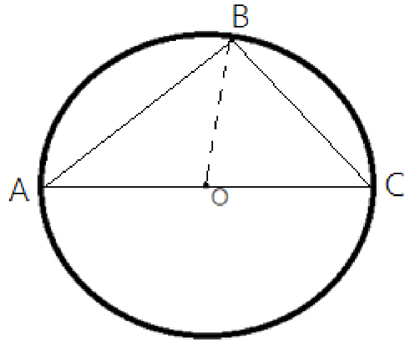
1. มีความกระตือรือร้นและสนใจเรียน
2. มีความตรงต่อเวลา
3. มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย

3. สาระสำคัญ

ทฤษฎีบท มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศาหรือหนึ่งมุมฉาก

4. สาระการเรียนรู้

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ $A\hat{B}C$ เป็นมุมในครึ่งวงกลม ต้องพิสูจน์ว่า $A\hat{B}C$ มีขนาด 90° หรือหนึ่งมุมฉาก



พิสูจน์ ลาก $\overline{OB}$

เนื่องจาก AO = BO = CO (รัศมีของวงกลมเดียวกันยาวเท่ากัน)

ดังนั้น $\triangle AOB$, $\triangle COB$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (มีด้านประกอบมุมยอดยาวเท่ากัน)

จะได้ $B\hat{A}O = A\hat{B}O$ และ $B\hat{C}O = C\hat{B}O$ (มุมมีฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน)

เนื่องจาก $B\hat{A}O + A\hat{B}O + B\hat{C}O + C\hat{B}O = 180^\circ$ (ขนาดมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา)

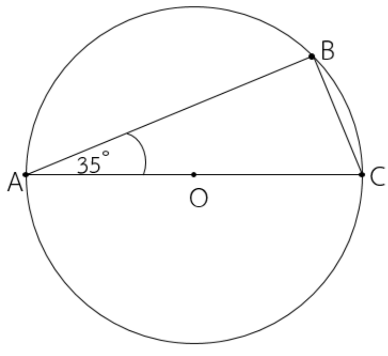
ดังนั้น $2(A\hat{B}O) + 2(C\hat{B}O) = 180^\circ$ (แทนมุมที่มีขนาดท่ากัน)

$A\hat{B}O + C\hat{B}O = 90^\circ$

$A\hat{B}C = 90^\circ$

นั่นคือ $A\hat{B}C$ มีขนาด 90° หรือหนึ่งมุมฉาก

ตัวอย่างที่ 2 จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $A\hat{B}C$ เป็นมุมในครึ่งวงกลมและ $B\hat{A}C = 35^\circ$ จงหาขนาดของ $B\hat{C}A$ เท่ากับกี่องศา พร้อมแสดงเหตุผล



วิธีทำ เนื่องจาก $A\hat{B}C + B\hat{A}C + B\hat{C}A = 180^\circ$ (ขนาดมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา)

และ $A\hat{B}C = 90^\circ$ (มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90°)

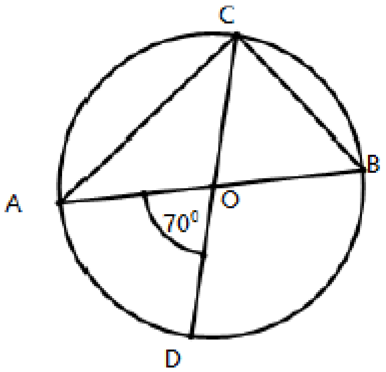
และ $B\hat{A}C = 35^\circ$ (กำหนดให้)

จะได้ว่า $90^\circ + 35^\circ + B\hat{C}A = 180^\circ$

$B\hat{C}A = 180^\circ - 90^\circ - 35^\circ$ (สมบัติของการเท่ากัน)

นั่นคือ $B\hat{C}A = 55^\circ$

ตัวอย่างที่ 3 จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $A\hat{C}B$ เป็นมุมในครึ่งวงกลมและ $A\hat{O}D = 70^\circ$ จงหาขนาดของ $B\hat{C}O$ เท่ากับกี่องศา พร้อมแสดงเหตุผล

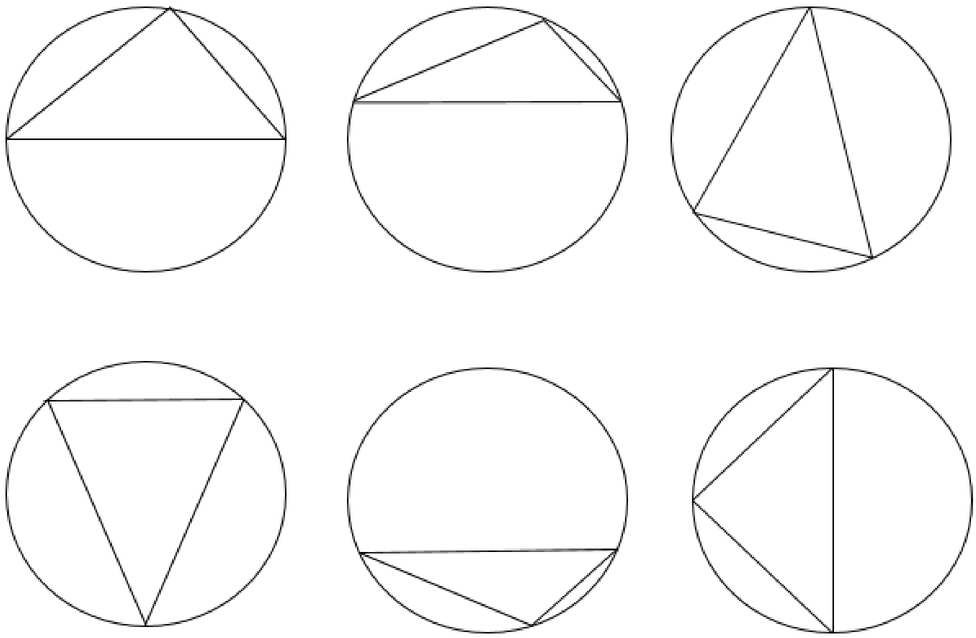


วิธีทำ	เนื่องจาก AO = CO	(รัศมีของวงกลมเดียวกันยาวเท่ากัน)
	จะได้ △AOC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	(มีด้านประกอบมุมยอดยาวเท่ากัน)
	ดังนั้น $A\hat{C}O = C\hat{A}O$	(มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน)
	เนื่องจาก $A\hat{O}D = A\hat{C}O + C\hat{A}O$	(ขนาดของมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น)
	จะได้ $A\hat{O}D = 2(A\hat{C}O)$	(มุมที่มีขนาดเท่ากัน)
	หรือ $A\hat{C}O = \dfrac{A\hat{O}D}{2}$	(สมบัติของการเท่ากัน)
	เนื่องจาก $A\hat{O}D = 70^\circ$	(กำหนดให้)
	จะได้ $A\hat{C}O = 35^\circ$	(สมบัติของการเท่ากัน)
	เนื่องจาก $B\hat{C}O + A\hat{C}O = 90^\circ$	(มุมครึ่งวงกลมมีขนาด 90°)
	จะได้ $B\hat{C}O + 35^\circ = 90^\circ$	(แทน ACO ด้วย 35°)
	ดังนั้น $B\hat{C}O = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$	(สมบัติของการเท่ากัน)
	นั่นคือ $B\hat{C}O = 55^\circ$	

กิจกรรม รูปสามเหลี่ยมในวงกลม

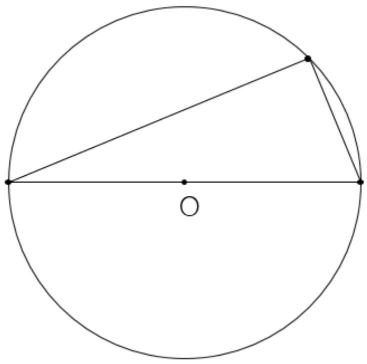
ตอนที่ 1

ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมโดยจุดยอดทั้งสามจุดของรูปสามเหลี่ยมต้องอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมทั้ง 6 วง ให้มีรูปแบบที่แตกต่างกัน จากนั้นให้นักเรียนสังเกตและบันทึกสิ่งที่เกิดขึ้น พร้อมตั้งประเด็นปัญหาเพื่อสำรวจ



ตอนที่ 2

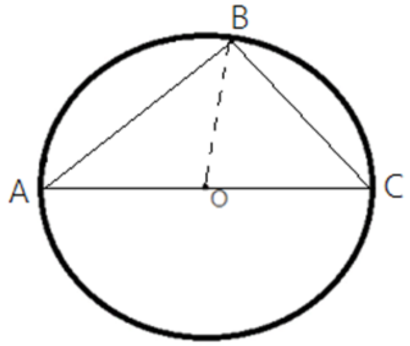
ให้นักเรียนเขียนประเด็นปัญหาในการสำรวจและสร้างวงกลม 2 วงที่มีรัศมีแตกต่างกันโดยใช้วงเวียน โดยให้จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมและสร้างมุมในครึ่งวงกลม จากนั้นให้นักเรียนสังเกตและบันทึกสิ่งที่เกิดขึ้น พร้อมสร้างข้อความคาดการณ์



<u>**ขั้นตอนที่ 3**</u>

ให้นักเรียนแสดงวิธีการ อธิบาย หรือให้เหตุผลเพื่อพิสูจน์และยืนยันข้อความคาดการณ์ที่ได้โดยใช้รูปวงกลมที่กำหนดให้ และสรุปผลการสำรวจประเด็นปัญหา พร้อมตั้งประเด็นปัญหาใหม่ที่นักเรียนสนใจเพื่อดำเนินการสำรวจเพิ่มเติมต่อไป

กำหนดให้ จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ $A\hat{B}C$ เป็นมุมในครึ่งวงกลม



5. กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นเตรียมความพร้อม

1. ครูใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนได้ทบทวนความรู้ที่ได้เรียนไปเมื่อคาบที่แล้ว ประกอบกับสื่อการสอนที่ครูจัดทำขึ้นเพื่อกระตุ้นความสนใจและการมีส่วนร่วมของนักเรียน

- ส่วนประกอบของวงกลมที่ได้เรียนไปเมื่อคาบที่แล้วมีอะไรบ้าง (เส้นรอบวง จุดศูนย์กลาง รัศมี คอร์ด เส้นผ่านศูนย์กลาง มุมที่จุดศูนย์กลาง มุมในส่วนโค้งของวงกลม มุมในครึ่งวงกลม)

เมื่อนักเรียนตอบคำถามเสร็จ ครูจะสุ่มเลือกตัวแทนนักเรียนออกมาติดแผ่นกระดาษที่มีชื่อของส่วนประกอบของวงกลม ลงบนรูปภาพส่วนประกอบของวงกลมบนกระดานให้ถูกต้อง

ขั้นจัดกิจกรรม ประกอบไปด้วย 4 ขั้นตอนย่อย ดังต่อไปนี้

<u>*ทำความเข้าใจเพื่อตั้งปัญหา*</u>

2. ครูแจกเอกสารกิจกรรม เรื่อง รูปสามเหลี่ยมในวงกลม <u>ตอนที่ 1</u> พร้อมนำเสนอกิจกรรม แล้วให้นักเรียนทำความเข้าใจคำสั่งโดยการอ่านอย่างละเอียด และให้นักเรียนดำเนินการตามกิจกรรมที่ให้สร้างรูปสามเหลี่ยมแนบในวงกลมทั้ง 6 วง

3. ครูใช้คำถามปลายเปิดช่วยกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความสงสัยเพื่อนำไปสู่การสำรวจสถานการณ์

- นักเรียนคิดว่ารูปสามเหลี่ยมที่นักเรียนสร้างขึ้นมีลักษณะเป็นอย่างไร (รูปสามเหลี่ยมมีลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม)

จากนั้นครูสุ่มเลือกตัวแทนนักเรียนประมาณ 5-6 คน ออกมาวาดรูปสามเหลี่ยมโดยแบ่งตามลักษณะ ดังนี้ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน และรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมที่แนบในวงกลม

4. ครูใช้คำถามปลายเปิดให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ของลักษณะรูปสามเหลี่ยมที่มีต่อวงกลม

- นักเรียนสังเกตเห็นรูปสามเหลี่ยมที่แนบในวงกลมแต่ละประเภทมีความแตกต่างกันอย่างไร (รูปสามเหลี่ยมมุมฉากจะอยู่ในครึ่งวงกลมพอดี รูปสามเหลี่ยมมุมป้านจะมีขนาดเล็ก ๆ รูปสามเหลี่ยมมุมแหลมจะมีขนาดใหญ่เกือบเต็มวงกลม)

5. ครูใช้คำถามปลายเปิดเพื่อให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นและพยายามตั้งประเด็นปัญหาเพื่อสำรวจ

- นักเรียนคิดว่าเราจะตั้งประเด็นปัญหาเพื่อสำรวจหาความจริงอย่างไรได้บ้าง (มุมในครึ่งวงกลมมีขนาดเท่าใด ทำไมรูปสามเหลี่ยมมุมป้านถึงมีขนาดเล็ก สามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมป้านให้มีขนาดใหญ่กว่าครึ่งวงกลมได้หรือไม่)

จากนั้นครูเลือกปัญหาที่นักเรียนนำเสนอมาหนึ่งปัญหา เพื่อเป็นปัญหาหลักให้นักเรียนทั้งห้อง ดำเนินการสำรวจต่อไป (มุมในครึ่งวงกลมมีขนาดเท่าใด และเป็นเช่นนั้นเสมอหรือไม่)

<u>ใช้กลวิธีเพื่อสร้างข้อความคาดการณ์</u>

6. ครูแจกเอกสารกิจกรรม เรื่อง รูปสามเหลี่ยมในวงกลม <u>ตอนที่ 2</u> และให้นักเรียนดำเนินการตามกิจกรรมที่ให้สร้างวงกลมโดยใช้วงเวียน โดยให้จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และสร้างมุมในครึ่งวงกลม จากนั้นให้นักเรียนสังเกตสิ่งที่เกิดขึ้น หลังจากนั้นครูจึงครูให้นักเรียนวัดมุมในครึ่งวงกลมโดยใช้ครึ่งวงกลมหรือไม้โปรแทรกเตอร์ ซึ่งนักเรียนจะพบว่ามุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศา แล้วครูใช้คำถามปลายเปิดเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนเกิดการเปรียบเทียบ

- นักเรียนคิดว่ามุมในครึ่งวงกลมอื่น ๆ ที่มีรัศมีหรือขนาดที่แตกต่างจากวงกลมที่นักเรียนสร้างจะมีลักษณะที่เหมือนหรือแตกต่างกันอย่างไร (มุมในครึ่งวงกลมน่าจะมีขนาดเท่ากันเพราะถ้ามุมในครึ่งวงกลมอยู่ตำแหน่งเดิมและรัศมีมีขนาดเพิ่มขึ้นหรือลดลง สิ่งที่เพิ่มขึ้นหรือลดลงจะเป็นความยาวของด้านประกอบมุมในครึ่งวงกลม)

7. ครูให้นักเรียนสร้างวงกลมเพิ่มอีก 1 วง ที่มีรัศมีหรือขนาดที่แตกต่างจากวงแรก และสร้างมุมในครึ่งวงกลม แล้ววัดขนาดของมุมในครึ่งวงกลม ซึ่งนักเรียนจะพบว่ามุมในครึ่งวงกลมทั้งสองวงมีขนาด 90 องศาเท่ากัน จากนั้นครูนำนักเรียนสร้างข้อความคาดการณ์ ว่ามุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศาหรือหนึ่งมุมฉาก

<u>พิสูจน์ข้อความคาดการณ์และวางนัยทั่วไป</u>

8. ครูให้นักเรียนพิสูจน์ข้อความคาดการณ์โดยใช้หลักพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในเอกสารกิจกรรม เรื่อง รูปสามเหลี่ยมในวงกลม <u>ตอนที่ 3</u> โดยครูจะใช้คำถามปลายเปิดเข้าไปช่วยเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนเกิดแนวคิดในการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ตาม <u>ตัวอย่างที่ 1</u>

- นักเรียนคิดว่ามีความรู้หรือหลักการอะไรบ้าง ที่สามารถนำมาใช้ในการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ได้ (สามเหลี่ยมด้านเท่ามีขนาดของมุมทั้งสามเท่ากัน และขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 180 องศา)

9. ถ้านักเรียนเกิดข้อสงสัยครูจะคอยชี้แนะนักเรียนในการพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ เพื่อให้นักเรียนสามารถให้เหตุผลและใช้สัญลักษณ์/การดำเนินการทางพีชคณิตได้อย่างถูกต้องและสมเหตุสมผล

10. หลังจากนักเรียนพบว่าข้อความคาดการณ์ที่นักเรียนสร้างขึ้นนั้นเป็นจริง ครูนำนักเรียนวางนัยทั่วไป จากนั้นครูสรุปข้อความคาดการณ์เป็นทฤษฎีบทให้นักเรียนได้รับทราบ

<u>ทบทวนและขยายความคิด</u>

11. ครูให้นักเรียนทบทวนและตรวจสอบการทำงานว่าถูกต้องหรือไม่ หลังจากนั้นครูใช้คำถามปลายเปิดให้นักเรียนได้ขยายกรอบความคิดของตนเองให้กว้างขึ้น เพื่อสำรวจและค้นหาความรู้ใหม่ ๆ

- นักเรียนคิดว่ามีสิ่งไหนที่น่าสนใจและสามารถจะตั้งเป็นปัญหาใหม่เพื่อที่จะดำเนินการสำรวจต่อไปหรือไม่

โดยหากมีประเด็นปัญหาใหม่ ครูจะเก็บความคิดเห็นของนักเรียนเพื่อไปสร้างปัญหาในการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ในคาบต่อไป

ขั้นพัฒนาทักษะ

12. ครูให้นักเรียนนำความรู้และทฤษฎีบทที่ได้ไปใช้แก้ปัญหาในแบบฝึกหัด ของหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 3 เพื่อเป็นการทบทวนความรู้และทฤษฎีที่ได้เรียนรู้แล้ว โดยครูจะยก <u>ตัวอย่างที่ 2</u> เพื่อเป็นตัวอย่างในการนำทฤษฎีบทไปใช้โดยตรงในการแก้ปัญหา และ <u>ตัวอย่างที่ 3</u> เพื่อเป็นตัวอย่างในการนำทฤษฎีบทไปใช้ในการแก้ปัญหาที่มีความซับซ้อนมากขึ้น

13. ครูเข้าไปสนับสนุนและช่วยเหลือนักเรียนที่เกิดปัญหาในการทำแบบฝึกหัด โดยการชี้แนะแนวทางการคิดหรือยกตัวอย่างเพิ่มเติมเพื่อให้นักเรียนสามารถดำเนินการต่อไปได้

ขั้นสรุปสิ่งที่เรียนรู้

14. ครูนำนักเรียนร่วมกันอภิปราย เพื่อสรุปเป็นสาระความรู้ที่ได้จากการทำกิจกรรมรูปสามเหลี่ยมในวงกลมและการทำแบบฝึกหัด และนักเรียนส่งใบกิจกรรมพร้อมแบบฝึกหัด

6. สื่อ/แหล่งเรียนรู้

1. หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 3 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

2. เอกสารประกอบการจัดกิจกรรมรูปสามเหลี่ยมในวงกลม

3. สื่อการเรียนรู้ เช่น รูปภาพวงกลม แผ่นกระดาษแสดงองค์ประกอบวงกลม

7. การวัดและประเมินผล

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีวัดผล	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน	การประเมิน
ด้านความรู้				
1. ตั้งปัญหา สังเกต สำรวจ และสร้างข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับมุมในครึ่งวงกลมได้	-สังเกตจากการถามตอบในชั้นเรียน -ตรวจสอบจากใบกิจกรรม	การถาม-ตอบ ใบกิจกรรมรูปสามเหลี่ยมในวงกลม	นักเรียนร้อยละ 70 ตอบคำถามและทำเอกสาร/แบบฝึกหัดได้ถูกต้องถือว่าผ่าน	
2. นำทฤษฎีบทของมุมในครึ่งวงกลมไปใช้ในการแก้ปัญหาได้	-ตรวจสอบจากแบบฝึกหัด	แบบฝึกหัดในหนังสือเรียน	นักเรียนร้อยละ 70 ทำเอกสาร/แบบฝึกหัดได้ถูกต้องถือว่าผ่าน	
ด้านทักษะ/กระบวนการ				
1. แก้ปัญหาที่ตั้งขึ้นด้วยวิธีการที่หลากหลาย	-สังเกตจากการถามตอบในชั้นเรียน -ตรวจสอบจากใบกิจกรรม	การถาม-ตอบ ใบกิจกรรมรูปสามเหลี่ยมในวงกลม	นักเรียนร้อยละ 70 ตอบคำถามและทำเอกสาร/แบบฝึกหัดได้ถูกต้องถือว่าผ่าน	

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีวัดผล	เครื่องมือ	เกณฑ์การประเมิน	การประเมิน
2. ให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เพื่อยืนยันข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับมุมในครึ่งวงกลม	-ตรวจสอบจากใบกิจกรรม	ใบกิจกรรมรูปสามเหลี่ยมในวงกลม	นักเรียนร้อยละ 70 ทำเอกสาร/แบบฝึกหัดได้ถูกต้องถือว่าผ่าน	
3. ใช้การวาดรูปเพื่อแสดงหรืออธิบายความคิดได้	-ตรวจสอบจากใบกิจกรรม -ตรวจสอบจากแบบฝึกหัด	ใบกิจกรรมรูปสามเหลี่ยมในวงกลม แบบฝึกหัดในหนังสือเรียน	นักเรียนร้อยละ 70 ทำเอกสาร/แบบฝึกหัดได้ถูกต้องถือว่าผ่าน	
ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์				
1. มีความกระตือรือร้นและสนใจเรียน	-สังเกตจากการถามตอบในชั้นเรียน	บันทึกผลการจัดการเรียนรู้	นักเรียนร้อยละ 80 ให้ความร่วมมือในชั้นเรียนถือว่าผ่าน	
2. มีความตรงต่อเวลา	-สังเกตจากการเข้าชั้นเรียน	บันทึกผลการจัดการเรียนรู้	นักเรียนร้อยละ 80 เข้าชั้นเรียนถือว่าผ่าน	
3. มีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย	-สังเกตจากการส่งงาน	บันทึกผลการจัดการเรียนรู้	นักเรียนร้อยละ 80 ส่งงานตรงเวลาถือว่าผ่าน	

8. บันทึกผลการจัดกิจกรรม

ผลการสอน

....

....

....

....

ปัญหาและอุปสรรค

....

....

....

....

แนวทางแก้ไข/ข้อเสนอแนะ

....

....

....

....

ลงชื่อ..

(นายนฤพันธุ์ เพ่งพิศ)

ผู้สอน

<u>ใบกิจกรรมที่ 2/1 เรื่อง รูปสามเหลี่ยมในวงกลม</u>

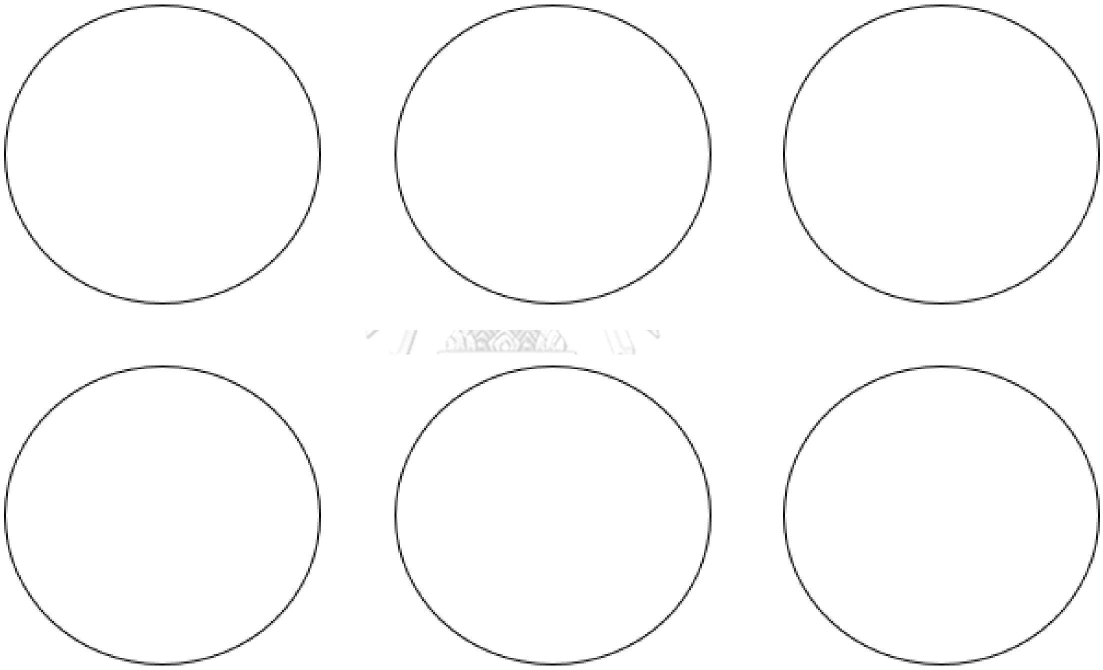
ชื่อ-นามสกุล...ชั้น...................เลขที่..................

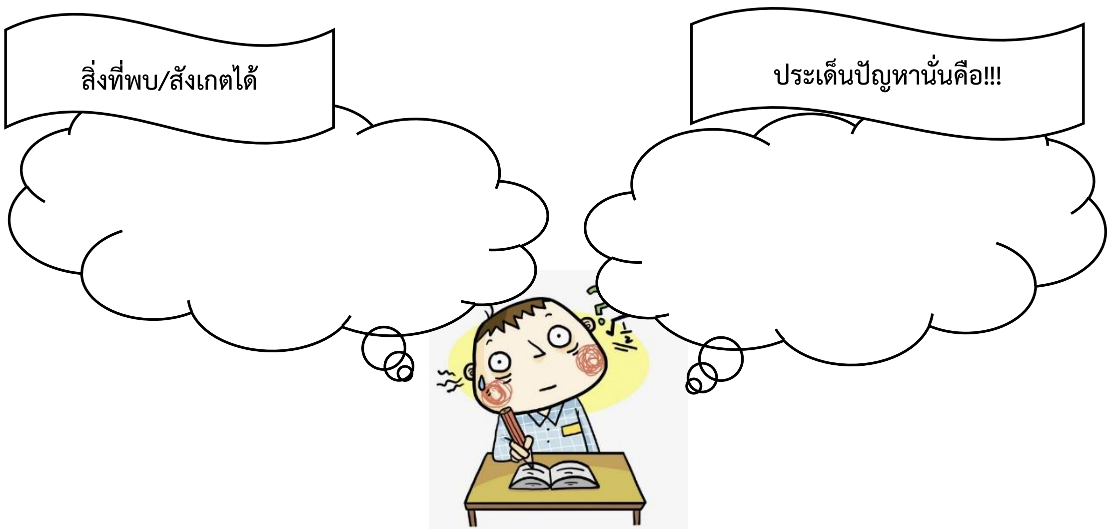
ชื่อ-นามสกุล...ชั้น...................เลขที่..................

วันที่... **ผู้สอน นายนฤพันธุ์ เพ่งพิศ**

กิจกรรม รูปสามเหลี่ยมในวงกลม

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมโดยจุดยอดทั้งสามจุดของรูปสามเหลี่ยมต้องอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมทั้ง 6 วง ให้มีรูปแบบที่แตกต่างกัน จากนั้นให้นักเรียนสังเกตและบันทึกสิ่งที่เกิดขึ้น พร้อมตั้งประเด็นปัญหาเพื่อสำรวจ





ใบกิจกรรมที่ 2/2 เรื่อง รูปสามเหลี่ยมในวงกลม

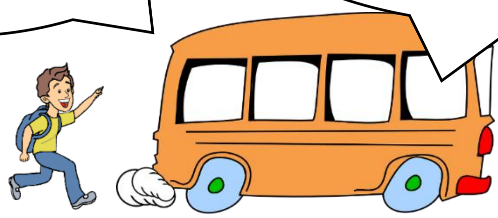
กิจกรรม รูปสามเหลี่ยมในวงกลม

ขั้นตอนที่ 2 ให้นักเรียนเขียนประเด็นปัญหาในการสำรวจและสร้างวงกลม 2 วงที่มีรัศมีแตกต่างกันโดยใช้วงเวียน โดยให้จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมและสร้างมุมในครึ่งวงกลม จากนั้นให้นักเรียนสังเกตและบันทึกสิ่งที่เกิดขึ้น พร้อมสร้างข้อความคาดการณ์

ประเด็นปัญหา คือ ....

สิ่งที่พบ/สังเกตได้

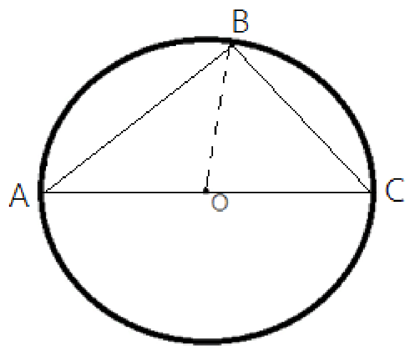
ข้อความคาดการณ์คือ!!!



กิจกรรม รูปสามเหลี่ยมในวงกลม

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> ให้นักเรียนแสดงวิธีการ อธิบาย หรือให้เหตุผลเพื่อพิสูจน์และยืนยันข้อความคาดการณ์ที่ได้โดยใช้รูปวงกลมที่กำหนดให้ และสรุปผลการสำรวจประเด็นปัญหา พร้อมตั้งประเด็นปัญหาใหม่ที่นักเรียนสนใจเพื่อดำเนินการสำรวจเพิ่มเติมต่อไป

□ กำหนดให้ จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ $A\hat{B}C$ เป็นมุมในครึ่งวงกลม



พิสูจน์และยืนยันข้อความคาดการณ์

รูปสามเหลี่ยม ABO และ รูปสามเหลี่ยม CBO มีลักษณะเป็นอย่างไร...

ขนาดของ $B\hat{A}O$ และ $A\hat{B}O$ เป็นอย่างไร........................ขนาดของ $B\hat{C}O$ และ $C\hat{B}O$ เป็นอย่างไร..........................

....

....

....

สรุปผลการสำรวจ

....

....

....

ประเด็นปัญหาเพื่อสำรวจเพิ่มเติม

....

....

....

ภาคผนวก จ

ผลการวิเคราะห์คุณภาพของเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล และตัวอย่างเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล ได้แก่

- แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาก่อนเรียน
- แบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาหลังเรียน
- แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลก่อนเรียน
- แบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลหลังเรียน

ตารางที่ 15 แสดงค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเที่ยงของแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียน จำนวน 4 ข้อ

ข้อที่	ค่าความยากง่าย (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)	ค่าความเที่ยงของแบบวัดทั้งฉบับ
1	0.52	0.40	0.63
2	0.43	0.57	
3	0.47	0.48	
4	0.34	0.55	

ตัวอย่างแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

(ฉบับก่อนเรียน)

ชื่อ-นามสกุล	เลขที่

<u>คำชี้แจง</u>

แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับนี้ เป็นแบบทดสอบชนิดอัตนัย จำนวน 4 ข้อ คะแนนเต็มข้อละ 16 คะแนน โดยมีเวลาในการทำแบบทดสอบ 50 นาที ซึ่งการตอบคำถามในแต่ละข้อย่อยให้นักเรียนปฏิบัติดังนี้

1) ด้านความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหา ให้นักเรียนระบุข้อมูลสำคัญ ระบุคำถาม และแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลในปัญหาโดยการวาดแผนภาพ วาดกราฟ สร้างตาราง สร้างสมการ หรืออธิบายโดยใช้ข้อความ

2) ด้านความสามารถในการเลือกแผน ให้นักเรียนอธิบายแนวทางในการหาคำตอบ/การแก้ปัญหา โดยอธิบายเป็นขั้นตอนทีละขั้น

3) ด้านความสามารถในการดำเนินการตามแผน ให้นักเรียนแสดงวิธีการแก้ปัญหาตามแผนที่วางไว้โดยละเอียด

4) ด้านความสามารถในการสะท้อนและขยายผล ให้นักเรียนสรุปคำตอบ ตรวจสอบความถูกต้องและความสมเหตุสมผลของคำตอบ และตั้งปัญหาใหม่ที่น่าสนใจโดยมีความเกี่ยวข้องหรือสัมพันธ์กับบริบทของปัญหาเดิม

ข้อที่	คะแนน
1	
2	
3	
4	
รวม	

- **ข้อที่ 1**

แม่มีเงินอยู่จำนวนหนึ่งแบ่งให้ลูกทั้งสามคน ลูกคนโตได้เงินมากกว่าลูกคนกลาง 50 บาท ลูกคนกลางได้เงินมากกว่าลูกคนเล็ก 100 บาท ส่วนลูกคนเล็กได้เงินเป็น $\frac{1}{4}$ ของเงินทั้งหมด อยากทราบว่าเดิมแม่มีเงินอยู่เท่าใด ถ้าให้เงินแก่ลูกทั้งสามคนแล้วเงินหมดพอดี

จงตอบคำถามต่อไปนี้

1) ด้านความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหา

1.1) ระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดและคำถามในสถานการณ์ปัญหา
สิ่งที่โจทย์กำหนดให้มีอะไรบ้าง..   ....   คำถามของปัญหานี้ คืออะไร ....
1.2) แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลในปัญหา
แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูล โดยการวาดกราฟ วาดภาพ สร้างตาราง หรือสร้างสมการทางพีชคณิต

2) ด้านความสามารถในการเลือกแผน

2.1) เลือกวิธีการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม

สิ่งแรกที่ต้องดำเนินการ คือ..

....

อธิบายแนวทางในการหาคำตอบ อธิบายเป็นขั้นตอนทีละขั้น (ไม่เกิน 5 ขั้นตอน)

....

....

....

....

....

....

....

3) ความสามารถในการดำเนินการตามแผน

3.1) ดำเนินการทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง

แสดงวิธีการแก้ปัญหาโดยละเอียด ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4) ความสามารถในการสะท้อนและขยายผล

4.1) สรุปคำตอบและตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบ
<u>สรุปคำตอบ</u>... .... <u>อธิบายความสมเหตุสมผลของคำตอบ</u> ....
4.2) ตั้งปัญหาใหม่ที่น่าสนใจ
<u>ตั้งปัญหาใหม่ที่น่าสนใจโดยมีความเกี่ยวข้องกับบริบทของปัญหาเดิมมา 1 ปัญหา</u> ....

■ **ข้อที่ 2**

รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งมีด้านยาวยาวกว่า $\frac{3}{4}$ ของด้านกว้างอยู่ 6 หน่วย ถ้าความยาวรอบรูปของสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็น 54 หน่วย อยากทราบว่าความกว้างและความยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นเท่าใด

จงตอบคำถามต่อไปนี้

1) ด้านความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหา

1.1) ระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดและคำถามในสถานการณ์ปัญหา
สิ่งที่โจทย์กำหนดให้มีอะไรบ้าง.. .... คำถามของปัญหานี้ คืออะไร ....
1.2) แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลในปัญหา
แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูล โดยการวาดกราฟ วาดภาพ สร้างตาราง หรือสร้างสมการทางพีชคณิต

2) ด้านความสามารถในการเลือกแผน

2.1) เลือกวิธีการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม
สิ่งแรกที่ต้องดำเนินการ คือ..
....
อธิบายแนวทางในการหาคำตอบ อธิบายเป็นขั้นตอนทีละขั้น (ไม่เกิน 5 ขั้นตอน)
....
....
....
....
....
....
....

3) ความสามารถในการดำเนินการตามแผน

3.1) ดำเนินการทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง
แสดงวิธีการแก้ปัญหาโดยละเอียด ....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

4) ความสามารถในการสะท้อนและขยายผล

4.1) สรุปคำตอบและตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบ
<u>สรุปคำตอบ</u>.. .... <u>อธิบายความสมเหตุสมผลของคำตอบ</u> ....
4.2) ตั้งปัญหาใหม่ที่น่าสนใจ
<u>ตั้งปัญหาใหม่ที่น่าสนใจโดยมีความเกี่ยวข้องกับบริบทของปัญหาเดิมมา 1 ปัญหา</u> ....

แนวทางการตอบแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 (ฉบับก่อนเรียน)

- **ข้อที่ 1**

แม่มีเงินอยู่จำนวนหนึ่งแบ่งให้ลูกทั้งสามคน ลูกคนโตได้เงินมากกว่าลูกคนกลาง 50 บาท ลูกคนกลางได้เงินมากกว่าลูกคนเล็ก 100 บาท ส่วนลูกคนเล็กได้เงินเป็น $\frac{1}{4}$ ของเงินทั้งหมด อยากทราบว่าเดิมแม่มีเงินอยู่เท่าใด ถ้าให้เงินแก่ลูกทั้งสามคนแล้วเงินหมดพอดี

จงตอบคำถามต่อไปนี้

1) ด้านความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหา

1.1) ระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดและคำถามในสถานการณ์ปัญหา

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้มีอะไรบ้าง

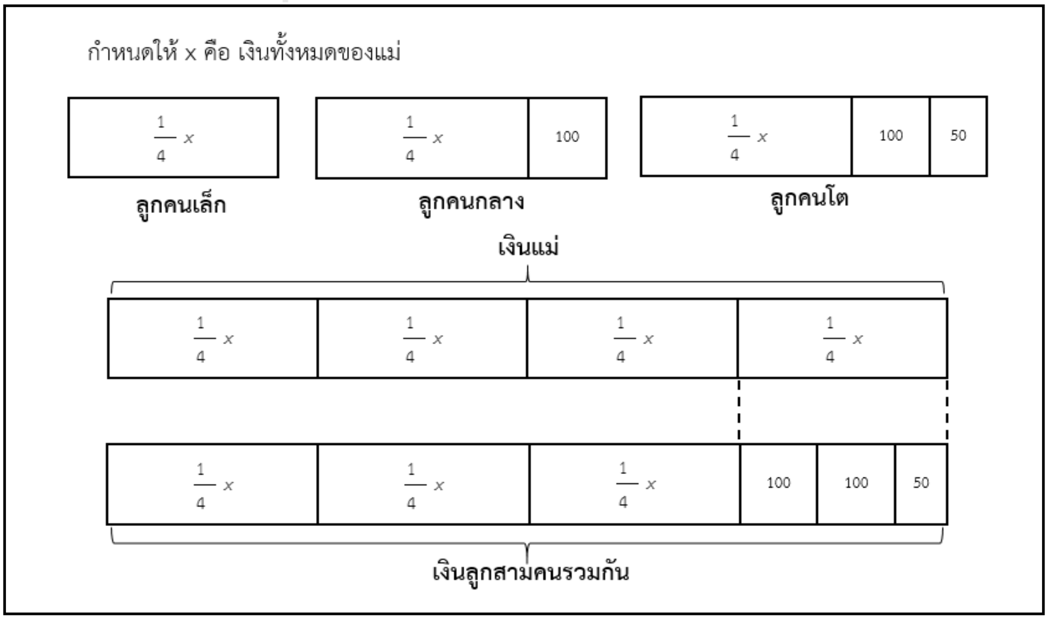
ลูกคนโตได้เงินมากกว่าลูกคนกลาง 50 บาท ลูกคนกลางได้เงินมากกว่าลูกคนเล็ก 100 บาท ลูกคนเล็กได้เงินเป็น $\frac{1}{4}$ ของเงินทั้งหมด

คำถามของปัญหานี้ คืออะไร

เดิมแม่มีเงินเท่าใด

1.2) แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลในปัญหา

แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูล โดยการวาดกราฟ วาดภาพ สร้างตาราง หรือสร้างสมการทางพีชคณิต



2) ด้านความสามารถในการเลือกแผน

2.1) เลือกวิธีการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม
<u>สิ่งแรกที่ต้องดำเนินการ คือ</u> กำหนดตัวแปรเพื่อแก้สมการโดยให้ x คือ เงินทั้งหมดของแม่ <u>อธิบายแนวทางในการหาคำตอบ อธิบายเป็นขั้นตอนทีละขั้น (ไม่เกิน 5 ขั้นตอน)</u> 1) ใช้แท่งสี่เหลี่ยมเพื่อแทนจำนวนของเงินที่ลูกทั้งสามได้รับ 2) ใช้แท่งสี่เหลี่ยมแทนความสัมพันธ์ของเงินทั้งหมดของแม่จะมีค่าเท่ากับเงินที่ลูกทั้งสามได้รับ 3) สร้างสมการเพื่อแก้หาค่า x 4) ดำเนินการแก้สมการ

3) ความสามารถในการดำเนินการตามแผน

3.1) ดำเนินการทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง
<u>แสดงวิธีการแก้ปัญหาโดยละเอียด</u> จากแผ่นภาพแท่งสี่เหลี่ยมจะได้สมการว่า $100+100+50 = \frac{1}{4}x$ $250 = \frac{1}{4}x$ $250(4) = x$ $x = 1000$

4) ความสามารถในการสะท้อนและขยายผล

4.1) สรุปคำตอบและตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบ
<u>สรุปคำตอบ</u> เดิมแม่มีเงินทั้งหมด 1,000 บาท <u>อธิบายความสมเหตุสมผลของคำตอบ</u> ถ้าแม่มีเงิน 1,000 บาท แบ่งให้ลูกคนเล็ก $\frac{1}{4}$ ของเงินทั้งหมดจะเท่ากับ 250 บาท คนกลางจะได้ 250+100 = 350 บาท คนโต 250+100+50 = 400 บาท จะได้ว่าแม่เหลือเงิน 1,000-250-350-400 = 0 บาท
4.2) ตั้งปัญหาใหม่ที่น่าสนใจ
<u>ตั้งปัญหาใหม่ที่น่าสนใจโดยมีความเกี่ยวข้องกับบริบทของปัญหาเดิมมา 1 ปัญหา</u> แม่มีเงินอยู่จำนวนหนึ่งแบ่งให้ลูกทั้งสามคน ลูกคนโตได้เงินมากกว่าลูกคนกลาง 50 บาท ลูกคนกลางได้เงินมากกว่าลูกคนเล็ก 100 บาท ส่วนลูกคนเล็กได้เงินเป็น $\frac{1}{4}$ ของเงินทั้งหมด อยากทราบว่าเดิมแม่มีเงินอยู่เท่าใด ถ้าให้เงินแก่ลูกทั้งสามคนแล้วเหลือเงิน 250 บาท

■ **ข้อที่ 2**

รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งมีด้านยาวยาวกว่า $\frac{3}{4}$ ของด้านกว้างอยู่ 6 หน่วย ถ้าความยาวรอบรูปของสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็น 54 หน่วย อยากทราบว่าความกว้างและความยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นเท่าใด

จงตอบคำถามต่อไปนี้

1) ด้านความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหา

1.1) ระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดและคำถามในสถานการณ์ปัญหา

<u>สิ่งที่โจทย์กำหนดให้มีอะไรบ้าง</u>

ด้านยาวยาวกว่า $\frac{3}{4}$ ของด้านกว้างอยู่ 6 หน่วย, ความยาวรอบรูป 54 หน่วย

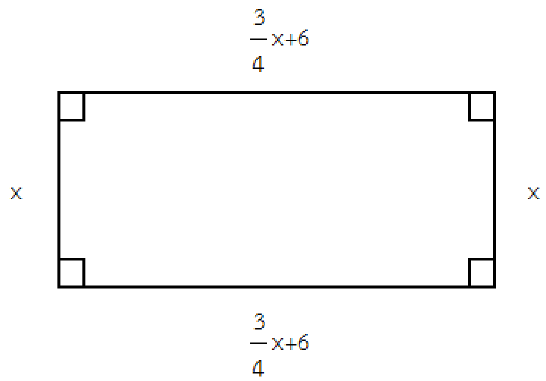
<u>คำถามของปัญหานี้ คืออะไร</u>

ความกว้างและความยาวของรูปสี่เหลี่ยมยาวเท่าใด

1.2) แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลในปัญหา

แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูล โดยการวาดกราฟ วาดภาพ สร้างตาราง หรือสร้างสมการทางพีชคณิต

กำหนดให้ ด้านกว้างยาว x หน่วย



2) ด้านความสามารถในการเลือกแผน

2.1) เลือกวิธีการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม
สิ่งแรกที่ต้องดำเนินการ คือ กำหนดให้ x คือความยาวของด้านกว้าง อธิบายแนวทางในการหาคำตอบ อธิบายเป็นขั้นตอนทีละขั้น (ไม่เกิน 5 ขั้นตอน) 1) วาดรูปเหลี่ยมผืนผ้าและกำหนดความกว้างความยาวตามเงื่อนไขของโจทย์ 2) สร้างสมการจากความสัมพันธ์ของเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยม 3) ดำเนินการแก้สมการเพื่อหาคำตอบ

3) ความสามารถในการดำเนินการตามแผน

3.1) ดำเนินการทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง
แสดงวิธีการแก้ปัญหาโดยละเอียด จากความสัมพันธ์ของเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมจะได้สมการว่า $x + x + \left(\frac{3}{4}x+6\right) + \left(\frac{3}{4}x+6\right) = 54$ $2x + \frac{6x}{4} + 12 = 54$ $\frac{8x+6x}{4} = 54-12$ $\frac{14x}{4} = 42$ $x = 42\left(\frac{4}{14}\right)$ $x = 12$ ดังนั้น ด้านกว้างมีความยาว 12 หน่วย ด้านยาวมีความยาว $\frac{3}{4}$ (12)+6 = 15 หน่วย

4) ความสามารถในการสะท้อนและขยายผล

4.1) สรุปคำตอบและตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบ
สรุปคำตอบ ด้านกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ายาว 12 หน่วย และด้านยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ายาว 15 หน่วย อธิบายความสมเหตุสมผลของคำตอบ เนื่องจากด้านกว้างมีความยาว 12 หน่วย และด้านยาวมีความยาว 15 หน่วย ดังนั้นความยาวรอบรูปจะเท่ากับ 2(12+15) = 54 หน่วย ซึ่งตรงกับเงื่อนไขของโจทย์
4.2) ตั้งปัญหาใหม่ที่น่าสนใจ
ตั้งปัญหาใหม่ที่น่าสนใจโดยมีความเกี่ยวข้องกับบริบทของปัญหาเดิมมา 1 ปัญหา รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปหนึ่งมีด้านประกอบมุมยอดแต่ละด้านยาวกว่า $\frac{3}{4}$ ของฐานอยู่ 6 หน่วย ถ้าความยาวรอบรูปของสามเหลี่ยมหน้าจั่วเป็น 54 หน่วย อยากทราบว่า ด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมหน้าจั่วยาวด้านละเท่าใด

ตารางที่ 16 แสดงค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเที่ยงของแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับหลังเรียน จำนวน 4 ข้อ

ข้อที่	ค่าความยากง่าย (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)	ค่าความเที่ยงของแบบวัดทั้งฉบับ
1	0.67	0.37	0.86
2	0.64	0.34	
3	0.64	0.45	
4	0.63	0.33	

ตัวอย่างแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

(ฉบับหลังเรียน)

ชื่อ-นามสกุล	เลขที่

<u>คำชี้แจง</u>

แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ฉบับนี้ เป็นแบบทดสอบชนิดอัตนัย จำนวน 4 ข้อ คะแนนเต็มข้อละ 16 คะแนน โดยมีเวลาในการทำแบบทดสอบ 50 นาที ซึ่งการตอบคำถามในแต่ละข้อย่อยให้นักเรียนปฏิบัติดังนี้

1) ด้านความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหา ให้นักเรียนระบุข้อมูลสำคัญ ระบุคำถาม และแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลในปัญหาโดยการวาดแผนภาพ วาดกราฟ สร้างตาราง สร้างสมการ หรืออธิบายโดยใช้ข้อความ

2) ด้านความสามารถในการเลือกแผน ให้นักเรียนอธิบายแนวทางในการหาคำตอบ/การแก้ปัญหา โดยอธิบายเป็นขั้นตอนทีละขั้น

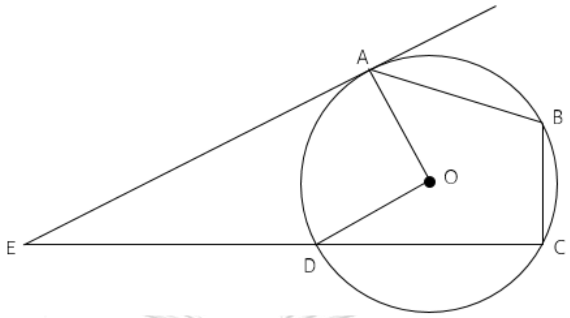
3) ด้านความสามารถในการดำเนินการตามแผน ให้นักเรียนแสดงวิธีการแก้ปัญหาตามแผนที่วางไว้โดยละเอียด

4) ด้านความสามารถในการสะท้อนและขยายผล ให้นักเรียนสรุปคำตอบ ตรวจสอบความถูกต้องและความสมเหตุสมผลของคำตอบ และตั้งปัญหาใหม่ที่น่าสนใจโดยมีความเกี่ยวข้องหรือสัมพันธ์กับบริบทของปัญหาเดิม

ข้อที่	คะแนน
1	
2	
3	
4	
รวม	

■ **ข้อที่ 1**

จากรูปให้จุด O คือจุดศูนย์กลางของวงกลมและ E เป็นจุดภายนอกวงกลม ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด E สัมผัสวงกลมที่จุด A กำหนดให้ $A\hat{O}D = 96^\circ$ และ $A\hat{B}C = 108^\circ$ จงหาขนาดของ $A\hat{E}D$



จงตอบคำถามต่อไปนี้

1) ด้านความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหา

1.1) ระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดและคำถามในสถานการณ์ปัญหา
<u>สิ่งที่โจทย์กำหนดให้มีอะไรบ้าง</u>.. .... <u>คำถามของปัญหานี้ คืออะไร</u> ....
1.2) แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลในปัญหา
<u>แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูล โดยการวาดกราฟ วาดภาพ สร้างตาราง หรือสร้างสมการทางพีชคณิต</u>

2) ด้านความสามารถในการเลือกแผน

2.1) เลือกวิธีการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม
สิ่งแรกที่ต้องดำเนินการ คือ..
....
อธิบายแนวทางในการหาคำตอบ อธิบายเป็นขั้นตอนทีละขั้น (ไม่เกิน 5 ขั้นตอน)
....
....
....
....
....
....
....

3) ความสามารถในการดำเนินการตามแผน

3.1) ดำเนินการทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง
แสดงวิธีการแก้ปัญหาโดยละเอียด ....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

4) ความสามารถในการสะท้อนและขยายผล

4.1) สรุปคำตอบและตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบ

สรุปคำตอบ..

....

....

อธิบายความสมเหตุสมผลของคำตอบ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

4.2) ตั้งปัญหาใหม่ที่น่าสนใจ

ตั้งปัญหาใหม่ที่น่าสนใจโดยมีความเกี่ยวข้องกับบริบทของปัญหาเดิมมา 1 ปัญหา

....

....

....

....

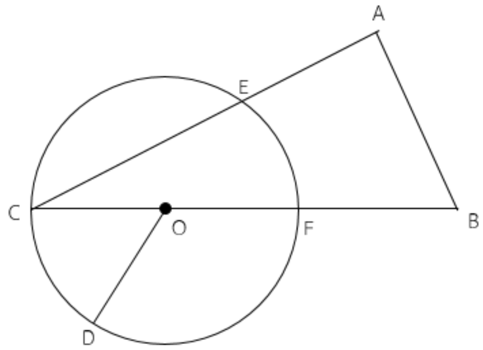
....

....

....

■ **ข้อที่ 2**

จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $C\hat{O}D = 50°$ และ $C\hat{A}B$ เป็นมุมฉาก จงหาขนาดของ $A\hat{B}C$



จงตอบคำถามต่อไปนี้

1) ด้านความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหา

1.1) ระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดและคำถามในสถานการณ์ปัญหา
สิ่งที่โจทย์กำหนดให้มีอะไรบ้าง.. .... คำถามของปัญหานี้ คืออะไร ....
1.2) แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลในปัญหา
แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูล โดยการวาดกราฟ วาดภาพ สร้างตาราง หรือสร้างสมการทาง พีชคณิต

2) ด้านความสามารถในการเลือกแผน

2.1) เลือกวิธีการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม
สิ่งแรกที่ต้องดำเนินการ คือ..
....
อธิบายแนวทางในการหาคำตอบ อธิบายเป็นขั้นตอนทีละขั้น (ไม่เกิน 5 ขั้นตอน)
....
....
....
....
....
....
....

3) ความสามารถในการดำเนินการตามแผน

3.1) ดำเนินการทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง
แสดงวิธีการแก้ปัญหาโดยละเอียด ....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

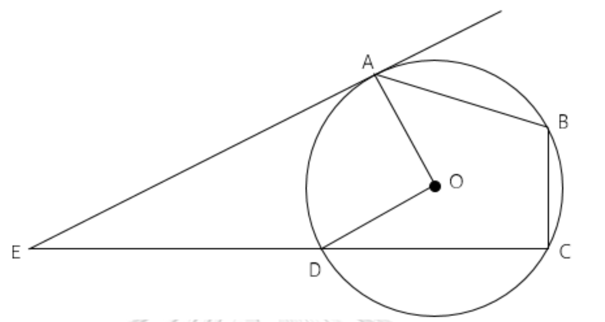
4) ความสามารถในการสะท้อนและขยายผล

4.1) สรุปคำตอบและตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบ
<u>สรุปคำตอบ</u>...
....
....
<u>อธิบายความสมเหตุสมผลของคำตอบ</u> ....
....
....
....
....
....
....
....
....
4.2) ตั้งปัญหาใหม่ที่น่าสนใจ
<u>ตั้งปัญหาใหม่ที่น่าสนใจโดยมีความเกี่ยวข้องกับบริบทของปัญหาเดิมมา 1 ปัญหา</u>
....
....
....
....
....
....
....

แนวทางการตอบแบบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 (ฉบับหลังเรียน)

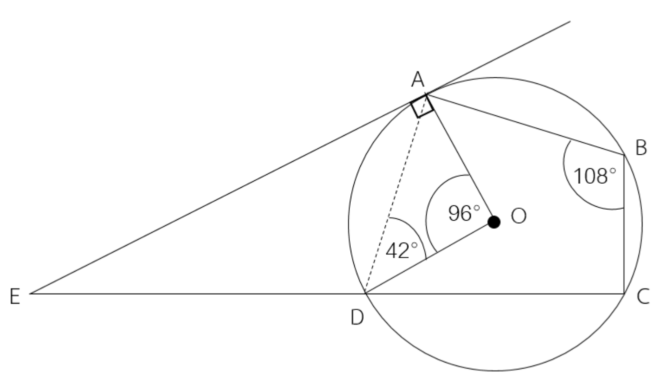
- **ข้อที่ 1**

จากรูปให้จุด O คือจุดศูนย์กลางของวงกลมและ E เป็นจุดภายนอกวงกลม ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด E สัมผัสวงกลมที่จุด A กำหนดให้ $A\hat{O}D = 96°$ และ $A\hat{B}C = 108°$ จงหาขนาดของ $A\hat{E}D$



จงตอบคำถามต่อไปนี้

1) ด้านความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหา

1.1) ระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดและคำถามในสถานการณ์ปัญหา
<u>สิ่งที่โจทย์กำหนดให้มีอะไรบ้าง</u> $A\hat{O}D = 96°$, $A\hat{B}C = 108°$ และ A เป็นจุดสัมผัสวงกลม <u>คำถามของปัญหานี้ คืออะไร</u> $A\hat{E}D$ มีขนาดกี่องศา
1.2) แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลในปัญหา
<u>แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูล โดยการวาดกราฟ วาดภาพ สร้างตาราง หรือสร้างสมการทางพีชคณิต</u> 

2) ด้านความสามารถในการเลือกแผน

2.1) เลือกวิธีการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม
<u>สิ่งแรกที่ต้องดำเนินการ คือ</u> ลาก $\overline{AD}$ <u>อธิบายแนวทางในการหาคำตอบ อธิบายเป็นขั้นตอนทีละขั้น (ไม่เกิน 5 ขั้นตอน)</u> 1) ลาก $\overline{AD}$ จะทำให้เกิด $O\hat{A}D$ หาขนาดของ $O\hat{A}D$ จากผมรวมของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว 2) หาขนาดของ $D\hat{A}E$ จากเส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส 3) หาขนาดของ $E\hat{D}A$ จากการต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมออกไป ขนาดของมุมภายนอกของรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมจะเท่ากับขนาดของมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามกับมุมภายนอกนั้น 4) หาขนาดของ $A\hat{E}D$ จากผลรวมมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้ $180°$

3) ความสามารถในการดำเนินการตามแผน

3.1) ดำเนินการทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง
<u>แสดงวิธีการแก้ปัญหาโดยละเอียด</u> จากรูปภาพที่แสดงในหัวข้อ 1.2 จะได้ว่า $E\hat{A}O = 90°$ เนื่องจากเส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส หาขนาดของ $O\hat{A}D$ จากผมรวมของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วโดยมุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน จะได้ว่า $A\hat{O}D + 2(D\hat{A}O) = 180°$ $96° + 2(D\hat{A}O) = 180°$ $2(D\hat{A}O) = 180° - 96° = 84°$ $D\hat{A}O = \frac{84°}{2} = 42°$ หาขนาดของ $D\hat{A}E$ จะได้ $E\hat{A}O = D\hat{A}O + D\hat{A}E$ $90° = 42° + D\hat{A}E$ $D\hat{A}E = 90° - 42° = 48°$ หาขนาดของ $E\hat{D}A$ จากความสัมพันธ์ของมุมใน $\square ABCD$ ที่แนบในวงกลม จะได้ $E\hat{D}A = A\hat{B}C = 108°$

3.1) ดำเนินการทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง

หาขนาดของ $A\hat{E}D$

จาก ΔAED จะได้ว่า $E\hat{D}A + D\hat{A}E + A\hat{E}D = 180^\circ$

$$108^\circ + 48^\circ + A\hat{E}D = 180^\circ$$

$$A\hat{E}D = 180^\circ - 156^\circ = 24^\circ$$

4) ความสามารถในการสะท้อนและขยายผล

4.1) สรุปคำตอบและตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบ

<u>สรุปคำตอบ</u>

$A\hat{E}D$ มีขนาด 24 องศา

<u>อธิบายความสมเหตุสมผลของคำตอบ</u>

เมื่อพิจารณาขนาดของ $O\hat{D}E$ จะเท่ากับ $E\hat{D}A + A\hat{D}O = 108^\circ + 42^\circ = 150^\circ$ แล้วผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยม EAOD จะได้ $A\hat{E}D + E\hat{A}O + A\hat{O}D + O\hat{D}E = 24^\circ + 90^\circ + 96^\circ + 150^\circ = 360^\circ$ ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีบท ผลรวมมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมจะเท่ากับ 360°

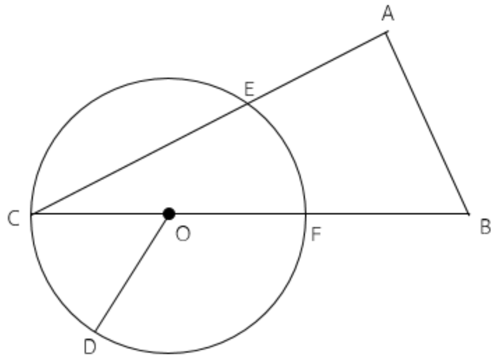
4.2) ตั้งปัญหาใหม่ที่น่าสนใจ

<u>ตั้งปัญหาใหม่ที่น่าสนใจโดยมีความเกี่ยวข้องกับบริบทของปัญหาเดิมมา 1 ปัญหา</u>

กำหนดให้จุด O คือจุดศูนย์กลางของวงกลมและ E เป็นจุดภายนอกวงกลม ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด E สัมผัสวงกลมที่จุด A กำหนดให้ $A\hat{O}D = 100^\circ$, $A\hat{E}D = 30^\circ$ และ $D\hat{C}B$ เป็นมุมฉาก จงหาขนาดของมุม $A\hat{B}C$ โดยใช้รูปภาพจากโจทย์เดิม

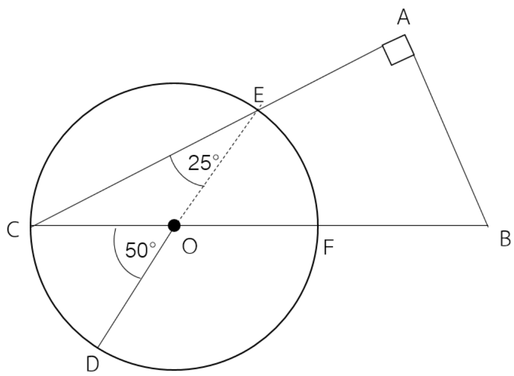
- **ข้อที่ 2**

จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $C\hat{O}D = 50°$ และ $C\hat{A}B$ เป็นมุมฉาก จงหาขนาดของ $A\hat{B}C$



จงตอบคำถามต่อไปนี้

1) ด้านความสามารถในการทำความเข้าใจปัญหา

1.1) ระบุสิ่งที่โจทย์กำหนดและคำถามในสถานการณ์ปัญหา
<u>สิ่งที่โจทย์กำหนดให้มีอะไรบ้าง</u> $C\hat{O}D = 50°$ และ $C\hat{A}B = 90°$ <u>คำถามของปัญหานี้ คืออะไร</u> หาขนาดของ $A\hat{B}C$
1.2) แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูลในปัญหา
<u>แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูล โดยการวาดกราฟ วาดภาพ สร้างตาราง หรือสร้างสมการทางพีชคณิต</u> 

2) ด้านความสามารถในการเลือกแผน

2.1) เลือกวิธีการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม
<u>สิ่งแรกที่ต้องดำเนินการ คือ</u> ลาก $\overline{OE}$ <u>อธิบายแนวทางในการหาคำตอบ อธิบายเป็นขั้นตอนทีละขั้น (ไม่เกิน 5 ขั้นตอน)</u> 1) ลาก $\overline{OE}$ จะทำให้เกิด $C\hat{E}O$ หาขนาดของ $C\hat{E}O$ จากมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยฐานโค้งเดียวกัน 2) หาขนาดของ $E\hat{C}O$ จากมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วโดยมุมที่ฐานมีขนาดเท่ากัน 3) หาขนาดของ $A\hat{B}C$ จากผลรวมมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้ 180°

3) ความสามารถในการดำเนินการตามแผน

3.1) ดำเนินการทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง
<u>แสดงวิธีการแก้ปัญหาโดยละเอียด</u> ลาก $\overline{OE}$ จะทำให้เกิด $C\hat{E}O$ หาขนาดของ $C\hat{E}O$ จาก $C\hat{O}D = 2(C\hat{E}O)$ $50^\circ = 2(C\hat{E}O)$ $C\hat{E}O = 25^\circ$ หาขนาดของ $E\hat{C}O$ จาก ΔCEO จะได้ $E\hat{C}O = C\hat{E}O = 25^\circ$ หาขนาดของ $A\hat{B}C$ จาก ΔCAB จะได้ $A\hat{C}B + C\hat{A}B + A\hat{B}C = 180^\circ$ $25^\circ + 90^\circ + A\hat{B}C = 180^\circ$ $A\hat{B}C = 180^\circ - 25^\circ - 90^\circ$ $A\hat{B}C = 65^\circ$

4) ความสามารถในการสะท้อนและขยายผล

4.1) สรุปคำตอบและตรวจสอบความสมเหตุสมผลของคำตอบ

<u>สรุปคำตอบ</u>

$A\hat{B}C$ มีขนาด 65 องศา

<u>อธิบายความสมเหตุสมผลของคำตอบ</u>

เมื่อพิจารณาคำตอบ $A\hat{B}C$ มีขนาด 65 องศา จะได้ผลรวมของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม CAB คือ $E\hat{C}O + C\hat{A}B + A\hat{B}C = 25° + 90° + 65° = 180°$ ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีบทผลรวมมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมจะเท่ากับ 180°

4.2) ตั้งปัญหาใหม่ที่น่าสนใจ

<u>ตั้งปัญหาใหม่ที่น่าสนใจโดยมีความเกี่ยวข้องกับบริบทของปัญหาเดิมมา 1 ปัญหา</u>

กำหนดให้จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $C\hat{A}B = 80°$ และ $A\hat{B}C = 40°$ จงหาขนาดของ $D\hat{O}F$ โดยใช้รูปภาพจากโจทย์เดิม

ตารางที่ 17 แสดงค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเที่ยงของแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียน จำนวน 6 ข้อ

ข้อที่	ค่าความยากง่าย (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)	ค่าความเที่ยงของแบบวัดทั้งฉบับ
1	0.43	0.25	0.61
2	0.46	0.31	
3	0.46	0.31	
4	0.54	0.53	
5	0.69	0.61	
6	0.56	0.61	

ตัวอย่างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

(ฉบับก่อนเรียน)

ชื่อ-นามสกุล	เลขที่

คำชี้แจง

แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ฉบับนี้ เป็นแบบทดสอบชนิดอัตนัย จำนวน 6 ข้อโดยแบ่งเป็น 2 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 ความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย จำนวน 3 ข้อ

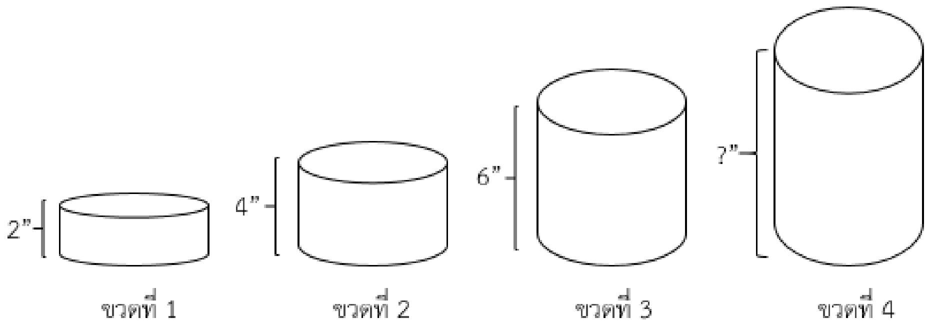
ตอนที่ 2 ความสามารถในการให้เหตุผลแบบนิรนัย จำนวน 3 ข้อ

คะแนนเต็มข้อละ 3 คะแนน โดยมีเวลาในการทำแบบทดสอบ 50 นาที

ข้อที่	คะแนน
1	
2	
3	
4	
5	
6	
รวม	

ตอนที่ 1 ด้านความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

1. ขวดน้ำหอมทรงกระบอกขวดที่ 1 ความสูง 2 นิ้ว มีปริมาตร 8 π ลูกบาศก์นิ้ว ขวดที่ 2 ความสูง 4 นิ้ว มีปริมาตร 16 π ลูกบาศก์นิ้ว ขวดที่ 3 ความสูง 6 นิ้ว มีปริมาตร 24 π ลูกบาศก์นิ้ว



1.1 ขวดน้ำหอมขวดที่ 4 จะมีความสูงกี่นิ้วแล้วมีปริมาตรกี่ลูกบาศก์นิ้ว

....

....

1.2 ถ้ากำหนดให้ x คือความสูงของขวดน้ำหอม (นิ้ว) และ y เป็นปริมาตรของขวดน้ำหอม (ลูกบาศก์นิ้ว) จะได้ความสัมพันธ์ของ x และ y ว่าอย่างไร

....

....

ตอนที่ 2 ด้านความสามารถในการให้เหตุผลแบบนิรนัย

4.“ถ้ารูปเรขาคณิตรูปหนึ่งมีมุมภายในสองมุม รวมกันได้มากกว่า 180 องศา แล้วรูปเรขาคณิตรูปนั้นจะไม่ใช่รูปสามเหลี่ยม” ข้อความข้างต้นเป็นจริงหรือไม่ เพราะเหตุใด

4.1 คำตอบ คือ

....

....

4.2 เพราะเหตุใด

....

....

....

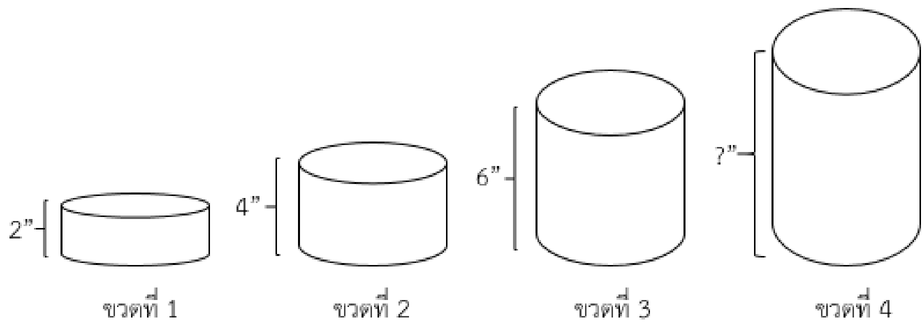
....

แนวทางการตอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

(ฉบับก่อนเรียน)

ตอนที่ 1 ด้านความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

1. ขวดน้ำหอมทรงกระบอกขวดที่ 1 ความสูง 2 นิ้ว มีปริมาตร 8 π ลูกบาศก์นิ้ว ขวดที่ 2 ความสูง 4 นิ้ว มีปริมาตร 16 π ลูกบาศก์นิ้ว ขวดที่ 3 ความสูง 6 นิ้ว มีปริมาตร 24 π ลูกบาศก์นิ้ว



1.1 ขวดน้ำหอมขวดที่ 4 จะมีความสูงกี่นิ้วแล้วมีปริมาตรกี่ลูกบาศก์นิ้ว

✓ ความสูง 8 นิ้ว และปริมาตร 32 π ลูกบาศก์นิ้ว

1.2 ถ้ากำหนดให้ x คือความสูงของขวดน้ำหอม (นิ้ว) และ y เป็นปริมาตรของขวดน้ำหอม (ลูกบาศก์นิ้ว) จะได้ความสัมพันธ์ของ x และ y ว่าอย่างไร

✓ $y = 4\pi x$

ตอนที่ 2 ด้านความสามารถในการให้เหตุผลแบบนิรนัย

4. “ถ้ารูปเรขาคณิตรูปหนึ่งมีมุมภายในสองมุม รวมกันได้มากกว่า 180 องศา แล้วรูปเรขาคณิตรูปนั้นจะไม่ใช่รูปสามเหลี่ยม” ข้อความข้างต้นเป็นจริงหรือไม่ เพราะเหตุใด

4.1 คำตอบ คือ

✓ ข้อความข้างต้นเป็นจริง

4.2 เพราะเหตุใด

✓ รูปสามเหลี่ยมมีมุมภายในทั้งหมดสามมุม และผลรวมของขนาดมุมทั้งสามมุมจะมีค่าเท่ากับ 180 องศา ถ้ารูปเรขาคณิตที่ผลรวมขนาดของมุมภายในสองมุม มีค่ามากกว่า 180 องศา แล้วผลรวมของมุมภายในทั้งหมดของรูปจะมีค่ามากกว่า 180 องศา ซึ่งจะไม่ใช่รูปสามเหลี่ยม

ตารางที่ 18 แสดงค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเที่ยงของแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ฉบับหลังเรียน จำนวน 6 ข้อ

ข้อที่	ค่าความยากง่าย (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)	ค่าความเที่ยงของแบบวัดทั้งฉบับ
1	0.68	0.64	0.61
2	0.67	0.67	
3	0.64	0.61	
4	0.65	0.47	
5	0.51	0.36	
6	0.63	0.31	

ตัวอย่างแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

(ฉบับหลังเรียน)

ชื่อ-นามสกุล	เลขที่

<u>คำชี้แจง</u>

แบบทดสอบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ฉบับนี้ เป็นแบบทดสอบชนิดอัตนัย จำนวน 6 ข้อโดยแบ่งเป็น 2 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 ความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย จำนวน 3 ข้อ

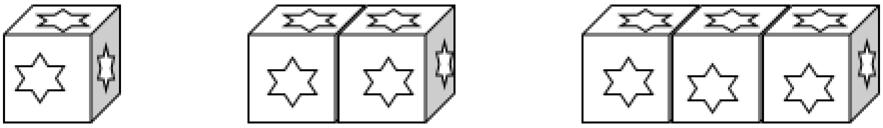
ตอนที่ 2 ความสามารถในการให้เหตุผลแบบนิรนัย จำนวน 3 ข้อ

คะแนนเต็มข้อละ 3 คะแนน โดยมีเวลาในการทำแบบทดสอบ 50 นาที

ข้อที่	คะแนน
1	
2	
3	
4	
5	
6	
รวม	

ตอนที่ 1 ด้านความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย

1. โรงงานผลิตเลโก้แห่งหนึ่งจะผลิตเลโก้ออกมามีลักษณะเป็นแท่งลูกบาศก์ติดกันในแนวยาว และจะติดสติ๊กเกอร์ 1 ชิ้น ต่อ 1 ด้านของลูกบาศก์เท่านั้น ดังภาพที่แสดง



1.1 ถ้าโรงงานผลิตแท่งเลโก้ที่มีลูกบาศก์ติดกัน 4 ลูกในแนวยาวดังภาพ โรงงานจะใช้สติ๊กเกอร์น้อยที่สุดกี่ชิ้น

....

....

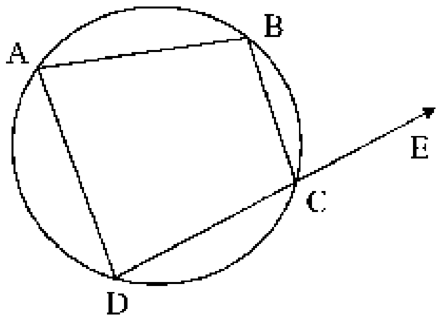
1.2 ถ้ากำหนดให้ x คือ จำนวนของลูกบาศก์ และ y คือ จำนวนของสติ๊กเกอร์ที่ต้องใช้ จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y

....

....

ตอนที่ 2 <u>ด้านความสามารถในการให้เหตุผลแบบนิรนัย</u>

4. จากรูป $\square ABCD$ แนบในวงกลมและ $B\hat{C}E$ เป็นมุมภายนอกของ $\square ABCD$ ที่ได้จากการต่อ $\overline{DC}$ ไปทางจุด C นักเรียนคิดว่า $B\hat{C}E$ เท่ากับ $B\hat{A}D$ หรือไม่ เพราะเหตุใด จงอธิบายพร้อมให้เหตุผลประกอบ



4.1 ข้อสรุป คือ

....

....

4.2 เพราะเหตุใด

....

....

....

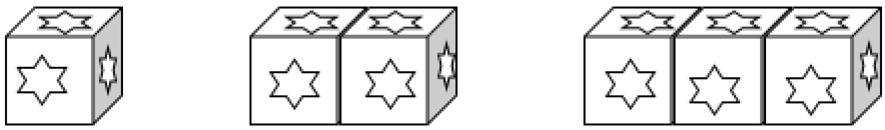
....

แนวทางการตอบแบบวัดความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

(ฉบับหลังเรียน)

ตอนที่ 1 <u>ด้านความสามารถในการให้เหตุผลแบบอุปนัย</u>

1. โรงงานผลิตเลโก้แห่งหนึ่งจะผลิตเลโก้ออกมามีลักษณะเป็นแท่งลูกบาศก์ติดกันในแนวยาว และจะติดสติ๊กเกอร์ 1 ชิ้น ต่อ 1 ด้านของลูกบาศก์เท่านั้น ดังภาพที่แสดง



1.1 ถ้าโรงงานผลิตแท่งเลโก้ที่มีลูกบาศก์ติดกัน 4 ลูก ในแนวยาวดังภาพ โรงงานจะใช้สติ๊กเกอร์น้อยที่สุดกี่ชิ้น

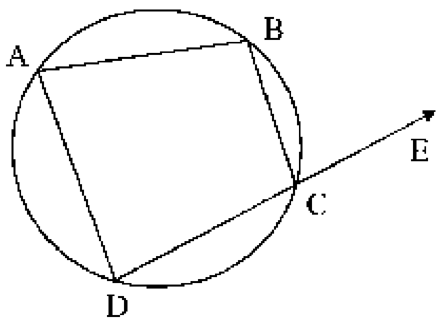
✓ 18 ชิ้น

1.2 ถ้ากำหนดให้ x คือ จำนวนของลูกบาศก์ และ y คือ จำนวนของสติ๊กเกอร์ที่ต้องใช้ จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y

✓ $y = 4x + 2$

ตอนที่ 2 ด้านความสามารถในการให้เหตุผลแบบนิรนัย

4. จากรูป □ABCD แนบในวงกลมและ $B\hat{C}E$ เป็นมุมภายนอกของ □ABCD ที่ได้จากการต่อ $\overline{DC}$ ไปทางจุด C นักเรียนคิดว่า $B\hat{C}E$ เท่ากับ $B\hat{A}D$ หรือไม่ เพราะเหตุใด จงอธิบายพร้อมให้เหตุผลประกอบ



4.1 ข้อสรุป คือ

✓ $B\hat{C}E$ เท่ากับ $B\hat{A}D$

4.2 เพราะเหตุใด

✓ ถ้าหากต่อด้านใดด้านหนึ่งของสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมออกไปขนาดของ มุมภายนอกของสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมนั้นจะเท่ากับขนาดของมุมภายในที่อยู่บนตรงข้ามกับมุมภายนอกชั้น

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล	นายนฤพันธุ์ เพ่งพิศ
วัน เดือน ปี เกิด	25 สิงหาคม 2535
สถานที่เกิด	ที่จังหวัดกาญจนบุรี
วุฒิการศึกษา	สำเร็จการศึกษาปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ จากคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ เมื่อปีการศึกษา 2557 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตรครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2559