โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ การจัดพอร์ตแบบ 10-10-10

10-10-10 Portfolio Management

ชื่อนิสิต นายคุณานนต์ ทิศรอด 583 35052 23

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2561

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การจัดพอร์ตแบบ 10–10–10

นายคุณานนต์ ทิศรอด

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2561

10–10–10 Portfolio Management

Mr. Khunanont Tisrawd

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2018

หัวข้อโครงงาน	การจัดพอร์ตแบบ 10–10–10
โดย	นายคุณานนต์ ทิศรอด
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน	ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิต ในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

.... หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี) และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงงาน

.... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.ณัฐกาญจน์ ใจดี)

.... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.บุญฤทธิ์ อินทิยศ)

คุณานนต์ ทิศรอด : การจัดพอร์ตแบบ 10–10–10. (10–10–10 Portfolio Management)
อ.ที่ปรึกษาโครงงาน: ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี, 52 หน้า.

ในโครงงานนี้เราจะออกแบบการลงทุนระยะยาวในหุ้นเพื่อการเกษียณ โดยเริ่มจากการเลือกหุ้นจำนวน 10 บริษัทเพื่อนำมาจัดพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด จากนั้นนำมาลงทุนแบบถัวเฉลี่ยเป็นเวลา 10 ปี เพื่อให้ได้เงินปันผล 10% ตั้งแต่ปีที่ 10 เป็นต้นไป โดยเราจะเรียกพอร์ตดังกล่าวว่า พอร์ตแบบ 10–10–10 ในการจัดพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุดนั้น เรานำแนวคิดการจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพของ Markowitz มาประยุกต์เขียนโปรแกรมโดยใช้ข้อมูลของหุ้นในช่วงปี พ.ศ. 2545–2550 และนำพอร์ตที่ได้มาทดสอบกับข้อมูลในปี พ.ศ. 2551–2560 ได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

พอร์ตที่ 1		พอร์ตที่ 2		พอร์ตที่ 3		พอร์ตที่ 4		พอร์ตที่ 5	
หุ้น	สัดส่วน	หุ้น	สัดส่วน	หุ้น	สัดส่วน	หุ้น	สัดส่วน	หุ้น	สัดส่วน
KKP	0.192	KKP	0.203	KKP	0.205	KKP	0.222	KKP	0.220
KTB	0.143	KTB	0.143	KTB	0.143	KTB	0.143	KTB	0.123
SCB	0.102	SCB	0.113	SCB	0.086	SCB	0.122	SCB	0.113
TCAP	0.034	TCAP	0.038	TCAP	0.052	TCAP	0.038	TCAP	0.038
PTT	0.024	PTT	0.024	PTT	0.018	PTT	0.024	PTT	0.024
RATCH	0.100	RATCH	0.126	RATCH	0.112	RATCH	0.126	RATCH	0.118
INTUCH	0.243	INTUCH	0.203	INTUCH	0.193	INTUCH	0.203	INTUCH	0.209
CPF	0.067	SCC	0.043	CPF	0.058	CPF	0.049	CPF	0.077
EGCO	0.008	BANPU	0.018	BANPU	0.046	EGCO	0.018	BANPU	0.018
DELTA	0.087	DELTA	0.089	DELTA	0.087	SCC	0.055	SCC	0.060
ผลตอบแทน	10.292%	ผลตอบแทน	10.181%	ผลตอบแทน	10.203%	ผลตอบแทน	10.311%	ผลตอบแทน	10.333%
ความเสี่ยง	1.841%	ความเสี่ยง	1.842%	ความเสี่ยง	1.847%	ความเสี่ยง	1.848%	ความเสี่ยง	1.850%

ตาราง ก ตารางแสดงผลตอบแทนจากเงินปันผลและความเสี่ยงของพอร์ตการลงทุนแบบ 10-10-10

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต คุณานนต์ ทิศรอด
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงาน
ปีการศึกษา 2561

5833505223 : MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS : MARKOWITZ'S MINIMUM RISK PORTFOLIO/ DOLLAR–COST AVERAGING

KHUNANONT TISRAWD : 10–10–10 PORTFOLIO MANAGEMENT.

ADVISOR : PROF. KRITSANA NEAMMANEE, Ph.D., 52 pp.

In this project, we design long-term investments in stocks for retirees. Firstly, we choose 10 stocks for minimum-risk portfolios. Then, we model investment in these portfolios by Dollar–Cost Averaging for ten years. Afterwards, we expect 10% dividend since the tenth year of investment. These portfolios are called 10–10–10 portfolios. To minimize the risks, we construct a program utilizing Markowitz's efficient portfolios method and stocks data from 2002 to 2007. Finally, we test these portfolios with stocks data from 2008 to 2017. The following are our results.

Portfolio 1		Portfolio 2		Portfolio 3		Portfolio 4		Portfolio 5	
Stock	Proportion	Stock	Proportion	Stock	Proportion	Stock	Proportion	Stock	Proportion
KKP	0.192	KKP	0.203	KKP	0.205	KKP	0.222	KKP	0.220
KTB	0.143	KTB	0.143	KTB	0.143	KTB	0.143	KTB	0.123
SCB	0.102	SCB	0.113	SCB	0.086	SCB	0.122	SCB	0.113
TCAP	0.034	TCAP	0.038	TCAP	0.052	TCAP	0.038	TCAP	0.038
PTT	0.024	PTT	0.024	PTT	0.018	PTT	0.024	PTT	0.024
RATCH	0.100	RATCH	0.126	RATCH	0.112	RATCH	0.126	RATCH	0.118
INTUCH	0.243	INTUCH	0.203	INTUCH	0.193	INTUCH	0.203	INTUCH	0.209
CPF	0.067	SCC	0.043	CPF	0.058	CPF	0.049	CPF	0.077
EGCO	0.008	BANPU	0.018	BANPU	0.046	EGCO	0.018	BANPU	0.018
DELTA	0.087	DELTA	0.089	DELTA	0.087	SCC	0.055	SCC	0.060
Return	10.292%	Return	10.181%	Return	10.203%	Return	10.311%	Return	10.333%
Risk	1.841%	Risk	1.842%	Risk	1.847%	Risk	1.848%	Risk	1.850%

Table A Table show the returns from dividend and risks of five 10–10–10 portfolios

Department : Mathematics and Computer Science Student's Signature Khunanont Tisrawd

Field of Study : Mathematics Advisor's Signature [signature]

Academic Year : 2018

กิตติกรรมประกาศ

ในปัจจุบัน คนเริ่มสนใจการลงทุนในด้านต่าง ๆ มากขึ้น ไม่ว่าจะเป็นการลงทุนในกองทุนรวม การลงทุนกับทอง การลงทุนในอสังหาริมทรัพย์ รวมไปถึงการลงทุนในหุ้น ซึ่งหากผู้ลงทุนไม่ศึกษารูปแบบการลงทุนที่ผู้ลงทุนสนใจนั้นอาจก่อให้เกิดผลเสียกับผู้ลงทุนได้อย่างมาก และยิ่งหากผู้ลงทุนไม่ได้ประกอบอาชีพใด ๆ หรือเกษียณอายุแล้ว ยิ่งทำให้มีความเสี่ยงกับการลงทุนมากขึ้น ทางผู้จัดทำโครงงานได้เล็งเห็นปัญหาในด้านนี้ จึงได้ศึกษาการจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพ ประกอบกับการลงทุนแบบถัวเฉลี่ย เพื่อให้สามารถลงทุนโดยใช้เงินออมแล้วได้ผลตอบแทนจากเงินปันผลที่มากขึ้นในทุกปีที่ลงทุน

ทั้งนี้ทางคณะผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่าโครงงานเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ให้แก่ผู้ที่มาศึกษาเป็นอย่างดี และขอขอบคุณศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี ที่ได้ให้คำปรึกษาและเสนอแนวทางต่าง ๆ ให้กับโครงงานนี้ รวมไปถึงนิสิตภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่ได้ให้คำแนะนำในด้านการเขียนโค้ดของโปรแกรมจึงทำให้โครงงานเล่มนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

ผู้จัดทำโครงงาน

สารบัญ

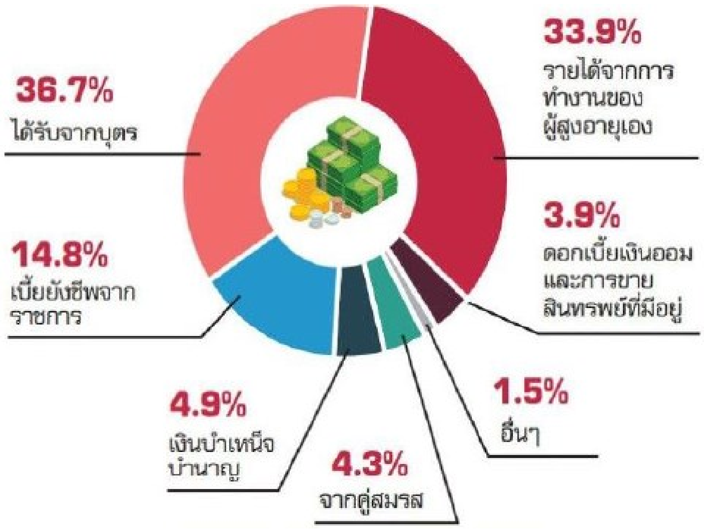
สารบัญภาพ

สารบัญตาราง

บทที่ 1

บทนำ

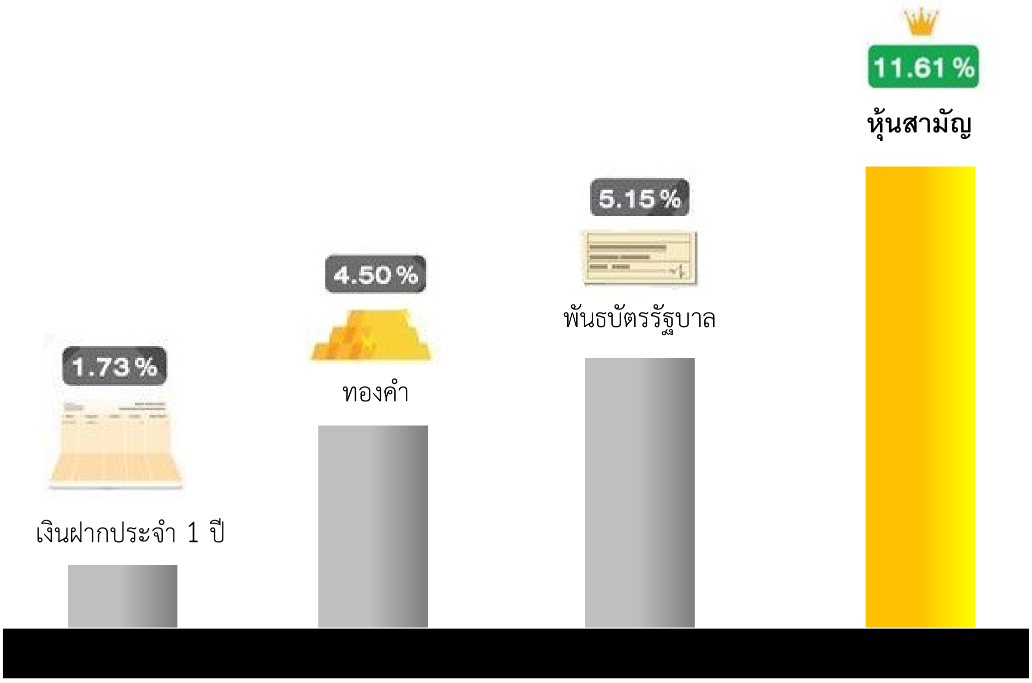
การที่จะกล่าวว่าประเทศใดประเทศหนึ่งเป็นสังคมผู้สูงอายุนั้น หมายความว่าประเทศนั้นต้องมีประชากรที่มีอายุมากกว่า 60 ปี เกินกว่า 10% ของประชากรทั้งหมด สำหรับประเทศไทยมีการคาดการณ์ว่าในปี พ.ศ. 2564 จะเป็นสังคมผู้สูงอายุสมบูรณ์แบบ ผู้เกษียณนั้นนอกจากจะต้องดูแลสุขภาพของตนเองแล้ว การหารายได้ให้เพียงพอต่อค่าใช้จ่ายหลังเกษียณนับว่าเป็นปัญหาที่สำคัญไม่ยิ่งหย่อนกว่ากัน ธนาคารไทยพาณิชย์ได้สำรวจแหล่งรายได้หลักของการดำเนินชีวิตของผู้สูงอายุพบว่ามีรูปแบบดังต่อไปนี้



ภาพที่ 1.1 แหล่งรายได้หลักในการดำเนินชีวิตของผู้สูงอายุ

ที่มาธนาคารไทยพาณิชย์ พ.ศ. 2559 [4]

จากภาพที่ 1.1 จะเห็นได้ว่าผู้สูงอายุมีรายได้ส่วนใหญ่มาจากบุตรและการทำงาน แต่จากสภาพสังคมครอบครัวเดี่ยวและอายุขัยเฉลี่ยที่สูงขึ้น การพึ่งพารายได้จากบุตรและการทำงานอาจจะไม่ใช่คำตอบสำหรับผู้เกษียณ การลงทุนเพื่อนำรายได้มาใช้หลังเกษียณจึงเป็นวิธีที่น่าจะเหมาะสมกว่า โดยการลงทุนแต่ละประเภทนั้นก็จะมีผลตอบแทนและมีความเสี่ยงที่ต่างกัน เช่น การฝากเงินกับธนาคารจะได้รับผลตอบแทนน้อย แต่มีความเสี่ยงน้อยเช่นกัน ในขณะที่การลงทุนในหุ้นได้ผลตอบแทนสูง แต่ก็มีความเสี่ยงที่สูงตามไปด้วย โดยการลงทุนแต่ละประเภทจะให้ผลตอบแทนเฉลี่ยตั้งแต่ปี พ.ศ. 2551–2560 ดังนี้



ภาพที่ 1.2 กราฟเปรียบเทียบผลตอบแทนย้อนหลัง ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2551–2560

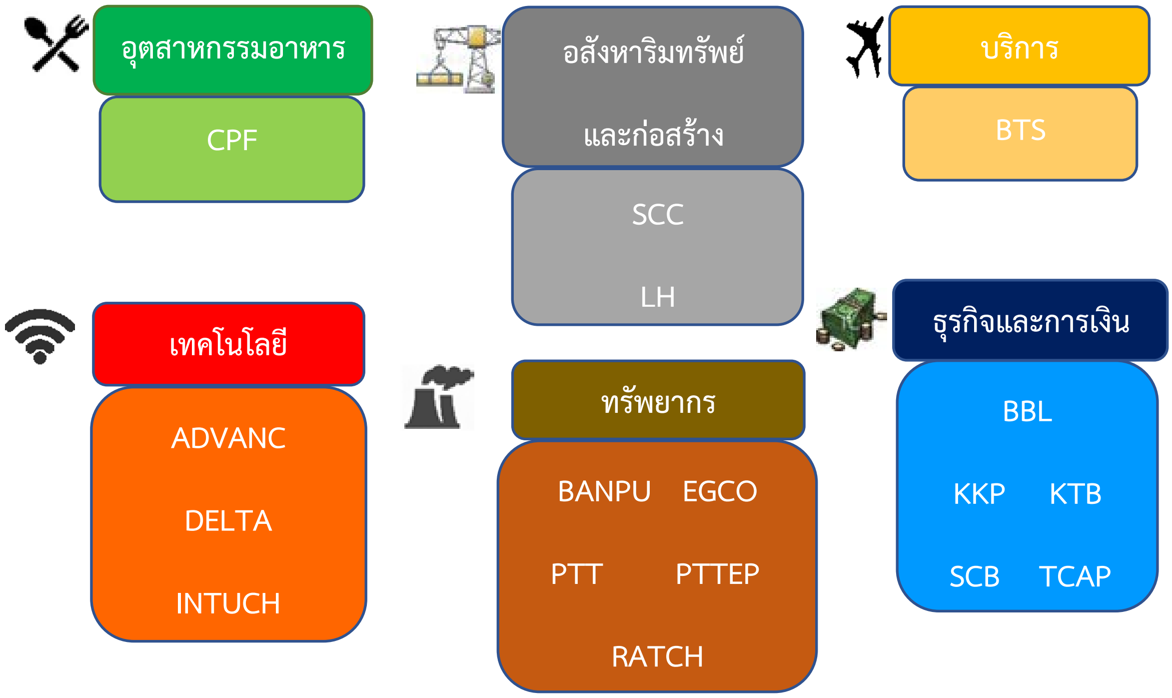
ที่มาตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย ณ พ.ศ. 2561 [3]

จากภาพที่ 1.2 จะเห็นได้ว่าการลงทุนในหุ้นนั้นให้ผลตอบแทนสูง แต่การลงทุนประเภทนี้ก็มีความเสี่ยงสูงตามไปด้วย ทางผู้จัดทำโครงงานจึงมีแนวคิดที่จะลดความเสี่ยงให้ต่ำลงโดยการลงทุนแบบถัวเฉลี่ยและใช้ระยะเวลาลงทุนให้นานขึ้น ผลตอบแทนที่คาดหวังจะอยู่ในรูปเงินปันผลเป็นหลัก เพื่อที่จะได้มีกระแสเงินสดอย่างสม่ำเสมอให้ผู้เกษียณได้ใช้จ่ายในชีวิตประจำวัน

จากแนวคิดข้างต้นผู้จัดทำโครงงานจึงได้จัดทำโครงงานนี้เพื่อคัดเลือกหุ้น 10 บริษัท เพื่อการลงทุนเป็นระยะเวลา 10 ปี โดยคาดหวังผลตอบแทนจากเงินปันผลไม่ต่ำกว่า 10% โดยเราเรียกรูปแบบการลงทุนชนิดนี้ว่า **การจัดพอร์ตแบบ 10-10-10 (10-10-10 Portfolios Management)** โดยผู้จัดทำได้ออกแบบขั้นตอนการดำเนินงานดังนี้

(1) คัดหุ้นโดยใช้ข้อมูลระหว่าง พ.ศ. 2545–2550 ซึ่งประกอบด้วยเกณฑ์ต่อไปนี้

(1.1) หุ้นแต่ละบริษัทมีเงินปันผลเฉลี่ยเกิน 3% ต่อปี และมีมูลค่าหลักทรัพย์เฉลี่ยตั้งแต่ 50,000 ล้านบาท โดยมีหุ้นผ่านเกณฑ์นี้ทั้งหมด 17 บริษัท สามารถแบ่งตามหมวดอุตสาหกรรม ได้ดังนี้



ภาพที่ 1.3 หุ้นที่ได้จากการคัดด้วยเงินปันผลเฉลี่ยและมูลค่าหุ้นในตลาดหลักทรัพย์

(1.2) หุ้นแต่ละบริษัทมีระดับบรรษัทภิบาลในระดับ 4–5 ซึ่งหุ้นที่ผ่านเกณฑ์ข้อ (1.1) ทั้ง 17 บริษัท มีระดับบรรษัทภิบาลระดับ 4–5 ทั้งหมด

(1.3) หุ้นแต่ละบริษัทมีอัตราส่วนราคาหุ้นกับกำไรต่อหุ้น (P/E) เฉลี่ยไม่เกิน 15 ซึ่งมีหุ้นที่ผ่านเกณฑ์ข้อ (1.1) และ (1.2) จำนวน 13 บริษัทที่สอดคล้องกับเกณฑ์ข้างต้น สามารถแบ่งตามหมวดอุตสาหกรรมได้ ดังนี้

ภาพที่ 1.4 หุ้น 13 บริษัท ที่ได้จากการคัดด้วยเกณฑ์ข้อ (1.1) – (1.3)

(2) นำแนวคิดการจัดพอร์ตของ Markowitz มาสร้างขั้นตอนทางคณิตศาสตร์เพื่อหาค่าพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด โดยขั้นตอนดังกล่าวสามารถพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ได้

(3) นำขั้นตอนที่ได้จากข้อ (2) มาเขียนโปรแกรมเพื่อหาพอร์ตที่มีประสิทธิภาพ และมีอัตราเงินปันผล 6% ต่อปี โดยแต่ละพอร์ตประกอบด้วยหุ้น 10 บริษัท จาก 13 บริษัท เราจะได้พอร์ตทั้งหมด $C_{13,10} = 286$ แบบ แล้วคัดเลือกพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด 5 พอร์ตแรก ซึ่งได้ผลลัพธ์ ดังนี้

พอร์ต 1		**พอร์ต 2**		**พอร์ต 3**		**พอร์ต 4**		**พอร์ต 5**	
หุ้น	สัดส่วน	หุ้น	สัดส่วน	หุ้น	สัดส่วน	หุ้น	สัดส่วน	หุ้น	สัดส่วน
KKP	0.192	KKP	0.203	KKP	0.205	KKP	0.222	KKP	0.220
KTB	0.143	KTB	0.143	KTB	0.143	KTB	0.143	KTB	0.123
SCB	0.102	SCB	0.113	SCB	0.086	SCB	0.122	SCB	0.113
TCAP	0.034	TCAP	0.038	TCAP	0.052	TCAP	0.038	TCAP	0.038
PTT	0.024	PTT	0.024	PTT	0.018	PTT	0.024	PTT	0.024
RATCH	0.100	RATCH	0.126	RATCH	0.112	RATCH	0.126	RATCH	0.118
INTUCH	0.243	INTUCH	0.203	INTUCH	0.193	INTUCH	0.203	INTUCH	0.209
CPF	0.067	SCC	0.043	CPF	0.058	CPF	0.049	CPF	0.077
EGCO	0.008	BANPU	0.018	BANPU	0.046	EGCO	0.018	BANPU	0.018
DELTA	0.087	DELTA	0.089	DELTA	0.087	SCC	0.055	SCC	0.060
เงินปันผล (%)	10.292	เงินปันผล (%)	10.181	เงินปันผล (%)	10.203	เงินปันผล (%)	10.311	เงินปันผล (%)	10.333

ตารางที่ 1.1 ตารางแสดงพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด 5 ลำดับแรก ที่มีอัตราเงินปันผล 6%

(4) นำพอร์ตทั้ง 5 พอร์ตที่ได้จากข้อ (3) มาจำลองการลงทุนแบบถัวเฉลี่ยปีละ 1,000,000 บาท เป็นเวลา 10 ปี โดยใช้ข้อมูลในช่วง พ.ศ. 2551–2560 โดยเราจะได้รับเงินปันผล เมื่อสิ้นปีที่ 10 (พ.ศ. 2560) ดังนี้

พอร์ต 1		พอร์ต 2		พอร์ต 3		พอร์ต 4		พอร์ต 5	
หุ้น	สัดส่วน	หุ้น	สัดส่วน	หุ้น	สัดส่วน	หุ้น	สัดส่วน	หุ้น	สัดส่วน
KKP	0.192	KKP	0.203	KKP	0.205	KKP	0.222	KKP	0.220
KTB	0.143	KTB	0.143	KTB	0.143	KTB	0.143	KTB	0.123
SCB	0.102	SCB	0.113	SCB	0.086	SCB	0.122	SCB	0.113
TCAP	0.034	TCAP	0.038	TCAP	0.052	TCAP	0.038	TCAP	0.038
PTT	0.024	PTT	0.024	PTT	0.018	PTT	0.024	PTT	0.024
RATCH	0.100	RATCH	0.126	RATCH	0.112	RATCH	0.126	RATCH	0.118
INTUCH	0.243	INTUCH	0.203	INTUCH	0.193	INTUCH	0.203	INTUCH	0.209
CPF	0.067	SCC	0.043	CPF	0.058	CPF	0.049	CPF	0.077
EGCO	0.008	BANPU	0.018	BANPU	0.046	EGCO	0.018	BANPU	0.018
DELTA	0.087	DELTA	0.089	DELTA	0.087	SCC	0.055	SCC	0.060
เงินปันผล (%)	10.292	เงินปันผล (%)	10.181	เงินปันผล (%)	10.203	เงินปันผล (%)	10.311	เงินปันผล (%)	10.333
ความเสี่ยง (%)	1.841	ความเสี่ยง (%)	1.842	ความเสี่ยง (%)	1.847	ความเสี่ยง (%)	1.848	ความเสี่ยง (%)	1.850

ตารางที่ 1.2 ตารางแสดงอัตราเงินปันผล ณ สิ้นปี พ.ศ. 2560

ดังนั้นสรุปได้ว่าพอร์ตทั้ง 5 พอร์ตที่ได้จากข้อ (4) ทำให้ผู้ลงทุนได้รับเงินปันผลเมื่อสิ้นปีที่ 10 (พ.ศ. 2560) มากกว่า 10% จากเงินลงทุนทั้งหมด ซึ่งเป็นผลมาจากการลงทุนแบบถัวเฉลี่ยที่ได้สะสมปริมาณของหุ้นไว้ในพอร์ตเป็นจำนวนมาก หลังจากผู้ลงทุนเกษียณสามารถรับเงินปันผลในแต่ละปีได้อย่างต่อเนื่องโดยไม่ต้องลงทุนอะไรเพิ่มเติมอีก

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้เราจะทบทวนความรู้เรื่องการหา**พอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด (Minimum variance portfolio)** จากทฤษฎีการจัดพอร์ตของ Markowitz ([1]) และทบทวนเรื่อง**การลงทุนแบบถัวเฉลี่ย (Dollar Cost Average)**

2.1 พอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด

กำหนดให้ R เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นอัตราผลตอบแทนจากการลงทุน เราจะกล่าวว่า $E(R)$ คือ **อัตราผลตอบแทนที่คาดหวังของการลงทุน (Expected return)** และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ ของ R คือ **ความเสี่ยงของการลงทุน (Risk)**

หากพิจารณาการลงทุนในสินทรัพย์ n ชนิด $(n \geq 2)$ โดยมี ω_i เป็นสัดส่วนการลงทุนในสินทรัพย์ชนิดที่ i $(i = 1,2,\dots,n)$ โดยที่ $\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n = 1$ เราจะเรียก $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ ว่า**พอร์ตการลงทุน (Portfolio)** ดังนั้นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นอัตราผลตอบแทนของพอร์ตการลงทุนนี้ คือ

$$R_P = \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 + \cdots + \omega_n R_n$$

เมื่อ R_i คือ ตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นอัตราผลตอบแทนของสินทรัพย์ชนิดที่ i โดยอัตราผลตอบแทนที่คาดหวัง คือ

$$E(R_P) = \omega_1 E(R_1) + \omega_2 E(R_2) + \cdots + \omega_n E(R_n)$$

ให้ σ_{ij} แทนความแปรปรวนร่วมของ R_i และ R_j เราจะเรียก $C = (\sigma_{ij})$ ขนาด $n \times n$ ว่า**เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (Covariance matrix)** นั่นคือ

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

เราจะได้ว่าความเสี่ยงของพอร์ต คือ σ_P โดยที่

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \omega_i \omega_j$$

การลงทุนในสินทรัพย์นั้นจะมีความเสี่ยงอยู่เสมอ หากนักลงทุนต้องการที่จะลงทุนโดยมีความเสี่ยงที่ต่ำที่สุด จึงต้องหาพอร์ตที่ให้ค่า σ_P น้อยที่สุด การจะหาพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุดนั้น เราจะต้องหาพอร์ตที่ทำให้ฟังก์ชันความแปรปรวนมีค่าต่ำสุดนั่นเอง โดยพอร์ตที่ให้ค่าความเสี่ยงต่ำสุดมีตัวแบบดังนี้

$$Minimize\ \sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\omega_i\omega_j$$

ภายใต้เงื่อนไข $$\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n = 1$$

เราจะหาพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขข้างต้นได้โดยใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1 ในการลงทุน $n\ (n \geq 2)$ ทางเลือก เราจะมีขั้นตอนการหาพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด ดังนี้

(1) ตรวจสอบว่ามีพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุดหรือไม่
โดยตรวจสอบว่า $|H_k| < 0$ ทุก $k = 3,4,\dots,n+1$ เมื่อ H_k คือ เมทริกซ์ย่อยขนาด $k \times k$ ด้านบนซ้ายของ H เมื่อ H คือ Hessian Matrix กำหนดโดย

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ 1 & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

ถ้า $|H_k| < 0$ ทุก $k = 3,4,\dots,n+1$ เราจะสรุปได้ว่ามีพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด

(2) หาพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด
ถ้ามี $(\lambda, c_1, c_2, \dots, c_n)$ ที่เป็นคำตอบของสมการ

$$H\begin{bmatrix} -\lambda \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

แล้วเราจะได้ว่า $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ เป็นพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด

ตัวอย่าง 2.1 ข้อมูลการลงทุนในสินทรัพย์ A, B และ C เป็นดังนี้

สินทรัพย์	ความแปรปรวนร่วม ($\%^2$)		
	A	B	C
A	49	8	-3
B	8	16	1
C	-3	1	36

จงหาพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุดและค่าความเสี่ยงของพอร์ตนั้น

วิธีทำ

(1) จากโจทย์จะได้ว่า Hessian Matrix คือ

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 49 & 8 & -3 \\ 1 & 8 & 16 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 36 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $|H_3| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 49 & 8 \\ 1 & 8 & 16 \end{vmatrix} = -49 < 0$,

$$|H_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 49 & 8 & -3 \\ 1 & 8 & 16 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 36 \end{vmatrix} = -2434 < 0$$

จึงสรุปได้ว่ามีพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด

(2) หาพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด

เนื่องจากสมการ

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 49 & 8 & -3 \\ 1 & 8 & 16 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

มีคำตอบเป็น

$$\begin{bmatrix} -\lambda \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.5501 \\ 0.1397 \\ 0.5715 \\ 0.2888 \end{bmatrix}$$

จึงสรุปได้ว่า $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (0.1397, 0.5715, 0.2888)$ เป็นพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด

จากโจทย์เราจะสามารถเขียนฟังก์ชันความแปรปรวนได้เป็น

$$\sigma_P^2 = 49\omega_1^2 + 16\omega_2^2 + 36\omega_3^2 + 8\omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_3 - 3\omega_1\omega_3$$

เนื่องจากพอร์ต (0.1397, 0.5715, 0.2888) ให้ค่าความเสี่ยงต่ำสุด ดังนั้น

$$\sigma_P^2 = 49(0.1397)^2 + 16(0.5715)^2 + 36(0.2888)^2 + 8(0.1397)(0.5715)$$
$$+(0.5715)(0.2888) - 3(0.1397)(0.2888)\ \%^2$$

$\sigma_P^2 = 9.87\ \%^2$ ดังนั้น $\sigma_P = 3.14\ \%$ □

จากที่กล่าวมาข้างต้นเป็นการหาพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด แต่ใช่ว่านักลงทุนจะต้องการลงทุน ณ ระดับความเสี่ยงที่ต่ำสุดเสมอไป เนื่องจากอาจจะทำให้ได้ผลตอบแทนน้อยตามไปด้วย นักลงทุนบางท่านยินดีที่จะรับความเสี่ยงที่มากขึ้น แลกกับการที่ได้ผลตอบแทนที่มากขึ้น เราจะเรียกพอร์ตเหล่านี้ว่า **พอร์ตที่มีประสิทธิภาพ (Efficient portfolio)** ดังนั้นการหาพอร์ตที่มีประสิทธิภาพ คือ การหาพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด ภายใต้ระดับผลตอบแทนที่นักลงทุนต้องการ

การจะหาพอร์ตที่มีประสิทธิภาพนั้น จะมีวิธีการที่คล้ายกับการหาพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด

ถ้าให้ r_0 แทนผลตอบแทนที่นักลงทุนต้องการ พอร์ตที่มีประสิทธิภาพจะมีตัวแบบ ดังนี้

$$Minimize\ \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\omega_i\omega_j$$

ภายใต้ข้อจำกัด

$$\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n = 1$$
$$\omega_1 E(R_1) + \omega_2 E(R_2) + \cdots + \omega_n E(R_n) = r_0$$

เราจะหาพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด ณ ระดับผลตอบแทน r_0 ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขข้างต้นได้โดยใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2 ในการลงทุน n $(n \geq 3)$ ทางเลือก ซึ่งมีผลตอบแทนบางทางเลือกไม่เท่ากัน (มี $i \neq j$ ซึ่ง $E(R_i) \neq E(R_j)$) เราจะมีขั้นตอนการหาพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด ณ ระดับผลตอบแทน r_0 ดังนี้

(1) ตรวจสอบว่ามีพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุดหรือไม่
โดยตรวจสอบว่า $|B_l| > 0$ ทุก $l = 5,6,\dots,n+2$ เมื่อ B_l คือ เมทริกซ์ย่อยขนาด $l \times l$ ด้านบนซ้ายของ B เมื่อ B คือ Bordered Hessian Matrix กำหนดโดย

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & E(R_1) & E(R_2) & \dots & E(R_n) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ E(R_1) & 1 & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ E(R_2) & 1 & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(R_n) & 1 & \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

ถ้า $|B_l| > 0$ ทุก $l = 5,6,\dots,n+2$ เราจะสรุปได้ว่ามีพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด

(2) หาพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด ณ ระดับผลตอบแทน r_0
ถ้ามี $(\lambda_1, \lambda_2, c_1, c_2, \dots, c_n)$ เป็นคำตอบของสมการ

$$B \begin{bmatrix} -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

แล้วเราจะได้ว่า $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ เป็นพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด ณ ระดับผลตอบแทน r_0

หากผลตอบแทนของทุกทางเลือกมีค่าเท่ากัน $(E(R_1), E(R_2), \dots, E(R_n))$ จะทำให้ผลตอบแทนของพอร์ตมีค่าเดียว ซึ่งเราสามารถใช้ทฤษฎีบท 2.1 สำหรับหาพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุดได้

ตัวอย่าง 2.2 จงหาพอร์ตที่มีประสิทธิภาพ สำหรับการลงทุนใน 3 สินทรัพย์ ซึ่งมีข้อมูล ดังนี้

สินทรัพย์	อัตราผลตอบแทน (%)	ความแปรปรวนร่วม ($\%^2$)		
		A	B	C
A	10	16	20	40
B	12	20	100	70
C	18	40	70	196

โดยผลตอบแทนที่คาดหวังของพอร์ตการลงทุน คือ 15%

วิธีทำ

(1) จากโจทย์เราจะได้ว่า Bordered Hessian Matrix คือ

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 12 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 1 & 16 & 20 & 40 \\ 12 & 1 & 20 & 100 & 70 \\ 18 & 1 & 40 & 70 & 196 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $|B_5| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 10 & 12 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 1 & 16 & 20 & 40 \\ 12 & 1 & 20 & 100 & 70 \\ 18 & 1 & 40 & 70 & 196 \end{vmatrix}$

$$= 4560 > 0$$

จึงสรุปได้ว่ามีพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด

(2) หาพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด ณ ระดับผลตอบแทน 15%

เนื่องจากสมการ

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 12 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 1 & 16 & 20 & 40 \\ 12 & 1 & 20 & 100 & 70 \\ 18 & 1 & 40 & 70 & 196 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

มีคำตอบเป็น

$$\begin{bmatrix} -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13.234 \\ 101.521 \\ 0.595 \\ 0.639 \\ -0.234 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (0.595, 0.639, -0.234)$ เป็นพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด ณ ระดับผลตอบแทน 15%

□

จากตัวอย่างที่ 2.2 จะเห็นว่าสัดส่วนการลงทุนของ ω_3 มีค่าน้อยกว่า 0 ซึ่งเรียกว่าการยืมขาย โดยการยืมขายนั้นคือการที่นักลงทุนยืมสินทรัพย์มาขายก่อนเพื่อเก็งกำไร การจัดพอร์ตในรูปแบบนี้จำเป็นต้องรู้วิธีการและมีความน่าเชื่อถือที่สูงพอสมควร หากนักลงทุนสนใจจะลงทุนในรูปแบบที่มีการยืมขายสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากหนังสือเกี่ยวกับการเงินทั่วไป

2.2 การลงทุนแบบถัวเฉลี่ย

การลงทุนแบบถัวเฉลี่ย คือ การที่เรากำหนดการลงทุนในแต่ละงวดด้วยจำนวนเงินที่เท่ากัน อาจจะลงทุนเป็นรายเดือน รายไตรมาสหรือรายปีขึ้นอยู่กับความต้องการของผู้ที่จะลงทุน การลงทุนนี้จะไม่สนใจราคาหน่วยลงทุน เพราะเปรียบได้กับการลงทุนแบบอัตโนมัติไปเรื่อย ๆ โดยมีเป้าหมายที่จำนวนเงินที่จะลงทุนเป็นหลัก ข้อดีของการลงทุนแบบถัวเฉลี่ยจะทำให้ผู้ลงทุนสามารถซื้อหุ้นได้จำนวนมากในช่วงที่ราคาหุ้นปรับตัวลงแต่จะซื้อได้น้อยลงเมื่อราคาหุ้นปรับตัวสูงขึ้น ซึ่งนั่นหมายความว่าหากตลาดหุ้นมีความผันผวนในช่วงนั้นมาก จะมีโอกาสขาดทุนน้อยกว่าการซื้อหุ้นทั้งหมดในคราวเดียว ดังตัวอย่างที่จะกล่าวต่อไป

ตัวอย่าง 2.3 นาย ก ลงทุนแบบถัวเฉลี่ยในหุ้น CPF เป็นเวลา 1 ปี โดยลงทุนเฉลี่ยทุกเดือน เดือนละ 3,000 บาท อยากทราบว่าหากราคาปิดของหุ้นในแต่ละเดือนเป็นดังตารางต่อไปนี้ นาย ก จะได้รับจำนวนหุ้นเท่าไร

เดือน	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ราคาหุ้น (บาท)	10	8	12	7	6	8	9	11	11	10	9	15

ตารางที่ 2.1 ตารางแสดงราคาหุ้น CPF ในแต่ละเดือน

วิธีทำ

นาย ก ลงทุนแบบถัวเฉลี่ยทุกสิ้นเดือน เดือนละ 3,000 บาท เป็นเวลา 1 ปี จะได้ดังนี้

เดือน	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ราคาหุ้น (บาท)	10	8	12	7	6	8	9	11	11	10	9	15
จำนวนหุ้นที่ซื้อได้ (หุ้น)	300	375	250	428.57	500	375	333.33	272.73	272.73	300	333.33	200

ตารางที่ 2.2 ตารางแสดงการลงทุนแบบถัวเฉลี่ยในหุ้น CPF

สรุปได้ว่านาย ก ลงทุนไปทั้งสิ้น 36,000 บาท และได้รับหุ้น CPF จำนวน 3,940.69 หุ้น

□

จากตัวอย่าง 2.3 หากนาย ก นำเงินลงทุน 36,000 บาท มาทำการลงทุนเพียงครั้งเดียวแทนการลงทุนแบบถัวเฉลี่ย โดยเลือกลงทุนในเดือนที่ 5 จะสามารถซื้อหุ้นได้ทั้งหมด $\frac{36,000}{6}$ = 6,000 หุ้น หรือหากเลือกลงทุนในเดือนที่ 10 ก็จะสามารถซื้อหุ้นได้ทั้งหมด $\frac{36,000}{10}$ = 3,600 หุ้น ดังนั้น การลงทุนประเภทนี้จึงมีความไม่แน่นอนขึ้นอยู่กับจังหวะและเวลาที่นักลงทุนประเมินแล้วว่าเหมาะสมที่จะลงทุน การลงทุนแบบถัวเฉลี่ยในทุก ๆ งวดทำให้นาย ก สามารถซื้อหุ้นในจำนวนที่มากขึ้นในช่วงที่ราคาหุ้นปรับตัวลง และซื้อหุ้นในจำนวนที่น้อยลงในช่วงที่ราคาหุ้นปรับตัวขึ้น โดยไม่ต้องคอยหาจังหวะเวลาที่เหมาะสมในการลงทุน นักลงทุนสามารถค่อย ๆ ออมเงินทีละน้อยด้วยการลงทุนแบบถัวเฉลี่ย ซึ่งเป็นการสร้างวินัยในการออมให้กับนักลงทุนอีกด้วย

บทที่ 3

การเขียนโปรแกรมสำหรับการจัดพอร์ตแบบ 10-10-10

จุดประสงค์หลักของโครงงานนี้คือ **การจัดพอร์ตแบบ 10-10-10** โดย

10 แรกนั้นหมายถึง **การลงทุนในหุ้น 10 บริษัท**

10 ที่สอง หมายถึง **การนำพอร์ตมาลงทุนแบบถัวเฉลี่ยเป็นเวลา 10 ปี**

10 ที่สาม หมายถึง **ตั้งแต่ปีที่ 10 จะได้เงินปันผลของพอร์ตไม่ต่ำกว่า 10%**

โดยเราจะแบ่งขั้นตอนการดำเนินงานออกเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

(1) คัดหุ้นโดยใช้ข้อมูลระหว่าง พ.ศ. 2545–2550 ซึ่งประกอบด้วยเกณฑ์ต่อไปนี้

(1.1) หุ้นแต่ละบริษัทมีเงินปันผลเฉลี่ย 3% ต่อปี และมีมูลค่าหลักทรัพย์เฉลี่ยตั้งแต่ 50,000 ล้านบาท โดยมีหุ้นผ่านเกณฑ์นี้ทั้งหมด 17 บริษัท สามารถแบ่งตามหมวดอุตสาหกรรม ได้ดังนี้

ภาพที่ 3.1 หุ้น 17 บริษัท ที่ได้จากการคัดด้วยเงินปันผลเฉลี่ยและมูลค่าหุ้นในตลาดหลักทรัพย์

(1.2) หุ้นแต่ละบริษัทมีระดับบรรษัทภิบาลในระดับ 4–5 ซึ่งหุ้นที่ผ่านเกณฑ์ข้อ (1.1) ทั้ง 17 บริษัท มีระดับบรรษัทภิบาลระดับ 4–5 ทั้งหมด

(1.3) หุ้นแต่ละบริษัทมีอัตราส่วนราคาหุ้นกับกำไรต่อหุ้น (P/E) เฉลี่ยไม่เกิน 15 ซึ่งมีหุ้นที่ผ่านเกณฑ์ข้อ (1.1) และ (1.2) จำนวน 13 บริษัทที่สอดคล้องกับเกณฑ์ข้างต้น สามารถแบ่งตามหมวดอุตสาหกรรมได้ ดังนี้

ภาพที่ 3.2 หุ้น 13 บริษัท ที่ได้จากการคัดด้วยเกณฑ์ข้อ (1.1) – (1.3)

ดังนั้นเราสรุปได้ว่าหุ้นที่เราจะนำมาจัดพอร์ตมีทั้งหมด 13 บริษัท ประกอบด้วย CPF, SCC, LH, DELTA, INTUCH, KKP, KTB, SCB, TCAP, BANPU, EGCO, PTT และ RATCH

(2) นำข้อมูลอัตราเงินปันผลตั้งแต่ปี พ.ศ. 2545–2550 ของหุ้นทั้ง 13 บริษัท จัดเก็บในไฟล์ Excel และตรวจสอบอัตราเงินปันผลเฉลี่ยของหุ้นแต่ละบริษัทได้ผลลัพธ์ ดังนี้

ลำดับ	หุ้น	อัตราเงินปันผล (%)						
		2545	2546	2547	2548	2549	2550	เฉลี่ย
1	CPF	8.84	5.06	6.08	4.37	9.43	4.13	6.32
2	KKP	5.87	6.42	6.43	7.52	8.19	7.69	7.02
3	KTB	4.58	3.13	5.22	4.27	4.2	5.05	4.41
4	SCB	2.84	4.21	4.53	4.95	5.59	3.68	4.30
5	TCAP	4.3	6.23	6.02	6.13	6.71	5.48	5.81
6	SCC	3.92	4.86	5.67	6.63	6.42	6.88	5.73
7	LH	0.88	3.98	9.88	7.02	7.57	4.16	5.58
8	BANPU	6.33	3.24	2.62	4.2	6.87	1.87	4.19
9	EGCO	6.72	2.78	2.73	3.7	8.49	3.57	4.67
10	PTT	5.92	3.44	4.61	4.99	4.39	3.78	4.52

ลำดับ	หุ้น	อัตราเงินปันผล (%)						
		2545	2546	2547	2548	2549	2550	เฉลี่ย
11	RATCH	5.52	5.06	4.61	5.88	4.65	4.59	5.05
12	DELTA	11.93	10.57	5.85	6.49	6.89	5.96	7.95
13	INTUCH	4.58	5.11	6.43	7.21	9.42	8.76	6.92

ตารางที่ 3.1 ตารางแสดงอัตราเงินปันผลเฉลี่ยของหุ้น 13 บริษัท

ซึ่งสรุปได้ว่าไม่มีหุ้นบริษัทใดเลยที่มีอัตราเงินปันผลเฉลี่ยเท่ากัน ดังนั้นเราจึงเขียนโปรแกรมการจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพ โดยใช้ขั้นตอนในทฤษฎีบท 2.2

(3) เขียนโปรแกรมการจัดพอร์ตแบบ 10-10-10 โดยใช้ข้อมูลจากไฟล์ Excel ในข้อ (2) เราจะแบ่งโปรแกรมออกเป็น 4 ส่วน ดังนี้

(3.1) โปรแกรมการเลือกหุ้น 10 บริษัท เพื่อนำหุ้นทั้ง 13 บริษัท จัดเป็นชุด ชุดละ 10 บริษัทได้ทั้งหมด $C_{13,10} = 286$ ชุด

(3.2) โปรแกรมการหาเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของอัตราเงินปันผลของชุดข้อมูลแต่ละชุด

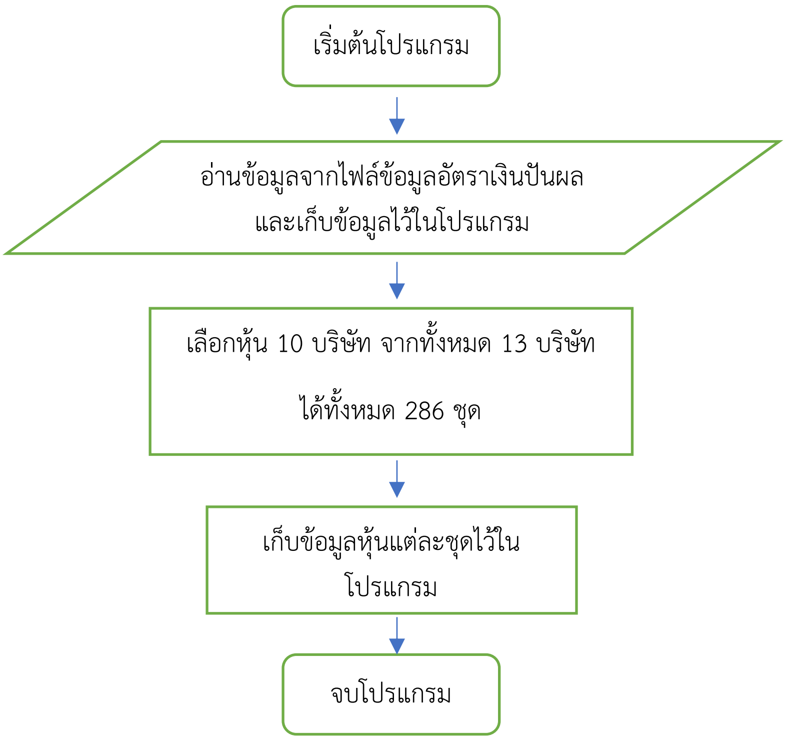
(3.3) โปรแกรมการหาพอร์ตที่มีประสิทธิภาพ โดยคัดพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด 5 พอร์ตแรกที่มีอัตราเงินปันผลของพอร์ตเป็น 6%

(3.4) โปรแกรมการลงทุนแบบถัวเฉลี่ย เพื่อนำพอร์ตทั้ง 5 ชุด มาลงทุนแบบถัวเฉลี่ย แล้วคัดเลือกเฉพาะพอร์ตที่เงินปันผลในปีที่ 10 ไม่ต่ำกว่า 10%

จากขั้นตอนการเขียนโปรแกรมการจัดพอร์ตแบบ 10-10-10 ทั้ง 4 ขั้นตอน เราจะแสดงแผนผังการเขียนโปรแกรมสำหรับใช้เขียนโค้ดและผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมแต่ละส่วน โดยแบ่งหัวข้อดังนี้

3.1 โปรแกรมการเลือกหุ้น 10 บริษัท

ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงการเขียนโปรแกรมสำหรับนำข้อมูลอัตราเงินปันผลในอดีตของหุ้นแต่ละบริษัท ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2545–2550 เข้าสู่โปรแกรมและเลือกหุ้น 10 บริษัท จากทั้งหมด 13 บริษัท ซึ่งจะได้ชุดข้อมูลอัตราเงินปันผลในอดีตของหุ้น 10 บริษัท ทั้งหมด 286 ชุด โดยมีแผนผังแสดงขั้นตอนการเขียนโปรแกรม ดังนี้



ภาพที่ 3.3 แผนผังแสดงการเลือกหุ้น 10 บริษัท จากไฟล์ข้อมูลอัตราเงินปันผล

แผนผังดังกล่าวเราสามารถนำมาเขียนโค้ดการเลือกหุ้น 10 บริษัท ได้ดังนี้

```
data = pd.read_excel("data.xlsx")
nameStock = list(data.iloc[:,0])
dataDimension = data.shape
data=data.iloc[0:dataDimension[0],1:dataDimension[1]]
data_array=data.as_matrix()
data_array=data_array*100
rValue =10
combi = list(itertools.combinations(list(range(dataDimension[0])), rValue))
def findResult(data,combi):
    combi_result = []
    c=0
```

ภาพที่ 3.4 ขั้นตอนการนำเข้าข้อมูลหุ้นทั้ง 13 บริษัท เพื่อเลือกหุ้น 10 บริษัท สำหรับจัดพอร์ต

หลังจบโปรแกรมการเลือกหุ้น เราจะได้ชุดข้อมูลที่ประกอบด้วยอัตราเงินปันผลในอดีตของหุ้น 10 บริษัท ทั้งหมด 286 ชุด ตัวอย่างเช่น

ชุดที่ 1

ลำดับ	หุ้น	อัตราเงินปันผล (%)						
		2545	**2546**	**2547**	**2548**	**2549**	**2550**	**เฉลี่ย**
1	CPF	8.84	5.06	6.08	4.37	9.43	4.13	6.32
2	KKP	5.87	6.42	6.43	7.52	8.19	7.69	7.02
3	KTB	4.58	3.13	5.22	4.27	4.2	5.05	4.41
4	SCB	2.84	4.21	4.53	4.95	5.59	3.68	4.30
5	TCAP	4.3	6.23	6.02	6.13	6.71	5.48	5.81
6	SCC	3.92	4.86	5.67	6.63	6.42	6.88	5.73
7	LH	0.88	3.98	9.88	7.02	7.57	4.16	5.58
8	BANPU	6.33	3.24	2.62	4.2	6.87	1.87	4.19
9	EGCO	6.72	2.78	2.73	3.7	8.49	3.57	4.67
10	PTT	5.92	3.44	4.61	4.99	4.39	3.78	4.52

ตารางที่ 3.2 ตารางแสดงอัตราเงินปันผลของแต่ละหุ้น ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2545–2550 ของหุ้น 10 บริษัท ชุดที่ 1

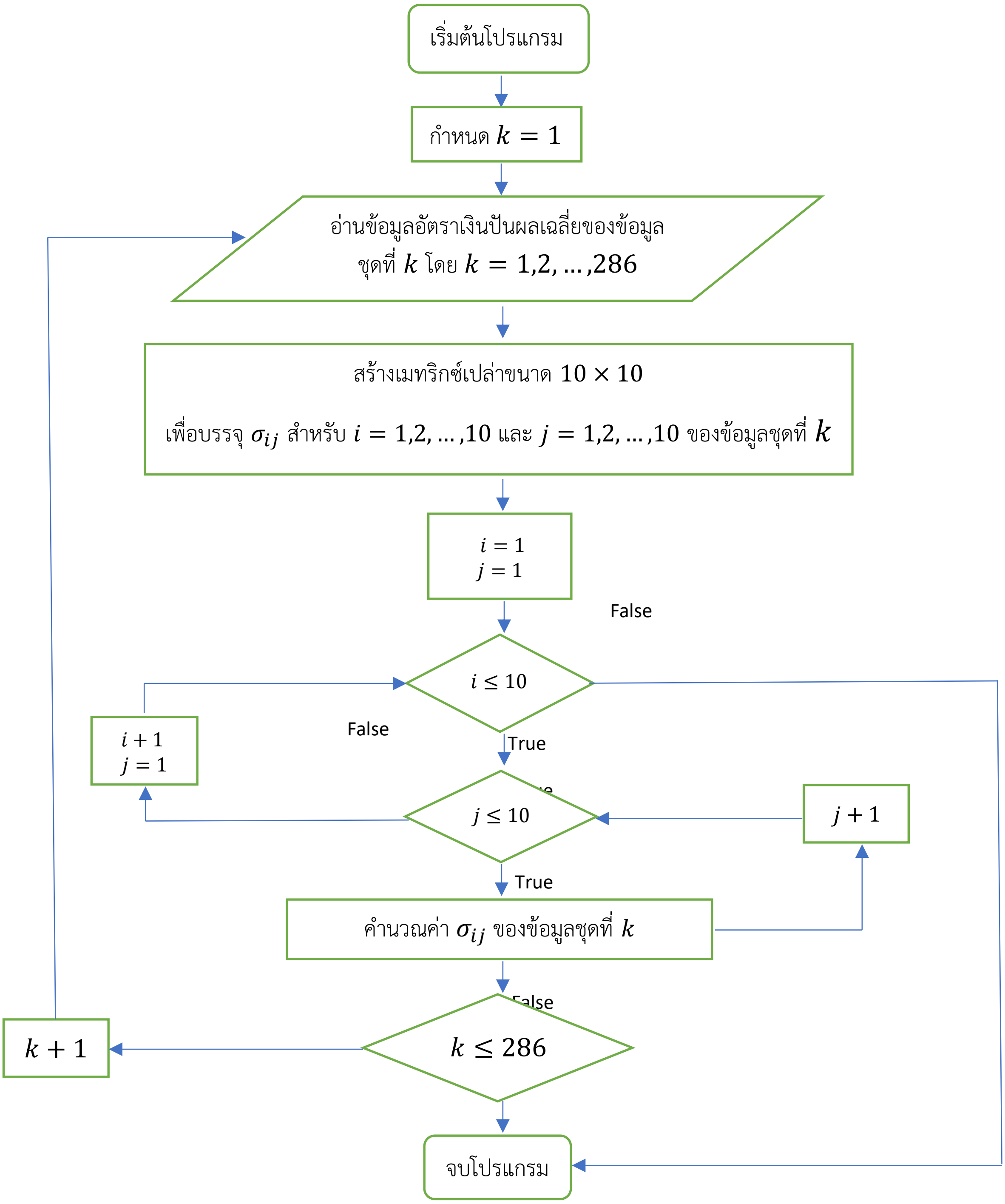
ชุดที่ 2

ลำดับ	หุ้น	อัตราเงินปันผล (%)						
		2545	**2546**	**2547**	**2548**	**2549**	**2550**	**เฉลี่ย**
1	KKP	5.87	6.42	6.43	7.52	8.19	7.69	7.02
2	KTB	4.58	3.13	5.22	4.27	4.2	5.05	4.41
3	SCB	2.84	4.21	4.53	4.95	5.59	3.68	4.30
4	TCAP	4.3	6.23	6.02	6.13	6.71	5.48	5.81
5	SCC	3.92	4.86	5.67	6.63	6.42	6.88	5.73
6	LH	0.88	3.98	9.88	7.02	7.57	4.16	5.58
7	BANPU	6.33	3.24	2.62	4.2	6.87	1.87	4.19
8	EGCO	6.72	2.78	2.73	3.7	8.49	3.57	4.67
9	PTT	5.92	3.44	4.61	4.99	4.39	3.78	4.52
10	RATCH	5.52	5.06	4.61	5.88	4.65	4.59	5.05

ตารางที่ 3.3 ตารางแสดงอัตราเงินปันผลของแต่ละหุ้น ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2545–2550 ของหุ้น 10 บริษัท ชุดที่ 2

3.2 โปรแกรมหาเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม

หลังจากได้ชุดข้อมูลของหุ้นทั้ง 286 ชุด เราจะนำข้อมูลแต่ละชุดมาหาเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของอัตราเงินปันผล เนื่องจากข้อมูลของอัตราเงินปันผลเป็นเพียงกลุ่มตัวอย่าง ดังนั้นเราจึงใช้สูตรการหาความแปรปรวนร่วมของตัวอย่าง เราสามารถเขียนแผนผังของโปรแกรมดังกล่าวได้ดังนี้



ภาพที่ 3.5 แผนผังแสดงการหาเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม

จากแผนผังข้างต้นเราจะสามารถนำมาเขียนโค้ดได้ดังนี้

```
#   retrive data
     for case in combi:
         data_array=data_array_input[list(case)]

         mean=[]
         for i in range(len(data_array)):
         mean.append((data_array[i].mean()))
         C_array = np.full((dataDimension[0], dataDimension[0]), np.NaN)
         for i in range(len(data_array)):
           for j in range(len(data_array)):
             C_array[i][j]=(np.cov(data_array[i].astype(float),data_array[j]
                          .astype(float),rowvar=False)[0][1])
```

ภาพที่ 3.6 ขั้นตอนการหาเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม

จากโค้ดข้างต้น เราจะได้เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของอัตราเงินปันผลของชุดข้อมูลจำนวน 286 ชุด ตัวอย่างเช่น

ชุดที่ 1 มีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม

$$C = 10^{-6}\begin{bmatrix} 69 & -39 & 74 & 104 & 23 & -19 & 68 & 4 & -19 & 1 \\ -39 & 42 & -1 & -28 & 12 & 14 & -9 & 25 & 27 & 75 \\ 74 & -1 & 297 & 61 & -426 & -22 & -13 & -23 & -42 & -16 \\ 104 & -28 & 61 & 242 & 196 & -18 & 172 & 89 & 16 & 167 \\ 23 & 12 & -426 & 196 & 987 & 6 & 182 & 115 & 68 & 44 \\ -19 & 14 & -22 & -18 & 6 & 6 & -10 & 10 & 11 & 10 \\ 68 & -9 & -13 & 172 & -10 & -10 & 126 & 70 & 18 & 144 \\ 4 & 25 & -23 & 89 & 10 & 10 & 7 & 86 & 45 & 155 \\ -19 & 27 & -42 & 16 & 11 & 11 & 18 & 45 & 30 & 87 \\ 1 & 75 & -165 & 167 & 19 & 19 & 144 & 155 & 87 & 348 \end{bmatrix}$$

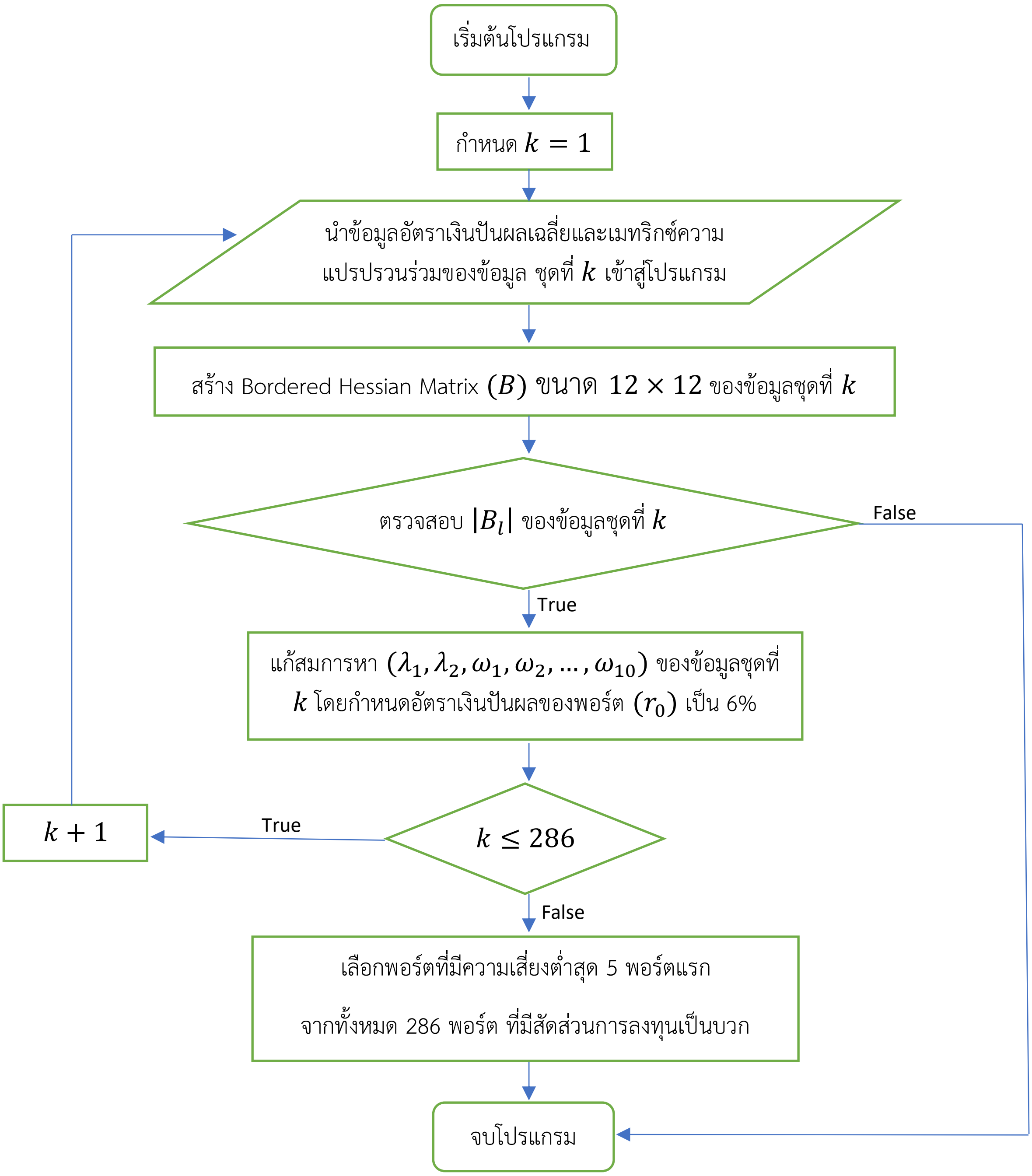
ชุดที่ 2 มีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม

$$C = 10^{-6}\begin{bmatrix} 48 & -39 & 74 & 104 & 23 & -19 & 68 & 4 & -19 & 1 \\ -39 & 72 & -1 & -28 & 12 & 14 & -9 & 25 & 27 & 75 \\ 74 & -1 & 217 & 61 & -426 & -22 & -13 & -23 & -42 & -16 \\ 104 & -28 & 61 & 242 & 196 & -18 & 172 & 89 & 16 & 167 \\ 23 & 12 & -426 & 196 & 87 & 6 & 182 & 115 & 68 & 44 \\ -19 & 14 & -22 & -18 & 6 & 3 & -10 & 10 & 11 & 10 \\ 68 & -9 & -13 & 172 & -10 & -10 & 125 & 70 & 18 & 144 \\ 4 & 25 & -23 & 89 & 10 & 10 & 7 & 31 & 45 & 155 \\ -19 & 27 & -42 & 16 & 11 & 11 & 18 & 45 & 30 & 87 \\ 1 & 75 & -165 & 167 & 19 & 19 & 144 & 155 & 87 & 348 \end{bmatrix}$$

เมื่อโปรแกรมคำนวณอัตราเงินปันผลเฉลี่ยและเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของข้อมูลแต่ละชุดแล้ว ข้อมูลเหล่านี้จะถูกบันทึกไว้ในโปรแกรมเพื่อนำไปหาพอร์ตที่มีประสิทธิภาพต่อไป

3.3 โปรแกรมหาพอร์ตที่มีประสิทธิภาพ

ในหัวข้อนี้เราจะหาพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด ณ ระดับผลตอบแทนที่คาดหวัง หรือพอร์ตที่มีประสิทธิภาพ โดยเขียนโปรแกรมจากขั้นตอนที่ได้กล่าวไว้ในทฤษฎีบท 2.2 โดยเราจะกำหนดอัตราเงินปันผลของพอร์ตเป็น 6% หลังจากนั้นเราจะนำอัตราเงินปันผลเฉลี่ยและเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของอัตราเงินปันผลของข้อมูลทุกชุด มาหาพอร์ตที่มีประสิทธิภาพ ซึ่งสุดท้ายเราจะเลือก 5 พอร์ตแรกที่มีความเสี่ยงต่ำสุด ที่มีสัดส่วนการลงทุนเป็นบวก เพื่อเป็นทางเลือกให้แก่นักลงทุน เราสามารถเขียนแผนผังการเขียนโปรแกรมหาพอร์ตที่มีประสิทธิภาพได้ดังนี้



ภาพที่ 3.7 ขั้นตอนการหาพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด 5 พอร์ตแรก ซึ่งมีอัตราเงินปันผลของพอร์ตเป็น 6%

โดยขั้นตอนการตรวจสอบดีเทอร์มิแนนซ์ย่อยของ Bordered Hessian Matrix และการแก้สมการหา $(\lambda_1, \lambda_2, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{10})$ จะดำเนินการตามขั้นตอนของทฤษฎีบท 2.2 ซึ่งแผนผังดังกล่าวสามารถนำมาเขียนโค้ดได้ ดังนี้

```
B = np.full((2+rValue, 2+rValue), np.NaN)
B[0][0]=0
B[0][1]=0
B[1][0]=0
B[1][1]=0

for i in range(2,len(B)):
  B[1][i]=1
  B[i][1]=1
  B[0][i]=mean[i-2]
  B[i][0]=mean[i-2]
for i in range(2,len(B)):
  for j in range(2,len(B)):
      B[i][j]=C_array[i-2][j-2]
    if np.linalg.det(B)>=0:
      for l in range(5,12)
        for B[l:l,l:l]
    print("Results give local minimum point")
  else :
    print("False")
```

ภาพที่ 3.8 ขั้นตอนการสร้าง Bordered Hessian Matrix และทดสอบ $|B_l|$

```
B_inv=inv(B)
r0=6
for i in range(2,len(B)):
   fixArray = [r0,1] +(dataDimension[0])
B_operation_result=np.matmul(B_inv,fixArray)
```

ภาพที่ 3.9 ขั้นตอนการแก้สมการหาพอร์ตที่มีประสิทธิภาพ

```
for i in range(0,len(data_array)):
for j in range(0,len(data_array)):
  for k in range(0,len(result)):
    sum(np.matmul(resultSet[k][i],resultSet[k][j],C[i][j]))
     portfolios=sum(np.matmul(resultSet[k][i],resultSet[k][j],C[i][j]))
      portfolios.sort :
        print(portfolios[0])
        print(portfolios[1])
        print(portfolios[2])
        print(portfolios[3])
        print(portfolios[4])
```

ภาพที่ 3.10 ขั้นตอนการเปรียบเทียบว่าพอร์ตไหนให้ค่าความแปรปรวนต่ำสุด 5 ลำดับแรก

ผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมในหัวข้อนี้ คือ พอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด 5 ลำดับแรกที่ไม่มีการยืมขายและให้ผลตอบแทนจากเงินปันผล 6% ดังนี้

พอร์ต 1		พอร์ต 2		พอร์ต 3		พอร์ต 4		พอร์ต 5	
หุ้น	สัดส่วน	หุ้น	สัดส่วน	หุ้น	สัดส่วน	หุ้น	สัดส่วน	หุ้น	สัดส่วน
KKP	0.192	KKP	0.203	KKP	0.205	KKP	0.222	KKP	0.220
KTB	0.143	KTB	0.143	KTB	0.143	KTB	0.143	KTB	0.123
SCB	0.102	SCB	0.113	SCB	0.086	SCB	0.122	SCB	0.113
TCAP	0.034	TCAP	0.038	TCAP	0.052	TCAP	0.038	TCAP	0.038
PTT	0.024	PTT	0.024	PTT	0.018	PTT	0.024	PTT	0.024
RATCH	0.100	RATCH	0.126	RATCH	0.112	RATCH	0.126	RATCH	0.118
INTUCH	0.243	INTUCH	0.203	INTUCH	0.193	INTUCH	0.203	INTUCH	0.209
CPF	0.067	SCC	0.043	CPF	0.058	CPF	0.049	CPF	0.077
EGCO	0.008	BANPU	0.018	BANPU	0.046	EGCO	0.018	BANPU	0.018
DELTA	0.087	DELTA	0.089	DELTA	0.087	SCC	0.055	SCC	0.060
ความเสี่ยง (%)	1.841	ความเสี่ยง (%)	1.842	ความเสี่ยง (%)	1.847	ความเสี่ยง (%)	1.848	ความเสี่ยง (%)	1.850

ตารางที่ 3.4 ตารางแสดงพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด 5 ลำดับแรก ที่มีอัตราเงินปันผล 6%

จะเห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้ คือ พอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุดไม่มีการยืมขาย 5 พอร์ตแรก ที่มีอัตราเงินปันผล 6% หลังจากนั้นเราจะนำพอร์ตเหล่านี้เข้าสู่โปรแกรมการลงทุนแบบถัวเฉลี่ยซึ่งจะกล่าวในหัวข้อถัดไป

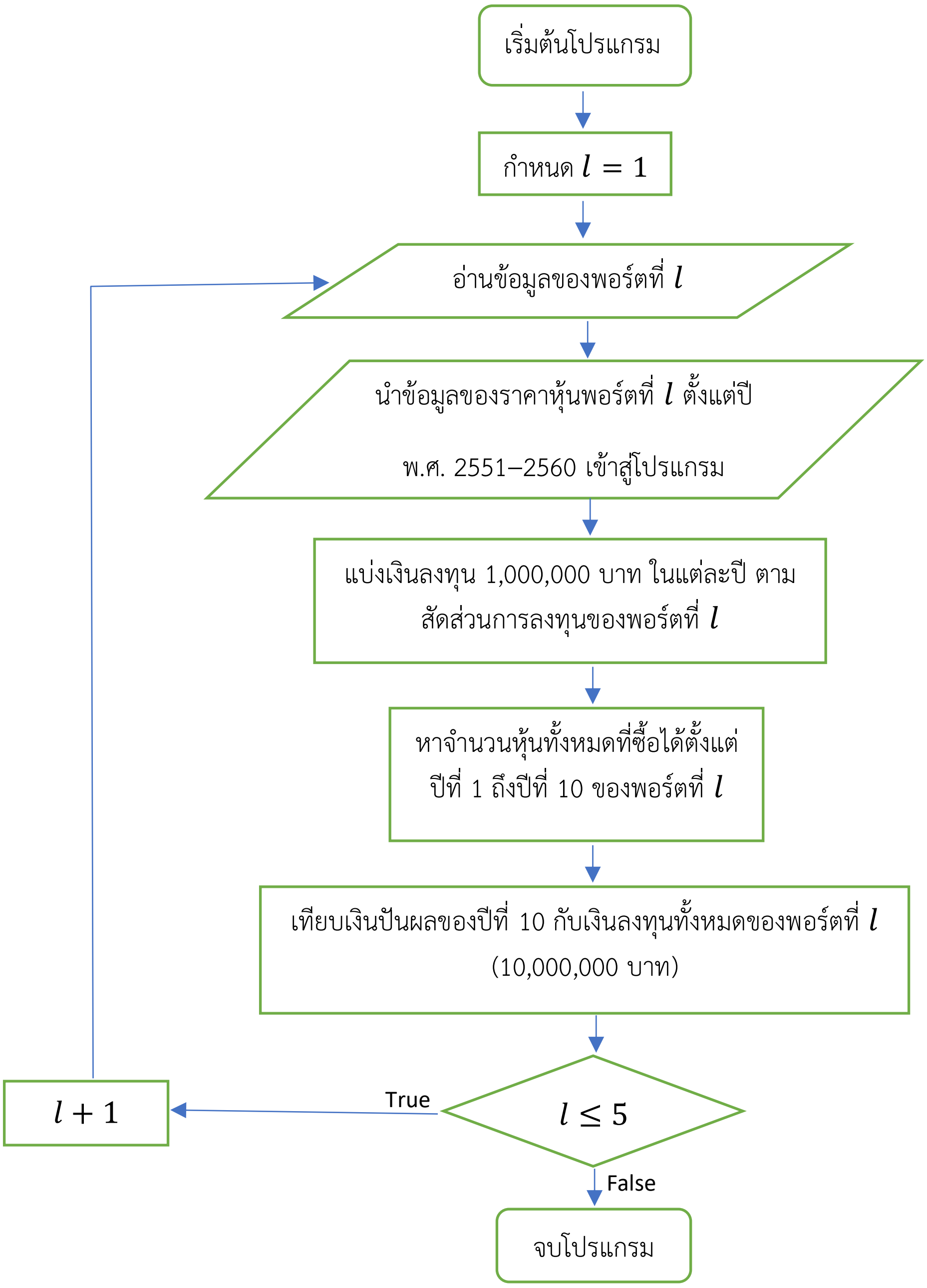
3.4 การเขียนโปรแกรมการลงทุนแบบถัวเฉลี่ย

ในหัวข้อนี้เราจะนำพอร์ตที่ได้จากโปรแกรมในหัวข้อ 3.3 มาเข้าโปรแกรมการลงทุนแบบถัวเฉลี่ยเป็นเวลา 10 ปี เพื่อทดสอบว่าจะได้อัตราเงินปันผลเกิน 10% หรือไม่ โดยเราจะใช้ข้อมูลราคาหุ้นและอัตราเงินปันผลของหุ้นแต่ละบริษัท ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2551–2560 และกำหนดเงินลงทุนในแต่ละปีเป็น 1,000,000 บาท แบ่งตามสัดส่วนของพอร์ตในแต่ละปี ตัวอย่างเช่น

	ชื่อหุ้น	สัดส่วนการลงทุน	เงินลงทุน
1	CPF	0.067	67,000.00
2	KKP	0.192	192,000.00
3	KTB	0.143	143,000.00
4	SCB	0.102	102,000.00
5	TCAP	0.034	34,000.00
6	EGCO	0.008	8,000.00
7	PTT	0.024	24,000.00
8	RATCH	0.1	100,000.00
9	DELTA	0.087	87,000.00
10	INTUCH	0.243	243,000.00
	รวม	1	1,000,000.00

ตารางที่ 3.5 ตัวอย่างสัดส่วนการลงทุนแบบถัวเฉลี่ยในแต่ละปี

เราจะสามารถเขียนแผนผังโปรแกรมการลงทุนแบบถัวเฉลี่ยได้ดังนี้



ภาพที่ 3.11 แผนผังแสดงการเขียนโปรแกรมแสดงการลงทุนแบบถัวเฉลี่ย

โดยแผนผังนี้จะสามารถเขียนเป็นโค้ดการลงทุนแบบถัวเฉลี่ยเป็นเวลา 10 ปี ได้ดังนี้

```
data1 = pd.read_excel("stock.xlsx")
stock = list(data1.iloc[:,0])
dataDimension1 = data1.shape
data1=data1.iloc[0:dataDimension1[0],1:dataDimension1[1]]
data1_array=data1.as_matrix()
for i in range(0,4)
  5port_array=portfolios[i]
  for j in range(1,len(data1)
   price_array=data1_array[1,10]
    div_array=data1_array[11,20]
```

ภาพที่ 3.12 ขั้นตอนการนำเข้าข้อมูลราคาหุ้นปี พ.ศ. 2551–2560 ของแต่ละบริษัท

```
#investment 1,000,000 per year
    I= 1000000
    investratio_array=np.matmul(port,I)
      amountstock_array=price_array/ratio_array
      div_array=np.matmul(amountstock_array,div_array,price_array)
      div60=div_array[9]
      Result=10000000/div60
          print(Result)
#end of program
```

ภาพที่ 3.13 ขั้นตอนการลงทุนแบบถัวเฉลี่ย 10 ปี ซึ่งมีผลลัพธ์เป็นอัตราเงินปันผลปี พ.ศ. 2560

จากโปรแกรมข้างต้นเราจะได้เงินปันผล ณ ปี พ.ศ. 2560 ของพอร์ตทั้ง 5 ชุด โดยผลลัพธ์จะแสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

พอร์ต 1		**พอร์ต 2**		**พอร์ต 3**		**พอร์ต 4**		**พอร์ต 5**	
หุ้น	สัดส่วน	หุ้น	สัดส่วน	หุ้น	สัดส่วน	หุ้น	สัดส่วน	หุ้น	สัดส่วน
KKP	0.192	KKP	0.203	KKP	0.205	KKP	0.222	KKP	0.220
KTB	0.143	KTB	0.143	KTB	0.143	KTB	0.143	KTB	0.123
SCB	0.102	SCB	0.113	SCB	0.086	SCB	0.122	SCB	0.113
TCAP	0.034	TCAP	0.038	TCAP	0.052	TCAP	0.038	TCAP	0.038
PTT	0.024	PTT	0.024	PTT	0.018	PTT	0.024	PTT	0.024
RATCH	0.100	RATCH	0.126	RATCH	0.112	RATCH	0.126	RATCH	0.118
INTUCH	0.243	INTUCH	0.203	INTUCH	0.193	INTUCH	0.203	INTUCH	0.209
CPF	0.067	SCC	0.043	CPF	0.058	CPF	0.049	CPF	0.077
EGCO	0.008	BANPU	0.018	BANPU	0.046	EGCO	0.018	BANPU	0.018
DELTA	0.087	DELTA	0.089	DELTA	0.087	SCC	0.055	SCC	0.060
เงินปันผล (%)	10.292	เงินปันผล (%)	10.181	เงินปันผล (%)	10.203	เงินปันผล (%)	10.311	เงินปันผล (%)	10.333
ความเสี่ยง (%)	1.841	ความเสี่ยง (%)	1.842	ความเสี่ยง (%)	1.847	ความเสี่ยง (%)	1.848	ความเสี่ยง (%)	1.850

ตารางที่ 3.6 ตารางแสดงอัตราเงินปันผล ณ ปี พ.ศ. 2560 จากการลงทุนแบบถัวเฉลี่ย 10 ปี

จากตารางข้างต้นจะสรุปได้ว่าเงินปันผล ณ ปี 2560 ของพอร์ตทั้ง 5 พอร์ต มีค่าเกิน 10% ดังนั้นการจัดพอร์ตแบบ 10-10-10 เหมาะสำหรับผู้เตรียมตัวเกษียณ เพราะพอร์ตการลงทุนให้เงินปันผลได้ถึง 10% ต่อปี โดยไม่ต้องลงทุนเพิ่มเติมใด ๆ อีก

เอกสารอ้างอิง

[1] Elton, E.J., Gruber, M.J., Brown, S.J., and Goetzmann, W.N., Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, Ninth edition(New York: *Wiley*, 2014), pp.95–102.

[2] Ruppert, D., and Matteson, D.S., Statistics and Data Analysis for Financial Engineering with R Examples, Second edition(New York: *Springer*, 2015), pp.474–484.

[3] ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย. (2561, มิถุนายน 6). ผลตอบแทนหุ้นไทย 10 ปีเฉลี่ย 11.61% สูงกว่าสินทรัพย์อื่น[Online]. แหล่งที่มา : https://www.hoonsmart.com/archives/18399

[4] นิภาพันธ์ พูนเสถียรทรัพย์. (2559, กรกฎาคม 24). “คนไทยจนตอนแก่”ปัญหาใหญ่ระดับชาติ[Online]. แหล่งที่มา : https://www.scb.co.th/th/personal-banking/stories/poor-when-get-old.html

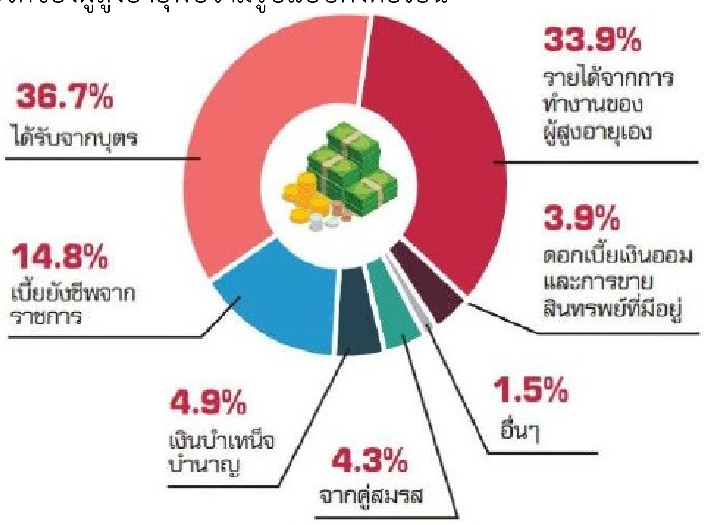
ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal
ปีการศึกษา 2561

ชื่อโครงงาน (ภาษาไทย)	การจัดพอร์ตแบบ 10-10-10
ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ)	10-10-10 Portfolios Management
อาจารย์ที่ปรึกษา	ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี
ผู้ดำเนินการ	คุณานนต์ ทิศรอด เลขประจำตัวนิสิต 5833505223
	สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
	คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

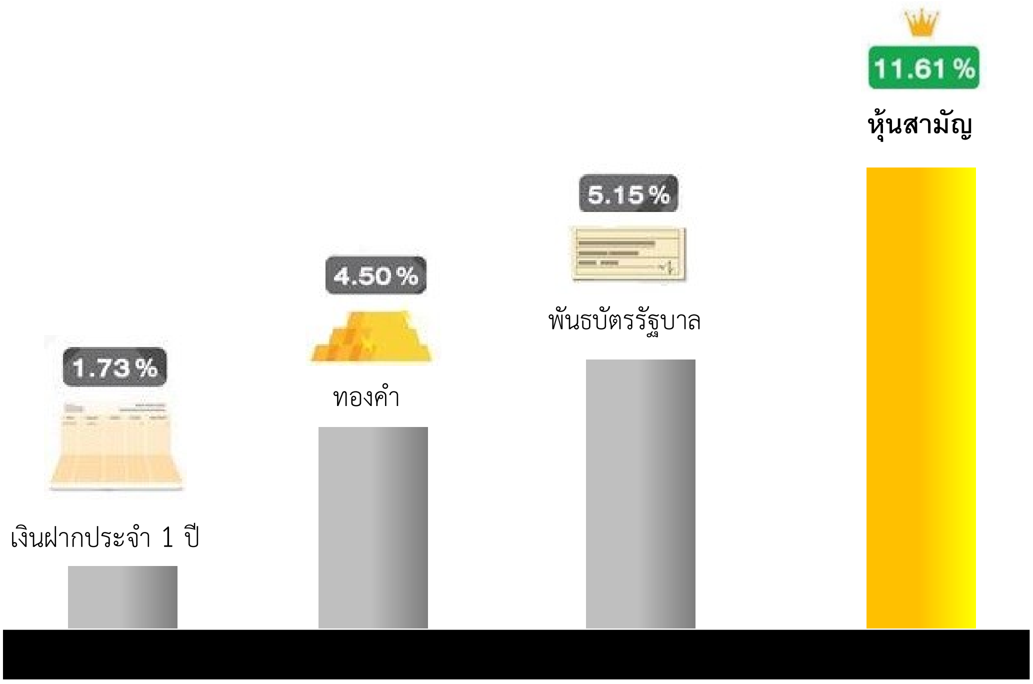
การที่จะกล่าวว่าประเทศใดประเทศหนึ่งเป็นสังคมผู้สูงอายุนั้น หมายความว่าประเทศนั้นต้องมีประชากรที่มีอายุมากกว่า 60 ปี เกินกว่าร้อยละ 10 ของประชากรทั้งหมด สำหรับประเทศไทยมีการคาดการณ์ว่าในปี พ.ศ. 2564 จะเป็นสังคมผู้สูงอายุสมบูรณ์แบบ ผู้เกษียณนั้นนอกจากจะต้องดูแลสุขภาพของตนเองแล้ว การหารายได้ให้เพียงพอต่อค่าใช้จ่ายหลังเกษียณนับว่าเป็นปัญหาที่สำคัญไม่ยิ่งหย่อนกว่ากัน ธนาคารไทยพาณิชย์ได้สำรวจแหล่งรายได้หลักของการดำเนินชีวิตของผู้สูงอายุพบว่ามีรูปแบบดังต่อไปนี้



ภาพที่ 1 แหล่งรายได้หลักการดำเนินชีวิตของผู้สูงอายุ ที่มาธนาคารไทยพาณิชย์ ณ พ.ศ. 2559

จากภาพที่ 1 จะเห็นได้ว่าผู้สูงอายุมีรายได้ส่วนใหญ่มาจากบุตรหลานและการทำงาน แต่จากสภาพสังคมครอบครัวเดี่ยวและอายุขัยเฉลี่ยที่สูงขึ้น การพึ่งพารายได้จากบุตรหลานและการทำงานอาจจะไม่ใช่คำตอบสำหรับผู้เกษียณ

การลงทุนเพื่อนำรายได้มาใช้หลังเกษียณจึงเป็นวิธีที่น่าจะเหมาะสมกว่า โดยการลงทุนแต่ละประเภทนั้นก็จะมีผลตอบแทนและมีความเสี่ยงที่ต่างกัน เช่น การฝากเงินกับธนาคารจะได้รับผลตอบแทนน้อย แต่มีความเสี่ยงน้อยเช่นกัน ในขณะที่การลงทุนในหุ้นได้ผลตอบแทนสูง แต่ก็มีความเสี่ยงที่สูงตามไปด้วย โดยการลงทุนแต่ละประเภทจะให้ผลตอบแทนเฉลี่ยดังนี้



ภาพที่ 2 กราฟเปรียบเทียบผลตอบแทนย้อนหลัง ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2551–2560

ที่มาตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย ณ พ.ศ. 2561

จากภาพที่ 2 จะเห็นได้ว่าการลงทุนในหุ้นนั้นให้ผลตอบแทนสูง แต่การลงทุนประเภทนี้ก็มีความเสี่ยงสูงตามไปด้วย ทางผู้จัดทำโครงงานจึงมีแนวคิดที่จะลดความเสี่ยงให้ต่ำลงโดยการลงทุนแบบถัวเฉลี่ยและใช้เวลาลงทุนให้นานขึ้น ผลตอบแทนที่คาดหวังจะอยู่ในรูปเงินปันผลเป็นหลัก เพื่อที่จะได้มีกระแสเงินสดอย่างสม่ำเสมอให้ผู้เกษียณได้ใช้จ่ายในชีวิตประจำวัน

จากแนวคิดข้างต้นผู้จัดทำโครงงานจึงได้จัดทำโครงงานนี้เพื่อหาหุ้น 10 บริษัท เพื่อการลงทุนระยะเวลา 10 ปี โดยคาดหวังผลตอบแทนจากเงินปันผลไม่ต่ำกว่าร้อยละ 10 โดยเรียกรูปแบบการลงทุนชนิดนี้ว่า **การจัดพอร์ตแบบ 10-10-10 (10-10-10 Portfolios Management)** โดยผู้จัดทำได้ออกแบบขั้นตอนการดำเนินงานดังนี้

(1) คัดเลือกหลักทรัพย์ขนาดใหญ่เพื่อจัดพอร์ตการลงทุนโดยใช้ข้อมูลเงินปันผล, ระดับบรรษัทภิบาล และอัตราส่วนราคาต่อหุ้นกับกำไรต่อหุ้น (P/E) โดยใช้ข้อมูลปี พ.ศ. 2545–2550 โดยมีเกณฑ์การคัดเลือกดังนี้

(1.1) คัดเลือกหุ้นที่มีมูลค่าตลาดมากกว่า 50,000 ล้านบาท และมีเงินปันผลเฉลี่ยเกินร้อยละ 3 ต่อปี ซึ่งได้ทั้งหมด 17 บริษัท ดังนี้

(1.2) นำหุ้นที่ได้จากข้อ (1.1) มาพิจารณาระดับบรรษัทภิบาล โดยคัดบริษัทที่มีบรรษัทภิบาลระดับ 4–5 เพื่อที่บริษัทที่คัดเลือกมานั้นมีความน่าเชื่อถือ ซึ่งได้ว่าทุกบริษัทในข้อ (1.1) นั้นมีระดับบรรษัทภิบาลที่ระดับ 4–5 ทุกบริษัท

(1.3) นำหุ้นที่ได้จากข้อ (1.2) มาพิจารณาอัตราส่วนราคาต่อหุ้นกับกำไรต่อหุ้น (P/E) เฉลี่ยไม่เกิน 15

สรุปได้ว่าหลักทรัพย์ในตลาดหุ้นไทยที่สอดคล้องทั้ง 3 เงื่อนไขที่ตั้งไว้นั้นมีทั้งหมด 13 บริษัท ดังนี้

ลำดับ	หุ้น	มูลค่าตลาด(ล้านบาท)	P/E	DIV (%)	CG	หมวดหมู่
1	CPF	226,045	13.27	6.32	5	อาหารและเครื่องดื่ม
2	KKP	60,543	7.42	7.02	5	ธนาคาร
3	KTB	245,979	12.26	4.41	5	ธนาคาร
4	SCB	422,736	12.78	4.30	5	ธนาคาร
5	TCAP	58,815	8.2	5.81	5	ธนาคาร
6	SCC	513,600	10.91	5.73	5	วัสดุก่อสร้าง
7	LH	137,422	14.52	5.58	4	พัฒนาอสังหาริมทรัพย์

ลำดับ	หุ้น	มูลค่าตลาด(ล้านบาท)	P/E	DIV (%)	CG	หมวดหมู่
8	BANPU	104,787	13.47	4.19	5	พลังงานและสาธารณูปโภค
9	EGCO	121,087	8.16	4.67	5	พลังงานและสาธารณูปโภค
10	PTT	1,356,742	9.07	4.52	5	พลังงานและสาธารณูปโภค
11	RATCH	75,400	9.85	5.05	5	พลังงานและสาธารณูปโภค
12	INTUCH	176,353	12.8	7.95	5	เทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสาร
13	DELTA	78,273	12.61	6.92	5	ชิ้นส่วนอิเล็กทรอนิกส์

ตารางที่ 1 หุ้น 13 บริษัทที่สอดคล้องทั้ง 3 เงื่อนไขที่ตั้งไว้

(2) เขียนโปรแกรมเพื่อจัดพอร์ตการลงทุนหุ้น 10 บริษัท จาก 13 บริษัทข้างต้น ตามทฤษฎีการจัดพอร์ตของ Markowitz

ทฤษฎีการจัดพอร์ตของ Markowitz ในปี ค.ศ.1952 Harry Markowitz ได้เขียนบทความที่มีชื่อว่า “Modern Portfolio Theory (MPT)” ซึ่งทำให้เขาได้รับรางวัลโนเบลในสาขาเศรษฐศาสตร์ เพราะการค้นพบของเขาได้มีผลอย่างมากในการบริหารจัดการอุตสาหกรรมหลักทรัพย์ โดยมีหลักการอย่างหนึ่งที่สำคัญ คือ การจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพ ซึ่งจะได้พอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด ณ ระดับผลตอบแทนที่กำหนด โดยมีหลักการทางคณิตศาสตร์ คือ หาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันความเสี่ยงของพอร์ต โดยมีเงื่อนไขอื่นๆเพิ่มเติม ดังนี้

ในการพิจารณาหุ้น n บริษัทโดย ω_i $(i = 1,2, \dots, n)$ แทนน้ำหนักการลงทุนของหุ้นในแต่ละบริษัท โดยบริษัทที่ i มีความเสี่ยง σ_i และอัตราผลตอบแทน $E(R_i)$ เราจะได้ว่าอัตราผลตอบแทน $E(R_P)$ และความเสี่ยง σ_P ของพอร์ตการลงทุน $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ คือ

$$E(R_P) = \sum_{i=1}^{n} E(R_i) \text{ และ } \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \omega_i\, \omega_j \sigma_{ij}$$

ตามลำดับ แนวคิดของ Markowitz คือการหาค่าต่ำสุดของ σ_P^2 ภายใต้ข้อกำหนดตามตัวแบบต่อไปนี้

$$Minimize\ \ \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_i\,\omega_j\sigma_{ij}$$

ภายใต้ข้อจำกัด

$$(a)\sum_{i=1}^{n}\omega_i = 1$$

$$(b)\sum_{i=1}^{n}\omega_i E(R_i) = r_o$$

เมื่อ r_o แทนผลตอบแทนที่นักลงทุนคาดหวัง

(3) หลังจากที่ได้พอร์ตลงทุนจากโปรแกรมในข้อ 2 แล้ว เราจะนำพอร์ตดังกล่าวมาทดสอบจากข้อมูลจริงของตลาดหลักทรัพย์ ในช่วงปี พ.ศ. 2551–2560 ว่าจะได้เงินปันผลไม่ต่ำกว่าร้อยละ 10 จริงหรือไม่

วัตถุประสงค์

โครงงานนี้จัดทำขึ้นเพื่อสร้างแบบจำลองการลงทุนในหุ้นตามทฤษฎีการจัดพอร์ตของ Markowitz เพื่อลดความเสี่ยงของการลงทุน โดยเรียกรูปแบบการลงทุนนี้ว่าการลงทุนแบบ 10-10-10 นั่นคือการจัดพอร์ตที่มีหลักทรัพย์ 10 บริษัท ซึ่งเมื่อลงทุนครบ 10 ปีแล้ว จะได้เงินปันผลไม่ต่ำกว่าร้อยละ 10 ต่อปีโดยเทียบจากต้นทุนที่ลงทุนไปทั้งหมด เพื่อเป็นแนวทางการลงทุนให้กับผู้สูงอายุเพื่อที่จะมีรายได้ที่พอใช้หลังเกษียณ

ขอบเขตของโครงงาน

ในโครงงานนี้จะศึกษาวิธีการจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพของ Markowitz เพื่อหาพอร์ตแบบ 10-10-10 โดยใช้ข้อมูลจากตลาดหลักทรัพย์ช่วงปี พ.ศ. 2545–2550

วิธีการดำเนินงาน

1. ศึกษาปัญหาและกำหนดหัวข้อที่จะศึกษา
2. ตั้งเกณฑ์การคัดเลือกหลักทรัพย์ และเลือกวิธีการลงทุนที่เหมาะสมสำหรับพอร์ตการลงทุน
3. เขียนโปรแกรมสำหรับการจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพตามแนวคิดของ Markowitz
4. ทดสอบพอร์ตที่ได้กับข้อมูลการลงทุนในหุ้นช่วงปี พ.ศ. 2551–2560
5. ตรวจสอบความถูกต้องของผลการดำเนินงาน
6. สรุปและจัดทำรูปเล่มรายงาน

วิธีการดำเนินงาน	สิงหาคม 2561 – เมษายน 2562								
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.
1. ศึกษาปัญหาและกำหนดหัวข้อที่จะศึกษา									
2. ตั้งเกณฑ์การคัดเลือกหลักทรัพย์และเลือกวิธีการลงทุนที่เหมาะสมสำหรับพอร์ตการลงทุน									
3. เขียนโปรแกรมสำหรับการจัดพอร์ตที่มีประสิทธิภาพตามแนวคิดของ Markowitz									
4. ทดสอบพอร์ตที่ได้จากข้อมูลการลงทุนในหุ้นช่วงปี พ.ศ. 2551–2560									
5. ตรวจสอบความถูกต้องของผลการดำเนินงาน									
6. สรุปและจัดทำรูปเล่มรายงาน									

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ได้ตัวอย่างพอร์ตการลงทุนที่มีความเสี่ยงต่ำและผลตอบแทนสูง เพียงพอต่อการใช้จ่ายหลังเกษียณ

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

1. กระดาษ A4
2. Notebook
3. โปรแกรม Microsoft Word, Mathlabs และ Mathematica
4. หนังสือและวารสารที่เกี่ยวข้อง

งบประมาณ

รายการ	ราคาต่อหน่วย(บาท)	จำนวน	จำนวนเงิน(บาท)
1. กระดาษ A4 80 แกรม (รีม)	120	5	600
2. ค่าถ่ายเอกสารและจัดทำรูปเล่ม	250	4	1,000
3. หนังสือและวารสารที่เกี่ยวข้อง	3,400	1	3,400
รวม			5,000

ภาคผนวก ข

เราจะพิสูจน์ทฤษฎี 2.1 และทฤษฎี 2.2 โดยวิธีการหาค่าสูงสุด-ต่ำสุดของแคลคูลัสหลายตัวแปร โดยใช้ทฤษฎีบท ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 กำหนดให้ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันซึ่งอนุพันธ์อันดับ 2 มีความต่อเนื่องและ $g_1, g_2, \dots, g_k: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับ k เงื่อนไข ซึ่งอนุพันธ์อันดับหนึ่งมีความต่อเนื่อง นิยามโดย

$$g_1(x) = b_1, g_2(x) = b_2, \dots, g_k(x) = b_k \text{ เมื่อ } x \in \mathbb{R}^n \text{ และ } b_1, b_2, \dots, b_k \in \mathbb{R}$$

ถ้า $x_0 = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_k^*, c_1, c_2, \dots, c_n)$ สอดคล้องเงื่อนไข 3 ข้อดังต่อไปนี้

(1) x_0 เป็นจุดวิกฤตของ L เมื่อ $L(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i [b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

นั่นคือ $\nabla L(x_0) = 0$ เมื่อ ∇L คือ เวกเตอร์เกรเดียนต์ นิยามโดย

$$\nabla L = (L_{\lambda_1}, L_{\lambda_2}, \dots, L_{\lambda_k}, L_{x_1}, L_{x_2}, \dots, L_{x_n})$$

(2) $\{J_1(c_1, c_2, \dots, c_n), J_2(c_1, c_2, \dots, c_n), \dots, J_k(c_1, c_2, \dots, c_n)\}$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน เมื่อ J คือ Jacobian vector นิยามโดย

$$J_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_1}, \frac{\partial g_i}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g_i}{\partial x_n}\right) \text{ ทุก } i = 1,2, \dots, k$$

(3) $(-1)^k |A_i| > 0$ ทุก $i = 2k+1, \dots, n+k$ เมื่อ A_i คือ เมทริกซ์ย่อยขนาด $i \times i$ ด้านบนซ้ายของ A และ A คือ Bordered Hessian Matrix กำหนดโดย

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial g_k}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_k}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_k}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_k}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_k}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial g_k}{\partial x_n} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}_{(n+k)\times(n+k)}$$

แล้วจะได้ว่า $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ เป็นจุดต่ำสุดของ f ภายใต้เงื่อนไข $g_1(x) = b_1$, $g_2(x) = b_2, \dots, g_k(x) = b_k$ เมื่อ $b_1, b_2, \dots, b_k \in \mathbb{R}$

ทฤษฎีบท 2.1 ในการลงทุน n $(n \geq 2)$ ทางเลือก เราจะมีขั้นตอนการหาพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด ดังนี้

(ก) ตรวจสอบว่ามีพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุดหรือไม่

โดยตรวจสอบว่า $|H_k| < 0$ ทุก $k = 3,4, \dots, n+1$ เมื่อ H_k คือ เมทริกซ์ย่อยขนาด $k \times k$ ด้านบนซ้ายของ H เมื่อ H คือ Hessian Matrix กำหนดโดย

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ 1 & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

ถ้า $|H_k| < 0$ ทุก $k = 3,4, \dots, n+1$ เราจะสรุปได้ว่ามีพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด

(ข) หาพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด

ถ้ามี $(\lambda_0, c_1, c_2, \dots, c_n)$ ที่เป็นคำตอบของสมการ

$$H \begin{bmatrix} -\lambda \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

แล้วเราจะได้ว่า $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ เป็นพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด

พิสูจน์ เราต้องการหา

$$Minimize\ \sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\omega_i\omega_j$$

ภายใต้เงื่อนไข $$\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n = 1$$

ซึ่งก็คือ

$$Minimize\ f(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$$

ภายใต้เงื่อนไข $$g(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = 1$$

เมื่อ

$$f(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\omega_i\omega_j$$

และ $$g(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$$

นั่นเอง

โดยเราจะพิสูจน์โดยใช้ทฤษฎีบท 1

กำหนดให้

$$L(\lambda, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\omega_i\omega_j + \lambda[1 - \sum_{i=1}^{n}\omega_i]$$

เนื่องจาก $k = 1$, $\frac{\partial g_1}{\partial \omega_i} = 1$, $\frac{\partial^2 L}{\partial \omega_i \partial \omega_j} = \sigma_{ij}$ สำหรับทุก $i = 1,2, \dots, n$ และ $j = 1,2, \dots, n$ ดังนั้น เราจะได้ว่า Bordered Hessian Matrix ของ L ในทฤษฎีบท 1 คือ H นั่นเอง

(1) จะแสดงว่า $(\lambda_0, c_1, c_2, \dots, c_n)$ เป็นจุดวิกฤตของ L

จากทฤษฎีบท 2.1 (ข) เราจะสมมติว่ามี $(\lambda_0, c_1, c_2, \dots, c_n)$ ที่เป็นคำตอบของสมการ

$$H\begin{bmatrix}-\lambda\\ \omega_1\\ \omega_2\\ \vdots\\ \omega_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}$$

นั่นคือ

$$H\begin{bmatrix}-\lambda_0\\ c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n}\\ 1 & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n}\\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\lambda_0\\ c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\left.\begin{aligned}c_1+c_2+\cdots+c_n-1&=0\\ \sigma_{11}c_1+\sigma_{12}c_2+\cdots+\sigma_{1n}c_n-\lambda_0&=0\\ \sigma_{21}c_1+\sigma_{22}c_2+\cdots+\sigma_{2n}c_n-\lambda_0&=0\\ &\vdots\\ \sigma_{n1}c_1+\sigma_{n2}c_2+\cdots+\sigma_{nn}c_n-\lambda_0&=0\end{aligned}\right\}\ (1)$$

เนื่องจาก

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial\lambda}&=c_1+c_2+\cdots+c_n-1\\ \frac{\partial L}{\partial\omega_1}&=\sigma_{11}c_1+\sigma_{12}c_2+\cdots+\sigma_{1n}c_n-\lambda_0\\ \frac{\partial L}{\partial\omega_2}&=\sigma_{21}c_1+\sigma_{22}c_2+\cdots+\sigma_{2n}c_n-\lambda_0\\ &\vdots\\ \frac{\partial L}{\partial\omega_n}&=\sigma_{n1}c_1+\sigma_{n2}c_2+\cdots+\sigma_{nn}c_n-\lambda_0\end{aligned}\right\}\ (2)$$

จาก (1) และ (2) เราจะได้ว่า $\nabla L(\lambda_0,c_1,c_2,\dots,c_n)=0$

ดังนั้น $(\lambda_0,c_1,c_2,\dots,c_n)$ เป็นจุดวิกฤตของ L

(2) เนื่องจาก $g(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n)=\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n$ และ $k=1$ เราจะได้ว่า Jacobian vector มีเพียงเวกเตอร์เดียว คือ

$$J_1(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial \omega_1}, \frac{\partial g_i}{\partial \omega_2}, \dots, \frac{\partial g_i}{\partial \omega_n}\right) = (1,1, \dots, 1)$$

เราจึงได้ว่า $\{J_1(c_1, c_2, \dots, c_n)\}$ เป็นอิสระเชิงเส้น

(3) เพราะว่า Bordered Hessian Matrix คือ H และ $k = 1$ ดังนั้น (3) ของทฤษฎีบท 1 ก็คือ (ก) ในทฤษฎีบท 2.1 นั่นเอง

จากทฤษฎีบทที่ 1 เราจึงสรุปได้ว่า $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ เป็นพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด

$\square$

ทฤษฎีบท 2.2 ในการลงทุน n $(n \geq 2)$ ทางเลือก ซึ่งมีผลตอบแทนบางทางเลือกไม่เท่ากัน (มี $i \neq j$ ซึ่ง $E(R_i) \neq E(R_j)$) เราจะมีขั้นตอนการหาพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด ณ ระดับผลตอบแทน r_0 ดังนี้

(1) ตรวจสอบว่ามีพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุดหรือไม่
โดยตรวจสอบว่า $|B_l| > 0$ ทุก $l = 5,6, \dots, n+2$ เมื่อ B_l คือ เมทริกซ์ย่อยขนาด $l \times l$ ด้านบนซ้ายของ B เมื่อ B คือ Bordered Hessian Matrix กำหนดโดย

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & E(R_1) & E(R_2) & \dots & E(R_n) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ E(R_1) & 1 & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ E(R_2) & 1 & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(R_n) & 1 & \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

ถ้า $|B_l| > 0$ ทุก $l = 5,6, \dots, n+2$ เราจะสรุปได้ว่ามีพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด

(2) หาพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด ณ ระดับผลตอบแทน r_0
ถ้ามี $(\lambda_1, \lambda_2, c_1, c_2, \dots, c_n)$ เป็นคำตอบของสมการ

$$B \begin{bmatrix} -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

แล้วเราจะได้ว่า $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ เป็นพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด ณ ระดับผลตอบแทน r_0

พิสูจน์

เราต้องการหา

$$Minimize\ \sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\omega_i\omega_j$$

ภายใต้เงื่อนไข

$$E(R_1)\omega_1 + E(R_2)\omega_2 + \cdots + E(R_n)\omega_n = r_0$$
$$\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n = 1$$

ซึ่งก็คือ

$$Minimize\ f(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$$

ภายใต้เงื่อนไข

$$g_1(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = r_0$$
$$g_2(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = 1$$

เมื่อ

$$f(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\omega_i\omega_j$$

และ $g_1(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = E(R_1)\omega_1 + E(R_2)\omega_2 + \cdots + E(R_n)\omega_n$
$g_2(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$

นั่นเอง

โดยเราจะพิสูจน์โดยใช้ทฤษฎีบท 1

กำหนดให้

$$L(\lambda, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\ )$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\omega_i\omega_j + \lambda_1\left[1 - \sum_{i=1}^{n}\omega_i\right] + \lambda_2\left[r_0 - \sum_{i=1}^{n}E(R_i)\omega_i\right]$$

ดังนั้นเราจะได้ว่า Bordered Hessian Matrix ของ L ในทฤษฎีบท 1 คือ B นั่นเอง เนื่องจาก $k = 2$, $\frac{\partial g_1}{\partial \omega_i} = 1$, $\frac{\partial g_2}{\partial \omega_i} = E(R_i)$, $\frac{\partial^2 L}{\partial \omega_i \partial \omega_j} = \sigma_{ij}$ สำหรับทุก $i = 1,2, \ldots, n$ และ $j = 1,2, \ldots, n$

การพิสูจน์ (1) และ (3) ของทฤษฎีบท 1 จะพิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 2.1

ดังนั้น เราจึงพิสูจน์เพียงความเป็นอิสระเชิงเส้นของ Jacobian vector

เนื่องจาก $g_1(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = E(R_1)\omega_1 + E(R_2)\omega_2 + \cdots + E(R_n)\omega_n$,

$g_2(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$ และ $k = 2$ เราจะได้ว่ามี Jacobian vector 2 เวกเตอร์ คือ

$$J_1(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}, \frac{\partial g_1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial g_1}{\partial x_n}\right) = (E(R_1), E(R_2), \ldots, E(R_n))$$

$$J_2(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1}, \frac{\partial g_2}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial g_2}{\partial x_n}\right) = (1,1, \ldots, 1)$$

สมมติมี $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ที่ทำให้

$$a(E(R_1), E(R_2), \ldots, E(R_n)) + b(1,1, \ldots, 1) = \bar{0}$$

สำหรับบาง $i \neq j$ ซึ่ง $E(R_i) \neq E(R_j)$ จะได้ว่า

$$a(E(R_i)) + b = 0$$

$$a(E(R_j)) + b = 0$$

จะเห็นว่า $E(R_i) = E(R_j)$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $a = 0$ และ $b = 0$ เท่านั้น

จึงสรุปได้ว่า $\{J_1(c_1, c_2, \ldots, c_n), J_2(c_1, c_2, \ldots, c_n)\}$ อิสระเชิงเส้น

จากทฤษฎีบทที่ 1 สรุปได้ว่า $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ เป็นพอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำสุด ณ ระดับผลตอบแทน r_0

$\square$

ประวัติผู้เขียน

นายคุณานนต์ ทิศรอด
เลขประจำตัวนิสิต 5833505223
สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย