บรรณานุกรม

ภาษาไทย

หนังสือ

ประคอง กรรณสูต. สถิติเพื่อการวิจัยทางพฤติกรรมศาสตร์. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์บรรณกิจ, 2525.

พนัส หันนาคินทร์. วิชาชุดครูประกาศนียบัตรมัธยมของคุรุสภา คณิตศาสตร์ตอน 3 วิธีสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์คุรุสภา, 2514.

ยุพิน พิพิธกุล. การเรียนการสอนคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร : บพิธการพิมพ์, 2523.

บทความ

คม ทองพลู. "จัดชั้นเรียนและจัดครูเข้าสอนอย่างไรดี." ประชากรศึกษา 4(34) (มกราคม 2527) : 20-27.

จันทร์ฉาย เตมิยาคาร. "นักเรียนเรียนด้วยตนเองจะช่วยแบ่งเบาภาระผู้สอนจริงหรือ." ศึกษาศาสตร์สาร 11(3-4) (เมษายน-กันยายน 2526) : 16-22.

ทวีป อภิสิทธิ์. "สื่อการเรียนการสอนและสื่อการเรียนการสอนผสม." คุรุปริทัศน์ 9(4) (พฤษภาคม 2527) : 70-71.

วิจิตรา อุปการนิติเกษตร. "การตัดสินใจ." วารสารคณิตศาสตร์ 28(308-309) (พฤษภาคม-มิถุนายน 2527) : 12.

สนิท ไกรสินธุ์. "การสอนเด็กโดยการแบ่งกลุ่มตามความสามารถ." วิทยาสาร 24(26) (ธันวาคม 2516) : 32-33.

อลงกร จันทรารมย์. "การสอนที่มีประสิทธิภาพ." สารพัฒนาหลักสูตร 17(กุมภาพันธ์ 2526) : 35-39.

ผกา สัตยธรรม. "วิธีสอนโดยกระบวนการกลุ่มสัมพันธ์หรือวิธีสอนด้วยการแบ่งกลุ่ม". มิตรครู 21(10)(พฤษภาคม 2522) : 8-14.

สมบูรณ์ ศาลยาชีวิน. "การสอนให้เหมาะสมตามลักษณะของแต่ละบุคคล." ศึกษาศาสตร์สาร 8(2) (กรกฎาคม-กันยายน 2522) : 7-22.

เอกสารอื่น ๆ

เขือน เสือคำ. "การศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพการเรียนภาษาไทย ชั้นประถมปีที่ 4 ระหว่างวิธีแนะนำให้นักเรียนเรียนด้วยตนเองตามลำพัง วิธีแนะนำให้นักเรียนเรียนด้วยตนเองเป็นกลุ่มย่อย." ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2521.

พิชัย งามยิ่งยวด. "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์การเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนเก่ง ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ระหว่างกลุ่มที่เรียนเสริมจากครูกับกลุ่มที่เรียนด้วยตนเอง." วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2529.

พนิดา พิสิฐอมรชัย. "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มอ่อน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ระหว่างกลุ่มที่เรียนเสริมจากครูกับกลุ่มที่เรียนเสริมจากเพื่อนนักเรียน." วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2528.

พัชรี เอี่ยมทัศน์. "การเปรียบเทียบผลการสอนวิชาคณิตศาสตร์ โดยวิธีกระบวนการกลุ่มสัมพันธ์และวิธีสอนแบบธรรมดาในชั้นประถมปีที่ 5." วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาประถมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2519.

ไพศาล ประทุมชาติ. "การศึกษาเปรียบเทียบผลการสอนคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 (ม.1) เรื่อง การนำเสนอข้อมูลโดยใช้บทเรียนโมดูลกับการสอนปกติ." ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2522.

เพ็ญสุข ภู่ตระกูล. "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการอ่านเพื่อความเข้าใจภาษาอังกฤษของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ห้า ที่เรียนโดยให้เพื่อนช่วยสอนกับที่เรียนด้วยตนเอง." วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษาบัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2528.

วรรณา ดวงชัยปิติ. "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ โดยวิธีเรียนเป็นคณะกับนักเรียนเป็นชั้นปกติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2." วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2520.

สมคิด วงศ์นาถ. "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ โดยใช้ชุดการสอนตามเอกัตภาพกับการสอนแบบบรรยายระดับประกาศนียบัตรวิชาการศึกษาชั้นสูง." วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2522.

เสียง ชูสกุล. "การทดลองเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความสนใจในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์จากการเรียนเป็นกลุ่ม เป็นรายบุคคลโดยใช้บทเรียนโมดูลและการเรียนตามแผนการสอน สสวท. ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 2." ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2525.

<u>ภาษาต่างประเทศ</u>

<u>หนังสือ</u>

Beggs, Donald L. and Lewis, Ernest L. <u>Measurement and Evaluation in the School</u>. Boston : Houghton Miffin Co., 1975.

Calfee, Robert and Brown, Roger. <u>Classroom Management : Grouping Students of Instruction</u>. 1 st ed. Print in the United States of America., 1979

Epstein, Charlottle. Classroom Management and Teaching. Virginia : A Prentice-Hall Co., 1979.

Mehrens, William A. and Lehmann, Irvin J. Standardized Test in Education. 2 nd ed. New York : Holt, Rinehart and Winston, 1975.

Mouly, George J. Psychology for Effective Teaching. 3 rd nd. Printed in the United States of America : Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1973.

Ostle, Bernard. Statistics in Research : Basic Concepts and Techniques for Research Workers. 2 nd ed. Calcutta : The Iowa State University PreSS, 1966.

Harrisberger, Lee. "Self-Pace Individually Prescribed Instruction" PSI Personalized System of Instruction, Philippines : W.A. Benjamin, Inc., 1974.

บทความ

Arlin, Marshall and Ian, Westbury. "The Leveling Effect of Teaching Pacing on Science Content Mastery." Journal of Research in Science Teaching 13 (May 1976) : 213.

James, Leneous Stones. "The Effect of Individualized Learning Activity Package in Mathematics on the Academics Achievement on Seven and Eight Grade Student in the Demopolis City School". Dissertation Abstracts International 36(2) (August 1975): 690-A.

Pate, Johnny Mack. "A Comparative Analysis of the Effects of Individually Guided Education on the Teaching of Elementary Mathematics." Dissertation Abstracts International (January 1977) : 4118-A-4119-A.

Slavin, Robert E. and Karweit, Nancy L. "Effects of Whole Class, Ability Grouped and Individualized Instruction on Mathematics Achievement." American Educational Research Journal 22(Fall 1985) : 351-367.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิ

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิที่ตรวจสอบชุดการเรียนการสอนรายบุคคล

1. รองศาสตราจารย์ ดร.ลาวัลย์ พลกล้า
   รองศาสตราจารย์ประจำคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

2. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรพรรณ ตันบรรจง
   ผู้ช่วยศาสตราจารย์ประจำภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

3. นายสุรัตน์ อังกุลวิโรฒ
   หัวหน้าหมวดวิชาคณิตศาสตร์ โรงเรียนวัดเพลง "ไสภณศิริราษฎร์" จังหวัดราชบุรี

รายนามผู้ทรงคุณวุฒิที่ตรวจสอบแบบทดสอบความรู้พื้นฐาน และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์การเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "ฟังก์ชัน"

1. รองศาสตราจารย์พิชากร แปลงประสพโชค
   รองศาสตราจารย์ประจำคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางเขน

2. รองศาสตราจารย์ยงยุทธ ธนูกฤติ
   รองศาสตราจารย์ประจำคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางเขน

3. อาจารย์ธนูชัย ภูอุดม
   อาจารย์ประจำคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ บางเขน

ภาคผนวก ข

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

แบบทดสอบความรู้พื้นฐานการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "ฟังก์ชัน"

<u>คำชี้แจง</u>

1. แบบทดสอบฉบับนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อต้องการวัดความรู้พื้นฐานในการเรียน เรื่อง "ฟังก์ชัน"
2. แบบทดสอบฉบับนี้มีจำนวน 30 ข้อ กรุณาตอบให้ครบทุกข้อ
3. วิธีตอบแบบทดสอบฉบับนี้ ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ให้ตรงกับอักษร ก ข ค หรือ ง ซึ่งตรงกับตัวเลือกที่นักเรียนเลือกตอบในกระดาษคำตอบ

<u>ตัวอย่าง</u>

(o) ถ้า $x + 1 = 2$ แล้ว x มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 0

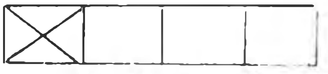
ข. 1

ค. 2

ง. 3

<u>กระดาษคำตอบ</u>

(o) ก ข ค ง



เมื่อนักเรียนคิดว่าข้อ ก ถูก

(o) ก ข ค ง

เมื่อนักเรียนต้องการจะเปลี่ยนคำตอบจาก ก เป็น ข

แบบทดสอบความรู้พื้นฐานการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง

ฟังก์ชัน

จุดประสงค์ที่ 1 หาสับเซตได้อย่างถูกต้องเมื่อกำหนดเซตให้

1. ข้อใดถูกต้อง

ก. $\{\{(1,2)\}\} \subset \{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)\}$

ข. $\{\emptyset\} \subset \{(1,2),(2,4)\}$

ค. $\{(1,2),\emptyset\} \subset \{(1,2),(2,4)\}$

ง. $\{(4,8)\} \subset \{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)\}$

2. $\{(x,y) \in R \times R / x = -y$ เมื่อ $x > 0\}$ เป็นสับเซตของความสัมพันธ์ข้อใด

ก. $\{(x,y) \in R \times R / x = y\}$

ข. $\{(x,y) \in R \times R / x = |y|\}$

ค. $\{(x,y) \in R \times R / y = |x|\}$

ง. $\{(x,y) \in R \times R / y = x^2\}$

3. ให้ $r = \{(x,y) \in R \times R / x = y^2\}$

ความสัมพันธ์ในข้อใดเป็นสับเซตของความสัมพันธ์ r

ก. $\{(x,y) \in R \times R / x = \sqrt{y}\}$

ข. $\{(x,y) \in R \times R / y = -x^2\}$

ค. $\{(x,y) \in R \times R / y = \sqrt{x}\}$

ง. $\{(x,y) \in R \times R / y = x^2\}$

จุดประสงค์ที่ 2 หาอินเตอร์เซกชันได้อย่างถูกต้องเมื่อกำหนดเซตให้

4. ให้ $r_1 = \{(0,2),(3,5),(4,1),(5,0)\}$

และ $r_2 = \{(0,1),(1,2),(3,4),(4,5)\}$

ข้อใดถูกต้อง

ก. $D_{r_1} \cap D_{r_2} = \{0,1,3,4,5\}$

ข. $D_{r_1} \cap D_{r_2} \cap \{0,1,2\} = \{0,1\}$

ค. $D_{r_1} \cap D_{r_2} \cap \{0,1,2,3\} = \{0,1,2,3\}$

ง. $D_{r_1} \cap D_{r_2} \cap \{0,1,2,3,4\} = \{0,3,4\}$

5. ให้ R^+ เป็นเซตของจำนวนจริงบวก

และ $P = \{x/x \in R\}$; $Q = \{x/x \in R^+\}$

ข้อใดถูกต้อง

ก. $P \cap Q = \emptyset$

ข. $P \cap Q = \{x/x \in R\}$

ค. $P \cap Q = \{x/x \in R^-\}$

ง. $P \cap Q = \{x/x \in R^+\}$

6. ให้ $r_1 = \{(x,y) \in R \times R \;/\; y = \frac{3}{x-1}\}$

และ $r_2 = \{(x,y) \in R \times R \;/\; y = \frac{1}{3}x\}$

ข้อใดถูกต้อง

ก. $D_{r_1} \cap D_{r_2} = \{x / x \in R\}$

ข. $D_{r_1} \cap D_{r_2} = \{x / x \in R$ และ $x \neq 1\}$

ค. $D_{r_1} \cap D_{r_2} = \{x / x \in R$ และ $x \neq -1\}$

ง. $D_{r_1} \cap D_{r_2} = \{x / x \in R$ และ $x \neq 1$ และ $x \neq -1\}$

<u>จุดประสงค์ที่ 3</u> หาค่าสัมบูรณ์ได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดจำนวนจริงให้

7. ข้อใดถูกต้อง

ก. $|-3-1| = 4$

ข. $|3-4| = -1$

ค. $|2-3| = 5$

ง. $|x-y| = x-y$

8. ให้ $|x| > 2$ เมื่อ $x > 0$ ค่าของ x ตรงกับข้อใด

ก. $x < 2$

ข. $x \leq -2$

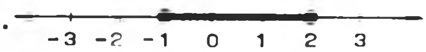
ค. $x > 2$

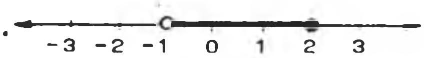
ง. $x \geq 2$

<u>จุดประสงค์ที่ 4</u> เขียนช่วงบนเส้นจำนวนได้อย่างถูกต้องเมื่อกำหนดจำนวนใด ๆ ให้

9. $\{x / -1 \leq x < 2\}$ ตรงกับข้อใด

ก. 

ข. 

ค. 

ง. 

10. ให้ $A = \{0,1,2,3,4\}$; $B = \{0,1,2\ldots,10\}$

เขียน $r = \{(x,y) \in A \times B / y = x^2\}$ เป็นแบบแจกแจงสมาชิกได้ดังข้อใด

ก. $r = \{(0,0),(1,1),(4,2),(9,3)\}$

ข. $r = \{(0,0),(1,1),(2,4),(3,9)\}$

ค. $r = \{(0,1),(1,2),(2,5),(3,10)\}$

ง. $r = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

11. ให้ $A = \{2,3,4\}$; $B = \{5,6,8,9\}$

และ r คือความสัมพันธ์ "หารลงตัว" จาก A ไป B เขียน r เป็นแบบแจกแจงสมาชิกได้ดังข้อใด

ก. $r = \{(2,6),(3,6),(4,9)\}$

ข. $r = \{(2,6),(3,6),(4,8)\}$

ค. $r = \{(2,6),(3,5),(3,9),(4,8)\}$

ง. $r = \{(2,6),(2,8),(3,6),(3,9),(4,8)\}$

<u>จุดประสงค์ที่ 6</u> เขียนความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ให้

12. ให้ $A = \{0,1,2,3,...,10\}$

และ $r = \{(0,0),(1,1),(2,4),(3,9)\}$

ความสัมพันธ์ r ตรงกับข้อใด

ก. $\{(x,y) \in A \times A \ / \ x = y^2\}$

ข. $\{(x,y) \in A \times A \ / \ y = x^2\}$

ค. $\{(x,y) \in A \times A \ / \ y = x^2-1\}$

ง. $\{(x,y) \in A \times A \ / \ y = 2x-1\}$

<u>จุดประสงค์ที่ 7</u> บอกโดเมนของความสัมพันธ์ได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ให้

13. ให้ $A = \{3,5,6\}$; $B = \{0,1,3,5,7\}$

และ $r = \{(x,y) \in A \times B \ / \ x-y = 2\}$

โดเมนของ r ตรงกับข้อใด

ก. $\{3\}$

ข. $\{5\}$

ค. $\{3,5\}$

ง. $\{3,5,6\}$

14. ให้ $r = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = \frac{3}{x-1}\}$

โดเมนของ r ตรงกับข้อใด

ก. $\{x \ / \ x \neq 0\}$

ข. $\{x \ / \ x \neq 1\}$

ค. $\{x \ / \ x < 1\}$

ง. $\{x \ / \ x > 1\}$

15. ให้ $r = \{(x,y) \in R \times R \ / \ x^2+y^2 \leq 25\}$

โดเมนของ r ตรงกับข้อใด

ก. $\{x \ / \ x \leq 5\}$

ข. $\{x \ / \ x \geq -5\}$

ค. $\{x \ / \ -5 \leq x \leq 5\}$

ง. $\{x \ / \ 0 \leq x \leq 5\}$

<u>จุดประสงค์ที่ 8</u> บอกเรนจ์ของความสัมพันธ์ได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ให้

16. ให้ $A = \{0,1,2,3,4,5\}$

และ $r = \{(x,y) \in A \times A \ / \ y = x+1\}$

เรนจ์ของ r ตรงกับข้อใด

ก. $\{1,2,3,4,5\}$

ข. $\{1,2,3,4,5,6\}$

ค. $\{0,1,2,3,4,5\}$

ง. $\{0,1,2,3,4,5,6\}$

17. ให้ $A = \{y \ / -5 \leq y \leq 5\}$ ความสัมพันธ์ที่มีเรนจ์เท่ากับ r ตรงกับข้อใด

ก. $\{(x,y) \in R \times R \ / \ xy = 25\}$

ข. $\{(x,y) \in R \times R \ / \ y = x^2+25\}$

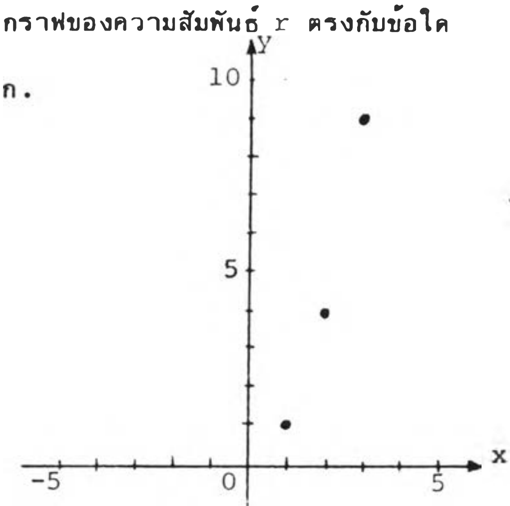
ค. $\{(x,y) \in R \times R \ / \ x^2+y^2 = 25\}$

ง. $\{(x,y) \in R \times R \ / \ y = |5|\}$

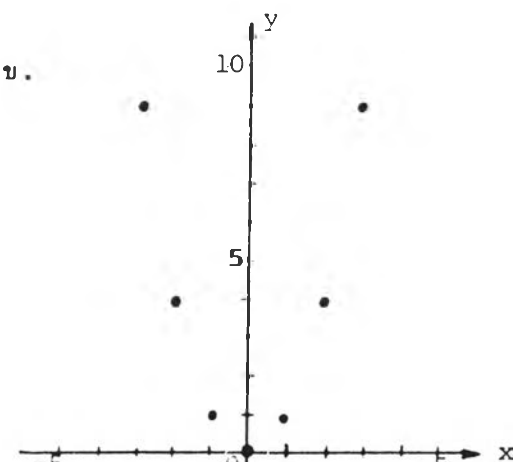
<u>จุดประสงค์ที่ 9</u> เขียนกราฟของความสัมพันธ์ได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ให้

18. ให้ $A = \{0,1,2,3,\ldots,10\}$
และ $r = \{(x,y) \in A \times A \;/\; y = x^2\}$
กราฟของความสัมพันธ์ r ตรงกับข้อใด

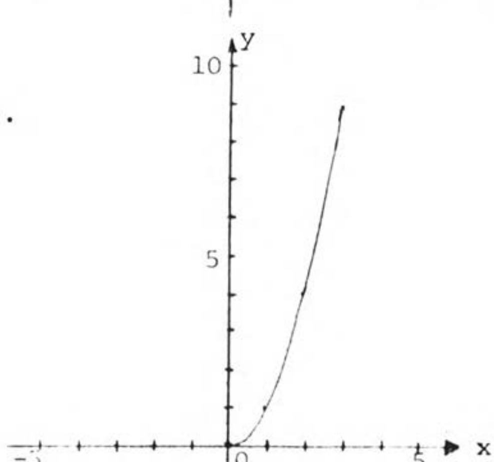
ก.



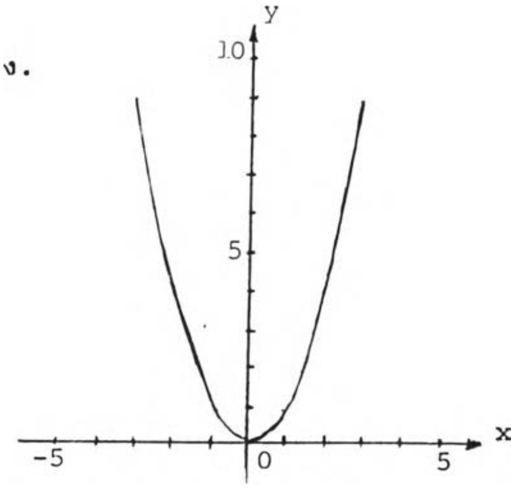
ข.



ค.

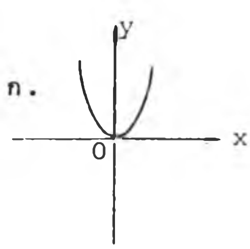


ง.

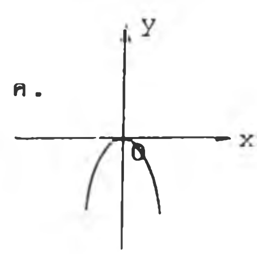


19. ให้ $r = \{(x,y) \in R \times R \;/\; y^2 = x\}$
กราฟของความสัมพันธ์ r ตรงกับข้อใด

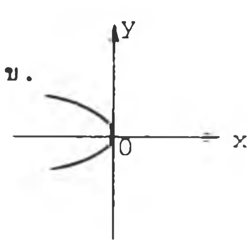
ก.



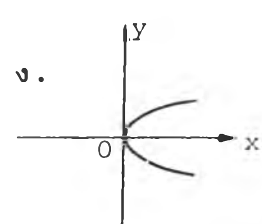
ค.



ข.

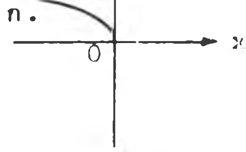


ง.

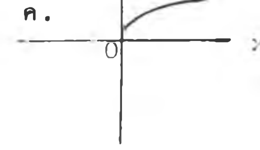


20. ให้ $r = \{(x,y) \in R \times R \;/\; y = \sqrt{x}\}$
กราฟของความสัมพันธ์ r ตรงกับข้อใด

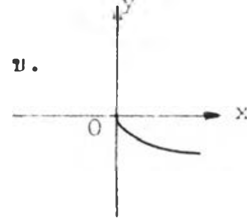
ก.



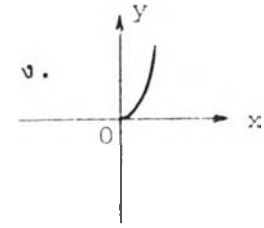
ค.

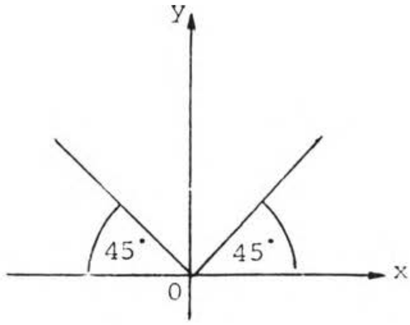


ข.



ง.



21. 

กราฟข้างต้นตรงกับความสัมพันธ์ในข้อใด

ก. $\{(x,y) \in R \times R \;/\; y = |x|\}$

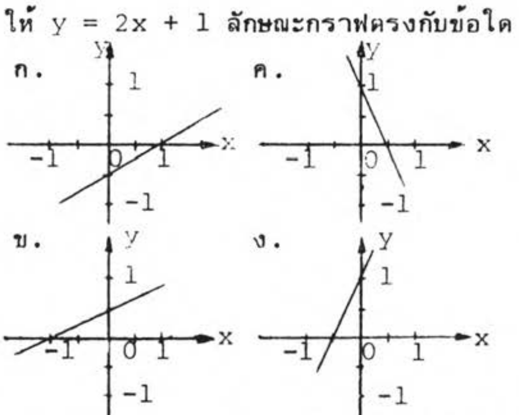
ข. $\{(x,y) \in R \times R \;/\; y = -x\}$

ค. $\{(x,y) \in R \times R \;/\; y = x\}$

ง. $\{(x,y) \in R \times R \;/\; y = x^2\}$

---

22. ให้ $y = 2x + 1$ ลักษณะกราฟตรงกับข้อใด



จุดประสงค์ที่ 10 หาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ให้

---

23. อินเวอร์สของความสัมพันธ์ $\{(1,a),(2,b),(3,C)\}$ ตรงกับข้อใด

ก. $\{(1,a),(2,b),(3,c)\}$

ข. $\{(a,1),(b,2),(c,3)\}$

ค. $\{(1,-a),(2,-b),(3,-c)\}$

ง. $\{(-1,-a),(-2,-b),(-3,-c)\}$

---

24. ให้ $A = \{1,2,3,\ldots,10\}$

และ $r = \{(x,y) \in A \times A \;/\; y = 2x-1\}$

อินเวอร์สของ r ตรงกับข้อใด

ก. $\{(1,1),(2,4),(3,6),(4,8),(5,10)\}$

ข. $\{(1,1),(3,2),(5,3),(7,4),(9,5)\}$

ค. $\{(1,1),(2,3),(3,5),(4,7),(5,9)\}$

ง. $\{(1,1),(4,2),(6,3),(8,4),(10,5)\}$

---

25. ให้ $r = \{(x,y) \in R \times R \;/\; y = \sqrt{x}\}$

อินเวอร์สของ r ตรงกับข้อใด

ก. $\{(x,y) \in R \times R \;/\; y^2 = x\}$

ข. $\{(x,y) \in R \times R \;/\; y = -\sqrt{x}\}$

ค. $\{(x,y) \in R \times R \;/\; y = x^2 \;;\; x \geq 0\}$

ง. $\{(x,y) \in R \times R \;/\; y = x \;;\; x \geq 0\}$

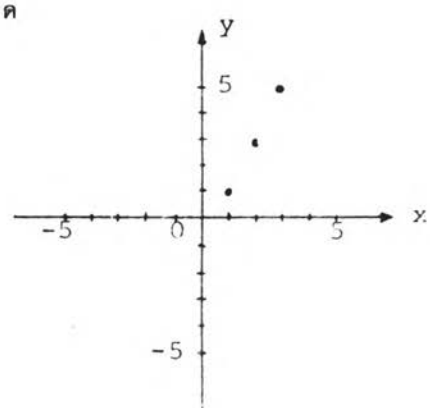
จุดประสงค์ที่ 11 เขียนกราฟอินเวอร์สของความสัมพันธ์ได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ให้

---

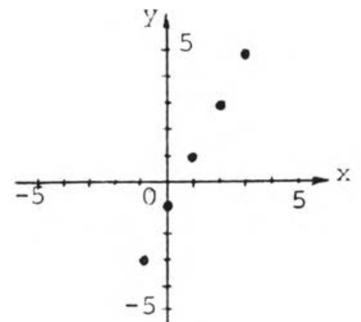
26. ให้ $A = \{1,2,3,4,5\}$

และ $r = \{(x,y) \in A \times A \;/\; y = 2x-1\}$

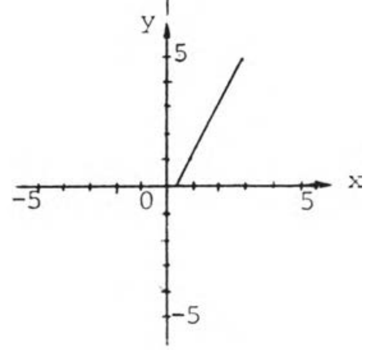
กราฟอินเวอร์สของความสัมพันธ์ r ตรงกับข้อใด

ก. 

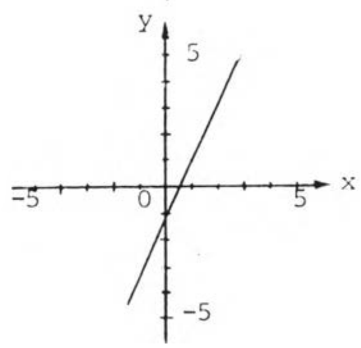
ข.



ค.



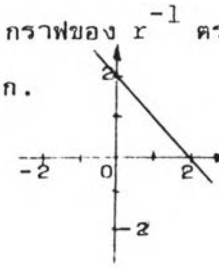
ง.



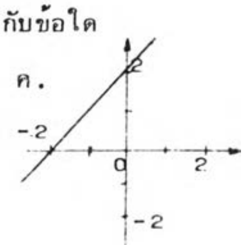
27. ให้ $r = \{(x,y) \in R\times R \ / \ y = x+2\}$

กราฟของ r^{-1} ตรงกับข้อใด

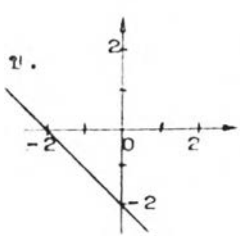
ก.



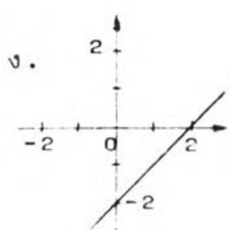
ค.



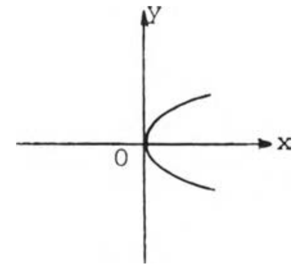
ข.



ง.



28.



ความสัมพันธ์ที่มีกราฟดังข้างต้นนี้ อินเวอร์ส

ของความสัมพันธ์ตรงกับข้อใด

ก. $\{(x,y) \in R\times R \ / \ y = x^2\}$

ข. $\{(x,y) \in R\times R \ / \ y = \sqrt{x}\}$

ค. $\{(x,y) \in R\times R \ / \ x = y^2\}$

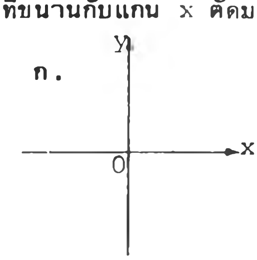
ง. $\{(x,y) \in R\times R \ / \ y = -\sqrt{x}\}$

<u>จุดประสงค์ที่ 12</u> บอกได้ว่าเส้นตรงที่ขนานแกน x หรือ แกน y ตัดกราฟของความสัมพันธ์ 1 จุดหรือมากกว่า ได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ให้

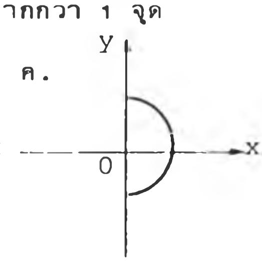
29. ความสัมพันธ์ในข้อใด มีเส้นตรงอย่างน้อย 1 เส้น

ที่ขนานกับแกน x ตัดมากกว่า 1 จุด

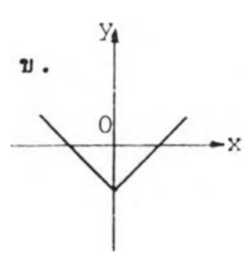
ก.



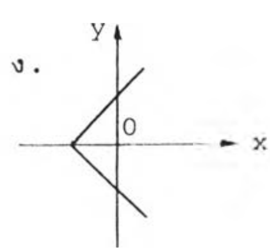
ค.



ข.



ง.



30. ความสัมพันธ์ในข้อใดมีเส้นตรงอย่างน้อย 1 เส้นที่ขนานกับแกน y ตัดมากกว่า 1 จุด

ก. $\{(x,y) \in R \times R \ / \ y = 3x + 1\}$

ข. $\{(x,y) \in R \times R \ / \ y^2 = x\}$

ค. $\{(x,y) \in R \times R \ / \ y = \sqrt{x}\}$

ง. $\{(x,y) \in R \times R \ / \ y = |x| + 1\}$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

บันทึกการสอน

คาบที่ 1

<u>หัวข้อเรื่อง</u> ความหมายของฟังก์ชัน

<u>จุดประสงค์การเรียนรู้</u>

เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

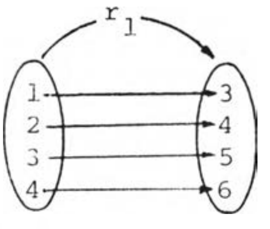
1. บอกนิยามของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
2. บอกได้ว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ข้อใดเป็นฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
3. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ถูกต้อง 80%
4. ทำแบบฝึกหัดได้ถูกต้อง 80%

<u>เนื้อหา</u>

<u>นิยาม</u>	ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ซึ่งในสองคู่อันดับใด ๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องไม่ต่างกัน
หรือ	
	ฟังก์ชัน f คือ ความสัมพันธ์ซึ่งถ้ามี $(x,y) \in f$ และ $(x,z) \in f$ แล้ว $y = z$

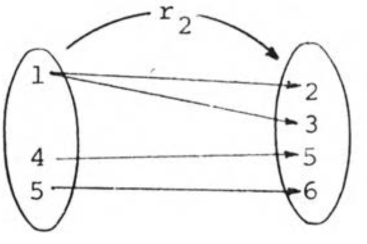
<u>ความสัมพันธ์ที่เขียนแบบแจกแจงสมาชิก</u>

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> $r_1 = \{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)\}$



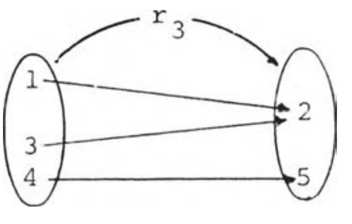
r_1 เป็นฟังก์ชันเพราะไม่มีคู่อันดับใดที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันเลย

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> $r_2 = \{(1,2),(1,3),(4,5),(5,6)\}$



r_2 ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แต่สมาชิกตัวหลังต่างกัน ตัวอย่างของคู่อันดับนี้ได้แก่ (1,2), (1,3)

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> $r_3 = \{(1,2),(3,2),(4,5)\}$



r_3 เป็นฟังก์ชัน เพราะไม่มีคู่อันดับใดที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันเลย

<u>ความสัมพันธ์ที่เขียนแบบบอกเงื่อนไข</u>

การพิจารณาว่าความสัมพันธ์ r ซึ่งเขียนแบบบอกเงื่อนไข เป็นฟังก์ชันหรือไม่ อาจใช้วิธีการดังนี้

ก. ให้ $(x,y) \in r$ และ $(x,z) \in r$

แล้วเขียน y ในรูปของ x และเขียน z ในรูปของ x โดยใช้เงื่อนไขของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้

ถ้า $y = z$ แสดงว่า r เป็นฟังก์ชัน

$y \neq z$ แสดงว่า r ไม่เป็นฟังก์ชัน

ข. ถ้าสามารถยกตัวอย่างคู่อันดับสองคู่อันดับในความสัมพันธ์ที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แต่สมาชิกตัวหลังต่างกันจะสรุปได้ทันทีว่า <u>ความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชัน</u>

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จงแสดงว่า $f = \{(x,y) \ / \ y = x^2 + 1\}$ เป็นฟังก์ชัน

<u>วิธีทำ</u> ให้ $(x,y) \in f$ และ $(x,z) \in f$

จะได้ $y = x^2 + 1$ และ $z = x^2 + 1$

สรุปได้ว่า $y = z$

แสดงได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> $g = \{(x,y) \ / \ y^2 = x\}$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากมีคู่อันดับ $(1,-1) \in g$ และ $(1,1) \in g$

g ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งสองเหมือนกัน

แต่สมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งสองนี้ต่างกัน

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> จงแสดงว่า $f = \{(x,y) \ / \ y = x + 1\}$ เป็นฟังก์ชัน

<u>วิธีทำ</u> ให้ $(x,y) \in f$ และ $(x,z) \in f$

จะได้ $y = x + 1$ และ $z = x + 1$

สรุปได้ว่า $y = z$

แสดงได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> $f = \{(x,y) \ / \ x = |y|\}$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากมีคู่อันดับ $(1,-1) \in f$ และ $(1,1) \in f$

g ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งสองเหมือนกัน

แต่สมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งสองนี้ต่างกัน

<u>โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง</u>

จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ในข้อใดเป็นฟังก์ชัน

1. $r_1 = \{(2,5),(5,6),(6,7),(7,3)\}$
2. $r_2 = \{(2,2),(2,3),(3,2),(3,5)\}$
3. $r_3 = \{(x,y) \ / \ y = x + 1\}$
4. $r_4 = \left\{(x,y) \ / \ y = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}\right\}$

<u>สื่อการเรียนการสอน</u>   แผนภาพสรุปนิยามของฟังก์ชัน

<u>กิจกรรมการเรียนการสอน</u>

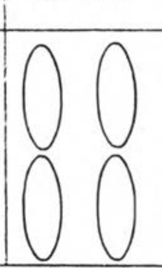
<u>ขั้นนำ</u>

1. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์หลาย ๆ ตัวอย่างแล้วให้นักเรียนสังเกตว่าความสัมพันธ์ใดที่สมาชิกในเซตแรกมีความสัมพันธ์กับสมาชิกในเซตที่สองเพียงสมาชิกเดียว

2. ครูให้นักเรียนสังเกตและบอกว่าความสัมพันธ์ที่มีสมาชิกในเซตแรกมีความสัมพันธ์กับสมาชิกในเซตที่สองเพียงสมาชิกเดียวเรียกความสัมพันธ์นั้นว่า "ฟังก์ชัน"

<u>ขั้นสอน</u>

1. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ 3 ลักษณะ คือ สมาชิกตัวหน้าต่างกัน สมาชิกตัวหน้าเหมือนกันบางตัวและทุกตัว แล้วให้พิจารณาความสัมพันธ์ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

ความสัมพันธ์	แผนภาพ	ฟังก์ชัน	
		เป็น	ไม่เป็น
$r_1 = \{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)\}$		———	———
$r_2 = \{(1,2),(3,2),(4,5)\}$		———	———
ฯลฯ			

2. ครูให้นักเรียนสรุปนิยามของฟังก์ชัน

> <u>นิยาม</u> ฟังก์ชันคือ ความสัมพันธ์ซึ่งในสองคู่อันดับใด ๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องไม่ต่างกัน
>
> หรือ
>
> ฟังก์ชัน f คือความสัมพันธ์ ซึ่งถ้ามี $(x,y) \in f$ และ $(x,z) \in f$ แล้ว $y = z$

3. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ที่เขียนแบบบอกเงื่อนไขให้นักเรียนพิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

กรณีที่ 1 ความสัมพันธ์ที่สามารถเขียนจากแบบเงื่อนไขเป็นแบบแจกแจงสมาชิกได้ดังตาราง

ความสัมพันธ์		ฟังก์ชัน	
แบบแจงแจกสมาชิก	แบบเงื่อนไข	เป็น	ไม่เป็น
________	$r = \{(x,y) \in A \times B / y = x^2 + 1\}$	—	—
$r = \{(0,0),(1,1),(2,4),(3,9)\}$	________	—	—
ฯลฯ			

เมื่อ $A = \{0,1,2,3,4,5\}$; $B = \{0,1,2,...,10\}$

กรณีที่ 2 ให้พิจารณาดังตัวอย่าง

<u>ตัวอย่าง</u> จงแสดงว่า $f = \{(x,y) / y = x^2 + 1\}$ เป็นฟังก์ชัน

<u>วิธีทำ</u>

ให้ $(x,y) \in f$ และ $(x,z) \in f$

จะได้ $y = x^2 + 1$ และ $z = x^2 + 1$

นั่นคือ $y = z$

แสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน

<u>ตัวอย่าง</u> $g = \{(x,y) / y^2 = x\}$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

<u>วิธีทำ</u>

เนื่องจากมีคู่อันดับ $(1,-1) \in g$ และ $(1,1) \in g$

ซึ่งสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งสองเหมือนกันแต่สมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งสองนี้ต่างกัน ดังนั้น g ไม่เป็นฟังก์ชัน

4. ครูให้นักเรียนสรุปการพิจารณาความสัมพันธ์ r ซึ่งเขียนแบบบอกเงื่อนไข

<u>จากตัวอย่างอาจจะสรุปได้ว่า</u>

การพิจารณาว่าความสัมพันธ์ r ซึ่งเขียนแบบบอกเงื่อนไข เป็นฟังก์ชันหรือไม่มีวิธีการดังนี้

ก) ให้ $(x,y) \in r$ และ $(x,z) \in r$

เขียน y ในรูป x และ z ในรูป x โดยใช้เงื่อนไขของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้

ถ้า $y = z$ แสดงว่า r ________ ฟังก์ชัน
เป็น/ไม่เป็น

ถ้า $y \neq z$ แสดงว่า r ________ ฟังก์ชัน
เป็น/ไม่เป็น

ข) ถ้าสามารถยกตัวอย่างคู่อันดับในความสัมพันธ์ที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแต่สมาชิกตัวหลังต่างกัน จะสรุปได้ว่าความสัมพันธ์ ________ ฟังก์ชัน
เป็น/ไม่เป็น

<u>ขั้นสรุป</u>

1. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปการพิจารณาความสัมพันธ์ว่าเป็นฟังก์ชันโดยการถามตอบ

<u>การวัดและประเมินผล</u>

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน	1. นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80%
2. ดูจากการทำใจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง 4 ข้อ	2. ทำใจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ประมาณ 80%
3. ดูจากการทำแบบฝึกหัด 2.1 หน้า 44 ข้อ 1	3. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ประมาณ 90%

<u>แบบฝึกหัดเพิ่มเติม</u>

1. ความสัมพันธ์ในข้อใดเป็นฟังก์ชัน

   $r_1 = \{(1,a),(2,a),(3,a)\}$

   $r_2 = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$

   $r_3 = \{(1,a),(1,b),(3,c)\}$

   $r_4 = \{(0,1),(0,4),(1,1),(1,2),(2,3)\}$

2. จงแสดงว่า $f = \{(x,y) \;/\; y = x + 1\}$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

3. $h = \{(x,y) \;/\; x = |y|\}$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

คาบที่ 2

<u>หัวข้อเรื่อง</u> โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

<u>จุดประสงค์การเรียนรู้</u>

เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

1. เขียนโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
2. บอกนิยามของโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
3. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้อย่างถูกต้อง 80%
4. ทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง 80%

<u>เนื้อหา</u>

<u>นิยาม</u> ถ้า f เป็นฟังก์ชัน

D_f = โดเมนของ f = เซตของสมาชิกตัวแรกของแต่ละคู่อันดับใน f

R_f = เรนจ์ของ f = เซตของสมาชิกตัวหลังของแต่ละคู่อันดับใน f

หรือ $D_f = \{x \ / \ (x,y) \in f\}$

$R_f = \{y \ / \ (x,y) \in f\}$

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ $f = \{(x,y) \ / \ y = x^2\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

<u>วิธีทำ</u>

$D_f = \{x \ / \ x \in R\}$

$R_f = \{y \ / \ y \geq 0\}$

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ $f = \{(x,y) \ / \ y = x + 1\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

<u>วิธีทำ</u>

$D_f = \{x \ / \ x \in R\}$

$R_f = \{y \ / \ y \in R\}$

<u>โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง</u>

จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$

2. $g = \{(x,y) \ / \ y = |x|\}$

<u>สื่อการเรียนการสอน</u> แผนภูมิสรุปนิยามของโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

<u>กิจกรรมการเรียนการสอน</u>

<u>ขั้นนำ</u>

1. ครูทบทวนการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์โดยการถามตอบ

เช่น $r_1 = \{(a,1),(b,1),(c,1)\}$

$r_2 = \{(x,y) \ / \ y^2 = x\}$

<u>ขั้นสอน</u>

1. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ให้นักเรียนหาโดเมนและเรนจ์

2. ครูให้นักเรียนบอกว่าความสัมพันธ์ที่ยกตัวอย่างใดเป็นฟังก์ชัน

3. ครูให้นักเรียนสังเกตว่าโดเมนของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันเรียกว่า โดเมนของฟังก์ชัน และเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันเรียกว่าเรนจ์ของฟังก์ชัน

4. ครูให้นักเรียนสรุปนิยามของโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

<u>นิยาม</u> ถ้า f เป็นฟังก์ชัน

D_f = โดเมนของ f = เซตของสมาชิกตัวแรกของแต่ละคู่อันดับใน f

R_f = เรนจ์ของ f = เซตของสมาชิกตัวหลังของแต่ละคู่อันดับใน f

หรือ $D_f = \{x/(x,y) \in f\}$; $R_f = \{y \ / \ (x,y) \in f\}$

5. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันให้นักเรียนหาโดเมนและเรนจ์

เช่น $f = \{(x,y) \ / \ y = x^2\}$

$g = \{(x,y) \ / \ y = x + 1\}$

$h = \{(x,y) \in A \times A \ / \ y = 2^x\}$ เมื่อ $A = \{0,1,2,3,4,5\}$

<u>ขั้นสรุป</u>

1. ครูให้นักเรียนสรุปนิยามโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันโดยการถามตอบ

<u>การวัดและประเมินผล</u>

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน	1. นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80%
2. ดูจากการทำใจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง 2 ข้อ	2. ทำใจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ประมาณ 80%
3. ดูจากการทำแบบฝึกหัด 2.1 หน้า 46 ข้อ 7 และ 8	3. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ประมาณ 80%

<u>แบบฝึกหัดเพิ่มเติม</u>

จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f = \{(x,y) \ / \ y = \sqrt{3x+2}\}$
2. $g = \{(x,y) \in A \times A \ / \ x+y = 7\}$ เมื่อ $A = \{x \in I^{+} \ / \ x \leqslant 6\}$
3. $h = \{(x,y) \in I \times I \ / \ y = \dfrac{10}{x^2 + 2x + 2}, \ -2 \leqslant x < 4\}$
4. $k = \{(x,y) \ / \ y = \dfrac{1}{x}\}$

คาบที่ 3

<u>หัวข้อเรื่อง</u> การพิจารณาฟังก์ชันจากกราฟ

<u>จุดประสงค์การเรียนรู้</u>

เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

1. เขียนกราฟจากความสัมพันธ์ได้อย่างถูกต้อง
2. บอกค่า y เมื่อกำหนดค่า x มาให้โดยใช้กราฟได้อย่างถูกต้อง
3. บอกจุดที่เส้นขนานที่ลากขนานกับแกน y ตัดกราฟของความสัมพันธ์ได้อย่างถูกต้อง
4. สรุปวิธีการพิจารณาฟังก์ชันจากกราฟได้อย่างถูกต้อง
5. เขียนสับเซตของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
6. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้อย่างถูกต้อง 80%
7. ทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง 80%

<u>เนื้อหา</u>

การพิจารณากราฟว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ มีขั้นตอนดังนี้

ก. ลากเส้นขนานกับแกน y ตัดกราฟของความสัมพันธ์

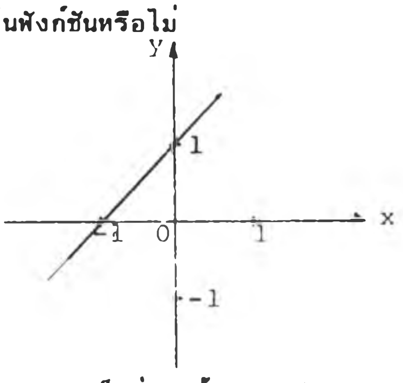
ข. พิจารณาเส้นขนานกับแกน y ตัดกราฟของความสัมพันธ์

ถ้าเส้นขนานใด ๆ ตัดกราฟเพียงแห่งเดียว ความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชัน

ถ้าเส้นขนานใด ๆ ตัดกราฟมากกว่าหนึ่งแห่ง ความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชัน

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงพิจารณาจากกราฟ $r_1 = \{(x,y) \in R \times R \,/\, y = x + 1\}$ ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

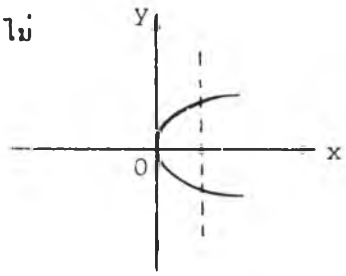
<u>วิธีทำ</u>



จากกราฟจะเห็นว่า เส้นขนานกับแกน y ไม่ว่าเส้นใดจะตัดกราฟของความสัมพันธ์เพียงจุดเดียว ดังนั้น r_1 เป็นฟังก์ชัน

__ตัวอย่างที่ 2__ จงพิจารณาจากกราฟ $r_2 = \{(x,y) \in R \times R \,/\, y^2 = x\}$ ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

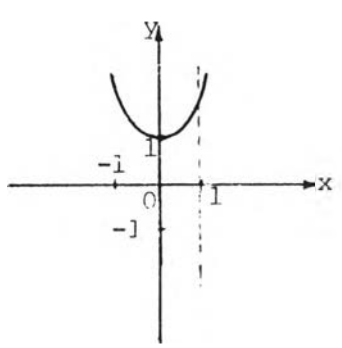
__วิธีทำ__



จากกราฟจะเห็นว่า ถ้าลากเส้นขนานกับแกน y จะมีเส้นขนานแกน y ตัดกราฟ 2 จุด ดังนั้น r_2 ไม่เป็นฟังก์ชัน

__ตัวอย่างที่ 3__ จงพิจารณาจากกราฟ $r_3 = \{(x,y) \in R \times R \,/\, y = x^2 + 1\}$ ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

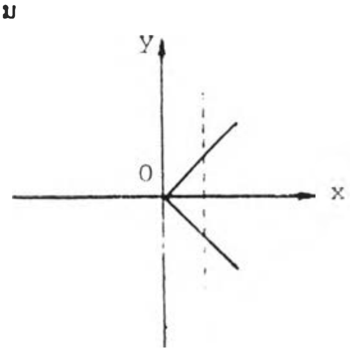
__วิธีทำ__



จากกราฟจะเห็นว่า ถ้าลากเส้นขนานกับแกน y ไม่ว่าเส้นใดจะตัดกราฟของความสัมพันธ์เพียงจุดเดียว ดังนั้น r_3 เป็นฟังก์ชัน

__ตัวอย่างที่ 4__ จงพิจารณา $r_4 = \{(x,y) \in R \times R \,/\, x = |y|\}$ ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

__วิธีทำ__



จากกราฟจะเห็นว่า ถ้าลากเส้นขนานกับแกน y จะมีเส้นขนานแกน y ตัดกราฟ 2 จุด ดังนั้น r_4 ไม่เป็นฟังก์ชัน

<u>การพิจารณาฟังก์ชันจากสับเซตของความสัมพันธ์</u> มีวิธีการคือ

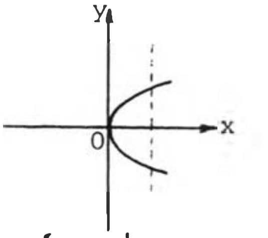
1) พิจารณากราฟของความสัมพันธ์เดิม เมื่อลากเส้นขนานกับแกน y จะตัดกราฟของความสัมพันธ์ 2 จุด แสดงว่าความสัมพันธ์ไม่เป็นฟังก์ชัน

2) หากราฟของสับเซตที่ลากเส้นขนานกับแกน y ตัดกราฟนี้เพียงจุดเดียว จะได้กราฟของสับเซตของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน

3) หาเงื่อนไขของสับเซต

<u>ตัวอย่างที่ 6</u>

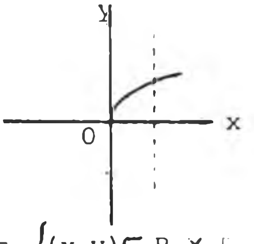
ก) $r_1 = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y^2 = x\}$

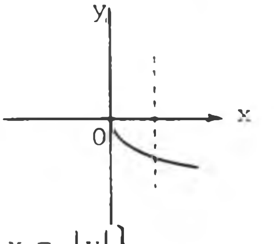


r_1 ไม่เป็นฟังก์ชัน แต่สามารถหาสับเซตของ r_1 ที่เป็นฟังก์ชันได้ เช่น

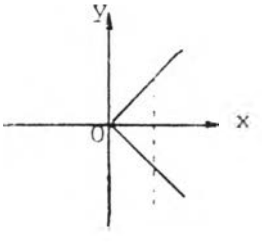
$r_2 = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = \sqrt{x}\}$

$r_3 = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = -\sqrt{x}\}$





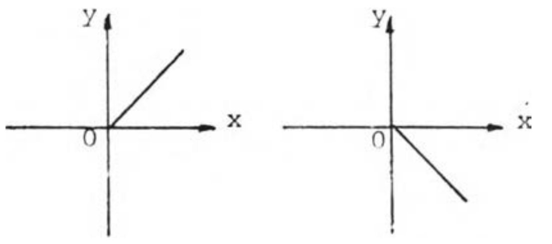
ข) $r_1 = \{(x,y) \in R \times R \ / \ x = |y|\}$



r_1 ไม่เป็นฟังก์ชัน แต่สามารถหาสับเซตของ r_1 ที่เป็นฟังก์ชัน เช่น

$r_2 = \{(x,y) \in R \times R \;/\; x = y$ เมื่อ $x \geqslant 0\}$

$r_3 = \{(x,y) \in R \times R \;/\; x = -y$ เมื่อ $x \geqslant 0\}$



ใจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ และพิจารณาการเป็นฟังก์ชันของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1. $r_1 = \{(x,y) \in R \times R \;/\; y = 2^x\}$

2. $r_2 = \{(x,y) \in R \times R \;/\; y = |x|\}$

3. $r_3 = \{(x,y) \in R \times R \;/\; x = |y|\}$

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

1. ครูอธิบายนิยามฟังก์ชันคือ

 1.1 ความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชัน คือ $(x,y) \in f$ และ $(x,z) \in f$ แล้ว $y = z$ นั่นคือมี x ค่าหนึ่งจะได้ค่า y เพียงค่าเดียว

 1.2 ความสัมพันธ์ไม่เป็นฟังก์ชัน คือ $(x,y) \in f$ และ $(x,z) \in f$ แล้ว $y \neq z$ นั่นคือมี x ค่าหนึ่งจะได้ค่า y มากกว่าหนึ่งค่า

2. ครูอธิบายข้อ 1.1 ว่า x ค่าหนึ่งจะได้ค่า y เพียงค่าเดียวก็คือ ลากเส้นขนานแกน y จะตัดกราฟของความสัมพันธ์จุดเดียว และข้อ 1.2 x ค่าหนึ่งจะได้ค่า y มากกว่าหนึ่งค่าก็คือลากเส้นขนาน แกน y จะตัดกราฟของความสัมพันธ์มากกว่า 1 จุด

3. ครูอธิบายว่าจากข้อ 2 จึงสามารถพิจารณาฟังก์ชันจากกราฟได้

<u>ขั้นสอน</u>

1. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ให้นักเรียนช่วยกันเขียนกราฟ

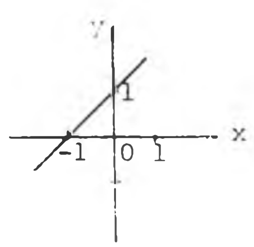
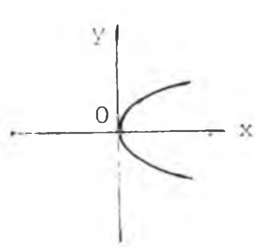
การพิจารณาฟังก์ชันจากกราฟนั้นสิ่งที่สำคัญมากที่จะต้องทำประการแรกก็คือจะต้องสามารถเขียนกราฟของความสัมพันธ์ได้ ซึ่งพอจะสรุปเป็นหลักได้ดังนี้ คือ

1. สมมติค่า x และหาค่า y จากเงื่อนไขของความสัมพันธ์ที่ให้มาแล้ว เขียนค่า x, y ลงในตาราง (การสมมติค่า x ต้องสัมพันธ์กับโดเมนของความสัมพันธ์)
2. นำค่า x และ y หรือ(x,y) มาลงจุดในระนาบแกนมุมฉาก
3. โยงจุดต่าง ๆ ต่อเนื่องกัน

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> 1) $r_1 = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = x + 1\}$

2) $r_2 = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y^2 = x\}$

2. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ให้นักเรียนพิจารณาดังตาราง

กราฟของความสัมพันธ์	ลากเส้นขนานแกน y ตัดกราฟจำนวน (จุด)	ความหมาย	ฟังก์ชัน	
			เป็น	ไม่เป็น
$r_1 = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = x + 1\}$ 	1	$(x,y) \in f$ และ $(x,z) \in f$ แล้ว $y = z$	✓	-
$r_2 = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y^2 = x\}$ 	2	$(x,y) \in f$ และ $(x,z) \in f$ แล้ว $y \neq z$	-	✓

กราฟของความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชันเมื่อลากเส้นขนานแกน y จะมีเส้นขนานตัดกราฟของความสัมพันธ์จุดเดียว

3. ครูให้นักเรียนสรุปการพิจารณากราฟของความสัมพันธ์ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

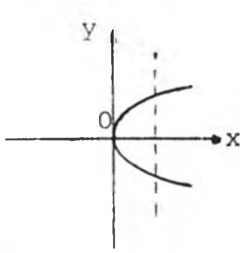
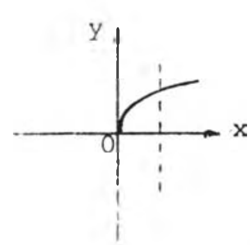
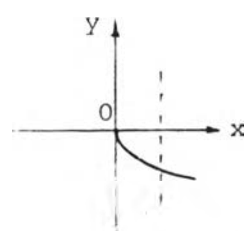
การพิจารณากราฟของความสัมพันธ์จะเป็นฟังก์ชันหรือไม่ มีขั้นตอนดังนี้

1. ลากเส้นขนานแกน y ที่ค่าแหน่ง x ใด ๆ ตัดกราฟของความสัมพันธ์
2. พิจารณาเส้นขนานแกน y ตัดกราฟของความสัมพันธ์

   ถ้าเส้นขนานตัดกราฟจุดเดียว ความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชัน

   ถ้าเส้นขนานตัดกราฟมากกว่า 1 จุด ความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชัน

4. ครูให้นักเรียนพิจารณากราฟของความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นฟังก์ชัน แล้วให้นักเรียนสร้างความสัมพันธ์ใหม่ที่เป็นสับเซตของความสัมพันธ์เดิมแต่เป็นฟังก์ชัน ดังตาราง

กราฟของความสัมพันธ์	ฟังก์ชัน		กราฟของสับเซตของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน	เหตุผล
	เป็น	ไม่เป็น		
 $r_1 = \{(x,y) \in R \times R / y^2 = x\}$	-	✓	 $r_2 = \{(x,y) \in R \times R / y = \sqrt{x}\}$  $r_3 = \{(x,y) \in R \times R / y = -\sqrt{x}\}$	กราฟของสับเซตของความสัมพันธ์เมื่อลากเส้นขนานแกน y จะตัดกราฟของสับเซตจุดเดียว

5. ครูให้นักเรียนสรุปการพิจารณาฟังก์ชันจากสับเซตของความสัมพันธ์มีวิธีการ คือ

สรุป การพิจารณาฟังก์ชันจากสับเซตของความสัมพันธ์มีวิธีการ คือ 1. พิจารณากราฟของความสัมพันธ์เดิม เมื่อลากเส้นขนานกับแกน y จะตัดกราฟของความสัมพันธ์ 2 จุด แสดงว่าความสัมพันธ์ไม่เป็นฟังก์ชัน 2. หากกราฟของสับเซตที่ลากเส้นขนานกับแกน y ตัดกราฟนี้เพียงจุดเดียว จะได้กราฟของสับเซตของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน 3. หาเงื่อนไขของสับเซต

6. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ให้นักเรียนเขียนกราฟแล้วให้พิจารณาความสัมพันธ์ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

เช่น $r = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = x^2 + 1\}$

<u>ขั้นสรุป</u>

1. ครูให้นักเรียนสรุปการพิจารณาฟังก์ชันจากกราฟโดยการถามตอบ

<u>การวัดและประเมินผล</u>

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน	1. นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80%
2. ดูจากการทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง 3 ข้อ	2. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ประมาณ 80%
3. ดูจากการทำแบบฝึกหัด 2.1 หน้า 44-45 ข้อ 3	3. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ประมาณ 80%

<u>แบบฝึกหัดเพิ่มเติม</u>

จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์และพิจารณาการเป็นฟังก์ชันของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1. $f = \{(x,y) \ / \ y = x - 2\}$
2. $g = \{(x,y) \ / \ y = x^2 - 1\}$
3. $h = \left\{(x,y) \ / \ y = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}\right\}$

คาบที่ 4

<u>หัวข้อเรื่อง</u> ฟังก์ชันจาก A ไป B ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B และฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

<u>จุดประสงค์การเรียนรู้</u>

เมื่อเรียนจบครบแล้วนักเรียนสามารถ

1. เขียนโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
2. บอกความสัมพันธ์ของโดเมนและเรนจ์กับเซตซึ่งประกอบเป็นฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
3. สรุปนิยามของฟังก์ชันจาก A ไป B ได้อย่างถูกต้อง
4. เขียนการจับคู่ของโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันจาก A ไป B ได้อย่างถูกต้อง
5. บอกเงื่อนไขของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B ได้อย่างถูกต้อง
6. บอกเงื่อนไขของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B ได้อย่างถูกต้อง
7. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้อย่างถูกต้อง 80%
8. ทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง 80%

<u>เนื้อหา</u>

1. <u>ฟังก์ชันจาก A ไป B</u>

พิจารณาฟังก์ชันที่ได้จากการจับคู่ระหว่างสมาชิกของเซต A และ B

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{a, b, c, d\}$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{a, b, c, d\}$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{a, b, c, d, e\}$

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{a, b, c, d\}$

<u>นิยาม</u> f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เขียนแทนด้วย $f : A \longrightarrow B$ หมายถึงฟังก์ชัน f ที่มีโดเมนเท่ากับ A และมีเรนจ์เป็นสับเซตของ B (ดังตัวอย่างที่ 1-4)

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> กำหนดให้ $A = \{0,1,2,3,4\}$

$B = \{0,1,2,3,\ldots,10\}$

และ $f = \{(x,y) \in A \times B \,/\, y = x^2\}$

$g = \{(x,y) \in B \times A \quad y = x\}$

จงพิจารณาดูว่า 1) f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B หรือไม่

2) g เป็นฟังก์ชันจาก B ไป A หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> 1) $f = \{(0,0),\ (1,1),\ (2,4),\ (3,9)\}$

จะพบว่า f เป็นฟังก์ชัน แต่โดเมนของ $f = \{0,1,2,3\} \neq A$

เพราะฉะนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

2) $g = \{(0,0),\ (1,1),(4,2),\ (9,3)\}$

จะพบว่า g เป็นฟังก์ชัน แต่โดเมนของ $g = \{0,1,4,9\} \neq B$

เพราะฉะนั้น g ไม่เป็นฟังก์ชันจาก B ไป A

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> กำหนดฟังก์ชันดังต่อไปนี้

1) $f = \{(x,y) \in R \times R \,/\, xy = 1\}$

2) $g = \{(x,y) \in R \times R \,/\, |x|y = 1\}$

3) $h = \{(x,y) \in R \times R \,/\, y^3 = x\}$

ในแต่ละฟังก์ชันจงหาเซต A ซึ่งทำให้เป็นฟังก์ชันจาก A ไป R

<u>วิธีทำ</u>

1) จากสมการ $xy = 1$ จะพบว่า ถ้า x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ไม่เท่ากับ 0 แล้ว สามารถหาค่า y ได้เสมอ แสดงว่า โดเมนของ $f = \{x \in R \,/\, x \neq 0\} = R - \{0\}$

เพราะฉะนั้น ถ้าให้ $A = R - \{0\}$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันจาก A ไป R

2) จากสมการ $|x|y = 1$ จะได้ว่า $y = \frac{1}{|x|}$ ซึ่งจะหาค่า y ได้เสมอเมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ไม่เท่ากับ 0 แสดงว่า ไดเมนของ $g = \{x \in R / x \neq 0\} = R-\{0\}$
เพราะฉะนั้น ถ้าให้ $A = R-\{0\}$ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป R

3) จากสมการ $y^3 = x$ จะพบว่าไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใด ๆ เราสามารถหาจำนวนจริง y ได้เสมอ โดยที่ $y = \sqrt[3]{x}$
แสดงว่าไดเมนของ $h = R$
ดังนั้น ถ้าให้ $A = R$ จะได้ว่า h เป็นฟังก์ชันจาก A ไป R

2. <u>ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B</u> (function from A onto B)

<u>นิยาม</u> f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{} B$ หมายถึง ฟังก์ชัน f ที่มีไดเมนเท่ากับ A และมีเรนจ์เท่ากับ B

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> ให้ $A = \{1,3,5\}$ และ $B = \{2,4\}$

1) $f_1 = \{(1,4), (3,2), (5,2)\}$
จะได้ว่า f_1 เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เพราะว่า
$D_{f_1} = \{1,3,5\} = A$ และ $R_{f_1} = \{2,4\} = B$

2) $f_2 = \{(1,2), (3,2), (5,2)\}$
จะได้ว่า f_2 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เพราะว่า
$R_{f_2} = \{2\}$ ซึ่ง $R_{f_2} \neq B$

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> กำหนดให้ $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{a,b,c\}$

1) $f_1 = \{(1,a), (2,a), (3,b)\}$
จะได้ว่า f_1 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เพราะว่า $R_{f_1} \neq B$

2) $f_2 = \{(1,a), (2,c), (3,b)\}$
จะได้ว่า f_2 เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เพราะว่า
$D_{f_2} = \{1,2,3\} = A$ และ $R_{f_2} = \{a,b,c\} = B$

3) $f_3 = \{(1,b), (2,a), (3,b)\}$

จะได้ว่า f_3 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เพราะว่า $R_{f_3} \neq B$

3. <u>ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง</u> (one to one function)

<u>ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง</u> (one to one function) หมายถึง ฟังก์ชันที่สมาชิกแต่ละตัวของเรนจ์จะถูกจับคู่โดยสมาชิกของโดเมนตัวเดียวเท่านั้น

1) <u>f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B</u> (one to one function from A into B) เขียนแทนด้วย $f:A \xrightarrow{1-1} B$ หมายถึง ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งที่มี $D_f = A$ และ $R_f \subset B$

2) <u>f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B</u> (one to one function from A onto B or one to one correspondence) เขียนแทนด้วย $f:A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} B$ หมายถึง ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งที่มี $D_f = A$ และ $R_f = B$

<u>ตัวอย่าง</u> $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{a, b, c, d, e\}$

จะเห็นว่าการจับคู่ของสมาชิกระหว่าง A กับ B เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B

<u>ตัวอย่าง</u> $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{a, b, c, d\}$

จะเห็นว่าการจับคู่ของสมาชิกระหว่าง A กับ B เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B

โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

จงเติมคำถามลงในตารางเมื่อ $A = \{1,2,3\}$ $B = \{a,b,c\}$

ฟังก์ชัน	แผนภาพ	$f:1\text{-}1$		$f:A \xrightarrow{1-1} B$		$F:A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} B$	
		เป็น	ไม่เป็น	เป็น	ไม่เป็น	เป็น	ไม่เป็น
$f_1 = \{(1,c),(2,b),(3,a)\}$							
$f_2 = \{(1,a),(2,a),(3,a)\}$							
$f_3 = \{(1,c),(2,b),(3,c)\}$							
$f_4 = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$							
$f_5 = \{(1,b),(2,b),(3,a)\}$							

สื่อการเรียนการสอน -

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

1. ครูทบทวนการพิจารณาฟังก์ชันพร้อมทั้งโดเมนและเรนจ์

ตัวอย่าง $A = \{1,2,3\}$

$B = \{a,b,c,d\}$

$A = \{1,2,3,4,5\}$

$B = \{a,b,c,d\}$

$A = \{1,2,3,4\}$

$B = \{a,b,c,d,e\}$

$A = \{1,2,3,4\}$

$B = \{a,b,c,d\}$

<u>ขั้นสอน</u>

1. ครูถามนักเรียนว่าฟังก์ชันในข้อใดมีโดเมนเท่ากับ A และมีเรนจ์เป็นสับเซตของ B
2. ครูให้นักเรียนสังเกตและบอกว่า ถ้าฟังก์ชันมีโดเมนเท่ากับ A และเรนจ์เป็นสับเซตของ B เรียกฟังก์ชันนั้นว่า ฟังก์ชันจาก A ไป B
3. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ให้นักเรียนพิจารณาว่าความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B หรือไม่

   ตัวอย่าง $A = \{1,3,5\}$ $B = \{2,4\}$

   $r_1 = \{(1,2),(3,4),(5,4)\}$

   $r_2 = \{(1,4),(3,2),(5,2)\}$

   $r_3 = \{(2,1),(4,5)\}$
4. ครูให้นักเรียนสรุปนิยามฟังก์ชันจาก A ไป B

   <u>นิยาม</u> f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เขียนแทนด้วย $f : A \to B$

   หมายถึง ฟังก์ชัน f ที่มีโดเมนเท่ากับ A และมีเรนจ์เป็นสับเซตของ B

5. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันให้นักเรียนหาโดเมนและเรนจ์ และให้พิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B หรือไม่ และให้สังเกตว่าฟังก์ชันจาก A ไป B ฟังก์ชันใดมีเรนจ์เท่ากับ F

<u>ตัวอย่าง</u> $A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,4\}$

$r_1 = \{(1,2),(3,4),(5,4)\}$

$r_2 = \{(1,4),(3,2),(5,2)\}$

$r_3 = \{(1,2),(3,2),(5,2)\}$

6. ครูให้นักเรียนสังเกตและบอกว่าถ้าฟังก์ชันมีโดเมนเท่ากับ A และเรนจ์เท่ากับ B เรียกฟังก์ชันนั้นว่า ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

7. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ให้นักเรียนพิจารณาว่าความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B หรือไม่ เพราะเหตุผล

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{a,b,c\}$

$r_1 = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$

$r_2 = \{(1,a),(2,a),(3,b)\}$

$r_3 = \{(1,a),(2,c),(3,b)\}$

$r_4 = \{(1,b),(2,a),(3,b)\}$

8. ครูให้นักเรียนสรุปนิยามฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

<u>นิยาม</u> f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เขียนแทนด้วย $f:A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{} B$ หมายถึง ฟังก์ชัน f ที่มีโดเมนเท่ากับ A และมีเรนจ์เท่ากับ B

9. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและฟังก์ชันที่ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

10. ครูถามนักเรียนว่า ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งสมาชิกแต่ละตัวของเรนจ์จะถูกจับคู่โดยโดเมนกี่ตัว

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ $A = \{2,4,6\}$ และ $B = \{a,b,c\}$

$r_1 = \{(2,c),(4,a),(6,b)\}$

$r_2 = \{(2,a),(4,b),(6,c)\}$

$r_3 = \{(2,a),(4,b),(6,a)\}$

11. ครูให้นักเรียนสรุปนิยามฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

<u>นิยาม</u> f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง หมายถึง ฟังก์ชันที่สมาชิกแต่ละตัวของเรนจ์จะถูกจับคู่โดยสมาชิกของโดเมนตัวเดียวเท่านั้น

12. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ และให้พิจารณาว่าความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B จาก A ไปทั่วถึง B หนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

ฟังก์ชัน	แผนภาพ	ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง		ฟังก์ชันจาก A ไป B		ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B	
		เป็น	ไม่เป็น	เป็น	ไม่เป็น	เป็น	ไม่เป็น
ถ้า $A = \{1,2,3,4\}$ และ $B = \{a,b,c,d,e$ $f_4 = \{(1,a),(2,b),$ $(3,c),(4,d)\}$							
ถ้า $A = \{1,2,3,4\}$ และ $B = \{a,b,c,d\}$ $f_5 = \{(1,a),(2,b),$ $(3,d),(4,c)\}$							
ถ้า $A = \{1,2,3,4,5\}$ และ $B = \{a,b,c,d\}$ $f_6 = \{(1,a),(2,b),$ $(3,c),(4,c),$ $(5,d)\}$							

13. ครูยกตัวอย่างให้นักเรียนทำ

เช่น ให้ $f = \{(x,y) \in R \times R \;/\; xy = 1\}$

$g = \{(x,y) \in R \times R \;/\; |x|\, y = 1\}$

$h = \{(x,y) \in R \times R \;/\; y^3 = x\}$

ในแต่ละฟังก์ชันจงหาเซต A ซึ่งทำให้เป็นฟังก์ชันจาก A ไป R

<u>ขั้นสรุป</u>

1. ครูให้นักเรียนสรุปการพิจารณาฟังก์จาก A ไป B จาก A ไปทั่วถึง B และฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

<u>การวัดและประเมินผล</u>

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน	1. นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80%
2. ดูจากการทำใจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง	2. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ประมาณ 80%
3. ดูจากการทำแบบฝึกหัด 2.1 หน้า 44-47 ข้อ 2, 9	3. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ประมาณ 80%

<u>แบบฝึกหัดเพิ่มเติม</u>

1. ให้ $A = \{0,1,2,3,4\}$ และ $B = \{0,1,2,3,\ldots,10\}$

$f = \{(x,y) \in A \times B \,/\, y = x^2\}$ เป็น $f: A \to B$ หรือไม่

$g = \{(x,y) \in B \times A \,/\, y = x\}$ เป็น $g: B \to A$ หรือไม่

คาบที่ 5

<u>หัวข้อเรื่อง</u> การพิจารณาฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจากกราฟ

<u>จุดประสงค์การเรียนรู้</u>

เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

1. เขียนกราฟของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
2. บอกจำนวนจุดซึ่งเส้นขนานที่ลากขนานกับแกน x ตัดกราฟของความสัมพันธ์ได้อย่างถูกต้อง
3. สรุปวิธีการพิจารณาฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจากกราฟได้อย่างถูกต้อง
4. ทำใจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้อย่างถูกต้อง 80%
5. ทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง 80%

<u>เนื้อหา</u>

<u>การพิจารณาฟังก์ชันว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจากกราฟ</u>

<u>นิยาม</u> f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one to one function) หมายถึง ฟังก์ชันที่สมาชิกแต่ละตัวของเรนจ์จะถูกจับคู่โดยสมาชิกของโดเมนตัวเดียว

<u>การพิจารณาฟังก์ชันว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจากกราฟ มีขั้นตอนดังนี้</u>

1) ลากเส้นขนานแกน x ที่ตำแหน่ง y ใด ๆ ตัดกราฟของฟังก์ชัน

2) พิจารณาเส้นขนานแกน x ที่ตัดกราฟของฟังก์ชัน คือ

ก. เส้นขนานตัดกราฟเพียงจุดเดียว ฟังก์ชันนั้นเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ข. เส้นขนานตัดกราฟมากกว่า 1 จุด ฟังก์ชันนั้นไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้ว่าฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

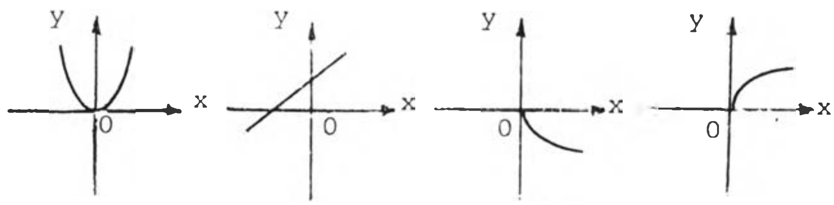
$$f = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = x^2\}$$

$$g = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = 2x + 1\}$$

$$h = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = -\sqrt{x}\}$$

$$k = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = \sqrt{x}\}$$

<u>วิธีทำ</u> เขียนกราฟของฟังก์ชัน



f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะมีเส้นขนานกับแกน x ที่ตัดกราฟมากกว่า 1 จุด

g,h,k เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะมีเส้นขนานกับแกน x ตัดกราฟเพียงจุดเดียวเท่านั้น

<u>โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง</u>

จงพิจารณา $f = \left\{(x,y) \in R \times R \ / \ y = -2x + 1\right\}$ ว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่ พร้อมทั้งเหตุผล

<u>สื่อการเรียนการสอน</u> -

<u>กิจกรรมการเรียนการสอน</u>

<u>ขั้นนำ</u>

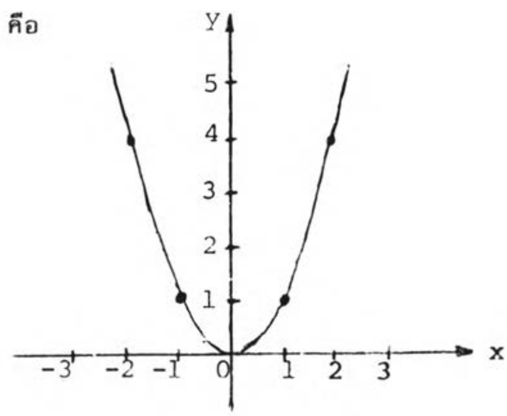
1. ครูทบทวนหลักการเขียนกราฟของความสัมพันธ์โดยให้เขียนกราฟ เช่น

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> $f = (x,y) \ R \times R \ / \ y = x^2$

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	4	1	0	1	4	...

$\therefore f = \left\{\ldots,(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4),\ldots\right\}$

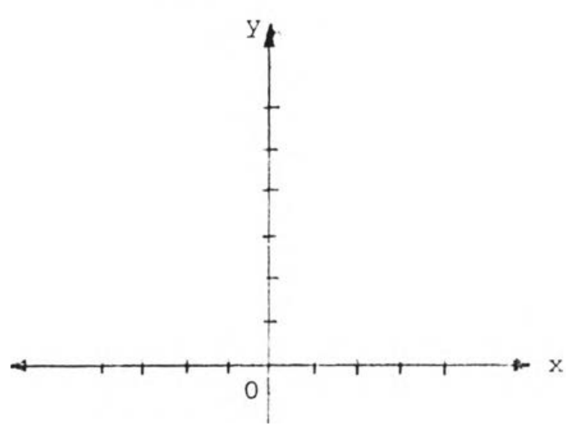
กราฟของ f คือ



ตัวอย่างที่ 2 $g = \left\{(x,y) \in R \times R \;/\; y = 2x + 1\right\}$

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	—	—	—	—	—	—	—

กราฟของ g คือ



2. ให้นักเรียนสรุปหลักการเขียนกราฟ ดังนี้

   1) สมมติค่า x และหาค่า y จากเงื่อนไขของความสัมพันธ์ที่ให้มา แล้วเขียนค่า x,y ลงในตาราง (การสมมติค่า x ต้องสัมพันธ์กับโดเมนของความสัมพันธ์)

   2) นำค่า x และ y หรือ (x,y) มาลงจุดในระนาบแกนมุมฉาก

   3) โยงจุดต่าง ๆ ต่อเนื่องกัน

ขั้นสอน

1. ครูยกตัวอย่างกราฟของฟังก์ชัน และลากเส้นขนานแกน x ตัดกราฟให้นักเรียนสังเกตจุดตัดของเส้นตรงกับกราฟแล้วตอบคำถาม

ก. เส้นขนานแกน x ตัดกราฟ 2 จุด คือ ค่า y ค่าหนึ่งจับคู่กับค่า x 2 ค่า

ข. เส้นขนานแกน x ตัดกราฟ 1 จุด คือ ค่า y ค่าหนึ่งจับคู่กับค่า x 1 ค่า

2. ครูอธิบายในกรณีเส้นขนานแกน x ตัดกราฟ 1 จุดว่าตรงกับฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

3. ครูให้นักเรียนสรุปการพิจารณาฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจากกราฟ "ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งเมื่อลากเส้นขนานแกน x ตัดกราฟของฟังก์ชันเพียงจุดเดียว"

4. ครูยกตัวอย่างกราฟของฟังก์ชันให้นักเรียนพิจารณาการเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เช่น $f = \{(x,y) \ / \ y = x^2\}$, $g = \{(x,y) \ / \ y = 2x + 1\}$

<u>ขั้นสรุป</u>

1. ครูให้นักเรียนสรุปการพิจารณาฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจากกราฟโดยการถามตอบ

<u>การพิจารณาฟังก์ชันว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจากกราฟ มีขั้นตอนดังนี้</u>

1) ลากเส้นขนานแกน x ที่ค่าแหน่ง y ใด ๆ ตัดกราฟของฟังก์ชัน

2) พิจารณาเส้นขนานแกน x ที่ตัดกราฟของฟังก์ชัน คือ

ถ้าเส้นขนานตัดกราฟเพียงจุดเดียว ฟังก์ชันนั้นเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ถ้าเส้นขนานตัดกราฟมากกว่า 1 จุด ฟังก์ชันนั้นไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

<u>การวัดและประเมินผล</u>

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน	1. นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80%
2. ดูจากการทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง	2. นักเรียนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ประมาณ 80%

<u>แบบฝึกหัดเพิ่มเติม</u>

ฟังก์ชันในข้อใดเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

1. $f = \{(x,y) \mid y = x - 2\}$
2. $g = \{(x,y) \mid y = x^2 - 1\}$
3. $h = \{(x,y) \mid y = 5x^2 - 1\}$

คาบที่ 6

<u>หัวข้อเรื่อง</u> การกำหนดฟังก์ชัน

<u>จุดประสงค์การเรียนรู้</u>

เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

1. ยกตัวอย่างฟังก์ชันแบบต่าง ๆ ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
2. เขียนฟังก์ชันตามแบบที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
3. สามารถสรุปแบบต่าง ๆ ของการกำหนดฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
4. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้อย่างถูกต้อง 80%
5. ทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง 80%

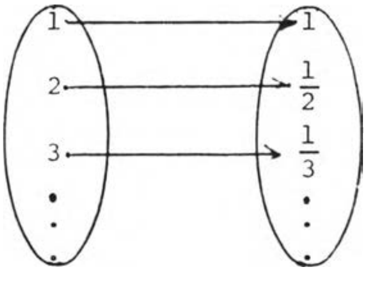
<u>เนื้อหา</u>

<u>การกำหนดฟังก์ชัน</u> มีวิธีการเขียนฟังก์ชันได้หลายวิธี ดังนี้

1) โดยการแจกแจงสมาชิกเป็นคู่ลำดับทั้งหมด เช่น

$$f = \{(1,a),\ (2,b),\ (3,c)\}$$

2) โดยแผนภาพแสดงการจับคู่ระหว่างสมาชิกของเซตสองเซต



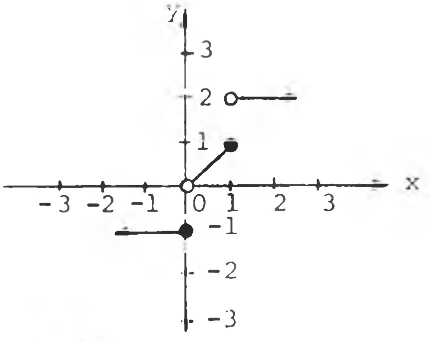
3) โดยตาราง เช่น

x	1	2	3	...
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	...

4) โดยการเขียนกราฟ เช่น

$$f = \left\{(x,y) \in R \times R \;/\; y = \begin{cases} -1, & \text{เมื่อ } x \leq 0 \\ x, & \text{เมื่อ } 0 < x \leq 1 \\ 2, & \text{เมื่อ } 1 < x \end{cases}\right.$$

เขียนกราฟได้ ดังนี้



5) โดยการกำหนดเงื่อนไขสมาชิกในเซต หรือเป็นสูตรแสดงฟังก์ชัน เช่น

$f = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = x + 1\}$ อาจเขียนแทนด้วย

$f(x) = x + 1$

$g = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = x^2 + 3x - 1\}$ อาจเขียนแทนด้วย

$g(x) = x^2 + 3x - 1$

$h = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = \sqrt{x} - 3\}$ อาจเขียนแทนด้วย

$h(x) = \sqrt{x} - 3$

เรียก $f(x)$, $g(x)$ และ $h(x)$ ว่า เอฟของเอ็กซ์, จีของเอ็กซ์ และเอชของเอ็กซ์ ตามลำดับ ซึ่งหมายความว่า เป็นค่าของฟังก์ชัน f,g และ h ที่ x

$\therefore$ $f(x)$ ก็คือค่า y ของฟังก์ชัน f นั่นเอง

$g(x)$ ก็คือค่า y ของฟังก์ชัน g นั่นเอง

$h(x)$ ก็คือค่า y ของฟังก์ชัน h นั่นเอง

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> กำหนดให้ $f(x) = 2x - 3$ จงหา $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$

<u>วิธีทำ</u> $x = 1$, $f(1) = 2(1) - 3 = -1$

$\therefore y = f(1) = -1$

$x = 2$, $f(2) = 2(2) - 3 = 1$

$y = 1$

$x = 3$, $f(3) = 2(3) - 3 = 3$

$y = 3$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 3$ จงหา $f(0)$, $f(-1)$, $f(a)$, $f(x+1) - f(x)$

วิธีทำ

$$f(0) = 0^2 + 3 = 3$$

$$f(-1) = (-1)^2 + 3 = 4$$

$$f(a) = (a)^2 + 3 = a^2 + 3$$

$$f(x+1) = (x+1)^2 + 3 = x^2 + 2x + 1 + 3$$

$$= x^2 + 2x + 4$$

$$f(x) = (x)^2 + 3 = x^2 + 3$$

$$\therefore f(x+1) - f(x) = (x^2 + 2x + 4) - (x^2 + 3)$$

$$= x^2 + 2x + 4 - x^2 - 3$$

$$= 2x - 1$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 1 & \text{ถ้า } x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x-2} & \text{ถ้า } 2 < x \leq 3 \\ 2x - 5 & \text{ถ้า } x > 3 \end{cases}$

จงหา 1) $f(\sqrt{2})$ 2) $f(\sqrt{8})$ 3) $f(\frac{7}{2})$

วิธีทำ 1) $\because x = \sqrt{2}$ ซึ่ง $\sqrt{2} \leq 2$

$$\therefore f(x) = 2x^3 + 1$$

$$f(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})^3 + 1 = 4\sqrt{2} + 1$$

2) $\because x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ซึ่ง $2 < 2\sqrt{2} \leq 3$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$f(\sqrt{8}) = \frac{1}{\sqrt{8}-2}$$

3) $\because x = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$ ซึ่ง $3\frac{1}{2} > 3$

$$\therefore f(x) = 2x - 5$$

$$f(\tfrac{7}{2}) = 2(\tfrac{7}{2}) - 5 = 2$$

โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

ให้ $f(x) = 3x^2 - x + 2$ จงหา $f(a)$, $f(-a)$, $-f(a)$, $f(a+b)$

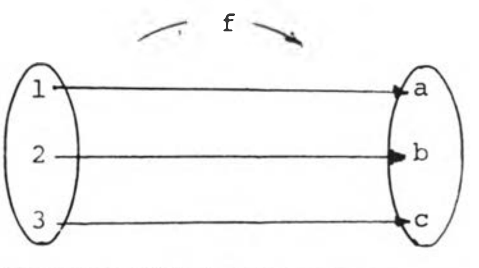
สื่อการเรียนการสอน -

กิจกรรมการเรียนการสอน

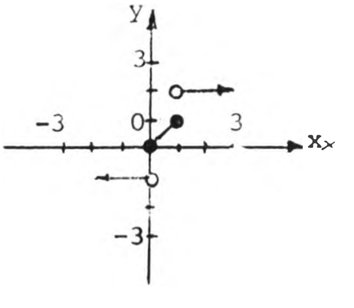
ขั้นนำ

1. ครูทบทวนการพิจารณาการเป็นฟังก์ชันโดยการถามตอบ

เช่น $f = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$



x	1	2	3	4
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$



$f = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = x + 1\}$

<u>ขั้นสอน</u>

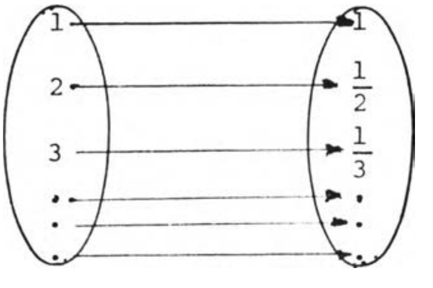
1. ครูอธิบายชี้ให้นักเรียนเห็นว่า การกำหนดฟังก์ชันนั้นสามารถกำหนดได้หลายวิธี ดังนี้

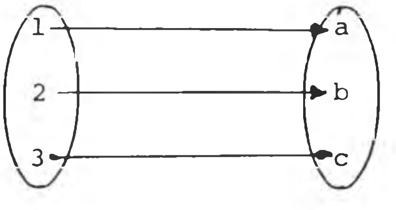
1) โดยการแจกแจงสมาชิก

$$f = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$$

$$g = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$$

2) โดยแผนภาพแสดงการจับคู่ระหว่างสมาชิกของเซตสองเซต





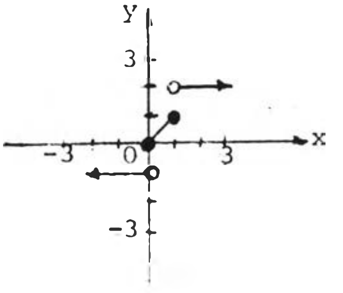
จะเห็นว่าการกำหนดฟังก์ชันโดยแผนภาพนั้นทำให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกของเซตสองเซตอย่างชัดเจน และสามารถแยกโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันอย่างชัดเจน

3) โดยตาราง เป็นการกำหนดฟังก์ชันซึ่งเข้าใจกันโดยง่ายวิธีหนึ่ง

จำนวนลูกกวาด	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ราคา (สตางค์)	40	80	100	140	180	200	240	280	300	340

x	1	2	3	4	...
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...

4) โดยกราฟ เป็นการนำฟังก์ชันมาแสดงให้เข้าใจได้ง่าย ๆ โดยเขียนแทนคู่อันดับคู่หนึ่งด้วยจุดในระนาบ



จากกราฟ จุดต้นแสดงว่ากราฟรวมจุดนั้น แต่วงกลวงแสดงว่ากราฟไม่รวมจุดนั้น กราฟดังกล่าวมีสมการ ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

5) โดยการกำหนดเงื่อนไขสมาชิกในเซต หรือเป็นสูตรแสดงฟังก์ชัน

$$f = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = x + 1\}$$

2. ครูอธิบายการกำหนดเงื่อนไขสมาชิกในเซต เช่น

$$f = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = x + 1\}$$

อาจเขียนแทนด้วย $f(x) = x + 1$

3. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันแบบเงื่อนไขให้เขียนเป็นแบบสั้น เช่น

$$g = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = x^2 + 3x - 1\}$$

$$h = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = x - 3\}$$

4. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันแบบเงื่อนไขให้หาค่าของฟังก์ชัน เช่น

$f(x) = 2x - 3$ ให้หาค่าของ $f(1)$, $f(2)$, $f(a)$

5. ให้นักเรียนสรุปการหาค่าของฟังก์ชัน

การหาค่า $f(x)$ เมื่อ $x = 1$ ก็คือการแทนค่า x ด้วย 1 ในฟังก์ชัน f

6. ครูยกตัวอย่างของฟังก์ชันแล้วให้นักเรียนช่วยกันหาค่าของฟังก์ชัน เช่น

$f(x) = x^2 + 3$ จงหา $f(0), f(-1), f(a), f(x+1) - f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 1, & x \leq 2 \\ \frac{1}{x-2}, & 2 < x \leq 3 \\ 2x - 5, & x > 3 \end{cases}$$ จงหา $f(\sqrt{2}), f(\sqrt{8}), f(\frac{7}{2})$

<u>ขั้นสรุป</u>

1. ให้นักเรียนสรุปการหาค่าฟังก์ชันโดยการถามตอบ

<u>การวัดและประเมินผล</u>

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน	1. นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80%
2. ดูจากโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง	2. นักเรียนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงประมาณ 80%
3. ดูจากแบบฝึกหัด 2.1 หน้า 46 ข้อ 4, 5,6	3. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ประมาณ 80%

<u>แบบฝึกหัดเพิ่มเติม</u>

1. ให้ $f(x) = x^2 + 3x - 2$ จงหา $f(2x), f(2), f(x-1), f(2x-1)$

2. ให้ $$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{x-1}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$ จงหา $f(-1), f(\frac{1}{2}), f(\frac{1}{3}).f(3), f(-2)+f(2)$

คาบที่ 7

<u>หัวข้อเรื่อง</u> ฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ และฟังก์ชันขั้นบันได

<u>จุดประสงค์การเรียนรู้</u>

เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

1. บอกกราฟของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
2. ยกตัวอย่างฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันคงตัว ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ และฟังก์ชันขั้นบันได ได้อย่างถูกต้อง
3. สรุปรูปทั่วไปของฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันคงตัว ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ และฟังก์ชันขั้นบันไดได้อย่างถูกต้อง
4. จำแนกฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ และฟังก์ชันขั้นบันไดได้อย่างถูกต้อง
5. เขียนกราฟของฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ และฟังก์ชันขั้นบันไดได้อย่างถูกต้อง
6. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้อย่างถูกต้อง 80%
7. ทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง 80%

<u>เนื้อหา</u>

1. ฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear Function) คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax + b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง เช่น

$$f(x) = 2x + 3$$

$$f(x) = x - 1$$

$$f(x) = -4x$$

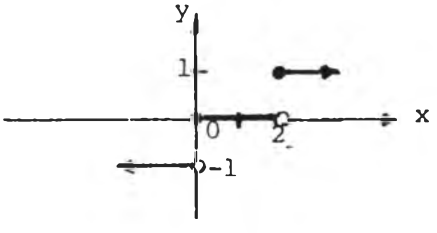
กราฟของฟังก์ชันเหล่านี้เป็นเส้นตรงไม่ขนานกับแกน y

ฟังก์ชันเชิงเส้น $f(x) = ax + b$ เมื่อ $a = 0$ จะได้ฟังก์ชันอยู่ในรูป $f(x) = b$ ฟังก์ชันนี้มีชื่อเรียกเฉพาะว่า ฟังก์ชันคงตัว (Constant Function) กราฟของฟังก์ชันคงตัวจะเป็นเส้นตรงขนานกับแกน x และกราฟจะทับแกน x เมื่อ $b = 0$

2. ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value Function) คือฟังก์ชันที่มีเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ปรากฏอยู่ เช่น $f(x) = |x+2|$ มีกราฟ ดังนี้

3. ฟังก์ชันขั้นบันได (Step Function) คือฟังก์ชันที่มีค่าคงตัวเป็นช่วง ๆ กราฟของฟังก์ชันมีรูปคล้ายขั้นบันได เช่น

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$



<u>โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง</u>

จงจำแนกชนิดของฟังก์ชันพร้อมทั้งเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x$ 2) $f(x) = |2x| - 1$

3) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq 1 \\ -1, & x > 1 \end{cases}$

<u>สื่อการเรียนการสอน</u> แผนภูมิสรุปนิยามฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ

<u>กิจกรรมการเรียนการสอน</u>

<u>ขั้นนำ</u>

1. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ และขั้นบันได แล้วให้นักเรียนเขียนกราฟของฟังก์ชัน

2. ครูให้นักเรียนสังเกตแล้วบอกการเป็นฟังก์ชัน

<u>ขั้นสอน</u>

1. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันเชิงเส้นให้นักเรียนเขียนกราฟ เช่น

$f(x) = 2x + 3$, $f(x) = -x-1$ และ $f(x) = 5$ ฯลฯ

2. ครูให้นักเรียนสรุปรูปทั่วไปของฟังก์ชันเชิงเส้น และการเขียนกราฟของสมการเชิงเส้น

<u>ฟังก์ชันเชิงเส้น</u> (Linear Function) คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax + b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

<u>ข้อสังเกต</u>

1. กราฟของฟังก์ชันเชิงเส้นเป็นเส้นตรงไม่ขนานกับแกน y
2. ฟังก์ชันคงตัวคือฟังก์ชันเชิงเส้นเมื่อ a = 0 จะได้ $f(x) = b$

3. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ (Absolute Valve Function) ให้นักเรียนเขียนกราฟ เช่น $f(x) = |x|$, $f(x) = |x - 1|$, $f(x) = |x + 1|$ $f(x) = |x| - 1$, $f(x) = |x| + 1$

4. ครูให้นักเรียนสังเกตลักษณะกราฟ

5. นักเรียนสรุปนิยามของฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์

ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์คือ ฟังก์ชันที่มีเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ปรากฏอยู่

6. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันขั้นบันได (Step Function) ให้นักเรียนเรียนกราฟ เช่น

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

7. ให้นักเรียนสังเกตลักษณะของกราฟแล้วสรุปนิยามฟังก์ชันขั้นบันได

<u>ฟังก์ชันขั้นบันได</u> (Step Function) คือฟังก์ชันที่มีค่าคงตัวเป็นช่วง ๆ กราฟของฟังก์ชันมีรูปคล้ายขั้นบันได

<u>ขั้นสรุป</u>

1) ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันให้นักเรียนจำแนกชนิดของฟังก์ชัน 2 ข้อ แล้วให้ทำลงสมุดแบบฝึกหัด 2 ข้อ เช่น

$$f(x) = |x-2|, \quad f(x) = \begin{cases} 2, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & -1 < x \leq 0 \\ -1, & -2 < x \leq -1 \end{cases}$$

2) ครูให้นักเรียนสรุปรูปทั่วไปของฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์และฟังก์ชันขั้นบันไดโดยการถามตอบ

การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน	1. นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80%
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรมของนักเรียน	2. นักเรียนร่วมกิจกรรมดีมาก
3. ดูจากการทำใจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง	3. นักเรียนทำใจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ประมาณ 80%
4. ดูจากการทำแบบฝึกหัด 2.2 ข้อ 1,2	4. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ประมาณ 80%

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

ฟังก์ชันในข้อต่อไปนี้ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ และฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันขั้นบันได

1) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

2) $f(x) = |x - 1|$

3) $f(x) = 2 - 3x$

4) $f(x) = |x| \quad ; -2 \leq x \leq 3$

5) $f(x) = \begin{cases} 5 & ; 0 < x \leq 20 \\ 4 & ; 20 < x \leq 40 \\ 2 & ; 40 < x \leq 60 \end{cases}$

คาบที่ 8

<u>หัวข้อเรื่อง</u> การเขียนฟังก์ชันจากโจทย์ปัญหา

<u>จุดประสงค์การเรียนรู้</u>

เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

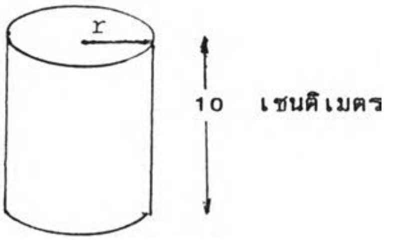
1. เขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์จากโจทย์ปัญหาที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
2. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้อย่างถูกต้อง 80%
3. ทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง 80%

<u>เนื้อหา</u>

<u>การเขียนฟังก์ชันจากโจทย์ปัญหา</u>

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงเขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตร v ของรูปทรงกระบอกกับรัศมี r ของหน้าตัดโดยให้ส่วนสูงของรูปทรงกระบอกคงที่คือ 10 เซนติเมตร

<u>วิธีทำ</u>



สูตรปริมาตรทรงกระบอกคือ พื้นที่ฐาน $\times$ สูง

แต่พื้นที่ฐานเป็นวงกลมดังนั้นพื้นที่ฐานคือ πr^2

ส่วนสูง (h) ของรูปทรงกระบอกคือ 10 เซนติเมตร

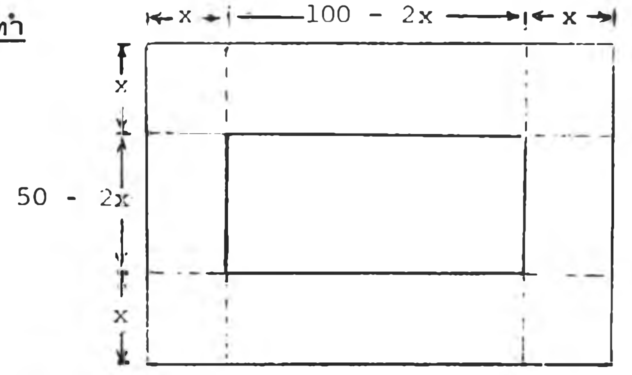
ดังนั้น ปริมาตรทรงกระบอกคือ $(\pi r^2)h$

$$\therefore \quad v = \left(\frac{22}{7}\right) r^2 \ (10)$$

ดังนั้น $$v = \frac{220}{7} r^2$$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> ทำกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าจากแผ่นกระดาษรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กว้าง 50 เซนติเมตร ยาว 100 เซนติเมตร โดยตัดที่มุมแผ่นกระดาษออกเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส แล้วพับขึ้นตามรอยตัด จงเขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตร v ของกล่องที่สร้างได้กับความยาว x ของสี่เหลี่ยมจัตุรัส แต่ละรูปที่ตัดออกมา

<u>วิธีทำ</u>



จากรูปจะได้กล่องกว้าง $= 50 - 2x$ เซนติเมตร

กล่องยาว $= 100 - 2x$ เซนติเมตร

กล่องสูง x เซนติเมตร

จากรูปจะได้ปริมาตรกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้า = กว้าง × ยาว × สูง

นั่นคือ $V = (50 - 2x)(100 - 2x)(x)$

$= 4x^3 - 300x^2 + 5000x$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จำนวน 2 จำนวนรวมกันได้ 16 และมีผลคูณมากที่สุด จงเขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนทั้งสอง

<u>วิธีทำ</u>

ให้จำนวนหนึ่งคือ x

อีกจำนวนหนึ่งคือ $16 - x$

ผลคูณมากที่สุด $= (16 - x)x$

$= 16x - x^2$

ให้ y แทนผลคูณมากที่สุด

ดังนั้น $y = 16x - x^2$

<u>โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง</u>

จงเขียนฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม (A) กับความยาวของฐาน (b) ถ้าส่วนสูงเป็นครึ่งหนึ่งของฐาน

<u>สื่อการเรียนการสอน</u> -

<u>กิจกรรมการเรียนการสอน</u>

<u>ขั้นนำ</u>

1. ครูทบทวนนิยามของฟังก์ชันโดยการถามตอบ

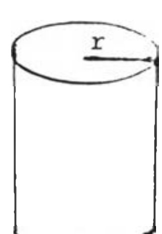
2. ครูบอกว่าฟังก์ชันนั้นสามารถเขียนในรูปโจทย์ปัญหาได้

<u>ขั้นสอน</u>

1. ครูยกตัวอย่างโจทย์ปัญหาแล้วสร้างฟังก์ชันจากโจทย์ปัญหาพร้อมอธิบายและให้นักเรียนช่วยกันทำ

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงเขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตร v ของรูปทรงกระบอกกับรัศมี r ของหน้าตัดโดยให้ส่วนสูงของรูปทรงกระบอกคงที่คือ 10 เซนติเมตร

<u>วิธีทำ</u>



10 เซนติเมตร

สูตรปริมาตรทรงกระบอกคือ พื้นที่ฐาน × สูง

แต่พื้นที่ฐานเป็นวงกลม ดังนั้นพื้นที่ฐานคือ πr^2

ส่วนสูง (h) ของรูปทรงกระบอกคือ 10 เซนติเมตร

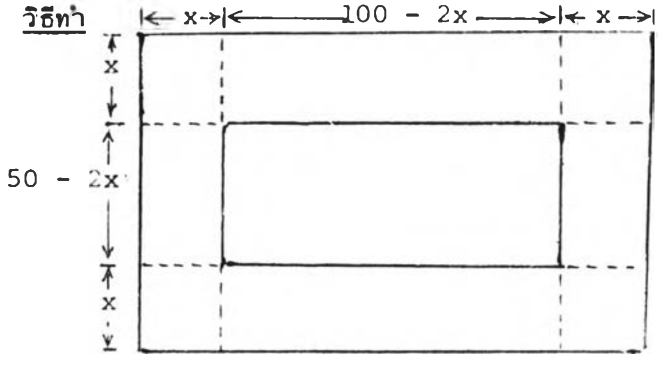
ดังนั้น ปริมาตรทรงกระบอกคือ $(\pi r^2)h$

$\therefore\ v = (\frac{22}{7}) r^2 (10)$

ดังนั้น $v = \frac{220}{7} r^2$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> ทำกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าจากแผ่นกระดาษรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กว้าง 50 เซนติเมตร ยาว 100 เซนติเมตร โดยตัดที่มุมแผ่นกระดาษออกเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสแล้ว พับขึ้นตามรอยตัด จงเขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตร v ของกล่องที่สร้างได้กับความยาว x ของสี่เหลี่ยมจัตุรัส แต่ละรูปที่ตัดออกมา

<u>วิธีทำ</u>



จากรูปจะได้กล่องกว้าง = ____________ เซนติเมตร

กล่องยาว = ____________ เซนติเมตร

กล่องสูง = ____________ เซนติเมตร

จากรูปจะได้ปริมาตรกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้า = กว้าง × ยาว × สูง

นั่นคือ v = ____________

= ____________ ลูกบาศก์เซนติเมตร

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จำนวน 2 จำนวน รวมกันได้ 16 และมีผลคูณมากที่สุด จงเขียน

<u>วิธีทำ</u>

ให้จำนวนหนึ่งคือ x

อีกจำนวนหนึ่งคือ ____________

ผลคูณมากที่สุด ____________

ให้ y แทนผลคูณมากที่สุด

ดังนั้น y = ____________

2. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปหลักการเขียนฟังก์ชันจากโจทย์ปัญหา

<u>ข้อสังเกต</u> การเขียนฟังก์ชันจากโจทย์ปัญหามีหลักดังนี้ คือ

1. วาดรูปตามโจทย์ถ้าสามารถวาดรูปได้

2. หาความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ ตามเงื่อนไข

3. ครูยกตัวอย่างโจทย์ปัญหาให้นักเรียนเรียนฟังก์ชัน

<u>ขั้นสรุป</u>

1. ครูให้นักเรียนสรุปหลักการเขียนฟังก์ชันจากโจทย์ปัญหา

<u>การวัดและประเมินผล</u>

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน	1. นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80%
2. ดูจากการทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง	2. นักเรียนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ประมาณ 80%
3. ดูจากการทำแบบฝึกหัด 2.2 ข้อ 3-8	3. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ประมาณ 80%

<u>แบบฝึกหัดเพิ่มเติม</u>

จงเขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ผิวกระป๋อง (A) กับความยาวของรัศมีของฐาน (r) เมื่อกระป๋องทรงกระบอกไม่มีฝาปิด ไม่มีก้นและมีความสูงเป็น 4 เท่าของเส้นผ่าศูนย์กลางของฐาน

คาบที่ ๑

<u>หัวข้อเรื่อง</u> ฟังก์ชันกำลังสอง-จุดวกกลับของฟังก์ชันกำลังสอง-ค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสอง

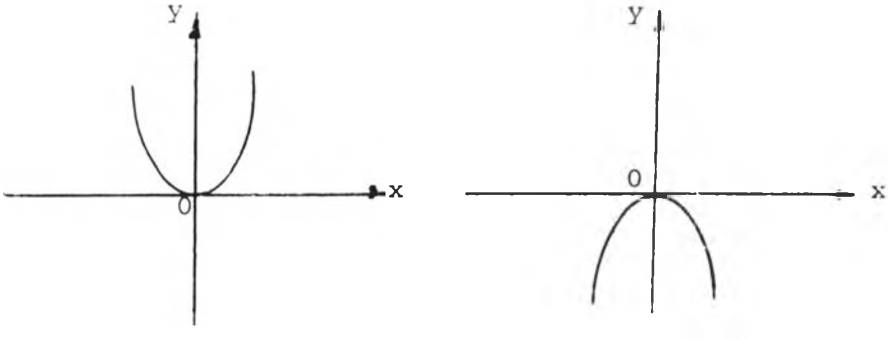
<u>จุดประสงค์การเรียนรู้</u>

เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

1. หารูปทั่วไปของสมการกำลังสองได้ถูกต้อง
2. จัดรูปทั่วไปของสมการกำลังสองเป็นรูปกำลังสองสมบูรณ์บางส่วนได้ถูกต้อง
3. อธิบายลักษณะของกราฟ และเขียนกราฟของฟังก์ชันกำลังสองได้ถูกต้อง
4. บอกค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด และจุดวกกลับของฟังก์ชันกำลังสองได้ถูกต้อง
5. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้อย่างถูกต้อง 80%
6. ทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง 80%

<u>เนื้อหา</u>

ฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic Function) คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a,b,c เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a \neq 0$ ลักษณะของกราฟของฟังก์ชันนี้ขึ้นอยู่กับค่าของ a ดังรูป



กราฟที่ได้เป็นรูปพาราโบลา ถ้า $a > 0$ กราฟจะหงายขึ้น และ $a < 0$ กราฟจะคว่ำลง

การพิจารณาจุดวกกลับ ซึ่งเป็นจุดที่ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด ทำได้ดังนี้

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$= a(x^2 + \frac{bx}{a}) + c$$

$$= a(x^2 + \frac{bx}{a} + (\frac{b}{2a})^2) + c - \frac{ab^2}{4a^2}$$

$$= a(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

ถ้า $a > 0$, y จะมีค่าน้อยที่สุด เมื่อ $x + \frac{b}{2a} = 0$ นั่นคือ $x = -\frac{b}{2a}$

ถ้า $a < 0$, y จะมีค่ามากที่สุดเมื่อ $x + \frac{b}{2a} = 0$ นั่นคือ $x = -\frac{b}{2a}$

ดังนั้น จุดที่กราฟวกกลับคือ จุด $(\frac{-b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$

<u>การหาค่าต่ำสุดหรือสูงสุดโดยใช้จุดวกกลับ</u>

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าต่ำสุดหรือสูงสุดของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $y = 2x^2 - 4x + 3$

จากรูปทั่วไป $f(x) = ax^2 + bx + c$ จะได้

$a = 2$, $b = -4$, $c = 3$

เนื่องจากสัมประสิทธิของ x^2 คือ 2 ดังนั้นกราฟจึงเป็นพาราโบลาหงาย ฟังก์ชันจึงมีค่าต่ำสุด

ค่าต่ำสุดของ y จะเกิดขึ้นเมื่อ $x = \frac{-b}{2a}$

$$= \frac{(-4)}{2(2)}$$

$$= 1$$

ดังนั้น ค่าต่ำสุดคือ $y = 2(1)^2 - 4(1) + 3$ (แทนค่า $x = 1$)

2) $y = -x^2 + x + 5$

จากรูปทั่วไป $f(x) = ax^2 + bx + c$ จะได้

$a = -1$, $b- 1$, $c = 5$

เนื่องจากสัมประสิทธิ์ของ x^2 คือ -1 ดังนั้นกราฟจึงเป็นพาราโบลาคว่ำ

ค่าสูงสุดของ y จะเกิดขึ้นเมื่อ $x = \frac{-b}{2a}$

$= \frac{-1}{2(-1)}$

$= \frac{1}{2}$

ดังนั้น ค่าสูงสุดคือ $y = -(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} + 5$

$= \frac{21}{4}$

หรือ $y = c - \frac{b^2}{4a}$

$= 5 - \frac{(1)^2}{4(-1)}$

$= \frac{21}{4}$

<u>โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง</u>

จงหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดและจุดวกกลับของฟังก์ชันกำลังสองต่อไปนี้

1) $y = 2x^2 - 4x + 3$

2) $y = -x^2 - 8x - 10$

<u>สื่อการเรียนการสอน</u> -

<u>กิจกรรมการเรียนการสอน</u>

<u>ขั้นนำ</u>

1. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันกำลังสองให้นักเรียนเขียนกราฟแล้วให้นักเรียนพิจารณาว่าความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชันหรือไม่

2. ครูเขียนรูปทั่วไปของฟังก์ชันกำลังสอง

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

<u>ขั้นสอน</u>

1. ให้นักเรียนสังเกตลักษณะกราฟของฟังก์ชันกำลังสองจะได้

ถ้า $a > 0$ ลักษณะกราฟเป็นพาราโบลาหงาย

ถ้า $a < 0$ ลักษณะกราฟเป็นพาราโบลาคว่ำ

ถ้า $a = 0$ ไม่เป็นฟังก์ชันกำลังสอง

2. ครูให้นักเรียนสรุปรูปทั่วไปและลักษณะกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง

<u>ฟังก์ชันกำลังสอง</u> (Quadratic Function) คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$; a,b,c เป็นจำนวนจริงใด

กราฟของฟังก์ชันนี้จะเป็นพาราโบลาหงายหรือพาราโบลาคว่ำแล้วแต่ค่าของ a

1. ถ้า $a > 0$ กราฟจะหงายขึ้น เช่น $f(x) = 2x^2 + 1$ (เปิดบน)
2. ถ้า $a < 0$ กราฟจะคว่ำลง เช่น $f(x) = -2x^2 + x - 3$ (เปิดล่าง)

3. ครูให้นักเรียนพิจารณากราฟของฟังก์ชันกำลังสอง

ในกรณี กราฟหงายขึ้นค่าของฟังก์ชันจะมีค่าต่ำสุด

กราฟคว่ำลงค่าของฟังก์ชันจะมีค่าสูงสุด

4. ครูอธิบายการพิจารณาจุดวกกลับ ซึ่งเป็นจุดที่ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

$$\begin{aligned}
y &= ax^2 + bx + c \\
&= (ax^2 + bx) + c \\
&= a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c \\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2\right] + c \\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c \\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2\right] - \frac{ab^2}{4a^2} + c
\end{aligned}$$

ดังนั้น $y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a}$

5. ครูอธิบายการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดจะได้

1. $a > 0$; y จะมีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $x + \frac{b}{2a} = 0$

นั่นคือ $x = \frac{-b}{2a}$

$y = c - \frac{b^2}{4a}$

2. $a < 0$; y จะมีมากที่สุดเมื่อ $x + \frac{b}{2a} = 0$

นั่นคือ $x = \frac{-b}{2a}$

$y = c - \frac{b^2}{4a}$

6. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปเกี่ยวกับจุดที่ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

$f(x) = ax^2 + bx + c$ จะได้

1. เมื่อ $a > 0$ กราฟจะเป็นพาราโบลาหงายโดยมีจุดต่ำสุดคือ

$(\frac{-b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$

2. เมื่อ $a < 0$ กราฟจะเป็นพาราโบลาคว่ำโดยมีจุดสูงสุดคือ

$(\frac{-b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$

7. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันกำลังสองอธิบายการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุด และจุดวกกลับ

เช่น $y = 2x^2 - 4x + 3$

$y = -x^2 + x + 5$

<u>ขั้นสรุป</u>

1. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดโดยการถามตอบ

<u>การวัดและประเมินผล</u>

การวัด	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน 2. ดูจากการทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง 3. ดูจากการทำแบบฝึกหัด 2.8 ข้อ 9,10	1. นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80% 2. นักเรียนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ประมาณ 80% 3. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ประมาณ 80%

<u>แบบฝึกหัดเพิ่มเติม</u>

จงหาจุดวกกลับของฟังก์ชัน ค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

$$f(x) = -x^2 - 8x - 10$$

คาบที่ 10

<u>หัวข้อเรื่อง</u> เซตคำตอบของอสมการกำลังสอง และโจทย์ปัญหาฟังก์ชันกำลังสอง

<u>จุดประสงค์การเรียนรู้</u>

เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

1. หาเซตคำตอบของอสมการกำลังสองโดยใช้จุดวกกลับและโดยใช้กราฟได้อย่างถูกต้อง

2. หาคำตอบโจทย์ปัญหาของฟังก์ชันกำลังสองได้อย่างถูกต้อง

3. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้อย่างถูกต้อง 80%

4. ทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง 80%

<u>เนื้อหา</u>

1. การเขียนกราฟตลอดจนการหาจุดวกกลับของฟังก์ชันกำลังสองนี้อาจนำไปใช้ในเรื่องต่าง ๆ ดังนี้

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงวาดกราฟของฟังก์ชัน f โดยกำหนดให้

$$f(x) = 2x^2 - 6x + 4$$

<u>วิธีทำ</u> ในกรณีที่ไม่ได้กำหนดโดเมนของ f ขอให้เข้าใจว่าโดเมนของ f คือ R กราฟของ f เป็นเส้นโค้งพาราโบลาหงาย โดยมีจุดต่ำสุดเมื่อ

$$x = \frac{-b}{2a} = -(\frac{-6}{4})$$

$$= \frac{3}{2}$$

และ $y = f(\frac{3}{2}) = \frac{2.9}{4} - \frac{6.3}{2} + 4$

$$= \frac{-1}{2}$$

แสดงว่าจุดต่ำสุดอยู่ที่ $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$

การวาดกราฟให้ใกล้เคียงควรหาจุดตัดแกน x และแกน y ดังนี้

1) จุดตัดแกน y คือ $x = 0$ แล้ว $y = f(0) = 4$

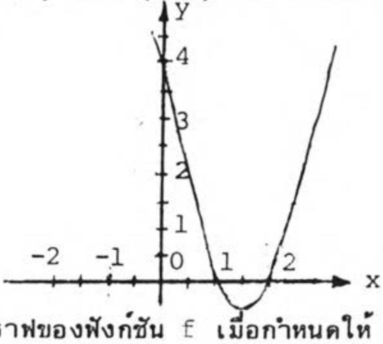
2) จุดตัดแกน x คือ $y = 0$ แล้ว $2x^2 - 6x + 4 = 0$

$\therefore\ x^2 - 3x + 2 = 0$

$\therefore\ (x - 2)(x - 1) = 0$

$\therefore\ x = 1$ หรือ 2

แสดงว่าจุดตัดแกน y คือ $(0,4)$ และจุดตัดแกน x คือ $(1,0)$ และ $(2,0)$ ซึ่งจะได้กราฟดังรูปต่อไปนี้



<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงวาดกราฟของฟังก์ชัน f เมื่อกำหนดให้

$$f(x) = 8 + 2x - x^2$$

<u>วิธีทำ</u> กราฟ f เป็นเส้นโค้งพาราโบลาคว่ำ ที่มีจุดสูงสุดเมื่อ

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{(-2)} = 1$$

และ $y = f(1) = 8 + 2 - 1 = 9$

แสดงว่าจุดสูงสุดคือ $(1,9)$

การวาดกราฟให้ใกล้เคียงควรหาจุดตัดแกน x และแกน y ดังนี้

1) จุดตัดแกน y คือ $x = 0$ แล้ว $y = f(0) = 8$

2) จุดตัดแกน x คือ $y = 0$ แล้ว $x^2 - 2x - 8 = 0$

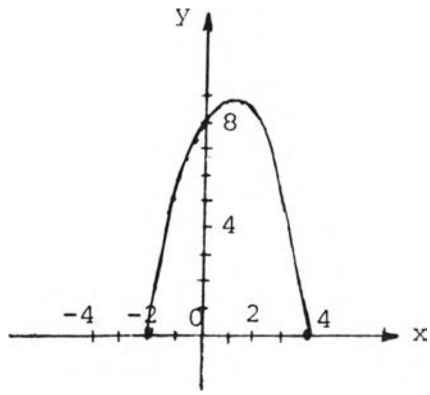
$\therefore\ (x - 4)(x + 2) = 0$

$\therefore\ x = -2$ หรือ 4

แสดงว่า จุดตัดแกน y คือ $(0,8)$

จุดตัดแกน x คือ $(-2,0)$ และ $(4,0)$

ซึ่งจะได้กราฟดังรูปต่อไปนี้

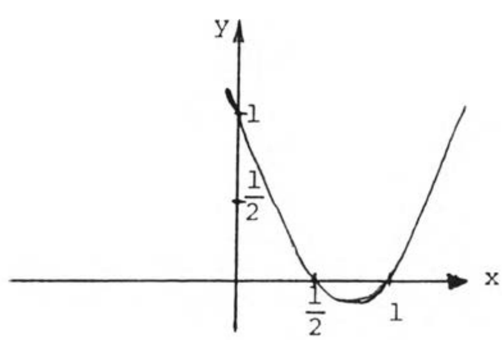


การเขียนกราฟตลอดจนการหาจุดวกกลับและฟังก์ชันกำลังสองนี้อาจนำไปใช้ในเรื่องต่าง ๆ ดังนี้

__ตัวอย่างที่ 1__ จงหาเซตคำตอบของอสมการ $2x^2 - 3x + 1 \leq 0$

__วิธีทำ__ ให้ $y = 2x^2 - 3x + 1$

เขียนกราฟของ $y = 2x^2 - 3x + 1$ ได้ดังนี้



จากกราฟจะเห็นว่า y จะเป็นจำนวนลบเมื่อ $\frac{1}{2} < x < 1$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ $2x^2 - 3x + 1 < 0$ คือ $\left\{x \;/\; \frac{1}{2} < x < 1\right\}$

__ตัวอย่างที่ 2__ ถ้าจำนวนสองจำนวนบวกกันได้ 20 จำนวนแต่ละจำนวนจะต้องเป็นเท่าใด ผลคูณของจำนวนทั้งสองนั้นจึงจะมีค่ามากที่สุด

__วิธีทำ__

1) __โดยการหาจุดวกกลับ__

ให้จำนวนหนึ่งคือ x ดังนั้นอีกจำนวนหนึ่งคือ 20 - x

ผลคูณของจำนวนทั้งสอง คือ x (20 - x)

ให้ $y = x(20 - x)$

จุดวกกลับของกราฟของสมการนี้คือจุดที่ $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{2(-1)}$

$= 10$

ดังนั้น y จะมีค่ามากที่สุดเมื่อ $x = 10$

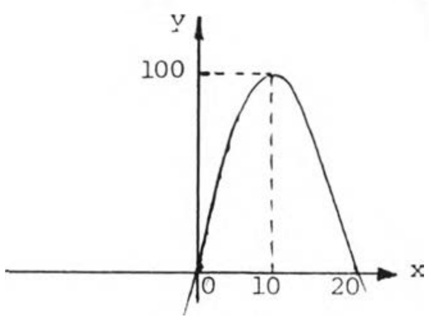
จำนวนทั้งสองจะต้องเท่ากันคือ 10 ผลคูณจึงจะมีค่ามากที่สุด

2) <u>โดยการเขียนกราฟ</u>

ให้จำนวนหนึ่งคือ x ดังนั้นอีกจำนวนหนึ่งคือ $20 - x$

ผลคูณของจำนวนสองจำนวนคือ $20x - x^2$

ให้ $y = 20x - x^2$ และเขียนกราฟได้ดังนี้



จากกราฟจะเห็นว่า y มีค่าสูงสุดเมื่อ $x = 10$ ดังนั้นจำนวนทั้งสองมีค่าเท่ากันคือ 10

<u>โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง</u>

1. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $-x^2 - 6x \geq 5$

2. จำนวนสองจำนวนบวกกันได้ 50 จำนวนแต่ละจำนวนจะต้องเป็นเท่าใดจึงจะให้ผลคูณของสองจำนวนนี้มีค่ามากที่สุด

<u>กิจกรรมการเรียนการสอน</u>

<u>ขั้นนำ</u>

1. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันกำลังสองแล้วให้นักเรียนหาจุดสูงสุดหรือต่ำสุด

2. ครูถามนักเรียนเกี่ยวกับการหาจุดตัดของกราฟของความสัมพันธ์กับแกน x และ y จะได้ กราฟตัดแกน y คือ $x = 0$

กราฟตัดแกน x คือ $y = 0$

ขั้นสอน

1. ครูและนักเรียนช่วยกันเขียนกราฟของฟังก์ชันกำลังสองโดยใช้จุดวกกลับ และจุดตัดแกน x และ y เช่น

$$f(x) = 2x^2 - 6x + 4$$

$$f(x) = 8 + 2x - x^2$$

2. ครูยกตัวอย่างการหาคำตอบของอสมการ เช่น

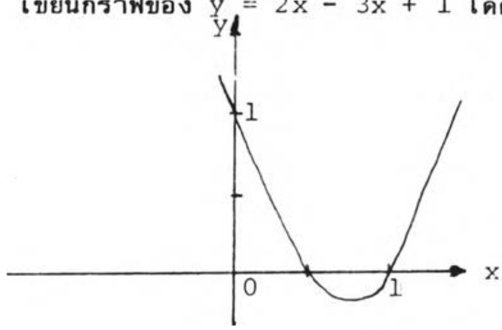
ตัวอย่างที่ 1 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $2x^2 - 3x + 1 < 0$

วิธีทำ

ให้ $y = 2x^2 - 3x + 1$

(หาค่า x ที่ทำให้ $y < 0$)

เขียนกราฟของ $y = 2x^2 - 3x + 1$ ได้ดังนี้



จากกราฟจะเห็นว่า y จะเป็นจำนวนลบเมื่อ $\frac{1}{2} < x < 1$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ $2x^2 - 3x + 1 < 0$ คือ

$$\left\{ x \,/\, \frac{1}{2} < x < 1 \right\}$$

3. ครูยกตัวอย่างโจทย์ปัญหาของฟังก์ชันกำลังสอง

ตัวอย่างที่ 2 จำนวนสองจำนวนบวกกันได้ 20 จำนวน แต่ละจำนวนจะต้องเป็นเท่าใด จึงจะทำให้ผลคูณของสองจำนวนนี้มากที่สุด

วิธีทำ 1) สร้างฟังก์ชันสิ่งที่จะหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

ให้จำนวนแรกคือ x

ดังนั้น จำนวนหลังคือ $20 - x$

ผลคูณของสองจำนวนคือ $x(20 - x)$

ให้ $y = 20x - x^2$ (y = ผลคูณของสองจำนวน)

2) หาค่ามากที่สุดโดยใช้จุดวกกลับ

y จะมีค่ามากที่สุดเมื่อ x $= \frac{-b}{2a}$

$= \frac{-20}{2(-1)}$

$= 10$

ดังนั้น จำนวนแรกคือ 10 จำนวนหลังคือ 10

ตัวอย่างที่ 3 ถ้าต้องการกั้นรั้วรอบที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าตามแนวคลองเพื่อเลี้ยงเป็ด จะต้องกั้นรั้วอย่างไร จึงจะได้พื้นที่มากที่สุด เมื่อมีไม้พอกั้นรั้วยาว 40 เมตร

วิธีทำ

1. สร้างฟังก์ชันสิ่งที่จะหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

จากรูปให้ด้านกว้างของรั้วยาวด้านละ x เมตร

∴ ด้านยาวของรั้วยาว $40 - 2x$ เมตร

พื้นที่ทั้งหมด = กว้าง × ยาว

$= x(40 - 2x)$

$= 40x - 2x^2$

ให้ $y = 40x - 2x^2$

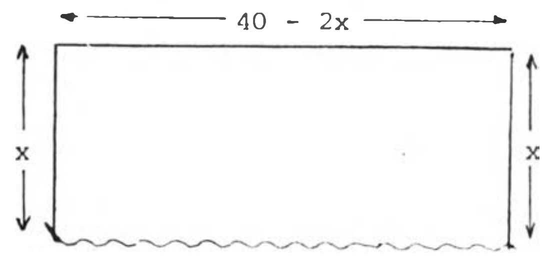
2. หาค่ามากที่สุดโดยใช้จุดวกกลับ

y จะมีค่ามากที่สุดเมื่อ x $= \frac{-b}{2a}$

$= \frac{-40}{2(-2)}$

$= 10$

ดังนั้น พื้นที่มากที่สุดก็ต่อเมื่อรั้วกว้าง 10 เมตรยาว 20 เมตร



4. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปการหาเซตคำตอบของอสมการกำลังสองโดยการเขียนกราฟ

การหาเซตคำตอบของอสมการกำลังสองโดยการเขียนกราฟ มีหลักดังนี้

1. สร้างฟังก์ชันสิ่งที่จะหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

   1.1 พิจารณาว่าโจทย์ต้องการหาค่าใดมากที่สุดหรือน้อยที่สุด

   1.2 ให้แทนสิ่งที่ไม่ทราบค่าด้วย x จำนวนหนึ่ง

   1.3 หาค่า y ในรูป x

2. นำฟังก์ชันมาเขียนกราฟและพิจารณาสิ่งที่โจทย์ต้องการจากกราฟ

5. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปการนำการหาค่าต่ำสุด หรือสูงสุดของฟังก์ชันมาแก้โจทย์ปัญหา

การนำการหาค่าต่ำสุด หรือสูงสุดของฟังก์ชันมาแก้โจทย์ปัญหามีหลัก ดังนี้

1. สร้างฟังก์ชันสิ่งที่จะหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

   1.1 พิจารณาว่าโจทย์ต้องการหาค่าใดมากที่สุดหรือน้อยที่สุดให้สิ่งนั้นแทนด้วย y

   1.2 ให้แทนสิ่งที่ไม่ทราบค่าด้วย x จำนวนหนึ่ง

   1.3 หาค่า y ในรูป x

2. หาค่าสูงสุดต่ำสุดโดยใช้จุดวกกลับ

6. ครูยกตัวอย่างให้นักเรียนช่วยกันทำ เช่น

โรงเรียนราษฎร์แห่งหนึ่งพบว่า ผลกำไรมีความสัมพันธ์กับจำนวนห้องเรียน ดังนี้ $y = -2x^2 + 88x$ ถ้า y เป็นกำไร x เป็นจำนวนห้องเรียน จงหาว่า ถ้าต้องการกำไรมากที่สุดจะต้องมีห้องกี่ห้อง

<u>ขั้นสรุป</u>

1. ครูให้นักเรียนสรุปหลักการหาเซตคำตอบของอสมการกำลังสองและแก้โจทย์ปัญหาฟังก์ชันกำลังสอง

<u>การวัดและประเมินผล</u>

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน	1. นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80%
2. ดูจากการทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง	2. นักเรียนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ 80%
3. ดูจากการทำแบบฝึกหัด 2.2 หน้า 56 ข้อ 11-14	3. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ประมาณ 80%

<u>แบบฝึกหัดเพิ่มเติม</u>

1. จงเขียนกราฟของ $f(x) = 2x^2 + 2x - 1$

2. ระยะความสูงที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ (s) สัมพันธ์กับเวลา (t) เป็นไปตามสมการ $s = 21t - 3t^2$ เมื่อ s มีหน่วยเป็นฟุตและ t มีหน่วยเป็นวินาที เวลาเท่าไรวัตถุจึงจะเคลื่อนที่ได้ระยะสูง 36 ฟุต

คาบที่ 11

หัวข้อเรื่อง ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Function) และชนิดของฟังก์ชัน

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

1. ยกตัวอย่างฟังก์ชันพหุนามได้อย่างถูกต้อง
2. บอกตัวแปร จำนวนจริง จำนวนเต็ม ซึ่งมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ได้อย่างถูกต้อง
3. เขียนรูปทั่วไปของฟังก์ชันพหุนามได้อย่างถูกต้อง
4. บอกฟังก์ชันพีชคณิตหรือฟังก์ชันอดิสัยได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้
5. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้อย่างถูกต้อง 80%
6. ทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง 80%

เนื้อหา

ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ โดยที่ $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มซึ่งมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ เช่น

$f(x) = x^3$

$f(x) = x^4 + x^2 - x + 4$

เมื่อ $n = 2$ ฟังก์ชันพหุนามจะเป็นฟังก์ชันกำลังสอง

$n = 1$ ฟังก์ชันพหุนามจะเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น

$n = 0$ ฟังก์ชันพหุนามจะเป็นฟังก์ชันคงตัว

ตัวอย่าง

1) ฟังก์ชันกำลังสองจะอยู่ในรูป $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ เมื่อ $a_2 \neq 0$

เช่น $f(x) = x^2 + 2x + 1$

2) ฟังก์ชันเชิงเส้นจะอยู่ในรูป $f(x) = a_1x + a_0$ เมื่อ $a_1 \neq 0$

เช่น $f(x) = x + 1$

3) **ฟังก์ชันคงตัว** จะอยู่ในรูป $f(x) = a_0$ เมื่อ a_0 คือค่าคงที่

เช่น $f(x) = 4$

จากข้างต้นจะเห็นว่า ฟังก์ชันกำลังสอง ฟังก์ชันเชิงเส้น และฟังก์ชันคงตัว เป็นฟังก์ชันพหุนาม

<u>ชนิดของฟังก์ชัน</u>

1) **ฟังก์ชันพีชคณิต** (Algebraic Function) คือฟังก์ชันที่ค่าของฟังก์ชันเขียนโดยใช้นิพจน์ (Expression) ซึ่งประกอบด้วยค่าคงตัว ตัวแปร และเครื่องหมาย บวก ลบ คูณ หาร กรณฑ์ ยกกำลัง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$f(x) = 3x - 4$$

$$f(x) = x^2 + x + 2$$

$$f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$$

$$f(x) = 1 + x$$

2) **ฟังก์ชันอดิสัย** (Transcendental Function) หมายถึงฟังก์ชันใด ๆ ที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต เช่น

ก. ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล (Exponential Function) คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = a^x$ เมื่อ $x \in R$ และ $a \in R^+$ โดยที่ $a \neq 1$ เช่น $f(x) = 2^x$

ฟังก์ชันชนิดนี้มักพบเสมอในเรื่องการเพิ่มของประชากร การเน่าเปื่อยของอินทรีย์วัตถุ การคิดดอกเบี้ยทบต้น

ข. ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithmic Function) คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = \log_a x$ เมื่อ $x \in R^+$ และ $a \in R^+$ โดยที่ $a \neq 1$

($\log_a x$ อ่านว่า ลอการิทึมของเอกซ์ฐาน A)

เช่น $f(x) = \log_2 x$

ฟังก์ชันชนิดนี้มักจะพบในเรื่องความเข้มของเสียง การสั่นสะเทือนของแผ่นดินไหว

ค. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Function) ตัวอย่างของฟังก์ชันตรีโกณมิติ คือ

$f(x) = \sin x$ เรียก f ว่าฟังก์ชันไซน์ (sin x อ่านว่า ไซน์เอกซ์)

$f(x) = \cos x$ เรียก f ว่าฟังก์ชันโคไซน์ (cos x อ่านว่า คอสน์เอกซ์)

ฟังก์ชันชนิดนี้มักพบในเรื่อง คลื่นเสียง คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

<u>โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง</u>

1. ฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันพหุนามตรงกับข้อใด

1.1 $y = \frac{5}{x}$

1.2 $y = 5x - 1$

1.3 $y = 3x^2 - x + 1$

2. ฟังก์ชันในข้อใดเป็นฟังก์ชันพีชคณิตหรือฟังก์ชันอดิสัย

2.1 $y = 2x + 1$

2.2 $y = \frac{5x + 3}{x}$

2.3 $y = \sin x + 1$

2.4 $y = \log_2^x$

<u>สื่อการเรียนการสอน</u> -

<u>กิจกรรมการเรียนการสอน</u>

<u>ขั้นนำ</u>

1. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันเชิงเส้น ค่าสัมบูรณ์ ขั้นบันได และกำลังสองให้นักเรียนจำแนกชนิดของฟังก์ชัน

<u>ขั้นสอน</u>

1. ครูอธิบายว่านอกจากฟังก์ชันข้างต้นแล้วยังมีฟังก์ชันอีกชนิดหนึ่งคือ ฟังก์ชันพหุนาม

2. ครูอธิบายรูปทั่วไปของฟังก์ชันพหุนาม

ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Function) คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

โดยที่ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง และ

n เป็นจำนวนเต็มซึ่งมากกว่าหรือเท่ากับ 0

3. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันพหุนามและฟังก์ชันชนิดอื่น ๆ ให้นักเรียนจำแนก

4. ครูอธิบายว่าจากฟังก์ชันที่กล่าวมาทั้งหมดเราสามารถแยกเป็น 2 ชนิด คือ ฟังก์ชันพีชคณิต และฟังก์ชันอดิสัย

5. ครูอธิบายฟังก์ชันพีชคณิต

<u>ฟังก์ชันพีชคณิต</u> (Algebraic Function) คือฟังก์ชันที่ค่าของฟังก์ชันเขียนโดยใช้นิพจน์ (Expression) ซึ่งประกอบด้วยค่าคงตัว ตัวแปร และเครื่องหมาย บวก ลบ คูณ หารกรณ์และกำลัง

6. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันเชิงเส้น ค่าสัมบูรณ์ ขั้นบันได กำลังสอง และพหุนาม แล้วถามนักเรียนว่าฟังก์ชันเหล่านั้นเป็นฟังก์ชันพีชคณิตหรือไม่

7. ครูอธิบายฟังก์ชันอดิสัย

<u>ขั้นสรุป</u>

1. ครูให้นักเรียนสรุปฟังก์ชันพีชคณิตและอดิสัยโดยให้นักเรียนยกตัวอย่าง

<u>การวัดและประเมินผล</u>

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน	1. นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80%
2. ดูจากการทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง	2. นักเรียนทำโจทย์พิเศษได้ประมาณ 80%
3. ดูจากแบบฝึกหัดเพิ่มเติม	3. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ประมาณ 80%

<u>แบบฝึกหัดเพิ่มเติม</u>

1. ฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันพหุนามตรงกับข้อใด

    1.1 $y = x^3 + x^2 + x + 1$

    1.2 $y = 3^{2x}$

    1.3 $y = 5$

    1.4 $y = \frac{x - 3}{x + 2}$

2. ฟังก์ชันในข้อใดเป็นฟังก์ชันพีชคณิตหรือฟังก์ชันอดิสัย

    2.1 $y = (\frac{1}{2})^x$

    2.2 $y = \log_3^x$

    2.3 $y = x - 1$

    2.4 $y = \frac{3x - 1}{x + 1}$

คาบที่ 12

<u>หัวข้อเรื่อง</u> นิยามของฟังก์ชันคอมโพสิท

<u>จุดประสงค์การเรียนรู้</u>

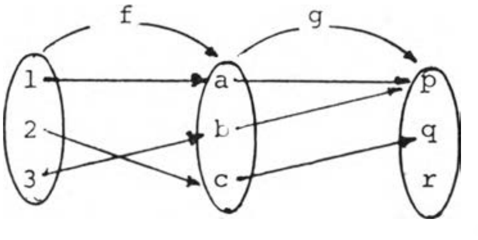
เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

1. หาค่าของฟังก์ชัน f เมื่อกำหนดค่า x ได้อย่างถูกต้อง
2. หาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
3. สร้างฟังก์ชันคอมโพสิท gof ได้อย่างถูกต้อง
4. สรุปนิยามของฟังก์ชันคอมโพสิทได้อย่างถูกต้อง
5. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้อย่างถูกต้อง 80%
6. ทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง 80%

<u>เนื้อหา</u>

นิยามของฟังก์ชันคอมโพสิท

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ดังแสดงในภาพ



จากภาพจะได้ $f(1) = a$, $f(2) = c$, $f(3) = b$

$g(a) = p$, $g(b) = p$, $g(c) = q$

จาก f และ g ที่กำหนดให้จะได้

$g(f(1)) = g(a) = p$

$g(f(2)) = g(c) = q$

$g(f(3)) = g(b) = p$

อาจสร้างฟังก์ชันใหม่เรียกว่า ฟังก์ชันคอมโพสิท gof (อ่านว่า จีโอเอฟ) เป็นฟังก์ชันจาก A ไป C กำหนดโดย

$(gof)(1) = g(f(1))$

$(gof)(2) = g(f(2))$

$(gof)(3) = g(f(3))$

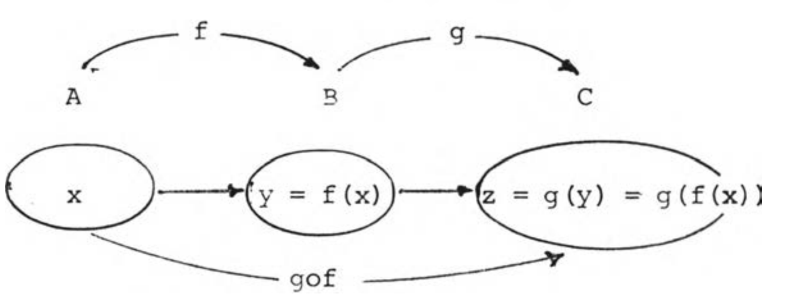
ดังนั้น $(gof)(1) = p$

$(gof)(2) = q$

$(gof)(3) = p$

นั่นคือ $gof = \{(1,p), (2,q), (3,p)\}$

** **จะเห็นว่า** gof **จะเกิดขึ้นได้เมื่อ** $R_f \subset D_g$



จากรูป จะได้ gof เป็นฟังก์ชันจาก A ไป C

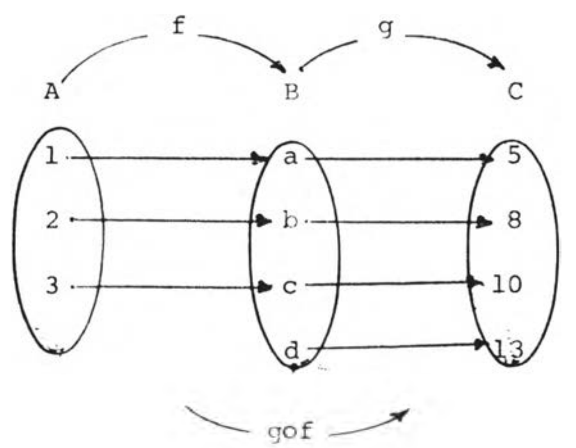
โดยที่ $(x,z) \in gof$ **หรือ** $z = (gof)(x)$

ดังนั้น $(gof)(x) = g(f(x)) = z$

กล่าวคือ ค่าของฟังก์ชัน gof **ที่** x **เท่ากับค่าของฟังก์ชัน** g **ที่** f(x)

จะเห็นว่า $R_f \subset D_g$ **และ** $D_{gof} = D_f$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u>



จากแผนภาพ $f = \{(1,a), (2,b), (3,c)\}$

$g = \{(a,5), (b,8), (c,10), (d,13)\}$

$(gof)(1) = g(f(1)) = g(a) = 5$

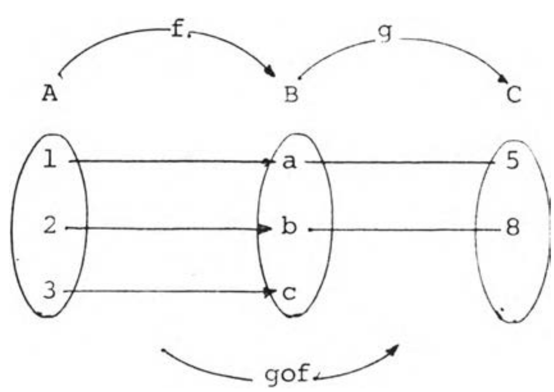
$(gof)(2) = g(f(2)) = g(b) = 8$

$(gof)(3) = g(f(3)) = g(c) = 10$

$\therefore gof = \{(1,5), (2,8), (3,10)\}$

* จะเห็นว่า gof จะเกิดขึ้นได้เมื่อ $R_f \subset D_g$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u>



จากแผนภาพ $f : A \longrightarrow B$ แต่ g ไม่เป็นฟังก์ชันจาก B ไป C

ดังนั้น $R_f \subset D_g$ จึงไม่เกิด gof

<u>นิยาม</u> ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน และ $R_f \subset D_g$

ฟังก์ชันคอมโพสิทของ f และ g เขียนแทนด้วย gof

กำหนดโดย $(gof)(x) = g(f(x))$ สำหรับทุก $x \in D_f$

จะเห็นว่า $D_{gof} = D_f$

ในกรณีที่ $R_f \not\subset D_g$ ถือว่าไม่มีฟังก์ชันคอมโพสิทของ f และ g

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> $f = \{(1,a),\ (3,b),\ (5,c)\}$, $g = \{(a,8),\ (b,11)$
$(c,13),\ (d,13)\}$

จงหา 1) gof 2) fog

1) หา gof

จะเห็นว่า $R_f \subset D_g$ ฉะนั้นจึงเกิด gof

$D_{gof} = D_f$

$gof(1) = g(f(1)) = g(a) = 8$

$gof(3) = g(f(3)) = g(b) = 11$

$gof(5) = g(f(5)) = g(c) = 13$

$\therefore gof = \{(1,8),\ (3,11),(5,13)\}$

2) หา fog

$\because R_g \subset D_f$

แต่ $R_g = \{8,11,13,15\}$, $D_f = \{1,3,5\}$

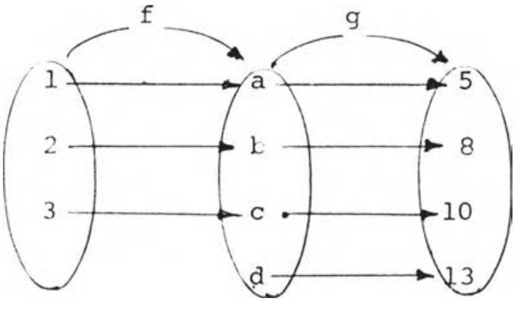
$\therefore R_g \not\subset D_f$

นั่นคือ fog เกิดไม่ได้

<u>แบบฝึกหัดพิเศษท้ายชั่วโมง</u>

จงหาฟังก์ชันคอมโพสิทถ้าหาได้

1.



2. ให้ $f = \{(1,a),(3,b),(5,c)\}$ และ $g = \{(a,8),(b,11),(c,13),(d,13)\}$

จงหา gof และ fog

<u>สื่อการเรียนการสอน</u> -

<u>กิจกรรมการเรียนการสอน</u>

<u>ขั้นนำ</u>

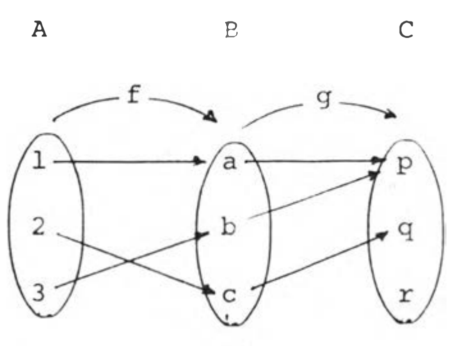
1. ครูทบทวนการหาค่าของฟังก์ชันที่ค่า x ใด ๆ

เช่นให้ $f(x) = x + 3$, $g(x) = 4x - 1$ ให้หาค่า $f(1)$, $f(-3)$, $f(a)$, $g(f(1))$, $g(f(-3)$, $g(f(a))$, $g(f(x))$

<u>ขั้นสอน</u>

1. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และ g เป็นฟังก์ชันจาก B ไป C โดยที่ $R_f \subset D_g$ แล้วสร้างฟังก์ชันขึ้นใหม่จาก A ไป C

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันดังแสดงในภาพ



gof

จากแผนภาพจะได้ $f(1) = a$, $f(2) = C$, $f(3) = b$

$g(a) = p$, $g(b) = p$, $g(c) = g$

จาก f และ g ที่กำหนดให้จะได้

$$g(f(1)) = g(a) = p$$

$$g(f(2)) = g(c) = q$$

$$g(f(3)) = g(b) = p$$

อาจสร้างฟังก์ชันใหม่เรียกว่า ฟังก์ชันคอมโพสิท gof (อ่านว่า จีโอเอฟ) เป็นฟังก์ชันจาก A ไป C กำหนดโดย

$$(gof)(1) = g(f(1))$$

$$(gof)(2) = g(f(2))$$

$$(gof)(3) = g(f(3))$$

ดังนั้น

$(gof)(1) \quad = \quad p$

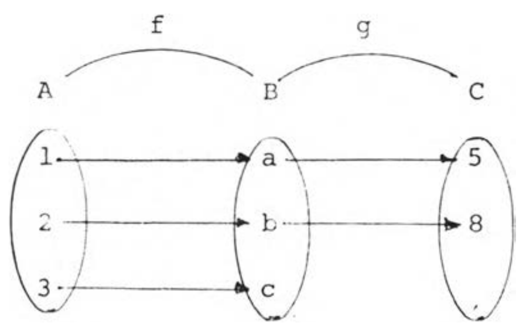
$(gof)(2) \quad = \quad q$

$(gof)(3) \quad = \quad p$

นั่นคือ $gof = \{(1,p),(2,q),(3,p)\}$

2. ครูให้นักเรียนสังเกตฟังก์ชัน gof ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไป C และ $R_f \subset D_g$

3. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันที่ไม่สามารถหาฟังก์ชันคอมโพสิทได้ เช่น



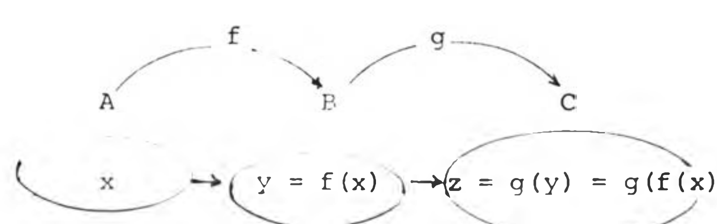
4. ครูให้นักเรียนสังเกตฟังก์ชัน gof ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไป C หรือไม่ และ $R_f \subset D_g$ หรือไม่

5. ครูอธิบายการสร้างฟังก์ชันคอมโพสิทโดยใช้ภาพประกอบ

ถ้าให้ $x \in A$, $y \in B$ และ $z \in C$ และ

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B โดยที่ $(x,y) \in f$ หรือ $y = f(x)$

g เป็นฟังก์ชันจาก B ไป C โดยที่ $(y,z) \in g$ หรือ $z = g(y) = g(f(x))$



จะได้ gof เป็นฟังก์ชันจาก A ไป C โดยที่ $(x,z) \in gof$ หรือ $z = (gof)(x)$

ดังนั้น $(gof)(x) = g(f(x)) = z$

6. ให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ของ R_f และ D_g และ D_{gof}

จะได้ $R_f \subset D_g$

$D_{gof} = D_f$

7. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปนิยามของฟังก์ชันคอมโพสิท

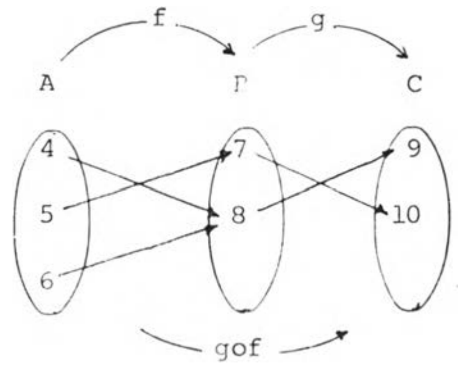
<u>นิยาม</u> ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน และ $R_f \subset D_g$

ฟังก์ชันคอมโพสิทของ f และ g เขียนแทนด้วย gof กำหนดโดย

$(gof)(x) = g(f(x))$ สำหรับทุก $x \in D_f$

8. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันให้หาฟังก์ชันคอมโพสิท

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> ให้ $f : A \to B$ และ $g : B \to C$ ดังแสดงในแผนภาพ



ดังนั้น gof เป็นฟังก์ชันจาก A ไป C โดยที่

$(gof)(4) = g(f(4)) = g(8) = 9$

$(gof)(5) = g(f(5)) = g(7) = 10$

$(gof)(6) = g(f(6)) = g(8) = 9$

$\therefore gof = \{(4,9), (5,10), (6,9)\}$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> กำหนดให้ $A = \{a,b,c\}$, $B = \{1,2,3\}$ และ $C = \{5,7\}$

$f = \{(a,1), (b,3), (c,3)\}$

$g = \{(1,5), (2,7), (3,7)\}$

เนื่องจาก $R_f = \{1,3\}$, $D_g = \{1,2,3\}$

จะได้ $R_f \subset D_g$ จึงมีฟังก์ชันคอมโพสิท gof

$\therefore$ gof $= \{(a,5), (b,7), (c,7)\}$

9. ครูให้นักเรียนสังเกตการหาฟังก์ชันคอมโพสิท

   1. gof จะมีได้ก็ต่อเมื่อ $R_f \subset D_g$

      ดังนั้น fog จะมีได้ก็ต่อเมื่อ $R_g \subset D_f$

   2. $D_{gof} = D_f$ ดังนั้นการหาค่าฟังก์ชัน gof จึงคล้ายกับการพิจารณาคู่อันดับจาก f ไป g

<u>ขั้นสรุป</u>

1. ครูให้นักเรียนสรุปการหาฟังก์ชันคอมโพสิทโดยใช้กลอน

f จาก A ไป B ที่กำหนด	g ปรากฏจาก B ไป C หนา
อีกทั้งเรนจ์ของ f ที่ให้มา	ทุกทุกค่าเป็นสับเซตโดเมน g
เกิดฟังก์ชัน A ไป C ดังที่คิด	เรียกคอมโพสิทฟังก์ชันอย่าฝันหนี
(gof)(x) ตรงคู่ชี้	กับค่า g(f(x)) นั้นเท่ากันเอย

<u>การวัดและประเมินผล</u>

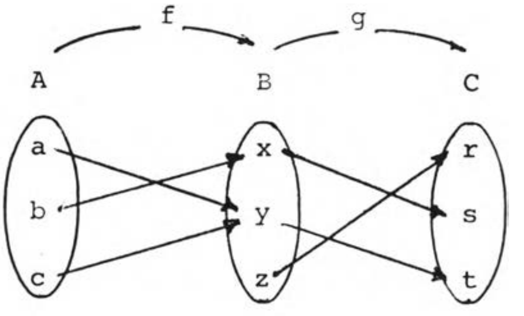
การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน	1. นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80%
2. ดูจากการทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง	2. นักเรียนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ประมาณ 80%
3. ดูจากการทำแบบฝึกหัด	3. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ประมาณ 80%

<u>แบบฝึกหัดเพิ่มเติม</u>

1. $f = \{(1,a),(3,b),(5,c)\}$, $g = \{(a,8),(b,11),(c,13),(d,15)\}$

   จงหา (1) gof (2) fog

2. กำหนดฟังก์ชัน $f : A \longrightarrow B$ และ $g : B \longrightarrow C$ ดังภาพ



   จงหา (1) gof

   (2) R_f, R_g , R_{gof}

คาบที่ 13

<u>หัวข้อเรื่อง</u> การหาฟังก์ชันคอมโพสิท

<u>จุดประสงค์การเรียนรู้</u>

เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

1. บอกความหมายของฟังก์ชันคอมโพสิทได้อย่างถูกต้อง
2. บอกโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันในรูปการกำหนดเงื่อนไขได้อย่างถูกต้อง
3. หาฟังก์ชันคอมโพสิทได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดฟังก์ชันสองฟังก์ชันใด ๆ ให้
4. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้อย่างถูกต้อง 80%
5. ทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง 80%

<u>เนื้อหา</u>

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $f(x) = 2x$ และ $g(x) = x + 3$ จะมี gof หรือ fog หรือไม่ เพราะเหตุใด ถ้ามีจงหา gof, fog

<u>วิธีทำ</u>

เนื่องจาก $f(x) = 2x$

จะได้ $D_f = \{x/x \in R\}$; $R_f = \{x/x \in R\}$

เนื่องจาก $g(x) = x + 3$

จะได้ $D_g = \{x/x \in R\}$; $R_g = \{x/x \in R\}$

1) gof มีเพราะว่า $R_f \subset D_g$

$(gof)(x) = g(f(x))$

$= g(2x)$

$= 2x + 3$

ดังนั้น gof $= \{(x,y) / y = 2x + 3\}$

2) fog มีเพราะว่า $R_g \subset D_f$

$(fog)(x) = f(g(x))$

$= f(x + 3)$

$= 2(x + 3)$

$= 2x + 6$

ดังนั้น fog $= \{(x,y) \mid y = 2x + 6\}$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $f(x) = x + 1$ และ $g(x) = \sqrt{x}$ จะมี gof หรือ fog หรือไม่ เพราะเหตุใด ถ้ามีจงหา gof

<u>วิธีทำ</u>

เนื่องจาก $f(x) = x + 1$

จะได้ $D_f = \{x / x \in R\}$; $R_f = \{y / y \in R\}$

เนื่องจาก $g(x) = x$

จะได้ $D_g = \{x / x \geq 0\}$; $R_g = \{y / y \geq 0\}$

1) gof ไม่มีเพราะว่า $R_f \not\subset D_g$

2) fog มีเพราะว่า $R_g \subset D_f$

$(fog)(x) = f(g(x))$

$= f(\sqrt{x})$

$= \sqrt{x} + 1$

ดังนั้น fog $= \{x / y = x + 1\}$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนด $f(x) = x^2 + 2x + 1$ และ $g(x) = 3x - 1$ จงหา $(gof)(-1)$ และ $(fog)(6)$

<u>วิธีทำ</u>

เนื่องจาก $f(x) = x^2 + 2x + 1$

$= (x + 1)^2$

จะได้ $D_f = \{x / x \in R\}$

$R_f = \{y / y \geq 0\}$

เนื่องจาก $g(x) = 3x - 1$

จะได้ $D_g = \{x / x \in R\}$

$R_g = \{y / y \in R\}$

เพราะว่า $R_f \subset D_g$ และ $D_g \subset D_f$ จึงทำให้หา gof และ fog ได้ตามลำดับ

1) $(gof)(x) = g(f(x))$

$= g(x^2 + 2x + 1)$

$= 3(x^2 + 2x + 1) - 1$

$(gof)(-1)$ หาได้เพราะว่า $-1 \in D_f$

$\therefore gof(-1) = 3((-1)^2 + 2(-1) + 1) - 1$

$= -1$

2) $(fog)(x) = f(g(x))$

$= f(3x - 1)$

$= (3x - 1)^2 + 2(3x - 1) + 1$

$(fog)(6)$ หาได้เพราะว่า $6 \in D_g$

$\therefore (fog)(6) = (3(6) - 1)^2 + 2(3(6) - 1) + 1$

$= 324$

โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

1) ให้ $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x + 1$ จงหา $g(f(x))$ และ $f(g(x))$

2) ให้ $f(x) = 2x^2 - 1$, $g(x) = x + 1$ จงหาค่า $(fog)(2)$

สื่อการเรียนการสอน

แผ่นใสสรุปเพลงฟังก์ชันคอมโพสิท

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

1. ครูทบทวนความหมายของฟังก์ชันคอมโพสิทโดยร้องเพลงประกอบ

2. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันให้นักเรียนหาฟังก์ชันคอมโพสิทและทบทวนเงื่อนไขที่ใช้ในการหาฟังก์ชันคอมโพสิท และนิยามฟังก์ชันคอมโพสิท

3. ครูทบทวนการหาค่าของฟังก์ชันที่ค่า x ใด ๆ

เช่น ถ้า $f(x) = x + 3$, $g(x) = 4x - 1$ ให้หาค่า $f(a)$, $g(a)$ $g(a + b)$, $g(f(x))$ และ $f(g(x))$

<u>ขั้นสอน</u>

1. ครูกำหนดฟังก์ชันให้นักเรียนหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันดังตาราง

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์	ความสัมพันธ์ระหว่างเรนจ์และโดเมน	เกิด/ไม่เกิดคอมโพสิทฟังก์ชัน
$f(x) = 2x$	$\{x/x \in R\}$	$\{y/y \in R\}$	$R_f \subset D_g$	หา gof ไม่ได้
$g(x) = \sqrt{x}$	$\{x/x \geq 0\}$	$\{y/y \geq 0\}$	$R_g \subset D_f$	หา fog ได้
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

2. จากตารางให้นักเรียนพิจารณาว่าจะเกิดคอมโพสิทฟังก์ชันใดบ้าง

3. ครูยกตัวอย่างดังตารางอีก 2-3 ตัวอย่าง

4. จากตารางให้นักเรียนหาฟังก์ชันคอมโพสิทของฟังก์ชันที่กำหนดให้ในรูปการกำหนดเงื่อนไข

<u>ขั้นสรุป</u>

1. ให้นักเรียนสรุปการหาฟังก์ชันคอมโพสิทโดยใช้เพลง

<u>เพลงฟังก์ชันคอมโพสิท</u>

เนื้อร้อง นายวรรธนพงศ์ สิทธิโชค ทำนอง พบรักหน้าอำเภอ

ฟังก์ชันคอมโพสิทนั้นหนา จะบอกให้ว่า อย่าได้ไปกลัว
เรนจ์ f ที่มีมากไข เป็นสับเซตโดเมน g ต้อง sure
gof เขารู้กันทั่ว (gof)(x) อย่ามั่ว
จงอย่าเพิ่งกลัวว่าตัวจะผิดไป g(f(x)) คือค่าที่ได้
g(f(x)) จำให้ขึ้นใจ จะยากเพียงใดก็จำได้ sure sure

<u>การวัดและประเมินผล</u>

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน	1. นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80%
2. ดูจากการทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง	2. นักเรียนทำโจทย์พิเศษได้ประมาณ 80%
3. ดูจากการทำแบบฝึกหัด 2.3 ข้อ 3-6	3. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ประมาณ 80%

<u>แบบฝึกหัดเพิ่มเติม</u>

1. ถ้า $f : R \longrightarrow R$ และ $g : R \longrightarrow R$ ซึ่งกำหนดดังนี้

$$f(x) = x^2 - 2|x|$$

$$g(x) = x^2 + 1$$

จงหา (1) $(gof)(x)$

(2) $(fog)(x)$

(3) $(gof)(3)$

(4) $(fog)(-2)$

2. $f : R \longrightarrow R$ และ $g : R \longrightarrow R$ ซึ่งนิยามโดย

$$f(x) = x^2 + 3x + 1$$

$$g(x) = 2x - 3$$

จงหา (1) fog

(2) gof

(3) gog

(4) fof

คาบที่ 14

หัวข้อเรื่อง ความหมายของฟังก์ชันอินเวอร์ส

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

1. หาอินเวอร์สของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
2. บอกความหมายของฟังก์ชันอินเวอร์สได้อย่างถูกต้อง
3. เขียนสัญลักษณ์แทนฟังก์ชันอินเวอร์สได้อย่างถูกต้อง
4. เขียนฟังก์ชันอินเวอร์สจากโจทย์ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
5. บอกโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันอินเวอร์สได้อย่างถูกต้อง
6. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้อย่างถูกต้อง 80%
7. ทำโจทย์แบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง 80%

เนื้อหา

ความหมายของฟังก์ชันอินเวอร์ส

เนื่องจากฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ ดังนั้นอินเวอร์สของฟังก์ชันจึงมีคุณสมบัติเช่นเดียวกันกับอินเวอร์สของความสัมพันธ์ แต่มีข้อที่น่าสังเกตคืออินเวอร์สของฟังก์ชันไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชันเสมอไป เช่น

1) $f = \{(a,2),(2,3),(3,4)\}$ เป็นฟังก์ชัน

$f^{-1} = \{(2,1),(3,2),(4,3)\}$ เป็นฟังก์ชัน

2) $h = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$ เป็นฟังก์ชัน

$h^{-1} = \{(a,1),(b,2),(c,3)\}$ เป็นฟังก์ชัน

3) $g = \{(1,2),(2,3),(3,2)\}$ เป็นฟังก์ชัน

$g^{-1} = \{(2,1),(3,2),(2,3)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

ในที่นี้จะเรียก อินเวอร์สของฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันว่า <u>ฟังก์ชันอินเวอร์ส</u>

ฟังก์ชันที่จะมีฟังก์ชันอินเวอร์สได้นั้น ต้องเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

<u>สรุป</u> 1) อินเวอร์สของฟังก์ชัน f ที่เป็นฟังก์ชัน เรียกว่า <u>ฟังก์ชันอินเวอร์ส</u> (Inverse Function)

2) ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 กำหนดโดย $y = f(x)$ จะสามารถหาฟังก์ชันอินเวอร์สของ f ได้โดยเขียน x อยู่ในเทอมของ y (สลับที่ระหว่าง x กับ y)

จะได้ว่า $x = f^{-1}(y)$ เมื่อ $y \in D_{f^{-1}}$

หรือ $y = f^{-1}(x)$ เมื่อ $x \in D_{f^{-1}}$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> พิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งกำหนดโดย $f(x) = 3x + 1$ เขียน f ให้อยู่ในรูปเซตจะได้

$$f = \{(x,y) \mid y = 3x + 1\}$$

$$\therefore f^{-1} = \{(x,y) \mid x = 3y + 1\}$$ (สลับตำแหน่ง x กับ y)

$$= \{(x,y) \mid x - 1 = 3y\}$$

$$= \left\{(x,y) \mid y = \frac{x-1}{3}\right\}$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้น f^{-1} จึงเป็นฟังก์ชัน f^{-1} เขียนโดยบอกเงื่อนไขจะได้ $y = \frac{x-1}{3}$

หรือ $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> กำหนดให้ $f(x) = x^2$ จงหา f^{-1} และพิจารณาว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะเหตุใด

<u>วิธีทำ</u> เขียนฟังก์ชัน f ในรูปเซตจะได้

$$f = \{(x,y) \mid y = x^2\}$$

$$\therefore f^{-1} = \{(x,y) \mid x = y^2\}$$ (สลับตำแหน่ง x กับ y)

$$= \{(x,y) \mid y = \pm\sqrt{x}\}$$

จะเห็นว่า f^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมี $(1, -1) \in f^{-1}$ และ $(1,1) \in f^{-1}$

ข้อสังเกต 1. ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้ว f^{-1} จะเป็นฟังก์ชัน 1-1 ด้วย

2. ถ้า f ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้ว f^{-1} จะไม่เป็นฟังก์ชัน

หมายเหตุ

การหาอินเวอร์สของฟังก์ชัน f กระทำได้ 2 แบบ คือ

1) สลับที่ระหว่าง x กับ y ที่คู่อันดับ

2. สลับที่ระหว่าง x กับ y ที่เงื่อนไข

3) ถ้าสลับที่ระหว่าง x กับ y ทั้งที่คู่อันดับและเงื่อนไขด้วย (ฟังก์ชัน f จะเหมือนเดิม)

โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง

1. ให้ $f = \{(1,1),(2,8),(3,27),(4,64)\}$ จงหา f^{-1}

2. ให้ $g = \{(x,y) \mid y = x^2\}$ จงหา g^{-1}

สื่อการเรียนการสอน -

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

1. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันแล้วให้นักเรียนหาอินเวอร์สของฟังก์ชัน แล้วพิจารณาว่าอินเวอร์สของฟังก์ชันว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ ดังตาราง

ฟังก์ชัน	อินเวอร์สของฟังก์ชัน	อินเวอร์สของฟังก์ชัน	
		เป็นฟังก์ชัน	ไม่เป็นฟังก์ชัน
$f = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$	$f^{-1} = \{(2,1),(3,2),(4,3)\}$	✓	-
.			
.			
.			

2. ครูให้นักเรียนพิจารณาอินเวอร์สของฟังก์ชันจะมี 2 กรณี คือ

กรณี 1 อินเวอร์สของฟังก์ชันไม่เป็นฟังก์ชัน

กรณี 2 อินเวอร์สของฟังก์ชันเป็นฟังก์ชัน

3. ครูบอกนักเรียนว่าเรียกอินเวอร์สของฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันว่า "<u>ฟังก์ชันอินเวอร์ส</u>"

<u>ขั้นสอน</u>

1. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันแล้วให้นักเรียนหาฟังก์ชันอินเวอร์สดังตาราง

ฟังก์ชัน	f: 1-1		อินเวอร์สของฟังก์ชัน	ฟังก์ชันอินเวอร์ส		ฟังก์ชันอินเวอร์ส	
	เป็น	ไม่เป็น		เป็น	ไม่เป็น	เป็นฟังก์ชัน 1-1	ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1
$f=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$	✓	-	$f^{-1}=\{(2,1),(3,2),(4,3)\}$	✓	-	✓	-
$g=\{(1,2),(2,3),(3,2)\}$	-	✓	$g^{-1}=\{(2,1),(3,2),(2,3)\}$	-	✓	-	✓

2. ครูให้สังเกตฟังก์ชันที่มีฟังก์ชันอินเวอร์ส

<u>ข้อสังเกต</u>

1. ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้ว f^{-1} เป็นฟังก์ชันอินเวอร์ส และ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน 1-1
2. ถ้า f ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้ว f^{-1} ____________ (เป็น/ไม่เป็น) ฟังก์ชันอินเวอร์ส และ f^{-1} ____________ (เป็น/ไม่เป็น) ฟังก์ชัน 1-1
3. โดเมนของ f^{-1} เท่ากับเรนจ์ของ f

3. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันให้นักเรียนช่วยกันหาฟังก์ชันอินเวอร์ส เช่น

$f = \{(x,y),(m,n),(p,q)\}$ ฯลฯ

4. ครูอธิบายการหาฟังก์ชันอินเวอร์สเมื่อฟังก์ชันอยู่ในรูปเงื่อนไข

สำหรับฟังก์ชันที่เขียนในรูปแบบบอกเงื่อนไขนั้นการหาฟังก์ชันอินเวอร์สก็ใช้หลักการเดียวกับการหาฟังก์ชันอินเวอร์สของฟังก์ชันแบบแจกแจงสมาชิก คือโดยการสลับตำแหน่งระหว่างสมาชิกตัวหน้ากับตัวหลังซึ่งทำได้ 2 ลักษณะ คือ

1) สลับที่ x กับ y ที่ (x,y) ของเงื่อนไข

$$f_1 = \{(x,y) \ / \ y = 3x + 1\}$$

จะได้ $f_1^{-1} = \{(x,y) \ / \ y = 3x + 1\}$

2) สลับที่ x กับ y ที่เงื่อนไข

$$f_1 = \{(x,y) \ / \ y = 3x + 1\}$$

$$f_1^{-1} = \{(x,y) \ / \ x = 3y + 1\}$$

หมายเหตุ

แต่ถ้าทำทั้งลักษณะที่ 1 และ 2 พร้อมกับฟังก์ชันจะไม่เปลี่ยนแปลง

5. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันแบบเงื่อนไขแล้วให้นักเรียนช่วยกันหาฟังก์ชันอินเวอร์ส

ขั้นสรุป

1. ครูให้นักเรียนสรุปการหาฟังก์ชันอินเวอร์สโดยการถามตอบ

การวัดและประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน	1. นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80%
2. ดูจากการทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง 3 ข้อ	2. นักเรียนทำโจทย์พิเศษได้ประมาณ 80%
3. ดูจากการทำแบบฝึกหัด 2.4 ข้อ 3-9	3. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ประมาณ 80%

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

1. ให้ $f = \{(x,y) \ / \ y = 3x - 2\}$ จงหา f^{-1}

2. ให้ $g = \{(a,1),(d,2),(b,3),(c,4)\}$ และ $f = \{(a,1),(b,5)\}$

จงหา $(gog^{-1})(1)$, $(g^{-1}og)(a)$ และ $(gof^{-1})(5)$

คาบที่ 15

หัวข้อเรื่อง กราฟของฟังก์ชันอินเวอร์ส

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

1. บอกแกนสมมาตรของกราฟของฟังก์ชันและฟังก์ชันอินเวอร์สได้อย่างถูกต้อง
2. เขียนกราฟของฟังก์ชันอินเวอร์สได้อย่างถูกต้อง
3. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้อย่างถูกต้อง 80%
4. ทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง 80%

เนื้อหา

กราฟของฟังก์ชันอินเวอร์ส

ฟังก์ชันอินเวอร์สของฟังก์ชัน $y = x$ คือฟังก์ชัน $x = y$ ซึ่งจะเห็นได้ว่าเป็นฟังก์ชันเดิม ดังนั้นถ้าพิจารณาในแง่ของฟังก์ชันอินเวอร์สฟังก์ชันนี้จึงมีคุณสมบัติพิเศษ ฟังก์ชันอินเวอร์สของฟังก์ชันนี้คือ ตัวของมันเอง และพบว่ากราฟของฟังก์ชันใดก็ตามกับอินเวอร์สของฟังก์ชันนั้นไม่ว่าจะเป็นฟังก์ชันหรือไม่ จะมีเส้นตรง $y = x$ เป็นแกนสมมาตร

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = 2x + 1\}$

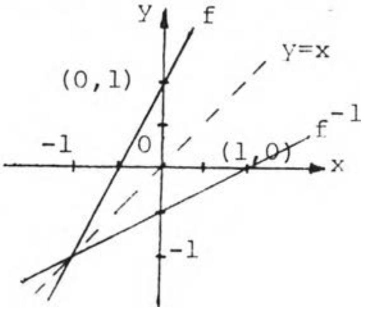
จงหา f^{-1} แล้วเขียนกราฟของ f และ f^{-1}

วิธีทำ จาก $f = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = 2x + 1\}$

ดังนั้น $f^{-1} = \{(x,y) \in R \times R \ / \ x = 2y + 1\}$

$= \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = \frac{x - 1}{2}\}$

กราฟของ f และ f^{-1} คือ



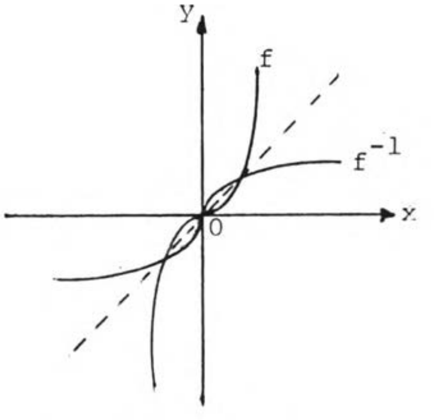
จากกราฟจะเห็นว่าเมื่อลากเส้นจากจุด (a,b) ของ f ไปยัง (b,a) ของ f^{-1} เช่น (0,1) ของ f ไปยัง (1,0) ของ f^{-1} เส้นเหล่านี้จะตั้งฉากกับเส้นตรง y = x และจะแสดงได้ว่าจุด (a,b) และ (b,a) อยู่ห่างจากเส้นตรง y = x เป็นระยะทางเท่ากัน เรียก (a,b) และ (b,a) ว่าเป็นจุดสมมาตร โดยมีเส้น y = x เป็นแกนสมมาตร กล่าวคือ ถ้าพับรูปนี้ตามแนว y = x แล้วกราฟของฟังก์ชันทั้งสองจะทับกันพอดี

__ตัวอย่างที่ 2__ กำหนดให้ $f = \{(x,y) \ / \ y = x^3\}$ จงหา f^{-1} แล้วเขียนกราฟของ f และ f^{-1}

__วิธีทำ__ จาก $f = \{(x,y) \ / \ y = x^3\}$

ดังนั้น $f^{-1} = \{(x,y) \ / \ x = y^3\}$

$= \{(x,y) \ / \ y = \sqrt[3]{x}\}$

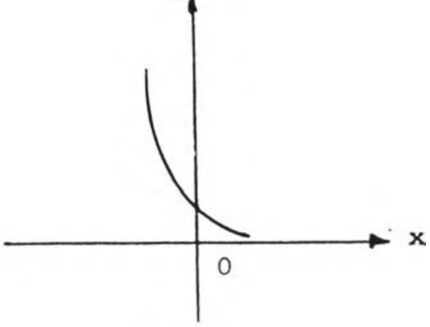


(กราฟของ f และ f^{-1} มีเส้นตรง y = x เป็นแกนสมมาตร)

__โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง__

1. ให้ f(x) = 2x + 3 จงเขียนกราฟของ f และ f^{-1}

2.



จากรูปกราฟจงหากราฟ f^{-1}

<u>สื่อการเรียนการสอน</u> กระดาษลอกลาย

<u>กิจกรรมการเรียนการสอน</u>

<u>ขั้นนำ</u>

1. ครูทบทวนความหมายของฟังก์ชันอินเวอร์สโดยการถามตอบ

2. ครูยกตัวอย่าง 2-3 ตัวอย่างให้นักเรียนหาฟังก์ชันอิเวอร์ส

<u>ขั้นสอน</u>

1. ครูยกตัวอย่างความสัมพันธ์ $f = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = x\}$ ให้นักเรียนหา f^{-1}

2. ครูให้นักเรียนเขียนกราฟของ f และ f^{-1} และสังเกตความสัมพันธ์ของกราฟ f และ f^{-1}

3. ครูให้นักเรียนเขียนกราฟของ f และ f^{-1} เมื่อ $f = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = 2x + 1\}$

4. ให้นักเรียนสังเกความสัมพันธ์ของกราฟ f และ f^{-1} กับกราฟของความสัมพันธ์ $f = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = x\}$

จากกราฟจะเห็นว่าเมื่อลากเส้นจากจุด (a,b) ของ f ไปยัง (b,a) ของ f^{-1} เช่น (1,0) และ (0,1) เส้นเหล่านี้จะตั้งฉากกับเส้นตรง y = x และจะได้จุด (1,0) และ (0,1) อยู่ห่างจากเส้นตรง y = x เท่ากัน

เรียกจุด (1,0) และ (0,1) ว่าจุดสมมาตร โดยมี y = x เป็นแกนสมมาตร

5. ให้นักเรียนวาดกราฟของ f และ f^{-1} ลงในกระดาษลอกลายแล้วพับกระดาษตามเส้นตรง y = x สังเกตกราฟของ f และ f^{-1}

<u>ข้อสังเกต</u>

1. จุด (1,0) และ (0,1) ทับกัน

2. จุดในรูปที่ (a,b) ของ f ทับกับจุด (b,a) ของ f^{-1} ทุกจุด

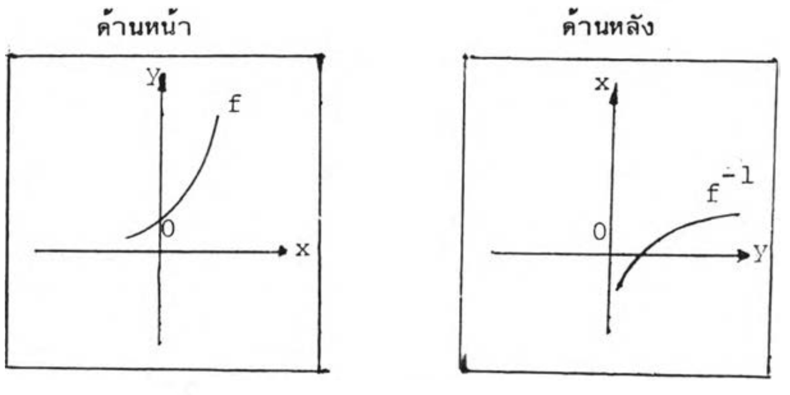
6. ครูอธิบายจากข้อ 5 แสดงกราฟของ f และ f^{-1} เมื่อเส้นตรง y = x เป็นแกนสมมาตร

7. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันให้วาดกราฟของ f และ f^{-1} อีก 2-3 ตัวอย่าง

8. ให้นักเรียนสรุปความสัมพันธ์กราฟของ f และ f^{-1}

กราฟของฟังก์ชัน f และ f^{-1} จะสมมาตรกันโดยเส้นตรง $y = x$

9. ครูอธิบายการหากราฟของ f^{-1} เมื่อมีกราฟของ f คือเมื่อมีกราฟของ f หากราฟของ f^{-1} ได้โดยกลับกระดาษกราฟของ f จากหน้าเป็นหลัง แกน x เป็นแกน y และแกน y เป็นแกน x ลายกราฟของ f จะกลายเป็นกราฟของ f^{-1}



10. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันให้เขียนกราฟของฟังก์ชันและฟังก์ชันอินเวอร์ส

<u>ขั้นสรุป</u>

1. ครูให้นักเรียนสรุปกราฟของฟังก์ชันอินเวอร์ส

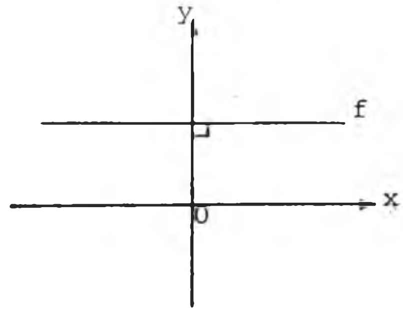
<u>การวัดและประเมินผล</u>

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน 2. ดูจากการทำใจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง 2 ข้อ 3. ดูจากการทำแบบฝึกหัด 2.4 ข้อ 2-9	1. นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80% 2. นักเรียนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ประมาณ 80% 3. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ประมาณ 80%

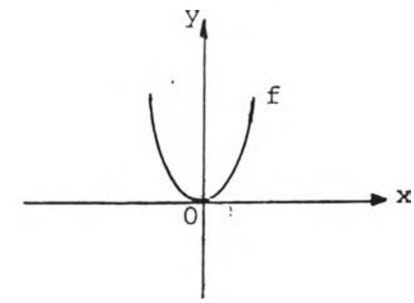
<u>**แบบฝึกหัดเพิ่มเติม**</u>

1. ฟังก์ชันที่มีกราฟดังข้อต่อไปนี้ ฟังก์ชันใดมีฟังก์ชันอินเวอร์ส

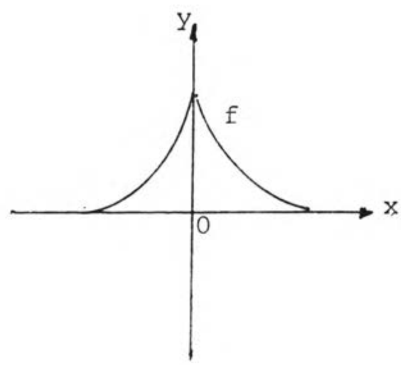
(ก)



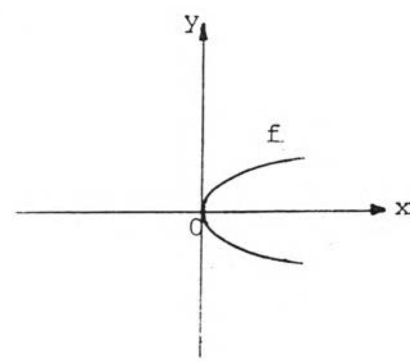
(ข)



(ค)

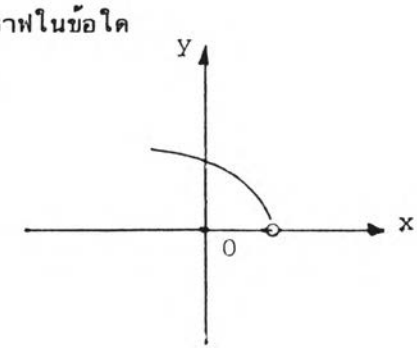


(ง)

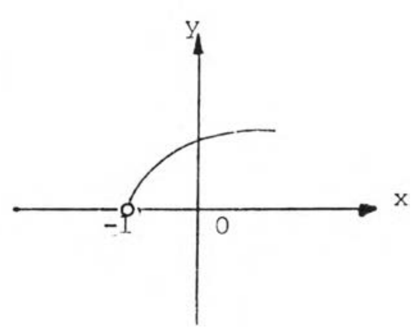


2. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = -x^2 + 1$ เมื่อ $x > 0$ กราฟของ f^{-1} คือกราฟในข้อใด

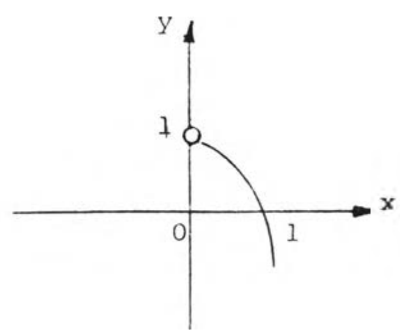
(ก)



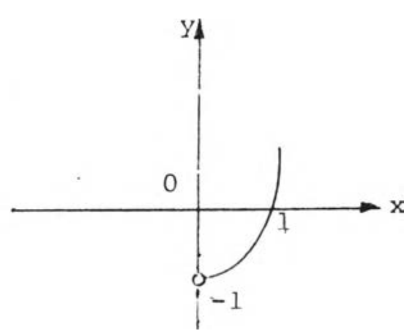
(ข)



(ค)



(ง)



คาบที่ 16

หัวข้อเรื่อง การบวกพีชคณิตของฟังก์ชันและการลบพีชคณิตของฟังก์ชัน

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

1. หาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
2. หาโดเมนร่วมระหว่างฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
3. หาผลบวกและลบพีชคณิตของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
4. บอกโดเมนและเรนจ์ของผลบวกและลบพีชคณิตของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
5. สรุปนิยามการบวกและลบพีชคณิตของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
6. ทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้อย่างถูกต้อง 90%
7. ทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง 90%

เนื้อหา

นิยาม กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มี D_f และ D_g เป็นโดเมนของฟังก์ชัน f และ g ตามลำดับ

$$f + g = \{(x,y) \;/\; y = f(x) + g(x) \text{ และ } x \in D_f \cap D_g\}$$

$$f - g = \{(x,y) \;/\; y = f(x) - g(x) \text{ และ } x \in D_f \cap D_g\}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f = \{(1,3),(2,1),(3,2),(4,0)\}$

$g = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

จงหา f + g และ f - g

วิธีทำ

$D_f = \{1,2,3,4\}$, $D_g = \{1,2,3\}$

$D_f \cap D_g = \{1,2,3\}$

$\therefore f + g = \{(1,5),(2,4),(3,6)\}$

$\therefore f - g = \{(1,1),(2,-2),(3,-2)\}$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> กำหนดให้ $f = \{(x,y) \mid y = x$ และ $0 \leqslant x \leqslant 5\}$

$g = \{(x,y) \mid y = 1\}$

จงหา f + g และ f - g พร้อมโดเมนและเรนจ์และเขียนกราฟ

<u>วิธีทำ</u>

$D_f = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 5\}$, $D_g = R$

จะได้ $D_{f+g} = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 5\}$

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

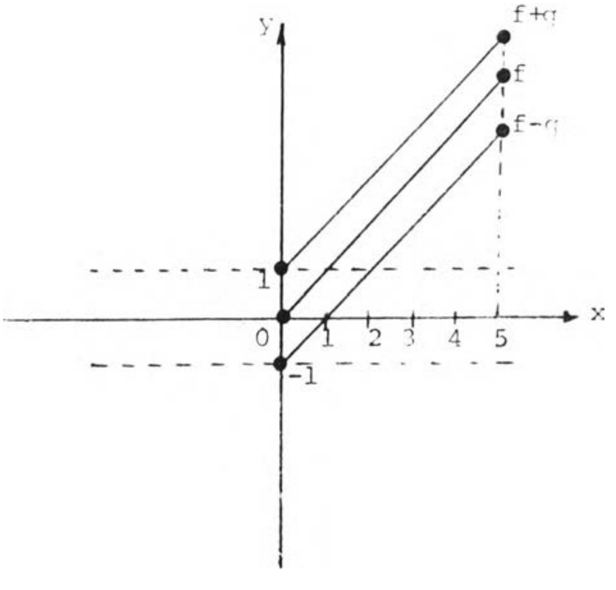
$= x + 1 , 0 \leqslant x \leqslant 5$

และ $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

$= x - 1$

ดังนั้น $f + g = \{(x,y) \mid y = x + 1$ และ $0 \leqslant x \leqslant 5\}$

$f - g = \{(x,y) \mid y = x - 1$ และ $0 \leqslant x \leqslant 5\}$



<u>สื่อการเรียนการสอน</u> แผนภูมิสรุปการบวกและการลบพีชคณิตของฟังก์ชัน

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> กำหนดให้ $f(x) = x + 1$; $g(x) = x^2$ จงหา $(f + g)(x)$ และ $(f - g)(x)$

<u>วิธีทำ</u>

$D_f = \{x / x \in R\}$, $D_g = \{x / x \in R\}$

$D_f \cap D_g = \{x / x \in R\}$

จาก $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$= (x + 1) + (x^2)$

$= x^2 + x + 1$

จาก $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

$= (x + 1) - (x^2)$

$= -x^2 + x + 1$

<u>โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง</u>

1) ให้ $f = \{(1,3),(2,5),(3,7),(4,9)\}$, $g = \{(2,6),(3,8),(4,10)\}$

จงหา $f + g$ และ $f - g$

2) ให้ $f = \{(x,y) / y = x^2\}$, $g = \{(x,y) / y = 2x + 1\}$

จงหา $f + g$ และ $f - g$

<u>กิจกรรมการเรียนการสอน</u>

<u>ขั้นนำ</u>

1. ครูให้นักเรียนยกตัวอย่างฟังก์ชันที่เขียนแบบแจกแจงสมาชิกมาสัก 3-4 ตัวอย่าง แล้วครูเขียนบนกระดานดำ

2. จากตัวอย่างที่นักเรียนยกมา ครูให้นักเรียนหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันเหล่านั้น

3. ครูถามนักเรียนว่า ฟังก์ชันใดบ้างที่มีโดเมนเหมือนกัน

4. ครูถามนักเรียนว่า จากฟังก์ชันที่มีโดเมนเหมือนกันนั้น เรนจ์ของฟังก์ชันคืออะไร

5. ครูถามนักเรียนว่า ถ้าเรานำเรนจ์ที่มีโดเมนเหมือนกันมาบวกกัน คู่อันดับใหม่ที่ได้มีอะไรบ้าง

6. จากนั้นครูนำคู่อันดับใหม่มาเขียนอยู่ในรูปของเซต แล้วครูให้นักเรียนพิจารณาว่าเซตใหม่ที่ได้นี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่ นักเรียนจะตอบว่าเป็นฟังก์ชัน

<u>ขั้นสอน</u>

1. ครูให้นักเรียนพิจารณาและตอบคำถามครูว่า เซตใหม่ที่ได้นี้เกิดจากความสัมพันธ์ของฟังก์ชันใด และนำฟังก์ชันนั้นมาทำอะไรกัน นักเรียนจะตอบว่า เกิดจากฟังก์ชัน f และฟังก์ชัน g และนำมาบวกกัน หรือ f+g

2. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันแบบแจกแจงสมาชิกสัก 2-3 ตัวอย่าง แล้วครูให้นักเรียนหาผลบวกของฟังก์ชันเหล่านั้น พร้อมทั้งเขียนกราฟของฟังก์ชันใหม่ที่หามาได้

3. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูปแบบบอกเงื่อนไขสัก 3-4 ตัวอย่าง และให้นักเรียนหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันเหล่านั้น

4. ครูให้นักเรียนจับคู่ฟังก์ชันที่มีโดเมนเหมือนกัน

5. ครูถามนักเรียนว่า ถ้าจะนำฟังก์ชันแต่ละคู่มาบวกกันจะทำอย่างไร ถ้านักเรียนตอบไม่ได้ ครูอธิบายและแสดงวิธีทำให้นักเรียนดังตัวอย่างที่ 2

6. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันแบบบอกเงื่อนไข แล้วครูให้นักเรียนหาผลบวกพีชคณิตของฟังก์ชันโดยใช้วิธีการถามตอบ พร้อมทั้งเขียนกราฟของฟังก์ชันใหม่

7. ครูใช้คำถาม-ถามตอบให้นักเรียนช่วยกันสรุปการบวกพีชคณิตของฟังก์ชันพร้อมกับครูแผนภูมิบนกระดานดำ

8. ครูบอกนักเรียนว่า เราสามารถเขียนการบวกพีชคณิตของฟังก์ชันอยู่ในรูปสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$f+g = \left\{(x,y) \quad y = f(x) + g(x) \text{ และ } x \in D_f \cap D_g\right\}$$

9. ในทำนองเดียวกัน (วิธีการสอนการบวกของพีชคณิตฟังก์ชัน) ครูสอนการลบกันของพีชคณิตฟังก์ชัน โดยครูยกตัวอย่างฟังก์ชันแบบแจกแจงสมาชิก 2-3 ตัวอย่าง แล้วครูให้นักเรียนหาผลลบของฟังก์ชัน โดยให้นักเรียนพิจารณา

10. จากการบวกของพีชคณิตฟังก์ชัน พร้อมกันนั้นครูให้นักเรียนเขียนฟังก์ชันใหม่

11. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันแบบบอกเงื่อนไข 2-3 ตัวอย่าง และครูใช้คำถามถามตอบให้นักเรียนหาผลลบของฟังก์ชัน พร้อมทั้งเขียนกราฟ

12. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุป การลบพีชคณิตของฟังก์ชันโดยการใช้คำถามถามตอบพร้อมทั้งครูติดแผนภูมิบนกระดานดำ

13. ครูใช้คำถามถามตอบเพื่อให้นักเรียนสรุปสัญลักษณ์การลบของพีชคณิตที่สามารถเขียนได้ดังนี้

$$f-g = \{(x,y) \;/\; y = f(x)-g(x) \text{ และ } x \in D_f \cap D_g\}$$

<u>ขั้นสรุป</u>

1. ครูใช้คำถามถามตอบ ให้นักเรียนช่วยกันสรุปการบวกและการลบพีชคณิตของฟังก์ชันอีกครั้งหนึ่ง

<u>การวัดและประเมินผล</u>

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน	1. นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80%
2. ดูจากการทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง	2. นักเรียนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ประมาณ 80%
3. ดูจากการทำแบบฝึกหัด	3. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ประมาณ 80%

<u>แบบฝึกหัดเพิ่มเติม</u>

กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ x & , \quad 0 \leq x < 1 \\ x^2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

จงหา $f + g$ และ $f - g$ พร้อมทั้งโดเมนและเรนจ์ และเขียนกราฟ

<u>หมายเหตุ</u>

ในการยกตัวอย่างฟังก์ชันแบบแจกแจงสมาชิกและแบบบอกเงื่อนไข และครูให้นักเรียนหาโดเมนและเรนจ์นั้น ครูอาจจะตีตารางดังตัวอย่างข้างล่างต่อไปนี้

ฟังก์ชัน	โดเมนของฟังก์ชัน	เรนจ์ของฟังก์ชัน	โดเมนร่วม	ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชัน
$f_1=\{(1,2),(2,4),(3,5),(4,7)\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{2,4,5,7\}$	$\{1,2,3\}$	$f_1+g_1=\{(1,3),(2,6),(3,8)\}$
$g_1=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$		$f_1-g_1=\{(1,1),(2,2),(3,2)\}$

คาบที่ 17

<u>หัวข้อเรื่อง</u> การคูณพีชคณิตของฟังก์ชัน และการหารพีชคณิตของฟังก์ชัน

<u>จุดประสงค์การเรียนรู้</u>

เมื่อเรียนจบคาบแล้วนักเรียนสามารถ

1. หาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
2. หาโดเมนร่วมระหว่างฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
3. หาผลคูณและหารพีชคณิตของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
4. บอกโดเมนและเรนจ์ของผลคูณและหารพีชคณิตของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
5. สรุปนิยามการคูณและหารพีชคณิตของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
6. ทำใจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้อย่างถูกต้อง 80%
7. ทำแบบฝึกหัดได้อย่างถูกต้อง 80%

<u>เนื้อหา</u>

<u>นิยาม</u> กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มี D_f และ D_g เป็นโดเมนของฟังก์ชัน g และ f ตามลำดับ

$$f.g = \{(x,y) / y = f(x).g(x) \text{ และ } x \in D_f \cap D_g\}$$

$$\frac{f}{g} = \{(x,y) / y = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ และ } x \in D_f \cap D_g,\ g(x) \neq 0\}$$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> กำหนดให้ $f = \{(1,5),(2,10),(3,15),(4,20),(5,25)\}$ และ $g = \{(1,1),(3,3),(5,5),(7,7)\}$ จงหา $f.g$ และ $\frac{f}{g}$

<u>วิธีทำ</u>

$$D_f = \{1,2,3,4,5\} \ , \quad D_g = \{1,3,5,7\}$$

$$D_f \cap D_g = \{1,3,5\}$$

$$\therefore D_{f.g} = D_{\frac{f}{g}} = \{1,3,5\}$$

$$\therefore f.g = \{(1,5),(3,45),(5,125)\}$$

$$\therefore \frac{f}{g} = \{(1,5),(3,5),(5,5)\}$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x + 1$ จงหา $f.g$ และ $\frac{f}{g}$ พร้อมทั้งโดเมนและเรนจ์

วิธีทำ

$$D_f = \{x / x \in R\} \; ; \quad D_g = \{x / x \in R\}$$

$$D_f \cap D_g = \{x / x \in R\}$$

$$D_{f.g} = \{x / x \in R\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x / x \in R, \; g(x) \neq 0\}$$

จาก $(f.g)(x) = f(x).g(x)$

$$= (x^2 - 1)(x + 1)$$

$$= x^3 + x^2 - x - 1$$

จาก $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \; ; \; g(x) \neq 0$

$$= \frac{x^2 - 1}{x + 1} \; ; \; x + 1 \neq 0$$

$$= x - 1 \; ; \; x \neq -1$$

$$\therefore f.g = \{(x,y) / y = x^3 + x^2 - x - 1\}$$

$$\therefore \frac{f}{g} = \{(x,y) / y = x - 1, \; x \neq -1\}$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f(x) = x + 1$ และ $g(x) = x^2$ จงหา $(f.g)(x)$ และ $(\frac{f}{g})(x)$

วิธีทำ

$$D_f = \{x / x \in R\} , \quad D_g = \{x / x \in R\}$$

$$D_f \cap D_g = \{x / x \in R\}$$

จาก $(f.g)(x) = f(x).g(x)$

$$= (x + 1) x^2$$

$$= x^3 + x^2$$

$$\text{จาก } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad , g(x) \neq 0$$

$$= \frac{x+1}{x^2} \quad , x^2 \neq 0$$

$$= \frac{x+1}{x^2} \quad , x \neq 0$$

<u>โจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง</u>

1. ให้ $f = \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$, $g = \{(1,3),(3,5),(5,0),(7,9)\}$ จงหา $f.g$ และ $\frac{f}{g}$

2. ให้ $f = \{(x,y) \;/\; y = x + 1\}$, $g = \{(x,y) \;/\; y = 2x\}$ จงหา $f.g$ และ $\frac{f}{g}$

<u>สื่อการเรียนการสอน</u> แผนภูมิสรุปการคูณและหารพีชคณิตของฟังก์ชัน

<u>กิจกรรมการเรียนการสอน</u>

<u>ขั้นนำ</u>

1. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันแบบแจกแจงสมาชิกและแบบบอกเงื่อนไขอย่างละตัวอย่าง ครูใช้คำถามตอบให้นักเรียนช่วยกันหาผลบวกและผลลบพีชคณิตของฟังก์ชัน

<u>ขั้นสอน</u>

1. จากตัวอย่าง ครูใช้คำถามถามนักเรียนว่า ถ้าครูต้องการผลคูณพีชคณิตของฟังก์ชันจะทำอย่างไร โดยให้นักเรียนใช้หลักการเดียวกันกับการบวกและการลบของฟังก์ชัน ถ้านักเรียนตอบไม่ได้หรือตอบไม่สมบูรณ์ ครูอธิบายเพิ่มเติม

2. ครูให้นักเรียนยกตัวอย่างการคูณพีชคณิตของฟังก์ชันทั้งแบบแจกแจงสมาชิก และแบบบอกเงื่อนไข และใช้คำถาม ถามตอบเพื่อให้นักเรียนช่วยกันหาผลลัพธ์ พร้อมกับเขียนกราฟของฟังก์ชันใหม่ที่ได้

3. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปนิยามการคูณพีชคณิตของฟังก์ชัน และสัญลักษณ์การคูณของฟังก์ชัน พร้อมกับครูติดแผนภูมิบนกระดานดำ

4. ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันแบบแจกแจงสมาชิก 2-3 ตัวอย่าง และให้นักเรียนช่วยกันหาผลหารพีชคณิตของฟังก์ชัน โดยให้นักเรียนใช้หลักการเดียวกันกับการคูณพีชคณิตของฟังก์ชัน พร้อมกับให้นักเรียนเขียนกราฟของฟังก์ชันใหม่ที่หาให้

5. ครูยกตัวอย่างดังตัวอย่างที่ 2 ให้นักเรียนหาผลลัพธ์ในการหารพีชคณิตของฟังก์ชันโดยครูให้นักเรียนพิจารณาหลักในการทำคล้ายกับการคูณฟังก์ชัน แต่ครูจะต้องเน้นว่า ในการหารจำนวนใด ๆ ตัวหารนั้นจะต้องไม่เป็นศูนย์เพราะฉะนั้นการหารฟังก์ชันก็เหมือนกัน ตัวหารของฟังก์ชันก็จะต้องไม่เป็นศูนย์ด้วย (ซึ่งครูอาจจะใช้ถามนักเรียนก็ได้ ถ้านักเรียนตอบไม่ได้ครูจึงบอก)

6. ครูยกตัวอย่างการหารพีชคณิตของฟังก์ชันแบบบอกเงื่อนไข 2-3 ตัวอย่าง และให้นักเรียนช่วยกันหาผลลัพธ์ดังตัวอย่างที่ 3 และให้นักเรียนเขียนกราฟด้วย

7. ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปนิยามการหารพีชคณิตของฟังก์ชัน และสัญลักษณ์ที่ใช้ในการหารพีชคณิตของฟังก์ชัน โดยใช้วิธีการถามตอบ พร้อมกับครูติดแผนภูมิสรุป

<u>ขั้นสรุป</u>

1. ครูให้นักเรียนสรุปข้อแตกต่างระหว่างการคูณและการหารพีชคณิตของฟังก์ชัน

<u>การวัดและประเมินผล</u>

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักเรียน 2. ดูจากการทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมง 3. ดูจากการทำแบบฝึกหัด	1. นักเรียนตอบคำถามได้ประมาณ 80% 2. นักเรียนทำโจทย์พิเศษท้ายชั่วโมงได้ประมาณ 80% 3. นักเรียนทำแบบฝึกหัดได้ประมาณ 80%

<u>แบบฝึกหัดเพิ่มเติม</u>

1. กำหนดให้ $f(x) = \frac{2}{3x+1}$, $g(x) = \sqrt{9-x}$

จงหา $f.g$ และ $\frac{f}{g}$ พร้อมทั้งโดเมนและเรนจ์ และเขียนกราฟ

2. กำหนดให้ $f(x) = \frac{|x|}{x-1}$, $g(x) = \begin{cases} 1 & , x < 0 \\ x & , 0 \le x \le 1 \\ x^2 & , x > 1 \end{cases}$

จงหา $f.g$ และ $\frac{f}{g}$ พร้อมทั้งโดเมนและเรนจ์

หมายเหตุ

ในการยกตัวอย่างฟังก์ชันแบบแจกแจงสมาชิกและแบบบอกเงื่อนไข และครูให้นักเรียนหาโดเมนและเรนจ์นั้น ครูอาจจะตีตารางดังตัวอย่างต่อไปนี้

ฟังก์ชัน	โดเมนของฟังก์ชัน	เรนจ์ของฟังก์ชัน	โดเมนร่วม	ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชัน
$f_1=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{2,3,4,5\}$	$\{1,2,3\}$	$f_1 \cdot g_1 =$ ________
$g_2=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$		$\frac{f_1}{g_1} =$ ________

ปัญหาที่ควรเน้น

1. ขั้นตอนในการคูณและหารพีชคณิตของฟังก์ชันแบบบอกเงื่อนไข

ขั้นแรก ดูขอบเขตของตัวแปร x หรือหาโดเมนของฟังก์ชันในแต่ละฟังก์ชัน

ขั้นที่สอง ดูว่าฟังก์ชันที่นำมาคูณและหารนั้นมีโดเมนร่วมกันหรือไม่

ขั้นที่สาม นำค่าของฟังก์ชัน x มาคูณและหารกัน แล้วจะได้ค่าของฟังก์ชันที่ x ใหม่ ซึ่งโดเมนของฟังก์ชันใหม่คือ โดเมนที่ร่วมกันระหว่างฟังก์ชันเดิมนั่นเอง

ในการหารพีชคณิตของฟังก์ชันนั้น ฟังก์ชันที่นำมาหารจะต้องไม่เป็นศูนย์ นั่นคือ นอกจากฟังก์ชันที่มาหารจะไม่เท่ากับศูนย์แล้ว จะต้องไม่มีค่า x ใด ๆ ที่ทำให้ฟังก์ชันนั้นเป็นศูนย์ ถ้ามีจะต้องยกเว้นที่ค่านั้น แต่ฟังก์ชันที่เป็นตัวตั้งอาจจะเป็นศูนย์หรือไม่ก็ได้

2. ถ้าโดเมนของฟังก์ชันที่นำมาคูณและหารกันนั้นไม่มีโดเมนร่วมกัน เลยจะนำฟังก์ชันเหล่านั้นมาคูณและหารกันไม่ได้

ชุดการเรียนการสอนรายบุคคล เรื่อง "ฟังก์ชัน"

ชุดการเรียนการสอนที่ 1

เรื่อง

ความหมายของฟังก์ชัน

บัตรคำสั่ง

ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. ทำบัตรกิจกรรม
2. ศึกษาจากบัตรเนื้อหาอีกครั้งหนึ่งถ้าไม่เข้าใจ หลังจากที่ทำบัตรกิจกรรมแล้ว
3. ทำบัตรแบบฝึกหัด หรือบัตรงานพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
4. ทำบัตรทดสอบหรือบัตรปัญหาพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย

บัตรเนื้อหา

เรื่อง 1. ความหมายของฟังก์ชัน

1.1 ความหมายของฟังก์ชัน

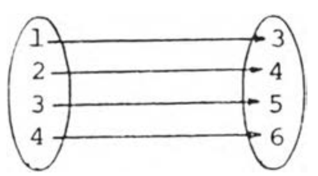
<u>นิยาม</u> ฟังก์ชันคือ ความสัมพันธ์ซึ่งในสองคู่อันดับใด ๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องไม่เท่ากัน

หรือ

ฟังก์ชัน f คือ ความสัมพันธ์ซึ่งถ้ามี $(x,y) \in f$ และ $(x,z) \in f$ แล้ว $y = z$

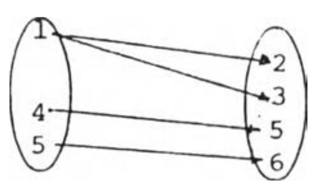
<u>ความสัมพันธ์ที่เขียนแบบแจกแจงสมาชิก</u>

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> $r_1 = \{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)\}$



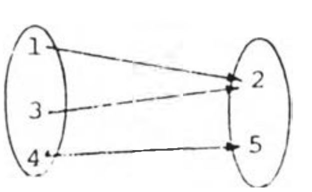
r_1 เป็นฟังก์ชัน เพราะไม่มีคู่อันดับใดที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันเลย

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> $r_2 = \{(1,2),(1,3),(4,5),(5,6)\}$



r_2 ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แต่สมาชิกตัวหลังต่างกัน ตัวอย่างของคู่อันดับนี้ได้แก่ (1,2), (1,3)

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> $r_3 = \{(1,2),(3,2),(4,5)\}$



r_3 เป็นฟังชัน เพราะไม่มีคู่อันดับใดที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันเลย

<u>ความสัมพันธ์ที่เขียนแบบบอกเงื่อนไข</u>

การพิจารณาว่าความสัมพันธ์ r ซึ่งเขียนแบบบอกเงื่อนไข เป็นฟังก์ชันหรือไม่ อาจใช้วิธีการดังนี้

ก. ให้ $(x,y) \in r$ และ $(x,z) \in r$

แล้วเขียน y ในรูปของ x และเขียน z ในรูปของ x โดยใช้เงื่อนไขของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้

ถ้า $y = z$ แสดงว่า r เป็นฟังก์ชัน

$y \neq z$ แสดงว่า r ไม่เป็นฟังก์ชัน

ข. ถ้าสามารถยกตัวอย่างคู่อันดับสองคู่อันดับในความสัมพันธ์ที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แต่สมาชิกตัวหลังต่างกันจะสรุปได้ทันทีว่า <u>ความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชัน</u>

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จงแสดงว่า $f = \{(x,y) \ / \ y = x^2 + 1\}$ เป็นฟังก์ชัน

<u>วิธีทำ</u> ให้ $(x,y) \in f$ และ $(x,z) \in f$

จะได้ $y = x^2 + 1$ และ $z = x^2 + 1$

สรุปได้ว่า $y = z$

แสดงได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> $g = \{(x,y) \ / \ y^2 = x\}$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากมีคู่อันดับ $(1,-1) \in g$ และ $(1,1) \in g$

g ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งสองเหมือนกัน แต่สมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งสองนี้ต่างกัน

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> จงแสดงว่า $f = \{(x,y) \ / \ y = x + 1\}$ เป็นฟังก์ชัน

<u>วิธีทำ</u> ให้ $(x,y) \in f$ และ $(x,z) \in f$

จะได้ $y = x + 1$ และ $z = x + 1$

สรุปได้ว่า $y = z$

แสดงได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> $f = \{(x,y) \ / \ x = |y|\}$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากมีคู่อันดับ $(1,-1) \in f$ และ $(1,1) \in f$

g ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งสอง เหมือนกัน แต่สมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งสองนี้ต่างกัน

บัตรกิจกรรม

เรื่อง 1. ความหมายของฟังก์ชัน

1.1 ความหมายของฟังก์ชัน

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

1. บอกนิยามของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
2. บอกได้ว่าความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ข้อใดเป็นฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง

กิจกรรม

ให้นักเรียนพิจารณาข้อความข้างล่างนี้

ในชีวิตประจำวัน มนุษย์ต้องเกี่ยวข้องกับบุคคลและสิ่งต่าง ๆ อยู่ตลอดเวลา เริ่มตั้งแต่ตื่นนอนในตอนเช้า สิ่งที่จะต้องทำคือ แปรงฟัน ล้างหน้า อาบน้ำ ฯลฯ ดังนั้นสิ่งที่เราจะต้องเกี่ยวข้องด้วยก็คือ แปรงสีฟัน ยาสีฟัน สบู่ ฯลฯ บุคคลที่จะต้องเกี่ยวข้องด้วยก็มี บิดา มารดา พี่น้อง เพื่อน ฯลฯ เมื่อมาพิจารณาดูความเกี่ยวข้องใดความเกี่ยวข้องหนึ่ง สิ่งที่เราอาจเห็นได้หรือทราบได้ก็คือ สิ่งที่มีความเกี่ยวข้องนั้น ๆ ต่อกัน เช่น การแปรงฟัน เป็นความเกี่ยวข้องหนึ่ง ดังนี้ วุฒิชัยชอบใช้ยาสีฟันคอลเกต นิตยาชอบใช้ยาสีฟันดาร์กี้ ระวิวรรณชอบใช้ยาสีฟันใกล้ชิด และกรีฑายุทธ ชอบใช้ยาสีฟันวิเศษนิยม จากที่กล่าวมาเราทราบแต่เพียงใครเกี่ยวข้องกับยาสีฟันยี่ห้อใดด้วย "การชอบใช้" และสามารถเขียนเป็นแผนภาพหรือคู่อันดับได้ ดังนี้

(วุฒิชัย, คอลเกต)

(นิตยา, ดาร์กี้)

(ระวิวรรณ, ใกล้ชิด)

(กรีฑายุทธ, วิเศษนิยม)

จะเห็นว่าความเกี่ยวข้องหนึ่ง ทำให้เกิดการจับคู่ของสิ่งต่าง ๆ สองพวกที่มีความเกี่ยวข้องนั้น ๆ ต่อกัน ซึ่งในวิชาคณิตศาสตร์เราเรียก "<u>ความเกี่ยวข้อง</u>" ว่า "<u>ความสัมพันธ์</u>"

จากนิยามความสัมพันธ์ กล่าวว่า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$ ซึ่ง $A \times B$ คือผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B ซึ่งคือเซตของคู่อันดับ (a,b) ทั้งหมด โดยที่ a เป็นสมาชิกของเซต A และ b เป็นสมาชิกของเซต B

ดังนั้น ความสัมพันธ์ข้างต้นอาจเขียนเป็นเซตได้คือ {(วุฒิชัย,คอลเกต), (นิตยา,คาร์กี้), (ระวิวรรณ,ใกล้ชิด), (กรีทายุทธ,วิเศษนิยม)}

ในบางกรณี เซตสองเซตที่มีความสัมพันธ์กันนั้น สมาชิกแต่ละสมาชิกในเซตแรกมีความสัมพันธ์กับสมาชิกในเซตที่สอง เพียงสมาชิกเดียวเป็นอย่างมาก ในกรณีเช่นนี้กล่าวว่า "<u>ความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชันจากเซตที่หนึ่งไปยังเซตที่สอง</u>"

<u>ตัวอย่างที่ 1</u>

(วุฒิชัย, คอลเกต)

(นิตยา, คาร์กี้)

(ระวิวรรณ, ใกล้ชิด)

(กรีทายุทธ, วิเศษนิยม)

จากความสัมพันธ์ของเซตของคนกับเซตของยาสีฟัน จะเห็นว่า วุฒิชัยมีความสัมพันธ์กับยาสีฟันคอลเกตอย่างเดียว นิตยามีความสัมพันธ์กับยาสีฟันคาร์กี้อย่างเดียว ระวิวรรณมีความสัมพันธ์กับยาสีฟันใกล้ชิดอย่างเดียว และกรีทายุทธมีความสัมพันธ์กับยาสีฟันวิเศษนิยมอย่างเดียว ดังนั้น ความสัมพันธ์นี้จึงเป็นฟังก์ชัน

<u>ตัวอย่างที่ 2</u>

(วุฒิชัย, คอลเกต)

(นิตยา, คอลเกต)

(ระวิวรรณ, ใกล้ชิด)

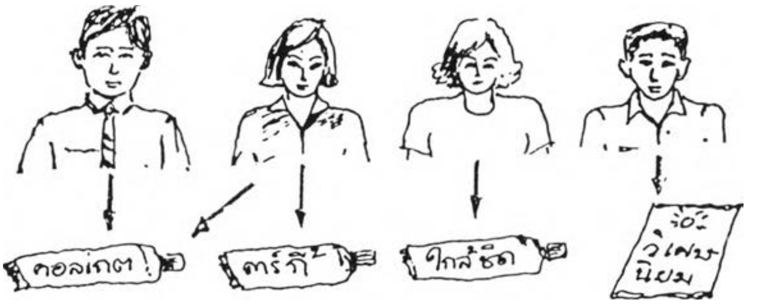
(กรีทายุทธ, วิเศษนิยม)

เขียนความสัมพันธ์ในรูปของเซตได้ ดังนี้

{(วุฒิชัย,คอลเกต), (นิตยา,คอลเกต), (ระวิวรรณ,ใกล้ชิด), (กรีทายุทธ,วิเศษนิยม)}

จากความสัมพันธ์ของเซตของคนกับเซตของยาสีฟัน จะเห็นว่า วุฒิชัยมีความสัมพันธ์กับยาสีฟันคอลเกตอย่างเดียว นิตยามีความสัมพันธ์กับยาสีฟันคอลเกตอย่างเดียว ระวิวรรณมีความสัมพันธ์กับยาสีฟันใกล้ชิดอย่างเดียว และกรีฑายุทธมีความสัมพันธ์กับยาสีฟันวิเศษนิยมอย่างเดียว ดังนั้นความสัมพันธ์นี้จึงเป็นฟังก์ชัน

<u>ตัวอย่างที่ 3</u>



(วุฒิชัย, คอลเกต)

(นิตยา, คอลเกต)

(นิตยา, ดาร์กี้)

(ระวิวรรณ, ใกล้ชิด)

(กรีฑายุทธ, วิเศษนิยม)

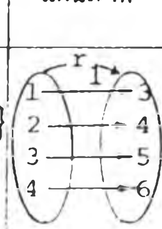
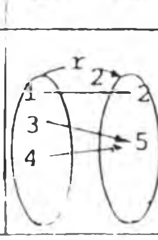
เขียนความสัมพันธ์ในรูปของเซตได้ ดังนี้

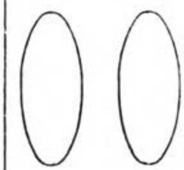
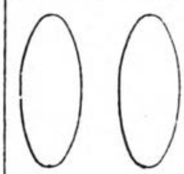
{(วุฒิชัย, คอลเกต), (นิตยา, คอลเกต), (นิตยา, ดาร์กี้), (ระวิวรรณ, ใกล้ชิด), (กรีฑายุทธ, วิเศษนิยม)}

จากความสัมพันธ์ของเซตของคนกับเซตของยาสีฟัน จะเห็นว่า นิตยามีความสัมพันธ์กับยาสีฟันคอลเกต และยาสีฟันดาร์กี้ซึ่งเกินหนึ่งสิ่ง ดังนั้นความสัมพันธ์นี้จึงไม่เป็นฟังก์ชัน

<u>การพิจารณาความสัมพันธ์ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่อาจแยกเป็น 3 กรณี</u> คือ

<u>กรณีที่ 1</u> สมาชิกตัวหน้าต่างกัน

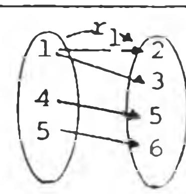
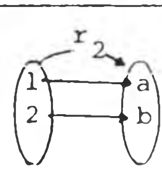
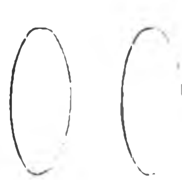
ลำดับที่	ความสัมพันธ์	แผนภาพ	ฟังก์ชัน		เหตุผล
			เป็น	ไม่เป็น	
1	$r_1 = \{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)\}$		✓	-	สมาชิกแต่ละสมาชิกในเซตแรกมีความสัมพันธ์กับสมาชิกในเซตที่สองเพียงตัวเดียว
2	$r_2 = \{(1,2),(3,2),(4,5)\}$		✓	-	เหมือนเดิม

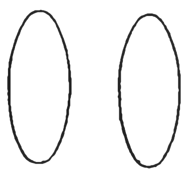
ลำดับที่	ความสัมพันธ์	แผนภาพ	ฟังก์ชัน		เหตุผล
			เป็น	ไม่เป็น	
3	$r_3 = \{(1,a),(2,a),(3,a)\}$		___	___	___ ___ ___
4	$r_4 = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$		___	___	___ ___ ___

จากตารางจะสังเกตได้ว่า

กรณีที่สมาชิกในเซตแรกในความสัมพันธ์ต่างกันทั้งหมด ความสัมพันธ์นั้น ___________ ฟังก์ชัน
เป็น/ไม่เป็น

<u>กรณีที่ 2</u> สมาชิกตัวหน้าเหมือนกันบางตัว

ลำดับที่	ความสัมพันธ์	แผนภาพ	ฟังก์ชัน		เหตุผล
			เป็น	ไม่เป็น	
1	$r_1 = \{(1,2),(1,3),(4,5),(5,6)\}$		-	✓	มีคู่อันดับ (1,2) และ (1,3) มีสมาชิกในเซตแรกมีความสัมพันธ์กับสมาชิกในเซตที่สอง 2 ตัว
2	$r_2 = \{(1,a),(2,b),(2,b)\}$		✓	-	มี (2,b) กับ (2,b) ซึ่งสมาชิกในเซตแรกเหมือนกัน และสมาชิกในเซตที่สองเหมือนกัน ดังนั้นจึงถือว่าเป็นคู่อันดับเดียวกัน
3	$r_3 = \{(1,a),(1,b),(3,c)\}$		___	___	___ ___ ___

ลำดับที่	ความสัมพันธ์	แผนภาพ	ฟังก์ชัน		เหตุผล
			เป็น	ไม่เป็น	
4	$r_4=\{(0,1),(0,4),(1,1),(1,2),(2,3)\}$		___	___	________________ ________________ ________________

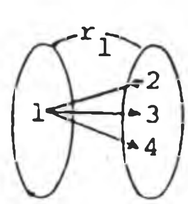
จากตารางจะสังเกตได้ว่า

ถ้าสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับเหมือนกันบางตัว ให้พิจารณาสมาชิกตัวหลังคือ

สมาชิกตัวหลังเหมือนกัน จะสรุปได้ว่าความสัมพันธ์ ________ ฟังก์ชัน
เป็น/ไม่เป็น

สมาชิกตัวหลังต่างกัน จะสรุปได้ว่าความสัมพันธ์ ________ ฟังก์ชัน
เป็น/ไม่เป็น

<u>กรณีที่ 3</u> สมาชิกตัวหน้าเหมือนกันทุกตัว

ลำดับที่	ความสัมพันธ์	แผนภาพ	ฟังก์ชัน		เหตุผล
			เป็น	ไม่เป็น	
1	$r_1=\{(1,2),(1,3),(1,4)\}$		—	✓	มีคู่อันดับ (1,2),(1,3) และ (1,4) ซึ่งสมาชิกในเซตแรกมีความสัมพันธ์กับสมาชิกในเซตที่สอง 3 ตัว
2	$r_2=\{(1,2),(1,2)\}$		___	___	________________ ________________ ________________

จากตารางจะสรุปได้ว่า

ถ้าสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับเหมือนกันทุกตัว ให้พิจารณาสมาชิกตัวหลัง คือ

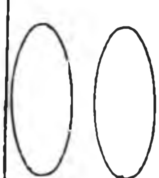
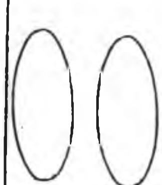
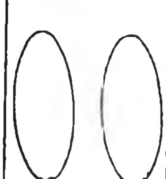
สมาชิกตัวหลังเหมือนกัน จะสรุปได้ว่าความสัมพันธ์ ________ ฟังก์ชัน
เป็น/ไม่เป็น

สมาชิกตัวหลังต่างกัน จะสรุปได้ว่าความสัมพันธ์ ________ ฟังก์ชัน
เป็น/ไม่เป็น

จากการพิจารณาความสัมพันธ์ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ทั้ง 3 กรณี จะสรุปได้ว่า

> <u>นิยาม</u> ฟังก์ชันคือ ความสัมพันธ์ซึ่งในสองคู่อันดับใด ๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องไม่ต่างกัน
>
> หรือ
>
> ฟังก์ชัน f คือความสัมพันธ์ ซึ่งถ้ามี $(x,y) \in f$ และ $(x,z) \in f$ แล้ว $y = z$

เติมข้อความลงในช่องว่างในตาราง

ลำดับที่	ความสัมพันธ	แผนภาพ	ฟังก์ชัน		เหตุผล
			เป็น	ไม่เป็น	
1	$r_1=\{(2,5),(5,6),(6,7),(7,8)\}$		—	—	
2	$r_2=\{(2,2),(2,3),(3,2),(3,5)\}$		—	—	
3	$r_3=\{(1,2),(2,3),(3,3),(1,4)\}$		—	—	

<u>การพิจารณาความสัมพันธ์ที่เขียนแบบบอกเงื่อนไขว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่</u>

กำหนดให้ $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ และ $B = \{0,1,2,3,...,10\}$

ลำดับที่	ความสัมพันธ์		ฟังก์ชัน		เหตุผล
	แบบแจกแจงสมาชิก	แบบเงื่อนไข	เป็น	ไม่เป็น	
1	$r_1 = \{(0,1),(1,2),(2,5),(3,10)\}$	$r_1 = \{(x,y) \in A \times B \ / \ y = x^2 + 1\}$	✓	–	สมาชิกตัวหน้าต่างกันทั้งหมด
2	$r_2 =$ ______	$r_2 = \{(x,y) \in A \times B \ / \ y = x\}$	___	___	______ ______
3	$r_3 = \{(0,0),(1,1),(2,4),(3,9)\}$	$r_3 =$ ______	___	___	______ ______

จากตารางจะเห็นว่า

1) ถ้าความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขสามารถเขียนแบบแจกแจงสมาชิกได้จะสามารถบอกได้ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

2) ถ้าความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไขไม่สามารถเขียนแบบแจกแจงสมาชิกได้ทุกคู่อันดับจะไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

<u>ในกรณีที่ 2</u> ให้พิจารณาดังตัวอย่าง

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงแสดงว่า $f = \{(x,y) \ / \ y = x^2 + 1\}$ เป็นฟังก์ชัน

<u>วิธีทำ</u>

ให้ $(x,y) \in f$ และ $(x,z) \in f$

จะได้ $y = x^2 + 1$ และ $z = x^2 + 1$

สรุปได้ว่า $y = z$

แสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 2 $g = \left\{(x,y) \;/\; y^2 = x\right\}$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ

เนื่องจากมีคู่อันดับ $(1,-1) \in g$ และ $(1,1) \in g$

ซึ่งสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งสอง เหมือนกันแต่สมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งสองนี้ต่างกัน

ดังนั้น g ไม่เป็นฟังก์ชัน

การพิจารณาว่าความสัมพันธ์ r ซึ่งเขียนแบบบอกเงื่อนไข เป็นฟังก์ชันหรือไม่ มีวิธีการดังนี้

ก) ให้ $(x,y) \in r$ และ $(x,z) \in r$

เขียน y ในรูป x และ z ในรูป x โดยใช้เงื่อนไขของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้

ถ้า $y = z$ แสดงว่า r ________ ฟังก์ชัน
(เป็น/ไม่เป็น)

ถ้า $y \neq z$ แสดงว่า r ________ ฟังก์ชัน
(เป็น/ไม่เป็น)

ข) ถ้าสามารถยกตัวอย่างคู่อันดับในความสัมพันธ์ที่มีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกัน แต่สมาชิกตัวหลังต่างกัน จะสรุปได้ว่าความสัมพันธ์ ________ ฟังก์ชัน
(เป็น/ไม่เป็น)

ตัวอย่างที่ 3 จงแสดงว่า $f = \left\{(x,y) \;/\; y = x + 1\right\}$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ____

____

____

____

____

____

____

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> $f = \{(x,y) \; / \; x = |y| \}$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

<u>วิธีทำ</u>____

____

____

____

____

บัตรแบบฝึกหัดหรือบัตรงาน

เรื่อง 1. ความหมายของฟังก์ชัน

1.1 ความหมายของฟังก์ชัน

แบบฝึกหัด

1. ความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะเหตุใด

(1) $\{(1,a), (2,b), (3,b), (5,c)\}$

(2) $\{(1,a), (2,b), (3,c), (4,d), (4,c)\}$

(3) $\{(1,a), (2,a), (3,a), (4,a)\}$

(4) $\{(x,y) \in A \times A \;/\; y \geqslant x\}$; $A = \{1,2,3\}$

(5) $\{(x,y) \in B \times B \;/\; y = x - 2\}$; $B = \{-2,-1,0,1,2\}$

(6) $\{(x,y) \in R \times R \;/\; x = 3\}$

(7) $\{(x,y) \in R \times R \;/\; y = -2\}$

(8) $\{(x,y) \in R \times R \;/\; y = \sqrt{x}\}$

(9) $\{(x,y) \in A \times B \;/\; y < x\}$; $A = \{0,1\}$; $B = \{-1,1\}$

(10) $\left\{(x,y) \in R \times R \;/\; y = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x \geqslant 0 \\ -1 & \text{เมื่อ } x \leqslant 0 \end{cases}\right\}$

<u>เฉลยแบบฝึกหัด</u>

1\. (1) $\{(1,a),\ (2,b),\ (3,b),\ (5,c)\}$

เป็นฟังก์ชัน เพราะไม่มีคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าซ้ำกันเลย

(2) $\{(1,a),\ (2,b),\ (3,c),\ (4,d),\ (4,c)\}$

ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีคู่อันดับ (4,d), (4,c) ที่มีสมาชิกตัวหน้าซ้ำกัน แต่สมาชิกตัวหลังต่างกัน

(3) $\{(1,a),\ (2,a),\ (3,a),\ (4,a)\}$

เป็นฟังก์ชัน เพราะไม่มีคู่อันดับใดที่สมาชิกตัวหน้าซ้ำกันเลย

(4) ให้ $r = \{(x,y)\in A \times A / y \geqslant x\}$; $A = \{1,2,3\}$

$A \times A = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (3,1),\ (3,2),\ (3,3)\}$

ดังนั้น $r = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,2),\ (2,3),\ (3,3)\}$

ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีคู่อันดับ (2,2), (2,3) ที่มีสมาชิกตัวหน้าซ้ำกัน แต่สมาชิกตัวหลังต่างกัน

(5) $\{(x,y)\in B \times B / y = x - 2\}$; $B = \{-2,-1,0,1,2\}$

เป็นฟังก์ชัน เพราะไม่มีคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าซ้ำกันเลย

(6) $\{(x,y)\in R \times R / x = 3\}$

ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีคู่อันดับ เช่น (3,1) (3,2) ซึ่งมีสมาชิกตัวหน้าซ้ำกัน แต่สมาชิกตัวหลังต่างกัน

(7) $\{(x,y)\in R \times R / y = -2\}$

เป็นฟังก์ชัน เพราะไม่มีคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าซ้ำกันเลย

(8) $\{(x,y)\in R \times R / y = \sqrt{x}\}$

เป็นฟังก์ชัน เพราะไม่มีคู่อันดับที่มีสมาชิกตัวหน้าซ้ำกันเลย

(9) ให้ $r = \{(x,y)\in A \times B / y < x\}$; $A = \{0,1\}$, $B = \{-1,1\}$

$A \times B = \{(0,-1),\ (0,1),\ (1,-1),\ (1,1)\}$

ดังนั้น $r = \{(0,\ -1),\ (1,\ -1)\}$ เป็นฟังก์ชันเพราะไม่มีคู่อันดับใดที่มีสมาชิกตัวหน้าซ้ำกันเลย

(10) $\left\{(x,y)\in R \times R / y = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x \geqslant 0 \\ -1 & \text{เมื่อ } x \leqslant 0 \end{cases}\right\}$

ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมีคู่อันดับ (0,1) และ (0,-1) มีสมาชิกตัวหน้าซ้ำกัน แต่สมาชิกตัวหลังต่างกัน

บัตรทดสอบหรือบัตรปัญหา

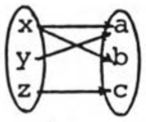
เรื่อง 1. ความหมายของฟังก์ชัน

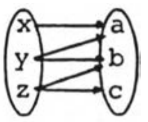
1.1 ความหมายของฟังก์ชัน

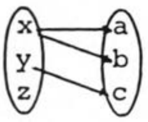
<u>คำสั่ง</u> จงทำเครื่องหมายกากบาท (X) ลงในวงเล็บตรงกับข้อ ก หรือ ข หรือ ค หรือ ง ในกระดาษคำตอบซึ่งท่านเห็นว่าถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

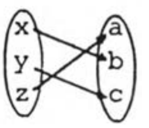
---

1. ความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชัน

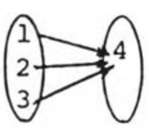
ก. 

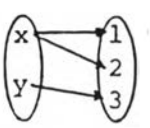
ค. 

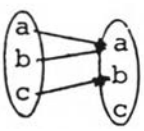
ข. 

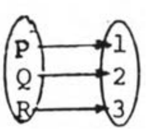
ง. 

2. ความสัมพันธ์ในข้อใดไม่เป็นฟังก์ชัน

ก. 

ค. 

ข. 

ง. 

3. ความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชัน

ก. $\{(1,a),(2,d),(3,b),(1,c)\}$

ข. $\{(1,a),(1,b),(1,c),(2,d)\}$

ค. $\{(p,a),(q,b),(r,c),(s,d)\}$

ง. $\{(x,1),(y,1),(x,0)\}$

4. ความสัมพันธ์ใดไม่เป็นฟังก์ชัน

ก. $\{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)\}$

ข. $\{(1,2),(1,3),(4,5),(5,6)\}$

ค. $\{(1,2),(3,2),(4,5)\}$

ง. $\{(1,3),(2,3),(3,5)\}$

5. ให้ $A = \{0,1,2,3,\ldots,10\}$ และ

$r = \{(x,y) \in A \times A \,/\, y = x^2 + 1\}$

ข้อใดถูกต้อง

ก. $\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$

ข. $\{(0,1),(1,2),(2,5),(3,10)\}$

ค. $\{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4)\}$

ง. $\{(1,0),(2,1),(5,2),(10,3)\}$

6. ความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นฟังก์ชันตรงกับข้อใด

ก. $\{(x,y) \in B \times B \,/\, y^2 = x\}$ เมื่อ $B = \{-1,0,1\}$

ข. $\{(x,y) \in B \times B \,/\, y = |x|\}$ เมื่อ $B = \{-2,-1,0,1,2\}$

ค. $\{(x,y) \in B \times B \,/\, y = x + 1\}$ เมื่อ $B = \{0,1,2,3\}$

ง. $\{(x,y) \in B \times B \,/\, y = \frac{1}{x}\}$ เมื่อ $B = \{1,2,3,4\}$

7. ความสัมพันธ์ไม่เป็นฟังก์ชันคือข้อใด

ก. $\{(x,y) \,/\, y = 2x^2\}$

ข. $\{(x,y) \,/\, y = x\}$

ค. $\{(x,y) \,/\, y = \sqrt{x}\}$

ง. $\{(x,y) \,/\, |y| = x - 1\}$

เฉลยข้อทดสอบ

1. ง
2. ค
3. ค
4. ข
5. ข
6. ก
7. ง

ชุดการเรียนการสอนที่ 2

เรื่อง

การพิจารณาฟังก์ชันจากกราฟ

บัตรคำสั่ง

ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. ทำบัตรกิจกรรม
2. ศึกษาจากบัตรเนื้อหาอีกครั้งหนึ่งถ้าไม่เข้าใจ หลังจากที่ทำบัตรกิจกรรมแล้ว
3. ทำบัตรแบบฝึกหัด หรือบัตรงานพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
4. ทำบัตรทดสอบหรือบัตรปัญหาพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย

บัตรเนื้อหา

เรื่อง 1. ความหมายของฟังก์ชัน

1.2 การพิจารณาฟังก์ชันจากกราฟ

การพิจารณากราฟว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ มีขั้นตอนดังนี้

ก. ลากเส้นขนานกับแกน y ตัดกราฟของความสัมพันธ์

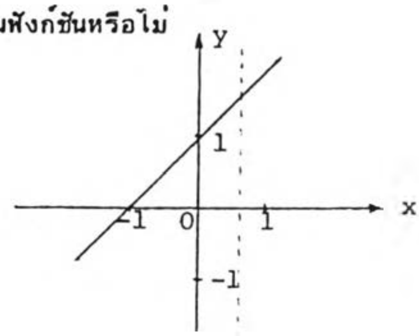
ข. พิจารณาเส้นขนานกับแกน y ตัดกราฟของความสัมพันธ์

ถ้าเส้นขนานใด ๆ ตัดกราฟเพียงแห่งเดียว ความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชัน

ถ้าเส้นขนานใด ๆ ตัดกราฟมากกว่าหนึ่งแห่ง ความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชัน

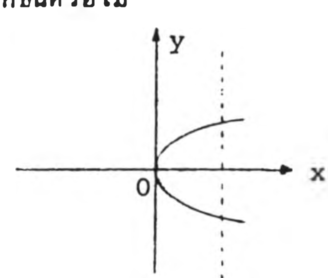
ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาจากกราฟ $r_1 = \{(x,y) \in R \times R \,/\, y = x + 1\}$ ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ



จากกราฟจะเห็นว่า เส้นขนานกับแกน y ไม่ว่าเส้นใดจะตัดกราฟของความสัมพันธ์เพียงจุดเดียว ดังนั้น r_1 เป็นฟังก์ชัน

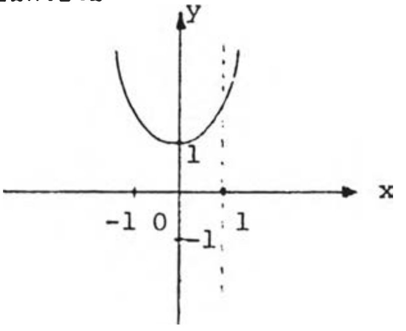
ตัวอย่างที่ 2 จงพิจารณาจากกราฟ $r_2 = \{(x,y) \in R \times R \,/\, y^2 = x\}$ ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่



จากกราฟจะเห็นว่า ถ้าลากเส้นขนานกับแกน y จะมีเส้นขนานแกน y ตัดกราฟ 2 จุด ดังนั้น r_2 ไม่เป็นฟังก์ชัน

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงพิจารณาจากกราฟ $r_3 = \{(x,y) \in R \times R \mid y = x^2 + 1\}$ ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

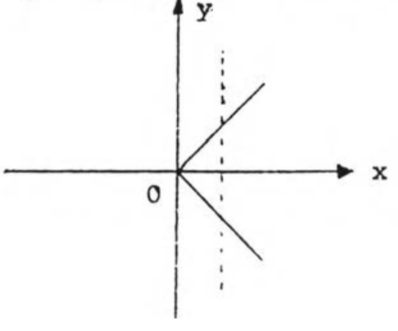
<u>วิธีทำ</u>



จากกราฟจะเห็นว่า ถ้าลากเส้นขนานกับแกน y ไม่ว่าเส้นใดจะตัดกราฟของความสัมพันธ์เพียงจุดเดียว ดังนั้น r_3 เป็นฟังก์ชัน

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จงพิจารณา $r_4 = \{(x,y) \in R \times R \mid x = |y|\}$ ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

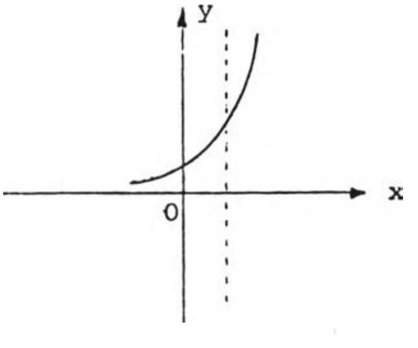
<u>วิธีทำ</u>



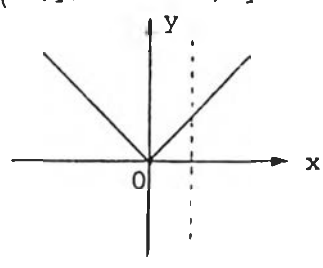
จากกราฟจะเห็นว่า ถ้าลากเส้นขนานกับแกน y ไม่ว่าเส้นใดจะตัดกราฟของความสัมพันธ์เพียงจุดเดียว ดังนั้น r_4 ไม่เป็นฟังก์ชัน

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> จงพิจารณาความสัมพันธ์ในข้อต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ โดยอาศัยกราฟ

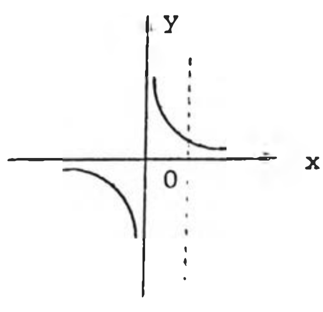
ก. $r_1 = \{(x,y) \in R \times R \mid y = 2^x\}$



ข. $r_2 = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = |x|\}$



ค. $r_3 = \{(x,y) \in R \times R \ / \ xy = 1\}$



จากข้อ ก, ข และ ค จะได้ r_1, r_2 และ r_3 เป็นฟังก์ชันทั้งหมด เพราะว่าลากเส้นขนานแกน y ไม่ว่าเส้นใดจะตัดกราฟของความสัมพันธ์เพียงจุดเดียว

<u>การพิจารณาฟังก์ชันจากสับเซตของความสัมพันธ์</u> มีวิธีการคือ

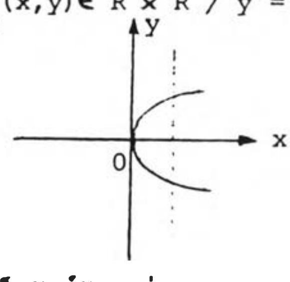
1) พิจารณากราฟของความสัมพันธ์เดิม เมื่อลากเส้นขนานกับแกน y จะตัดกราฟของความสัมพันธ์ 2 จุด แสดงว่าความสัมพันธ์ไม่เป็นฟังก์ชัน

2) หากราฟของสับเซตที่ลากเส้นขนานกับแกน y ตัดกราฟนี้เพียงจุดเดียวจะได้กราฟของสับเซตของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน

3) หาเงื่อนไขของสับเซต

<u>ตัวอย่างที่ 6</u>

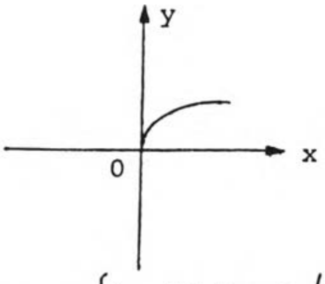
ก) $r_1 = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y^2 = x\}$

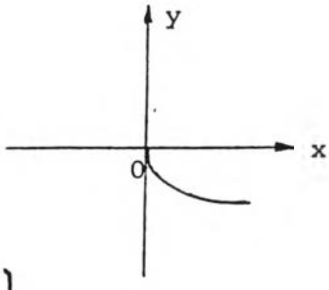


r_1 ไม่เป็นฟังก์ชัน แต่สามารถหาสับเซตของ r_1 ที่เป็นฟังก์ชันได้ เช่น

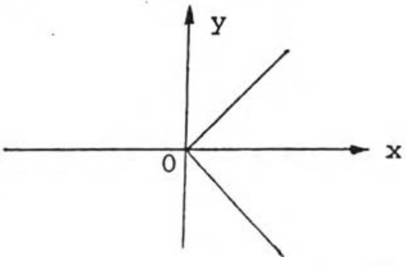
$r_2 = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = \sqrt{x}\}$

$r_3 = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = -\sqrt{x}\}$





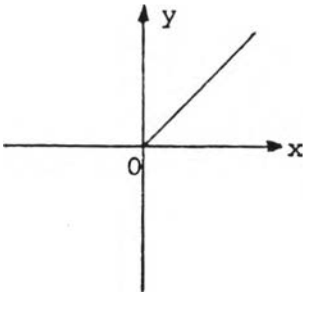
ข) $r_1 = \{(x,y) \in R \times R \ / x = |y|\}$

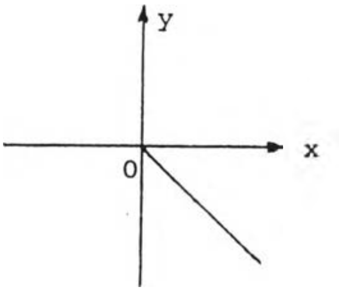


r_1 ไม่เป็นฟังก์ชัน แต่สามารถหาสับเซตของ r_1 ที่เป็นฟังก์ชันได้ เช่น

$r_2 = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = x$ เมื่อ $x \geq 0\}$

$r_3 = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = -x$ เมื่อ $x \geq 0\}$





บัตรกิจกรรม

เรื่อง 1. ความหมายของฟังก์ชัน

1.2 การพิจารณาฟังก์ชันจากกราฟ

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

1. เขียนกราฟจากความสัมพันธ์ได้อย่างถูกต้อง
2. บอกค่า y เมื่อกำหนดค่า x มาให้โดยใช้กราฟได้อย่างถูกต้อง
3. บอกได้ว่าเส้นขนานที่ลากขนานกับแกน y ตัดกราฟของความสัมพันธ์ที่จุดใดได้อย่างถูกต้อง
4. สรุปวิธีการพิจารณาฟังก์ชันจากกราฟได้อย่างถูกต้อง
5. เขียนสับเซตของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง

กิจกรรม

ให้นักเรียนพิจารณาข้อความข้างล่างนี้

การพิจารณาฟังก์ชันจากกราฟนั้นสิ่งที่สำคัญมากที่จะต้องทำประการแรกก็คือ จะต้องสามารถเขียนกราฟของความสัมพันธ์ได้ ซึ่งพอจะสรุปเป็นหลักได้ดังนี้ คือ

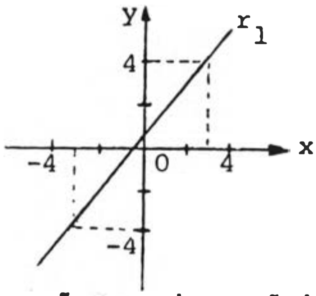
1. สมมติค่า x และหาค่า y จากเงื่อนไขของความสัมพันธ์ที่ให้มาแล้วเขียนค่า x, y ลงในตาราง (การสมมติค่า x ต้องสัมพันธ์กับโดเมนของความสัมพันธ์)
2. นำค่า x และ y หรือ (x,y) มาลงจุดในระนาบแกนมุมฉาก
3. โยงจุดต่าง ๆ ต่อเนื่องกัน

ตัวอย่างที่ 1 $r_1 = \{(x,y) \in R \times R \,/\, y = x + 1\}$

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	-1	0	1	2	3	

$\therefore\ r_1 = \{\ldots,(-2,-1),(-1,0),(0,1),(1,2),(2,3),\ldots\}$

กราฟของ r_1 คือ



จากกราฟ ถ้ากำหนดค่า x ให้แต่ต้องการจะหาค่า y โดยใช้กราฟจะมีวิธีการคือ ให้ลากเส้นขนานแกน y ที่ตำแหน่ง x ที่กำหนดให้ตัดกราฟ แล้วลากเส้นจากจุดตัดขนานแกน x ตัดแกน y ตำแหน่งที่ตัดแกน y คือค่า y ที่ต้องการ

ดังนั้น ถ้า $x = 3$ จะได้ $y = 4$

$x = -3$ จะได้ $y = -4$

จะเห็นว่าเมื่อลากเส้นขนานแกน y ไม่ว่าที่ x ตำแหน่งใดๆ เส้นขนานจะตัดกราฟจำนวน 1 จุด

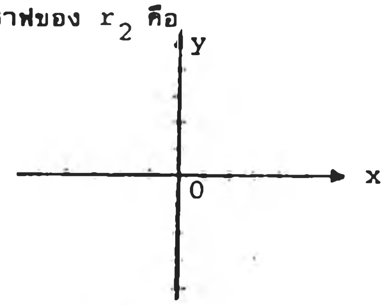
<u>ตัวอย่างที่ 2</u> $r_2 = \{(x,y) \in R \times R \,/\, y^2 = x\}$ หรือ

$r_2 = \{(x,y) \in R \times R \,/\, y = \pm\sqrt{x}\}$

x	0	1	2	3	4	5	...
y	_	_	_	_	_	_	...

r_2 = ____________________

กราฟของ r_2 คือ



จากกราฟ ถ้ากำหนดค่า x ให้แต่ต้องการค่า y โดยใช้กราฟมีวิธีการ คือ

____

____

ดังนั้น ถ้า $x = 2.5$ จะได้ y = ____________________ (ประมาณ)

$x = 3.5$ จะได้ y = ____________________ (ประมาณ)

จะเห็นว่า เมื่อลากเส้นขนานแกน y ไม่ว่าที่ x ตำแหน่งใด ๆ เส้นขนานจะตัดกราฟจำนวน _______ จุด

จากนิยามฟังก์ชัน

> ฟังก์ชัน f คือความสัมพันธ์ ซึ่งถ้ามี $(x,y) \in f$ และ $(x,z) \in f$ แล้ว
>
> $y = z$

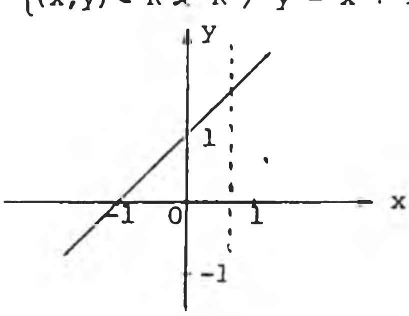
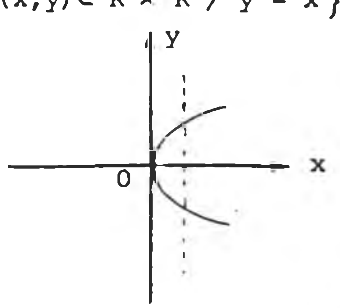
<u>ข้อสังเกต</u>

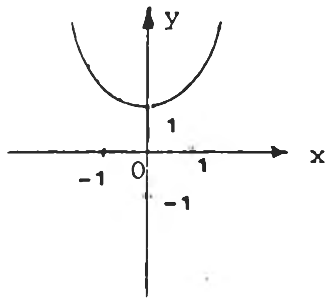
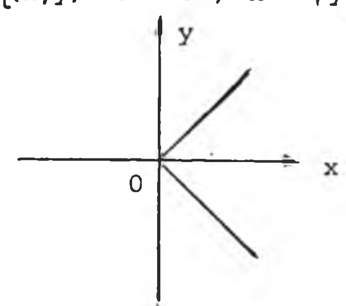
1. ความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชัน คือ $(x,y) \in f$ และ $(x,z) \in f$ แล้ว $y = z$ นั่นคือมี x ค่าหนึ่งจะได้ค่า y เพียงค่าเดียว

   คือ ลากเส้นขนานแกน y ตัดกราฟของความสัมพันธ์เพียงจุดเดียว
2. ความสัมพันธ์ไม่เป็นฟังก์ชัน คือ $(x,y) \in f$ และ $(x,z) \in f$ แล้ว $y \neq z$ นั่นคือมี x ค่าหนึ่งจะได้ค่า y มากกว่าหนึ่งค่า

   คือ ลากเส้นขนานแกน y ตัดกราฟของความสัมพันธ์มากกว่าหนึ่งจุด

พิจารณากราฟจากนิยามฟังก์ชัน

กราฟของความสัมพันธ์	ลากเส้นขนานแกน y ตัดกราฟจำนวน (จุด)	ความหมาย	ฟังก์ชัน	
			เป็น	ไม่เป็น
$r_1 = \{(x,y) \in R \times R \,/\, y = x + 1\}$ 	1	$(x,y) \in f$ และ $(x,z) \in f$ แล้ว $y = z$	✓	–
$r_2 = \{(x,y) \in R \times R \,/\, y^2 = x\}$ 	2	$(x,y) \in f$ และ $(x,z) \in f$ แล้ว $y \neq z$	–	✓

กราฟของความสัมพันธ์	ลากเส้นขนานแกน y ตัดกราฟจำนวน (จุด)	ความหมาย	ฟังก์ชัน	
			เป็น	ไม่เป็น
$r_3 = \{(x,y) \in R \times R \mid y = x^2 + 1\}$ 	____	____ ____ ____	____	____
$r_4 = \{(x,y) \in R \times R \mid x = \lvert y \rvert\}$ 	____	____ ____ ____	____	____

จากตารางจะสังเกตเห็นว่า

กราฟของความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชันเมื่อลากเส้นขนานแกน y จะมีเส้นขนานตัดกราฟของความสัมพันธ์ ____________________
จุดเดียว/มากกว่า 1 จุด

<u>สรุป</u>

> การพิจารณากราฟของความสัมพันธ์จะเป็นฟังก์ชันหรือไม่ มีขั้นตอนดังนี้
>
> 1. ลากเส้นขนานแกน y ที่ตำแหน่ง x ใด ๆ ตัดกราฟของความสัมพันธ์
> 2. พิจารณาเส้นขนานแกน y ตัดกราฟของความสัมพันธ์
>
> ถ้าเส้นขนานตัดกราฟจุดเดียว ความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชัน
>
> ถ้าเส้นขนานตัดกราฟมากกว่า 1 จุด ความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชัน

จากตัวอย่างที่ 1 และ 2 จะได้

กราฟของความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นฟังก์ชัน คือ____________ เพราะว่า____________
____

กราฟของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันคือ ____________ เพราะว่า ____________

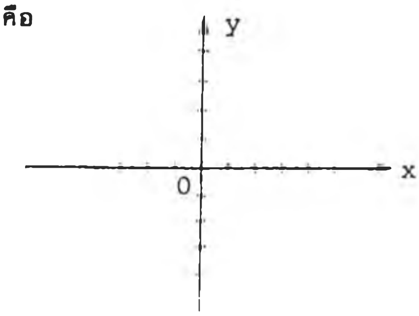
____

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณาความสัมพันธ์ในข้อต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่โดยอาศัยกราฟ

ก. $r_1 = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = 2^x\}$

x	...	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	—	—	—	—	—	—	...

กราฟคือ

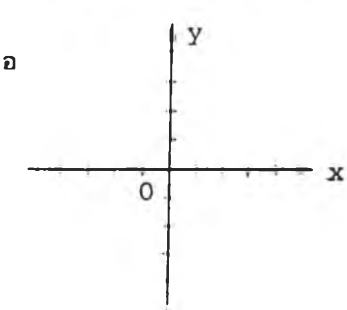


r_1 ____________ ฟังก์ชัน เพราะว่า ________________________________
เป็น/ไม่เป็น

ข. $r_2 = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = |x|\}$

x	—	—	—	—	—	—	—	—	—
y	—	—	—	—	—	—	—	—	—

กราฟคือ

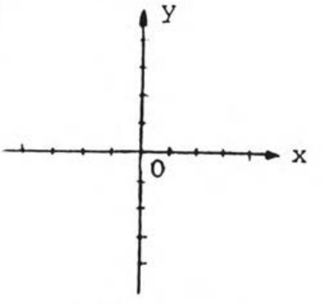


r_2 ____________ ฟังก์ชัน เพราะว่า ________________________________
เป็น/ไม่เป็น

ค. $r_3 = \{(x,y) \in R \times R \ / \ xy = 1\}$

x	—	—	—	—	—	—	—	—
y	—	—	—	—	—	—	—	—

กราฟคือ



r_3 ______ ฟังก์ชัน เพราะว่า ____________________
เป็น/ไม่เป็น

<u>การพิจารณาฟังก์ชันจากสับเซตของความสัมพันธ์</u>

การพิจารณาฟังก์ชันจากสับเซตของความสัมพันธ์นั้นสิ่งที่สำคัญประการแรกคือ จะต้องรู้ว่าสับเซตเป็นอย่างไร ดังนั้นจึงขอกล่าวถึงการหาสับเซตของความสัมพันธ์ ดังต่อไปนี้

เซต A	สับเซตของ A คือเซต B
{พ่อ, แม่, ลูก}	{พ่อ}, {แม่}, {ลูก}, {พ่อ, แม่}, {พ่อ, ลูก}, {แม่, ลูก}, {พ่อ, แม่, ลูก}, $\emptyset$
{1,2}	{1}, {2}, {1,2}, $\emptyset$
{(1,2), (2,4)}	{(1,2)}, {(2,4)}, {(1,2), (2,4)}, $\emptyset$

จากตารางจะเห็นว่าเซต B นั้นเป็นสับเซตของ A ($B \subset A$)

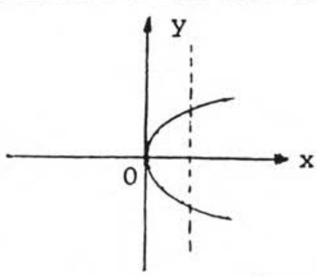
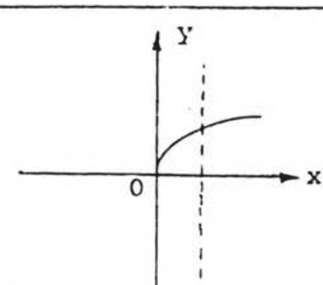
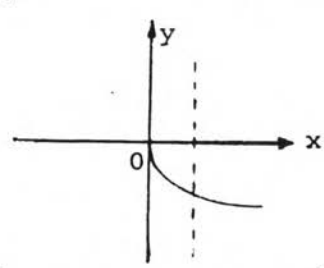
($B \subset A$ เพราะว่าสมาชิกทุกตัวในเซต B เป็นสมาชิกของเซต A)

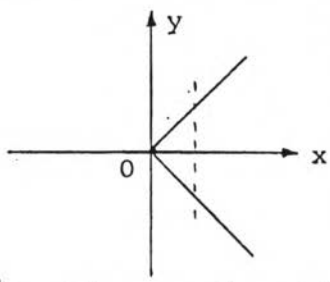
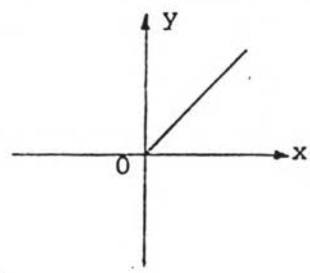
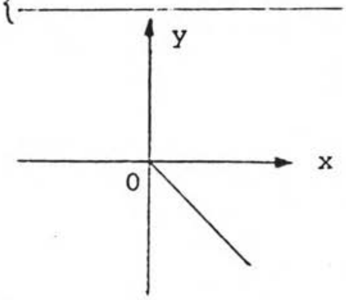
r_1	r_2	r_2 เป็นสับเซตของ r_1	r_2 ไม่เป็นสับเซตของ r_1	เหตุผล
{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8)}	{(4,8)}	✓	–	$(4,8) \in r_2 \rightarrow (4,8) \in r_1$
	{(1,2), (2,4)}	✓	–	$(1,2), (2,4) \in r_2 \rightarrow (1,2), (2,4) \in r_1$
	{(5,10)}	–	✓	$(5,10) \in r_2$ แต่ $(5,10) \notin r_1$

r_1	r_2	r_2 เป็นสับเซตของ r_1	r_2 ไม่เป็นสับเซตของ r_2	เหตุผล
$\{(x,y)\in R \times R \ / \ y^2 = x\}$	$\{(x,y)\in R\times R / y = \sqrt{x}\}$	✓	—	$r_1 = \{(x,y)\in R\times R / y^2 = x\}$
	$\{(x,y)\in R\times R / y = -\sqrt{x}\}$	✓	—	หรือ $= \{(x,y)\in R\times R / y = \pm\sqrt{x}\}$ $r_1 = \{(x,y)\in R\times R / y = x\} \cup \{(x,y)\in R\times R / y = - x\}$
$\{(x,y)\in R \times R \ / \ x = \lvert y\rvert\}$	$\{(x,y)\in R\times R / y = x, x \geq 0\}$	___	___	___
	$\{(x,y)\in R\times R / y = -x, x \geq 0\}$	___	___	___

จากตารางจะสรุปได้ว่า

r_2 เป็นสับเซตของ r_1 ก็ต่อเมื่อ ______________________________

กราฟของความสัมพันธ์	ฟังก์ชัน เป็น	ฟังก์ชัน ไม่เป็น	กราฟของสับเซตของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน	เหตุผล
 $r_1 = \{(x,y)\in R \times R \ / \ y^2 = x\}$	–	✓	 $r_2 = \{(x,y)\in R \times R \ / \ y = \sqrt{x}\}$  $r_3 = \{(x,y)\in R \times R \ / \ y = -\sqrt{x}\}$	กราฟของสับเซตของความสัมพันธ์ เมื่อลากเส้นขนานแกน y จะตัดกราฟของสับเซตจุดเดียว

กราฟของความสัมพันธ์	ฟังก์ชัน		กราฟของสับเซตของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน	เหตุผล
	เป็น	ไม่เป็น		
 $r_1 = \{(x,y) \in R \times R \ / \ x = \lvert y \rvert\}$	___	___	 $r_2 = \{$________________$\}$  $r_3 = \{$________________$\}$	________ ________ ________ ________ ________

<u>สรุป</u> การพิจารณาฟังก์ชันจากสับเซตของความสัมพันธ์มีวิธีการ คือ

1. พิจารณากราฟของความสัมพันธ์เดิม เมื่อลากเส้นขนานกับแกน y จะตัดกราฟของความสัมพันธ์ 2 จุด แสดงว่าความสัมพันธ์ไม่เป็นฟังก์ชัน
2. หากราฟของสับเซตที่ลากเส้นขนานกับแกน y ตัดกราฟนี้เพียงจุดเดียว จะได้กราฟของสับเซตของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน
3. หาเงื่อนไขของสับเซต

บัตรแบบฝึกหัดหรือบัตรงาน

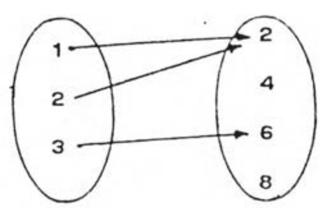
เรื่อง 1. ความหมายของฟังก์ชัน

1.2 การพิจารณาฟังก์ชันจากกราฟ

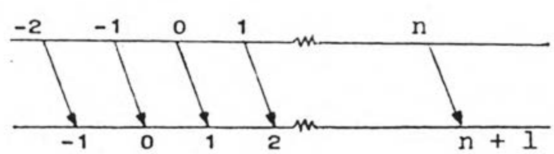
แบบฝึกหัด

1. จากแผนภาพหรือกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ในข้อใดบ้างที่เป็นฟังก์ชันและข้อใดบ้างที่ไม่เป็นฟังก์ชัน

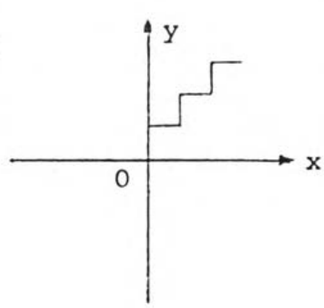
(1)



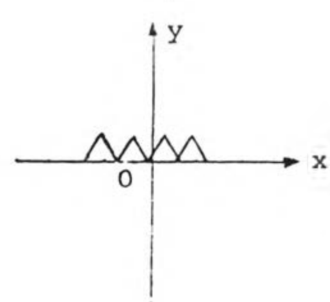
(2)



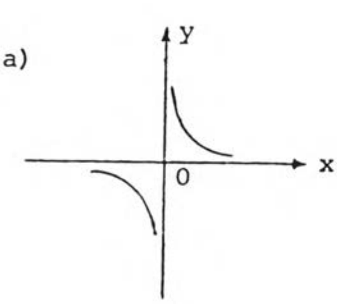
(3) (a)



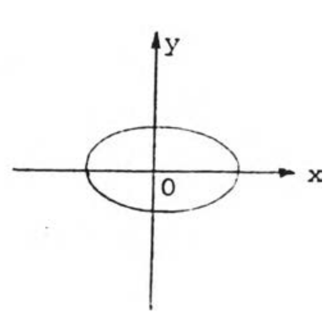
(b)



(4) (a)

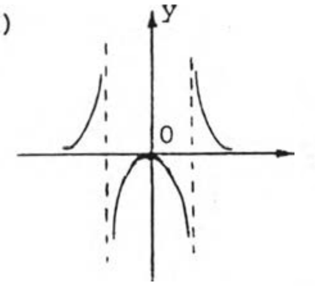


(b)

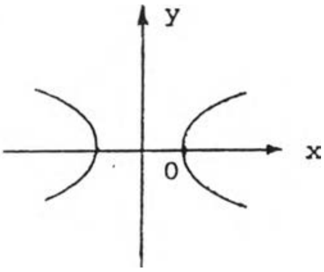


(5)

(a)



(b)



2. จงพิจารณาว่า ความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่ ถ้าไม่เป็นฟังก์ชัน จงสร้างความสัมพันธ์ที่เป็นสับเซตของความสัมพันธ์เดิม และเป็นฟังก์ชัน

$$r = \left\{(x,y) \in R \times R \;/\; y^2 = x + 1\right\}$$

<u>เฉลยแบบฝึกหัด</u>

1. 1) เป็นฟังก์ชัน เพราะโดเมนของความสัมพันธ์ไม่เหมือนกันเลย

   2) เป็นฟังก์ชัน เพราะโดเมนของความสัมพันธ์ไม่เหมือนกันเลย

   3) a) ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะถ้าลากเส้นขนานกับแกน y จะมีเส้นขนานแกน y ตัดกราฟมากกว่า 1 จุด

      b) เป็นฟังก์ชัน เพราะถ้าลากเส้นขนานกับแกน y ไม่ว่าเส้นใดจะตัดกราฟของความสัมพันธ์เพียงจุดเดียว

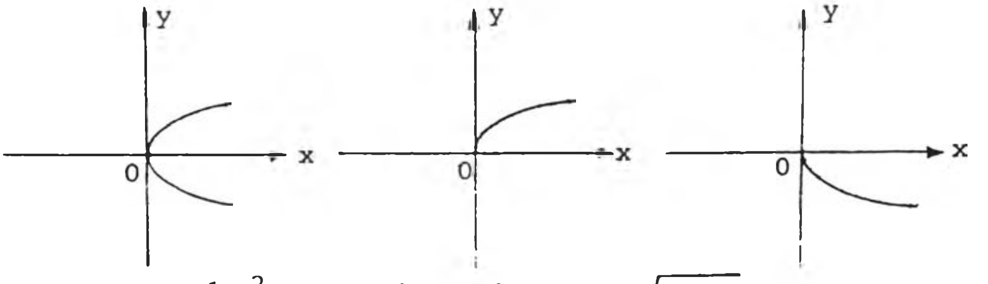
   4) a) เหมือน 3.(b)

      b) เหมือน 3.(a)

   5) a) เหมือน 3.(b)

      b) เหมือน 3.(a)

2. ไม่เป็นฟังก์ชัน



สับเซตของความสัมพันธ์ $y^2 = x + 1$ ที่เป็นฟังก์ชันคือ $y = \sqrt{x + 1}$ และ $y = -\sqrt{x + 1}$

บัตรทดสอบหรือบัตรปัญหา

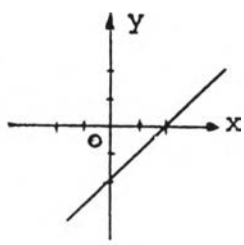
เรื่อง 1. ความหมายของฟังก์ชัน

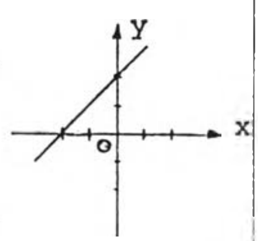
1.2 การพิจารณาฟังก์ชันจากกราฟ

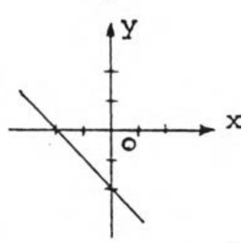
คำสั่ง จงทำเครื่องหมายกากบาท (X) ลงในวงเล็บตรงกับข้อ ก หรือ ข หรือ ค หรือ ง ในกระดาษคำตอบซึ่งท่านเห็นว่าถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

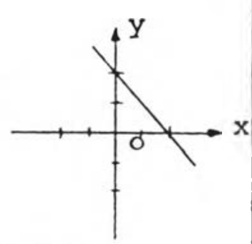
---

1. กราฟของ $f = \{(x,y) \mid y = x - 2\}$ คือข้อใด

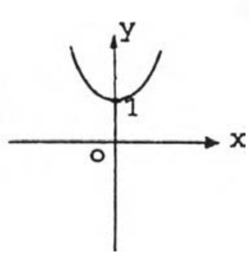
ก. 

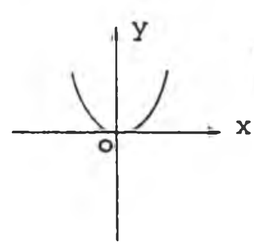
ค. 

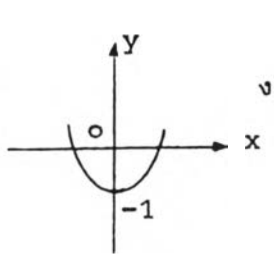
ข. 

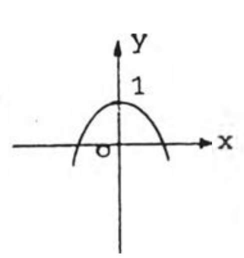
ง. 

2. กราฟของ $g(x) = x^2-1$ คือข้อใด

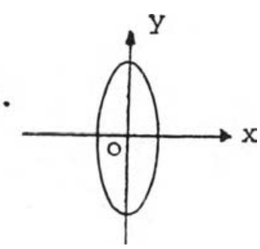
ก. 

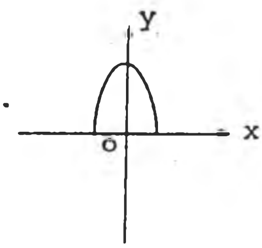
ค. 

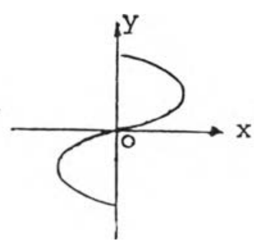
ข. 

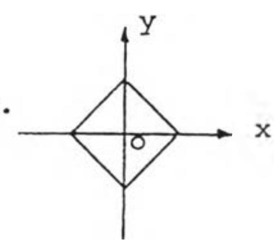
ง. 

3. กราฟของความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชัน

ก. 

ค. 

ข. 

ง. 

4. จุดใดไม่อยู่บนกราฟของ $f(x) = 5x^2 - 1$

ก. (1,4)

ข. (2,19)

ค. (3,44)

ง. (4,80)

5. ข้อใดถูกต้อง

ก. เส้นขนานแกน x ตัดกราฟจุดเดียว ความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชัน

ข. เส้นขนานแกน y ตัดกราฟจุดเดียว ความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชัน

ค. เส้นขนานแกน y ตัดกราฟมากกว่า 1 จุด ความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชัน

ง. เส้นขนานแกน x ตัดกราฟมากกว่า 1 จุด ความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชัน

เฉลยข้อทดสอบ

1. ก
2. ข
3. ค
4. ง
5. ข

ชุดการเรียนการสอนที่ 3

เรื่อง

ไดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

บัตรคำสั่ง

ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. ทำบัตรกิจกรรม
2. ศึกษาจากบัตรเนื้อหาอีกครั้งหนึ่งถ้าไม่เข้าใจ หลังจากที่ทำบัตรกิจกรรมแล้ว
3. ทำบัตรแบบฝึกหัด หรือบัตรงานพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
4. ทำบัตรทดสอบหรือบัตรปัญหาพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย

บัตรเนื้อหา

เรื่อง 1. ความหมายของฟังก์ชัน

1.3 โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

<u>นิยาม</u> ถ้า f เป็นฟังก์ชัน

D_f = โดเมนของ f = เซตของสมาชิกตัวแรกของแต่ละคู่อันดับใน f

R_f = เรนจ์ของ f = เซตของสมาชิกตัวหลังของแต่ละคู่อันดับใน f

หรือ

$D_f = \{x \,/\, (x,y) \in f\}$

$R_f = \{y \,/\, (x,y) \in f\}$

ลำดับที่	ความสัมพันธ์ (r)	D_r	R_r	ฟังก์ชัน		โดเมนของฟังก์ชัน	เรนจ์ของฟังก์ชัน
				เป็น	ไม่เป็น		
1	$r_1 = \{(x,y) \,/\, y = x^2\}$	$\{x/x \in R\}$	$\{y/y \geq 0\}$	✓	-	$\{x/x \in R\}$	$\{y/y \geq 0\}$
2	$r_2 = \{(x,y) \,/\, y = x+1\}$	$\{x/x \in R\}$	$\{y/y \in R\}$	✓	-	$\{x/x \in R\}$	$\{y/y \in R\}$
3	$r_3 = \{(x,y) \,/\, y^2 = x\}$	$\{x/x \geq 0\}$	$\{y/y \in R\}$	-	✓	-	-
4	$r_4 = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{2,3,4,5\}$	✓	-	$\{1,2,3,4\}$	$\{2,3,4,5\}$
5	$r_5 = \{(-1,1),(0,0),(1,1)\}$	$\{-1,0,1\}$	$\{0,1\}$	✓	-	$\{-1,0,1\}$	$\{0,1\}$
6	$r_6 = \{(3,2),(2,2)\}$	$\{3,2\}$	$\{2\}$	-	✓	-	-
7	$r_7 = \{(1,2),(1,5),(3,5),(2,7)\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,5,7\}$	-	✓	-	-
8	$r_8 = \{(2,4),(2,3),(7,1),(5,4)\}$	$\{2,7,5\}$	$\{1,3,4\}$	-	✓	-	-
9	$r_9 = \{(x,y) \in A \times A \,/\, x + y = 7\}$ เมื่อ $A = \{x \in I^+ / x \leq 6\}$	$\{1,2,3,4,5,6\}$	$\{1,2,3,4,5,6\}$	✓	-	$\{1,2,3,4,5,6\}$	$\{1,2,3,4,5,6\}$
10	$r_{10} = \{(x,y) \,/\, y = \|x\|\}$	$\{x/x \in R\}$	$\{y/y \geq 0\}$	✓	-	$\{x/x \in R\}$	$\{y/y \geq 0\}$

บัตรกิจกรรม

เรื่อง 1. ความหมายของฟังก์ชัน

1.3 โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

1. เขียนโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
2. บอกนิยามของโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง

กิจกรรม

ให้นักเรียนพิจารณาข้อความข้างล่างนี้

เนื่องจากฟังก์ชันนั้นทุกฟังก์ชันจะต้องเป็นความสัมพันธ์ ดังนั้นการให้ความหมายของโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันจะเหมือนกับการให้ความหมายของโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ ดังต่อไปนี้

ลำดับที่	ความสัมพันธ (r)	D_r	R_r	ฟังก์ชัน		โดเมนของฟังก์ชัน	เรนจ์ของฟังก์ชัน
				เป็น	ไม่เป็น		
1	$r_1 = \{(a,1),(b,1),(c,1)\}$	$\{a,b,c\}$	$\{1\}$	✓	-	$\{a,b,c\}$	$\{1\}$
2	$r_2 = \{(1,8),(1,9),(2,9)\}$	$\{1,2\}$	$\{8,9\}$	-	✓	—	—
3	$r_3 = \{(x,y)/y = x^2\}$	____	____	____	____	____	____
4	$r_4 = \{(x,y)/y = x + 1\}$	____	____	____	____	____	____
5	$r_5 = \{(x,y)/y^2 = x\}$	____	____	____	____	____	____

จากตารางจะสังเกตว่า

1. โดเมนของฟังก์ชันคือ โดเมนของความสัมพันธ์ที่ ____________ ฟังก์ชัน
   เป็น/ไม่เป็น
2. เรนจ์ของฟังก์ชันคือ เรนจ์ของความสัมพันธ์ที่ ____________ ฟังก์ชัน
   เป็น/ไม่เป็น

ดังนั้นจึงสรุปนิยามของโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน ดังนี้

> **นิยาม** ถ้า f เป็นฟังก์ชัน
>
> D_f = โดเมนของ f = เซตของสมาชิกตัวแรกของแต่ละคู่อันดับใน f
>
> R_f = เรนจ์ของ f = เซตของสมาชิกตัวหลังของแต่ละคู่อันดับใน f
>
> หรือ $D_f = \{x / (x,y) \in f\}$; $R_f = \{y / (x,y) \in f\}$

ลำดับ	ความสัมพันธ์	D_r	R_r	ฟังก์ชัน		โดเมนของฟังก์ชัน	เรนจ์ของฟังก์ชัน
				เป็น	ไม่เป็น		
1	$r_1=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$	____	____	____	____	____	____
2	$r_2=\{(-1,1),(0,0),(1,1)\}$	____	____	____	____	____	____
3	$r_3=\{(3,2),(2,2)\}$	____	____	____	____	____	____
4	$r_4=\{(1,2),(1,5),(3,5),(2,7)\}$	____	____	____	____	____	____
5	$r_5=\{(2,4),(2,3),(7,1),(5,4)\}$	____	____	____	____	____	____
6	$r_6=\{(x,y)\in A \times A / x + y = 7\}$ เมื่อ $A=\{x\in I^+ / x \leq 6\}$	____	____	____	____	____	____
7	$r_7=\{(x,y) / y = \|x\|\}$	____	____	____	____	____	____

บัตรแบบฝึกหัดหรือบัตรงาน

<u>เรื่อง</u> 1. ความหมายของฟังก์ชัน

1.3 โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. กำหนด $U = \{0,1,2,3,4,5\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ใน $U \times U$ พร้อมทั้งเขียนกราฟด้วย

   (1) $f(x) = 2x - 3$

   (2) $f(x) = 2x$

   (3) $y = 2x^2$

   (4) $f = \{(x,y) / x^2 + y^2 = 25\}$

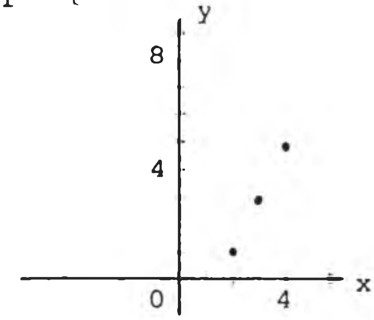
2. ถ้า $h(x) = x^2 - 6$ และโดเมนของ h คือ $\{x / -4 < x < 3\}$ จงหาเรนจ์ของ h

เฉลยแบบฝึกหัด

1. 1) $f = \{(2,1), (3,3), (4,5)\}$

$D_f = \{2,3,4\}$

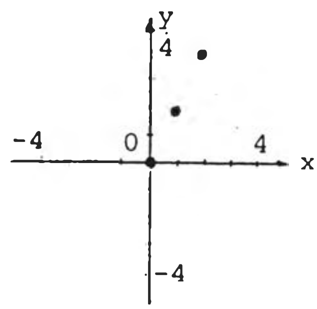
$R_f = \{1,3,5\}$



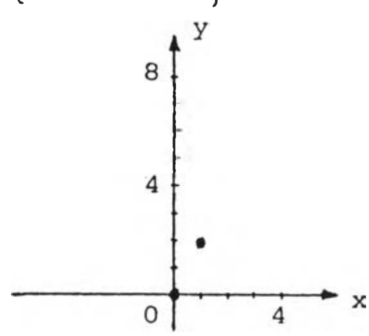
2) $f = \{(0,0), (1,2), (2,4)\}$

$D_f = \{0,1,2\}$

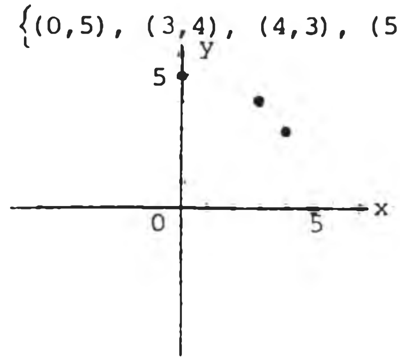
$R_f = \{0,2,4\}$



3) $f = \{(0,0), (1,2)\}$



4) $f = \{(0,5), (3,4), (4,3), (5,0)\}$



2. ถ้า $h(x) = x^2 - 6$ และโดเมนของ h คือ $\{x / -4 < x < 3\}$

จะได้เรนจ์ของ h คือ $\{y / -6 \leqslant y < 10\}$

วิธีคิด เนื่องจาก $h(x) = x^2 - 6$ จะเห็นได้ว่า

$x^2 \geqslant 0$ เสมอไม่ว่าจะแทน x ด้วยจำนวนใดในโดเมน

ดังนั้น 1) $x^2 - 6$ มีค่าต่ำสุดเมื่อ $x^2 = 0$ แต่ $x^2 = 0$ เมื่อ $x = 0$

ดังนั้นค่าต่ำสุดของจำนวนที่เป็นสมาชิกของเรนจ์ของ h คือ

$h(0) = 0 - 6 = -6$

2) $x^2 - 6$ มีค่าสูงสุด เมื่อ x^2 มีค่าสูงสุด แต่ x^2 มีค่าสูงสุดเมื่อ $|x|$ มีค่าสูงสุดในโดเมน พิจารณาโดเมนของ h จะพบว่าไม่มี x ซึ่งมีค่าสัมบูรณ์สูงสุด แต่ทราบว่าค่าสัมบูรณ์ของสมาชิกทุกตัวในโดเมนมีค่าไม่เกิน 4 เพราะโดเมน คือ $\{x / -4 < x < 3\}$ ดังนั้นค่าของ h(x) ต้องน้อยกว่า $4^2 - 6$ หรือ 10 ไม่ว่าจะแทน x ด้วยจำนวนใดในโดเมน

ดังนั้น จะเห็นว่าจำนวนที่จะเป็นสมาชิกของเรนจ์ของ h ได้ต้องเป็นจำนวนที่อยู่ในเซต $A = \{y / -6 \leqslant y < 10\}$

บัตรทดสอบหรือบัตรปัญหา

เรื่อง 1. ความหมายของฟังก์ชัน

1.3 โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

<u>คำสั่ง</u> จงทำเครื่องหมายกากบาท (X) ลงในวงเล็บตรงกับข้อ ก หรือ ข หรือ ค หรือ ง ในกระดาษคำตอบซึ่งท่านเห็นว่าถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

---

1. ให้ $f = \{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)\}$ โดเมนของ f คือข้อใด

   ก. $\{2,4,6\}$

   ข. $\{1,2,3\}$

   ค. $\{1,2,3,4\}$

   ง. $\{2,4,6,8\}$

2. ให้ $g = \{(a,b),(b,c),(c,d)\}$ เรนจ์ของ g คือข้อใด

   ก. $\{a,b\}$

   ข. $\{c,d\}$

   ค. $\{a,b,c\}$

   ง. $\{b,c,d\}$

3. ให้ $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ และ

   $f = \{(x,y) \in A \times A \ / \ y = 2^x\}$

   เรนจ์ของ f คือข้อใด

   ก. $\{1,2,4\}$

   ข. $\{0,1,2,3,4,5\}$

   ค. $\{1,2,4,8,16,32\}$

   ง. $\{x \ / \ x \in R\}$

4. ให้ $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ และ

   $B = \{0,1,2,\ldots\ldots,10\}$

   $f = \{(x,y) \in A \times B \ / \ y = x^2 + 1\}$

   เรนจ์ของ f คือข้อใด

   ก. $\{1,2,5\}$

   ข. $\{1,2,5,10\}$

   ค. $\{1,2,3,4,5\}$

   ง. $\{1,2,5,10,17,26\}$

5. ให้ $f = \left\{(x,y) \in I \times I \ / \ y = \dfrac{10}{x^2 + 2x + 2}\right.$

   $\left. -2 \leq x < 4\right\}$ โดเมนของ f คือข้อใด

   ก. $\{0,1,2\}$

   ข. $\{-2,-1,0,1,2\}$

   ค. $\{2,5,10\}$

   ง. $\{x \ / \ -2 \leq x < 4\}$

6. ให้ $g = \{(x,y) \ / \ y = \sqrt{3x + 2}\}$

   โดเมนของ g คือข้อใด

   ก. $\{x \ / \ x \in R\}$

   ข. $\{x \ / \ x \geq 0\}$

   ค. $\{x \ / \ x \geq \frac{-2}{3}\}$

   ง. $\{x \ / \ x \geq \frac{2}{3}\}$

7. ให้ $h = \left\{(x,y) \;/\; y = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x > 1 \\ 2 & \text{เมื่อ } x \leq 1 \end{cases}\right\}$ เรนจ์ของ h คือข้อใด

ก. $R_h = \{y \;/\; y > 0\}$

ข. $R_h = \{y \;/\; y > 1\}$

ค. $R_h = \{1, 2\}$

ง. $R_h = \{1, 2, 3\}$

8. ให้ $f = \{(x,y) \;/\; y = |5x| - 2\}$ เรนจ์ของ f คือข้อใด

ก. $R_f = \{y \;/\; y \geq -2\}$

ข. $R_f = \{y \;/\; y \geq 0\}$

ค. $R_f = \{y \;/\; y \leq 0\}$

ง. $R_f = \{y \;/\; y \leq -2\}$

9. ให้ $K = \left\{(x,y) \;/\; y = \frac{5}{2x + 1}\right\}$ โดเมนของ K คือข้อใด

ก. $D_f = R$

ข. $D_f = R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

ค. $D_f = R - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

ง. $D_f = R - \left\{-\frac{1}{4}\right\}$

10. ให้ $f = \left\{(x,y) \;/\; y = \frac{1}{x}\right\}$ ข้อใดถูกต้อง

ก. $D_f = R$, $R_f = R$

ข. $D_f = R - \{0\}$, $R_f = R$

ค. $D_f = R$, $R_f = R - \{0\}$

ง. $D_f = R - \{0\}$, $R_f = R - \{0\}$

เฉลยข้อทดสอบ

1. ค
2. ง
3. ก
4. ข
5. ข
6. ค
7. ค
8. ก
9. ค
10. ง

ชุดการเรียนการสอนที่ 4

เรื่อง

ฟังก์ชันจาก A ไป B, ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B และฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

บัตรคำสั่ง

ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. ทำบัตรกิจกรรม
2. ศึกษาจากบัตรเนื้อหาอีกครั้งหนึ่งถ้าไม่เข้าใจ หลังจากที่ทำบัตรกิจกรรมแล้ว
3. ทำบัตรแบบฝึกหัด หรือบัตรงานพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
4. ทำบัตรทดสอบหรือบัตรปัญหาพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย

<u>บัตรเนื้อหา</u>

<u>เรื่อง</u> 1. ความหมายของฟังก์ชัน

1.4.1 ฟังก์ชันจาก A ไป B

1.4.2 ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

1.4.3 ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

1.4.1 <u>ฟังก์ชันจาก A ไป B</u>

พิจารณาฟังก์ชันที่ได้จากการจับคู่ระหว่างสมาชิกของเซต A และ B

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{a, b, c, d\}$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{a, b, c, d\}$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{a, b, c, d, e\}$

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{a, b, c, d\}$

<u>นิยาม</u> f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เขียนแทนด้วย $f : A \rightarrow B$ หมายถึงฟังก์ชัน f ที่มีโดเมนเท่ากับ A และมีเรนจ์เป็นสับเซตของ B (ดังตัวอย่างที่ 1-4)

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> กำหนดให้ $A = \{0,1,2,3,4\}$

$B = \{0,1,2,3,\ldots,10\}$

และ $f = \{(x,y) \in A \times B \,/\, y = x^2\}$

$g = \{(x,y) \in B \times A \,/\, y = \sqrt{x}\}$

จงพิจารณาดูว่า 1) f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B หรือไม่

2) g เป็นฟังก์ชันจาก B ไป A หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> 1) $f = \{(0,0), (1,1), (2,4), (3,9)\}$

จะพบว่า f เป็นฟังก์ชัน แต่โดเมนของ $f = \{0,1,2,3\} \neq A$

เพราะฉะนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

2) $g = \{(0,0), (1,1), (4,2), (9,3)\}$

จะพบว่า g เป็นฟังก์ชัน แต่โดเมนของ $g = \{0,1,4,9\} \neq B$

เพราะฉะนั้น g ไม่เป็นฟังก์ชันจาก B ไป A

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดฟังก์ชันดังต่อไปนี้

1) $f = \{(x,y) \in R \times R \mid xy = 1\}$

2) $g = \{(x,y) \in R \times R \mid |x|y = 1\}$

3) $h = \{(x,y) \in R \times R \mid y^3 = x\}$

ในแต่ละฟังก์ชันจงหาเซต A ซึ่งทำให้เป็นฟังก์ชันจาก A ไป R

วิธีทำ

1) จากสมการ $xy = 1$ จะพบว่า ถ้า x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ไม่เท่ากับ 0 แล้ว สามารถหาค่า y ได้เสมอ แสดงว่า โดเมนของ $f = \{x \in R \mid x \neq 0\} = R - \{0\}$

เพราะฉะนั้น ถ้าให้ $A = R-\{0\}$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันจาก A ไป R

2) จากสมการ $|x|y = 1$ จะได้ว่า $y = \frac{1}{|x|}$ ซึ่งจะหาค่า y ได้เสมอเมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ไม่เท่ากับ 0 แสดงว่า โดเมนของ $g = \{x \in R / x \neq 0\} = R-\{0\}$

เพราะฉะนั้น ถ้าให้ $A = R-\{0\}$ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป R

3) จากสมการ $y^3 = x$ จะพบว่าไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใด ๆ เราสามารถหาจำนวนจริง y ได้เสมอ โดยที่ $y = \sqrt[3]{x}$ แสดงว่า โดเมนของ $h = R$

ดังนั้น ถ้าให้ $A = R$ จะได้ว่า h เป็นฟังก์ชันจาก A ไป R

1.4.2 ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B (function from A onto B)

> นิยาม f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เขียนแทนด้วย $f: A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{} B$
>
> หมายถึง ฟังก์ชัน f ที่มีโดเมนเท่ากับ A และมีเรนจ์เท่ากับ B

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> ให้ $A = \{1,3,5\}$ และ $B = \{2,4\}$

1) $f_1 = \{(1,4), (3,2), (5,2)\}$

จะได้ว่า f_1 เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เพราะว่า

$D_{f_1} = \{1,3,5\} = A$ และ $R_{f_1} = \{2,4\} = B$

2) $f_2 = \{(1,2), (3,2), (5,2)\}$

จะได้ว่า f_2 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เพราะว่า

$R_{f_2} = \{2\}$ ซึ่ง $R_{f_2} \neq B$

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> กำหนดให้ $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{a,b,c\}$

1) $f_1 = \{(1,a), (2,a), (3,b)\}$

จะได้ว่า f_1 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เพราะว่า $R_{f_1} \neq B$

2) $f_2 = \{(1,a), (2,c), (3,b)\}$

จะได้ว่า f_2 เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เพราะว่า

$D_{f_2} = \{1,2,3\} = A$ และ $R_{f_2} = \{a,b,c\} = B$

3) $f_3 = \{(1,b), (2,a), (3,b)\}$

จะได้ว่า f_3 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เพราะว่า $R_{f_3} \neq B$

1.4.3 <u>ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง</u> (one to one function)

> **<u>ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง</u>** (one to one function) หมายถึง ฟังก์ชันที่สมาชิกแต่ละตัวของเรนจ์จะถูกจับคู่โดยสมาชิกของโดเมนตัวเดียวเท่านั้น

1) <u>f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B</u> (one to one function from A into B) เขียนแทนด้วย $f:A \xrightarrow{1-1} B$ หมายถึง ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งที่มี $D_f = A$ และ $R_f \subset B$

2) <u>f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B</u> (one to one function from A onto B or one to one correspondence) เขียนแทนด้วย $f:A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} B$ หมายถึง ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งที่มี $D_f = A$ และ $R_f = B$

<u>ตัวอย่าง</u> $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{a, b, c, d, e\}$

จะเห็นว่าการจับคู่ของสมาชิกระหว่าง A กับ B เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B

<u>ตัวอย่าง</u> $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{a, b, c, d\}$

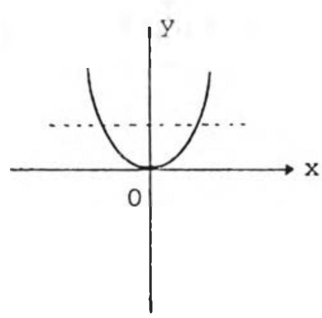
จะเห็นว่าการจับคู่ของสมาชิกระหว่าง A กับ B เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B

<u>การพิจารณาฟังก์ชันว่า เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจากกราฟ</u>

ฟังก์ชันจะเป็นฟังก์ชัน 1-1 ก็ต่อเมื่อ ถ้า ลากเส้นตรงใด ๆ ให้ขนานกับแกน x และให้ตัดกับกราฟของฟังก์ชันแล้ว เส้นตรงเหล่านี้ทุกเส้นจะต้องตัดกราฟของฟังก์ชันเพียงจุดเดียวเท่านั้น

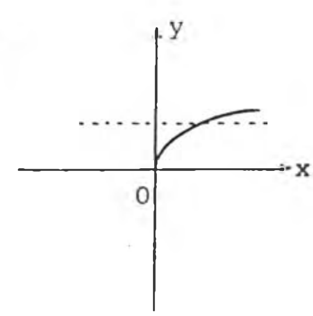
<u>ตัวอย่างที่ ๑</u> จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน 1-1 หรือไม่โดยใช้กราฟ

1)



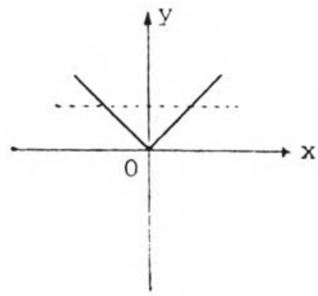
ไม่เป็น

2)



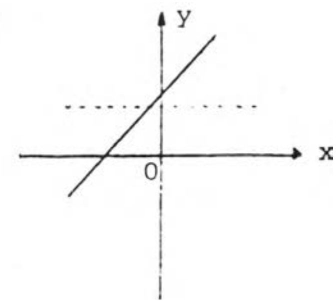
เป็น

3)



ไม่เป็น

4)



เป็น

บัตรกิจกรรม

เรื่อง 1. ความหมายของฟังก์ชัน

1.4.1 ฟังก์ชันจาก A ไป B

1.4.2 ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

1.4.3 ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

1. เขียนโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
2. บอกความสัมพันธ์ของโดเมนและเรนจ์กับเซตซึ่งประกอบเป็นฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
3. สรุปนิยามของฟังก์ชันจาก A ไป B ได้อย่างถูกต้อง
4. เขียนการจับคู่ของโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันจาก A ไป B ได้อย่างถูกต้อง
5. บอกเงื่อนไขของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B ได้อย่างถูกต้อง
6. บอกเงื่อนไขของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B ได้อย่างถูกต้อง
7. เขียนกราฟของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
8. บอกค่า x ได้เมื่อกำหนดค่า y มาให้ โดยใช้กราฟได้อย่างถูกต้อง
9. บอกได้ว่าเส้นขนานที่ลากขนานกับแกน x ตัดกราฟของความสัมพันธ์ที่จุดใดได้อย่างถูกต้อง
10. สรุปวิธีการพิจารณาฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจากกราฟได้อย่างถูกต้อง

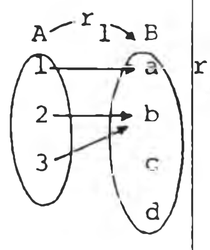
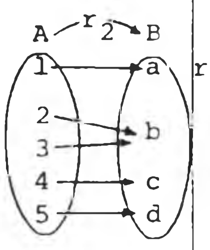
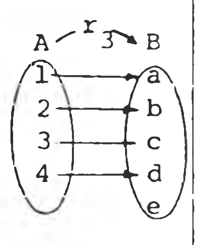
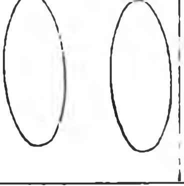
กิจกรรม

ให้นักเรียนพิจารณาข้อความข้างล่างนี้

1.4.1 **ฟังก์ชันจาก A ไป B**

จากที่กล่าวข้างต้น สามารถตอบได้ว่าความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชันหรือไม่ โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันคือเซตอะไร แต่ถ้าถูกถามว่า ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B หรือไม่นักเรียนคงยังตอบไม่ได้ ขอให้นักเรียนศึกษาตารางข้างล่างนี้

<u>ตารางที่ 1</u>

การจับคู่ของสมาชิก	แผนภาพ	เขียนในรูปเซต	ฟังก์ชัน		โดเมน	เรนจ์	โดเมน		เรนจ์	
			เป็น	ไม่เป็น	(A)	(B)	=A	≠A	=B	⊂B
$A=\{1,2,3\}$ $B=\{a,b,c,d\}$		$r_1=\{(1,a),(2,b),(3,b)\}$	✓	—	$\{1,2,3\}$	$\{a,b\}$	✓	—	—	✓
$A=\{1,2,3,4,5\}$ $B=\{a,b,c,d\}$		$r_2=\{(1,a),(2,b),(3,b),(4,c),(5,d)\}$	✓	—	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{a,b,c,d\}$	✓	-	✓	✓
$A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{a,b,c,d,e\}$		________	____	____	____	____	____	____	____	____
$A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{a,b,c,d\}$		________	____	____	____	____	____	____	____	____

<u>หมายเหตุ</u>

ถ้าฟังก์ชันที่มีโดเมนเท่ากับ A และมีเรนจ์เป็นสับเซตของ B เรียกว่า ฟังก์ชันจาก A ไป B ดังนั้นจากตารางที่ 1 จะสรุปได้ดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2

ความสัมพันธ์	ฟังก์ชันจาก A ไป B		เหตุผล
	เป็น	ไม่เป็น	
$r_1=\{(1,a),(2,b),(3,b)\}$	✓	–	เพราะว่า r_1 เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเท่ากับ A และเรนจ์เป็นสับเซตของ B
$r_2=\{(1,a),(2,b),(3,b),(4,c),(5,d)\}$	✓	–	เพราะว่า r_2 เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเท่ากับ A และเรนจ์เป็นสับเซตของ B
$r_3=\{(1,a),(2,b),(3,c),(4,d)\}$	____	____	____________________
$r_4=\{(1,a),(2,b),(3,d),(4,c)\}$	____	____	____________________

จากตารางสรุปได้ว่า

> **นิยาม** f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เขียนแทนด้วย $f:A\rightarrow B$ หมายถึง ฟังก์ชัน f ที่มีโดเมนเท่ากับ A และมีเรนจ์เป็นสับเซตของ B

ถ้ากำหนดให้ $A=\{1,2,3\}$ และ $B=\{4,5\}$ จงพิจารณาแล้วเติมข้อความลงในตารางข้างล่าง

ความสัมพันธ์	$f:A\rightarrow B$		เหตุผล
	เป็น	ไม่เป็น	
$r_1=\{(1,4),(2,5),(3,4)\}$	✓	–	เพราะว่า r_1 เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเท่ากับ A และเรนจ์เป็นสับเซตของ B
$r_2=\{(1,5),(2,4),(3,5)\}$	____	____	____________________
$r_3=\{(4,1),(5,3)\}$	____	____	____________________
$r_4=\{(4,1),(5,2),(4,3)\}$	____	____	____________________

ถ้ากำหนดให้ $A = \{0,1,2,3,4\}$ และ $B = \{0,1,2....,10\}$ จงพิจารณาแล้วเติมข้อความลงในตารางข้างล่าง

ความสัมพันธ์แบบบอกเงื่อนไข	ความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิก	f:A→B หรือ g:B→A		เหตุผล
		เป็น	ไม่เป็น	
$f = \{(x,y) \in A \times B / y = x^2\}$	f = ________	___	_____	____________ ____________
$g = \{(x,y) \in B \times A / y = x\}$	g = ________	___	_____	____________ ____________

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดฟังก์ชันดังต่อไปนี้

1) $f = \{(x,y) \in R \times R \ / \ xy = 1\}$

2) $g = \{(x,y) \in R \times R \ / \ |x|y = 1\}$

3) $h = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y^3 = x\}$

ในแต่ละฟังก์ชันจงหาเซต A ซึ่งทำให้เป็นฟังก์ชันจาก A ไป R

<u>วิธีทำ</u>

จากฟังก์ชันจาก A ไป R หมายความว่า ฟังก์ชันนี้จะต้องมีโดเมนเท่ากับ A และมีเรนจ์เป็นสับเซตของ R

$\therefore$ การหาเซต A ก็คือ การหาโดเมนของฟังก์ชันนั่นเอง

1) $f = \{(x,y) \in R \times R \ / \ xy = 1\}$

เขียนแทนด้วย $xy = 1$ หรือ $y = \frac{1}{x}$

พบว่าจะหาค่า y ได้เสมอยกเว้นเมื่อ $x = 0$

$\therefore D_f = \{x / x \in R\} - \{0\}$

ดังนั้น ถ้าให้ $A = \{x / x \in R\} - \{0\}$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันจาก A ไป R

2) ______________________________

____

____

____

____

3) ____

____

____

____

____

<u>สรุป</u>

<u>การพิจารณา f ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B มีวิธีการดังนี้</u> คือ

1. พิจารณา f ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

2. พิจารณา D_f ว่าเท่ากับ A หรือไม่

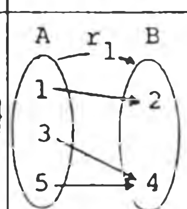
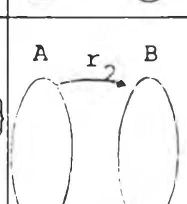
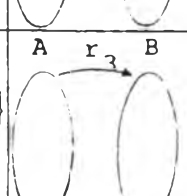
3. พิจารณา R_f ว่าเป็นสับเซตของ B หรือไม่

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเท่ากับ A และเรนจ์เป็นสับเซตของ B กล่าวได้ว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ($f:A \rightarrow B$)

1.4.2 <u>ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B</u>

จากที่กล่าวในตอนที่แล้วเกี่ยวกับฟังก์ชันจาก A ไป B ว่าเป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเท่ากับ A และมีเรนจ์เป็นสับเซตของ B ต่อไปนี้จะมาพิจารณาฟังก์ชันจาก A ไป B ในกรณีที่เรนจ์เท่ากับ B ดังต่อไปนี้

กำหนดให้ $A = \{1,3,5\}$ และ $B = \{2,4\}$ จงพิจารณาตารางข้างล่างนี้

ความสัมพันธ์	แผนภาพ	D_r	R_r	$f:A \rightarrow B$ เป็น	$f:A \rightarrow B$ ไม่เป็น	$f:A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{} B$ เป็น	$f:A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{} B$ ไม่เป็น
$r_1 = \{(1,2),(3,4),(5,4)\}$		$\{1,3,5\}$	$\{2,4\}$	✓	–	✓	–
$r_2 = \{(1,4),(3,2),(5,2)\}$		____	____	____	____	✓	–
$r_3 = \{(1,2),(3,2),(5,2)\}$		____	____	____	____	–	✓

จากตารางข้างบนจะสังเกตเห็นว่า

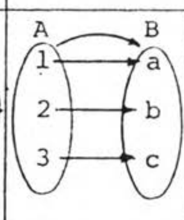
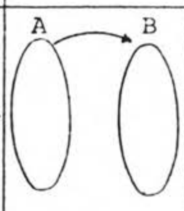
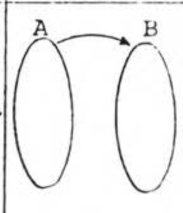
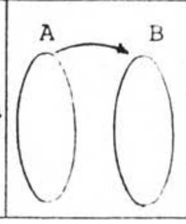
ฟังก์ชันที่เป็นทั้ง $f:A \rightarrow B$ และ $f:A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{} B$ มีเรนจ์คือ ____________

ดังนั้น อาจจะสรุปนิยามของฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B (function from A onto B) ได้ดังนี้

> **<u>นิยาม</u>** f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เขียนแทนด้วย $f:A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{} B$
>
> หมายถึง ฟังก์ชัน f ที่มีโดเมนเท่ากับ A และมีเรนจ์เท่ากับ B

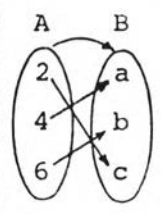
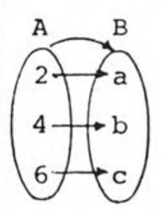
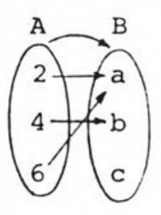
กำหนดให้ $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{a,b,c\}$

จงพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B พร้อมเหตุผล

ลำดับที่	ความสัมพันธ์	แผนภาพ	$f:A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{} B$ เป็น	ไม่เป็น	เหตุผล
1	$r_1=\{(1,a),(2,b),(3,c)\}$		✓	–	r_1 เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเท่ากับ A และเรนจ์เท่ากับ B
2	$r_2=\{(1,a),(2,a),(3,b)\}$		____	____	____________
3	$r_3=\{(1,a),(2,c),(3,b)\}$		____	____	____________
4	$r_4=\{(1,b),(2,a),(3,b)\}$		____	____	____________

1.4.3 <u>ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง</u> (one to one function)

กำหนดให้ $A = \{2,4,6\}$ และ $B = \{a,b,c\}$

ความสัมพันธ์	แผนภาพ	ฟังก์ชัน		เหตุผล	ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง	
		เป็น	ไม่เป็น		เป็น	ไม่เป็น
$f_1 = \{(2,c),(4,a),(6,b)\}$		✓	—	สมาชิกตัวหน้าต่างกันทั้งหมด	✓	—
$f_2 = \{(2,a),(4,b),(6,c)\}$		____	____	______________	✓	—
$f_3 = \{(2,a),(4,b),(6,a)\}$		____	____	______________	—	✓

จากตารางข้างบนจะสังเกตเห็นว่า

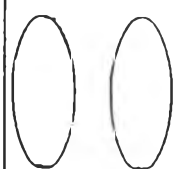
ฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งสมาชิกแต่ละตัวของ B ที่ถูกจับคู่ จะถูกจับคู่โดย

สมาชิกของ A ______________
ตัวเดียว/มากกว่า 1 ตัว

ดังนั้นอาจสรุปนิยามของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one to one function) ได้ดังนี้

> <u>f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง</u> (one to one function) หมายถึง ฟังก์ชันที่สมาชิกแต่ละตัวของเรนจ์จะถูกจับคู่โดยสมาชิกของโดเมนตัวเดียวเท่านั้น

เติมข้อความลงในช่องว่างในตาราง

ฟังก์ชัน	แผนภาพ	ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง		ฟังก์ชันจาก A ไป B		ฟังชันจาก A ไปทั่วถึง B	
		เป็น	ไม่เป็น	เป็น	ไม่เป็น	เป็น	ไม่เป็น
ถ้า $A = \{1,2,3,4\}$ และ $B = \{a,b,c,d,e\}$ $f_4 = \{(1,a),(2,b),(3,c),(4,d)\}$		____	____	____	____	____	____
ถ้า $A = \{1,2,3,4\}$ และ $B = \{a,b,c,d\}$ $f_5 = \{(1,a),(2,b),(3,d),(4,c)\}$		____	____	____	____	____	____
ถ้า $A = \{1,2,3,4,5\}$ และ $B = \{a,b,c,d\}$ $f_6 = \{(1,a),(2,b),(3,c),(4,c),(5,d)\}$		____	____	____	____	____	____

จากตารางข้างบนจะสังเกตเห็นว่า

1) ถ้าฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B คือฟังก์ชันที่เป็นทั้งฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และฟังก์ชันจาก A ไป B ดังนั้นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B หมายถึง ________________

2) ถ้าฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B คือฟังก์ชันที่เป็นทั้งฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ดังนั้นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B หมายถึง

____

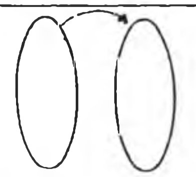
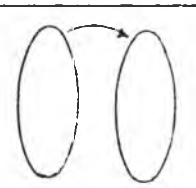
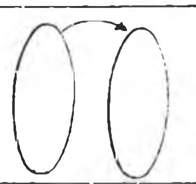
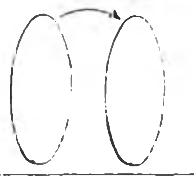
ดังนั้นอาจสรุปนิยามของฟังก์ชันทั้งสองได้ ดังนี้

1. f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B (one to one function from A into B) เขียนแทนด้วย $f:A \xrightarrow{1-1} B$ หมายถึง ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งที่มี $D_f = A$ และ $R_f \subset B$ ($D_f = A$ และ $R_f \subset B$ เป็นคุณสมบัติของ $f:A \rightarrow B$)

2. f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B (one to one function from A onto B or one to one correspondence) เขียนแทนด้วย $f:A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} B$ หมายถึงฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งที่มี $D_f = A$ และ $R_f = B$ ($D_f = A$ และ $R_f = B$ เป็นคุณสมบัติของ $f:A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{} B$

จงพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้แล้วเติมข้อความลงในตาราง

กำหนดให้ $A = \{1,2,3\}$; $B = \{a,b,c\}$

ฟังก์ชัน	แผนภาพ	$f: 1-1$		$f:A \xrightarrow{1-1} B$		$f:A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} B$	
		เป็น	ไม่เป็น	เป็น	ไม่เป็น	เป็น	ไม่เป็น
$f_1 = \{(1,c),(2,b),(3,a)\}$		___	___	___	___	___	___
$f_2 = \{(1,a),(2,a),(3,a)\}$		___	___	___	___	___	___
$f_3 = \{(1,c),(2,b),(3,c)\}$		___	___	___	___	___	___
$f_4 = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$		___	___	___	___	___	___
$f_5 = \{(1,b),(2,b),(3,a)\}$		___	___	___	___	___	___

การพิจารณาฟังก์ชันว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจากกราฟ

การพิจารณาฟังก์ชันว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจากกราฟนั้น สิ่งสำคัญที่จะต้องทำประการแรกก็คงจะเหมือนกับการพิจารณาฟังก์ชันจากกราฟ คือจะต้องสามารถเขียนกราฟของความสัมพันธ์ก่อน

ขอทบทวนหลักการเขียนกราฟของความสัมพันธ์ซึ่งพอจะสรุปได้ดังนี้ คือ

1) สมมุติค่า x และหาค่า y จากเงื่อนไขของความสัมพันธ์ที่ให้มา แล้วเขียนค่า x,y ลงในตาราง (การสมมติค่า x ต้องสัมพันธ์กับโดเมนของความสัมพันธ์)

2) นำค่า x และ y หรือ (x,y) มาลงจุดในระนาบแกนมุมฉาก

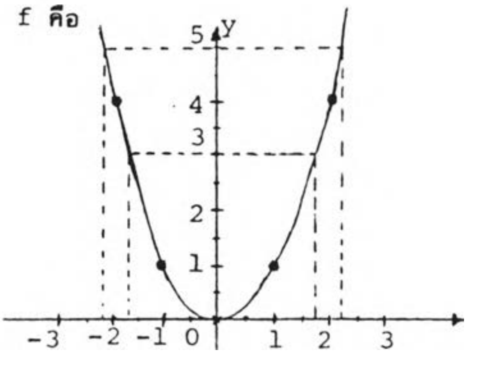
3) โยงจุดต่าง ๆ ต่อเนื่องกัน

ตัวอย่างที่ 1 $f = \{(x,y) \in R \times R \;/\; y = x^2\}$

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	4	1	0	1	4	...

$\therefore f = \{\ldots,(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4),\ldots\}$

กราฟของ f คือ



1) จากกราฟ f เป็นฟังก์ชันเพราะว่าลากเส้นขนานแกน y ตัดกราฟจุดเดียว

2) ถ้ากำหนดค่า y ให้แต่ต้องการจะหาค่า x โดยใช้กราฟจะมีวิธีการคือ ให้ลากเส้นขนานแกน x ที่ตำแหน่ง y ที่กำหนดให้ตัดกราฟแล้วลากเส้นจากจุดตัดขนานแกน y ตัดแกน x ตำแหน่งที่ตัดแกน x คือค่า x ที่ต้องการ

ดังนั้นถ้า $y = 3$ จะได้ $x = 1.8, -1.8$ (ประมาณ)

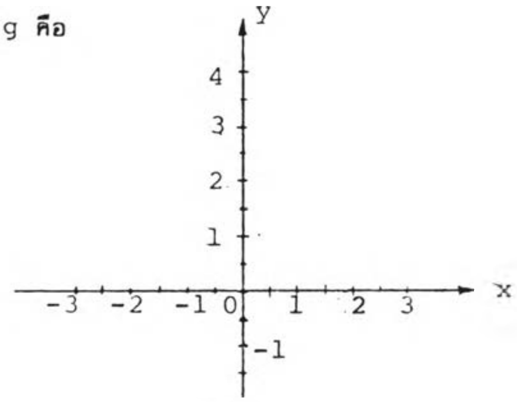
$y = 5$ จะได้ $x = 2.2, -2.2$ (ประมาณ)

จะเห็นว่าเมื่อลากเส้นขนานแกน x ไม่ว่าที่ y ตำแหน่งใด ๆ เส้นขนานจะตัดกราฟจำนวน 2 จุด

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> $g = \{(x,y) \in R \times R \,/\, y = 2x + 1\}$

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	___	___	___	___	___	...

กราฟของ g คือ



จากกราฟ g ________ ฟังก์ชันเพราะว่า ______________
เป็น/ไม่เป็น

ถ้า $y = 3.5$ จะได้ $x =$ ____________________

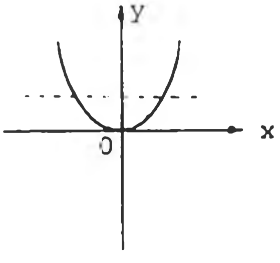
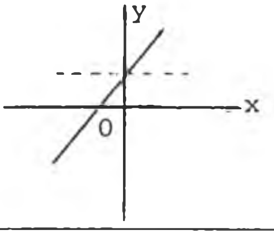
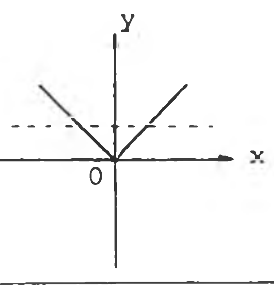
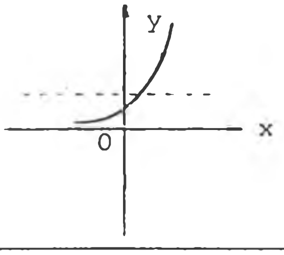
$y = 4$ จะได้ $x =$ ____________________

จะเห็นว่าเมื่อลากเส้นขนานแกน x ไม่ว่าที่ y ตำแหน่งใด ๆ เส้นขนานจะตัดกราฟจำนวน ______ จุด

<u>จากคุณสมบัติของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง</u>

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one to one function) หมายถึง ฟังก์ชันที่สมาชิกแต่ละตัวของเรนจ์ จะถูกจับคู่โดยสมาชิกของโดเมนตัวเดียว

<u>**พิจารณากราฟจากคุณสมบัติฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง**</u>

กราฟของฟังก์ชัน	ลากเส้นขนานแกน x ตัดกราฟ	ความหมาย	ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง	
			เป็น	ไม่เป็น
$f_1 = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = x^2\}$ 	2 จุด	ค่า y ค่าหนึ่งจับคู่กับค่า x 2 ค่า	—	✓
$f_2 = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = 2x + 1\}$ 	1 จุด	ค่า y ค่าหนึ่งจับคู่กับค่า x 1 ค่า	✓	—
$f_3 = \{(x,y) \in R \times R / \ y = \lvert x \rvert\}$ 	______	______________	____	____
$f_4 = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = 2^x\}$ 	______	______________	____	____

จากตารางจะเห็นว่า

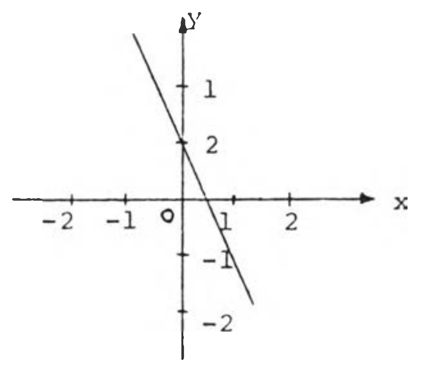
ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งเมื่อลากเส้นขนานแกน x ตัดกราฟ ______________
จุดเดียว/มากกว่า 1 จุด

สรุป

การพิจารณาฟังก์ชันว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจากกราฟ มีขั้นตอนดังนี้ 1) ลากเส้นขนานแกน x ที่ตำแหน่ง y ใด ๆ ตัดกราฟของฟังก์ชัน 2) พิจารณาเส้นขนานแกน x ที่ตัดกราฟของฟังก์ชัน คือ ถ้าเส้นขนานตัดกราฟเพียงจุดเดียว ฟังก์ชันนั้นเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ถ้าเส้นขนานตัดกราฟมากกว่า 1 จุด ฟังก์ชันนั้นไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ตัวอย่าง จงพิจารณาฟังก์ชันว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เมื่อ

$$f_1 = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = -2x + 1\}$$



f_1 __________ ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะว่า ____________________
เป็น/ไม่เป็น

<u>บัตรแบบฝึกหัดหรือบัตรงาน</u>

<u>เรื่อง</u> 1. ความหมายของฟังก์ชัน

1.4.1 ฟังก์ชันจาก A ไป B

1.4.2 ฟังกชันจาก A ไปทั่วถึง B

1.4.3 ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. ให้ $A = \{x,y,z\}$, $B = \{1,0\}$ จงเขียนฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

2. กำหนดให้ $A = \{a,b,c\}$, $B = \{b,c,d\}$

$f_1 = \{(a,c), (b,d), (c,c)\}$

$f_2 = \{(a,d), (b,b), (c,c)\}$

$f_3 = \{(b,a), (c,c), (d,a)\}$

$f_4 = \{(a,b), (c,c), (b,c)\}$

$f_5 = \{(a,b), (b,c), (c,d)\}$

$f_6 = \{(a,c), (b,c), (c,c)\}$

$f_7 = \{(b,b), (c,c), (d,a)\}$

จงพิจารณาฟังก์ชันที่กำหนดให้ว่ามีฟังก์ชันใดบ้างที่เป็น

1) ฟังก์ชันจาก A ไป B

2) ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

3) ฟังก์ชันจาก B ไป A

4) ฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง B

5) ฟังก์ชันจาก A ไป A

6) ฟังก์ชันจาก 1-1

7) ฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง A

เฉลยแบบฝึกหัด

1. ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ดังนั้น $D_f = A$ $R_f \subset B$

$f_1 = \{(x,1), (y,1), (z,1)\}$

$f_2 = \{(x,0), (y,0), (z,0)\}$

$f_3 = \{(x,1), (y,0), (z,0)\}$

$f_4 = \{(x,1), (y,1), (z,0)\}$

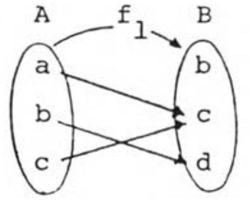
$f_5 = \{(x,1), (y,0), (z,1)\}$

$f_6 = \{(x,0), (y,1), (z,0)\}$

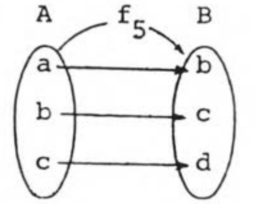
$f_7 = \{(x,0), (y,0), (z,1)\}$

$f_8 = \{(x,0), (y,1), (z,1)\}$

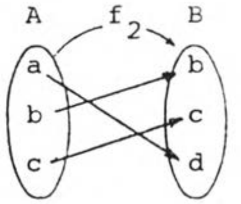
2.



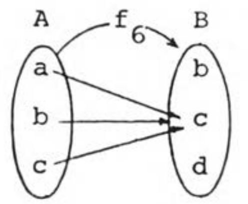
$f_1: A \xrightarrow{\text{into}} B$



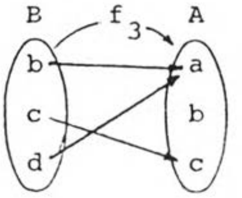
$f_5: A \xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}} B$



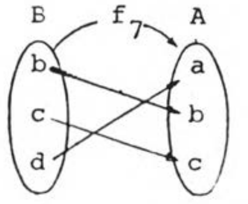
$f_2: A \xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}} B$



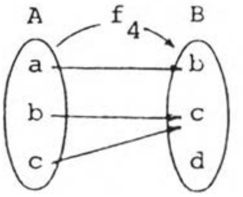
$f_6: A \xrightarrow{\text{into}} B$



$f_3: B \xrightarrow{\text{into}} A$



$f_7: B \xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}} A$



$f_4: A \xrightarrow{\text{into}} B$

บัตรทดสอบหรือบัตรปัญหา

เรื่อง 1. ความหมายของฟังก์ชัน

1.4.1 ฟังก์ชันจาก A ไป B

1.4.2 ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

1.4.3 ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

คำสั่ง จงทำเครื่องหมายกากบาท (X) ลงในวงเล็บตรงกับข้อ ก หรือ ข หรือ ค หรือ ง ในกระดาษคำตอบซึ่งท่านเห็นว่าถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

---

1. ให้ $A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{0,1,2,..,10\}$

ถ้า $f = \{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)\}$

ข้อใดไม่ถูกต้อง

ก. $D_f = A$ และ $R_f \subset B$

ข. f เป็นฟังก์ชัน

ค. f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

ง. f เป็นฟังก์ชันจาก B ไป A

2. ให้ $A = \{a,b,c,d\}$ และ $B = \{1,2,3,4,5\}$

ฟังก์ชันในข้อใดเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

ก. $f_1 = \{(a,1),(b,2),(c,3),(a,4)\}$

ข. $f_2 = \{(1,a),(2,b),(3,c),(4,d),(5,b)\}$

ค. $f_3 = \{(a,2),(b,3),(c,1),(d,4)\}$

ง. $f_4 = \{(1,a),(2,b),(4,c),(5,d)\}$

3. ให้ $A = \{1,3,5\}$, $B = \{a,b\}$ ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B คือข้อใด

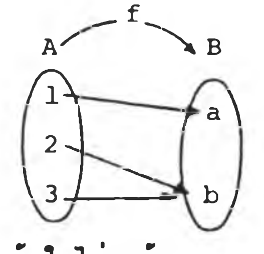
ก. $\{(1,a),(3,b),(5,a)\}$

ข. $\{(1,a),(3,a),(5,a)\}$

ค. $\{(a,1),(b,3)\}$

ง. $\{(a,b),(b,a),(a,a),(b,b)\}$

4.



จากแผนภาพข้อใดไม่ถูกต้อง

ก. f เป็นฟังก์ชัน

ข. f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

ค. f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

ง. f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

5. ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งตรงกับข้อใด

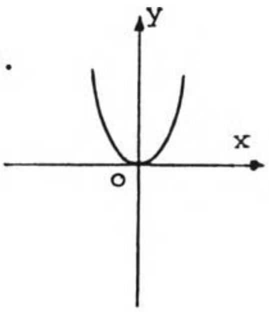
ก. $\{(a,1),(b,2),(c,1)\}$

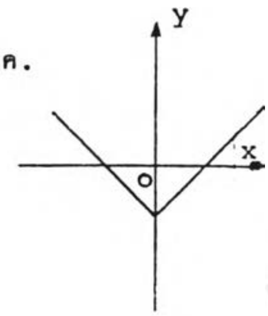
ข. $\{(p,1),(q,1),(r,1)\}$

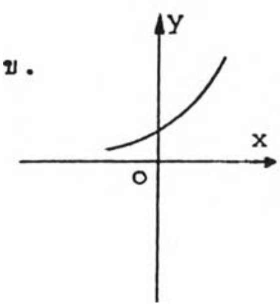
ค. $\{(1,a),(2,b),(3,c)\}$

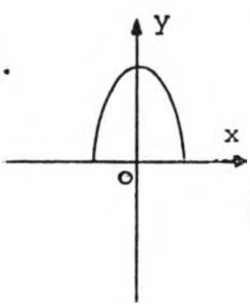
ง. $\{(1,2),(2,1),(2,2),(2,3)\}$

6. กราฟของฟังก์ชันในข้อใด เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ก.


ค.


ข.


ง.


7. ให้ $A = \{1,3,5\}$ และ $C = \{1,3,5,7\}$

ถ้า $f = \{(5,1),(3,5),(1,3)\}$

ข้อใดไม่ถูกต้อง

ก. f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป A

ข. f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง A

ค. f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป C

ง. f เป็นฟังก์ชันจาก C ไปทั่วถึง A

8. ให้ $B = \{a,b\}$ และ $C = \{1,3,5,7\}$

ฟังก์ชันจาก C ไปทั่วถึง B คือข้อใด

ก. $\{(1,a),(3,b),(5,c)\}$

ข. $\{(1,a),(3,b),(5,b),(7,a)\}$

ค. $\{(1,b),(3,b),(5,b),(7,b)\}$

ง. $\{(1,a),(3,a),(5,a)\}$

9. ให้ $C = \{1,3,5,7\}$ ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก C ไป C คือข้อใด

ก. $\{(1,1),(3,3),(5,5)\}$

ข. $\{(5,1),(3,5),(1,3)\}$

ค. $\{(1,3),(3,5),(5,7),(7,1)\}$

ง. $\{(1,3),(3,5),(5,1),(7,7),(1,1)\}$

10. ฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ก. $f(x) = x^2 + 2$

ข. $f(x) = |x - 3|$

ค. $f(x) = 3x - 1$

ง. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x > 0 \\ -1 & \text{เมื่อ } x \leq 0 \end{cases}$

เฉลยข้อทดสอบ

1. ง
2. ค
3. ก
4. ง
5. ค
6. ข
7. ง
8. ข
9. ค
10. ค

ชุดการเรียนการสอนที่ 5

เรื่อง

การกำหนดฟังก์ชัน

บัตรคำสั่ง

ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. **ทำบัตรกิจกรรม**
2. **ศึกษาจากบัตรเนื้อหาอีกครั้งหนึ่งถ้าไม่เข้าใจ หลังจากที่ทำบัตรกิจกรรมแล้ว**
3. **ทำบัตรแบบฝึกหัด หรือบัตรงานพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย**
4. **ทำบัตรทดสอบหรือบัตรปัญหาพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย**

<u>บัตรเนื้อหา</u>

เรื่อง 1. ความหมายของฟังก์ชัน

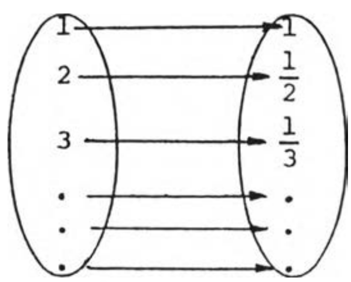
1.5 การกำหนดฟังก์ชัน

<u>การกำหนดฟังก์ชัน</u> มีวิธีการเขียนฟังก์ชันได้หลายวิธี ดังนี้

1) โดยการแจกแจงสมาชิกเป็นคู่ลำดับทั้งหมด เช่น

$$f = \{(1,a),\ (2,b),\ (3,c)\}$$

2) โดยแผนภาพแสดงการจับคู่ระหว่างสมาชิกของเซตสองเซต



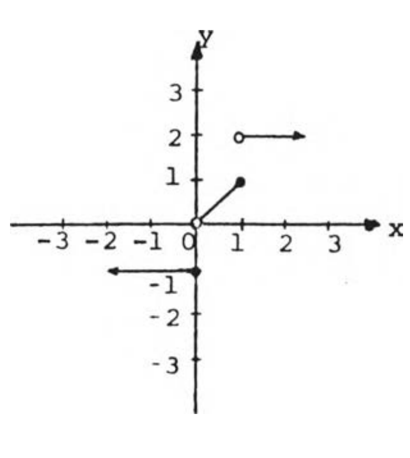
3) โดยตาราง เช่น

x	1	2	3	....
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	....

4) โดยการเขียนกราฟ เช่น

$$f = \left\{(x,y) \in R \times R \ / \ y = \begin{cases} -1, & \text{เมื่อ } x \leq 0 \\ x, & \text{เมื่อ } 0 < x \leq 1 \\ 2, & \text{เมื่อ } 1 < x \end{cases}\right\}$$

เขียนกราฟได้ ดังนี้



5) โดยการกำหนดเงื่อนไขสมาชิกในเซต หรือเป็นสูตรแสดงฟังก์ชัน เช่น

$f = \{(x,y) \in R \times R \,/\, y = x + 1\}$ อาจเขียนแทนด้วย $f(x) = x + 1$

$g = \{(x,y) \in R \times R \,/\, y = x^2 + 3x - 1\}$ อาจเขียนแทนด้วย

$g(x) = x^2 + 3x - 1$

$h = \{(x,y) \in R \times R \,/\, y = \sqrt{x} - 3\}$ อาจเขียนแทนด้วย $h(x) = \sqrt{x} - 3$

เรียก $f(x)$, $g(x)$ และ $h(x)$ ว่า เอฟของเอ็กซ์, จีของเอ็กซ์ และเอชของเอ็กซ์ ตามลำดับ ซึ่งหมายความว่า เป็นค่าของฟังก์ชัน f, g และ h ที่ x

$\therefore$ $f(x)$ ก็คือค่า y ของฟังก์ชัน f นั่นเอง

$g(x)$ ก็คือค่า y ของฟังก์ชัน g นั่นเอง

$h(x)$ ก็คือค่า y ของฟังก์ชัน h นั่นเอง

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> กำหนดให้ $f(x) = 2x - 3$ จงหา $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$

<u>วิธีทำ</u>

$x = 1$, $f(1) = 2(1) - 3 = -1$

$\therefore y = f(1) = -1$

$x = 2$, $f(2) = 2(2) - 3 = 1$

$y = 1$

$x = 3$, $f(3) = 2(3) - 3 = 3$

$y = 3$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 3$ จงหา $f(0)$, $f(-1)$, $f(a)$, $f(x + 1) - f(x)$

<u>วิธีทำ</u>

$f(0) = 0^2 + 3 = 3$

$f(-1) = (-1)^2 + 3 = 4$

$f(a) = (a)^2 + 3 = a^2 + 3$

$f(x + 1) = (x + 1)^2 + 3 = x^2 + 2x + 1 + 3$

$= x^2 + 2x + 4$

$f(x) = (x)^2 + 3 = x^2 + 3$

$$\therefore \quad f(x+1) - f(x) = (x^2 + 2x + 4) - (x^2 + 3)$$
$$= x^2 + 2x + 4 - x^2 - 3$$
$$= 2x - 1$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 1 & \text{ถ้า } x \leqslant 2 \\ \dfrac{1}{x-2} & \text{ถ้า } 2 < x \leqslant 3 \\ 2x - 5 & \text{ถ้า } x > 3 \end{cases}$

จงหา 1) $f(\sqrt{2})$ 2) $f(\sqrt{8})$ 3) $f(\frac{7}{2})$

วิธีทำ 1) $\because x = \sqrt{2}$ ซึ่ง $\sqrt{2} \leqslant 2$

$$\therefore f(x) = 2x^3 + 1$$
$$f(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})^3 + 1 = 4\sqrt{2} + 1$$

2) $\because x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ซึ่ง $2 < 2\sqrt{2} \leqslant 3$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{x-1}$$
$$f(\sqrt{8}) = \frac{1}{\sqrt{8} - 2}$$

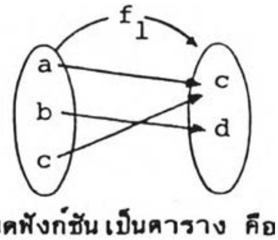
3) $\because x = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$ ซึ่ง $3\frac{1}{2} > 3$

$$\therefore f(x) = 2x - 5$$
$$f(\tfrac{7}{2}) = 2(\tfrac{7}{2}) - 5 = 2$$

การกำหนดฟังก์ชันสามารถกำหนดได้หลายวิธี

ตัวอย่าง $f_1 = \{(a,c), (b,d), (c,c)\}$

1) กำหนดฟังก์ชันเป็นแผนภาพได้ คือ



2) กำหนดฟังก์ชันเป็นตาราง คือ

x	a	b	c
y	c	d	c

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $\{(x,y) \in R \times R \ / \ y = x - 2\}$

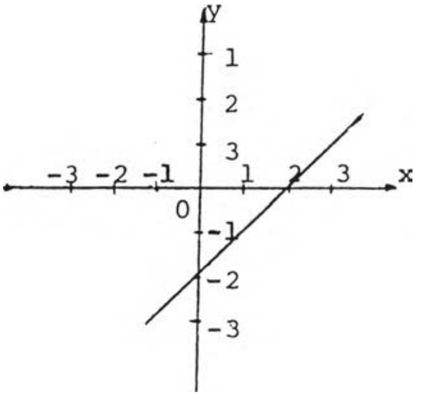
1) กำหนดฟังก์ชันเป็นตาราง คือ

x	...	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	-4	-3	-2	-1	0	1	...

2) กำหนดฟังก์ชันโดยการแจกแจงสมาชิก

$\{\ldots, (-2-4), (-1,-3), (0,-2), (1,-1), (2,0, (3,1), \ldots\}$

3) กำหนดฟังก์ชันเป็นกราฟ



บัตรกิจกรรม

เรื่อง 1. ความหมายของฟังก์ชัน

1.5 การกำหนดฟังก์ชัน

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

1. ยกตัวอย่างฟังก์ชันแบบต่าง ๆ ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
2. เขียนฟังก์ชันตามแบบที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
3. สามารถสรุปแบบต่าง ๆ ของการกำหนดฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง

กิจกรรม

ให้นักเรียนพิจารณาข้อความข้างล่างนี้

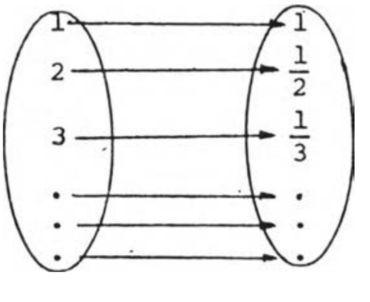
การกำหนดฟังก์ชันนั้นมีวิธีการกำหนดได้หลายวิธี

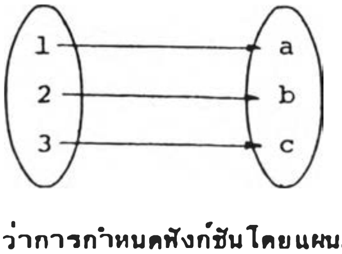
1) โดยการแจกแจงสมาชิก

$$f = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$$

$$g = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$$

2) โดยแผนภาพแสดงการจับคู่ระหว่างสมาชิกของเซตสองเซต





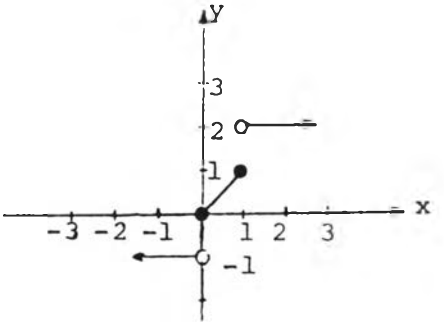
จะเห็นว่าการกำหนดฟังก์ชันโดยแผนภาพนั้นทำให้ เห็นความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกของเซตสองเซตอย่างชัดเจน และสามารถแยกโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันอย่างชัดเจน

3) โดยตาราง เป็นการกำหนดฟังก์ชันซึ่งเข้าใจกันโดยง่ายวิธีหนึ่ง

จำนวนลูกกวาด	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ราคา (สตางค์)	40	80	100	140	180	200	240	280	300	340

x	1	2	3	4	...
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...

4) โดยกราฟ เป็นการนำฟังก์ชันมาแสดงให้เข้าใจได้ง่าย ๆ โดยเขียนแทนคู่อันดับคู่หนึ่งด้วยจุดในระนาบ



จากกราฟ จุดค้นแสดงว่ากราฟรวมจุดนั้น แต่วงกลวงแสดงว่ากราฟไม่รวมจุดนั้น กราฟดังกล่าวมีสมการ ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

5) โดยการกำหนดเงื่อนไขสมาชิกในเซต หรือเป็นสูตรแสดงฟังก์ชัน

$f = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = x + 1\}$

อาจเขียนแทนด้วย $f(x) = x + 1$

$g = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = x^2 + 3x - 1\}$

อาจเขียนแทนด้วย $g(x) = x^2 + 3x - 1$

$h = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = \sqrt{x} - 3\}$

อาจเขียนแทนด้วย $h(x) =$ ____________________

เราเรียก $f(x)$ ว่า เอฟของเอ็กซ์ หมายความว่า ค่าของฟังก์ชัน f ที่ x

$g(x)$ ว่า จีของเอ็กซ์ หมายความว่า ค่าของฟังก์ชัน g ที่ x

$h(x)$ ว่า เอชของเอ็กซ์ หมายความว่า ___________

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f(x) = 2x - 3$ จงหา $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$

วิธีทำ

จาก $f(x) = 2x - 3$

$\therefore f(1) = 2(1) - 3$

$= -1$

$\therefore f(2) = 2(2) - 3$

$= 1$

$\therefore f(3) =$ ___________

$=$ ___________

ข้อสังเกต

การหาค่า $f(x)$ เมื่อ $x = 1$ ก็คือการแทนค่า x ด้วย 1 ในฟังก์ชัน f

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 3$ จงหา $f(0)$, $f(-1)$, $f(a)$, $f(x + 1) - f(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^2 + 3$

$\therefore f(0) = 0^2 + 3 = 3$

$\therefore f(-1) = (\_)^2 + 3 =$ ______

$\therefore f(a) =$ _______ $=$ ______

$f(x + 1) = (x + 1)^2 + 3 =$ ______

$f(x) =$ _______ $=$ ______

$\therefore f(x + 1) - f(x) = ($__________$) - ($__________$)$

$=$ ________________________

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 2x^3+1 & \text{ถ้า } x \leq 2 \\ \frac{1}{x-2} & \text{ถ้า } 2 < x \leq 3 \\ 2x-5 & \text{ถ้า } x > 3 \end{cases}$

จงหา 1) $f(\sqrt{2})$ 2) $f(\sqrt{8})$ 3) $f(\frac{7}{2})$

<u>วิธีทำ</u>

1) $f(\sqrt{2})$ ก็คือ $x = \sqrt{2}$

จะได้ว่า $\sqrt{2} \leq 2$

ดังนั้น $f(x) = 2x^3+1$

$f(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})^3+1$

$= 4\sqrt{2}+1$

2) $f(\sqrt{8})$ ก็คือ $x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

จะได้ว่า $2 < 2\sqrt{2} \leq 3$

ดังนั้น $f(x)$ = __________

$f(\sqrt{8})$ = __________

= __________

3) $f(\frac{7}{2})$ ก็คือ $x = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$

จะได้ว่า $3\frac{1}{2} > 3$

ดังนั้น $f(x)$ = ______________

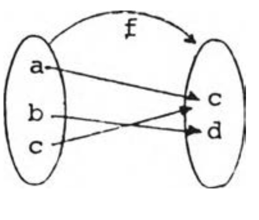
$f(\frac{7}{2})$ = ______________

= ______________

จากที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นว่าการกำหนดฟังก์ชันสามารถกำหนดได้หลายวิธีด้วยกันซึ่งสามารถเขียนจากการกำหนดฟังก์ชันวิธีหนึ่งมาเป็นอีกวิธีหนึ่งได้ เช่น

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $f = \{(a,c), (b,d), (c,c)\}$

1) กำหนดฟังก์ชันเป็นแผนภาพได้ คือ



2) กำหนดฟังก์ชันเป็นตาราง คือ

x	a	b	c
y	c	d	c

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\{(x,y) \in R \times R \ / \ y = x - 2\}$

1. กำหนดฟังก์ชันเป็นตาราง คือ

x	...	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	—	—	—	—	—	—	...

2. กำหนดฟังก์ชันโดยการแจกแจงสมาชิก

$\{$ ________________________ $\}$

3. กำหนดฟังก์ชันเป็นกราฟ

บัตรแบบฝึกหัดหรือบัตรงาน

เรื่อง 1. ความหมายของฟังก์ชัน

1.2 การกำหนดฟังก์ชัน

แบบฝึกหัด

1. ถ้า $f(x) = x^2 + 3x - 5$

   จงหาค่าของ $f(0)$, $f(-1)$, $f(3)$, $f(a)$, $f(a + b)$ และ $f(x + b)$

2. ถ้า $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x < 1 \\ x & \text{เมื่อ } 1 \leq x \leq 3 \\ 2 & \text{เมื่อ } x > 3 \end{cases}$

   จงหาค่าของ $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(\sqrt{3})$, $f(9)$

3. ถ้า $f = \{(x,y) \in R \times R \,/\, y = x^3 + 4x - 3\}$

   (1) $f(3) + f(2) = f(3 + 2)$ หรือไม่

   (2) $f(3.2) = f(3).f(2)$ หรือไม่

เฉลยแบบฝึกหัด

1. $f(0) = 5$, $f(-1) = -7$, $f(3) = 13$, $f(a) = a^2 + 3a - 5$

   $f(a + b) = a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b - 5$

   $f(x + b) = x^2 + 2xb + b^2 + 3x + 3b - 5$

2. $f(-2) = 1$, $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(\frac{1}{2}) = 1$, $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$,

   $f(9) = 2$

3. ไม่เท่ากัน, ไม่เท่ากัน

บัตรทดสอบหรือบัตรปัญหา

เรื่อง 1. ความหมายของฟังก์ชัน

1.5 การกำหนดฟังก์ชัน

<u>คำสั่ง</u> จงทำเครื่องหมายกากบาท (X) ลงในวงเล็บตรงกับข้อ ก หรือ ข หรือ ค หรือ ง ในกระดาษคำตอบซึ่งท่านเห็นว่าถูกต้องที่สุด เพียงข้อเดียว

---

1. ให้ $f = \{(x,y) \in A \times B \ / \ y = x^2 + 3x - 1\}$ เมื่อ $A = \{0,1,2,3\}$, $B = \{0,1,2,\ldots,10\}$ ข้อใดถูกต้อง

ก. $f = \{(1,3),(2,9)\}$

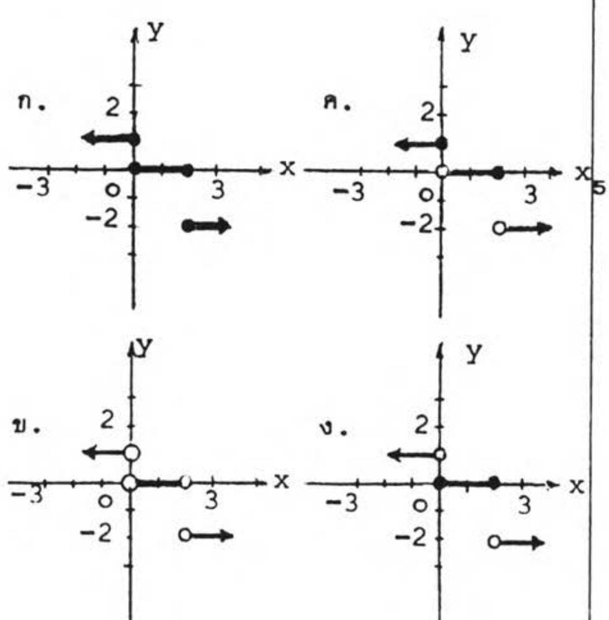
ข. $f = \{(0,-1),(1,3),(2,9)\}$

ค. $f = \{(1,3),(2,9),(3,17)\}$

ง. $f = \{(0,-1),(1,3),(2,9),(3,17)\}$

2. ให้ $f = \left\{(x,y) \ / \ y = \begin{cases} 1 & , \ x \leq 0 \\ 0 & , \ 0 < x \leq 2 \\ -2 & , \ x > 2 \end{cases}\right.$

กราฟคือข้อใด



3. ให้ $f(x) = 3x^2 - x + 2$ ข้อใดไม่ถูกต้อง

ก. $f(a) = 3a^2 - a + 2$

ข. $f(-a) = 3a^2 + a + 2$

ค. $-f(a) = -3a^2 + a - 2$

ง. $f(a+b) = 3a^2 + 6ab + 3b^2$

4. ให้ $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x}{x-1}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$

ข้อใดไม่ถูกต้อง

ก. $f(-1) = 0$

ข. $f(\frac{1}{2}) = -1$

ค. $f(\frac{1}{3}) . f(3) = \frac{1}{2}$

ง. $f(-2) + f(2) = 1$

5. ให้ $f(x) = x^2 + 3x - 2$ ข้อใดไม่ถูกต้อง

ก. $f(2) = 8$

ข. $f(x-1) = x^2 + 3x - 4$

ค. $f(2x) = 4x^2 + 6x - 2$

ง. $f(2x-1) = 4x^2 + 2x - 4$

เฉลยข้อทดสอบ

1. ก

2. ค

3. ง

4. ค

5. ข

ชุดการเรียนการสอนที่ 6

เรื่อง

ฟังก์ชันเชิงเส้น

ฟังก์ชันค่าสมบูรณ์

ฟังก์ชันขั้นบันได

บัตรคำสั่ง

ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. ทำบัตรกิจกรรม
2. ศึกษาจากบัตรเนื้อหาอีกครั้งหนึ่งถ้าไม่เข้าใจ หลังจากที่ทำบัตรกิจกรรมแล้ว
3. ทำบัตรแบบฝึกหัด หรือบัตรงานพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
4. ทำบัตรทดสอบหรือบัตรปัญหาพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย

บัตรเนื้อหา

เรื่อง 2. ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ

2.1 ฟังก์ชันเชิงเส้น

2.2 ฟังก์ชันค่าสมบูรณ์

2.3 ฟังก์ชันขั้นบันได

2.1 **ฟังก์ชันเชิงเส้น** (Linear Function) คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax + b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง เช่น

$f(x) = 2x + 3$

$f(x) = x - 1$

$f(x) = -4x$

$f(x) = x$

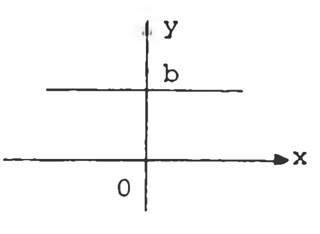
$f(x) = 1$

กราฟของฟังก์ชันเหล่านี้เป็นเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน y

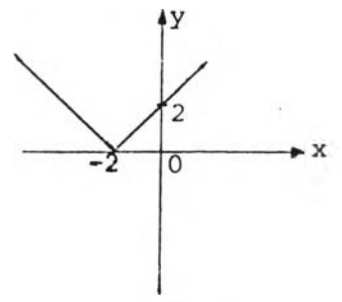
ข้อสังเกต

1) ฟังก์ชันเชิงเส้น $f(x) = ax + b$ กราฟจะเป็นเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ a และระยะตัดแกน y เท่ากับ b

2) ฟังก์ชันเชิงเส้น $f(x) = ax + b$ เมื่อ $a = 0$ จะได้ฟังก์ชันอยู่ในรูป $f(x) = b$ ฟังก์ชันนี้เรียกว่า **ฟังก์ชันคงตัว** (Constant Function) กราฟของฟังก์ชันคงตัวจะเป็นเส้นตรงขนานกับแกน x และกราฟจะทับแกน x เมื่อ $b = 0$



2.2 **ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์** (Absolute Value Function) คือฟังก์ชันที่มีเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ปรากฏอยู่เช่น $f(x) = |x + 2|$ มีกราฟดังนี้



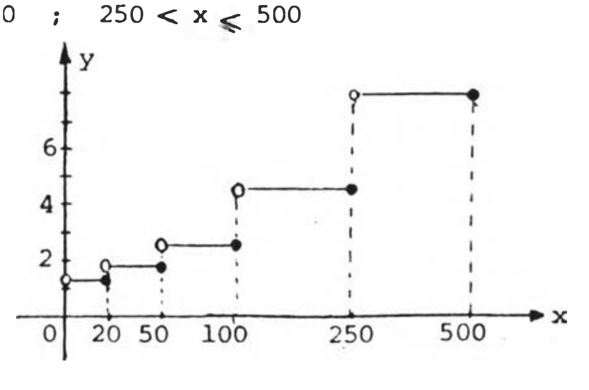
2.3 <u>ฟังก์ชันขั้นบันได</u> (Step Function) คือฟังก์ชันที่มีค่าคงตัวเป็นช่วง ๆ กราฟของฟังก์ชันนี้มีรูปคล้ายขั้นบันได

ตัวอย่างเช่น อัตราค่าไปรษณียากรสำหรับส่งจดหมายในประเทศทางธรรมดา ตั้งแต่วันที่ 15 เมษายน พ.ศ. 2524 (ไม่ใช่ทางอากาศ)

น้ำหนัก	ค่าส่งเป็นบาท
ไม่เกิน 20 กรัม	1.25
เกิน 20 กรัม แต่ไม่เกิน 50 กรัม	1.75
เกิน 50 กรัม แต่ไม่เกิน 100 กรัม	2.50
เกิน 100 กรัม แต่ไม่เกิน 250 กรัม	4.50
เกิน 250 กรัม แต่ไม่เกิน 500 กรัม	8.00

เขียนในรูปสมการ คือ

$$f(x) = \begin{cases} 1.25 \; ; & 0 < x \leqslant 20 \\ 1.75 \; ; & 20 < x \leqslant 50 \\ 2.50 \; ; & 50 < x \leqslant 100 \\ 4.50 \; ; & 100 < x \leqslant 250 \\ 8.00 \; ; & 250 < x \leqslant 500 \end{cases}$$



บัตรกิจกรรม

เรื่อง 2. ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ

2.1 ฟังก์ชันเชิงเส้น

2.2 ฟังกชันค่าสัมบูรณ์

2.3 ฟังก์ชันขั้นบันได

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

1. บอกได้ถูกต้องว่ากราฟของความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
2. สรุปรูปทั่วไปของฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันคงตัว ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ และฟังก์ชันขั้นบันไดได้อย่างถูกต้อง
3. จำแนกฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ และฟังก์ชันขั้นบันไดได้อย่างถูกต้อง
4. เขียนกราฟของฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ และฟังก์ชันขั้นบันไดได้อย่างถูกต้อง

กิจกรรม

ให้นักเรียนพิจารณาข้อความข้างล่างนี้

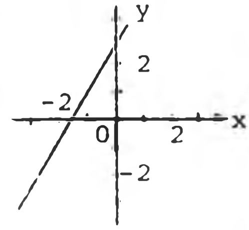
2.1 ฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear Function)

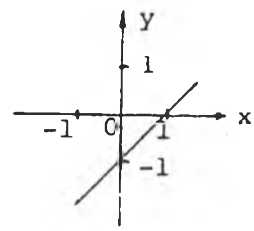
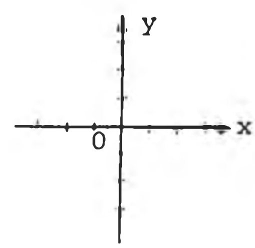
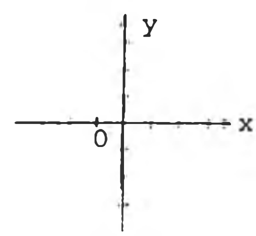
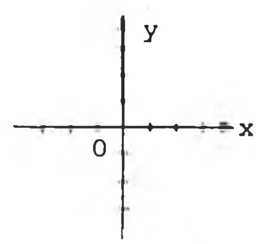
ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงว่ามีรูปทั่วไปคือ $y = mx + b$ เมื่อ m คือความชันของเส้นตรง b คือระยะตัดแกน y ซึ่งในการหาเส้นตรงอาจจะทำได้โดยการหาจุดที่ตัดแกน x และแกน y ซึ่งหาได้ดังนี้

(1) การหาจุดที่เส้นตรงตัดแกน x ก็คือ หาว่าเมื่อ $y = 0$, x จะเป็นเท่าใด

(2) การหาจุดที่เส้นตรงตัดแกน y ก็คือ หาว่าเมื่อ $x = 0$, y จะเป็นเท่าใด

ขอให้พิจารณาตารางข้างล่างและเติมข้อความที่ว่างไว้

ลำดับที่	ฟังก์ชัน	กราฟ	ฟังก์ชัน เป็น	ฟังก์ชัน ไม่เป็น	ลักษณะกราฟ
1	$f(x) = 2x + 3$		✓	—	กราฟของฟังก์ชันเป็นเส้นตรง ความชันคือ 2 ตัดแกน x ที่จุด (0,3) ตัดแกน y ที่จุด $(\frac{-3}{2},0)$

ลำดับที่	ฟังก์ชัน	กราฟ	ฟังก์ชัน		ลักษณะกราฟ
			เป็น	ไม่เป็น	
2	$f(x) = x - 1$		✓	—	กราฟของฟังก์ชันเป็นเส้นตรง ความชันคือ____ ตัดแกน x ที่จุด____ ตัดแกน y ที่จุด____
3	$f(x) = -4x$		—	—	________________ ________________ ________________
4	$f(x) = 1$		—	—	กราฟของฟังก์ชันเป็นเส้นตรงขนานแกน x คือมีความชันเป็น o ตัดแกน y ที่จุด (o,1)
5	$f(x) = 0$		—	—	________________ ________________ ________________

<u>จากตาราง</u>

1. กราฟของฟังก์ชันเหล่านี้มีลักษณะเป็นเส้นตรง ______________ แกน y
   ขนาน/ไม่ขนาน

2. กรณีที่กราฟขนานแกน x ความชันของกราฟคือ ________________

ถ้าให้ความชันแทนด้วย a ระยะตัดแกน y แทนด้วย b

ฟังก์ชัน	ความชัน (a)	ระยะตัดแกน y (b)	รูปทั่วไป
$f(x) = 2x + 3$	2	3	$f(x) = ax + b$
$f(x) = x - 1$	______	______	
$f(x) = -4x$	______	______	
$f(x) = 1$	0	1	$f(x) = b$
$f(x) = 0$	______	______	

จากตาราง

1. ถ้าเรียกกราฟของฟังก์ชันที่เป็นเส้นตรงไม่ขนานกับแกน y ว่าฟังก์ชันเชิงเส้น ดังนั้นรูปทั่วไปของฟังก์ชันเชิงเส้นคือ $f(x) =$ ________________
2. ถ้าเรียกกราฟของฟังก์ชันที่ขนานแกน x ว่าฟังก์ชันคงตัว (Constant Function) รูปทั่วไปของฟังก์ชันคงตัวคือ $f(x) =$ ________________

<u>สรุป</u>

> ฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear Function) คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax + b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง
>
> กราฟของฟังก์ชันเหล่านี้เป็นเส้นตรงไม่ขนานกับแกน y

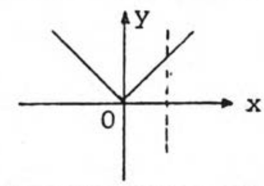
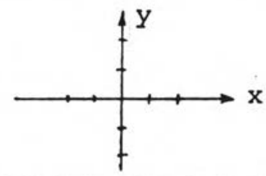
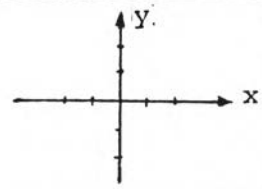
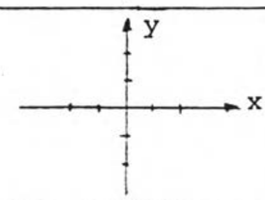
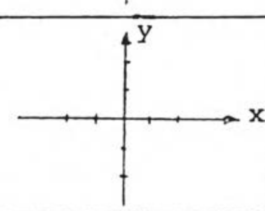
<u>ข้อสังเกต</u>

1) กราฟของฟังก์ชันเชิงเส้นเป็นเส้นตรงเสมอ และเป็นเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ a และระยะตัดแกน y เท่ากับ b
2) ฟังก์ชันคงตัว คือฟังก์ชันเชิงเส้น เมื่อ $a = 0$
   จะได้ $f(x) = b$

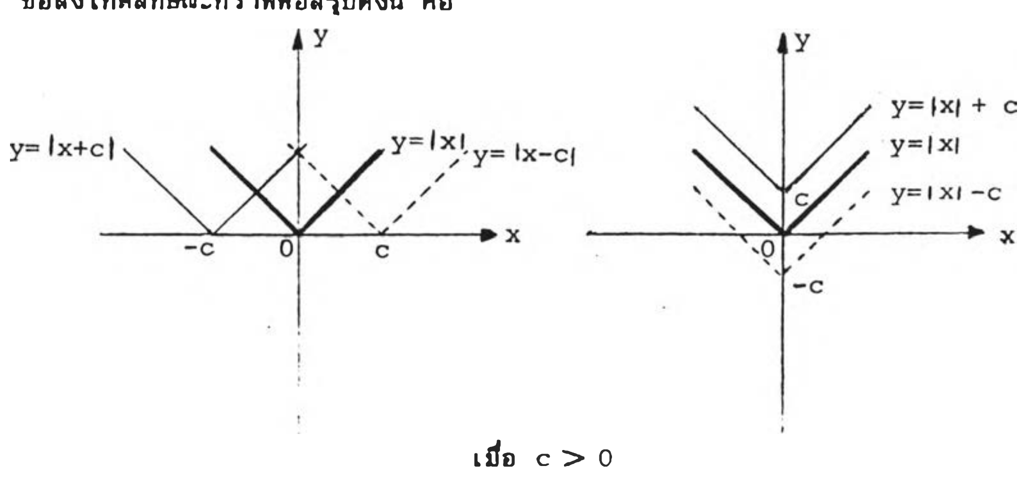
กราฟของฟังก์ชันคงตัวจะเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน x และกราฟจะทับแกน x เมื่อ $b = 0$

2.2 <u>ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์</u> (Absolute Value Function)

จงพิจารณาตารางข้างล่างนี้

ความสัมพันธ์	ค่าของฟังก์ชัน	กราฟ	ฟังก์ชัน เป็น	ฟังก์ชัน ไม่เป็น
$f(x) = \|x\|$	x: ... -2 -1 0 1 2 ... y: ... -2 -1 0 1 2 ...		✓	–
$f(x) = \|x - 2\|$	x: ... -2 -1 o 1 2 ... y: — — — — — — —		—	—
$f(x) = \|x + 2\|$	x: ... -2 -1 0 1 2 ... y: — — — — — — —		—	—
$f(x) = \|x\| - 1$	x: ... -2 -1 0 1 2 ... y: — — — — — — —		—	—
$f(x) = \|x\| + 1$	x: ... -2 -1 0 1 2 ... y: — — — — — — —		—	—

จากตารางจะเห็นว่าฟังก์ชันทุกฟังก์ชันมีเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ปรากฏอยู่ และมีข้อสังเกตลักษณะกราฟพอสรุปดังนี้ คือ



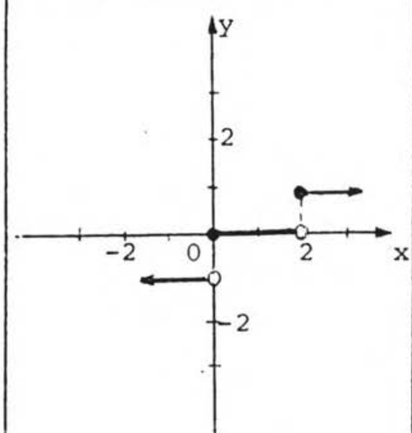
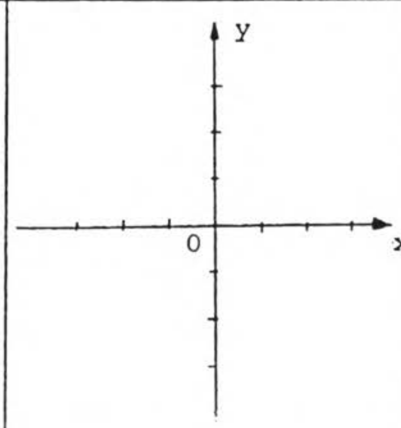
เมื่อ $c > 0$

จากที่กล่าวมาข้างต้นจะสรุปได้ว่า

ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์คือ ฟังก์ชันที่มีเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ปรากฏอยู่

2.3 <u>ฟังก์ชันขั้นบันได</u> (Step Function)

จงพิจารณาตารางข้างล่างนี้

ความสัมพันธ์	กราฟ	ฟังก์ชัน		เหตุผล
		เป็น	ไม่เป็น	
$f(x) = \begin{cases} -1 ; & x < 0 \\ 0 ; & 0 \leqslant x < 2 \\ 1 ; & x > 2 \end{cases}$		✓	—	ลากขนานแกน y ตัดกราฟได้จุดเดียวเท่านั้น
$f(x) = \begin{cases} 2 ; & x > 2 \\ 1 ; & 1 < x \leqslant 2 \\ 0 ; & 0 < x \leqslant 1 \\ -1 ; & -1 < x \leqslant 0 \\ -2 ; & -2 < x \leqslant -1 \end{cases}$		—	—	________ ________ ________ ________

จากตารางจะเห็นว่ารูปกราฟและฟังก์ชันมีลักษณะคล้าย ____________________

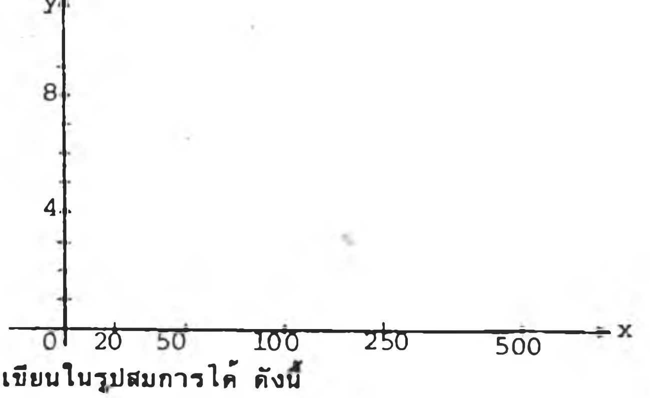
ค่าของฟังก์ชันมีลักษณะ __________________________

<u>สรุป</u>

> ฟังก์ชันขั้นบันได (Step Function) คือฟังก์ชันที่มีค่าคงตัวเป็นช่วง ๆ กราฟของฟังก์ชันนี้มีรูปคล้ายขั้นบันได

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> อัตราค่าไปรษณียากรสำหรับส่งจดหมายในประเทศทางธรรมดา ตั้งแต่วันที่ 15 เมษายน พ.ศ. 2524 (ไม่ใช่ทางอากาศ)

น้ำหนัก	ค่าส่งเป็นบาท
ไม่เกิน 20 กรัม	1.25
เกิน 20 กรัม แต่ไม่เกิน 50 กรัม	1.75
เกิน 50 กรัม แต่ไม่เกิน 100 กรัม	2.50
เกิน 100 กรัม แต่ไม่เกิน 250 กรัม	4.50
เกิน 250 กรัม แต่ไม่เกิน 500 กรัม	8.00



เขียนในรูปสมการได้ ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 1.25 \; ; & 0 < x \leq 20 \\ 1.75 \; ; & 20 < x \leq 50 \\ 2.50 \; ; & 50 < x \leq 100 \\ 4.50 \; ; & 100 < x \leq 250 \\ 8.00 \; ; & 250 < x \leq 500 \end{cases}$$

บัตรแบบฝึกหัดหรือบัตรงาน

เรื่อง 2. ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ

2.1 ฟังก์ชันเชิงเส้น

2.2 ฟังก์ชันค่าสมบูรณ์

2.3 ฟังก์ชันขั้นบันได

แบบฝึกหัด

1) จงพิจารณาฟังก์ชันในข้อต่อไปนี้ว่าฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันค่าสมบูรณ์ ฟังก์ชันขั้นบันได พร้อมทั้งเขียนกราฟของฟังก์ชัน

1. $f(x) = 2 - 3x$

2. $f(x) = |x - 1|$

3. $f(x) = -3x - 1$

4. $f(x) = |x| - 2$

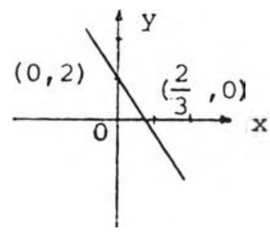
5. $f(x) = \begin{cases} 2, & x > 3 \\ 0, & 3 \geq x > 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases}$

2) ให้เขียนกราฟของอัตราค่าไปรษณียากรในการส่งพัสดุภายในประเทศ โดยให้แกน x เป็นน้ำหนักพัสดุ และแกน y เป็นค่าไปรษณียากร ค่าส่งคิดกิโลกรัมละ 5 บาท ถ้าไม่ถึงกิโลกรัมคิดเป็นหนึ่งกิโลกรัม ถ้าเกินกิโลกรัมใดก็ตามคิดเป็นกิโลกรัมถัดไป

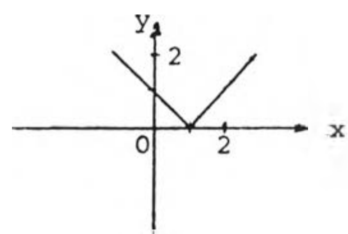
3) งานการกุศลครั้งหนึ่ง กำหนดราคาบัตรเข้าชมงานดังนี้ ผู้ที่มีอายุเกิน 12 ปีขึ้นไป บัตรละ 20 บาท ผู้ที่มีอายุตั้งแต่ 3 ปี ถึง 12 ปี บัตรละ 5 บาท เด็กอายุต่ำกว่า 3 ปี ไม่ต้องซื้อบัตร จงเขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอายุกับราคาบัตร แล้วเขียนกราฟของฟังก์ชันนี้

<u>เฉลยแบบฝึกหัด</u>

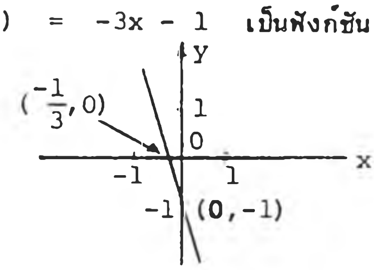
1. 1) $f(x) = 2 - 3x$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น



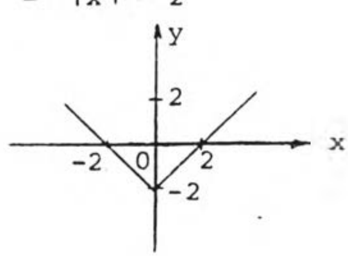
2) $f(x) = |x - 1|$ เป็นฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์



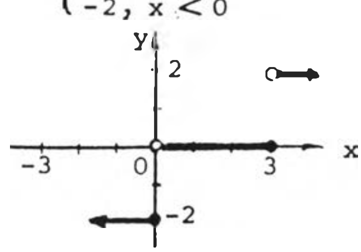
3) $f(x) = -3x - 1$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น



4) $f(x) = |x| - 2$



5) $f(x) = \begin{cases} 2, & x > 3 \\ 0, & 3 \geq x > 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases}$

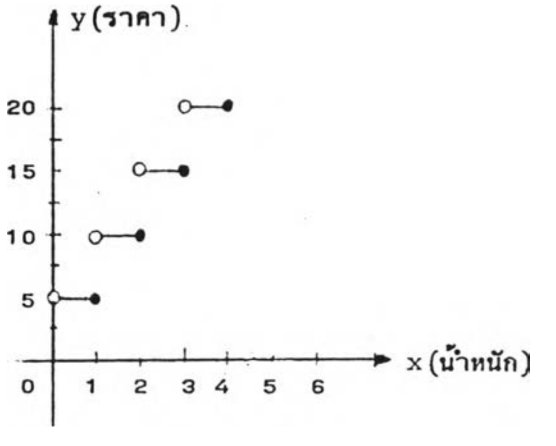


2 <u>หลักการคิด</u>

1) ให้ดีความหมายโจทย์ตามเงื่อนไขคือ ถ้าน้ำหนักเพิ่มขึ้น 1 กิโลกรัม หรือมีเศษราคาก็ให้คิดเพิ่มขึ้นอีก 5 บาท เรื่อย ๆ ไป

2) กราฟต้องเป็นกราฟรูปขั้นบันได (Step Function) เป็นช่วง ๆ

3) ใช้แกน x เป็นแกนแสดงน้ำหนักและแกน y เป็นแกนแสดงราคา



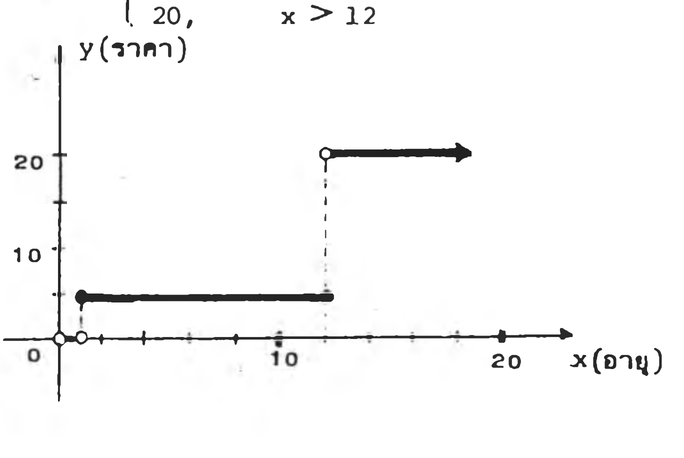
3. <u>หลักการคิด</u>

1) จากโจทย์ต้องแยกให้ออกว่าสิ่งใดเป็นตัวแปรที่เปลี่ยนไปให้เป็นตัวแปรอิสระ เช่น อายุต่าง ๆ กันเป็นแกน x

2) เมื่อทราบความสัมพันธ์ระหว่างอายุกับราคาบัตรให้อายุเป็นแกน x และราคาบัตรเป็นแกน y

3) ต้องระมัดระวังเครื่องหมาย $\leqslant$ หรือ $\geqslant$ ภายใต้หลักเกณฑ์รวมหรือไม่รวม

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1 \\ 5, & 1 \leqslant x \leqslant 12 \\ 20, & x > 12 \end{cases}$$



บัตรทดสอบหรือบัตรปัญหา

เรื่อง 2. ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ

2.1 ฟังก์ชันเชิงเส้น

2.2 ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์

2.3 ฟังก์ชันขั้นบันได

<u>คำสั่ง</u> จงทำเครื่องหมายกากบาท (X) ลงในวงเล็บตรงกับข้อ ก หรือ ข หรือ ค หรือ ง ในกระดาษคำตอบซึ่งท่านเห็นว่าถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

---

1. ให้ $f(x) = x - 3$ ข้อใดถูกต้อง

   ก. f เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นตัดแกน x ที่จุด (0,3)

   ข. f เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นตัดแกน y ที่จุด (3,0)

   ค. f เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นขนานแกน x

   ง. f เป็นฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์

2. ให้ $f(x) = 4$ ข้อใดไม่ถูกต้อง

   ก. กราฟของ f เป็นเส้นตรงขนานแกน x

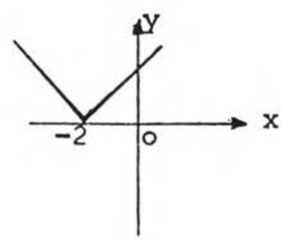
   ข. กราฟของ f ตัดแกน y ที่จุด (0,4)

   ค. f เป็นฟังก์ชันคงตัว

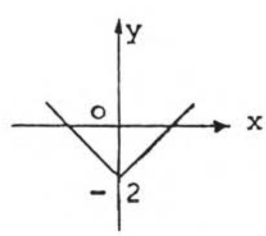
   ง. กราฟของ f เป็นเส้นตรงตัดแกน x ที่จุด (4,0)

3. ให้ $f(x) = |x| + 2$ กราฟของ f คือข้อใด

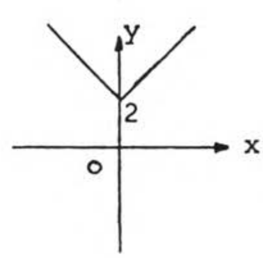
   ก.



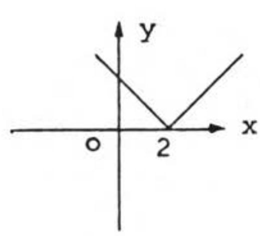
   ข.



   ค.

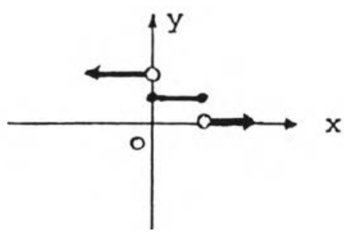


   ง.

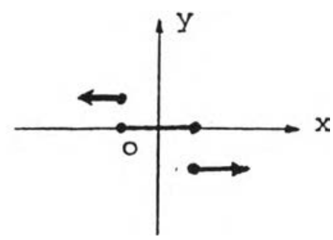


4. กราฟของฟังก์ชันในข้อใดเป็นฟังก์ชัน

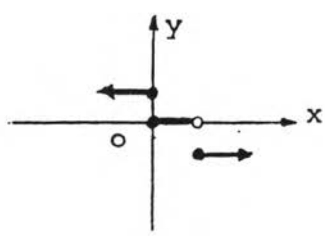
ก.



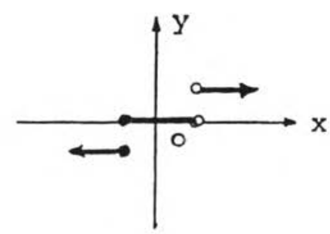
ค.



ข.



ง.



5. ฟังก์ชันขั้นบันไดตรงกับข้อใด

ก. $f(x) = 2x + 1$

ข. $f(x) = |x - 3|$

ค. $f(x) = \begin{cases} 1 , & x \geqslant 0 \\ -1 , & x \leqslant 0 \end{cases}$

ง. $f(x) = \begin{cases} 1 , & x \leqslant 0 \\ 0 , & 0 < x \leqslant 1 \\ -1 , & x > 1 \end{cases}$

6. ข้อใดไม่ถูกต้อง

ก. $f(x) = 1 - \frac{1}{2} x$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น

ข. $f(x) = |1 - \frac{1}{2} x|$ เป็นฟังก์ชันค่าสมบูรณ์

ค. $f(x) = |2x|-1$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น

ง. $f(x) = \begin{cases} -5 , & x > 3 \\ 0 , & 0 \geqslant x > 0 \\ 1 , & x \leqslant 0 \end{cases}$ เป็นฟังก์ชันขั้นบันได

เฉลยข้อทดสอบ

1. ข
2. ง
3. ค
4. ก
5. ง
6. ค

<u>ชุดการเรียนการสอนที่ 7</u>

เรื่อง

การเขียนฟังก์ชันจากโจทย์ปัญหา

บัตรคำสั่ง

ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. ทำบัตรกิจกรรม
2. ศึกษาจากบัตรเนื้อหาอีกครั้งหนึ่งถ้าไม่เข้าใจ หลังจากที่ทำบัตรกิจกรรมแล้ว
3. ทำบัตรแบบฝึกหัด หรือบัตรงานพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
4. ทำบัตรทดสอบหรือบัตรปัญหาพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย

บัตรเนื้อหา

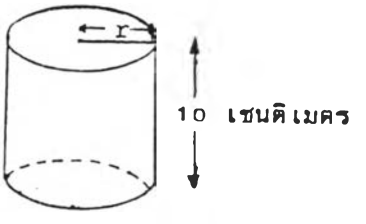
เรื่อง 2. ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ

2.4 การเขียนฟังก์ชันจากโจทย์ปัญหา

2.4 การเขียนฟังก์ชันจากโจทย์ปัญหา

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตร v ของรูปทรงกระบอกกับรัศมี r ของหน้าตัดโดยให้ส่วนสูงของรูปทรงกระบอกคงที่คือ 10 เซนติเมตร

วิธีทำ



สูตรปริมาตรทรงกระบอกคือ พื้นที่ฐาน × สูง

แต่พื้นที่ฐานเป็นวงกลมดังนั้นพื้นที่ฐานคือ πr^2

ส่วนสูง (h) ของรูปทรงกระบอกคือ 10 เซนติเมตร

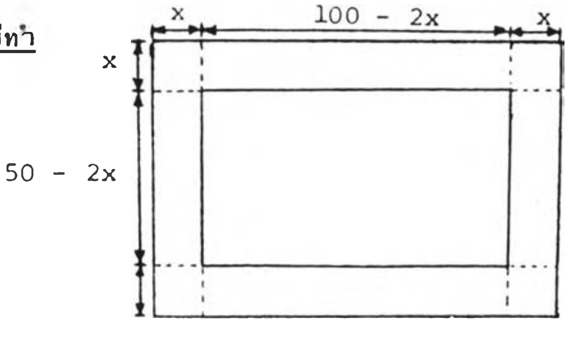
ดังนั้น ปริมาตรทรงกระบอกคือ $(\pi r^2)h$

$\therefore \quad v = (\frac{22}{7}) r^2 (10)$

ดังนั้น $\quad v = \frac{220}{7} r^2$

ตัวอย่างที่ 2 ทำกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าจากแผ่นกระดาษรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กว้าง 50 เซนติเมตร ยาว 100 เซนติเมตร โดยตัดที่มุมแผ่นกระดาษออกเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส แล้วพับขึ้นตามรอยตัด จงเขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตร v ของกล่องที่สร้างได้กับความยาว x ของสี่เหลี่ยมจัตุรัส แต่ละรูปที่ตัดออกมา

วิธีทำ



จากรูปจะได้กล่องกว้าง = $50 - 2x$ เซนติเมตร

กล่องยาว = $100 - 2x$ เซนติเมตร

กล่องสูง x เซนติเมตร

จากรูปจะได้ปริมาตรกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้า = กว้าง × ยาว × สูง

นั่นคือ $V = (50 - 2x)(100 - 2x)(x)$

$= 4x^3 - 300x^2 + 5000x$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จำนวน 2 จำนวนรวมกันได้ 16 และมีผลคูณมากที่สุด จงเขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนทั้งสอง

<u>วิธีทำ</u>

ให้จำนวนหนึ่งคือ x

อีกจำนวนหนึ่งคือ $16 - x$

ผลคูณมากที่สุด $= (16 - x)x$

$= 16x - x^2$

ให้ y แทนผลคูณมากที่สุด

ดังนั้น $y = 16x - x^2$

บัตรกิจกรรม

เรื่อง 2. ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ

2.4 การเขียนฟังก์ชันจากโจทย์ปัญหา

จุดประสงค์การเรียนรู้

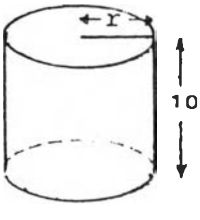
นักเรียนสามารถ

เขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์จากโจทย์ปัญหาที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง

2.4 การเขียนฟังก์ชันจากโจทย์ปัญหา

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตร v ของรูปทรงกระบอกกับรัศมี r ของหน้าตัดโดยให้ส่วนสูงของรูปทรงกระบอกคงที่คือ 10 เซนติเมตร

วิธีทำ



สูตรปริมาตรทรงกระบอกคือ พื้นที่ฐาน × สูง

แต่พื้นที่ฐานเป็นวงกลมดังนั้นพื้นที่ฐานคือ πr^2

ส่วนสูง (h) ของรูปทรงกระบอกคือ 10 เซนติเมตร

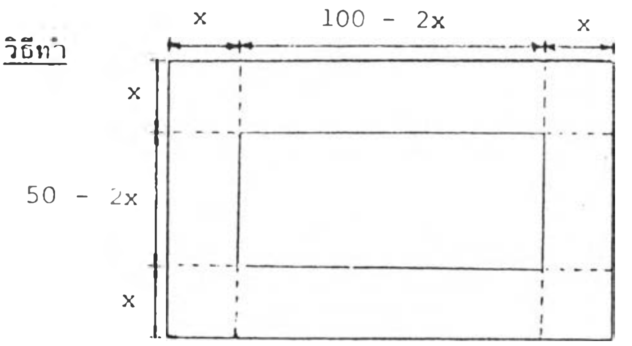
ดังนั้น ปริมาตรทรงกระบอกคือ $(\pi r^2)h$

$\therefore \; v = (\frac{22}{7})r^2(10)$

ดังนั้น $v = \frac{220}{7} r^2$

ตัวอย่างที่ 2 ทำกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าจากแผ่นกระดาษรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กว้าง 50 เซนติเมตร ยาว 100 เซนติเมตร โดยตัดที่มุมแผ่นกระดาษออกเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสแล้วพับขึ้นตามรอยตัด จงเขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตร v ของกล่องที่สร้างได้กับความยาว x ของสี่เหลี่ยมจัตุรัส แต่ละรูปที่ตัดออกมา

วิธีทำ



จากรูปจะได้กล่องกว้าง = ______________ เซนติเมตร

กล่องยาว = ______________ เซนติเมตร

กล่องสูง = ______________ เซนติเมตร

จากรูปจะได้ปริมาตรกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้า = กว้าง x ยาว x สูง

นั่นคือ v = ______________

= ______________ ลูกบาศก์เซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 3 จำนวน 2 จำนวน รวมกันได้ 16 และมีผลคูณมากที่สุด จงเขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนทั้งสอง

วิธีทำ

ให้จำนวนหนึ่งคือ x

อีกจำนวนหนึ่งคือ ______________

ผลคูณมากที่สุด ______________

ให้ y แทนผลคูณมากที่สุด

ดังนั้น y = ______________

ข้อสังเกต การเขียนฟังก์ชันจากโจทย์ปัญหามีหลักดังนี้ คือ

1. วาดรูปตามโจทย์ถ้าสามารถวาดรูปได้
2. หาความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ ตามเงื่อนไข

<u>บัตรแบบฝึกหัดหรือบัตรงาน</u>

<u>เรื่อง</u> 2. ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ

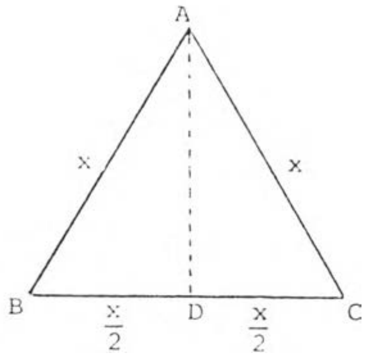
2.4 การสร้างฟังก์ชันจากโจทย์ปัญหา

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงเขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า (A) กับด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า (x) พร้อมทั้งบอกโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันนี้
2. เมื่อโยนก้อนหินลงไปในสระ ผิวน้ำจะเกิดระลอกเป็นวงกลมซึ่งรัศมี (r) เพิ่มขึ้นตามเวลาที่ผ่านไป (t) การเพิ่มของรัศมีเป็นไปตามสมการ $r = 4t$ จงหาว่าพื้นที่ของวงกลมที่เกิดขึ้นบนพื้นน้ำ สัมพันธ์กับเวลาอย่างไร
3. จงเขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรของทรงกลม (v) กับรัศมีของทรงกลม (r) และจงหาค่าของ r เมื่อ $v = 729$ ลูกบาศก์เซนติเมตร
4. ต้องการทำกล่องรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ให้มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และมีความจุ 18 ลูกบาศก์เมตร ค่าวัสดุที่ใช้ทำฐาน ฝา และด้านข้างของกล่องต่อตารางเมตร เป็น 4, 5 และ 6 บาท ตามลำดับ ให้เขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าวัสดุทั้งหมดกับความยาวของด้านที่เป็นฐานกล่อง
5. แผ่นป้ายหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก มีเนื้อที่ 18 ตารางเมตร ต้องการทำป้ายโฆษณาโดยเว้นเนื้อที่ขอบบนเท่ากับของล่าง โดยเว้นไว้ $\frac{3}{8}$ เมตร และด้านข้าง $\frac{1}{2}$ เมตร ส่วนที่เหลือเป็นเนื้อที่โฆษณา จงหาความสัมพันธ์ระหว่างเนื้อที่โฆษณาด้านใดด้านหนึ่งของแผ่นป้ายโฆษณานี้
6. จงหาความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ผิวของถ้วยแก้วรูปทรงกระบอกกับความสูงของถ้วยแก้ว เมื่อถ้วยแก้วมีความสูงเท่ากับความยาวของเส้นผ่าศูนย์กลางของฐาน

<u>เฉลยแบบฝึกหัด</u>

1.



<u>หลักคิด</u> 1) ในการเขียนความสัมพันธ์ของฟังก์ชันต้องจัดให้อยู่ในรูป x ทั้งหมด

2) จัดความสูงของ h ให้อยู่ในรูป x

3) พื้นที่สามเหลี่ยม $= \frac{1}{2}$ (ฐาน)(สูง)

$\therefore$ ความสูงของสามเหลี่ยมด้านเท่า $= h = \sqrt{x^2 - (\frac{x}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ หน่วย

$\therefore$ พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมรูปนี้ (A) $= \frac{1}{2}(x)(\frac{\sqrt{3}}{2}x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ ตารางหน่วย

ดังนั้น $r = \left\{(x,A)/A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2\right\}$, $D_r = \left\{x \in R/x \geq 0\right\}$

และ $R_r = \left\{x \in R/x > 0\right\}$

<u>หมายเหตุ</u> พื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า $= \frac{\sqrt{3}}{4}$ (ด้าน)^{2}ก็ได้ จะทำได้รวดเร็วขึ้นอีกมาก

2. <u>หลักคิด</u> 1) พื้นที่ของวงกลม $A = \pi r^2$

2) จากโจทย์ $r = 4t$

$\because$ A = พื้นที่ของวงกลมที่เกิดขึ้นบนผิวน้ำ

$= \pi r^2 = \pi(4t)^2 = 16\pi t^2$ ตารางหน่วย

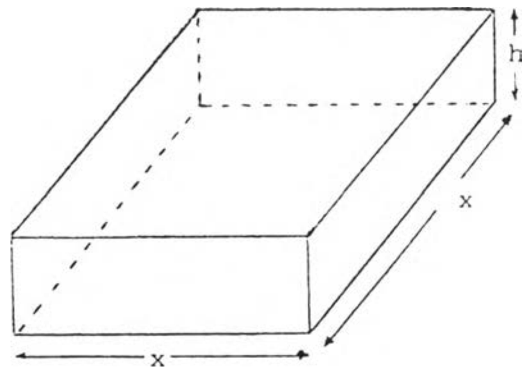
นั่นคือ พื้นที่ของวงกลมที่เกิดขึ้นบนพื้นน้ำ สัมพันธ์กับเวลาเป็น $16\pi t^2$ ตารางหน่วย

3. <u>หลักคิด</u> สูตรปริมาตรทรงกลม (v) $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ลูกบาศก์หน่วย

เมื่อ $v = 729$ ลูกบาศก์หน่วย

$\therefore 729 = \frac{4}{3}\pi r^3$, $r^3 = \frac{(9^3)3}{4\pi}$

นั่นคือ $r = 9\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$ เซนติเมตร

4. 

<u>หลักคิด</u> 1) พิจารณาเงื่อนไขจากโจทย์แล้วเขียนรูปจะช่วยให้การคำนวณง่ายขึ้น

2) ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านเป็น x และราคาวัสดุเป็น A

3) A = ผลบวกราคาของฐาน, ฝา และด้านข้างของกล่อง

∵ ให้ A = ราคาค่าวัสดุ, x = ความยาวของด้าน □ ฐาน

∴ พื้นที่ □ จัตุรัสเป็นฐาน $= x^2$ ตารางเมตร

แสดงว่า ราคาวัสดุที่ใช้ทำฐาน $= 4(x^2)$ บาท

และ ราคาวัสดุที่ใช้ทำฝา $= 5(x^2)$ บาท

∵ ความสูงของกล่อง $= h = \frac{18x}{x^2}$ เมตร

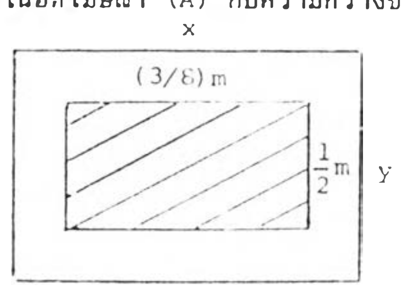
พื้นที่ด้านข้างทั้ง 4 ฝา $= 4(\frac{18x}{x^2}) = \frac{72}{x}$ ตารางเมตร

แสดงว่า ราคาวัสดุด้านข้าง $= 6(\frac{72}{x}) = \frac{432}{x}$ บาท

นั่นคือ ราคาค่าวัสดุทั้งสิ้น $A = 4x^2 + 5x^2 + \frac{432}{x}$

$= 9x^2 + \frac{432}{x}$ บาท

5. <u>หลักคิด</u> ความสัมพันธ์ที่ต้องการคือ เนื้อที่โฆษณา (A) กับความยาวของป้าย (x) และเนื้อที่โฆษณา (A) กับความกว้างของป้าย (y)



ให้ A = เนื้อที่บริเวณโฆษณา

และ x,y เป็นความยาวและความกว้างของป้ายตามลำดับ

∴ ความยาวของเนื้อที่โฆษณา $= x-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}) = x - 1$ เมตร

และความกว้างของเนื้อที่โฆษณา $= y-(\frac{3}{8}+\frac{3}{8}) = y - \frac{3}{4}$ เมตร

∴ เนื้อที่บริเวณโฆษณา (A) $= (x-1)(y-\frac{3}{4})$

แต่แผ่นป้ายรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากมีเนื้อที่ $18 = xy$ ตารางเมตร

ดังนั้น $x = \frac{18}{y}$ เมตร หรือ $y = \frac{18}{x}$ เมตร

นั่นคือ ความสัมพันธ์ระหว่างเนื้อที่โฆษณากับด้านยาวของแผ่นป้าย

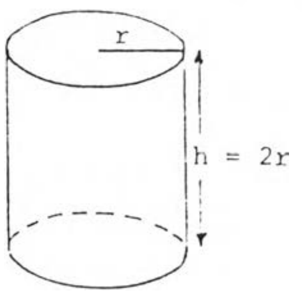
$$A = (x-1)(\frac{18}{x}-\frac{3}{4}) = \frac{1}{4x}(x-1)(72-3x)$$

และความสัมพันธ์ระหว่างเนื้อที่โฆษณากับด้านกว้างของแผ่นป้าย

$$A = (\frac{18}{y}-1)(y-\frac{3}{4}) = \frac{1}{4y}(18-y)(4y-3)$$

๖. <u>หลักคิด</u> โจทย์ต้องการความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ผิว (A) กับความสูง (h) ของถ้วยแก้ว

ให้ A เป็นพื้นที่ผิวของถ้วยแก้ว r และ h เป็นรัศมีและความสูงของถ้วย เมื่อ $h = 2r$ หรือ $r = \frac{h}{2}$



พื้นที่ผิว A = พื้นที่ผิวข้าง + พื้นที่ฝาบนและล่าง

$$= 2\pi(rh) + [\pi r^2 + \pi r^2] = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

$$= 2\pi(\frac{h}{2})h + 2\pi\frac{h^2}{4} = \frac{3}{2}\pi h^2 \text{ ตารางหน่วย}$$

นั่นคือ ความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ผิวของถ้วย (A) กับความสูงของถ้วย (h) เท่ากับ $\frac{3}{2}\pi h^2$ ตารางหน่วย

บัตรทดสอบหรือบัตรปัญหา

เรื่อง 2. ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ

2.4 การสร้างฟังก์ชันจากโจทย์ปัญหา

<u>ข้อทดสอบ</u>

1. จงเขียนฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม (A) กับความยาวของฐาน (b) ถ้าส่วนสูงเป็นครึ่งหนึ่งของฐาน
2. จงเขียนฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ผิวกระป๋อง (A) กับความยาวของรัศมีของฐาน (r) เมื่อกระป๋องทรงกระบอกไม่มีฝาปิด ไม่มีก้นและมีความสูงเป็น 4 เท่าของเส้นผ่าศูนย์กลางของฐาน

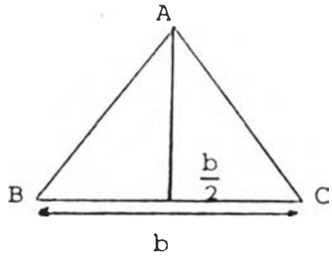
เฉลยข้อทดสอบ

1\. <u>หลักคิด</u> 1) พื้นที่สามเหลี่ยม (A) = $\frac{1}{2}$ (ฐาน) (สูง)

2) ความยาวของฐาน = b

3) ความสูงเป็นครึ่งหนึ่งของฐาน

$\therefore$ ความสูง = $\frac{b}{2}$



$\therefore$ พื้นที่สามเหลี่ยม (A) = $\frac{1}{2}(b)(\frac{b}{2})$

= $\frac{1}{4}b^2$

นั่นคือ A = $\frac{1}{4}b^2$

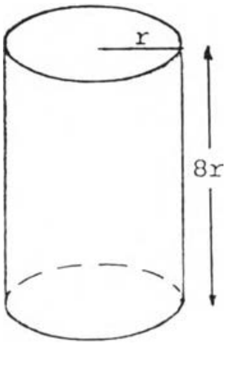
2\. <u>หลักคิด</u> 1) พื้นที่ผิวของกระป๋อง (A) = (เส้นรอบวง) (สูง)

2) ความยาวรัศมีของฐาน = r

3) ความสูงของกระป๋อง = 4 เท่าของเส้นผ่าศูนย์กลางฐาน

= (4) (2r)

= 8r



$\therefore$ พื้นที่ผิวของกระป๋อง (A) = $(2\pi r)(8r)$

= $16\pi r^2$

นั่นคือ A = $16\pi r^2$

ชุดการเรียนการสอนที่ ๘

เรื่อง

ฟังก์ชันกำลังสอง

บัตรคำสั่ง

ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. ทำบัตรกิจกรรม
2. ศึกษาจากบัตรเนื้อหาอีกครั้งหนึ่งถ้าไม่เข้าใจ หลังจากที่ทำบัตรกิจกรรมแล้ว
3. ทำบัตรแบบฝึกหัด หรือบัตรงานพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
4. ทำบัตรทดสอบหรือบัตรปัญหาพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย

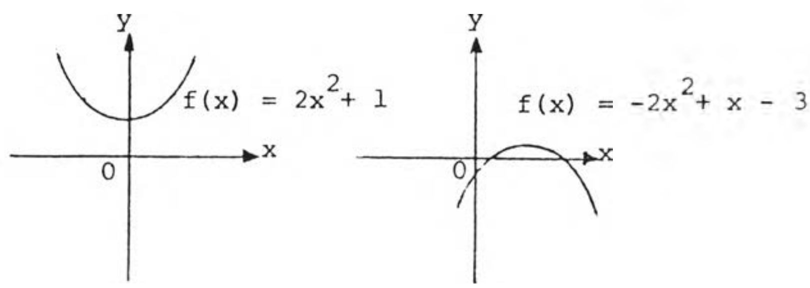
บัตรเนื้อหา

เรื่อง 2. ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ

2.5 ฟังก์ชันกำลังสอง

2.4 **ฟังก์ชันกำลังสอง** (Quadratic Function) คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$; a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ กราฟของฟังก์ชันนี้จะเป็นพาราโบลาหงายหรือพาราโบลาคว่ำ แล้วแต่ค่าของ a



จากกราฟที่ได้เป็นรูปพาราโบลา

1. ถ้า $a > 0$ กราฟจะหงายขึ้น เช่น $f(x) = 2x^2 + 1$ (เปิดบน)
2. ถ้า $a < 0$ กราฟจะคว่ำลง เช่น $(f(x) = -2x^2 + x - 3$ (เปิดล่าง)

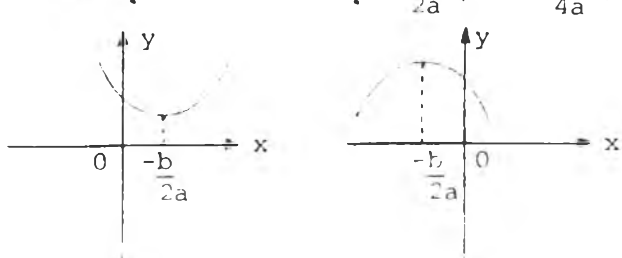
ก. **จุดวกกลับของฟังก์ชันกำลังสอง** คือจุดที่ฟังก์ชันมีค่าสูงสุด หรือค่าต่ำสุด พิจารณาได้ดังนี้

$$y = ax^2 + bx + c$$
$$= a(x^2 + \frac{bx}{a}) + c$$
$$= a(x^2 + \frac{bx}{a} + (\frac{b}{2a})^2) + c - \frac{ab^2}{4a^2}$$
$$= a(x^2 + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

ถ้า $a > 0$, y จะมีค่าน้อยที่สุด เมื่อ $x + \frac{b}{2a} = 0$ นั่นคือ $x = \frac{-b}{2a}$

ถ้า $a < 0$, y จะมีค่ามากที่สุด เมื่อ $x + \frac{b}{2a} = 0$ นั่นคือ $x = \frac{-b}{2a}$

ดังนั้น จุดที่กราฟวกกลับคือจุด $(\frac{-b}{2a} , c - \frac{b^2}{4a})$



ข. การเขียนกราฟคลอดจนการหาจุดวกกลับของฟังก์ชันกำลังสองนี้อาจนำไปใช้ใน เรื่องต่าง ๆ ดังนี้

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงวาดกราฟของฟังก์ชัน f โดยกำหนดให้

$$f(x) = 2x^2 - 6x + 4$$

<u>วิธีทำ</u> ในกรณีที่ไม่ได้กำหนดโดเมนของ f ขอให้เข้าใจว่าโดเมนของ f คือ R กราฟของ f เป็นเส้นโค้งพาราโบลาหงาย โดยมีจุดต่ำสุด เมื่อ

$$x = \frac{-b}{2a} = -(\frac{-6}{4})$$

$$= \frac{3}{2}$$

และ $y = f(\frac{3}{2}) = \frac{2.9}{4} - \frac{6.3}{2} + 4$

$$= \frac{-1}{2}$$

แสดงว่าจุดต่ำสุดอยู่ที่ $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$

การวาดกราฟให้ใกล้เคียงควรหาจุดตัดแกน xและแกน y ดังนี้

1) จุดตัดแกน y คือ x = 0 แล้ว $y = f(0) = 4$

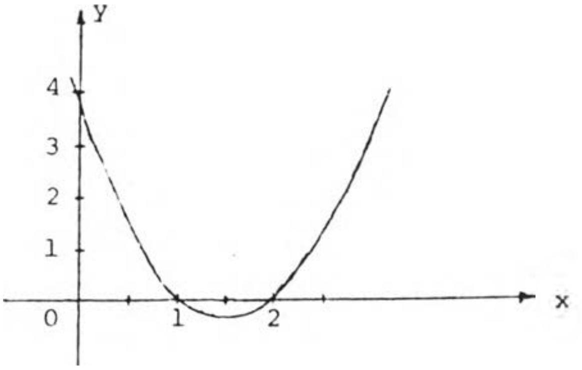
2) จุดตัดแกน x คือ y = 0 แล้ว $2x^2 - 6x + 4 = 0$

$\therefore x^2 - 3x + 2 = 0$

$\therefore (x - 2)(x - 1) = 0$

$\therefore x = 1$ หรือ 2

แสดงว่าจุดตัดแกน y คือ (0,4) และจุดตัดแกน x คือ (1,0) และ (2,0) ซึ่งจะได้กราฟดังรูปต่อไปนี้



<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงวาดกราฟของฟังก์ชัน f เมื่อกำหนดให้

$$f(x) = 8 + 2x - x^2$$

<u>วิธีทำ</u> กราฟ f เป็นเส้นโค้งพาราโบลาคว่ำ ที่มีจุดสูงสุดเมื่อ

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{(-2)} = 1$$

และ $y = f(1) = 8 + 2 - 1 = 9$

แสดงว่าจุดสูงสุดคือ (1,9)

การวาดกราฟให้ใกล้เคียงควรหาจุดตัดแกน x และแกน y ดังนี้

1) จุดตัดแกน y คือ $x = 0$ แล้ว $y = f(0) = 8$

2) จุดตัดแกน x คือ $y = 0$ แล้ว $x^2 - 2x - 8 = 0$

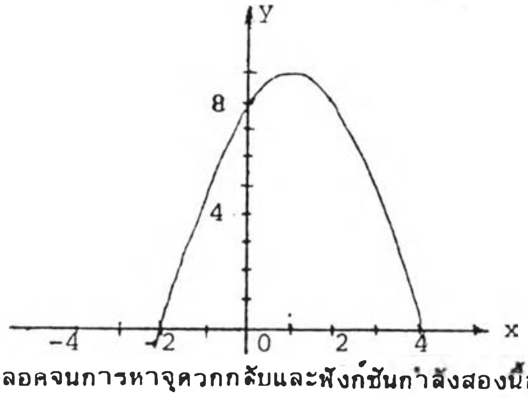
$$\therefore (x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ หรือ } 4$$

แสดงว่า จุดตัดแกน y คือ (0,8)

จุดตัดแกน x คือ (-2,0) และ (4,0)

ซึ่งจะได้กราฟดังรูปต่อไปนี้

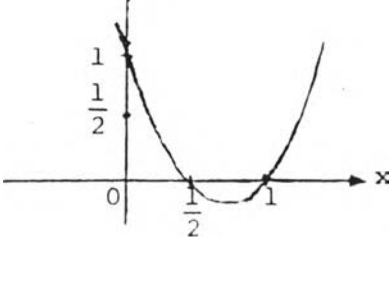


การเขียนกราฟตลอดจนการหาจุดวกกลับและฟังก์ชันกำลังสองนี้อาจนำไปใช้ในเรื่องต่าง ๆ ดังนี้

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงหาเซตคำตอบของอสมการ $2x^2 - 3x + 1 < 0$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $y = 2x^2 - 3x + 1$

เขียนกราฟของ $y = 2x^2 - 3x + 1$ ได้ดังนี้



จากกราฟจะเห็นว่า y จะเป็นจำนวนลบเมื่อ $\frac{1}{2} < x < 1$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ $2x^2 - 3x + 1 < 0$ คือ$\{x \;/\; \frac{1}{2} < x < 1\}$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> ถ้าจำนวนสองจำนวนบวกกันได้ 20 จำนวนแต่ละจำนวนจะต้องเป็นเท่าใด ผลคูณของจำนวนทั้งสองนั้นจึงจะมีค่ามากที่สุด

<u>วิธีทำ</u>

1) <u>โดยการหาจุดวกกลับ</u>

ให้จำนวนหนึ่งคือ x ดังนั้นอีกจำนวนหนึ่งคือ 20 - x

ผลคูณของจำนวนทั้งสอง คือ $x\,(20 - x)$

ให้ $y = x\,(20 - x)$

จุดวกกลับของกราฟของสมการนี้คือจุดที่ $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{2(-1)}$

$= 10$

ดังนั้น y จะมีค่ามากที่สุดเมื่อ $x = 10$

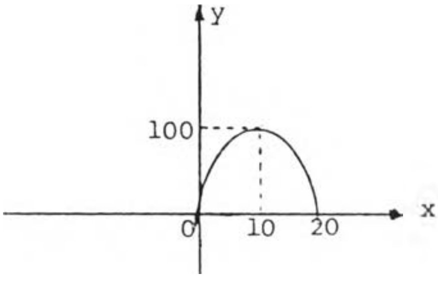
จำนวนทั้งสองจะต้องเท่ากันคือ 10 ผลคูณจึงจะมีค่ามากที่สุด

2) <u>โดยการเขียนกราฟ</u>

ให้จำนวนหนึ่งคือ x ดังนั้นอีกจำนวนหนึ่งคือ 20 - x

ผลคูณของจำนวนสองจำนวนคือ $20x - x^2$

ให้ $y = 20x - x^2$ และเขียนกราฟได้ดังนี้



จากกราฟจะเห็นว่า y มีค่าสูงสุดเมื่อ $x = 10$ ดังนั้นจำนวนทั้งสองมีค่าเท่ากันคือ 10

บัตรกิจกรรม

เรื่อง 2. ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ

2.5 ฟังก์ชันกำลังสอง (Quadratic Function)

2.5.1 กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง

2.5.2 เซตคำตอบของอสมการกำลังสอง

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

1. อธิบายลักษณะของกราฟ และเขียนกราฟของฟังก์ชันกำลังสองได้อย่างถูกต้อง
2. หารูปทั่วไปของสมการกำลังสองได้อย่างถูกต้อง
3. จัดรูปทั่วไปของสมการกำลังสองเป็นรูปกำลังสองสมบูรณ์บางส่วนได้อย่างถูกต้อง
4. บอกค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด และจุดวกกลับของฟังก์ชันกำลังสองได้อย่างถูกต้อง
5. หาเซตคำตอบของอสมการกำลังสองโดยใช้จุดวกกลับและโดยใช้กราฟได้อย่างถูกต้อง

กิจกรรม

ให้นักเรียนพิจารณาข้อความข้างล่างนี้

2.5.1 กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง

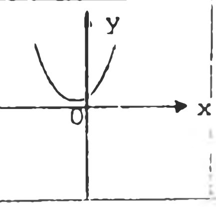
ถ้าให้รูปทั่วไปของฟังก์ชันกำลังสอง คือ $f(x) = ax^2 + bx + c$

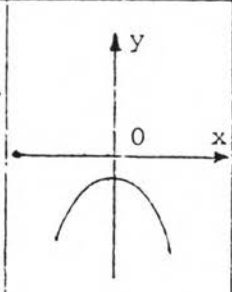
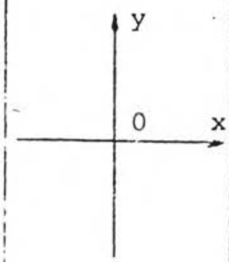
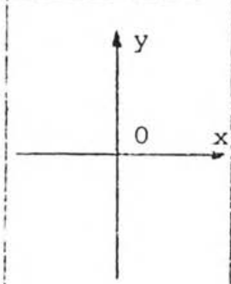
โดย a แทนสัมประสิทธิ์ของ x^2

b แทนสัมประสิทธิ์ของ x

c แทนค่าคงที่

ขอให้พิจารณาตารางข้างล่างและเติมข้อความที่ว่างไว้

ความสัมพันธ์	ค่า x ที่สัมพันธ์กับค่า y	กราฟ	ฟังก์ชัน เป็น	ฟังก์ชัน ไม่เป็น	ลักษณะกราฟ
$f(x) = 2x^2 + 2x + 1$ a=2, b=2, c=1	x: ... -2 -1 0 1 2 ... y: ... 5 1 1 5 13 ...		✓	–	เป็นพาราโบลาหงาย

ความสัมพันธ์	ค่า x ที่สัมพันธ์กับค่า y	กราฟ	ฟังก์ชัน เป็น	ฟังก์ชัน ไม่เป็น	ลักษณะกราฟ
$f(x) = -x^2 - 1$ a= -1, b=0, c= -1	x: ... -2 -1 0 1 2 ... y: ... -5 -2 -1 -2 -5 ...		—	—	เป็นพาราโบลาคว่ำ
$f(x) = 2x^2 + 1$ a= __, b=__, c= __	x: ... -2 -1 0 1 2 ... y: — — — — — — —		—	—	______
$f(x) = -2x^2 + x - 3$ a=__, b=__, c=__	x: ... -2 -1 0 1 2 ... y: — — — — — — —		—	—	______

จากตารางจะเห็นได้ว่า

1. จากรูปฟังก์ชันกำลังสอง ถ้า $a > 0$ ลักษณะกราฟเป็นพาราโบลา ________ (หงาย/คว่ำ)

   ถ้า $a < 0$ ลักษณะกราฟเป็นพาราโบลา ________ (หงาย/คว่ำ)

2. จากรูปฟังก์ชันกำลังสอง ถ้า $a = 0$ ฟังก์ชันจะเป็นฟังก์ชันกำลังสองหรือไม่

________ (เป็น/ไม่เป็น)

<u>สรุป</u>

<u>ฟังก์ชันกำลังสอง</u> (Quadratic Function) คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$; a,b,c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

กราฟของฟังก์ชันนี้จะเป็นพาราโบลาหงายหรือพาราโบลาคว่ำแล้วแต่ค่าของ a

1) ถ้า $a > 0$ กราฟจะหงายขึ้น เช่น $f(x) = 2x^2 + 1$ (เปิดบน)

2) ถ้า $a < 0$ กราฟจะคว่ำลง เช่น $f(x) = -2x^2 + x - 3$ (เปิดล่าง)

<u>การพิจารณาจุดวกกลับ ซึ่งเป็นจุดที่ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด</u>

จากรูปทั่วไปของฟังก์ชันกำลังสอง

$$\begin{aligned}
y &= ax^2 + bx + c \\
&= (ax^2 + bx) + c \\
&= a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c \\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2\right] + c \\
&= a\left[x^2 + \frac{bx}{a} + (\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c \\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2\right] - \frac{ab^2}{4a^2} + c \\
&= a(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a}
\end{aligned}$$

ทำสัมประสิทธิ์ x^2 ให้เป็น 1

$(\frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2}$

เอา $\frac{-b^2}{4a^2}$ ออกจากวงเล็บ

แต่หน้าวงเล็บมี a อยู่หน้าวงเล็บ

ดังนั้นเมื่อเอา $\frac{-b}{4a^2}$ ต้องเอา a

คูณคือ $\frac{-ab^2}{4a^2} + c$

ดังนั้น $y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a}$ ——————★

จะได้ว่า

1) $a > 0$; y จะมีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $x + \frac{b}{2a} = 0$

นั่นคือ x = ______________

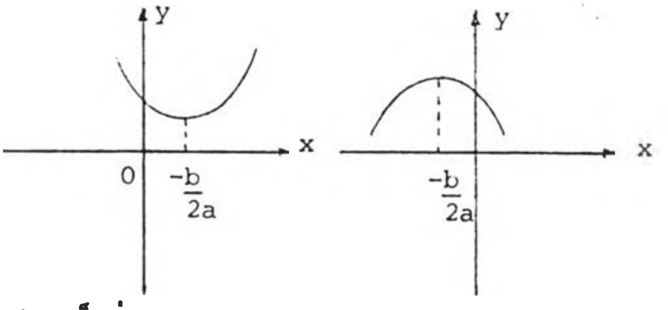
y = ______________

2) $a < 0$; y จะมีค่ามากที่สุดเมื่อ $x + \frac{b}{2a} = 0$

นั่นคือ x = ______________

y = ______________

ดังนั้น จุดที่ฟังก์ชันมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดคือ $(\frac{-b}{2a}, \frac{c-b^2}{4a})$



จากกราฟจะเห็นว่า

1) $a > 0$ กราฟจะเป็นพาราโบลาหงาย โดยจะมีค่า ________ (สูงสุด/ต่ำสุด)

2) $a < 0$ กราฟจะเป็นพาราโบลาคว่ำโดยจะมีค่า ________ (สูงสุด/ต่ำสุด)

<u>สรุป</u>

1) เมื่อ $a > 0$ กราฟจะเป็นพาราโบลาหงาย โดยมีจุดต่ำสุดคือ $(\frac{-b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$
2) เมื่อ $a < 0$ กราฟจะเป็นพาราโบลาคว่ำ โดยมีจุดสูงสุดคือ $(\frac{-b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงวาดกราฟของฟังก์ชัน f โดยกำหนดให้ $f(x) = 2x^2-6x + 4$

<u>วิธีทำ</u> ดังนั้น $a = 2$, $b = -6$, $c = 4$

ในกรณีที่ไม่ได้กำหนดโดเมนของ f ขอให้เข้าใจว่าโดเมนของ f คือ R

จาก $a = 2$ จะได้กราฟของ f เป็นเส้นโค้งพาราโบลาหงายโดยมีจุดต่ำสุดคือ $(\frac{-b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$

$\therefore x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2(2)}$

$= \frac{6}{4}$

$= \frac{3}{2}$

$$\therefore y = c - \frac{b^2}{4a} = 4 - \frac{(-6)^2}{4(2)}$$

$$= 4 - \frac{36}{8}$$

$$= \frac{-1}{2}$$

ดังนั้นจุดต่ำสุดอยู่ที่ $(\frac{3}{2}\ ,\ \frac{-1}{2})$

การวาดกราฟให้ใกล้เคียงควรจะหาจุดตัดแกน x และแกน y ดังนี้

1) จุดตัดแกน y คือ $x = 0$

$$\therefore y = f(0) = 2(0)^2 - 6(0) + 4$$

$$= 4$$

$\therefore$ ตัดแกน y ที่จุด (0,4)

2) จุดตัดแกน x คือ $y = 0$

$$\therefore 2x^2 - 6x + 4 = 0$$

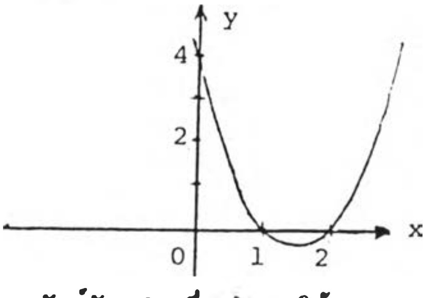
$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x - 2)(x - 1) = 0$$

$x = 1$ หรือ 2

$\therefore$ ตัดแกน x ที่จุด (1,0) และ (2,0)

ดังนั้น กราฟของ $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$ คือ



<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงวาดกราฟของฟังก์ชัน f เมื่อกำหนดให้ $f(x) = 8 + 2x - x^2$

<u>วิธีทำ</u> ____

____

____

____

____

<u>เซตคำตอบของอสมการกำลังสองโดยการเขียนกราฟ</u>

จากที่กล่าวข้างต้นว่าฟังก์ชันกำลังสองคือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$ และ a, b, c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

และเมื่อ $a > 0$ กราฟจะเป็นพาราโบลาหงาย โดยมีจุดต่ำสุดคือ $(\frac{-b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$

$a < 0$ กราฟจะเป็นพาราโบลาคว่ำ โดยมีจุดสูงสุดคือ $(\frac{-b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$

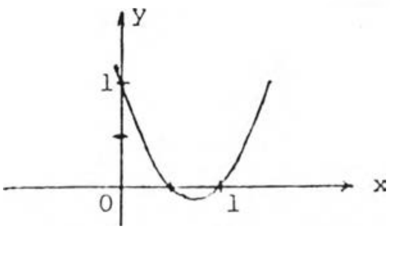
การเขียนกราฟตลอดจนการหาจุดวกกลับของฟังก์ชันกำลังสองนี้อาจนำไปใช้ในเรื่องต่าง ๆ คือ

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงหาเซตคำตอบของอสมการ $2x^2 - 3x + 1 < 0$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $y = 2x^2 - 3x + 1$

(หาค่า x ที่ทำให้ $y < 0$)

เขียนกราฟของ $y = 2x^2 - 3x + 1$ ได้ดังนี้



จากกราฟจะเห็นว่า y จะเป็นจำนวนลบเมื่อ $\frac{1}{2} < x < 1$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ $2x^2 - 3x + 1 < 0$ คือ $\left\{x / \frac{1}{2} < x < 1\right\}$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> ถ้าจำนวนสองจำนวนบวกกันได้ 20 จำนวนแต่ละจำนวนจะต้องเป็นเท่าใด ผลคูณของจำนวนทั้งสองนั้นจึงจะมีค่ามากที่สุด

<u>วิธีทำ</u> 1) สร้างฟังก์ชันสิ่งที่จะหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

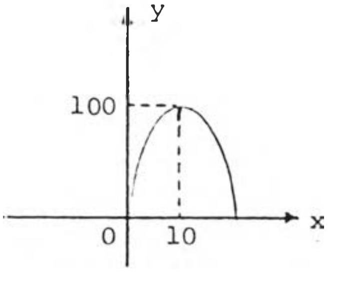
ให้จำนวนหนึ่งคือ x

ดังนั้นอีกจำนวนคือ 20 - x

ผลคูณของทั้งสองจำนวน คือ x(20 - x)

ให้ $y = 20x - x^2$ (y = ผลคูณของสองจำนวน)

2) เขียนกราฟ



จากกราฟจะเห็นว่า y มีค่าสูงสุดเมื่อ x = 10

ดังนั้นจำนวนทั้งสองมีค่าเท่ากันคือ 10

<u>ข้อสังเกต</u> การหาเซตคำตอบของอสมการกำลังสองโดยการเขียนกราฟ มีหลักดังนี้

1. สร้างฟังก์ชันสิ่งที่จะหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

   1.1 พิจารณาว่าโจทย์ต้องการหาค่าใดมากที่สุดหรือน้อยที่สุด ให้สิ่งนั้นแทนด้วย y

   1.2 ให้แทนสิ่งที่ไม่ทราบค่าด้วย x จำนวนหนึ่ง

   1.3 หาค่า y ในรูป x

2. นำฟังก์ชันมาเขียนกราฟและพิจารณาสิ่งที่โจทย์ต้องการจากกราฟ

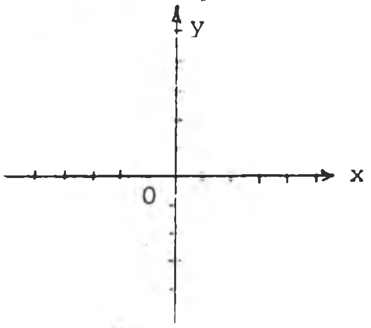
ตัวอย่างที่ 3 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $-x^2 - 6x \geq 5$

วิธีทำ $-x^2 - 6x \geq 5$

จะได้ $-x^2 - 6x - 5 \geq 0$

ให้ $y = -x^2 - 6x - 5$

(หาค่า x ที่ทำให้ $y \geq 0$)



จากกราฟจะเห็นว่า $y \geq 0$ เมื่อ ____________________

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ $-x^2 - 6x \geq 5$ คือ ______________

การหาค่าต่ำสุด หรือสูงสุดของฟังก์ชันโดยใช้จุดวกกลับ

ตัวอย่าง จงหาค่าต่ำสุดหรือสูงสุดของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $y = 2x^2 - 4x + 3$

จากรูปทั่วไป $f(x) = ax^2 + bx + c$ จะได้

$a = 2$, $b = -4$, $c = 3$

เนื่องจากสัมประสิทธิ์ของ x^2 คือ 2 ดังนั้นกราฟจึงเป็นพาราโบลาหงาย ฟังก์ชันจึงมีค่าต่ำสุด

ค่าต่ำสุดของ y จะเกิดขึ้นเมื่อ $x = \frac{-b}{2a}$

$= \frac{(-4)}{2(2)}$

$= 1$

ดังนั้น ค่าต่ำสุดคือ $y = 2(1)^2 - 4(1) + 3$ (แทนค่า $x = 1$)

$= 1$

2) $y = -x^2 + x + 5$

จากรูปทั่วไป $f(x) = ax^2 + bx + c$ จะได้

$a = -1$, $b = 1$, $c = 5$

เนื่องจากสัมประสิทธิ์ของ x^2 คือ -1 ดังนั้นกราฟจึงเป็นพาราโบลาคว่ำ ฟังก์ชันจึงมีค่าสูงสุด

ค่าสูงสุดของ y จะเกิดขึ้นเมื่อ $x = \frac{-b}{2a}$

$$= \frac{-1}{2(-1)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

ดังนั้นค่าสูงสุดคือ $y = -(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} + 5$

$$= \frac{21}{4}$$

หรือค่าสูงสุดคือ $y = c - \frac{b^2}{4a}$

$$= 5 - \frac{(1)^2}{4(-1)}$$

$$= \frac{21}{4}$$

3) $y = x^2 + 3x + 2$

จากรูปทั่วไป $f(x) = ax^2 + bx + c$ จะได้

a = ______ , b = ______ , c = ______

ฟังก์ชันจะให้ค่าต่ำสุด เพราะว่า ____________________________

∴ ค่าต่ำสุดของ y = ____________________________

= ____________________________

4) $y = -x^2 - 8x - 10$

____

____

____

____

____

<u>ตัวอย่าง</u> จำนวนสองจำนวนบวกกันได้ 20 จำนวนแต่ละจำนวนจะต้องเป็นเท่าใด จึงจะทำให้ผลคูณของสองจำนวนนี้มากที่สุด

<u>วิธีทำ</u> 1) สร้างฟังก์ชันสิ่งที่จะหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

ให้จำนวนแรกคือ x

ดังนั้นจำนวนหลังคือ ________

ผลคูณของสองจำนวน = __________

ให้ y = _________ (y = ผลคูณของสองจำนวน)

2) หาค่ามากที่สุดโดยใช้จุดวกกลับ

y จะมีค่ามากที่สุดเมื่อ $x = \frac{-b}{2a}$

= ________

= ________

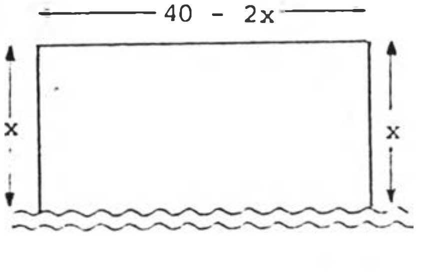
ดังนั้นจำนวนแรกคือ _______

จำนวนหลังคือ _______

ผลคูณจึงจะมีค่ามากที่สุด

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้าต้องการกั้นรั้วรอบที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าตามแนวคลอง เพื่อเลี้ยงเป็ด จะต้องกั้นอย่างไร จึงจะได้พื้นที่มากที่สุด เมื่อมีไม้พอกั้นรั้วยาว 40 เมตร

<u>วิธีทำ</u>



1) สร้างฟังก์ชันสิ่งที่จะหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

ให้ด้านกว้างของรั้วยาวด้านละ x เมตร

∴ ด้านยาวของรั้วยาว 40 - 2x เมตร

พื้นที่ทั้งหมด = กว้าง × ยาว

= __________

= __________

ให้ $y = 40x - 2x^2$

2) หาค่ามากที่สุดโดยใช้จุดวกกลับ

y จะมีค่ามากที่สุดเมื่อ $x = \frac{-b}{2a}$

$= \_\_\_\_$

$= \_\_\_\_$

ดังนั้น พื้นที่มากที่สุดก็คือ เมื่อรั้วกว้าง ___ เมตร ยาว ___ เมตร

<u>ข้อสังเกต</u> การนำการหาค่าต่ำสุด หรือสูงสุดของฟังก์ชันมาแก้โจทย์ปัญหามีหลักดังนี้

1) สร้างฟังก์ชันสิ่งที่จะหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

1.1 พิจารณาว่าโจทย์ต้องการหาค่าใดมากที่สุดหรือน้อยที่สุดให้สิ่งนั้นแทนด้วย y

1.2 ให้แทนสิ่งที่ไม่ทราบค่าด้วย x จำนวนหนึ่ง

1.3 หาค่า y ในรูป x

2) หาค่าสูงสุดต่ำสุดโดยใช้จุดวกกลับ

<u>ตัวอย่าง</u> จำนวนสองจำนวนบวกกันได้ 50 จำนวนแต่ละจำนวนจะต้องเป็นเท่าใด จึงจะทำให้ผลคูณของสองจำนวนนี้มีค่ามากที่สุด

<u>วิธีทำ</u> ____________________

บัตรแบบฝึกหัดหรือบัตรงาน

เรื่อง 2. ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ

2.5 ฟังก์ชันกำลังสอง

แบบฝึกหัด

1. จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้โดยการเขียนกราฟ

   (1) $x^2 + 2x - 3 \geq 0$

   (2) $x^2 - 2x \geq 35$

   (3) $x^2 - 10x + 24 < 0$

   (4) $x^2 + 8x \leq -15$

   (5) $x^2 - 7x - 44 > 0$

   (6) $28 - 12x - x^2 \leq 0$

   (7) $-x^2 + 6x \geq 5$

   (8) $8x \leq x^2$

2. จงหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชันต่อไปนี้

   (1) $y = 3x^2 - 4x + 2$

   (2) $y = 2x^2 - 4x + 1$

   (3) $y = x^2 + 3x + 4$

   (4) $y = 6 + x - x^2$

   (5) $y = -16 - 8x - x^2$

3. เมื่อโยนก้อนหินขึ้นไปในอากาศในเวลา t ใด ๆ ระยะความสูงของก้อนหินจากพื้นเป็นไปตามสมการ $h(t) = 20t - 5t^2$

   (1) เมื่อใดก้อนหินจะอยู่สูงจากพื้น 15 เมตร

   (2) ก้อนหินที่โยนนี้จะขึ้นไปสูงสุดเป็นระยะทางเท่าใด

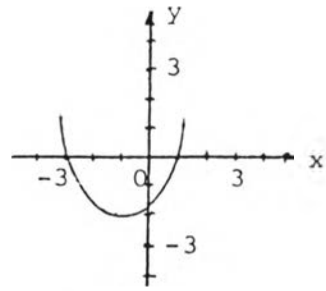
4. ในวงจรไฟฟ้ามีแรงเคลื่อนไฟฟ้า 220 โวลต์ และมีความต้านทาน 22 โอห์ม ถ้า W เป็นกำลังไฟฟ้าในหน่วยวัตต์ เมื่อมีกระแส I แอมแปร์ไหลผ่าน และเป็นไปตามสมการ $W = 220I - 22I^2$ จงหากำลังไฟฟ้าสูงสุดที่จะเกิดขึ้นได้ในวงจรนี้

5. เจ้าของหอพักแห่งหนึ่งพบว่าผลกำไรมีความสัมพันธ์กับจำนวนห้องดังนี้ $P = -2s^2 + 88s$ เมื่อ p เป็นกำไร s เป็นจำนวนห้อง จงหาว่าถ้าต้องการผลกำไรมากที่สุดจะต้องมีห้องกี่ห้อง

6. มีไม้ทำรั้วยาว 40 เมตร ต้องการกั้นรั้วรอบที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งอยู่ติดแม่น้ำ โดยกั้นรั้วเพียง 3 ด้าน เพื่อปลูกผักขาย จะต้องกั้นรั้วอย่างไรจึงจะได้พื้นที่มากที่สุด

เฉลยแบบฝึกหัด

1. (1) $x^2 + 2x - 3 \geq 0$

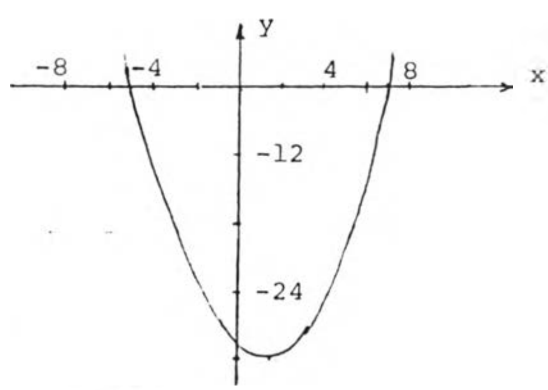


$\therefore$ เซตคำตอบของสมการคือ $\{x \mid x \in R$ ยกเว้น $-3 < x < 1\}$ หรือ

$R - (-3,1)$

(2) $x^2 - 2x \geq 35$

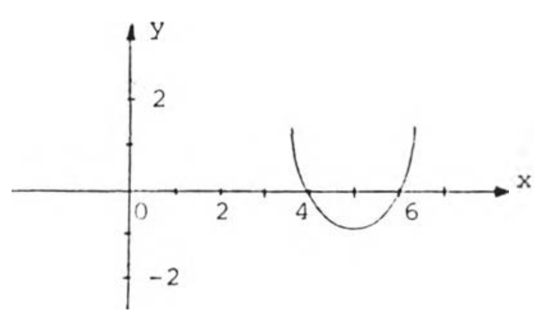
$x^2 - 2x - 35 \geq 0$



$\therefore$ เซตคำตอบของสมการคือ $\{x \mid x \in R$ ยกเว้น $-5 < x < 7\}$ หรือ

$R-(-5,7)$

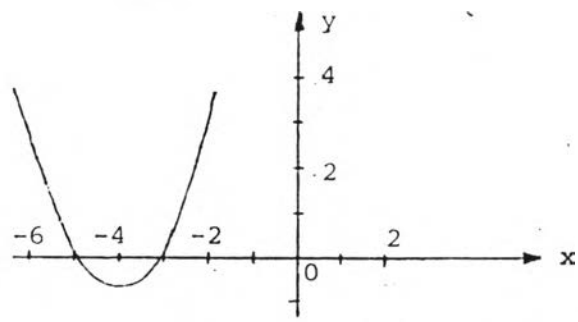
(3) $x^2 - 10x + 24 < 0$



$\therefore$ เซตคำตอบของสมการ คือ $\{x / 4 < x < 6\}$

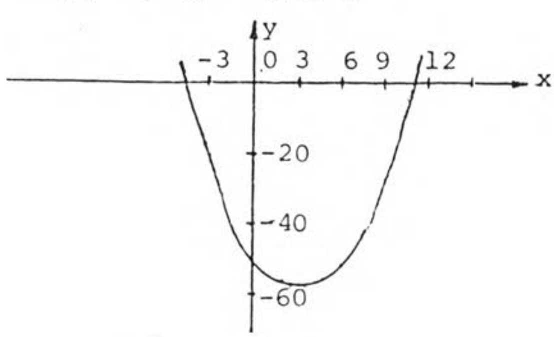
(4) $x^2 + 8x \leqslant -15$

$x^2 + 8x + 15 \leqslant 0$



$\therefore$ เซตคำตอบของสมการคือ $\{x \mid -5 \leqslant x \leqslant -3\}$

(5) $x^2 - 7x - 44 > 0$

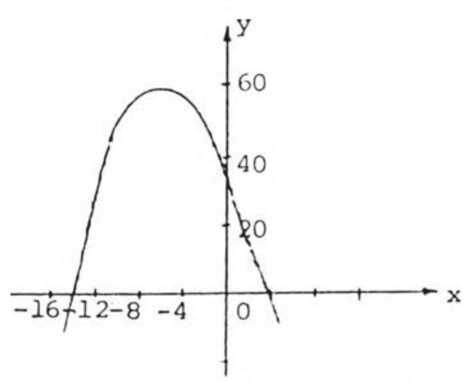


$\therefore$ เซตคำตอบของสมการคือ $\{x \mid x \in R$ ยกเว้น $-4 \leqslant x \leqslant 11\}$

หรือ $R - [-4, 11]$

(6) $28 - 12x - x^2 \leqslant 0$

$x^2 + 12x - 28 \geqslant 0$

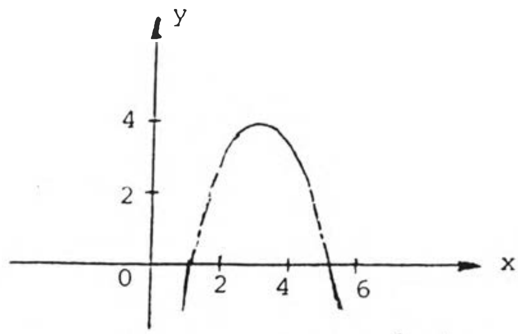


$\therefore$ เซตคำตอบของสมการคือ $\{x \mid x \in R$ ยกเว้น $-14 < x < 2\}$

หรือ $R - (-14, 2)$

(7) $-x^2 + 6x \geqslant 5$

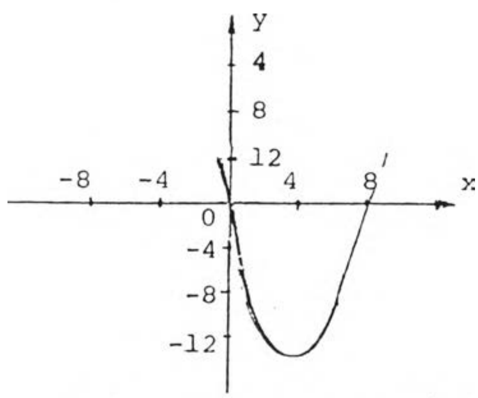
$-x^2 + 6x - 5 \geqslant 0$



$\therefore$ เซตคำตอบของสมการคือ $\{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 5\}$

(8) $8x \leq x^2$

$x^2 - 8x \geq 0$



$\therefore$ เซตคำตอบของสมการ $\{x \mid x \in R$ ยกเว้น $0 \angle x \angle 8\}$ หรือ

$R-(0,8)$

2. จงหาค่าสูงสุด หรือค่าสุดของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $\underline{y = 3x^2 - 4x + 2}$

<u>หลักคิด</u> 1) สัมประสิทธิ์ของ x^2 เป็น + $(a > 0)$ เป็นรูปพาราโบลาหงาย

ค่าที่ต้องการคือ ค่าต่ำสุด (minimum value)

2) สูตรคำนวณ $y = c - \frac{b^2}{4a}$

$\because$ $y = 3x^2 - 4x + 2$ เทียบกับ $y = ax^2 + bx + c$

$\therefore$ $a = 3 > 0$, $b = -4$ และ $c = 2$

นั่นคือ ค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนี้ $= 2 - \frac{(-4)^2}{4(3)} = \frac{2}{3}$

(2) $\underline{y = 2x^2 - 4x + 1}$

<u>หลักคิด</u> เช่นเดียวกับข้อ (1)

$\because$ $a = 2 > 0$, $b = -4$, $c = 1$

นั่นคือ ค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนี้ $= 1 - \frac{(-4)^2}{4(2)} = -1$

(3) $\underline{y = x^2 + 3x + 4 = f(x)}$

<u>หลักคิด</u> เช่นเดียวกับข้อ (1)

$\because$ $a = 1 > 0$, $b = 3$ และ $c = 4$

นั่นคือ ค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนี้ $= 4 - \frac{3^2}{4} = \frac{7}{4}$

(4) $\underline{y = 6 + x - x^2}$

<u>หลักคิด</u> 1) สัมประสิทธิ์ของ x^2 มีเครื่องหมาย - (a เป็น - หรือ $a < 0$) แสดงว่าสมการนี้เป็นพาราโบลาคว่ำ ค่าที่ได้ต้องเป็นค่าสูงสุดของฟังก์ชัน

2) ใช้สูตร $y = c - \frac{b^2}{4a}$

3) เทียบ $y = f(x) = 6 + x - x^2$ กับ $f(x) = ax^2 + bx + c$ หาค่า a, b และ c

$\because$ $a = -1 < 0$, $b = 1$ และ $c = 6$

นั่นคือ ค่าสูงสุดของฟังก์ชันนี้ $= 6 - \frac{1^2}{4(-1)} = \frac{25}{4}$

(5) $\underline{y = -16 - 8x - x^2}$

<u>หลักคิด</u> เช่นเดียวกับข้อ (4)

$\because$ $a = -1 < 0$, $b = -8$ และ $c = -16$

นั่นคือ ค่าสูงสุดของฟังก์ชันนี้ $= -16 - \frac{(-8)^2}{4(-1)} = 0$

3. <u>หลักคิด</u> 1) จากสูตร ความสูง $h = ut + \frac{1}{2}(g)t$ เมื่อวัตถุขึ้นหรือลง

โดยอิสระภายใต้แรงดึงดูดของโลก จากโจทย์ $h(t) = 20t - 5t^2$

2) เมื่อแทนค่า $h(t) = 15$ เมตร จะทราบเวลา t ที่ก้อนหินเริ่มขึ้น

จนถึงระยะ 15 เมตร จากพื้น

$\because$ h = 15 เมตร แทนค่าในสมการย่อมได้ $15 = 20t - 5t^2$,

$t^2 - 4t + 3 = 0$; $(t - 3)(t - 1) = 0$, $t = 3,1$

นั่นคือ เมื่อก้อนหินอยู่สูงจากพื้นดิน 15 เมตร ด้วยเวลาผ่านไป 1 หน่วยเวลา

และ 3 หน่วยเวลา

<u>ข้อสังเกต</u> เมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที อยู่สูงจากพื้นเป็นขาขึ้นสูง 15 เมตร

แต่ถ้าเวลาผ่านไป 3 วินาที ก้อนหินเคลื่อนที่ต่อไปจนถึงจุดสูงสุด

แล้วเคลื่อนที่ลงมาที่ตำแหน่งอยู่สูงจากพื้น 15 เมตร

(2) ก้อนหินที่โยนนี้จะขึ้นไปสูงสุดเป็นระยะทางเท่าใด

<u>หลักคิด</u> 1) จากสูตรสมการตามโจทย์ $h(t) = 20t - 5t^2$ เป็นสมการกำลังสอง

รูปพาราโบลาคว่ำ เพราะสัมประสิทธิ์ของ t^2 เป็นลบ

2) จุดสูงสุดเป็นจุดวกกลับ (ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน) คือ

$y = h = c - \frac{b^2}{4a}$

$\because$ จาก $h(t) = 20t - 5\,t^2$

$a = -5 < 0,\quad b = 20,\quad c = 0$

ก้อนหินขึ้นไปสูงสุดเป็นระยะทาง $(h) = 0 - \frac{(20)^2}{4(-5)} = 20$ เมตร

4. <u>หลักคิด</u> 1) สังเกตสมการ $W = 220I - 22I^2$ เป็นความสัมพันธ์ระหว่าง

W กำลังไฟฟ้า (ฟังก์ชัน W) และ กระแสไฟฟ้า I (ตัวแปรอิสระ)

เป็นสมการพาราโบลาคว่ำ เพราะสัมประสิทธิ์ของ I^2 เป็นลบ

2) จากสมการ $W = 220I - 22I^2$ สามารถคำนวณหา I สูงสุด

$= -\frac{b}{2a}$ และ $W = c - \frac{b^2}{4a}$ ได้ทันที โดยไม่ต้องคำนึงถึง

แรงเคลื่อนไฟฟ้า และความต้านทาน

$\because$ สมการ $W = 220I - 22I^2$

$\therefore$ $a = -22 < 0$, $b = 220$, และ $c = 0$

ดังนั้น กระแสในวงจร $I = -\frac{220}{2(-22)} = 5$ แอมแปร์

และ กำลังไฟฟ้าสูงสุด $W = 0 - \frac{(220)^2}{4(-22)} = 550$ วัตต์

<u>ข้อสังเกต</u> ค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชัน ให้พิจารณาเครื่องหมายของ x^2 ถ้าเครื่องหมายเป็น - โจทย์มักให้คำนวณหาค่าสูงสุด เพราะสมการกำลังสองเป็นรูปพาราโบลาคว่ำ และทำนองเดียวกัน ถ้ามีเครื่องหมายเป็น + มักให้คำนวณหาค่าต่ำสุด เป็นต้น

5. <u>หลักคิด</u> จากสมการ $P = 2s^2 + 88s$

$\therefore a = -2 < 0,\ b = 88$ และ $c = 0$

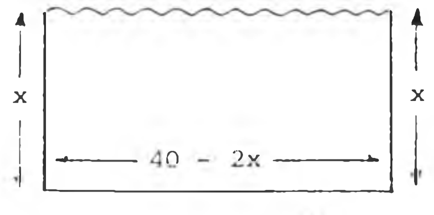
เมื่อ P เป็นผลกำไร และ s เป็นจำนวนห้อง ต้องการหาจำนวนห้อง หรือ s มากที่สุดได้จากสูตร $s = x = -\frac{b}{2a}$

$\therefore$ ให้ได้กำไรมากที่สุดต้องมีจำนวนห้องทั้งสิ้น $= -\frac{88}{2(-2)} = 22$ ห้อง

<u>หมายเหตุ</u> นอกจากวิธีแทนค่าตามสูตร $x = -\frac{b}{2a}$ แล้ว สามารถคำนวณได้โดยวิธีแก้สมการคือ ให้ $f(x) = y = 0$ แล้วหาค่าของ x อาจจะอยู่ในรูปของการแยกแฟกเตอร์ก็ได้

6. <u>หลักคิด</u> 1) โจทย์ต้องการทราบความกว้างและความยาว โดยมีเงื่อนไขว่า ให้ได้พื้นที่มากที่สุด ซึ่งต้องกำหนดสมการในลักษณะของพื้นที่

2) โจทย์กำหนดความยาวของรั้ว ซึ่งล้อมไว้เพียง 3 ด้านเท่านั้น ยาว 40 เมตร



3) สมมติให้ด้านยาวหรือด้านกว้างก็ได้ ยาว x เมตร ซึ่งควรกำหนดสมมติด้านกว้างจะช่วยให้การคำนวณรวดเร็วขึ้น

4) พื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า กว้าง × ยาว กลายเป็นสมการกำลังสอง

$\therefore$ ให้ด้านกว้างของรั้วยาว $= x$ เมตร

$\therefore$ ด้านยาวย่อมยาว $= 40 - (x + x) = 40 - 2x$ เมตร

ให้ A เป็นพื้นที่จะล้อมรั้ว $= x(40 - 2x)$ ตารางเมตร

$A = 40x - 2x^2$ ตารางเมตร

เพื่อให้ได้พื้นที่บริเวณล้อมรั้วมากที่สุด ย่อมหาได้

จากสูตร $A = c - \frac{b^2}{4a}$

เมื่อ $a = -2$, $b = 40$ และ $c = 0$

แสดงว่าพื้นที่ล้อมรั้วมากที่สุด คือ

$$A = 0 - \frac{(40)^2}{4(-2)} = 200 \text{ ตารางเมตร}$$

และหาความกว้างที่สุดได้จากสูตร $x = \frac{-b}{2a}$

แสดงว่าต้องกั้นรั้วให้กว้าง $x = -\frac{40}{2(-2)} = 10$ เมตร

และความยาวของพื้นที่รั้ว $= 40 - 2(10) = 20$ เมตร

นั่นคือ จะล้อมรั้วให้ได้พื้นที่มากที่สุด ต้องกั้นรั้วให้มีความกว้าง 10 เมตร และยาว 20 เมตร

บัตรทดสอบหรือบัตรปัญหา

เรื่อง 2. ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ

2.5 ฟังก์ชันกำลังสอง (quadratic function)

2.5.1 กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง

2.5.2 เซตคำตอบของอสมการกำลังสอง

คำสั่ง จงทำเครื่องหมายกากบาท (X) ลงในวงเล็บตรงกับข้อ ก หรือ ข หรือ ค หรือ ง ในกระดาษคำตอบซึ่งท่านเห็นว่าถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

---

1. ให้ $f(x) = 4x^2-3x + 1$ ข้อใดถูกต้อง

   ก. จุดวกกลับคือ $(\frac{3}{8},\frac{7}{16})$

   ข. จุดวกกลับคือ $(\frac{-3}{8},\frac{25}{16})$

   ค. จุดวกกลับคือ $(\frac{3}{8},\frac{-9}{16})$

   ง. จุดวกกลับคือ $(\frac{-3}{8},\frac{9}{4})$

2. ให้ $f(x) = 1 + 3x - x^2$ ค่า x ที่ f(x) มีค่าสูงสุดคือ

   ก. 1

   ข. $1\frac{1}{2}$

   ค. 2

   ง. $2\frac{1}{2}$

3. ให้ $f(x) = x^2- 6x + 2$ ข้อใดถูกต้อง

   ก. ค่าสูงสุดคือ 9

   ข. ค่าต่ำสุดคือ 9

   ค. ค่าสูงสุดคือ -7

   ง. ค่าต่ำสุดคือ -7

4. ให้ $y = 2 + 3x - x^2$ ข้อใดถูกต้อง

   ก. y มีค่าสูงสุดคือ $4\frac{1}{4}$

   ข. y มีค่าต่ำสุดคือ $4\frac{1}{4}$

   ค. y มีค่าสูงสุดคือ $1\frac{1}{2}$

   ง. y มีค่าต่ำสุดคือ $1\frac{1}{2}$

5. ให้ $y = 2x^2+ 2x - 1$ ข้อใดถูกต้อง

   ก. กราฟเป็นพาราโบลาคว่ำจุดวกกลับที่ $x = \frac{-1}{2}$

   ข. กราฟเป็นพาราโบลาหงายจุดวกกลับที่ $x = \frac{-1}{2}$

   ค. กราฟเป็นพาราโบลาคว่ำจุดวกกลับที่ $x = \frac{-12}{8}$

   ง. กราฟเป็นพาราโบลาหงายจุดวกกลับที่ $x = \frac{-12}{8}$

6. ระยะความสูงที่วัตถุเคลื่อนเคลื่อนที่ได้ (s) สัมพันธ์กับเวลา (t) เป็นไปตามสมการ $s = 21t - 3t^2$ เมื่อ s มีหน่วยเป็นฟุต และ t มีหน่วยเป็นวินาที เวลาที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะสูง 36 ฟุตคือข้อใด

   ก. 2

   ข. 3

   ค. 5

   ง. 7

7. วัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะสูงที่สุดคือข้อใด

ก. $36\frac{1}{2}$ ฟุต

ข. $36\frac{1}{4}$ ฟุต

ค. $36\frac{3}{4}$ ฟุต

ง. $36\frac{4}{5}$ ฟุต

8. ฟังก์ชันค่าใช้จ่าย (c บาท) ในการผลิตของ x หน่วยอยู่ในรูป $c(x) = 50 + 30x$ ส่วนฟังก์ชันรายรับ (R บาท) ในการขายของ x หน่วยอยู่ในรูป $R(x) = 90x - x^2$ และฟังก์ชันกำไร (P บาท) ในการผลิตและขายของ x หน่วยอยู่ในรูป $P = R - c$ ค่าของ $P(x)$ คือข้อใด

ก. $x^2 + 60x - 50$

ข. $-x^2 - 120x - 50$

ค. $-x^2 + 60x - 50$

ง. $x^2 + 120x - 50$

9. ค่า x ที่ทำให้ $P(x)$ สูงที่สุดคือข้อใด

ก. 10 บาท

ข. 30 บาท

ค. 60 บาท

ง. 120 บาท

10. กำไรสูงสุดคือข้อใด

ก. 850

ข. 950

ค. 3,550

ง. 3,600

เฉลยข้อทดสอบ

1. ก
2. ข
3. ง
4. ก
5. ข
6. ข
7. ค
8. ค
9. ค
10. ก

ชุดการเรียนการสอนที่ ๑

เรื่อง

ฟังก์ชันพหุนาม

บัตรคำสั่ง

ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. ทำบัตรกิจกรรม
2. ศึกษาจากบัตรเนื้อหาอีกครั้งหนึ่งถ้าไม่เข้าใจ หลังจากที่ทำบัตรกิจกรรมแล้ว
3. ทำบัตรแบบฝึกหัด หรือบัตรงานพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
4. ทำบัตรทดสอบหรือบัตรปัญหาพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย

<u>บัตรเนื้อหา</u>

<u>เรื่อง</u> 2. ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ

2.6 ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Function)

2.6 <u>ฟังก์ชันพหุนาม</u> (Polynomial Function) คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ โดยที่ $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มซึ่งมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ เช่น

$f(x) = x^3$

$f(x) = x^4 + x^2 - x + 4$

เมื่อ $n = 2$ ฟังก์ชันพหุนามจะเป็นฟังก์ชันกำลังสอง

$n = 1$ ฟังก์ชันพหุนามจะเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น

$n = 0$ ฟังก์ชันพหุนามจะเป็นฟังก์ชันคงตัว

<u>ตัวอย่าง</u>

1) ฟังก์ชันกำลังสองจะอยู่ในรูป $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ เมื่อ $a_2 \neq 0$

เช่น $f(x) = x^2 + 2x + 1$

2) ฟังก์ชันเชิงเส้นจะอยู่ในรูป $f(x) = a_1x + a_0$ เมื่อ $a_1 \neq 0$

เช่น $f(x) = x + 1$

3) ฟังก์ชันคงตัว จะอยู่ในรูป $f(x) = a_0$ เมื่อ a_0 คือค่าคงที่

เช่น $f(x) = 4$

จากข้างต้นจะเห็นว่า ฟังก์ชันกำลังสอง ฟังก์ชันเชิงเส้น และฟังก์ชันคงตัวเป็นฟังก์ชันพหุนาม

บัตรกิจกรรม

เรื่อง 2. ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ

2.6 ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Function)

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

1. ยกตัวอย่างฟังก์ชันพหุนามได้อย่างถูกต้อง
2. บอกตัวแปร จำนวนจริง จำนวนเต็ม ซึ่งมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ได้อย่างถูกต้อง
3. เขียนรูปทั่วไปของฟังก์ชันพหุนามได้อย่างถูกต้อง

กิจกรรม

ให้นักเรียนพิจารณาข้อความข้างล่างนี้

ฟังก์ชันพหุนาม

ให้ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} +...+a_2x^2a_1x+a_0$ โดยที่ $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มซึ่งมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

ฟังก์ชัน	ฟังก์ชันพหุนาม		เหตุผล
	เป็น	ไม่เป็น	
$f(x) = x^3$	✓	–	$n=3,\ a_3=1,\ a_2=0,\ a_1=0,\ a_0=0$
$f(x) = x^4+x^2-x+4$	✓	–	$n=4,\ a_4=1,\ a_3=0,\ a_2=1,\ a_1=-1,\ a_0=4$
$f(x) = x^2+2x+1$	____	____	____________
$f(x) = x+1$	____	____	____________
$f(x) = 4$	____	____	____________

จากตารางจะเห็นว่า

ฟังก์ชันพหุนามเมื่อ $n = 1$ จะเป็นฟังก์ชัน ______________

$n = 0$ จะเป็นฟังก์ชัน ______________

$n = 2$ จะเป็นฟังก์ชัน ______________

<u>สรุป</u>

ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Function) **คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

โดยที่ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ **เป็นจำนวนจริง และ**

n **เป็นจำนวนเต็มซึ่งมากกว่าหรือเท่ากับ** 0

บัตรแบบฝึกหัดหรือบัตรงาน

เรื่อง 2. ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ

2.6 ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Function)

แบบฝึกหัด

จงพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันพหุนามหรือไม่

1. $f(x) = 2x + x^2$
2. $f(x) = x^4 + x^2 + x$
3. $f(x) = 2^{x+1}$
4. $f(x) = |x + 1|$
5. $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x \leq 0 \end{cases}$

<u>เฉลยแบบฝึกหัด</u>

ข้อ 1.2 เป็นฟังก์ชันพหุนามส่วนข้ออื่น ๆ ไม่เป็น

บัตรทดสอบหรือบัตรปัญหา

เรื่อง 2. ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ

2.6 ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Function)

ข้อทดสอบ

ฟังก์ชันที่ไม่เป็นฟังก์ชันพหุนามคือข้อใด

1. $y = \frac{5}{x}$
2. $y = 5x - 1$
3. $y = 3x^2 - x + 1$
4. $y = x^3 + x^2 + x + 1$
5. $y = \sqrt{x} + 2$
6. $y = 3^{2x}$
7. $y = 5$
8. $y = \frac{x - 3}{x + 2}$

เฉลยข้อทดสอบ

ฟังก์ชันที่ไม่เป็นฟังก์ชันพหุนามคือข้อ 1,5,6,8

ชุดการเรียนการสอนที่ 10

เรื่อง

ชนิดของฟังก์ชัน

บัตรคำสั่ง

ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. **ทำบัตรกิจกรรม**
2. **ศึกษาจากบัตรเนื้อหาอีกครั้งหนึ่งถ้าไม่เข้าใจ หลังจากที่ทำบัตรกิจกรรมแล้ว**
3. **ทำบัตรแบบฝึกหัด หรือบัตรงานพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย**
4. **ทำบัตรทดสอบหรือบัตรปัญหาพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย**

บัตรเนื้อหา

เรื่อง 2. ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ

2.7 ชนิดของฟังก์ชัน

2.7 ชนิดของฟังก์ชัน

2.7.1 ฟังก์ชันพีชคณิต (Algebraic Function) คือฟังก์ชันที่ค่าของฟังก์ชันเขียนโดยใช้นิพจน์ (Expression) ซึ่งประกอบด้วยค่าคงตัว ตัวแปร และเครื่องหมาย บวก ลบ คูณ หาร กรณฑ์ ยกกำลัง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$f(x) = 3x - 4$$

$$f(x) = x^2 + x + 2$$

$$f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$$

$$f(x) = 1 + \sqrt{x}$$

2.7.2 ฟังก์ชันอดิสัย (Transcendental Function) หมายถึงฟังก์ชันใด ๆ ที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต เช่น

ก. ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล (Exponential Function) คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = a^x$ เมื่อ $x \in R$ แล. $a \in R^+$ โดยที่ $a \neq 1$ เช่น $f(x) = 2^x$
ฟังก์ชันชนิดนี้มักพบเสมอในเรื่องการเพิ่มของประชากร การเน่าเปื่อยของอินทรีย์วัตถุ การคิดดอกเบี้ยทบต้น

ข. ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithmic Function) คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = \log_a x$ เมื่อ $x \in R^+$ และ $a \in R^+$ โดยที่ $a \neq 1$ ($\log_a x$ อ่านว่า ลอการิทึมของเอกซ์ฐาน A)
เช่น $f(x) = \log_2 x$
ฟังก์ชันชนิดนี้มักจะพบในเรื่องความเข้มของเสียง การสั่นสะเทือนของแผ่นดินไหว

ค. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometiric Function) ตัวอย่าง
ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ คือ

$f(x) = \sin x$ เรียก f ว่าฟังก์ชันไซน์ (sin x อ่านว่า ไซน์เอกซ์)

$f(x) = \cos x$ เรียก f ว่าฟังก์ชันโคไซน์ (cos x อ่านว่า คอสน์เอกซ์)

ฟังก์ชันชนิดนี้มักพบในเรื่อง คลื่นเสียง คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

บัตรกิจกรรม

เรื่อง 2. ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ

2.7 ชนิดของฟังก์ชัน

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

1. บอกฟังก์ชันพีชคณิตหรือฟังก์ชันอดิสัยได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้

กิจกรรม

ให้นักเรียนพิจารณาข้อความข้างล่างนี้

จากที่ได้ศึกษาฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ มาแล้ว อาจแบ่งฟังก์ชันออกเป็น 2 ชนิด คือ

2.7.1 ฟังก์ชันพีชคณิต (Algebraic Function) คือฟังก์ชันที่ค่าของฟังก์ชันเขียนโดยใช้นิพจน์ (Expression) ซึ่งประกอบด้วยค่าคงตัว ตัวแปร และเครื่องหมาย บวก ลบ คูณ หาร กรณ์และกำลัง

ลำดับที่	ฟังก์ชัน	ฟังก์ชันพีชคณิต		เหตุผล	ชนิดของฟังก์ชัน
		เป็น	ไม่เป็น		
1	$f(x) = 4$	✓	—	เป็นนิพจน์ซึ่งประกอบด้วยค่าคงที่	ฟังก์ชันคงที่
2	$f(x) = 3x - 4$	✓	—	เป็นนิพจน์สองนิพจน์ลบกัน	ฟังก์ชันเชิงเส้น
3	$f(x) = x^2 + x + 2$	____	____	____________	____________
4	$f(x) = \|x\|$	____	____	____________	____________
5	$f(x) = \begin{cases} 1 ; & x > 0 \\ -1; & x \leq 0 \end{cases}$	____	____	____________	____________

จากตารางจะได้ว่า

1) ฟังก์ชันคงตัว ____________ ฟังก์ชันพีชคณิต
เป็น/ไม่เป็น

2) ฟังก์ชันเชิงเส้น ____________ ฟังก์ชันพีชคณิต
เป็น/ไม่เป็น

3) ฟังก์ชันกำลังสอง ____________ฟังก์ชันพีชคณิต
เป็น/ไม่เป็น

4) ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ __________ ฟังก์ชันพีชคณิต
เป็น/ไม่เป็น

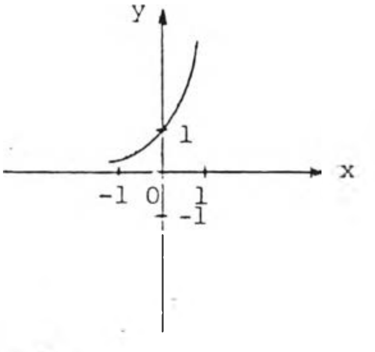
5) ฟังก์ชันขั้นบันได __________ ฟังก์ชันพีชคณิต
เป็น/ไม่เป็น

6) ฟังก์ชันพหุนาม __________ ฟังก์ชันพีชคณิต
เป็น/ไม่เป็น

2.7.2 <u>ฟังก์ชันอดิสัย</u> (Transcendental Function) หมายถึง ฟังก์ชันใด ๆ ที่ไม่ใช่ฟังก์ชันพีชคณิต เช่น

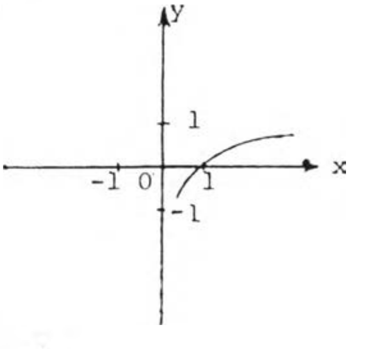
<u>ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล</u> (Exponontial Function) คือฟังก์ชันอยู่ในรูป $f(x) = a^x$ เมื่อ $x \in R$ และ a เป็นจำนวนจริงบวกซึ่งไม่เท่ากับ 1

ตัวอย่าง $f(x) = 2^x$



ฟังก์ชันชนิดนี้มักพบเสมอในเรื่องการเพิ่มของประชากร การเน่าเปื่อยของอินทรีย์วัตถุ การคิดดอกเบี้ยทบต้น

<u>ฟังก์ชันลอการิทึม</u> (Logarithmic Function) คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = \log_a x$ เมื่อ $x \in R^+$ และ a เป็นจำนวนจริงบวกซึ่งไม่เท่ากับ 1 ($\log_a x$ อ่านว่า ลอการิทึมของเอกซ์ฐาน เอ) เช่น $f(x) = \log_2 x$

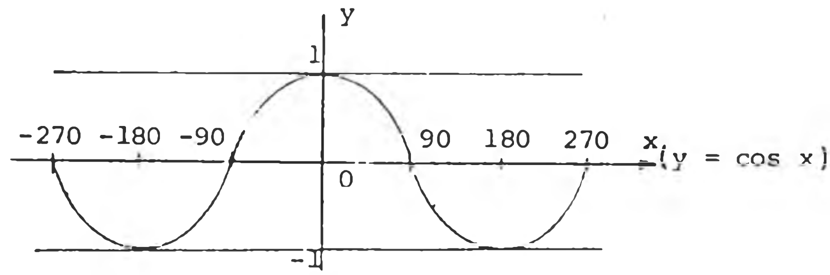


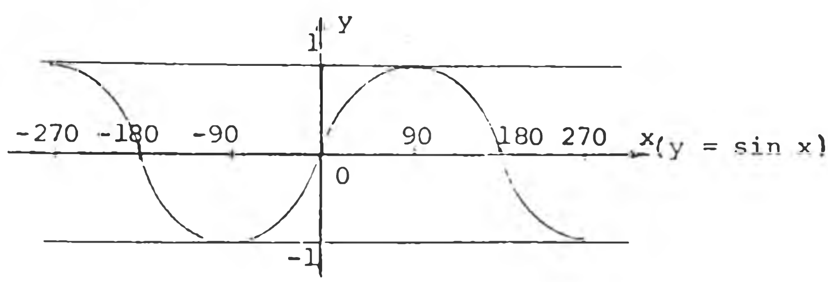
ฟังก์ชันชนิดนี้มักจะพบในเรื่องความเข้มของเสียง การสั่นสะเทือนของแผ่นดินไหว

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Function) เช่น

$f(x) = \sin x$ เรียก f ว่า ฟังก์ชันไซน์ ($\sin x$ อ่านว่า ไซน์เอกซ์)

$f(x) = \cos x$ เรียก f ว่า ฟังก์ชันโคไซน์ ($\cos x$ อ่านว่า คอสน์เอกซ์)





ฟังก์ชันชนิดนี้มักพบในเรื่อง คลื่นเสียง คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

จงพิจารณาตารางแล้วเติมเครื่องหมาย ✓ ในช่องที่คิดว่าถูกต้องที่สุด

ฟังก์ชัน	ฟังก์ชันพีชคณิต	ฟังก์ชันอดิสัย
$f(x) = 6$	______	______
$f(x) = 5^x$	______	______
$f(x) = x^2 + 6x$	______	______
$f(x) = \|x\| - 1$	______	______
$f(x) = \sin 60^\circ$	______	______

บัตรแบบฝึกหัดหรือบัตรงาน

เรื่อง 2. ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ

2.7 ชนิดของฟังก์ชัน

แบบฝึกหัด

ฟังก์ชันในข้อใด เป็นฟังก์ชันพีชคณิต และข้อใด เป็นฟังก์ชันอดิสัย

(1) $f(x) = 3^{5x}$

(2) $f(x) = \log_{10} 3x$

(3) $3x - x^2 - 2^x$

(4) $f(x) = \sin x$

(5) $f(x) = \dfrac{7x + 1}{4x - 6}$

(6) $f(x) = 6x + 1$

(7) $f(x) = 5$

(8) $f(x) = x^2 - x + 1$

(9) $f(x) = \sqrt{x} + 1$

(10) $f(x) = 2^x$

<u>เฉลยแบบฝึกหัด</u>

ข้อ 1,2,4,10 เป็นฟังก์ชันอดิศัย

ข้อ 5,6,7,8,9 เป็นฟังก์ชันพีชคณิต

ข้อ 3 ไม่เป็นฟังก์ชัน

<u>บัตรทดสอบหรือบัตรปัญหา</u>

<u>เรื่อง</u> 2. ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ

2.7 ชนิดของฟังก์ชัน

<u>ข้อทดสอบ</u>

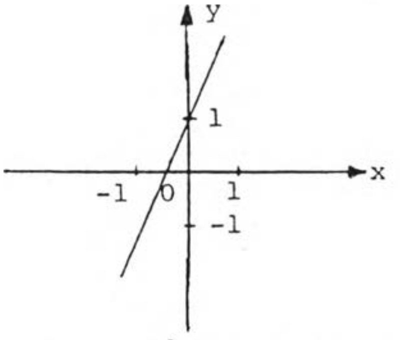
ฟังก์ชันในข้อใดเป็นฟังก์ชันพีชคณิต และข้อใดเป็นฟังก์ชันอดิสัย พร้อมทั้งเขียนกราฟ

1. $f(x) = 2x + 1$

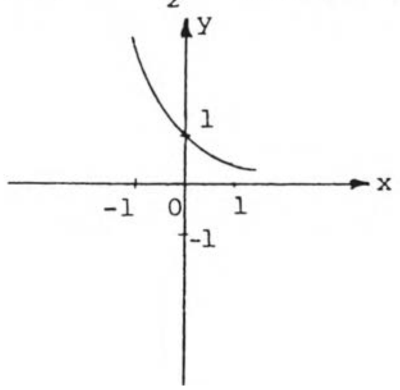
2. $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

<u>เฉลยข้อทดสอบ</u>

1. $f(x) = 2x + 1$ เป็นฟังก์ชันพีชคณิต



2. $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ เป็นฟังก์ชันอดิสัย



ชุดการเรียนการสอนที่ 11

เรื่อง

นิยามของฟังก์ชันคอมโพสิท

บัตรคำสั่ง

ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

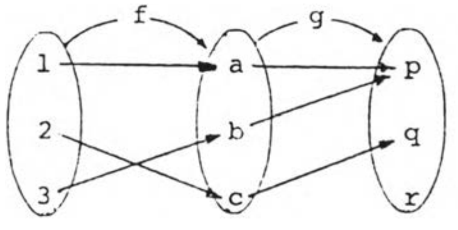
1. ทำบัตรกิจกรรม
2. ศึกษาจากบัตรเนื้อหาอีกครั้งหนึ่งถ้าไม่เข้าใจ หลังจากที่ทำบัตรกิจกรรมแล้ว
3. ทำบัตรแบบฝึกหัด หรือบัตรงานพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
4. ทำบัตรทดสอบหรือบัตรปัญหาพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย

บัตรเนื้อหา

เรื่อง 3. ฟังก์ชันคอมโพสิท (Composite Function)

3.1 นิยามของฟังก์ชันคอมโพสิท

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ดังแสดงในภาพ



จากภาพจะได้ $f(1) = a$, $f(2) = c$, $f(3) = b$

$g(a) = p$, $g(b) = p$, $g(c) = q$

จาก f และ g ที่กำหนดให้จะได้

$$g(f(1)) = g(a) = p$$

$$g(f(2)) = g(c) = q$$

$$g(f(3)) = g(b) = p$$

อาจสร้างฟังก์ชันใหม่เรียกว่า ฟังก์ชันคอมโพสิท gof (อ่านว่า จีโอเอฟ) เป็นฟังก์ชันจาก A ไป C กำหนดโดย

$$(gof)(1) = g(f(1))$$

$$(gof)(2) = g(f(2))$$

$$(gof)(3) = g(f(3))$$

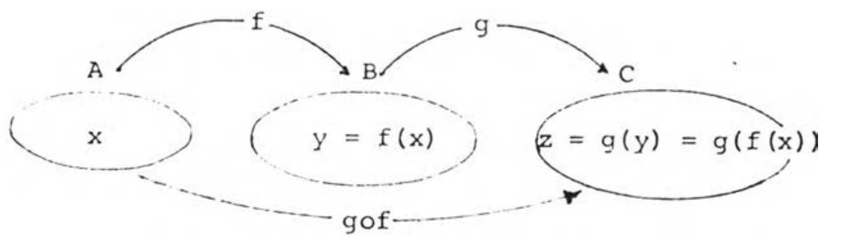
ดังนั้น $(gof)(1) = p$

$(gof)(2) = q$

$(gof)(3) = p$

นั่นคือ $gof = \{(1,p), (2,q), (3,p)\}$

** จะเห็นว่า gof จะเกิดขึ้นได้เมื่อ $R_f \subset D_g$



จากรูป จะได้ gof เป็นฟังก์ชันจาก A ไป C

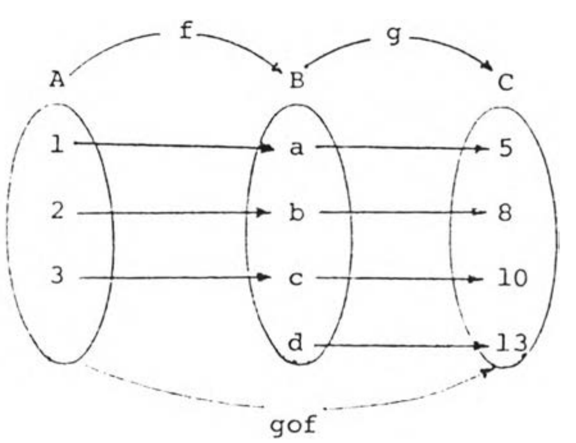
โดยที่ $(x,z) \in gof$ หรือ $z = (gof)(x)$

ดังนั้น $(gof)(x) = g(f(x)) = z$

กล่าวคือ ค่าของฟังก์ชัน gof ที่ x เท่ากับค่าของฟังก์ชัน g ที่ f(x)

จะเห็นว่า $R_f \subset D_g$ และ $D_{gof} = D_f$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u>



จากแผนภาพ $f = \{(1,a), (2,b), (3,c)\}$

$g = \{(a,5), (b,8), (c,10), (d,13)\}$

$(gof)(1) = g(f(1)) = g(a) = 5$

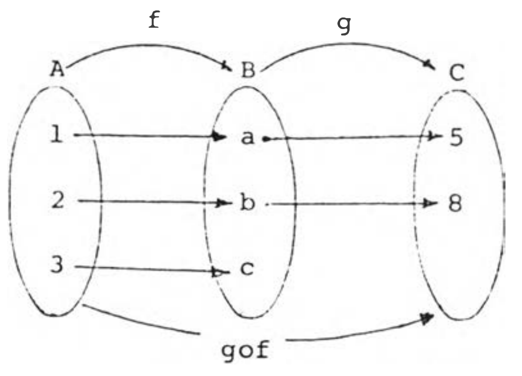
$(gof)(2) = g(f(2)) = g(b) = 8$

$(gof)(3) = g(f(3)) = g(c) = 10$

$\therefore gof = \{(1,5), (2,8), (3,10)\}$

* จะเห็นว่า gof จะเกิดขึ้นได้เมื่อ $R_f \subset D_g$

ตัวอย่างที่ 2



จากแผนภาพ $f : A \longrightarrow B$ แต่ g ไม่เป็นฟังก์ชันจาก B ไป C

ดังนั้น $R_f \subset D_g$ จึงไม่เกิด gof

นิยาม ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน และ $R_f \subset D_g$

ฟังก์ชันคอมโพสิทของ f และ g เขียนแทนด้วย gof

กำหนดโดย $(gof)(x) = g(f(x))$ สำหรับทุก $x \in D_f$

จะเห็นว่า $D_{gof} = D_f$

ในกรณีที่ $R_f \not\subset D_g$ ถือว่าไม่มีฟังก์ชันคอมโพสิทของ f และ g

ตัวอย่างที่ 3 $f = \{(1,a), (3,b), (5,c)\}$, $g = \{(a,8), (b,11), (c,13), (d,13)\}$

จงหา 1) gof 2) fog

1) หา gof

จะเห็นว่า $R_f \subset D_g$ ฉะนั้นจึงเกิด gof

$D_{gof} = D_f$

$gof(1) = g(f(1)) = g(a) = 8$

$gof(3) = g(f(3)) = g(b) = 11$

$gof(5) = g(f(5)) = g(c) = 13$

$\therefore gof = \{(1,8), (3,11), (5,13)\}$

2) หา fog

$\because R_g \subset D_f$

แต่ $R_g = \{8,11,13,15\}$, $D_f = \{1,3,5\}$

$\therefore R_g \not\subset D_f$

นั่นคือ fog เกิดไม่ได้

บัตรกิจกรรม

เรื่อง 3. ฟังก์ชันคอมโพสิท (Composite Function)

3.1 นิยามของฟังก์ชันคอมโพสิท

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

1. หาค่าของฟังก์ชัน f เมื่อกำหนดค่า x ได้อย่างถูกต้อง
2. หาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
3. สร้างฟังก์ชันคอมโพสิท gof ได้อย่างถูกต้อง
4. สรุปนิยามของฟังก์ชันคอมโพสิทได้อย่างถูกต้อง

กิจกรรม

ให้นักเรียนพิจารณาข้อความข้างล่างนี้

ฟังก์ชันคอมโพสิท (Composite Function)

ฟังก์ชันคอมโพสิท เป็นชื่อที่ใช้เรียกฟังก์ชันอันเกิดจากการดำเนินการของ 2 ฟังก์ชัน ซึ่งพื้นฐานที่จะนำมาใช้ในการศึกษาฟังก์ชันคอมโพสิทก็คือ ค่าของฟังก์ชัน ซึ่งจะขอทบทวนไว้ในที่นี้ คือ

ตัวอย่าง ถ้า $f(x) = x + 3$, $g(x) = 4x - 1$

จะได้ $f(1) = (1) + 3 = 4$

$f(-3) = (-3) + 3 = 0$

$f(a) =$ ______________

$g(f(1)) = g(4) = 4(4) - 1 = 15$

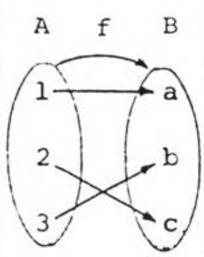
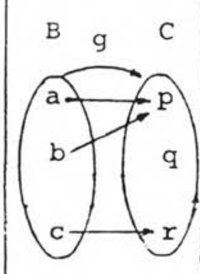
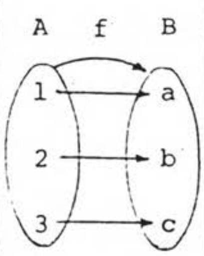
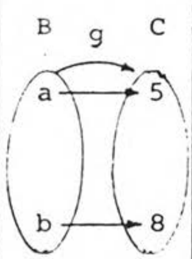
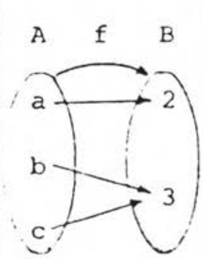
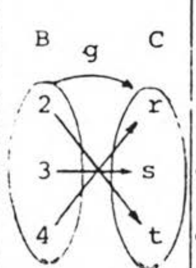
$g(f(-3)) = g(0) = 4(0) - 1 = -1$

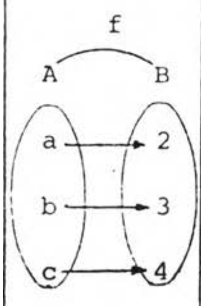
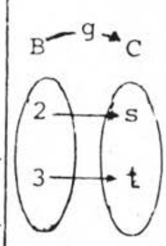
$g(f(a)) =$ ____________________

$g(f(x)) =$ ____________________

จากตัวอย่างจะเห็นว่า $g(f(x))$ ก็คือค่าของฟังก์ชัน g ที่ $f(x)$

จากที่กล่าวข้างต้นว่า ฟังก์ชันคอมโพสิทเกิดจากการดำเนินการของ 2 ฟังก์ชัน ซึ่งจะกล่าวถึงดังตารางต่อไปนี้

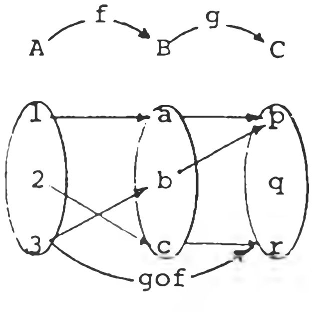
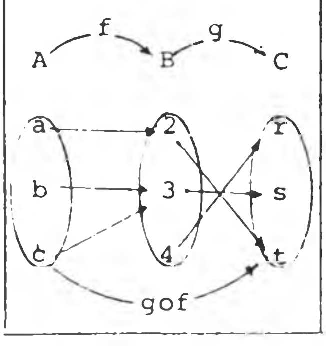
แผนภาพ	ค่าของฟังก์ชัน f	แผนภาพ	ค่าของฟังก์ชัน g ที่ f(x)	R_f	D_g	ความสัมพันธ์ของ R_f กับ D_g
	f(1) = a f(2) = c f(3) = b		g(f(1))=g(a) = p g(f(2))=g(c) = r g(f(3))=g(b) = p	$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$R_f \subset D_g$
	f(1) = a f(2) = b f(3) = c		g(f(1))=g(a) = 5 g(f(2))=g(b) = 8 g(f(3))=g(c) หาค่าไม่ได้	$\{a,b,c\}$	$\{a,b\}$	$R_f \not\subset D_g$
	f(a) = ____ f(b) = ____ f(c) = ____		g(f(a))= ____ g(f(b))= ____ g(f(c))= ____	____	____	________

แผนภาพ	ค่าของฟังก์ชัน f	แผนภาพ	ค่าของฟังก์ชัน g ที่ f(x)	R_f	D_g	ความสัมพันธ์ ของ R_f กับ D_g
	f(a) = _____ f(b) = _____ f(c) = _____		g(f(a))= _____ g(f(b))= _____ g(f(c))= _____	_____	_____	__________

จากตารางจะสังเกตเห็นว่า

1. จะหาค่า g(f(x)) ได้ทุกค่าของ $x \in D_f$ ก็ต่อเมื่อ ____________
2. ค่า g(f(x)) หาโดยเชื่อมโยง f(x) กับ g(f(x))

ถ้าให้ฟังก์ชันที่เกิดจากค่า g(f(x)) เป็นฟังก์ชันใหม่เรียกว่า "ฟังก์ชันคอมโพสิท ของ g และ f" เขียนแทนด้วย gof (อ่านว่าจีโอเอฟ) โดย (gof) (x) = g(f(x)) ทุกค่าของ $x \in D_f$ ดังนั้นจากตารางแรกจะได้ตารางดังข้างล่างนี้

แผนภาพ	(gof) (x)	gof	D_{gof}	R_{gof}
	(gof) (1) =g(f(1)) =g(a) =p (gof) (2) =g(f(2)) =g(c) =r (gof) (3) =g(f(3)) =g(b) =p	gof= {(1,p) , (2,r) , (3,p)}	{1, 2, 3}	{p, r}
	(gof) (a) = __________ (gof) (b) = __________ (gof) (c) = __________	gof= __________	_____	_____

จากตารางจะสังเกตเห็นว่า

1. จะหาค่าฟังก์ชัน gof ได้ก็ต่อเมื่อ ______________

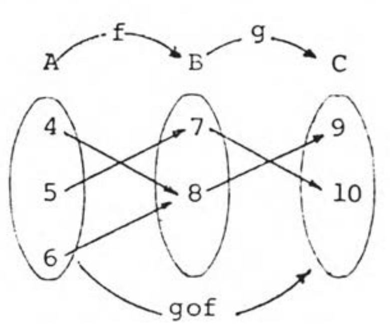
2. D_{gof} = __________ และ $R_{gof} \subset R_g$ ดังนั้น gof เป็นฟังก์ชันจาก A ไป C

3. การหาค่า (gof)(x) นั้นจะต้องหา f(x) ก่อน แล้วจึงหา g(f(x))

จากที่กล่าวข้างต้นจะสรุปได้ว่า

> __นิยาม__ ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน และ $R_f \subset D_g$
> ฟังก์ชันคอมโพสิทของ f และ g เขียนแทนด้วย gof กำหนดโดย
> $(gof)(x) = g(f(x))$ สำหรับทุก $x \in D_f$

__ตัวอย่างที่ 1__ ให้ $f : A \rightarrow B$ และ $g : B \rightarrow C$ ดังแสดงในแผนภาพ



ดังนั้น gof เป็นฟังก์ชันจาก A ไป C โดยที่

$(gof)(4) = g(f(4)) = g(8) = 9$

$(gof)(5) = g(f(5)) = g(7) = 10$

$(gof)(6) = g(f(6)) = g(8) = 9$

$\therefore$ $gof = \{(4,9), (5,10), (6,9)\}$

__ตัวอย่างที่ 2__ กำหนดให้ $A = \{a,b,c\}$, $B = \{1,2,3\}$ และ $C = \{5,7\}$

$f = \{(a,1), (b,3), (c, 3)\}$

$g = \{(1,5), (2,7), (3,7)\}$

เนื่องจาก $R_f = \{1,3\}$, $D_g = \{1,2,3\}$

จะได้ $R_f \subset D_g$ จึงมีฟังก์ชันคอมโพสิท gof

$\therefore$ gof $= \{(a,5),\ (b,7),\ (c,7)\}$

ข้อสังเกต

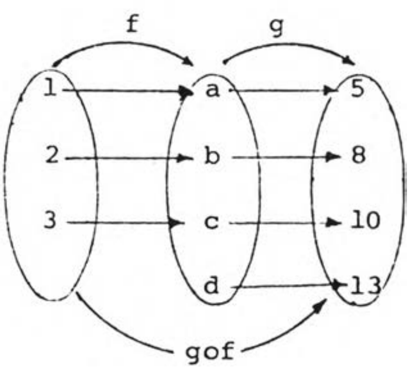
1. gof จะมีได้ก็ต่อเมื่อ $R_f \subset D_g$

   ดังนั้น fog จะมีได้ก็ต่อเมื่อ ________________

2. $D_{gof} = D_f$ ดังนั้นการหาค่าฟังก์ชัน gof จึงคล้ายกับการพิจารณา

   คู่อันดับจาก f ไป g

ตัวอย่างที่ 3



จากแผนภาพ $f = \{(1,a),\ (2,b),\ (3,c)\}$

$g = \{(a,5),\ (b,8),\ (c,10),\ (d,13)\}$

จะเห็นว่า $R_f \subset D_g$ ดังนั้นจะมี gof ซึ่งมีโดเมนคือ ____________

โดย (gof)(1) = ________________

(gof)(2) = ________________

(gof)(3) = ________________

$\therefore$ gof = { ________________ }

ตัวอย่างที่ 4 $f = \{(1,a),\ (3,b),\ (5,c)\}$ และ $g = \{(a,8),\ (b,11),\ (c,13),\ (d,13)\}$

จงหา 1) gof 2) fog

<u>วิธีทำ</u>

บัตรแบบฝึกหัดหรือบัตรงาน

เรื่อง 3. ฟังก์ชันคอมโพสิท

3.4 นิยามของฟังก์ชันคอมโพสิท

แบบฝึกหัด

1. ถ้า $f = \{(1,q), (2,r), (3,p)\}$ และ $g = \{(p,a), (q,b), (r,c), (s,d)\}$

   จงหา gof และ (gof)(2)

2. กำหนดให้
$$f = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4, 4)\}$$
$$g = \{(0,-1), (1,0), (2,1), (3,2), (4,3)\}$$
$$h = \{(-3,0), (-2,0), (-1,0), (1,1), (2,1), (3,1), (0,0)\}$$

   ถ้าสร้างได้ จงสร้าง fof, fog, gof, goh และ hog

<u>เฉลยแบบฝึกหัด</u>

1. $gof = \{(1,b), (2,c), (3,a)\}$

   $(gof)(2) = g(f(2)) = g(r) = c$

2. $fof = \{(1,3), (2,4), (3,4), (4,4)\}$

   fog ไม่สามารถสร้างได้ เพราะว่า $R_g \not\subset D_f$

   $gof = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,3)\}$

   $goh = \{(-3,1), (-2,-1), (-1,-1), (0,-1), (1,0), (2,0), (3,0)\}$

   $hog = \{(0,0), (1,0), (2,1), (3,1), (4,1)\}$

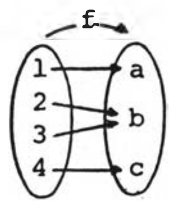
บัตรทดสอบหรือบัตรปัญหา

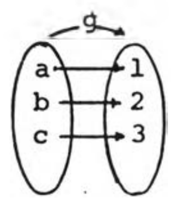
เรื่อง 3. ฟังก์ชันคอมโพสิท (Composite Function)

3.1 นิยามของฟังก์ชันคอมโพสิท

คำสั่ง จงทำเครื่องหมายกากบาท (X) ลงในวงเล็บตรงกับข้อ ก หรือ ข หรือ ค หรือ ง ในกระดาษคำตอบซึ่งท่านเห็นว่าถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

---

1. 



ข้อใดไม่ถูกต้อง

ก. $f(2) = b$

ข. $g(f(3)) = 2$

ค. $f(g(c)) = 3$

ง. $g(f(1)) = 1$

2. **ข้อใดไม่ถูกต้อง**

ก. ค่าฟังก์ชัน $g \circ f$ หาได้เมื่อ $R_f \subset D_g$

ข. ค่าฟังก์ชัน $f \circ g$ หาได้เมื่อ $R_g \subset D_f$

ค. ค่า $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ทุก $x \in D_f$

ง. ค่า $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ทุก $x \in D_f$

3. ให้ $f = \{(a,1), (b,3), (c,4)\}$ และ

$g = \{(1,c), (3,b), (4,e), (2,a)\}$

ข้อใดถูกต้อง

ก. $(g \circ f)(a) = c$

ข. $(g \circ f)(1) = 4$

ค. $(g \circ f)(3) = 3$

ง. $(g \circ f)(b) = e$

4. ให้ $f = \{(1,a), (2,b), (3,c)\}$

$g = \{(a,5), (b,7), (c,9)\}$

ค่าของ $g \circ f$ คือข้อใด

ก. $\{(a,a), (b,b), (c,c)\}$

ข. $\{(1,5), (2,7), (3,9)\}$

ค. $\{(1,1), (2,2), (3,3)\}$

ง. $\{(5,7), (7,9), (9,5)\}$

5. ให้ $f = \{(1,a), (2,b), (3,c)\}$

$g = \{(a,5), (b,7), (c,9)\}$ และ

$h = \{(5,1), (7,1), (9,0)\}$

ข้อใดถูกต้อง

ก. $(h \circ (g \circ f))(2) = 0$

ข. $(h \circ (g \circ f))(3) = 1$

ค. $(g \circ (f \circ h))(5) = 5$

ง. $(g \circ (f \circ h))(7) = 7$

6. ให้ $f = \{(a,1), (b,3), (c,4)\}$ และ

$g = \{(1,d), (3,e), (4,e), (2,f)\}$

ค่าของ $g \circ f$ คือข้อใด

ก. $\{(1,1), (3,3), (4,4)\}$

ข. $\{(a,d), (b,e), (c,e)\}$

ค. $\{(a,a), (b,e), (c,e)\}$

ง. $\{(1,3), (3,4), (4,4)\}$

7. ให้ $f = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$, $g = \{(a,5),(b,7),(c,9)\}$ และ

$h = \{(5,1),(7,1),(9,0)\}$ **ข้อใดถูกต้อง**

ก. $h \circ (g \circ f) = \{(1,1),(2,1),(3,0)\}$

ข. $g \circ (h \circ f) = \{(a,a),(b,a)\}$

ค. $h \circ (f \circ g) = \{(5,a),(7,a)\}$

ง. $g \circ (f \circ h) = \{(5,5),(7,7),(9,9)\}$

เฉลยข้อทดสอบ

1. ค
2. ง
3. ก
4. ข
5. ค
6. ข
7. ก

ชุดการเรียนการสอนที่ 12

เรื่อง

การหาฟังก์ชันคอมโพสิท

บัตรคำสั่ง

ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. ทำบัตรกิจกรรม
2. ศึกษาจากบัตรเนื้อหาอีกครั้งหนึ่งถ้าไม่เข้าใจ หลังจากที่ทำบัตรกิจกรรมแล้ว
3. ทำบัตรแบบฝึกหัด หรือบัตรงานพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
4. ทำบัตรทดสอบหรือบัตรปัญหาพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย

บัตรเนื้อหา

เรื่อง 3. ฟังก์ชันคอมโพสิท (Composite Function)

3.2 การหาฟังก์ชันคอมโพสิท

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $f(x) = 2x$ และ $g(x) = x + 3$ จะมี gof หรือ fog หรือไม่ เพราะเหตุใด ถ้ามีจงหา gof, fog

<u>วิธีทำ</u>

เนื่องจาก $f(x) = 2x$

จะได้ $D_f = \{x / x \in R\}$; $R_f = \{y / y \in R\}$

เนื่องจาก $g(x) = x + 3$

จะได้ $D_g = \{x / x \in R\}$; $R_g = \{y / y \in R\}$

1) gof มีเพราะว่า $R_f \subset D_g$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2x + 3$$

ดังนั้น gof $= \{(x,y) / y = 2x + 3\}$

2) fog มีเพราะว่า $R_g \subset D_f$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x + 3) = 2(x + 3) = 2x + 6$$

ดังนั้น fog $= \{(x,y) / y = 2x + 6\}$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $f(x) = x + 1$ และ $g(x) = \sqrt{x}$ จะมี gof หรือ fog หรือไม่ เพราะเหตุใด ถ้ามีจงหา gof

<u>วิธีทำ</u>

เนื่องจาก $f(x) = x + 1$

จะได้ $D_f = \{x / x \in R\}$; $R_f = \{y / y \in R\}$

เนื่องจาก $g(x) = \sqrt{x}$

จะได้ $D_g = \{x / x \geq 0\}$; $R_g = \{y / y \geq 0\}$

1) gof ไม่มีเพราะว่า $R_f \not\subset D_g$

2) fog มีเพราะว่า $R_g \subset D_f$

$$(fog)(x) = f(g(x))$$
$$= f(\sqrt{x})$$
$$= \sqrt{x} + 1$$

ดังนั้น fog $= \{x / x = \sqrt{x} + 1\}$

ตัวอย่าง กำหนด $f(x) = x^2 + 2x + 1$ และ $g(x) = 3x - 1$

จงหา $(gof)(-1)$ และ $(fog(6)$

วิธีทำ

เนื่องจาก $f(x) = x^2 + 2x + 1$
$$= (x + 1)^2$$

จะได้ $D_f = \{x / x \in R\}$

$R_f = \{y / y \geq 0\}$

เนื่องจาก $g(x) = 3x - 1$

จะได้ $D_g = \{x / x \in R\}$

$R_g = \{y / y \in R\}$

เพราะว่า $R_f \subset D_g$ และ $D_g \subset D_f$ จึงทำให้หา gof และ fog ได้ตามลำดับ

1) $(gof)(x) = g(f(x))$
$$= g(x^2 + 2x + 1)$$
$$= 3(x^2 + 2x + 1) - 1$$

$(gof)(-1)$ หาได้เพราะว่า $-1 \in D_f$

$$\therefore \; gof(-1) = 3((-1)^2 + 2(-1) + 1) - 1$$
$$= -1$$

2) $(fog)(x) = f(g(x))$

$= f(3x - 1)$

$= (3x - 1)^2 + 2(3x - 1) + 1$

$(fog)(6)$ หาได้เพราะว่า $6 \in D_g$

$\therefore (fog)(6) = (3(6) - 1)^2 + 2(3(6) - 1) + 1$

$= 324$

บัตรกิจกรรม

เรื่อง 3. ฟังก์ชันคอมโพสิท (Composite Function)

3.2 การหาฟังก์ชันคอมโพสิท

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกความหมายของฟังก์ชันคอมโพสิทได้อย่างถูกต้อง
2. บอกโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันในรูปการกำหนดเงื่อนไขได้อย่างถูกต้อง
3. หาฟังก์ชันคอมโพสิทได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดฟังก์ชันสองฟังก์ชันใด ๆ ให้

กิจกรรม

ให้นักเรียนพิจารณาข้อความข้างล่างนี้

ในกรณีที่กำหนดฟังก์ชันในรูปของเงื่อนไข ไม่ได้แจกแจงคู่ลำดับนั้น การหาฟังก์ชันคอมโพสิทก็มีหลักการและวิธีการคล้ายกับในกรณีที่แจกแจงคู่อันดับคือ จะหา gof จะต้องพิจารณา R_f ว่าเป็นสับเซต D_g หรือไม่ ถ้า $R_f \subset D_g$ จะสามารถหา gof ได้ แต่ก่อนที่จะมาหาฟังก์ชันคอมโพสิทในรูปการกำหนดเงื่อนไขจะขอทบทวนการหาค่าฟังก์ชันก่อน

เช่น ถ้า $f(x) = x + 3$ $g(x) = 4x - 1$

จะได้ $f(a) = a + 3$

$g(a) = 4(a) - 1$

$g(a + b) = 4(a + b) - 1$

$g(f(x)) = g(x + 3) = 4(x + 3) - 1$

$= 4x + 12 - 1$

$= 4x - 11$

$f(g(x))$ = ________________

= ________________

= ________________

จากนิยามฟังก์ชันคอมโพสิท

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน และ $R_f \subset D_g$

ฟังก์ชันคอมโพสิทของ f และ g เขียนแทนด้วย gof

กำหนด $(gof)(x) = g(f(x))$ สำหรับทุก $x \in D_f$

การหาฟังก์ชันคอมโพสิทในรูปการกำหนดเงื่อนไขนั้นขอให้ดูจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f(x) = 2x$ และ $g(x) = x + 3$ จะมี gof หรือไม่ เพราะเหตุใด ถ้ามีจงหา gof และ fog

วิธีทำ

เนื่องจาก $f(x) = 2x$

จะได้ $D_f = \{x / x \in R\}$; $R_f = \{y / y \in R\}$

เนื่องจาก $g(x) = x + 3$

จะได้ $D_g = \{x / x \in R\}$, $R_g = \{y / y \in R\}$

1) มี gof เพราะว่า $R_f \subset D_g$

จะได้ $(gof)(x) = g(f(x))$

$= g(2x)$ (แทนค่า $f(x)$)

$= 2x + 3$

ดังนั้น $gof = \{(x,y) / y = 2x + 3\}$

2) มี fog เพราะว่า $R_g \subset D_f$

$(fog)(x) = f(g(x))$

= ________________

= ________________

= ________________

ดังนั้น fog $= \{(x,y) /$ ________________ $\}$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> กำหนดให้ $f(x) = x + 1$ และ $g(x) = \sqrt{x}$ จะมี gof หรือ fog หรือไม่ เพราะเหตุใด ถ้ามีจงหา gof

<u>วิธีทำ</u>

เนื่องจาก $f(x) = x + 1$

จะได้ $D_f = \{x/x \in R\}$, $R_f = \{y/y \in R\}$

เนื่องจาก $g(x) = \sqrt{x}$

จะได้ $D_g = \{x/x \geq 0\}$; $R_f = \{y/y \geq 0\}$

1) ไม่มี gof เพราะว่า $R_f \not\subset D_g$

2) มี fog เพราะว่า ______

$(fog)(x) = f(g(x))$

$= $ ______

$= $ ______

ดังนั้น fog $=$ ______________

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> กำหนด $f(x) = x^2 + 2x + 1$ และ $g(x) = 3x - 1$ จงหา $(gof)(-1)$ และ$(fog)(6)$

<u>วิธีทำ</u>

เนื่องจาก $f(x) = x^2 + 2x + 1$

$= (x + 1)^2$

จะได้ $D_f = \{x/x \in R\}$

$R_f = \{y/y \geq 0\}$

เนื่องจาก $g(x) = 3x - 1$

จะได้ $D_g = \{x/x \in R\}$

$R_g = \{y/y \in R\}$

เพราะว่า $R_f \subset D_g$ จึงมี gof

$R_g \subset D_f$ จึงมี fog

1) $(gof)(x) = g(f(x))$

$= g(x^2 + 2x + 1)$

$= 3(x^2 + 2x + 1) - 1$

เนื่องจาก $-1 \in D_f$

ดังนั้น

$(gof)(-1) = 3((-1)^2 + 2(-1) + 1) - 1$

$= -1$

2) $(fog)(x) = f(g(x))$

= ________________

= ________________

เนื่องจาก $6 \in D_g$

ดังนั้น

$(fog)(6) =$ ________________

= ________________

<u>บัตรแบบฝึกหัดหรือบัตรงาน</u>

<u>เรื่อง</u> 3. ฟังก์ชันคอมโพสิท

3.2 การหาฟังก์ชันคอมโพสิท

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. กำหนดให้ $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3 + 1$ จงหา

   (1) $f(g(x))$

   (2) $g(f(x))$

   (3) $f(g(x))$ เท่ากับ $g(f(x))$ หรือไม่

2. กำหนดให้ $f : R \longrightarrow R$, $g : R \longrightarrow R$ และ $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = x^2+5$ จงหา

   (1) gof

   (2) fog

   (3) $(fof)(x)$

   (4) $(gog)(x)$

   (5) $(gof)(2)$

   (6) $(fof)(3)$

   (7) $(fog)(x + 1)$

3. ถ้า $f(x) = x^2 - 2|x|$, $g(x) = x^2 + 1$ จงหา

   (1) $(gof)(3)$

   (2) $(fog)(-2)$

   (3) $(gof)(-4)$

   (4) $(fog)(5)$

4. ถ้า $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2$ จงหาค่าของ x ที่ทำให้ $f(g(x)) = g(f(x))$

5. ให้ $f(x) = x - 3$, $g(x) = x^2$, $h(x) = 2x + 1$ จงหา

(1) $(f\circ g)\circ h$

(2) $f\circ(g\circ h)$

เฉลยแบบฝึกหัด

1. กำหนดให้ $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3 + 1$, ให้คำนวณหา

(1) $f(g(x))$

หลักคิด สำหรับ Composite Function ให้แทนค่าฟังก์ชันที่อยู่ภายในวงเล็บเสียก่อน

$\therefore$ $f(g(x)) = f(x^3 + 1) = (x^3 + 1)^2 = x^6 + 2x^3 + 1$

(2) $g(f(x)) = g(x^2) = (x^2)^3 + 1 = x^6 + 1$

(3) $f(g(x)) \neq g(f(x))$

2. กำหนดให้ $f : R \longrightarrow R$, $g : R \longrightarrow R$ และ

$f(x) = 2x - 3$, $g(x) = x^2 + 5$ จงหา

(1) gof $= (gof)(x) = g(f(x))$

$= g(2x - 3) = (2x - 3)^2 + 5 = 4x^2 - 12x + 14$

(2) fog $= (fog)(x) = f(g(x))$

$= f(x^2 + 5) = 2(x^2 + 5) - 3 = 2x^2 + 7$

(3) $(fof)(x) = f(f(x)) = f(2x - 3) = 2(2x - 3) - 3$

$= 4x - 9$

(4) $(gog)(x) = g(g(x)) = g(x^2 + 5)$

$= (x^2 + 5)^2 + 5 = x^4 + 10x + 30$

(5) $(gof)(2) = g(f(2)) = g(2(2) - 3)$

$= g(1) = 1^2 + 5 = 6$

(6) $(fof)(3) = f(f(3)) = f(2(3) - 3)$

$= f(3) = 2(3) - 3 = 3$

(7) $(fog)(x + 1) = f(g(x + 1)) = f((x + 1)^2 + 5)$

$= f(x^2 + 2x + 6) = 2(x^2 + 2x + 6) - 3$

$= 2x^2 + 4x + 9$

ข้อสังเกต 1) gof $\neq$ fog 2) $(fof)(x) \neq [f(x)]^2$

3. ถ้า $f(x) = x^2 - 2|x|$, $g(x) = x^2 + 1$ ให้หา

(1) $(gof)(3) = g(f(3)) = g(3^2 - 2\ |3|)$

$= g(3) = (3)^2 + 1 = 10$

(2) $(fog)(-2) = f(g(-2)) = f((-2)^2 + 1)$

$= f(5) = 5^2 - 2\ |5| = 15$

(3) $(gof(-4) = g(f(-4) = g((-4)^2 - 2\ |-4|)$

$= g(8) = 8^2 + 1 = 65$

(4) $(fog)(5) = f(g(5)) = f(5^2 + 1\ )$

$= f(26) = 26^2 - 2|26| = 624$

4. ถ้า $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2$ ให้หาค่าของ x ที่ทำให้ $f(g(x))$ $= g(f(x))$

$\because\ f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1$

และ $g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2$

จาก $f(g(x)) = g(f(x))$

$\therefore\ 2x^2 + 1 = (2x + 1)^2$, $2x^2 + 4x = 0$; $x = 0, -2$

นั่นคือ $f(g(x)) = g(f(x))$ ถ้า $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2$

ก็ต่อเมื่อ $x = 0, -2$

5. ให้ $f(x) = x - 3$, $g(x) = x^2$, $h(x) = 2x + 1$ ให้คำนวณหา

(1) $(fog)oh$

จาก $((fog)oh)(x) = ((fog)(h(x)))$

$= f(g(h(x)))$

$\therefore\ ((fog)oh)(x) = f(g(2x + 1))$

$= f((2x + 1)^2)$

$= f(4x^2 + 4x + 1)$

$= (4x^2 + 4x + 1) - 3$

$= 4x^2 + 4x - 2$

(2) fo(goh)

จาก $(fo(goh))(x) = f((goh)(x))$

$= f(g(h(x)))$

$\therefore (fo(goh))(x) = 4x^2 + 4x - 2$

ข้อสังเกต จากข้อ (1) และ (2)

แสดงว่า $(fog)oh = fo(goh)$

บัตรทดสอบหรือบัตรปัญหา

เรื่อง 3. ฟังก์ชันคอมโพสิท (Composite Function)

3.2 การหาฟังก์ชันคอมโพสิท

<u>คำสั่ง</u> จงทำเครื่องหมายกากบาท (X) ลงในวงเล็บตรงกับข้อ ก หรือ ข หรือ ค หรือ ง ในกระดาษคำตอบซึ่งท่านเห็นว่าถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

---

1. ให้ $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x + 1$ ข้อใดถูกต้อง

ก. $g(f(x)) = x^2 + 1$

ข. $g(f(x)) = x^2 + 2$

ค. $f(g(x)) = x^2 + 2x - 2$

ง. $f(g(x)) = x^2 + x + 2$

2. ให้ $f(x) = 2x^2 - 1$ $g(x) = x + 1$ ค่าของ $(f \circ g)(2)$ คือข้อใด

ก. 11

ข. 13

ค. 15

ง. 17

3. ข้อใดไม่ถูกต้อง

ก. $g \circ f$ หาได้เมื่อ $R_f \subset D_g$

ข. $D_{g \circ f} = D_f$

ค. $R_{g \circ f} = R_f$

ง. $h \circ (g \circ f)$ หาได้เมื่อ $R_{g \circ f} \subset D_h$

4. ให้ $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = 2x - 1$ ค่าของ $(g \circ f)(x)$ คือข้อใด

ก. $2x^2 - 4x + 2$

ข. $2x^2 - 4x + 1$

ค. $2x^2 - 4x - 1$

ง. $2x^2 - 2x + 1$

5. ให้ $f(x) = 5x$, $g(x) = 4x - 1$ ค่าของ $(f \circ g)(0)$ คือข้อใด

ก. -5

ข. 15

ค. 20

ง. 25

6. ให้ $f(x) = 3x$, $g(x) = x^2 + 1$ และ

$h(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ 2x - 3 & \text{เมื่อ } x > 0 \end{cases}$ ค่าของ

$(f \circ (h \circ g))(1)$ คือข้อใด

ก. 3

ข. 6

ค. 10

ง. 17

7. ให้ $f(x) = 4x, g(x) = x^2 - 1$ และ $h(x) = 2x - 1$ ค่าของ $f \circ (g \circ h)(x)$ คือข้อใด

ก. $x^2 - 1$

ข. $x^2 - x$

ค. $4x^2 - 4x$

ง. $16x^2 - 16x$

๘. ให้ $f(x) = 2x + 1$ และ $g(x) = x + 3$ ข้อใดถูกต้อง

ก. $(f \circ f)(x) = 4x + 1$

ข. $(f \circ f)(x) = 4x + 2$

ค. $(g \circ g)(x) = x + 6$

ง. $(g \circ g)(x) = 2x + 6$

๙. ให้ $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 2x - 1$ ค่าของ $(g \circ f)(2)$ คือข้อใด

ก. 3

ข. 5

ค. 9

ง. 11

10. ให้ $f(x) = x + 2$ และ $g(x) = \sqrt{x}$ ข้อใดถูกต้อง

ก. $g \circ f$ หาไม่ได้เพราะ $R_f \not\subset D_g$

ข. $f \circ g$ หาไม่ได้เพราะ $R_g \not\subset D_f$

ค. $f \circ f$ หาไม่ได้เพราะ $R_f \not\subset D_f$

ง. $g \circ g$ หาไม่ได้เพราะ $R_g \not\subset D_g$

เฉลยข้อทดสอบ

1. ข
2. ง
3. ค
4. ข
5. ก
6. ก
7. ง
8. ค
9. ค
10. ก

ชุดการเรียนการสอนที่ 13

เรื่อง

ความหมายของฟังก์ชันอินเวอร์ส

บัตรคำสั่ง

ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. ทำบัตรกิจกรรม
2. ศึกษาจากบัตรเนื้อหาอีกครั้งหนึ่งถ้าไม่เข้าใจ หลังจากที่ทำบัตรกิจกรรมแล้ว
3. ทำบัตรแบบฝึกหัด หรือบัตรงานพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
4. ทำบัตรทดสอบหรือบัตรปัญหาพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย

บัตรเนื้อหา

เรื่อง 4. ฟังก์ชันอินเวอร์ส

4.1 ความหมายของฟังก์ชันอินเวอร์ส

4.1 ความหมายของฟังก์ชันอินเวอร์ส

เนื่องจากฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ ดังนั้นอินเวอร์สของฟังก์ชันจึงมีคุณสมบัติเช่นเดียวกันกับอินเวอร์สของความสัมพันธ์ แต่มีข้อที่น่าสังเกตคืออินเวอร์สของฟังก์ชันไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชันเสมอไป เช่น

1)	$f = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$	เป็นฟังก์ชัน
	$f^{-1} = \{(2,1),(3,2),(4,3)\}$	เป็นฟังก์ชัน
2)	$h = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$	เป็นฟังก์ชัน
	$h^{-1} = \{(a,1),(b,2),(c,3)\}$	เป็นฟังก์ชัน
3)	$g = \{(1,2),(2,3),(3,2)\}$	เป็นฟังก์ชัน
	$g^{-1} = \{(2,1),(3,2),(2,3)\}$	ไม่เป็นฟังก์ชัน

ในที่นี้จะเรียก อินเวอร์สของฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันว่า ฟังก์ชันอินเวอร์ส

ฟังก์ชันที่จะมีฟังก์ชันอินเวอร์สได้นั้น ต้องเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

สรุป 1) อินเวอร์สของฟังก์ชัน f ที่เป็นฟังก์ชัน เรียกว่า ฟังก์ชันอินเวอร์ส (inverse function)

2) ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 กำหนดโดย $y = f(x)$ จะสามารถหาฟังก์ชันอินเวอร์สของ f ได้โดยเขียน x อยู่ในเทอมของ y (สลับที่ระหว่าง x กับ y)

จะได้ว่า $x = f^{-1}(y)$ เมื่อ $y \in D_{f^{-1}}$

หรือ $y = f^{-1}(x)$ เมื่อ $x \in D_{f^{-1}}$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> พิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งกำหนดโดย $f(x) = 3x + 1$ เขียน f ให้อยู่ในรูปเซตจะได้

$$f = \{(x,y) \mid y = 3x + 1\}$$

$$\therefore f^{-1} = \{(x,y) \mid x = 3y + 1\} \quad \text{(สลับตำแหน่ง x กับ y)}$$

$$= \{(x,y) \mid x - 1 = 3y\}$$

$$= \left\{(x,y) \mid y = \frac{x-1}{3}\right\}$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้น f^{-1} จึงเป็นฟังก์ชัน f^{-1} เขียนโดยบอกเงื่อนไขจะได้ $y = \frac{x-1}{3}$

หรือ $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> กำหนดให้ $f(x) = x^2$ จงหา f^{-1} และพิจารณาว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะเหตุใด

<u>วิธีทำ</u> เขียนฟังก์ชัน f ในรูปเซตจะได้

$$f = \{(x,y) \mid y = x^2\}$$

$$\therefore f^{-1} = \{(x,y) \mid x = y^2\} \quad \text{(สลับตำแหน่ง x กับ y)}$$

$$= \{(x,y) \mid y = \pm\sqrt{x}\}$$

จะเห็นว่า f^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมี $(1, -1) \in f^{-1}$ และ $(1,1) \in f^{-1}$

<u>ข้อสังเกต</u> 1. ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้ว f^{-1} จะเป็นฟังก์ชัน 1-1 ด้วย

2. ถ้า f ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้ว f^{-1} จะไม่เป็นฟังก์ชัน

<u>หมายเหตุ</u>

การหาอินเวอร์สของฟังก์ชัน f กระทำได้ 2 แบบ คือ

1) สลับที่ระหว่าง x กับ y ที่คู่อันดับ

2) สลับที่ระหว่าง x กับ y ที่เงื่อนไข

3) ถ้าสลับที่ระหว่าง x กับ y ทั้งที่คู่อันดับและเงื่อนไขด้วย (ฟังก์ชัน f จะเหมือนเดิม)

บัตรกิจกรรม

เรื่อง 4. ฟังก์ชันอินเวอร์ส

4.1 ความหมายของฟังก์ชันอินเวอร์ส

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

1. หาอินเวอร์สของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
2. บอกความหมายของฟังก์ชันอินเวอร์สได้อย่างถูกต้อง
3. เขียนสัญลักษณ์แทนฟังก์ชันอินเวอร์สได้อย่างถูกต้อง
4. เขียนฟังก์ชันอินเวอร์สจากโจทย์ที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง
5. บอกโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันอินเวอร์สได้อย่างถูกต้อง

กิจกรรม

ให้นักเรียนพิจารณาข้อความข้างล่างนี้

4.1 **ความหมายของฟังก์ชันอินเวอร์ส**

จากที่ได้เคยกล่าวมาแล้วว่า ถ้ากำหนดความสัมพันธ์ใด ๆ ให้จะสามารถหาอินเวอร์สของความสัมพันธ์ได้เสมอ โดยการสลับตำแหน่งระหว่างสมาชิกตัวหน้า และสมาชิกตัวหลังของแต่ละคู่อันดับในความสัมพันธ์นั้น และอินเวอร์สของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย r^{-1}

เขียน r^{-1} ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขได้ ดังนี้

$$r^{-1} = \{(y,x) \ / \ (x,y) \in r\}$$

ตัวอย่าง 1) ถ้า $r = \{(1,a), (2,c)\}$

จะได้ $r^{-1} = \{(a,1), (c, 2)\}$

2) ถ้า $r = \{(x,y) \ / \ y = 3x + 1\}$

จะได้ $r^{-1} = \{(y,x) \ / \ y = 3x + 1\}$

เนื่องจากฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ ดังนั้นอินเวอร์สของฟังก์ชันจึงมีคุณสมบัติเช่นเดียวกันกับอินเวอร์สของความสัมพันธ์ ดังตาราง

ฟังก์ชัน	อินเวอร์สของฟังก์ชัน	อินเวอร์สของฟังก์ชัน		เหตุผล
		เป็นฟังก์ชัน	ไม่เป็นฟังก์ชัน	
$f = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$	$f^{-1} = \{(2,1),(3,2),(4,3)\}$	✓	-	สมาชิกตัวหน้าของ f^{-1} ต่างกัน
$g = \{(1,2),(2,3),(3,2)\}$	$g^{-1} = \{(2,1),(3,2),(2,3)\}$	-	✓	สมาชิกตัวหน้าของ g^{-1} เหมือนกันคือ (2,1),(2,3) แต่ $1 \neq 3$
$h = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$	$h^{-1} =$ ______	____	____	______
$k = \{(1,a),(2,b),(3,a)\}$	$k^{-1} =$ ______	____	____	______

จากตารางจะสังเกตได้ว่า

อินเวอร์สของฟังก์ชันจะเป็นฟังก์ชันเสมอหรือไม่ ______________

จงพิจารณาตารางข้างล่างนี้ ถ้าเรียกอินเวอร์สของฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันว่า "ฟังก์ชันอินเวอร์ส" ★

ฟังก์ชัน	f : 1-1		อินเวอร์สของ	ฟังก์ชันอินเวอร์ส		ฟังก์ชันอินเวอร์ส	
	เป็น	ไม่เป็น	ฟังก์ชัน	เป็น	ไม่เป็น	เป็นฟังก์ชัน 1-1	ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1
$f = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$	✓	-	$f^{-1} = \{(2,1),(3,2),(4,3)\}$	✓	-	✓	-
$g = \{(1,2),(2,3),(3,2)\}$	-	✓	$g^{-1} = \{(2,1),(3,2),(2,3)\}$	-	✓	-	✓
$h = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$	____	____	$h^{-1} =$ ____ ____	____	____	____	____
$k = \{(1,a),(2,b),(3,a)\}$	____	____	$k^{-1} =$ ____ ____	____	____	____	____

จากตารางจะมีข้อสังเกต คือ

1. ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้ว f^{-1} เป็นฟังก์ชันอินเวอร์ส และ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน 1-1
2. ถ้า f ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้ว f^{-1} ________ ฟังก์ชันอินเวอร์ส และ f^{-1} ________ ฟังก์ชัน 1-1
   (เป็น/ไม่เป็น)
3. โดเมนของ f^{-1} เท่ากับเรนจ์ของ __

จงเติมข้อความลงในตาราง

ฟังก์ชัน	ฟังก์ชันอินเวอร์ส		เหตุผล	ฟังก์ชันอินเวอร์ส
	มี	ไม่มี		
$f_1=\{(x,y),(m,n),(p,q)\}$	✓	___	f_1 เป็นฟังก์ชัน 1-1	$f_1^{-1}=\{(y,x),(n,m),(q,p)\}$
$f_2=\{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)\}$	___	___	________	________
$f_3=\{(1,2),(3,2),(4,5)\}$	___	___	________	________

สำหรับฟังก์ชันที่เขียนในรูปแบบบอกเงื่อนไขนั้นการหาฟังก์ชันอินเวอร์สก็ใช้หลักการเดียวกับการหาฟังก์ชันอินเวอร์สของฟังก์ชันแบบแจกแจงสมาชิก คือโดยการสลับตำแหน่งระหว่างสมาชิกตัวหน้ากับตัวหลังซึ่งทำได้ 2 ลักษณะ คือ

1) สลับที่ x กับ y ที่ (x,y) ของเงื่อนไข

$$f_1 = \{(x,y) \;/\; y = 3x + 1\}$$

จะได้ $f_1^{-1} = \{(y,x) \;/\; y = 3x + 1\}$

2) สลับที่ x กับ y ที่เงื่อนไข

$$f_1 = \{(x,y) \;/\; y = 3x + 1\}$$

$$f_1^{-1} = \{(x,y) \;/\; x = 3y + 1\}$$

<u>หมายเหตุ</u>

แต่ถ้าทำทั้งลักษณะที่ 1 และ 2 พร้อมกันฟังก์ชันจะไม่เปลี่ยนแปลง

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> พิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งกำหนดโดย $f(x) = 3x + 1$ เขียน f ให้อยู่ในรูปเซตจะได้

$$f = \{(x,y) \,/\, y = 3x + 1\}$$

$$\therefore f^{-1} = \{(x,y) \,/\, x = 3y + 1\} \quad \text{(สลับตำแหน่ง x กับ y)}$$

$$= \{(x,y) \,/\, x - 1 = 3y\} \quad \text{(เอา 1 ลบออกทั้งสองข้าง)}$$

$$= \{(x,y) \,/\, y = \frac{x-1}{3}\} \quad \text{(เอา 3 หารทั้งสองข้าง)}$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้น f^{-1} จึงเป็นฟังก์ชัน

f^{-1} เขียนโดยบอกเงื่อนไขจะได้ $y = \frac{x-1}{3}$

หรือ $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> กำหนดให้ $f(x) = x^2$ จงหา f^{-1} และพิจารณาว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะเหตุใด

<u>วิธีทำ</u> เขียนฟังก์ชัน f ในรูปเซตจะได้

$$f = \{(x,y) \,/\, y = x^2\}$$

$$\therefore f^{-1} = \{(x,y) \,/\, x = y^2\} \quad \text{(สลับตำแหน่ง x กับ y)}$$

$$= \{(x,y) \,/\, y = \pm\sqrt{x}\}$$

จะเห็นว่า f^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะมี $(1, -1) \in f^{-1}$ และ $(1, 1) \in f^{-1}$

<u>สรุป</u> 1) อินเวอร์สของฟังก์ชัน f ที่เป็นฟังก์ชัน เรียกว่า <u>ฟังก์ชันอินเวอร์ส</u> (inverse function)

2) ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 กำหนดโดย $y = f(x)$ จะสามารถหาฟังก์ชันอินเวอร์สของ f ได้โดยเขียน x อยู่ในเทอมของ y (สลับที่ระหว่าง x กับ y)

จะได้ว่า $x = f^{-1}(y)$ เมื่อ $y \in D_{f^{-1}}$

หรือ $y = f^{-1}(x)$ เมื่อ $x \in D_{f^{-1}}$

จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ในตารางจงตรวจสอบว่า ฟังก์ชัน f มีฟังก์ชันอินเวอร์สหรือไม่ ถ้ามี จงหาฟังก์ชันอินเวอร์ส

ฟังก์ชัน	ฟังก์ชันอินเวอร์ส		ฟังก์ชันอินเวอร์ส
	มี	ไม่มี	
1. $f(x) = 2^x$			
2. $g(x) = x^2 + 2$			
3. $h(x) = 3x - 2$			

บัตรแบบฝึกหัดหรือบัตรงาน

เรื่อง 4. ฟังก์ชันอินเวอร์ส

4.1 ความหมายของฟังก์ชันอินเวอร์ส

แบบฝึกหัด

1) กำหนดให้ $f = \{(a,1), (b,3), (c,5)\}$ จงหา f^{-1} พร้อมทั้งโดเมนและเรนจ์ของ f^{-1}

2) กำหนดให้ $f = \{(a,1), (a,2), (b,3), (c,4)\}$ จงหา f^{-1} พร้อมทั้งพิจารณาว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะเหตุใด

3) ให้ $f = \{(1,2),(3,4), (5,6), (7,8), (9,10)\}$ จงหา $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(6)$ และ $f^{-1}(10)$

4) กำหนดให้ $f = \{(2,1), (3,2), (4,3)\}$ จงหา $(fof^{-1})(2)$, $(fof^{-1})(3)$ $(f^{-1}of)(3)$

5) กำหนดให้ $f(x) = 3x + 1$ จงหา f^{-1} และพิจารณาว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะเหตุใด และหา $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(1)$ และ $f^{-1}(7)$

6) กำหนดให้ $f = \{(x,y) / y = \sqrt{x}\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ f^{-1}

<u>เฉลยแบบฝึกหัด</u>

1) $\because$ $f = \{(a,1),\ (b,3),\ (c,5)\}$

$\therefore$ $f^{-1} = \{(1,a),\ (3,b),\ (5,c)\}$

$D_{f^{-1}} = \{1,3,5\}$ และ $R_{f^{-1}} = \{a,b,c\}$

2) $\because$ $f = \{(a,1),\ (a,2),\ (b,3),\ (c,4)\}$

$\therefore$ $f^{-1} = \{(1,a),\ (2,a),\ (3,b),\ (4,c)\}$

แสดงว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชัน เพราะไม่มีสมาชิกตัวหน้า (โดเมน) ของคู่อันดับซ้ำกันเลย

3) $\because$ $f = \{(1,2),\ (3,4),\ (5,6),\ (7,8),\ (9,10)\}$

$\therefore$ $f^{-1} = \{(2,1),\ (4,3),\ (6,5),\ (8,7),\ (10,9)\}$

แสดงว่า $f^{-1}(2) = 1$, $f^{-1}(6) = 5$ และ $f^{-1}(10) = 9$

4) $\because$ $f = \{(2,1),\ (3,2),\ (4,3)\}$

$\therefore$ $f^{-1} = \{(1,2),\ (2,3),\ (3,4)\}$

ย่อมได้ $(f \circ f^{-1})(2) = f(f^{-1}(2)) = f(3) = 2$

$(f \circ f^{-1})(3) = f(f^{-1}(3)) = f(4) = 3$

และ $(f^{-1} \circ f)(3) = f^{-1}(f(3)) = f^{-1}(2) = 3$

5) $\because$ $f(x) = 3x + 1$

$f = \{(x,y) \ / \ y = 3x + 1\}$

$f^{-1} = \{(x,y) \ / \ x = 3y + 1\}$

$= \{(x,y) \ / \ y = \frac{x-1}{3}\}$

$\therefore$ $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$

$\therefore$ $f^{-1}(2) = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ $f^{-1}(1) = \frac{1-1}{3} = 0$

$\therefore$ $f^{-1}(7) = \frac{7-1}{3} = \frac{6}{3} = 2$

6) $\because\ f = \{(x,y) \ / \ y = \sqrt{x}\}$

$\therefore\ f^{-1} = \{(x,y) \ / \ x = \sqrt{y},\ x \geq 0\}$

$= \{(x,y) \ / \ y = x^2 \ ;\ x \geq 0\}$

ดังนั้น $D_{f^{-1}} = \{x \ / \ x \in R$ และ $x \geq 0\}$

$R_{f^{-1}} = \{y \ / \ y \geq 0\}$

บัตรทดสอบหรือบัตรปัญหา

เรื่อง 4. ฟังก์ชันอินเวอร์ส

4.1 ความหมายของฟังก์ชันอินเวอร์ส

<u>คำสั่ง</u> จงทำเครื่องหมายกากบาท (X) ลงในวงเล็บตรงกับข้อ ก หรือ ข หรือ ค หรือ ง ในกระดาษคำตอบซึ่งท่านเห็นว่าถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

---

1. ให้ $f = \{(a,1),(b,2),(c,3),(d,4)\}$ อินเวอร์สของฟังก์ชัน f คือข้อใด

   ก. $\{(a,1),(b,2),(c,3),(d,4)\}$

   ข. $\{(a,1),(b,\frac{1}{2}),(c,\frac{1}{3}),(d,\frac{1}{4})\}$

   ค. $\{(1,a),(2,b),(3,c),(4,d)\}$

   ง. $\{(a,1),(b,2),(3,c)\}$

2. ข้อใดไม่ถูกต้อง

   ก. อินเวอร์สของฟังก์ชันทุกฟังก์ชันเป็นฟังก์ชัน

   ข. f เป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้ว f เป็นฟังก์ชันอินเวอร์ส

   ค. f ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 แล้ว f ไม่เป็นฟังก์ชันอินเวอร์ส

   ง. โดเมนของ f^{-1} เท่ากับเรนจ์ของ f

3. ให้ $f = \{(1,3),(2,6),(3,7),(4,10),(5,15)\}$ ข้อใดไม่ถูกต้อง

   ก. $f^{-1}(3) = 1$

   ข. $f^{-1}(6) = 2$

   ค. $f^{-1}(7) = 10$

   ง. $f^{-1}(15) = 5$

4. ฟังก์ชันในข้อใดไม่มีฟังก์ชันอินเวอร์ส

   ก. $\{(1,0),(3,1),(4,5)\}$

   ข. $\{(a,b),(b,c),(c,d)\}$

   ค. $\{(1,2),(2,1),(3,1)\}$

   ง. $\{(p,x),(Q,y),(R,z),(s,u)\}$

5. ให้ $f(x) = 2x - 1$ ฟังก์ชันอินเวอร์สของ $f(x)$ คือข้อใด

   ก. $f^{-1}(x) = 2x - 1$

   ข. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 1$

   ค. $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

   ง. $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$

6. ฟังก์ชันข้อใดมีฟังก์ชันอินเวอร์ส

   ก. $\{(x,y) \,/\, y = |x|\}$

   ข. $\{(x,y) \,/\, y = \sqrt{x}\}$

   ค. $\{(x,y) \,/\, y = x^2\}$

   ง. $\left\{(x,y) \,/\, y = \begin{cases} 1 ; & x \geq 0 \\ x ; & x < 0 \end{cases}\right\}$

7. ให้ $f(x) = 5x + 3$ ข้อใดไม่ถูกต้อง

   ก. $f^{-1}(2) = \frac{-1}{5}$

   ข. $f^{-1}(1) = \frac{2}{5}$

   ค. $f^{-1}(-1) = \frac{-4}{5}$

   ง. $f^{-1}(0) = \frac{-3}{5}$

8. ให้ $f = \{(x,y)/y = 2x - 6\}$ โดเมนของ f^{-1} คือข้อใด

ก. $\{x \,/\, x \neq -6\}$

ข. $\{x \,/\, x > -6\}$

ค. $\{x \,/\, x \in R\}$

ง. $\{x \,/\, x \geqslant 0\}$

9. ให้ $f(x) = 3 - 2x$, $g(x) = 6x + 5$ ข้อใดไม่ถูกต้อง

ก. $f^{-1} = \dfrac{3 - x}{2}$

ข. $g^{-1} = \dfrac{x - 5}{6}$

ค. $(f \circ g)^{-1}(x) = \dfrac{-x-7}{12}$

ง. $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \dfrac{x - 7}{12}$

10. ให้ $f = \{(2,0),(1,3),(4,2),(3,4)\}$ ค่าของ $f \circ f^{-1}$ คือข้อใด

ก. $\{(0,0),(3,3),(2,2),(4,4)\}$

ข. $\{(2,2),(1,1),(4,4),(3,3)\}$

ค. $\{(2,0),(1,3),(4,2),(3,4)\}$

ง. $\{(0,2),(3,1),(2,4),(4,3)\}$

เฉลยข้อทดสอบ

1. ค
2. ก
3. ค
4. ค
5. ง
6. ข
7. ข
8. ค
9. ง
10. ก

ชุดการเรียนการสอนที่ 14

เรื่อง

กราฟของฟังก์ชันอินเวอร์ส

บัตรคำสั่ง

ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. ทำบัตรกิจกรรม
2. ศึกษาจากบัตรเนื้อหาอีกครั้งหนึ่งถ้าไม่เข้าใจ หลังจากที่ทำบัตรกิจกรรมแล้ว
3. ทำบัตรแบบฝึกหัด หรือบัตรงานพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
4. ทำบัตรทดสอบหรือบัตรปัญหาพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย

บัตรเนื้อหา

เรื่อง 4. ฟังก์ชันอินเวอร์ส

4.2 กราฟของฟังก์ชันอินเวอร์ส

4.2 กราฟของฟังก์ชันอินเวอร์ส

ฟังก์ชันอินเวอร์สของฟังก์ชัน $y = x$ คือฟังก์ชัน $x = y$ ซึ่งจะเห็นได้ว่าเป็นฟังก์ชันเดิม ดังนั้นถ้าพิจารณาในแง่ของฟังก์ชันอินเวอร์สฟังก์ชันนี้จึงมีคุณสมบัติพิเศษ ฟังก์ชันอินเวอร์สของฟังก์ชันนี้คือ ตัวของมันเอง และพบว่ากราฟของฟังก์ชันใดก็ตามกับอินเวอร์สของฟังก์ชันนั้นไม่ว่าจะเป็นฟังก์ชันหรือไม่ จะมีเส้นตรง $y = x$ เป็นแกนสมมาตร

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = 2x + 1\}$

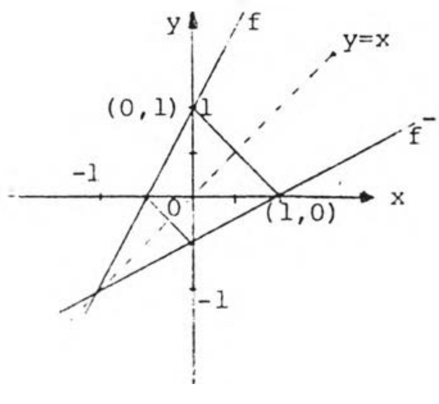
จงหา f^{-1} แล้วเขียนกราฟของ f และ f^{-1}

วิธีทำ จาก $f = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = 2x + 1\}$

ดังนั้น $f^{-1} = \{(x,y) \in R \times R \ / \ x = 2y + 1\}$

$= \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = \frac{x-1}{2}\}$

กราฟของ f และ f^{-1} คือ



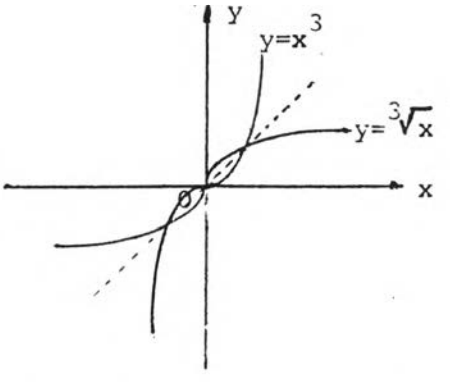
จากกราฟจะเห็นว่าเมื่อลากเส้นจากจุด (a,b) ของ f ไปยัง (b,a) ของ f^{-1} เช่น $(0,1)$ ของ f ไปยัง $(1,0)$ ของ f^{-1} เส้นเหล่านี้จะตั้งฉากกับเส้นตรง $y = x$ และจะแสดงได้ว่าจุด (a,b) และ (b,a) อยู่ห่างจากเส้นตรง $y = x$ เป็นระยะทางเท่ากัน เรียก (a,b) และ (b,a) ว่าเป็นจุดสมมาตร โดยมีเส้น $y = x$ เป็นแกนสมมาตร กล่าวคือ ถ้าพับรูปนี้ตามแนว $y = x$ แล้วกราฟของฟังก์ชันทั้งสองจะทับกันพอดี

<u>**ตัวอย่างที่ 2**</u> กำหนดให้ $f = \{(x,y) \ / \ y = x^3\}$ จงหา f^{-1} แล้วเขียนกราฟของ f และ f^{-1}

<u>**วิธีทำ**</u> จาก $f = \{(x,y) \ / \ y = x^3\}$

ดังนั้น $f^{-1} = \{(x,y) \ / \ x = y^3\}$

$= \{(x,y) \ / \ y = \sqrt[3]{x}\}$



(กราฟของ f และ f^{-1} มีเส้นตรง $y = x$ เป็นแกนสมมาตร)

บัตรกิจกรรม

เรื่อง 4. ฟังก์ชันอินเวอร์ส

4.2 กราฟของฟังก์ชันอินเวอร์ส

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

1. บอกแกนสมมาตรของกราฟของฟังก์ชันและฟังก์ชันอินเวอร์สได้อย่างถูกต้อง

2. เขียนกราฟของฟังก์ชันอินเวอร์สได้อย่างถูกต้อง

กิจกรรม

ให้นักเรียนพิจารณาข้อความข้างล่างนี้

กราฟของฟังก์ชันอินเวอร์ส

จากที่กล่าวข้างต้นว่า ฟังก์ชันอินเวอร์ส คืออินเวอร์สของฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชัน ซึ่งหาได้โดยการสลับตำแหน่งสมาชิกตัวหน้ากับสมาชิกตัวหลังของฟังก์ชัน ดังนั้นสิ่งที่น่าสนใจก็คือ ความสัมพันธ์ระหว่างกราฟของ f และกราฟของ f^{-1} แต่สิ่งที่เราจะต้องคำนึงถึงในการเขียนกราฟของ f^{-1} ก็คือ f จะต้องเป็นฟังก์ชัน 1-1 จึงจะได้ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = x\}$

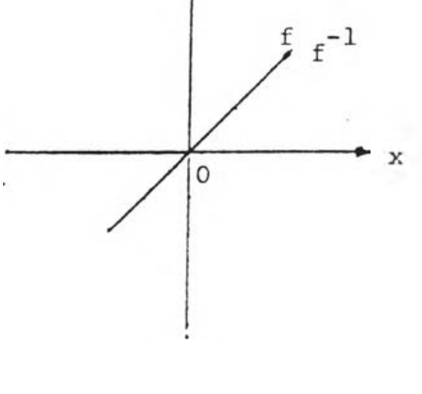
จงหา f^{-1} และเขียนกราฟของ f และ f^{-1}

วิธีทำ จาก $f = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = x\}$

$\therefore f^{-1} = \{(x,y) \in R \times R \ / \ x = y\}$ (สลับตำแหน่ง x กับ y)

จะเห็นว่า f $\underset{\text{เท่ากับ/ไม่เท่ากับ}}{\underline{\hspace{4cm}}}$ f^{-1}

ดังนั้นฟังก์ชันอินเวอร์สของฟังก์ชันนี้คือ ตัวของมันเอง



<u>ตัวอย่างที่ 2</u> กำหนดให้ $f = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = 2x + 1\}$

จงหา f^{-1} แล้วเขียนกราฟของ f และ f^{-1}

<u>**วิธีทำ**</u>

1) **จาก** $f = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = 2x + 1\}$

ดังนั้น $f^{-1} = \{(x,y) \in R \times R \ / \ x = 2y + 1\}$

(สลับค่าแหน่งของ x และ y)

$= \{(x,y) \in R \times R / y = \frac{x-1}{2}\}$

$= \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = \frac{1x}{2} - \frac{1}{2}\}$

2) **กราฟของ f** $= \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = 2x + 1\}$

2.1 **ตัดแกน y เมื่อ $x = 0$ จะได้ $y = 1$**

ดังนั้น กราฟ f ตัดแกน y ที่จุด (0,1)

2.2 **ตัดแกน x เมื่อ $y = 0$ จะได้ $0 = 2x + 1$**

จะได้ $x = \frac{-1}{2}$

ดังนั้น กราฟ f ตัดแกน x ที่จุด $(\frac{-1}{2}, 0)$

3) **กราฟของ** $f^{-1} = \{(x,y) \in R \times R \ / \ y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\}$

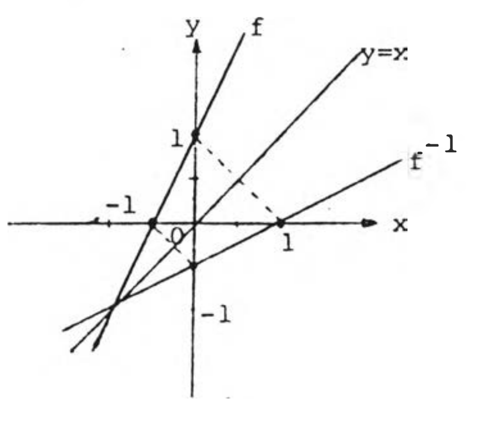
3.1 **ตัดแกน y เมื่อ $x = 0$ จะได้ $y =$ ________________**

ดังนั้นกราฟ f^{-1} ตัดแกน y ที่จุด ________________

3.2 **ตัดแกน x เมื่อ $y = 0$ จะได้** $0 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

จะได้ $x =$ ____________

ดังนั้นกราฟ f^{-1} ตัดแกน x ที่จุด ________________



จากกราฟจะเห็นว่าเมื่อลากเส้นจากจุด (a,b) ของ f ไปยัง (b,a) ของ f^{-1} เช่น $(1,0)$ และ $0,1)$ เส้นเหล่านี้จะตั้งฉากกับเส้นตรง $y = x$ และจะได้จุด $(1,0)$ และ $(0,1)$ อยู่ห่างจากเส้นตรง $y = x$ เท่ากัน

เรียกจุด $(1,0)$ และ $(0,1)$ ว่าจุดสมมาตร โดยมี $y = x$ เป็นแกนสมมาตร

★ (ให้นักเรียนวาดกราฟของ f และ f^{-1} ลงในกระดาษลอกลาย แล้วพับกระดาษตามเส้นตรง $y = x$ สังเกตกราฟ f และ f^{-1}

<u>ข้อสังเกต</u>

1. จุด $(1,0)$ และ $(0,1)$ ทับกันหรือไม่ ______________

2. จุดในรูปที่ (a,b) ของ f ทับกับจุด(b,a) ของ f^{-1} ทุกจุดหรือไม่

____

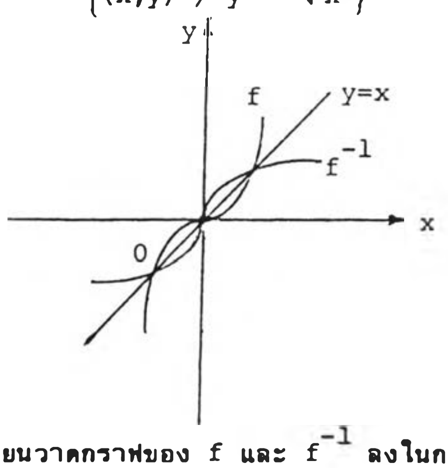
<u>ตัวอย่างที่ 3</u> กำหนดให้ $f = \{(x,y) \mid y = x^3\}$

จงหา f^{-1} แล้วเขียนกราฟของ f และ f^{-1}

<u>วิธีทำ</u> จาก $f = \{(x,y) \mid y = x^3\}$

ดังนั้น $f^{-1} = \{(x,y) \mid x = y^3\}$ (สลับตำแหน่งของ x และ y)

$= \{(x,y) \mid y = \sqrt[3]{x}\}$



(ให้นักเรียนวาดกราฟของ f และ f^{-1} ลงในกระดาษลอกลาย แล้วพับกระดาษตามเส้นตรง $y = x$ สังเกตกราฟ f และ f^{-1})

จากตัวอย่างที่ 1, 2 และ 3 เมื่อพับกระดาษตามเส้นตรง $y = x$ กราฟของ f และ f^{-1} ______________ (ซ้อนกัน/ไม่ซ้อนกัน) ซึ่งหมายความว่า กราฟของฟังก์ชันกับกราฟของฟังก์ชันอินเวอร์สมีแกนสมมาตร คือ ______________

<u>สรุป</u>

กราฟของฟังก์ชัน f และ f^{-1} จะสมมาตรกันโดยเส้นตรง $y = x$

<u>ข้อสังเกต</u>

1. เนื่องจากฟังก์ชัน f จะมีฟังก์ชันอินเวอร์สได้ f จะต้องเป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้นจะต้องตรวจสอบฟังก์ชัน f ว่าเป็นฟังก์ชัน 1-1 หรือไม่เสียก่อน จึงจะหากราฟของฟังก์ชันอินเวอร์ส
2. กราฟของ f^{-1} สามารถหาได้เมื่อวาดกราฟของ f แล้วใช้เส้นตรง $y = x$ เป็นแกนสมมาตร (สะท้อนภาพ)

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> กำหนดให้ $f = \{(x,y) \in R \times R \;/\; y = 3x + 1\}$ จงหา f^{-1} แล้วเขียนกราฟของ f และ f^{-1}

<u>วิธีทำ</u> ____

____

____

____

____

บัตรแบบฝึกหัดหรือบัตรงาน

เรื่อง 4. ฟังก์ชันอินเวอร์ส

4.2 กราฟของฟังก์ชันอินเวอร์ส

แบบฝึกหัด

1. จงเขียนกราฟของ f และ f^{-1} เมื่อกำหนด f ให้ดังต่อไปนี้

1) $f(x) = 2x - 5$

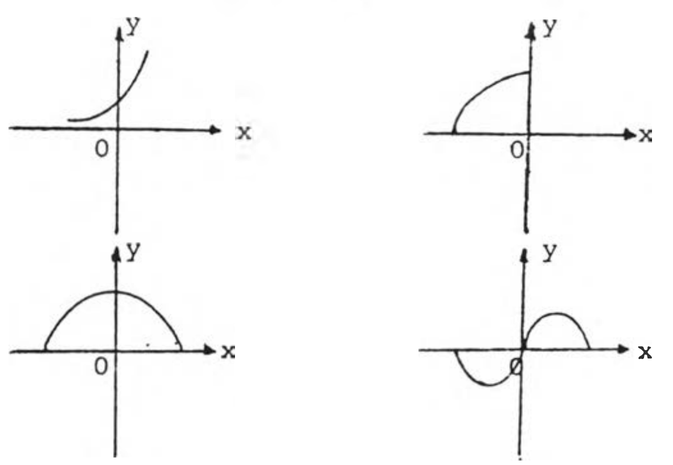
2) $f(x) = 3x + 1$

3) $f(x) = -x$

4) $f(x) = x + k$

5) $f(x) = ax + 1$

2. จงเขียนกราฟของ f^{-1} เมื่อกำหนด f ดังต่อไปนี้



<u>เฉลยแบบฝึกหัด</u>

1. ให้เขียนกราฟของ f และ f^{-1} เมื่อกำหนด f ให้ดังต่อไปนี้

หลักคิด 1. ให้เขียนกราฟของ f ก่อน ถ้าเป็นฟังก์ชันกำลังหนึ่ง เป็นสมการของเส้นตรง ให้หา x-intercept (ระยะตัดแกน x) เมื่อให้ y = 0 ระยะตัดแกน y (y-intercept) เมื่อให้ x = 0 เป็นต้น

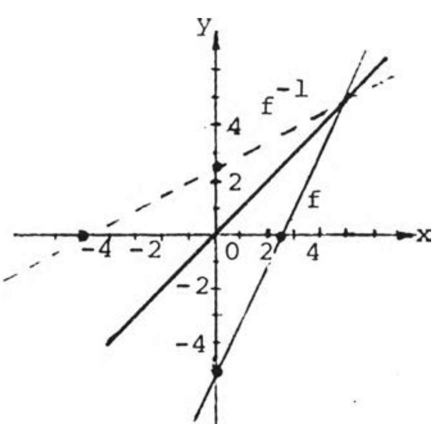
2. ทำแนวหรือลากเส้น Identity function เป็นเส้นตรงเอียงทำมุม 45 องศากับแกน x

3. พับกระดาษตามแนวเส้นตรงในข้อ 2. จะเห็นรอยเส้นกราฟของ f ให้ใช้ดินสอกดหรือเขียนทับตามแนวเส้นกราฟนั้น เส้นกราฟที่ได้จะเป็นกราฟ f^{-1} ตามต้องการ

1) <u>$f(x) = 2x - 5$</u>

$\because$ $y = 2x - 5$ เมื่อ $x = 0$, $y = -5$ และเมื่อ $y = 0$, $x = \frac{5}{2}$

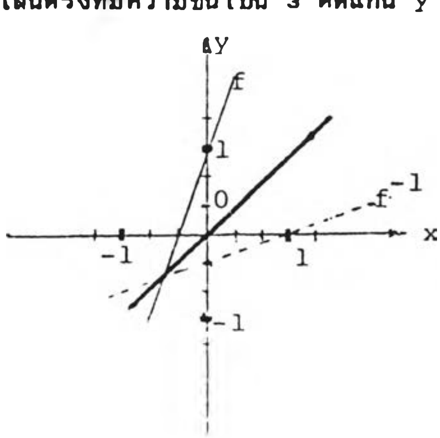
เป็นกราฟเส้นตรงที่มีความชันเป็น 2 ตัดแกน y ที่ระยะ -5



2) <u>$f(x) = 3x + 1$</u>

$\because$ $y = 3x + 1$ เมื่อ $x = 0$, $y = 1$ และเมื่อ $y = 0$, $x = -\frac{1}{3}$

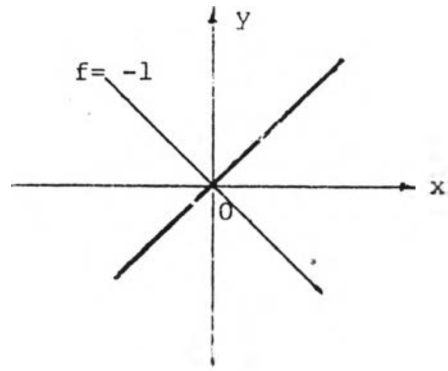
เป็นกราฟเส้นตรงที่มีความชันเป็น 3 ตัดแกน y ที่ระยะ 1 หน่วย



3) <u>f(x) = -x</u>

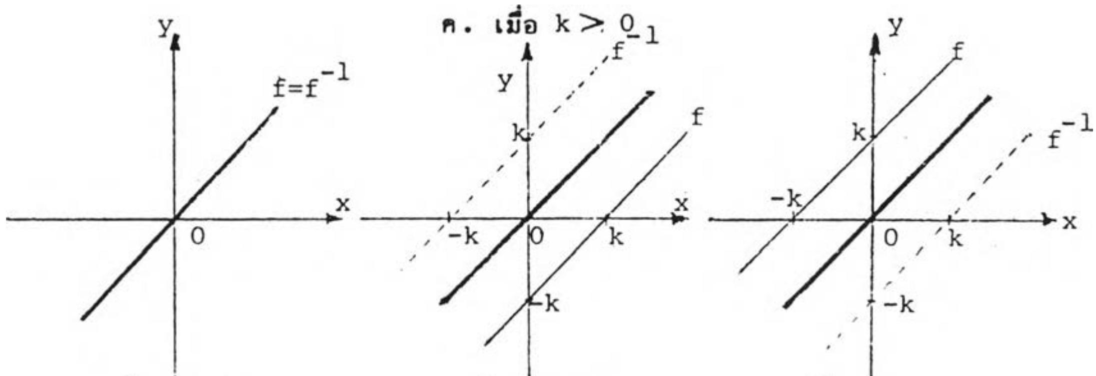
$\because$ y = -x เมื่อ x = 0, y = 0 และเมื่อ y = 0, x = 0

เป็นเส้นตรงเอียงซ้าย เพราะความชันเป็น -1 เอียงทำมุม 135° กับแกน x



4) <u>y = x + k</u> มี 3 กรณี คือ ก. เมื่อ k = 0 ข. เมื่อ k < 0 และ

ค. เมื่อ k > 0



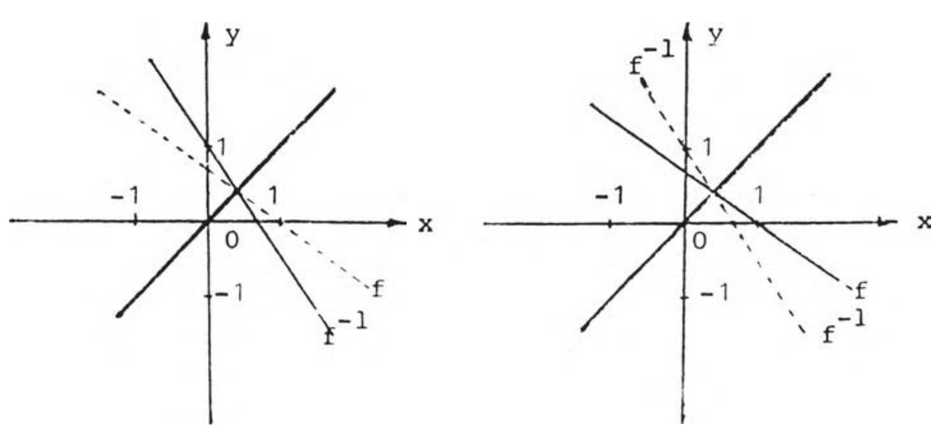
เมื่อ k = 0 เมื่อ k < 0 เมื่อ k > 0

5) <u>y = ax + 1</u> มี 3 กรณี คือ ก. เมื่อ a < 0 ข. เมื่อ a > 0

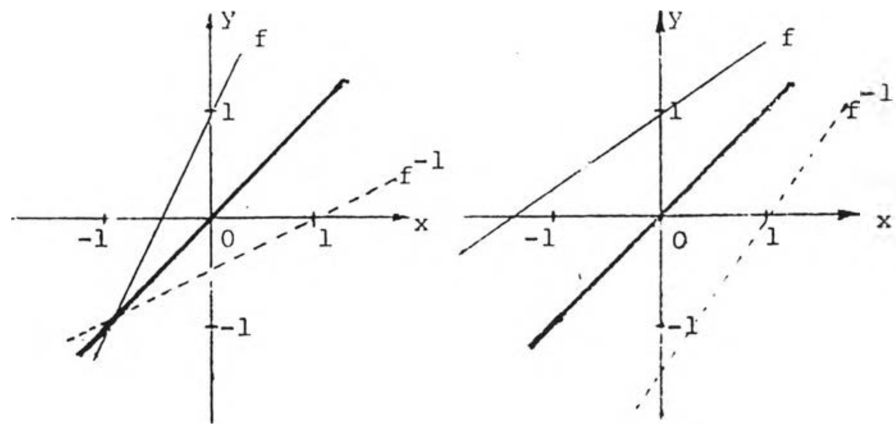
ค. เมื่อ a = 0

ก. <u>เมื่อ a < 0</u> ความชันเป็นลบเอียงซ้าย

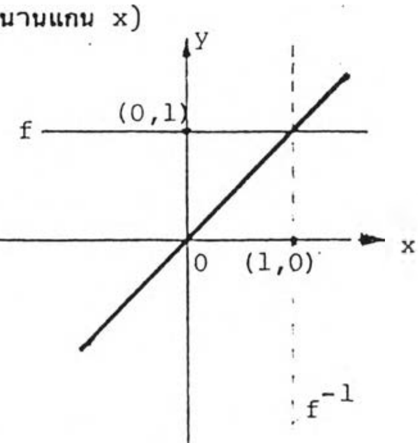
ถ้า x = 0, y = 1 ผ่านจุด (0,1) ความชัน < 0



ข. <u>เมื่อ a > 0</u> ความชันเป็นบวก เอียงขวา ถ้า x = 0, y = 1 ผ่านจุด (0,1) ความชัน > 0



ค. <u>เมื่อ a = 0</u> ความชันขนานแกน x ถ้า x = 0, y = 1 ผ่านจุด (0,1) ความชัน = 0 (ขนานแกน x)

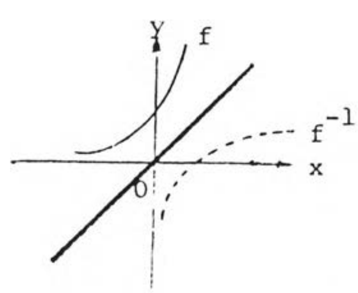


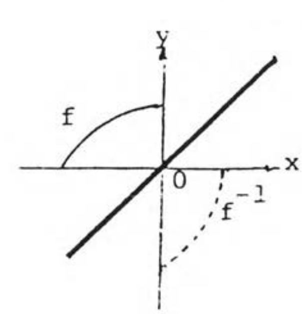
<u>ข้อสังเกต</u> การเขียนกราฟ อินเวอร์ส (f^{-1})

1) เขียนกราฟ Identity function y = x เป็นเส้นตรงเอียงทำมุม 45° กับแกน x

2) ใช้แนวเส้น y = x เป็นแกนสมมาตร พับตามแนวจะได้สมการ f^{-1}

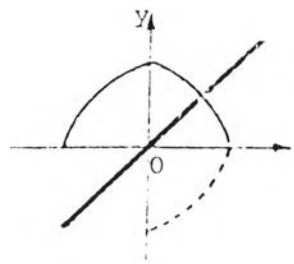
2.

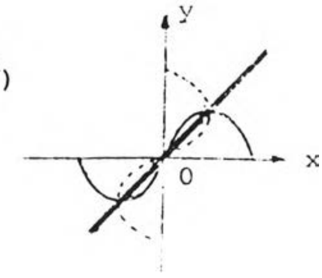




เมื่อ ____ แสดง f

และ ..... แสดง (f^{-1})





บัตรทดสอบหรือบัตรปัญหา

เรื่อง 4. ฟังก์ชันอินเวอร์ส

4.2 กราฟของฟังก์ชันอินเวอร์ส

<u>คำสั่ง</u> จงทำเครื่องหมายกากบาท (X) ลงในวงเล็บตรงกับข้อ ก หรือ ข หรือ ค หรือ ง ในกระดาษคำตอบซึ่งท่านเห็นว่าถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

---

1. ให้ $f(x) = 2x + 1$ ข้อใดถูกต้อง

   ก. $(9,4) \in f^{-1}$

   ข. $(2,5) \in f^{-1}$

   ค. $(1,3) \in f^{-1}$

   ง. $(0,1) \in f^{-1}$

2. กราฟของฟังก์ชัน f และ f^{-1} จะสมมาตรกันโดยเส้นตรงในข้อใด

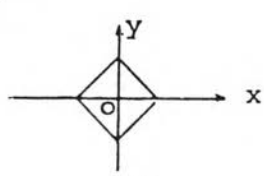
   ก. $y \leqslant x$

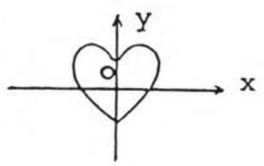
   ข. $y = x$

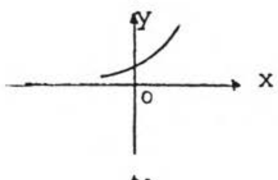
   ค. $y \neq x$

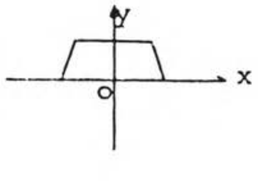
   ง. $y \geqslant x$

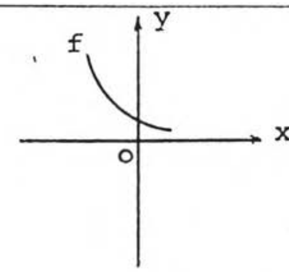
3. อินเวอร์สของความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันตรงกับข้อใด

   ก. 

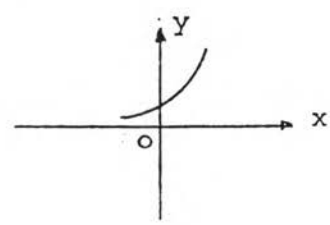
   ข. 

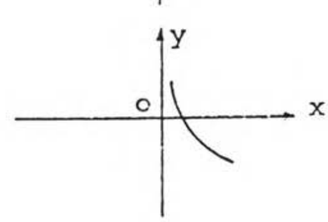
   ค. 

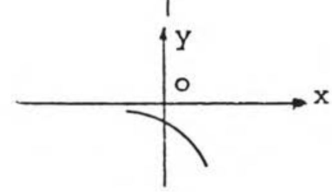
   ง. 

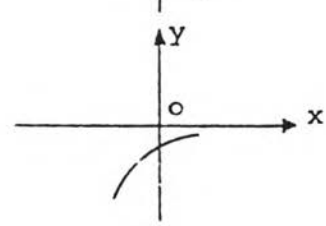
4. 

   จากรูปกราฟของ f^{-1} คือข้อใด

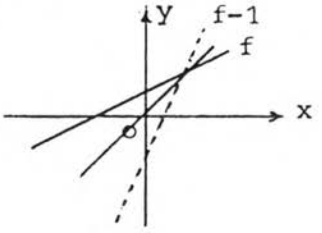
   ก. 

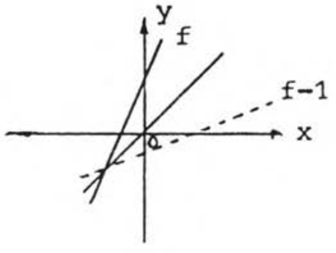
   ข. 

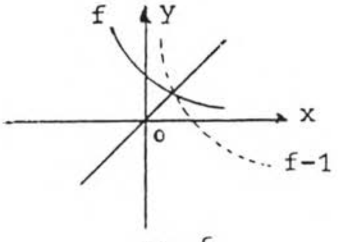
   ค. 

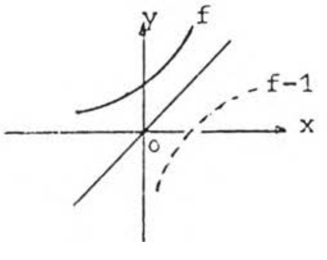
   ง. 

5. ให้ $f(x) = 2^{x}$ กราฟของ f และ f^{-1} ตรงกับข้อใด

ก. 

ข. 

ค. 

ง. 

เฉลยข้อทดสอบ

1. ก

2. ข

3. ค

4. ข

5. ง

ชุดการเรียนการสอนที่ 15

เรื่อง

การบวกพีชคณิตของฟังก์ชัน

บัตรคำสั่ง

ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. **ทำบัตรกิจกรรม**
2. **ศึกษาจากบัตรเนื้อหาอีกครั้งหนึ่งถ้าไม่เข้าใจ หลังจากที่ทำบัตรกิจกรรมแล้ว**
3. **ทำบัตรแบบฝึกหัด หรือบัตรงานพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย**
4. **ทำบัตรทดสอบหรือบัตรปัญหาพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย**

บัตรเนื้อหา

เรื่อง 5. พีชคณิตของฟังก์ชัน

5.1 การบวกพีชคณิตของฟังก์ชัน

นิยาม การบวกพีชคณิตของฟังก์ชัน หมายถึง การนำเอาฟังก์ชันตั้งแต่สองฟังก์ชันขึ้นไปมาบวกกัน โดยค่าของฟังก์ชันใหม่ที่ x ได้จากการนำค่าของฟังก์ชันที่ x แต่ละฟังก์ชันเหล่านั้นมาบวกกัน และสามารถเขียนอยู่ในรูปสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$f + g = \{(x,y) \ / \ y = f(x) + g(x) \text{ และ } x \in D_f \cap D_g\}$$

โดยที่ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มี D_f และ D_g เป็นโดเมนของฟังก์ชัน f และ g ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f = \{(1,3), (2,1), (3,2), (4,0)\}$

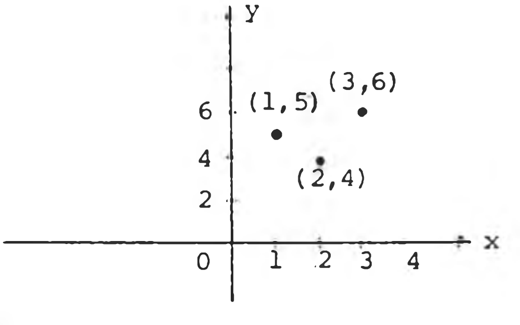
$g = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$

จงหา f + g พร้อมทั้งเขียนกราฟ

วิธีทำ $D_f = \{1,2,3,4\}$; $D_g = \{1,2,3\}$

$D_f \cap D_g = \{1,2,3\}$

$\therefore f + g = \{(1,5), (2,4), (3,6)\}$



ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f = \{(x,y) \ / \ y = x \text{ และ } 0 \leqslant x \leqslant 5\}$

$g = \{(x,y) \ / \ y = 1\}$

จงหา f + g พร้อมทั้งบวกโดเมนและเรนจ์ของ f + g และเขียนกราฟด้วย

วิธีทำ

$D_f = \{x \ / \ 0 \leqslant x \leqslant 5\}$

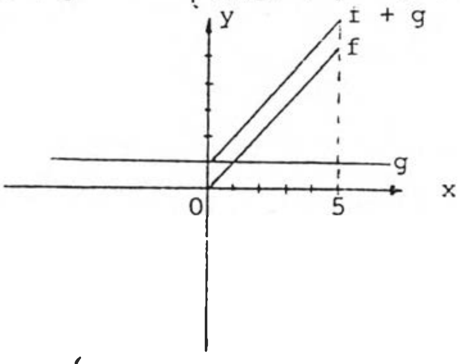
$D_g = R$

จะได้ $D_{f+g} = \{x / 0 \leqslant x \leqslant 5\}$

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$= x + 1 \ , \ 0 \leqslant x \leqslant 5$

ดังนั้น $f + g = \{(x,y) / y = x + 1$ และ $0 \leqslant x \leqslant 5\}$.



ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f = \{(-3,3), (-2,2), (-1,1), (0,0), (1,-1), (2,-2), (3,-3)\}$

$g = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$

จงหา $f + g$

วิธีทำ

$D_f = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

$D_g = \{0,1,2,3,4,5\}$

$D_f \cap D_g = \{0,1,2,3\}$

$\therefore D_{f+g} = \{0,1,2,3\}$

ดังนั้น $f + g = \{(0,0+1), (1,-1+2), (2,-2+3), (3,-3+4)\}$

$= \{(0,1), (1,1), (2,1), (3,1)\}$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $f(x) = x + 1$

$g(x) = x^2$

จงหา $(f + g)(x)$

วิธีทำ

$D_f = \{x / x \in R\}$

$D_g = \{x / x \in R\}$

$D_f \cap D_g = \{x / x \in R\}$

$\therefore D_{f+g} = \{x / x \in R\}$

จาก $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$$= (x + 1) + (x^2)$$

$$= x^2 + x + 1$$

บัตรกิจกรรม

เรื่อง 5. พีชคณิตของฟังก์ชัน

5.1 การบวกพีชคณิตของฟังก์ชัน

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

1. หาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
2. หาโดเมนร่วมระหว่างฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
3. หาผลบวกของพีชคณิตของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
4. บอกโดเมนและเรนจ์ผลบวกของพีชคณิตของ ฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
5. สรุปนิยามการบวกพีชคณิตของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง

กิจกรรม

ให้นักเรียนพิจารณาการบวกพีชคณิตของฟังก์ชัน และเติมข้อความลงในตารางข้างล่าง

ฟังก์ชัน	โดเมนของฟังก์ชัน	เรนจ์ของฟังก์ชัน	โดเมนร่วม	ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชัน
$f_1=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{2,3,4,5\}$	$\{1,2,3\}$	$f_1+g_1=\{(1,3),(2,5),(3,7)\}$
$g_1=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$		(โดเมน f และ g เหมือนกัน สังเกตความสัมพันธ์ของเรนจ์
$f_2=\{(1,3),(2,1),(3,2),(4,0)\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{3,1,2,0\}$	$\{1,2,3\}$	$f_2+g_2=\{(1,5),(2,4),(3,6)\}$
$g_2=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3,4\}$		(โดเมน f และ g เหมือนกัน สังเกตความสัมพันธ์ของเรนจ์
$f_3=\{(1,3),(2,4),(3,5)\}$	____	____	____	$f_3+g_3=$ ____
$g_3=\{(1,1),(2,4),(3,9)\}$	____	____		

ฟังก์ชัน	โดเมนของฟังก์ชัน	เรนจ์ของฟังก์ชัน	โดเมนร่วม	ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชัน
$f_4 = \{(x,y)/y=2x\}$ $g_4 = \{(x,y)/y=3x+1\}$	$\{x/x \in R\}$ $\{x/x \in R\}$	$\{y / y = 2x\}$ $\{y / y = 3x+1\}$	$\{x/x \in R\}$	$f_4+g_4 = \{(x,y)/ y = 5x+1\}$ (สังเกตที่ความสัมพันธ์ค่า y ของ f_4 และ g_4)
$f_5 = \{(x,y)/y=x+1\}$ $g_5 = \{(x,y)/y=x^2\}$	________ ________	__________ __________	________ ________	f_5+g_5 = ____________ ____________

จากตารางจะเห็นว่า มีฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชันนำเอาฟังก์ชันมาบวกกันได้ฟังก์ชันใหม่โดยมีลักษณะ ดังนี้

1) โดเมนของ f + g คือ ____________________ (สังเกตโดเมนร่วม)

2) เรนจ์ของ f + g คือ ____________________

<u>สรุป</u>

<u>นิยาม</u> การบวกพีชคณิตของฟังก์ชัน หมายถึง การนำเอาฟังก์ชันตั้งแต่สองฟังก์ชันขึ้นไปมาบวกกัน โดยค่าของฟังก์ชันใหม่ที่ x ได้จากการนำค่าของฟังก์ชันที่ x แต่ละฟังก์ชันเหล่านั้นมาบวกกันและสามารถเขียนอยู่ในรูปสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$f + g = \{(x,y) \ / \ y = f(x) + g(x) \text{ และ } x \in D_f \cap D_g\}$$

โดยที่ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มี D_f และ D_g เป็นโดเมนของฟังก์ชัน f และ g ตามลำดับ

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> กำหนดให้ $f = \{(1,3), (2,1), (3,2), (4,0)\}$

$g = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$

จงหา $f + g$

<u>วิธีทำ</u>

$D_f = \{1,2,3,4\}$; $D_g = \{1,2,3\}$

จะได้ $D_f \cap D_g = \{1,2,3\}$

$\therefore D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{1,2,3\}$

จาก $f = \{(1,3), (2,1), (3,2), (4, 0)\}$

$g = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$

$\therefore f + g = \{(1, 3+2), (2, 1+3), (3, 2+4)\}$

$= \{(1,5), (2,4), (3,6)\}$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> กำหนดให้ $f = \{(x,y) \,/\, y = x$ และ $0 \leq x \leq 5\}$

$g = \{(x,y) \,/\, y = 1\}$

จงหา $f + g$ พร้อมทั้งบวกโดเมนและเรนจ์ของ $f + g$ และเขียนกราฟ

<u>วิธีทำ</u>

$D_f = \{x \,/\, 0 \leq x \leq 5\}$; $D_g = \{x \,/\, x \in R\}$

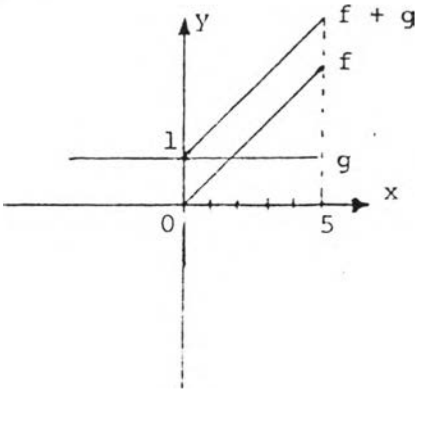
จะได้ $D_f \cap D_g = \{x \,/\, 0 \leq x \leq 5\}$

$\therefore D_{f+g} = \{x \,/\, 0 \leq x \leq 5\}$

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ (จากนิยาม)

$= x + 1$; $0 \leq x \leq 5$

ดังนั้น $f + g = \{(x,y) \,/\, y = x + 1$ และ $0 \leq x \leq 5\}$



ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f = \{(-3,3), (-2,2), (-1,1), (0,0), (1,-1), (2,-2), (3,-3)\}$

$g = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$

จงหา $f + g$

วิธีทำ

D_f = ____________________

D_g = ____________________

$D_f \cap D_g$ = ____________________

$\therefore D_{f+g}$ = ____________________

ดังนั้น $f + g$ = ____________________

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $f(x) = x + 1$

$g(x) = x^2$

จงหา $(f + g)(x)$

วิธีทำ

D_f = ____________________

D_g = ____________________

$D_f \cap D_g$ = ____________________

$\therefore D_{f+g}$ = ____________________

จาก $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

= ____________________

= ____________________

บัตรแบบฝึกหัดหรือบัตรงาน

เรื่อง 5. พีชคณิตของฟังก์ชัน

5.1 การบวกพีชคณิตของฟังก์ชัน

แบบฝึกหัด

1. กำหนดให้ $f = \{(2,4),\ (3,6),\ (4,8),\ (6,3)\}$ และ

$g = \{(3,3),\ (4,2),\ (5,1),\ (6,2)\}$

จงหา $f + g$

2. จงเขียนกราฟของ $f + g$ เมื่อกำหนด $f = \{(x,y) \ / \ y = x$ และ $-3 \leq x \leq 3\}$ และ $g = \{(x,y) \ / \ 2y = 1\}$

3. จงหา $(f + g)(x)$ พร้อมทั้งบอกโดเมนของฟังก์ชันที่เป็นผลลัพธ์ เมื่อกำหนด $f(x)$ และ $g(x)$ ดังต่อไปนี้

(1) $f(x) = x - 2$, $g(x) = 3x + 1$

(2) $f(x) = x^2$, $g(x) = 4$

(3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 4$

(4) $f(x) = \frac{1}{x - 1}$, $g(x) = x + 1$

(5) $f(x) = \frac{1}{x - 1}$, $g(x) = (x - 1)^2$

(6) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{เมื่อ } x \neq 0 \\ 1 & \text{เมื่อ } x = 0 \end{cases}$, $g(x) = \frac{2}{x - 1}$

4. จงเขียนกราฟของ $(f + g)(x)$ เมื่อกำหนด $f(x)$ และ $g(x)$ ดังต่อไปนี้

(1) $f(x) = x$, $g(x) = 1$

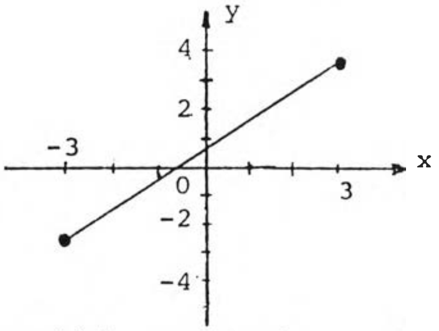
(2) $f(x) = 2x$, $g(x) = -1$

(3) $f(x) = 1$, $g(x) = x^2$

<u>เฉลยแบบฝึกหัด</u>

1. $f + g = \{(3,9), (4,10), (6,5)\}$

2. $f + g = \left\{(x,y) \;/\; y = \dfrac{2x + 1}{2} \;, -3 \leqslant x \leqslant 3 \right\}$



3. (1) $(f + g)(x) = 4x - 1 \qquad D_{f+g} = R$

   (2) $(f + g)(x) = x^2 + 4 \qquad D_{f+g} = R$

   (3) $(f + g)(x) = \dfrac{1 + 4x}{x} \qquad D_{f+g} = \{x \mid x \neq 0\}$

   (4) $(f + g)(x) = \dfrac{x^2}{x - 1} \qquad D_{f+g} = \{x \mid x \neq 1\}$

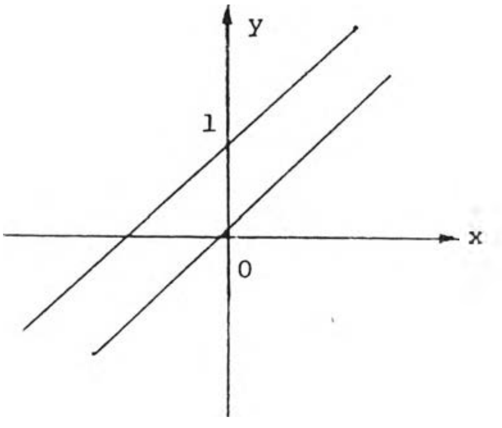
   (5) $(f + g)(x) = \dfrac{1 + (x - 1)^3}{x - 1} \qquad D_{f+g} = \{x \mid x \neq 1\}$

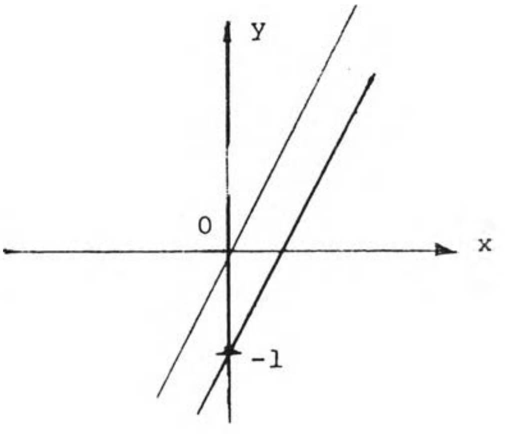
   (6) $(f + g)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x - 1} \\ -1 \quad \text{เมื่อ } x = 0 \end{cases} \qquad D_{f+g} = \{x \mid x \neq 1\}$

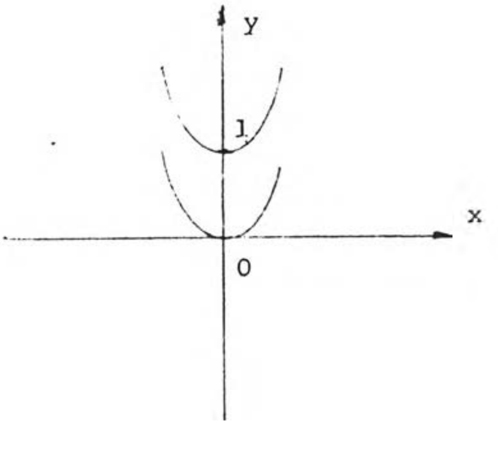
4. (1) $(f + g)(x) = x + 1$

   (2) $(f + g)(x) = 2x - 1$

   (3) $(f + g)(x) = 1 + x^2$


y
1
x
0


y
0
x
-1


y
1
x
0

บัตรทดสอบหรือบัตรปัญหา

เรื่อง 5. พีชคณิตของฟังก์ชัน

5.1 การบวกพีชคณิตของฟังก์ชัน

คำสั่ง จงทำเครื่องหมายกากบาท (X) ลงในวงเล็บตรงกับข้อ ก หรือ ข หรือ ค หรือ ง ในกระดาษคำตอบซึ่งท่านเห็นว่าถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

---

1. ให้ $f = \{(1,3),(2,5),(3,7),(4,9)\}$ และ $g = \{(2,6),(3,8),(4,10)\}$ ค่าของ $f + g$ คือข้อใด

ก. $\{(1,3)\}$

ข. $\{(2,11),(3,15),(4,19)\}$

ค. $\{(1,3),(2,11),(3,15)\}$

ง. $\{(1,3),(2,11),(3,15),(4,19)\}$

2. ให้ $g = \{(a,0),(b,1),(c,2),(d,3)\}$ และ $h = \{(a,3),(c,4)\}$ ค่าของ $g + h$ คือข้อใด

ก. $\{(a,0),(c,6)\}$

ข. $\{(a,0),(c,2)\}$

ค. $\{(a,3),(c,6)\}$

ง. $\{(a,3),(c,3)\}$

3. ให้ $f = \{(x,y) \ / \ y = x^2\}$ และ $g = \{(x,y) \ / \ y = 2x + 1\}$ ค่าของ $f + g$ คือข้อใด

ก. $\{(x,y) \ / \ y = x^2 - 2x + 1\}$

ข. $\{(x,y) \ / \ y = -x^2 + 2x + 1\}$

ค. $\{(x,y) \ / \ y = x^2 - 2x - 1\}$

ง. $\{(x,y) \ / \ y = x^2 + 2x + 1\}$

4. ให้ $f = \{(x,y) \ / \ y = x^2 + 1$ เมื่อ $-6 < x < 2\}$ และ $g = \{(x,y) \ / \ y = 2x - 9$ เมื่อ $-2 < x \leqslant 4\}$ ข้อใดถูกต้อง

ก. $f + g = \{(x,y) \ / \ y = x^2 + 2x - 8, \ -2 < x < 2\}$

ข. $f + g = \{(x,y) \ / \ y = x^2 + 2x - 8, \ -6 < x < 2\}$

ค. $f + g = \{(x,y) \ / \ y = x^2 + 2x - 8, \ -2 < x \leqslant 4\}$

ง. $f + g = \{(x,y) \ / \ y = x^2 + 2x - 8, \ -6 < x \leqslant 4\}$

5. ให้ $f = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ ค่าของ $f + f^{-1}$ คือข้อใด

ก. $\{(1,2),(4,3)\}$

ข. $\{(2,4),(3,6)\}$

ค. $\{(2,1),(3,2),(4,3)\}$

ง. $\{(1,2),(2,4),(3,6),(4,3)\}$

6. ให้ $f(x) = x^2 + 1$ และ $g(x) = 4$

ค่าของ $(f + g)(-2)$ คือข้อใด

ก. 1

ข. -7

ค. 9

ง. 20

7. ให้ $f = \{(a,1), (b,2), (c,3), (d,4)\}$ และ

$g = \{(b,0), (a,1), (c,2), (d,3)$

$(e,4)\}$ โดเมนของ $f + g$ คือข้อใด

ก. $\{e\}$

ข. $\{a,b,c\}$

ค. $\{a,b,c,d\}$

ง. $\{a,b,c,d,e\}$

8. ให้ $g(x) = 3x - 1$ และ $h(x) = \frac{1}{x - 1}$

โดเมนของ $g + h$ คือข้อใด

ก. $\{x / x \neq \frac{1}{3}\}$

ข. $\{x / x \neq 0\}$

ค. $\{x / x \in R\}$

ง. $\{x / x \neq 1\}$

9. ให้ $f(x) = \frac{1}{x}$ และ $h(x) = x^2 + x$

โดเมนของ $f + h$ คือข้อใด

ก. $\{x / -1 \geqslant x > 1\}$

ข. $\{x / x \neq 0\}$

ค. $\{x / x \in R\}$

ง. $\{x / x \geqslant 0\}$

10. ข้อใดถูกต้อง

ก. $f + g = \{(x,y) / y = f(x) + g(x)$

และ $x \in D_f \cap D_g\}$

ข. $f + g = \{(x,y) / y = f(x) + g(x)$

และ $x \in D_g\}$

ค. $f + g = \{(x,y) / y = f(x) + g(x)$

และ $x \in D_f\}$

ง. $f + g = \{(x,y) / y = f(x) + g(x)$

และ $x \in D_f \cup D_g\}$

เฉลยข้อทดสอบ

1. ข
2. ค
3. ง
4. ก
5. ข
6. ค
7. ค
8. ง
9. ข
10. ก

ชุดการเรียนการสอนที่ 16

เรื่อง

การลบพีชคณิตของฟังก์ชัน

บัตรคำสั่ง

ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. **ทำบัตรกิจกรรม**
2. **ศึกษาจากบัตรเนื้อหาอีกครั้งหนึ่งถ้าไม่เข้าใจ หลังจากที่ทำบัตรกิจกรรมแล้ว**
3. **ทำบัตรแบบฝึกหัด หรือบัตรงานพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย**
4. **ทำบัตรทดสอบหรือบัตรปัญหาพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย**

บัตรเนื้อหา

เรื่อง 5. พีชคณิตของฟังก์ชัน

5.2 การลบพีชคณิตของฟังก์ชัน

นิยาม การลบพีชคณิตของฟังก์ชัน หมายถึง การนำเอาฟังก์ชันตั้งแต่สองฟังก์ชันขึ้นไปมาลบกัน โดยค่าของฟังก์ชันใหม่ที่ x ได้จากการนำค่าของฟังก์ชันที่ x แต่ละฟังก์ชันเหล่านั้นมาลบกัน และสามารถเขียนอยู่ในรูปสัญลักษณ์ได้ ดังนี้

$$f - g = \{(x,y) \,/\, y = f(x)-g(x) \text{ และ } x \in D_f \cap D_g\}$$

โดยที่ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มี D_f และ D_g เป็นโดเมนของฟังก์ชัน f และ g ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f = \{(4,1), (3,2), (2,0), (1,3)\}$

$g = \{(3,-1), (4,-2), (5,3)\}$

จงหา f - g พร้อมทั้งโดเมนและเรนจ์ และเขียนกราฟ

วิธีทำ

$D_f = \{4,3,2,1\}$, $D_g = \{3,4,5\}$

$D_f \cap D_g = \{3,4\}$

$\therefore f - g = \{(3,3), (4,3)\}$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f = \{(x,y) \,/\, y = x \text{ และ } 0 \leq x \leq 5\}$

$g = \{(x,y) \,/\, y = 1\}$

จงหา f - g พร้อมทั้งบอกโดเมนและเรนจ์ของ f - g และเขียนกราฟ

วิธีทำ

$D_f = \{x / 0 \leq x \leq 5\}$; $D_g = \{x / x \in R\}$

จะได้ $D_f \cap D_g = \{x / 0 \leq x \leq 5\}$

$\therefore D_{f-g} = \{x / 0 \leq x \leq 5\}$

จาก $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

$= x - 1 \;;\; 0 \leq x \leq 5$

ดังนั้น $f - g = \{(x,y) \,/\, y = x - 1 \text{ และ } 0 \leq x \leq 5\}$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f = \{(-3,3), (-2,2), (-1,1), (0,0), (1,-1), (2,-2), (3,-3)\}$

$g = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$

จงหา f - g

วิธีทำ

$$D_f = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$$

$$D_g = \{0,1,2,3,4,5\}$$

$$D_f \cap D_g = \{0,1,2,3\}$$

$$\therefore D_{f-g} = \{0,1,2,3\}$$

ดังนั้น $f - g = \{(0,0-1), (1,-1-2), (2,-2-3), (3,-3-4)\}$

$$= \{(0,-1), (1,-3), (2,-5), (3,-7)\}$$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $f(x) = x + 1$

$g(x) = x^2$

จงหา $(f - g)(x)$

วิธีทำ

$$D_f = \{x / x \in R\}$$

$$D_g = \{x / x \in R\}$$

$$D_f \cap D_g = \{x / x \in R\}$$

$$\therefore D_{f-g} = \{x / x \in R\}$$

จาก $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

$$= (x + 1) - x^2$$

$$= x + 1 - x^2$$

$$= -x^2 + x - 1$$

บัตรกิจกรรม

<u>เรื่อง</u> 5. พีชคณิตของฟังก์ชัน

5.2 การลบพีชคณิตของฟังก์ชัน

<u>จุดประสงค์การเรียนรู้</u>

นักเรียนสามารถ

1. หาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
2. หาโดเมนร่วมระหว่างฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
3. หาผลลบของพีชคณิตของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
4. บอกโดเมนและเรนจ์ผลลบพีชคณิตของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
5. สรุปนิยามการลบพีชคณิตของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง

กิจกรรม

ให้นักเรียนพิจารณาการลบพีชคณิตของฟังก์ชันจากตารางข้างล่าง

ฟังก์ชัน	โดเมนของฟังก์ชัน	เรนจ์ของฟังก์ชัน	โดเมนร่วม	ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชัน
$f_1=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2)\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{2,3,4,5\}$	$\{1,2,3\}$	$f_1-g_1=\{(1,4),(2,2),(3,0)\}$
$g_1=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$		(โดเมน f และ g เหมือนกัน สังเกตความสัมพันธ์ของเรนจ์
$f_2=\{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{3,4,5,6\}$	$\{1,2,3\}$	$f_2-g_2=\{(1,1),(2,1),(3,1)\}$
$g_2=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3,4\}$		(โดเมน f และ g เหมือนกัน สังเกตความสัมพันธ์ของเรนจ์
$f_3=\{(1,3),(2,4),(3,5)\}$	________	________	________	$f_3-g_3=$ ________
$g_3=\{(1,1),(2,4),(3,9)\}$	________	________		

ฟังก์ชัน	โดเมนของฟังก์ชัน	เรนจ์ของฟังก์ชัน	โดเมนร่วม	ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชัน
$f_4 = \{(x,y) / y=3x+1\}$ $g_4 = \{(x,y) / y=2x\}$	$\{x / x \in R\}$ $\{x / x \in R\}$	$\{y / y=3x+1\}$ $\{y / y=2x\}$	$\{x / x \in R\}$	$f_4 - g_4 = \{(x,y) / y = x + 1\}$ (สังเกตที่ความสัมพันธ์ค่า y ของ f_4 และ g_4)
$f_5 = \{(x,y) / y=x+1\}$ $g_5 = \{(x,y) / y=x^2\}$	________ ________	________ ________	________	$f_5 - g_5 =$ ________ ________________

จากตารางจะเห็นว่ามีฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชัน นำเอาฟังก์ชันมาลบกันได้ฟังก์ชันใหม่ โดยมีลักษณะดังนี้

1) โดเมนของ f - g คือ ____________________________(สังเกตโดเมนร่วม)

2) เรนจ์ของ f - g คือ ____________________________

สรุป

นิยาม การลบพีชคณิตของฟังก์ชัน หมายถึง การนำเอาฟังก์ชันตั้งแต่สองฟังก์ชันขึ้นไปมาลบกัน โดยค่าของฟังก์ชันใหม่ที่ x ได้จากการนำค่าของฟังก์ชันที่ x แต่ละฟังก์ชันเหล่านั้นมาลบกัน และสามารถเขียนอยู่ในรูปสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$f - g = \{(x,y) / y = f(x) - g(x) \text{ และ } x \in D_f \cap D_g\}$$

โดยที่ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มี D_f และ D_g เป็นโดเมนของฟังก์ชัน f และ g ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f = \{(4,1), (3,2), (2,0), (1,3)\}$

$g = \{(3,-1), (4,-2), (5,3)\}$

จงหา f - g พร้อมทั้งโดเมน และเรนจ์

วิธีทำ

$D_f = \{4,3,2,1\}$; $D_g = \{3,4,5\}$

จะได้ $D_f \cap D_g = \{3,4\}$

$\therefore D_{f-g} = \{3,4\}$

จาก $f = \{(4,1), (3,2), (2,0), (1,3)\}$

$g = \{(3,-1), (4,-2), (5,3)\}$

$f - g = \{(3,2-(-1)), (4,1-(-2))\}$

$= \{(3,3), (4,3)\}$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f = \{(x,y) / y = x$ และ $0 \leq x \leq 5\}$

$g = \{(x,y) / y = 1\}$

จงหา f - g พร้อมทั้งบอกโดเมนและเรนจ์ของ f - g และเขียนกราฟ

วิธีทำ

$D_f = \{x / 0 \leq x \leq 5\}$; $D_g = \{x / x \in R\}$

จะได้ $D_f \cap D_g = \{x / 0 \leq x \leq 5\}$

$\therefore D_{f-g} = \{x / 0 \leq x \leq 5\}$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ จากนิยาม

$= x - 1$; $0 \leq x \leq 5$

ดังนั้น $f - g = \{(x,y) / y = x - 1$ และ $0 \leq x \leq 5\}$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f = \{(-3,3), (-2,2), (-1,1), (0,0), (1,-1), (2,-2), (3,-3)\}$

$g = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$

จงหา f - g

<u>**วิธีทำ**</u> D_f = ________________

D_g = ________________

$D_f \cap D_g$ = ________________

$\therefore D_{f-g}$ = ________________

ดังนั้น $f - g$ = ________________

<u>**ตัวอย่างที่ 4**</u> กำหนดให้ $f(x) = x + 1$

$g(x) = x^2$

จงหา $(f - g)(x)$

<u>**วิธีทำ**</u> D_f = ________________

D_g = ________________

$D_f \cap D_g$ = ________________

$\therefore D_{f-g}$ = ________________

จาก D_{f-g} = $f(x) - g(x)$

= ________________

= ________________

บัตรแบบฝึกหัดหรือบัตรงาน

เรื่อง 5. พีชคณิตของฟังก์ชัน

5.2 การลบพีชคณิตของฟังก์ชัน

แบบฝึกหัด

1. จงหา $(f - g)(x)$ พร้อมทั้งบอกโดเมนของฟังก์ชันที่เป็นผลลัพธ์ เมื่อกำหนด $f(x)$ และ $g(x)$ ดังต่อไปนี้

(1) $f(x) = x - 2$, $g(x) = 3x + 1$

(2) $f(x) = x^2$, $g(x) = 4$

(3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 4$

(4) $f(x) = \frac{1}{x - 1}$, $g(x) = x + 1$

(5) $f(x) = \frac{1}{x - 1}$, $g(x) = (x - 1)^2$

(6) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{เมื่อ } x \neq 0 \\ 1 & \text{เมื่อ } x = 0 \end{cases}$, $g(x) = \frac{2}{x - 1}$

2. กำหนดให้ $f = \{(2,4), (3,6), (4,8), (6,3)\}$ และ

$g = \{(3,3), (4,2), (5,1), (6,2)\}$

จงหา $f - g$

เฉลยแบบฝึกหัด

1. (1) $(f - g)(x) = -2x - 3$ $\qquad D_{f-g} = R$

(2) $(f - g)(x) = x^2 - 4$ $\qquad D_{f-g} = R$

(3) $(f - g)(x) = \dfrac{1 - 4x}{x}$ $\qquad D_{f-g} = \{x \mid x \neq 0\}$

(4) $(f - g)(x) = \dfrac{2 - x^2}{x - 1}$ $\qquad D_{f-g} = \{x \mid x \neq 1\}$

(5) $(f - g)(x) = \dfrac{1 - (x - 1)^3}{x - 1}$ $\qquad D_{f-g} = \{x \mid x \neq 1\}$

(6) $(f - g)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x - 1} \\ 3 \text{ เมื่อ } x = 0 \end{cases}$ $\qquad D_{f-g} = \{x \mid x \neq 1\}$

2. $f - g = \{(3,3), (4,6), (6,1)\}$

บัตรทดสอบหรือบัตรปัญหา

เรื่อง 5. พีชคณิตของฟังก์ชัน

5.2 การลบพีชคณิตของฟังก์ชัน

คำสั่ง จงทำเครื่องหมายกากบาท (X) ลงในวงเล็บตรงกับข้อ ก หรือ ข หรือ ค หรือ ง ในกระดาษคำตอบซึ่งท่านเห็นว่าถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

1. ให้ $f = \{(1,3),(2,5),(3,7),(4,9)\}$ และ

   $g = \{(2,6),(3,8),(4,10)\}$

   ค่าของ $f - g$ คือข้อใด

   ก. $\{(2,-1),(3,-1),(4,-1)\}$

   ข. $\{(2,1),(3,1),(4,1)\}$

   ค. $\{(1,3),(2,-1),(3,-1),(4,-1)\}$

   ง. $\{(1,3),(2,1),(3,1),(4,1)\}$

2. ให้ $f = \{(a,4),(b,5),(c,6)\}$ และ

   $g = \{(c,3),(a,1),(b,3),(d,2)\}$

   ค่าของ $f - g$ คือข้อใด

   ก. $\{(d,2)\}$

   ข. $\{(a,-3),(b,-2),(c,-3)\}$

   ค. $\{(a,3),(b,2),(c,3)\}$

   ง. $\{(a,3),(b,-2),(c,-3),(d,2)\}$

3. ให้ $f = \{(x,y) \ / \ y = x^2\}$ และ

   $g = \{(x,y) \ / \ y = x + 1\}$

   ค่าของ $f - g$ คือข้อใด

   ก. $\{(x,y) \ / \ y = x^2 - x + 1\}$

   ข. $\{(x,y) \ / \ y = -x^2 + x + 1\}$

   ค. $\{(x,y) \ / \ y = x^2 + x - 1\}$

   ง. $\{(x,y) \ / \ y = x^2 - x - 1\}$

4. ให้ $f = \{(x,y) \ / \ y = x^2 + 1$ และ $-5 \leq x \leq 2\}$ และ

   $g = \{(x,y) \ / \ y = 2x - 5$ และ $-2 \leq x \leq 4\}$ ข้อใดถูกต้อง

   ก. $f - g = \{(x,y) \ / \ y = x^2 - 2x - 4, \ -2 \leq x \leq 2\}$

   ข. $f - g = \{(x,y) \ / \ y = x^2 - 2x - 4, \ -5 \leq x \leq 4\}$

   ค. $f - g = \{(x,y) \ / \ y = x^2 - 2x + 6, \ -2 \leq x \leq 2\}$

   ง. $f - g = \{(x,y) \ / \ y = x^2 - 2x + 6, \ -5 \leq x \leq 4\}$

5. ให้ $f = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

   ค่าของ $f - f^{-1}$ คือข้อใด

   ก. $\{(2,2),(3,2)\}$

   ข. $\{(2,-2),(3,-2)\}$

   ค. $\{(2,2),(3,2),(4,3)\}$

   ง. $\{(1,2),(2,2),(3,2),(4,3)\}$

6. ให้ $f(x) = x^2 + 3x - 2$ และ $g(x) = x$

ค่าของ $(f - g)(-1)$ คือข้อใด

ก. 1

ข. 2

ค. -3

ง. -5

7. ให้ $f = \{(1,1),(2,4),(3,9),(4,16),(5,25)\}$ และ

$g = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,4)\}$ โดเมนของ $f - g$

คือข้อใด

ก. $\{1,2\}$

ข. $\{1,4,9,16,25\}$

ค. $\{2,3,4,5\}$

ง. $\{1,2,3,4,5\}$

8. ให้ $g(x) = x - 1$ และ $h(x) = \frac{1}{x}$

โดเมนของ $g - h$ คือข้อใด

ก. $\{x \mid x \geqslant 0\}$

ข. $\{x \mid x \neq 0\}$

ค. $\{x \mid x \in R\}$

ง. $\{x \mid x < 0\}$

9. ให้ $f(x) = 3x^2$ และ $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

โดเมนของ $f - h$ คือข้อใด

ก. $\{x \mid x > 1$ หรือ $x \leqslant 1\}$

ข. $\{x \mid x \neq 0\}$

ค. $\{x \mid x \in R\}$

ง. $\{x \mid x \geqslant 0\}$

10. ข้อใดถูกต้อง

ก. $f - g = \{(x,y) \mid y = f(x) - g(x)$ และ $x \in D_g\}$

ข. $f - g = \{(x,y) \mid y = f(x) - g(x)$ และ $x \in D_g\}$

ค. $f - g = \{(x,y) \mid y = f(x) - g(x)$ และ $x \in D_f \cap D_g\}$

ง. $f - g = \{(x,y) \mid y = f(x) - g(x)$ และ $x \in D_f \cup D_g\}$

เฉลยข้อทดสอบ

1. ข
2. ค
3. ง
4. ค
5. ก
6. ก
7. ง
8. ข
9. ก
10. ค

ชุดการเรียนการสอนที่ 17

เรื่อง

การคูณพีชคณิตของฟังก์ชัน

บัตรคำสั่ง

ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. **ทำบัตรกิจกรรม**
2. **ศึกษาจากบัตรเนื้อหาอีกครั้งหนึ่งถ้าไม่เข้าใจ หลังจากที่ทำบัตรกิจกรรมแล้ว**
3. **ทำบัตรแบบฝึกหัด หรือบัตรงานพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย**
4. **ทำบัตรทดสอบหรือบัตรปัญหาพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย**

บัตรเนื้อหา

เรื่อง 5. พีชคณิตของฟังก์ชัน

5.3 การคูณพีชคณิตของฟังก์ชัน

นิยาม การคูณพีชคณิตของฟังก์ชัน หมายถึง การนำเอาฟังก์ชันตั้งแต่สองฟังก์ชันขึ้นไปมาคูณกัน โดยค่าของฟังก์ชันใหม่ที่ x ได้จากการนำค่าของฟังก์ชันที่ x แต่ละฟังก์ชันเหล่านั้นมาคูณกัน และสามารถเขียนอยู่ในรูปสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$f \bullet g = \left\{(x,y) \ / \ y = f(x) \bullet g(x) \text{ และ } x \in D_f \cap D_g\right\}$$

โดยที่ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มี D_f และ D_g เป็นโดเมนของฟังก์ชัน f และ g ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$

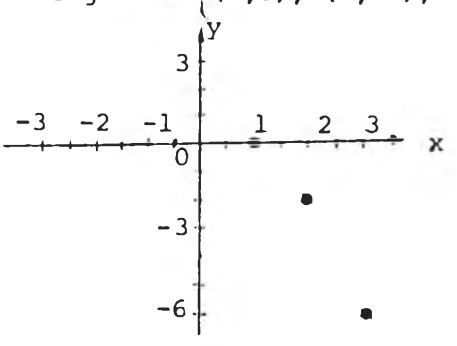
$g = \{(1,0), (2,-1), (3,-2), (4,-3)\}$

จงหา f.g และเขียนกราฟ

วิธีทำ $D_f = \{0,1,2,3\}$; $D_g = \{1,2,3,4\}$

$\therefore D_{f \cdot g} = \{1,2,3\}$

$f \cdot g = \{(1,0), (2,-2), (3,-6)\}$



ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f(x) = 2x$; $g(x) = \frac{1}{2}x$

จงหา f•g พร้อมทั้งโดเมนและเรนจ์ของ f.g และเขียนกราฟ

วิธีทำ $D_f = \{x / x \in R\}$; $D_g = \{x / x \in R\}$

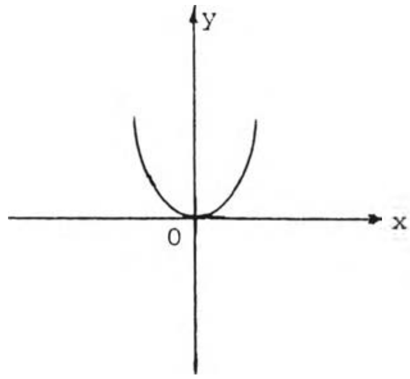
$\therefore D_{f \cdot g} = \{x / x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$= (2x) \cdot \frac{1}{2}x$

$= x^2$; $x \in R$

ดังนั้น $f \cdot g = \{(x,y) \ / \ y = x^2 \text{ และ } x \in R\}$



ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f = \{(-3,3),\ (-2,2),\ (-1,1),\ (0,0),\ (1,-1),\ (2,-2),\ (3,-3)\}$

$g = \{(0,1),\ (1,2),\ (2,3),\ (3,4),\ (4,5),\ (5,6)\}$

จงหา $f\cdot g$

วิธีทำ

$D_f = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

$D_g = \{0,1,2,3,4,5\}$

$D_f \cap D_g = \{0,1,2,3\}$

$\therefore D_{f\cdot g} = \{0,1,2,3\}$

ดังนั้น $f\cdot g = \{(0,0\cdot 1),\ (1,-1\cdot 2),\ (2,-2\cdot 3),\ (3,-3\cdot 4)\}$

$= \{(0,0),\ (1,-2),\ (2,-6),\ (3,-12)\}$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $f(x) = x + 1$

$g(x) = x^2$

จงหา $(f\cdot g)(x)$

วิธีทำ

$D_f = \{x / x \in R\}$

$D_g = \{x / x \in R\}$

$D_f \cap D_g = \{x / x \in R\}$

$\therefore D_{f\cdot g} = \{x / x \in R\}$

จาก $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$

$= (x + 1)\ x^2$

$= x^3 + x^2$

ดังนั้น $(f\cdot g)(x) = x^3 + x^2$

บัตรกิจกรรม

เรื่อง 5. พีชคณิตของฟังก์ชัน

5.3 การคูณพีชคณิตของฟังก์ชัน

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

1. หาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
2. หาโดเมนร่วมระหว่างฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
3. หาผลคูณของพีชคณิตของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
4. บอกโดเมน และเรนจ์ของผลคูณพีชคณิตของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง
5. สรุปนิยามการคูณพีชคณิตของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง

กิจกรรม

ให้นักเรียนพิจารณาการคูณพีชคณิตของฟังก์ชัน และเติมข้อความลงในตารางข้างล่าง

ฟังก์ชัน	โดเมนของฟังก์ชัน	เรนจ์ของฟังก์ชัน	โดเมนร่วม	ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชัน
$f_1=\{(0,2),(3,5),(4,1),(5,0)\}$ $g_1=\{(0,1),(1,2),(3,4),(4,5)\}$	$\{0,3,4,5\}$ $\{0,1,3,4\}$	$\{2,5,1,0\}$ $\{1,2,4,5\}$	$\{0,3,4\}$	$f_1\cdot g_1=\{(0,2),(3,20),(4,5)\}$ (โดเมน f และ g เหมือนกัน สังเกตความสัมพันธ์ของเรนจ์)
$f_1=\{(1,3),(2,1),(3,2),(4,0)\}$ $g_2=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$	$\{1,2,3,4\}$ $\{1,2,3\}$	$\{3,1,2,0\}$ $\{2,3,4\}$	$\{1,2,3\}$	$f_2\cdot g_2=\{(1,6),(2,3),(3,8)\}$ (โดเมน f และ g เหมือนกัน สังเกตความสัมพันธ์ของเรนจ์)
$f_3=\{(1,3),(2,4),(3,5)\}$ $g_3=\{(1,1),(2,4),(3,9)\}$	______ ______	______ ______	______	$f_3\cdot g_3=$ __________
$f_4=\{(x,y)\ /\ y=6\}$ $g_4=\{(x,y)\ /\ y=\frac{1}{3}x\}$	$\{x/x\in R\}$ $\{x/x\in R\}$	$\{y/y=6\}$ $\{y/y=\frac{1}{3}x\}$	$\{x/x\in R\}$	$f_4\cdot g_4=\{(x,y)\ /\ y=2x\}$ (สังเกตที่ความสัมพันธ์ค่า y ของ f_4 และ g_4)

ฟังก์ชัน	ไดเมนของฟังก์ชัน	เรนจ์ของฟังก์ชัน	ไดเมนร่วม	ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชัน
$f_5 = \{(x,y) \ / \ y = x+1\}$ $g_5 = \{(x,y) \ / \ y = x^2\}$	______ ______	______ ______	______ ______	$f_5 \cdot g_5$ = ____________

จากตารางจะเห็นว่า มีฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชันนำเอาฟังก์ชันมาคูณกันได้ฟังก์ชันใหม่โดยมีลักษณะดังนี้

1) ไดเมนของ $f \cdot g$ คือ ____________________ (สังเกตไดเมนร่วม)

2) เรนจ์ของ $f \cdot g$ คือ ____________________

<u>สรุป</u>

<u>นิยาม</u> การคูณพีชคณิตของฟังก์ชัน หมายถึง การนำเอาฟังก์ชันตั้งแต่สองฟังก์ชันขึ้นไปมาคูณกัน โดยค่าของฟังก์ชันใหม่ที่ x ได้จากการนำค่าของฟังก์ชันที่ x แต่ละฟังก์ชันเหล่านั้นมาคูณกัน และสามารถเขียนอยู่ในรูปสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$f \cdot g = \{(x,y) \ / \ y = f(x) \cdot g(x) \text{ และ } x \in D_f \cap D_g\}$$

โดยที่ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มี D_f และ D_g เป็นไดเมนและฟังก์ชัน f และ g ตามลำดับ

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> กำหนดให้ $f = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$

$g = \{(1,0), (2,-1), (3,-2), (4,-3)\}$

จงหา $f \cdot g$

<u>วิธีทำ</u>

$D_f = \{0,1,2,3\}$; $D_g = \{1,2,3,4\}$

จะได้ $D_f \cap D_g = \{1,2,3\}$

$\therefore$ $D_{f \cdot g} = \{1,2,3\}$

จาก $f = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$

$g = \{(1,0), (2,-1), (3,-2), (4,-3)\}$

$$f \cdot g = \{(1, 1.0),\ (2, 2.(-1)),\ (3, 3.(-2))\}$$
$$= \{(1,0),\ (2,-2),\ (3,-6)\}$$

__ตัวอย่างที่ 2__ กำหนดให้ $f(x) = 2x$

$g(x) = \frac{1}{2}x$

จงหา $f \cdot g$ พร้อมทั้งโดเมนและเรนจ์ของ $f \cdot g$ และเขียนกราฟ

__วิธีทำ__

$D_f = \{x / x \in R\}$; $D_g = \{x / x \in R\}$

จะได้ $D_f \cap D_g = \{x / x \in R\}$

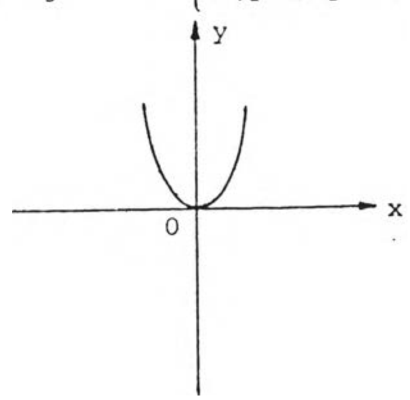
$\therefore D_{f \cdot g} = \{x / x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ (จากนิยาม)

$= 2x \cdot \frac{1}{2}x$; $x \in R$

$= x^2$; $x \in R$

ดังนั้น $f \cdot g = \{(x,y) / y = x^2 ; x \in R\}$



__ตัวอย่างที่ 3__ กำหนดให้ $f = \{(-3,3),\ (-2,2),\ (-1,1),\ (0,0),\ (1,-1),\ (2,-2),\ (3,-3)\}$

$g = \{(0,1),\ (1,2),\ (2,3),\ (3,4),\ (4,5),\ (5,6)\}$

จงหา $f \cdot g$

__วิธีทำ__ D_f = ____________________

D_g = ____________________

$D_f \cap D_g$ = ____________________

$\therefore D_{f \cdot g}$ = ____________________

ดังนั้น $f \cdot g$ = ____________________

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $f(x) = x + 1$

$g(x) = x^2$

จงหา $(f \cdot g)(x)$

วิธีทำ

D_f = ____________

D_g = ____________

$D_f \cap D_g$ = ____________

$\therefore D_{f \cdot g}$ = ____________

จาก $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

= ____________

= ____________

ดังนั้น $(f \cdot g)(x)$ = ____________

บัตรแบบฝึกหัดหรือบัตรงาน

เรื่อง 5. พีชคณิตของฟังก์ชัน

5.3 การคูณพีชคณิตของฟังก์ชัน

แบบฝึกหัด

1. กำหนดให้ $f = \{(2,4), (3,6), (4,8), (6,3)\}$ และ

$g = \{(3,3), (4,2), (5,1), (6,2)\}$

จงหา $f \cdot g$

2. จงหา $(f \cdot g)(x)$ พร้อมทั้งบอกโดเมนของฟังก์ชันที่เป็นผลลัพธ์ เมื่อกำหนด $f(x)$ และ $g(x)$ ดังต่อไปนี้

(1) $f(x) = x - 1$, $g(x) = 3x + 1$

(2) $f(x) = x^2$, $g(x) = 4$

(3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 4$

(4) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x) = x + 1$

(5) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x) = x - 1)^2$

(6) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{เมื่อ } x \neq 0 \\ 1 & \text{เมื่อ } x = 0 \end{cases}$, $g(x) = \frac{2}{x-1}$

เฉลยแบบฝึกหัด

1. $f \cdot g = \{(3,18), (4,16), (6,6)\}$

2. (1) $(f \cdot g)(x) = 3x^2 - 5x - 2$ $\quad D_{f \cdot g} = R$

   (2) $(f \cdot g)(x) = 4x^2$ $\quad D_{f \cdot g} = R$

   (3) $(f \cdot g)(x) = \frac{4}{x}$ $\quad D_{f \cdot g} = \{x \mid x \neq 0\}$

   (4) $(f \cdot g)(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$ $\quad D_{f \cdot g} = \{x \mid x \neq 1\}$

   (5) $(f \cdot g)(x) = x - 1$ $\quad D_{f \cdot g} = \{x \mid x \neq 1\}$

   (6) $(f \cdot g)(x) = \begin{cases} \frac{2}{x(x - 1)} \\ -2 \text{ เมื่อ } x = 0 \end{cases}$ $\quad D_{f \cdot g} = \{x \mid x \neq 1\}$

บัตรทดสอบหรือบัตรปัญหา

เรื่อง 5. พีชคณิตของฟังก์ชัน

5.3 การคูณพีชคณิตของฟังก์ชัน

<u>คำสั่ง</u> จงทำเครื่องหมายกากบาท (X) ลงในวงเล็บตรงกับข้อ ก หรือ ข หรือ ค หรือ ง ในกระดาษคำตอบซึ่งท่านเห็นว่าถูกต้องที่สุด เพียงข้อเดียว

1. ให้ $f = \{(1,2),(3,4),(5,6)\}$ และ

   $g = \{(1,3),(3,5),(5,0),(7,9)\}$

   ค่าของ $f \cdot g$ คือข้อใด

   ก. $\{(1,5),(3,9),(5,6)\}$

   ข. $\{(1,-1),(3,-1),(5,6)\}$

   ค. $\{(1,6),(9,20),(25,0)\}$

   ง. $\{(1,6),(3,20),(5,0)\}$

2. ให้ $f = \{(d,3),(a,0),(c,2),(b,1)\}$

   $h = \{(a,3),(b,2)\}$

   ค่าของ $f \cdot h$ คือข้อใด

   ก. $\{(a,3),(b,3)\}$

   ข. $\{(a,0),(b,2)\}$

   ค. $\{(c,2),(d,3)\}$

   ง. $\{(a,0),(b,2),(c,2),(d,3)\}$

3. ให้ $f = \{(x,y) \ / \ y = x + 1\}$ และ

   $g = \{(x,y) \ / \ y = 2x\}$

   ค่าของ $f \cdot g$ คือข้อใด

   ก. $\{(x,y) \ / \ y = 2x^2 + 2x\}$

   ข. $\{(x,y) \ / \ y = 3x + 1\}$

   ค. $\{(x,y) \ / \ y = 2x^2 + 1\}$

   ง. $\{(x,y) \ / \ y = -x + 1\}$

4. ให้ $f = \{(x,y) \ / \ y = x - 1, -1 \leq x < 5\}$ และ

   $g = \{(x,y) \ / \ y = x + 1, 0 < x < 6\}$

   ข้อใดถูกต้องที่สุด

   ก. $f.g = \{(x,y) \ / \ y = x^2 - 1, -1 \leq x < 6\}$

   ข. $f.g = \{(x,y) \ / \ y = x^2 - 1, 0 \leq x < 5\}$

   ค. $f.g = \{(x,y) \ / \ y = x^2 - 1, -1 \leq x < 5\}$

   ง. $f.g = \{(x,y) \ / \ y = x^2 + 1, 0 < x < 6\}$

5. ให้ $f = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

   ค่าของ $f.f^{-1}$ คือข้อใด

   ก. $\{(2,4),(3,6)\}$

   ข. $\{(1,3),(2,4)\}$

   ค. $\{(2,3),(3,8)\}$

   ง. $\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

6. ให้ $f(x) = x^2$ และ $g(x) = x + 1$

ค่าของ $f \cdot (g \cdot g^{-1})$ คือข้อใด

ก. $x + 1$

ข. $x^2 - 1$

ค. $x^3 + x^2$

ง. $x^4 - x^2$

7. ให้ $f = \{(x,1), (y,2), (z,3)\}$ และ

$g = \{(x,2), (z,1)\}$

โดเมนของ $f \cdot g$ คือข้อใด

ก. $\{x, z\}$

ข. $\{x, y, z\}$

ค. $\{1, 2\}$

ง. $\{1, 2, 3\}$

8. ให้ $f(x) = 4x + 3$ และ

$g(x) = 3 - 2x$

โดเมนของ $f.g$ คือข้อใด

ก. $\{x \ / \ x \neq 0\}$

ข. $\{x \ / \ x \in I\}$

ค. $\{x \ / \ x \in R\}$

ง. $\{x \ / \ x \geq 0\}$

9. ให้ $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{เมื่อ } x > 1 \\ x & \text{เมื่อ } x \leq 1 \end{cases}$ และ

$g(x) = x^2 - 1$

ค่าของ $g \cdot h$ คือข้อใด

ก. $g \cdot h = \begin{cases} x - 1 & \text{เมื่อ } x > 1 \\ x + 1 & \text{เมื่อ } x \leq 1 \end{cases}$

ข. $g \cdot h = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{เมื่อ } x > 1 \\ x & \text{เมื่อ } x \leq 1 \end{cases}$

ค. $g \cdot h = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{เมื่อ } x > 1 \\ x & \text{เมื่อ } x \leq 1 \end{cases}$

ง. $g \cdot h = \begin{cases} x + 1 & \text{เมื่อ } x > 1 \\ x^3 - x & \text{เมื่อ } x \leq 1 \end{cases}$

10. ข้อใดถูกต้อง

ก. $f \cdot g = \{(x,y) \ / \ y = f(x) \cdot g(x)$ และ $x \in D_f\}$

ข. $f \cdot g = \{(x,y) \ / \ y = f(x) \cdot g(x)$ และ $x \in D_g\}$

ค. $f \cdot g = \{(x,y) \ / \ y = f(x) \cdot g(x)$ และ $x \in D_f \cap D_g\}$

ง. $f \cdot g = \{(x,y) \ / \ y = f(x) \cdot g(x)$ และ $x \subset D_f \cup D_g\}$

เฉลยข้อทดสอบ

1. ค
2. ข
3. ก
4. ข
5. ค
6. ง
7. ก
8. ค
9. ง
10. ค

ชุดการเรียนการสอนที่ 18

เรื่อง

การหารพีชคณิตของฟังก์ชัน

บัตรคำสั่ง

ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. ทำบัตรกิจกรรม
2. ศึกษาจากบัตรเนื้อหาอีกครั้งหนึ่งถ้าไม่เข้าใจ หลังจากที่ทำบัตรกิจกรรมแล้ว
3. ทำบัตรแบบฝึกหัด หรือบัตรงานพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย
4. ทำบัตรทดสอบหรือบัตรปัญหาพร้อมทั้งตรวจผลงานที่บัตรเฉลย

บัตรเนื้อหา

เรื่อง 5. พีชคณิตของฟังก์ชัน

5.4 การหารพีชคณิตของฟังก์ชัน

นิยาม การหารพีชคณิตของฟังก์ชัน หมายถึง การนำฟังก์ชันตั้งแต่สองฟังก์ชันขึ้นไปมาหารกัน โดยที่ค่าของฟังก์ชันใหม่ที่ x ได้จากการนำเอาค่าฟังก์ชันที่ x เหล่านั้นมาหารกัน แต่ฟังก์ชันที่นำมาหารค่าจะต้องไม่เป็นศูนย์ และสามารถเขียนอยู่ในรูปสัญลักษณ์ได้ดังนี้

$$\frac{f}{g} = \left\{(x,y) \ / \ y = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ และ } x \in D_f \cap D_g \text{ และ } g(x) \neq 0\right\}$$

โดยที่ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มี D_f และ D_g เป็นโดเมนของฟังก์ชัน f และ g ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f = \{(1,5), (2,10), (3,15), (4,20), (5,25)\}$

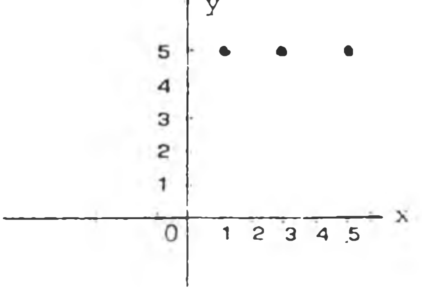
$g = \{(1,1), (3,3), (5,5), (7,7)\}$

จงหา $\frac{f}{g}$ และเขียนกราฟ

วิธีทำ $D_f = \{1,2,3,4,5\}$; $D_g = \{1,3,5,7\}$

$\therefore D_{\frac{f}{g}} = \{1,3,5\}$

ดังนั้น $\frac{f}{g} = \{(1,5), (3,5), (5,5)\}$



ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x + 1$

จงหา $\frac{f}{g}$ พร้อมทั้งโดเมนและเรนจ์ และเขียนกราฟ

วิธีทำ $D_f = \{x / x \in R\}$; $D_g = \{x / x \in R\}$

$\therefore D_{\frac{f}{g}} = \{x / x \in R , x \neq -1\}$

$$\therefore \quad (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)}$$

$$= x - 1 \; ; \; x \neq -1$$

ดังนั้น $\frac{f}{g} = \{(x,y) \;/\; y = x - 1,\; x \neq -1\}$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f = \{(-3,3),\ (-2,2),\ (-1,1),\ (0,0),\ (1,-1),\ (2,-2),\ (3,-3)\}$

$g = \{(0,1),\ (1,2),\ (2,3),\ (3,4),\ (4,5),\ (5,6)\}$

จงหา $\frac{f}{g}$ และ $\frac{g}{f}$

วิธีทำ

$$D_f = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$$

$$D_g = \{0,1,2,3,4,5\}$$

$$D_f \cap D_g = \{0,1,2,3\}$$

1) $D_{\frac{f}{g}} = \{0,1,2,3\}$

$$\therefore \quad \frac{f}{g} = \{(0,\frac{0}{1}),\ (1,\frac{-1}{2}),\ (2,\frac{-2}{3}),\ (3,\frac{-3}{4})\}$$

2) $D_{\frac{g}{f}} = \{0,1,2,3\} - \{0\}$ เพราะว่า $f(0) = 0$

$$= \{1,2,3\}$$

$$\therefore \quad \frac{g}{f} = \{(1,\frac{2}{-1}),\ (2,\frac{3}{-2}),\ (3,\frac{4}{-3})\}$$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $f(x) = x + 1$

$g(x) = x^2$

จงหา $(\frac{f}{g})(x)$

วิธีทำ

$$D_f = \{x / x \in R\}$$

$$D_g = \{x / x \in R\}$$

$$D_f \cap D_g = \{x / x \in R\}$$

$$\therefore \quad D_{\frac{f}{g}} = \{x / x \in R\} - \{x / g(x) = 0\}$$

จาก $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$= \frac{x + 1}{x^2}$

ดังนั้น $(\frac{f}{g})(x) = \frac{x + 1}{x^2}$

เรื่อง 5. พีชคณิตของฟังก์ชัน

5.4 การหารพีชคณิตของฟังก์ชัน

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

1) หาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง

2) หาโดเมนร่วมระหว่างฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง

3) หาผลหารของพีชคณิตของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง

4) บอกโดเมนและเรนจ์ของผลหารของพีชคณิตของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง

5) สรุปนิยามการหารพีชคณิตของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง

กิจกรรม

ให้นักเรียนพิจารณาการหารพีชคณิตของฟังก์ชันและเติมข้อความลงในตารางข้างล่าง

ฟังก์ชัน	โดเมนของฟังก์ชัน	เรนจ์ของฟังก์ชัน	โดเมนร่วม	ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชัน
$f_1=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{2,3,4,5\}$	$\{1,2,3\}$	$\frac{f_1}{g_1}=\{(1,2),(2,\frac{3}{2}),(3,\frac{4}{3})\}$
$g_2=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$		
$f_2=\{(1,3),(2,1),(3,2),(4,0)\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{3,1,2,0\}$	$\{1,2,3\}$	$\frac{f_2}{g_2}=\{(1,\frac{3}{2}),(2,\frac{1}{3}),(3,\frac{2}{0})\}$
$g_2=\{(1,2),(2,3),(3,0)\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3,0\}$		$=\{(1,\frac{3}{2}),\ (2,\frac{1}{3})\}$
$f_3=\{(1,3),(2,4),(3,5)\}$	______	______	______	$\frac{f_3}{g_3}=$ ______________
$g_3=\{(1,1),(2,4),(3,0)\}$	______	______		
$f_4=\{(x,y)\ /\ y=2x^2+2x\}$	$\{x/x\in R\}$	$\{y/y=2x^2+2x\}$	$\{x/x\in R\}$	$\frac{f_4}{g_4}=\{(x,y)/\ y=\frac{2x^2+2x}{x+1}\}$
$g_4=\{(x,y)\ /\ y=x+1\}$	$\{x/x\in R\}$	$\{y/y=x+1\}$	______	$=\{(x,y)/y=2x\}$
$f_5=\{(x,y)\ /\ y=x^3+x^2+x\}$	______	______		$\frac{f_5}{g_5}=$ ______________
$g_5=\{(x,y)\ /\ y=x\}$	______	______		

จากตารางจะเห็นว่า มีฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชันนำเอาฟังก์ชันมาหารกันได้ฟังก์ชันใหม่ โดยมีลักษณะดังนี้

1) โดเมน $\frac{f}{g}$ คือ ______________________ (สังเกตโดเมนร่วม)

2) เรนจ์ของ $\frac{f}{g}$ คือ ______________________

ข้อสังเกต

ในกรณีเรนจ์เป็นจำนวนที่หาไม่ได้ เช่น $\frac{f_2}{g_2}$ ที่ $(3, \frac{2}{0})$ จะตัดคู่อันดับนี้ทิ้ง เพราะ $\frac{2}{0}$ ไม่มีความหมาย

สรุป

> **นิยาม** การหารพีชคณิตของฟังก์ชัน หมายถึง การนำฟังก์ชันตั้งแต่สองฟังก์ชันขึ้นไปมาหารกันโดยที่ค่าของฟังก์ชันใหม่ที่ x ได้จากการนำเอาค่าฟังก์ชันที่ x เหล่านั้นมาหารกัน แต่ฟังก์ชันที่นำมาหารค่าจะต้องไม่เป็นศูนย์ และสามารถเขียนอยู่ในรูปสัญลักษณ์ได้ ดังนี้
>
> $$\frac{f}{g} = \left\{(x,y) \ / \ y = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ และ } x \in D_f \cap D_g \text{ และ} g(x) \neq 0\right\}$$
>
> โดยที่ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มี D_f และ D_g เป็นโดเมนของฟังก์ชัน f และ g ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f = \{(1,5), (2,10), (3,15), (4,20), (5,25)\}$

$g = \{(1,1), (3,3), (5,5), (7,7)\}$

จงหา $\frac{f}{g}$ และเขียนกราฟ

วิธีทำ

$$D_f = \{1,2,3,4,5\} \ ; \quad D_g = \{1,3,5,7\}$$

$$D_f \cap D_g = \{1,3,5\}$$

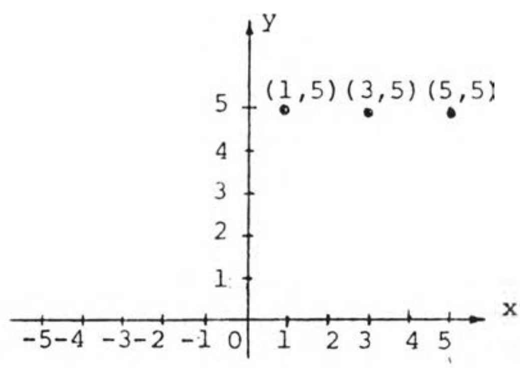
$$\therefore D_{\frac{f}{g}} = \{1,3,5\}$$

จาก $f = \{(1,5), (2,10), (3,15), (4,20), (5,25)\}$

$g = \{(1,1), (3,3), (5,5), (7,7)\}$

ดังนั้น $\frac{f}{g} = \{(1,\frac{5}{1}), (3,\frac{15}{3}), (5,\frac{25}{5})\}$

$= \{(1,5), (3,5), (5,5)\}$



ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 1$

$$g(x) = x + 1$$

จงหา $\frac{f}{g}$ พร้อมทั้งโดเมนและเรนจ์ และเขียนกราฟ

วิธีทำ

$$D_f = \{x / x \in R\} \quad ; \quad D_f = \{x / x \in R\}$$

$$\therefore \quad D_{\frac{f}{g}} = \{x / x \in R\}$$

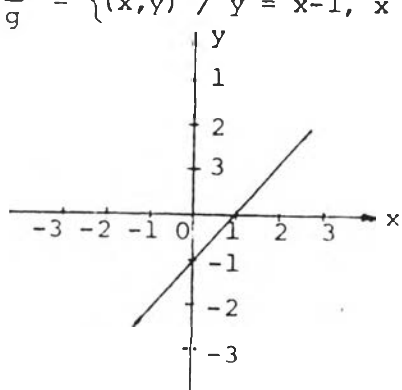
$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad ; \quad g(x) \neq 0 \quad \text{(นิยาม)}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{x + 1} \quad ; \quad x \neq -1$$

$$= \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} \quad , \quad x \neq -1$$

$$= x - 1 \quad , \quad x \neq -1$$

ดังนั้น $\frac{f}{g} = \{(x,y) \ / \ y = x-1, \ x \neq -1\}$



ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f = \{(-3,3), (-2,2), (-1,1), (0,0), (1,-1), (2,-2), (3,-3)\}$

$g = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$

จงหา $\frac{f}{g}$ และ $\frac{g}{f}$

วิธีทำ

D_f = ________________

D_g = ________________

$D_f \cap D_g$ = ________________

1) $D_{\frac{f}{g}}$ = ________________

$\therefore \frac{f}{g}$ = ________________________

2) $D_{\frac{g}{f}}$ = ________________

$\therefore \frac{g}{f}$ = ________________________

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $f(x) = x + 1$

$g(x) = x^2$

จงหา $(\frac{f}{g})(x)$

วิธีทำ

D_f = ________________

D_g = ________________

$D_f \cap D_g$ = ________________

$\therefore D_{\frac{f}{g}}$ = ________________

จาก $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

= ________________

ดังนั้น $(\frac{f}{g})(x)$ = ________________

<u>บัตรแบบฝึกหัดหรือบัตรงาน</u>

<u>เรื่อง</u> 5. พีชคณิตของฟังก์ชัน

5.4 การหารพีชคณิตของฟังก์ชัน

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหา $(\frac{f}{g})(x)$ พร้อมทั้งบอกโดเมนของฟังก์ชันที่เป็นผลลัพธ์ เมื่อกำหนด $f(x)$ และ $g(x)$ ดังต่อไปนี้

(1) $f(x) = x - 2$, $g(x) = 3x + 1$

(2) $f(x) = x^2$, $g(x) = 4$

(3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 4$

(4) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x) = x + 1$

(5) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x) = (x - 1)^2$

(6) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{เมื่อ } x \neq 0 \\ 1 & \text{เมื่อ } x = 0 \end{cases}$, $g(x) = \frac{2}{x - 1}$

<u>เฉลยแบบฝึกหัด</u>

1. (1) $(\frac{f}{g})(x) = \frac{x-2}{3x+1}$ $\qquad D_{\frac{f}{g}} = \{x / x \neq \frac{-1}{3}\}$

(2) $(\frac{f}{g})(x) = \frac{x^2}{4}$ $\qquad D_{\frac{f}{g}} = R$

(3) $(\frac{f}{g})(x) = \frac{1}{4x}$ $\qquad D_{\frac{f}{g}} = \{x / x \neq 0\}$

(4) $(\frac{f}{g})(x) = \frac{1}{(x+1)(x-1)}$ $\qquad D_{\frac{f}{g}} = \{x / x \neq \pm 1\}$

(5) $(\frac{f}{g})(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$ $\qquad D_{\frac{f}{g}} = \{x / x \neq 1\}$

(6) $(\frac{f}{g})(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2x} & \text{เมื่อ } x \neq 1 \text{ และ } x \neq 0 \\ \frac{-1}{2} & \text{เมื่อ } x = 0 \end{cases}$

$D_{\frac{f}{g}} = \{x / x \neq 1\}$

บัตรทดสอบหรือบัตรปัญหา

เรื่อง 5. พีชคณิตของฟังก์ชัน

5.4 การหารพีชคณิตของฟังก์ชัน

คำสั่ง จงทำเครื่องหมายกากบาท (X) ลงในวงเล็บตรงกับข้อ ก หรือ ข หรือ ค หรือ ง ในกระดาษคำตอบซึ่งท่านเห็นว่าถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

---

1. ให้ $f = \{(1,3),(2,5),(3,7),(4,9)\}$ และ

   $g = \{(2,6),(3,8),(4,10)\}$

   ค่าของ $\frac{f}{g}$ คือข้อใด

   ก. $\{(1,\frac{5}{6}),(1,\frac{7}{8}),(1,\frac{9}{10})\}$

   ข. $\{(3,\frac{5}{6}),(3,\frac{8}{7}),(4,\frac{9}{10})\}$

   ค. $\{(2,\frac{6}{5}),(3,\frac{8}{7}),(4,\frac{10}{9})\}$

   ง. $\{(2,\frac{5}{6}),(3,\frac{7}{8}),(4,\frac{9}{10})\}$

2. ให้ $f = \{(a,3),(b,2)\}$ และ

   $g = \{(a,0),(c,1),(b,2),(d,3)\}$

   ค่าของ $\frac{f}{g}$ คือข้อใด

   ก. $\{(b,1)\}$

   ข. $\{(a,0),(b,1)\}$

   ค. $\{(b,1),(c,1),(d,3)\}$

   ง. $\{(a,0),(c,1),(b,2),(d,3)\}$

3. ให้ $f(x) = x^2 - 1$ และ

   $g(x) = x + 1$

   ค่าของ $(\frac{f}{g})(x)$ คือข้อใด

   ก. x^2

   ข. $x + 1$

   ค. $x - 1$

   ง. $x^2 - 1$

4. ให้ $f = \{(x,y) \,/\, y = x^2 + x\}$ และ

   $g = \{(x,y) \,/\, y = x\}$

   ค่าของ $\frac{g}{f}$ คือข้อใด

   ก. $x^2 - 1$

   ข. $x^2 + x$

   ค. $\frac{1}{x - 1}$

   ง. $\frac{1}{x + 1}$

5. ให้ $f(x) = x^3$, $g(x) = 4$

   ค่าของ $(\frac{f}{g})(x)$ คือข้อใด

   ก. $4x^3$

   ข. $\frac{x^3}{4}$

   ค. $x^3 + 4$

   ง. $x^3 - 4$

6. ให้ $f(x) = x^2 + 3x + 2$ และ

   $g(x) = x + 2$

   ค่าของ $(\frac{f}{g})(2)$ คือข้อใด

   ก. 1

   ข. 2

   ค. 3

   ง. 4

7. ให้ $f = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$ และ

$g = \{(2,5),(3,0),(4,11),(6,17),(7,20)\}$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือข้อใด

ก. $\{2,4\}$

ข. $\{2,3,4\}$

ค. $\{1,2,3,4,5\}$

ง. $\{2,3,4,6,7\}$

8. ให้ $f(x) = 4x$ และ $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$ โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือข้อใด

ก. $\{x \,/\, x \neq 0\}$

ข. $\{x \,/\, x \in R\}$

ค. $\{x \,/\, -5 < x < 5\}$

ง. $\{x \,/\, -5 \leqslant x \leqslant 5\}$

9. ให้ $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{เมื่อ } x > 0 \\ -2 & \text{เมื่อ } x \leqslant 0 \end{cases}$, $g(x) = x + 1$ โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือข้อใด

ก. $\{x \,/\, x \neq 0\}$

ข. $\{x \,/ x \neq -1\}$

ค. $\{x \,/\, x \leqslant 0\}$

ง. $\{x \,/\, x \in R\}$

10. ข้อใดถูกต้อง

ก. $\frac{f}{g} = \{(x,y) \,/\, y = \frac{f(x)}{g(x)}$ และ $x \in D_f$ และ $g(x) \neq 0\}$

ข. $\frac{f}{g} = \{(x,y) \,/\, y = \frac{f(x)}{g(x)}$ และ $x \in D_g$ และ $f(x) \neq 0\}$

ค. $\frac{f}{g} = \{(x,y) \,/\, y = \frac{f(x)}{g(x)}$ และ $x \in D_f \cap D_g$ และ $g(x) \neq 0\}$

ง. $\frac{f}{g} = \{(x,y) \,/\, y = \frac{f(x)}{g(x)}$ และ $x \in D_f \cup D_g$ และ $g(x) \neq 0\}$

เฉลยข้อทดสอบ

1. ง
2. ก
3. ค
4. ง.
5. ข
6. ค
7. ข
8. ค
9. ข
10. ค

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์การเรียนวิชาคณิตศาสตร์

เรื่อง "ฟังก์ชัน"

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบฉบับนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อต้องการวัดผลสัมฤทธิ์ในการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง "ฟังก์ชัน"
2. แบบทดสอบฉบับนี้มีจำนวน 40 ข้อ กรุณาตอบให้ครบทุกข้อ
3. วิธีตอบแบบทดสอบฉบับนี้ ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ให้ตรงกับอักษร ก ข ค หรือ ง ซึ่งตรงกับตัวเลือกที่นักเรียนเลือกตอบในกระดาษคำตอบ

ตัวอย่าง

(o) ถ้า $x + 1 = 2$ แล้ว x มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 0

ข. 1

ค. 2

ง. 3

กระดาษคำตอบ

(o)	ก	ข	ค	ง
	X			

เมื่อนักเรียนคิดว่าข้อ ก ถูก

(o)	ก	ข	ค	ง
	~~X~~	X		

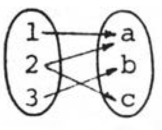
เมื่อนักเรียนต้องการจะเปลี่ยนคำตอบจาก ก เป็น ข

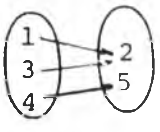
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์การเรียนวิชาคณิตศาสตร์

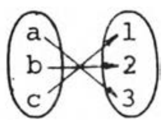
เรื่อง "ฟังก์ชัน"

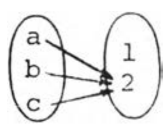
จุดประสงค์ที่ 1 นักเรียนสามารถบอกการเป็นฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ให้

1. แผนภาพในข้อใดไม่เป็นฟังก์ชัน

ก. 

ข. 

ค. 

ง. 

2. ความสัมพันธ์ในข้อใดเป็นฟังก์ชัน

ก. $\{(1,1),(2,1),(3,1),(4,5),(1,2)\}$

ข. $\{(1,1),(2,2),(0,4),(3,1),(1,1)\}$

ค. $\{(0,1),(0,4),(1,1),(1,2),(2,3)\}$

ง. $\{(1,2),(1,3),(1,4)\}$

3. ให้ $A = \{1,2,3\}$; $B = \{0,1,2,\ldots,10\}$ แล้วความสัมพันธ์ข้อใดไม่เป็นฟังก์ชัน

ก. $\{(x,y) \in A \times B \ / \ y = x^2\}$

ข. $\{(x,y) \in A \times B \ / \ y = 2^x\}$

ค. $\{(x,y) \in A \times B \ / \ y = x\}$

ง. $\{(x,y) \in A \times B \ / \ x = 2\}$

4. ให้ A เป็นเซตของครูในโรงเรียนแห่งหนึ่ง f ในข้อใดไม่เป็นฟังก์ชัน

ก. f เป็นเซตของคู่อันดับ (x,y) โดยที่ $x \in A$ และ y เป็นอายุปัจจุบันของ x

ข. f เป็นเซตของคู่อันดับ (x,y) โดยที่ $x \in A$ และ y เป็นน้ำหนักปัจจุบันของ x

ค. f เป็นเซตของคู่อันดับ (x,y) โดยที่ $x \in A$ และ y เป็นเพศของ x

ง. f เป็นเซตของคู่อันดับ (x,y) โดยที่ $x \in A$ และ y เป็นเพื่อนของ x

5. ความสัมพันธ์ข้อใดไม่เป็นฟังก์ชัน

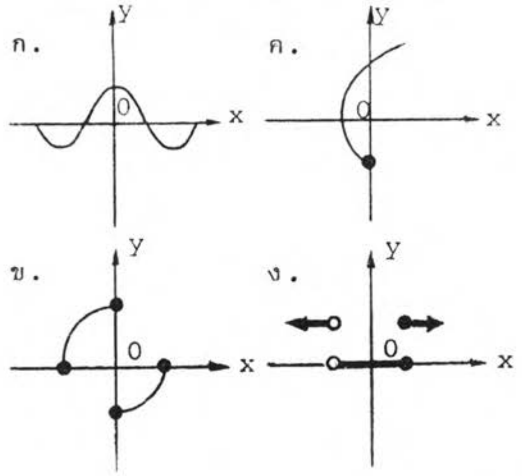
ก. $\{(x,y) \in R \times R \ / \ y = 1-x\}$

ข. $\{(x,y) \in R \times R \ / \ y = \frac{1}{x+1}\}$

ค. $\{(x,y) \in R \times R \ / \ x = |y|\}$

ง. $\{(x,y) \in R \times R \ / \ y = x^2\}$

6. กราฟของความสัมพันธ์ข้อใดเป็นฟังก์ชัน



<u>จุดประสงค์ที่ 2</u> นักเรียนสามารถบอกฟังก์ชันจาก A ไป B จาก A ไปทั่วถึง B และหนึ่งต่อหนึ่งได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้

---

7. ให้ $A = \{1,2,3\}$; $B = \{a,b,c,d\}$ และ $f = \{(1,c),(3,d),(2,a)\}$ ข้อใด<u>ไม่</u>ถูกต้อง

ก. f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

ข. R_f เป็นสับเซตของ B

ค. f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ง. f เป็นฟังก์ชันจาก B ไป A

---

8. ให้ $A = \{a,b,c,d\}$ และ $B = \{1,2,3,4\}$ ถ้า $f = \{(a,1),(b,4),(c,3),(d,2)\}$ ข้อใด <u>ไม่</u>ถูกต้อง

ก. f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ข. f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

ค. f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

ง. f เป็นฟังก์ชันจาก B ไปทั่วถึง A

9. ให้ $A = \{0,1,-1,2,-2...,5,-5\}$ ฟังก์ชันในข้อใด<u>ไม่</u>เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ก. $\{(x,y) \in A \times A \;/\; y = 2x+1\}$

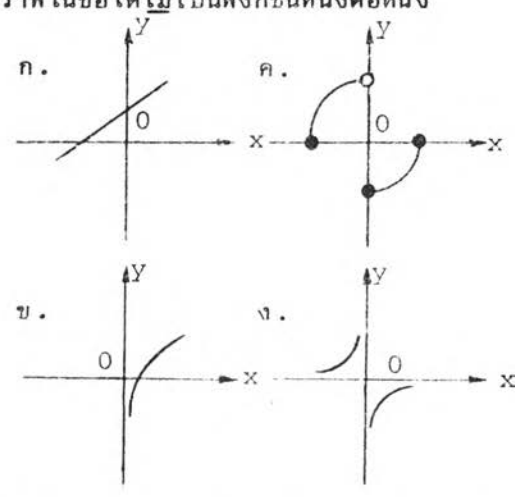
ข. $\{(x,y) \in A \times A \;/\; y = 5\}$

ค. $\{(x,y) \in A \times A \;/\; y = x^2 - 1,\; 0 < x < 5\}$

ง. $\{(x,y) \in A \times A \;/\; y = x-1\}$

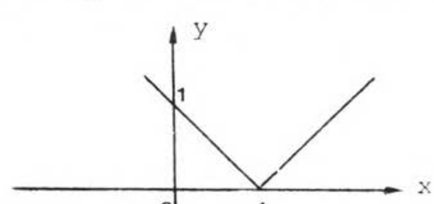
---

10. กราฟในข้อใด<u>ไม่</u>เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง



<u>จุดประสงค์ที่ 3</u> นักเรียนสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้

11.



จากรูปเป็นกราฟของฟังก์ชันข้อใด

ก. $y = |x|-1$

ข. $y = |x|+1$

ค. $y = |x-1|$

ง. $y = |x+1|$

12. จุดในข้อใดไม่อยู่บนกราฟของ $g(x) = |2x-1|$

ก. (3,5)

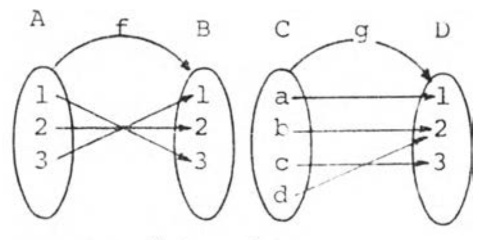
ข. (-2,5)

ค. (0,-1)

ง. (-5,11)

จุดประสงค์ที่ 4 นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันที่ x ได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดค่า x ให้

13.



จากแผนภาพข้อใดถูกต้อง

ก. $f(1) = g(a)$

ข. $f(3) = g(d)$

ค. $f(2) = g(c)$

ง. $f(3) = g(a)$

---

14. ให้ $g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & 0 < x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$ ข้อใดถูกต้อง

ก. $g(-1) = 1$

ข. $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

ค. $g(\frac{1}{2})+g(-1) = -\frac{1}{2}$

ง. $g(3) + g(1) = 2$

---

15. ให้ $f(x) = 5x + b$ ถ้ากราฟผ่านจุด (-1,1) ค่า b ตรงกับข้อใด

ก. 4

ข. -4

ค. 6

ง. -6

---

16. ข้อใดเป็นฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของสามเหลี่ยม (A) กับความยาวของฐาน (a) ถ้าส่วนสูงของสามเหลี่ยมเท่ากับหนึ่งในสามของฐาน

ก. $A = \frac{1}{6}a$

ข. $A = \frac{1}{2}a^2$

ค. $A = \frac{1}{3}a^2$

ง. $A = \frac{1}{6}a^2$

จุดประสงค์ที่ 5 แก้สมการและอสมการกำลังสองได้อย่างถูกต้อง

---

17. เซตคำตอบของ $x^2 + x - 3 > 4$ ตรงกับข้อใด

ก. $\{x / x > 3$ หรือ $x < -4\}$

ข. $\{x / x > 3$ และ $x < -4\}$

ค. $\{x / -4 < x < 3\}$

ง. $\{x / x > 3\}$

<u>จุดประสงค์ที่ 6</u> แก้ปัญหาเกี่ยวกับค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดได้อย่างถูกต้อง

18. ข้อใดคือจุดวกกลับของกราฟ

$f(x) = 3x^2+x+5$

ก. $(\frac{1}{6}, \frac{61}{12})$

ข. $(-\frac{1}{6}, \frac{59}{12})$

ค. $(\frac{59}{12}, -\frac{1}{6})$

ง. $(\frac{61}{12}, \frac{1}{6})$

19. ให้ $f(x) = 1+2x^2+3x$ ข้อใดถูกต้อง

ก. ค่าต่ำสุดคือ $-\frac{1}{8}$

ข. ค่าสูงสุดคือ $-\frac{1}{8}$

ค. ค่าต่ำสุดคือ $-\frac{5}{4}$

ง. ค่าสูงสุดคือ $-\frac{5}{4}$

20. นักจิตวิทยาพบว่าความสามารถของนักเรียน (C) ที่จะเรียนสิ่งใหม่ ๆ ขึ้นอยู่กับอายุ t (ปี) ของผู้เรียนโดยที่ $C = 24+60t-\frac{3}{2}t^2$ อายุที่มีความสามารถในการเรียนรู้สูงสุดตรงกับข้อใด

ก. 15 ปี

ข. 20 ปี

ค. 25 ปี

ง. 30 ปี

21. การกั้นรั้วเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าโดยเปิดรั้วด้านยาวด้านหนึ่งลงคลอง ถ้ารั้วทั้งสามด้านยาว 40 เมตร จะต้องกั้นรั้วให้กว้างยาวตรงกับข้อใด จึงจะทำให้ได้พื้นที่มากที่สุด

ก. กว้าง 5 เมตร ยาว 30 เมตร

ข. กว้าง 10 เมตร ยาว 10 เมตร

ค. กว้าง 10 เมตร ยาว 20 เมตร

ง. กว้าง 15 เมตร ยาว 10 เมตร

<u>จุดประสงค์ที่ 7</u> นักเรียนสามารถหาฟังก์ชันคอมโพสิท ได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้

22. ให้ $f = \{(a,0),(b,1),(c,1),(d,2),(e,2)\}$ และ

$g = \{(0,c),(1,b),(2,a)\}$

ค่า gof ตรงกับข้อใด

ก. $\{(a,c),(b,b),(c,b)\}$

ข. $\{(a,c),(b,b),(c,b),(d,a),(e,a)\}$

ค. $\{(0,1),(1,1),(2,0),(d,2),(e,2)\}$

ง. $\{(0,1),(1,1),(2,0)\}$

23. ข้อใดไม่มี gof

ก. $f(x) = 2x$; $g(x) = x+3$

ข. $f = \{(a,1),(b,3),(c,3)\}$

$g = \{(1,5),(2,7),(3,7)\}$

ค. $f(x) = x^2+2x+1$; $g(x) = 3x-1$

ง. $f = \{(1,g),(2,r),(3,p)\}$

$g = \{(p,a),(g,b),(s,d)\}$

24. ให้ $f(x) = 2x$ และ $g(f(x)) = 4x-1$

ค่า $g(x)$ ตรงกับข้อใด

ก. $x-1$

ข. $x+1$

ค. $2x+1$

ง. $2x-1$

25. ให้ $f(x) = 3x-1$ และ $g(x) = x^2+1$

ค่า $(fog)(x-1)$ ตรงกับข้อใด

ก. x^2-2x-2

ข. $3x^2-2x+1$

ค. $3x^2-6x+5$

ง. $9x^2+24x+17$

26. ให้ $f(x) = |x-4|$ และ $g(x) = x^2-1$

ข้อใดคือค่าของ $(fog)(-1)$

ก. 0

ข. -2

ค. 4

ง. 6

27. ให้ $f(x) = \sqrt{x}$ และ $g(x) = x^2-1$

ข้อใดไม่ถูกต้อง

ก. $f^{-1}(3) = 9$

ข. $(fog)(3) = 2\sqrt{2}$

ค. $(gof)(3) = 2$

ง. $(fof^{-1})(3) = 3$

28. ให้ $f(x) = 3x-2$; $g(x) = x^2+1$ และ

$h(x) = x$ ข้อใดคือค่าของ $fo(hog)(2)$

ก. 10

ข. 13

ค. 15

ง. 17

29. ให้ $A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{1,3,4,5\}$

และ $f = \{(1,1),(2,3),(3,4),(4,5)\}$

ข้อใดถูกต้อง

ก. $f^{-1}of$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

ข. fof เป็นฟังก์ชันจาก A ไป A

ค. $f^{-1}of$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไป A

ง. fof^{-1} เป็นฟังก์ชันจาก B ไป A

<u>จุดประสงค์ที่ 8</u> นักเรียนสามารถหาฟังก์ชันอินเวอร์สได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้

30. ให้ $f = \{(1,3),(2,1),(3,0),(4,2)\}$

ข้อใด<u>ไม่</u>ถูกต้อง

ก. $f^{-1}(3) = 0$

ข. $f^{-1}(1) = 2$

ค. $D_{f^{-1}} = \{0,1,2,3\}$

ง. $R_{f^{-1}} = \{1,2,3,4\}$

31. ฟังก์ชันในข้อใดที่มีฟังก์ชันอินเวอร์ส

ก. $f(x) = 2x-1$

ข. $f(x) = x^2$

ค. $f(x) = 5$

ง. $f(x) = |x|$

32. ให้ $g(x) = 3x+5$ ค่า $g^{-1}(x)$ ตรงกับข้อใด

ก. $x+5$

ข. $x-5$

ค. $\frac{x+5}{3}$

ง. $\frac{x-5}{3}$

33. ให้ $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ ค่า $f^{-1}(2)$ ตรงกับข้อใด

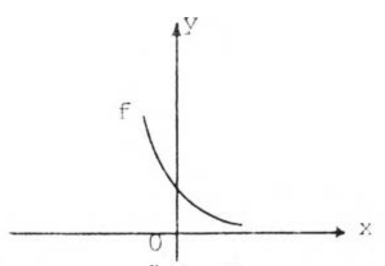
ก. 1

ข. 2

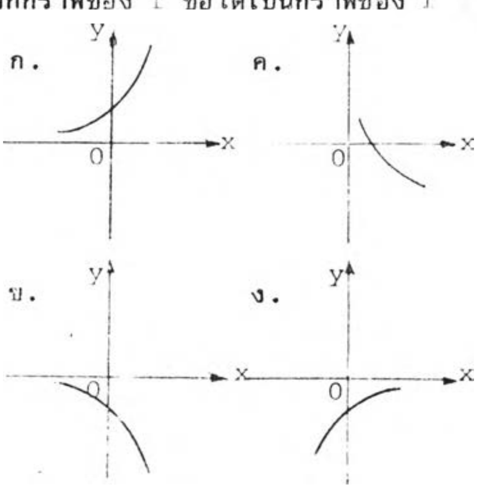
ค. 3

ง. 4

34.



จากกราฟของ f ข้อใดเป็นกราฟของ f^{-1}



35. ให้ $f(x) = x-1$ และ $g(x) = x+1$

ค่า $\dfrac{f^{-1}(g(0))}{g^{-1}(f(0))}$ ตรงกับข้อใด

ก. 0

ข. 1

ค. -1

ง. 2

จุดประสงค์ที่ 9 นักเรียนสามารถหาฟังก์ชันที่ได้จากการบวก ลบ คูณ และหารพีชคณิตของฟังก์ชันได้อย่างถูกต้อง เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้

36. ให้ $f = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$

และ $g = \{(2,5),(3,8),(4,11),(6,17),(7,20)\}$ ข้อใดถูกต้อง

ก. $f+g = \{(2,5),(3,11),(4,11)\}$

ข. $f-g = \{(2,3),(3,5),(4,7)\}$

ค. $f.g = \{(2,10),(3,24),(4,44)\}$

ง. $\frac{f}{g} = (2,\frac{5}{2}),(3,\frac{8}{3}),(4,\frac{11}{4})$

37. ให้ $f(x) = x^2-2x+1$; $g(x) = x+3$

และ $h(x) = 3x-1$ ข้อใดเท่ากับ

$(g+h)(x) + (f-g)(x)$

ก. x^2+4x

ข. x^2+x-4

ค. x^2+x

ง. x^2+4x+4

38. ให้ $f(x) = 2x+1$ ข้อใดเท่ากับ $(fof^{-1})(x)$

ก. x

ข. $x-2$

ค. $2x+1$

ง. $\frac{x-1}{2}$

39. ให้ $g = \{(a,0),(b,4),(c,3),(d,1)\}$

และ $f = \{(a,3),(c,0),(d,5)\}$ ข้อใดถูกต้อง

ก. $D_{\frac{g}{f}} = \{a,c,d\}$

ข. $D_{\frac{f}{g}} = \{a,c,d\}$

ค. $R_{\frac{f}{g}} = \{0,5\}$

ง. $R_{\frac{g}{f}} = \{0,3,\frac{1}{5}\}$

40. ให้ $f(x) = x+2$ และ $g(x) = 5-2x$

ข้อใดถูกต้อง

ก. $D_{\frac{f}{g}} = \{x/x \in R^+\}$

ข. $D_{\frac{f}{g}} = \{x/x \in R\}$

ค. $D_{\frac{f}{g}} = \{x/x \neq \frac{5}{2}\}$

ง. $D_{\frac{f}{g}} = \{x/x \neq -2\}$

ภาคผนวก ค

รายละเอียดการคำนวณ

1. ตัวอย่างการคำนวณค่าความเที่ยง (Reliability) ของแบบทดสอบความรู้พื้นฐานการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "ฟังก์ชัน" และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์การเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "ฟังก์ชัน" โดยใช้สูตรของคูเดอร์ ริชาร์ดสัน 20(KR.20)และการวิเคราะห์รายข้อหาค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) ของข้อสอบแต่ละข้อ
2. ตัวอย่างการคำนวณหาประสิทธิภาพของชุดการเรียนการสอนรายบุคคล โดยคำนวณหาคะแนนมาตรฐาน 80/80
3. การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมทางเดียว (One Way Analysis of Covariance)
4. การเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างมัชฌิมเลขคณิตเป็นรายคู่ตามวิธีของเชฟเฟ (Scheffe's method)

1. แบบทดสอบความรู้พื้นฐานการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "ฟังก์ชัน"

<u>ตารางที่ 3</u> **การคำนวณค่าความเที่ยงของแบบทดสอบความรู้พื้นฐานการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "ฟังก์ชัน" โดยใช้สูตรของคูเดอร์ ริชาร์ดสัน** 20 (KR. 20)

ข้อที่	p	q	pq	ข้อที่	p	q	pq
1	0.56	0.44	0.2464	16	0.44	0.56	0.2464
2	0.52	0.48	0.2496	17	0.46	0.54	0.2484
3	0.40	0.60	0.2400	18	0.56	0.44	0.2464
4	0.54	0.46	0.2484	19	0.48	0.52	0.2496
5	0.65	0.35	0.2275	20	0.52	0.48	0.2496
6	0.61	0.39	0.2379	21	0.42	0.58	0.2436
7	0.76	0.24	0.1824	22	0.30	0.70	0.2100
8	0.43	0.57	0.2451	23	0.67	0.33	0.2211
9	0.72	0.28	0.2016	24	0.68	0.32	0.2176
10	0.61	0.39	0.2379	25	0.36	0.64	0.2304
11	0.63	0.37	0.2331	26	0.50	0.50	0.2500
12	0.51	0.49	0.2499	27	0.38	0.62	0.2356
13	0.78	0.22	0.1716	28	0.40	0.60	0.2400
14	0.71	0.29	0.2059	29	0.56	0.44	0.2464
15	0.50	0.50	0.2500	30	0.35	0.65	0.2275

$$\Sigma pq = 6.9899$$

$$S_x^2 = \frac{n \Sigma fx^2 - (\Sigma fx)^2}{n(n-1)}$$

$$= 26.157153$$

$$r_{xx} = \frac{n}{n-1}\left[1 - \frac{\Sigma pq}{S_x^2}\right]$$

$$= \frac{30}{30-1}\left[1 - \frac{6.9899}{26.157153}\right]$$

$$= 0.75$$

ตารางที่ 4 การคำนวณหาค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) ของข้อสอบแต่ละข้อในแบบทดสอบความรู้พื้นฐานการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "ฟังก์ชัน"

ข้อที่	R_u	R_l	p	r	ข้อที่	R_u	R_l	p	r
1	32	19	0.56	0.28	16	30	10	0.44	0.44
2	28	19	0.52	0.20	17	30	12	0.46	0.40
3	23	13	0.40	0.22	18	33	18	0.56	0.33
4	33	16	0.54	0.37	19	27	17	0.48	0.22
5	37	22	0.65	0.33	20	32	15	0.52	0.37
6	37	18	0.61	0.42	21	30	8	0.42	0.48
7	43	26	0.76	0.37	22	23	4	0.30	0.42
8	27	12	0.43	0.33	23	45	16	0.67	0.64
9	39	26	0.72	0.28	24	41	21	0.68	0.44
10	35	20	0.61	0.33	25	23	10	0.36	0.28
11	36	21	0.63	0.33	26	29	16	0.50	0.28
12	28	18	0.51	0.22	27	23	12	0.38	0.24
13	43	28	0.78	0.33	28	24	9	0.40	0.33
14	42	22	0.71	0.44	29	31	20	0.56	0.24
15	28	17	0.50	0.24	30	22	10	0.35	0.26

2. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์การเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "ฟังก์ชัน"

ตารางที่ 5 การคำนวณค่าความเที่ยงของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์การเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "ฟังก์ชัน" โดยใช้สูตรของคูเดอร์ ริชาร์ดสัน 20 (KR.20)

ข้อที่	p	q	pq
1	0.80	0.20	0.1600
2	0.80	0.20	0.1600
3	.80	0.20	0.1600
4	0.79	0.21	0.1659
5	0.61	0.39	0.2379
6	0.74	0.26	0.1924
7	0.80	0.20	0.1600
8	0.30	0.20	0.1600
9	0.55	0.45	0.2475
10	0.58	0.42	0.2436
11	0.50	0.50	0.2500
12	0.68	0.32	0.2176
13	0.75	0.25	0.1875
14	0.48	0.52	0.2496
15	0.65	0.35	0.2275
16	0.29	0.71	0.2059
17	0.26	0.74	0.1924
18	0.76	0.24	0.1824
19	0.58	0.42	0.2436
20	0.63	0.37	0.2331

ข้อที่	p	q	pq
21	0.66	0.34	0.2244
22	0.66	0.34	0.2244
23	0.48	0.52	0.2496
24	0.79	0.21	0.1659
25	0.63	0.37	0.2331
26	0.72	0.28	0.2016
27	0.66	0.34	0.2244
28	0.80	0.20	0.1600
29	0.31	0.69	0.2139
30	0.72	0.28	0.2016
31	0.60	0.40	0.2400
32	0.30	0.20	0.1600
33	0.26	0.74	0.1924
34	0.72	0.28	0.2016
35	0.67	0.33	0.2211
36	0.80	0.20	0.1600
37	0.68	0.32	0.2176
38	0.33	0.67	0.2211
39	0.48	0.52	0.2496
40	0.55	0.45	0.2475

$$\Sigma pq = 8.2867$$

$$S_x^2 = \frac{n\Sigma fx^2 - (\Sigma fx)^2}{n(n-1)}$$

$$= 37.159021$$

$$r_{xx} = \frac{n}{n-1}\left[1 - \frac{\Sigma pq}{S_x^2}\right]$$

$$= \frac{40}{40-1}\left[1 - \frac{8.2867}{37.159.21}\right]$$

$$= 0.79$$

<u>ตารางที่ 6</u> การคำนวณหาค่าความยากง่าย (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) ของข้อสอบแต่ละข้อในแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์การเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "ฟังก์ชัน"

ข้อที่	R_u	R_l	p	r	ข้อที่	R_u	R_l	p	r
1	60	36	0.80	0.40	21	48	32	0.66	0.26
2	60	36	0.80	0.40	22	47	33	0.66	0.23
3	55	41	0.80	0.23	23	38	20	0.48	0.30
4	55	40	0.79	0.25	24	56	39	0.79	0.28
5	46	28	0.61	0.30	25	47	29	0.63	0.30
6	56	33	0.74	0.38	26	54	33	0.72	0.35
7	58	36	0.80	0.33	27	53	27	0.66	0.43
8	60	39	0.30	0.40	28	56	40	0.80	0.26
9	43	23	0.55	0.33	29	31	7	0.31	0.40
10	50	20	0.58	0.50	30	54	33	0.72	0.35
11	46	14	0.50	0.53	31	45	28	0.60	0.28
12	49	33	0.68	0.26	32	54	42	0.80	0.20
13	53	32	0.75	0.43	33	25	7	0.26	0.30
14	38	20	0.48	0.30	34	55	32	0.72	0.38
15	49	30	0.65	0.31	35	48	33	0.67	0.25
16	26	9	0.29	0.28	36	60	36	0.30	0.40
17	22	10	0.26	0.20	37	53	29	0.68	0.40
18	53	39	0.76	0.23	38	31	9	0.33	0.36
19	43	28	0.53	0.43	39	42	15	0.48	0.45
20	50	26	0.63	0.40	40	43	23	0.55	0.33

2. ชุดการเรียนการ

2.1 ตัวอย่างการคำนวณหา

ตารางที่ 7 คะแนนแบบฝึกหัดและแบบทดสอบ

ชุดที่ / คนที่	1		2		3		4	
1	6	10	5	10	10	14	10	7
2	6	8	5	10	10	14	9	6
3	7	8	5	9	8	12	9	6
4	7	7	5	10	10	12	9	7
5	6	9	5	8	9	12	9	7
6	7	10	5	10	10	14	10	8
7	7	10	5	10	10	14	10	6
8	6	6	4	10	7	14	10	8
9	7	6	5	10	9	14	4	7
10	6	10	5	9	10	12	7	8
11	7	8	5	10	8	14	10	6
12	7	10	4	8	10	12	9	7
13	6	9	4	10	10	12	9	8
14	7	8	5	10	10	12	8	8
15	7	10	5	10	9	12	10	8
16	5	9	4	9	10	12	8	8
17	7	10	5	8	9	12	8	7
18	7	8	5	7	8	12	10	7
19	7	9	5	10	8	12	10	7
20	7	8	5	8	10	10	10	8
คะแนนเต็ม	7	10	5	10	10	14	10	8
ได้รวม	132	175	101	186	185	252	179	144

หมายเหตุ ▨ คะแนนแบบ

□ คะแนนแบบ

2.2 การคำนวณหาประสิทธิภาพของชุดการเรียนการสอนรายบุคคลโดยคำนวณหาคะแนนมาตรฐาน 80/80

80 ตัวแรก คำนวณจากสูตร

คะแนนที่นักเรียนทำแบบฝึกหัดถูกคิดเฉลี่ยเป็นร้อยละ = $\frac{C}{N} \times \frac{100}{A}$

เมื่อ C แทนคะแนนรวมของแบบฝึกหัดนักเรียนทุกคน

N แทนจำนวนนักเรียนทั้งหมด

A แทนคะแนนเต็มของแบบฝึกหัด

80 ตัวหลัง คำนวณจากสูตร

คะแนนที่นักเรียนทำแบบทดสอบถูกคิดเฉลี่ยเป็นร้อยละ = $\frac{S}{N} \times \frac{100}{T}$

เมื่อ S แทนคะแนนรวมของนักเรียนทุกคน

N แทนจำนวนนักเรียนทั้งหมด

T แทนคะแนนเต็มของแบบทดสอบ

จากตารางหัวข้อ 2.1 จะได้

C = 3170

A = 176

N = 20

S = 2664

T = 141

คะแนนที่นักเรียนทำแบบฝึกหัดถูกคิดเฉลี่ยเป็นร้อยละ = $\frac{3170}{20} \times \frac{100}{176}$

= 90.056

คะแนนที่นักเรียนทำแบบทดสอบถูกคิดเฉลี่ยเป็นร้อยละ = $\frac{2664}{20} \times \frac{100}{141}$

= 94.468

นั่นคือประสิทธิภาพของชุดการเรียนการสอนรายบุคคลเท่ากับ 90.056/94.468

3. การวิเคราะห์ความแปรปรวนทางเดียว (One Way Analysis of Covariance)

<u>ตารางที่</u> 8 แสดงคะแนนความรู้พื้นฐาน (x) และผลสัมฤทธิ์การเรียน (y) วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "ฟังก์ชัน" ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนเป็นกลุ่มใหญ่ทั้งชั้น (A) เป็นกลุ่มตามความสามารถ (B) และเรียนด้วยตนเองเป็นกลุ่ม (C)

A			B			C		
X	Y	XY	X	Y	XY	X	Y	XY
26	27	702	13	23	299	18	25	450
27	23	621	12	30	360	12	21	252
28	39	1029	9	16	144	24	33	792
20	25	500	14	24	336	13	33	429
17	18	306	28	34	952	13	21	273
22	28	616	23	31	713	15	27	405
22	19	418	18	28	504	8	24	192
21	24	504	13	30	390	18	29	522
25	24	600	10	19	190	13	25	325
19	19	361	20	28	560	11	26	286
20	25	500	14	16	224	18	27	486
18	31	558	10	26	260	15	20	300
12	25	300	20	27	540	17	33	561
14	19	266	14	25	350	7	31	217
18	27	486	15	21	315	15	34	510
15	22	330	21	29	609	13	33	429
21	13	273	18	24	432	16	36	576
15	29	435	14	20	280	5	30	150
27	35	945	14	26	364	18	28	504
13	22	286	21	37	777	17	32	544
22	31	682	20	34	680	18	33	594
15	19	285	10	29	290	15	33	495
22	22	484	19	22	418	16	30	480
21	33	693	18	23	414	18	37	666
17	34	578	11	21	231	15	38	570
17	29	493	20	29	580	16	30	480
25	23	575	4	19	76	18	34	612
17	28	476	17	27	459	18	26	468
21	16	336	4	22	88	17	36	612
23	21	483	11	16	176	16	31	496
17	19	323	16	13	208	17	31	527
14	24	336	9	20	180	14	29	406
20	32	640	3	15	45	21	37	777
17	27	459	21	25	525	9	31	279
8	26	208	9	20	180	13	15	195
13	34	442	17	30	510	21	18	378
689	912		530	879		548	1057	

Tx = 1767 Ty = 2348 N = nk = 108

3.2 หาค่าผลบวกของกำลังสองของส่วนเบี่ยงเบนระหว่างคะแนน x กับมัชฌิมเลขคณิต (SSx หรือ Σx^2 เมื่อ $x = X-\bar{X}$)

3.2.1 $SS_{\text{ทั้งหมด}} = \Sigma x_{ij}^2 - \frac{T_x^2}{N}$

$SS_{tx} = 26^2 + 27^2 + \ldots + 13^2 + 21^2 - \frac{(1767)^2}{108}$

หรือ $\Sigma x_t^2 = 2838.917$

3.2.2 $SS_{\text{ระหว่างกลุ่ม}} = (T_{x_A}^2 + T_{x_B}^2 + T_{x_C}^2)/n - \frac{T_x^2}{N}$

$SS_{ax} = \frac{(689)^2}{36} + \frac{(530)^2}{36} + \frac{(548)^2}{36} - \frac{(1767)^2}{108}$

หรือ $\Sigma x_a^2 = 421.1666$

3.2.3 $SS_{\text{ภายในกลุ่ม}} = SS_{\text{ทั้งหมด}} - SS_{\text{ระหว่างกลุ่ม}}$

$SS_{wx} = SS_{tx} - SS_{ax}$

$= 2838.917 - 421.1666$

$\Sigma x_w^2 = 2417.75$

3.3 หาค่าผลบวกของกำลังสองของส่วนเบี่ยงเบนระหว่างคะแนน Y กับมัชฌิมเลขคณิต (SS_Y หรือ Σy^2 เมื่อ $y = Y-\bar{Y}$)

3.3.1 $SS_{\text{ทั้งหมด}} = \Sigma Y_{ij}^2 - \frac{T_Y^2}{N}$

$SS_{tY} = 27^2 + 23^2 + \ldots + 15^2 + 18^2 - \frac{(2848)^2}{108}$

หรือ $\Sigma y_t^2 = 3969.185$

3.3.2 $SS_{\text{ระหว่างกลุ่ม}} = (T_{Y_A}^2 + T_{Y_B}^2 + T_{Y_C}^2)/n - \frac{T_Y^2}{N}$

$SS_{aY} = \frac{(912)^2}{36} + \frac{(879)^2}{36} + \frac{(1057)^2}{36} - \frac{(2848)^2}{108}$

หรือ $\Sigma y_a^2 = 498.129$

3.3.3 $SS_{\text{ภายในกลุ่ม}} = SS_{\text{ทั้งหมด}} - SS_{\text{ระหว่างกลุ่ม}}$

$SS_{wY} = SS_{tY} - SS_{aY}$

$= 3969.185 - 498.129$

$\Sigma y_w^2 = 3471.056$

3.4 หาค่าผลบวกของผลคูณของส่วนเบี่ยงเบน (Σxy)

3.4.1 ผลคูณทั้งหมด $= \Sigma(X_{ij}\ Y_{ij}) - \frac{(T_X T_Y)}{N}$

$\Sigma xy_t = 702^2 + 621^2 + \ldots + 195^2 + 373^2 - \frac{(1767)(2848)}{108}$

$= 892.556$

3.4.2 ระหว่างกลุ่ม $= \Sigma(T_{X_j}\ T_{Y_j})/n - \frac{(T_X \cdot T_Y)}{N}$

$\Sigma xy_a = \frac{(689)(912)}{36} + \frac{(530)(879)}{36} + \frac{(548)(1057)}{36}$

$- \frac{(1767)(2848)}{108}$

$= -111.05$

3.4.3 $\Sigma xy_{\text{ภายในกลุ่ม}} = \Sigma xy_{\text{ทั้งหมด}} - \Sigma xy_{\text{ระหว่างกลุ่ม}}$

$\Sigma xy_w = \Sigma xy_t - \Sigma xy_a$

$= 892.556 - (-111.05)$

$= 1003.606$

<u>ตารางที่</u> 9 สรุปค่าของ df, SS_x , SS_Y และ Σxy

แหล่ง (Source)	df	SS_x (Σx^2)	SS_Y (Σy^2)	Σxy
ระหว่างกลุ่ม (among-groups)	3-1 = 2	Σx_a^2 = 421.1666	Σy_a^2 = 498.129	Σxy_a = -111.05
ภายในกลุ่ม (within-groups)	107-2 = 105	Σx_w^2 = 2417.75	Σy_w^2 = 3471.056	Σxy_w = 1003.606
ทั้งหมด (total)	108-1 = 107	Σx_t^2 = 2338.917	Σy_t^2 = 3969	Σxy_t = 892.556

3.5 หาผลบวกของกำลังสองของส่วนที่เหลือ หรือส่วนที่ปรับแล้ว (Computation of Adjusted) นั่นคือ หา $\Sigma y'^2$ หรือ $SS'_Y = \Sigma y^2 - \frac{\Sigma xy^2}{\Sigma x^2}$

3.6.1 $SS'_{tY} = \Sigma y_t^2 - \frac{(\Sigma xy_t)^2}{\Sigma x_t^2}$

$= 3969.185 - \frac{(892.556)^2}{2838.917}$

$\Sigma y_t'^2 = 3688.565$

3.6.2 $SS'_{wY} = \Sigma y_w^2 - \frac{(\Sigma xy_w)^2}{\Sigma x_w^2}$

$= 3471.056 - \frac{(1003.606)^2}{2417.75}$

$= 3054.46$

3.6.3 $SS'_{aY} = SS'_{tY} - SS'_{wY}$

$= 3688.565 - 3054.46$

$= 634.105$

ตารางที่ 10 สรุปผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม

แหล่ง	df	SS'_Y ($\Sigma y'^2$)	MS'_Y	F
ระหว่างกลุ่ม	(k-1) = 3-1 = 2	SS'_{ay} = 634.105	MS'_{ay} = 317.0525	10.795**
ภายในกลุ่ม	k(n-1)-1 = 104	SS'_{wy} = 3054.46	MS'_{wy} = 29.369808	× × ×
ทั้งหมด	N-2 = 108-2 = 106	SS'_{ty} = 3688.565		

*$P < 0.05$ (0.05 $F_{2,104}$ = 3.07)

จากตาราง ปรากฏว่าที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 df (2,104) ค่า F ในตารางมีค่าเท่ากับ 3.07 ค่า F ที่ได้จากการคำนวณเท่ากับ 10.795 ซึ่งมากกว่า 3.07 ดังนั้นผลสัมฤทธิ์การเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนเป็นกลุ่มใหญ่ทั้งชั้น เป็นกลุ่มตามความสามารถและเรียนด้วยตนเองเป็นกลุ่มแตกต่างกัน

4. การเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างมัชฌิมเลขคณิตเป็นรายคู่ตามวิธีของเชฟเฟ (Scheffe's method)

4.1 ปรับค่ามัชฌิมเลขคณิตคะแนนสัมฤทธิ์ผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ด้วยคะแนนความรู้พื้นฐานในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง "ฟังก์ชัน" โดยใช้สมการ

$$\bar{Y}_k' = \bar{Y}_k - \frac{\Sigma xy_w}{\Sigma x_w^2}(\bar{X}_k - \bar{X})$$

เมื่อ k แทน กลุ่ม

$\bar{X}_k$ แทน มัชฌิมเลขคณิตของคะแนน x ในกลุ่ม k

$\bar{Y}_k$ แทน มัชฌิมเลขคณิตของคะแนน Y ในกลุ่ม k

$\bar{X}$ แทน มัชฌิมเลขคณิตของคะแนน x รวมทุกกลุ่ม

4.1.1 หาค่า $\bar{X}_k$, $\bar{Y}_k$, $\bar{X}$ และ $\bar{Y}$ ได้ดังนี้

$$\bar{X}_A = \frac{689}{36} = 19.138889$$

$$\bar{X}_B = \frac{530}{36} = 14.722222$$

$$\bar{X}_C = \frac{548}{36} = 15.222222$$

$$\bar{Y}_A = \frac{912}{36} = 25.333333$$

$$\bar{Y}_B = \frac{879}{36} = 24.416667$$

$$\bar{Y}_C = \frac{1057}{36} = 29.361111$$

$$\bar{X} = \frac{1767}{108} = 16.361111$$

4.1.2 $\Sigma xy_w = 1003.606$

$\Sigma x_w^2 = 2417.75$

4.1.3 ค่าเฉลี่ยของ Y ที่ปรับแล้ว ($\bar{Y}_k'$) จากสูตร

$$\bar{Y}_k' = \bar{Y}_k - \frac{\Sigma xy_w}{\Sigma x_w^2}(\bar{X}_k - \bar{X})$$

$\bar{Y}_A' = 24.18028$

$\bar{Y}_B' = 25.096968$

$\bar{Y}_C' = 29.833863$

4.2 เปรียบค่าเฉลี่ยที่ปรับแล้วโดยวิธีของเชฟเฟ จากสูตร

$$d = \sqrt{\frac{2(k-1)(\text{tabled } F)(MS'_{wY})}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(3-1)(3.07)(29.369808)}{36}}$$

$$= 3.1651805$$

<u>ตารางที่ 11</u> แสดงความแตกต่างของค่าเฉลี่ยรายคู่

กลุ่ม		C	A	B
	$\bar{Y}'_k$	29.333863	24.18028	25.096968
C	29.833863	-	5.653583*	4.736895*
A	24.18028			0.916688

*$p < 0.05$

ความแตกต่างของค่ามัชฌิมเลขคณิตของคะแนนผลสัมฤทธิ์การเรียนวิชาคณิตศาสตร์แต่ละคู่ในตารางแสดงว่า โดยเฉลี่ยแล้วนักเรียนกลุ่มที่เรียนเป็นกลุ่มใหญ่ทั้งชั้น และเรียนเป็นกลุ่มตามความสามารถมีผลสัมฤทธิ์การเรียนวิชาคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกันที่ระดับความมีนัยสำคัญ 0.05

นักเรียนกลุ่มที่เรียนด้วยตนเองเป็นกลุ่มมีผลสัมฤทธิ์สูงกว่านักเรียนกลุ่มที่เรียนเป็นกลุ่มใหญ่ทั้งชั้น และเรียนเป็นกลุ่มตามความสามารถอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ 0.05

ประวัติผู้วิจัย

นายสุรพล ประยงค์พันธ์ เกิดเมื่อวันที่ 27 มกราคม 2504 ที่อำเภอเมือง จังหวัดสมุทรสงคราม สำเร็จการศึกษา การศึกษาบัณฑิตจากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ วิทยาเขตบางเขน เมื่อปีการศึกษา 2526 และเข้าศึกษาต่อในสาขาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชามัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2528 ปัจจุบันเป็นอาจารย์หมวดวิชาคณิตศาสตร์ โรงเรียนวัดเพลง "โสภณศิริราษฎร์" อำเภอวัดเพลง จังหวัดราชบุรี