บทที่ 2

ทฤษฎีและเอกสารที่เกี่ยวข้อง

2.1 พัฒนาการของทฤษฎีบีม

2.1.1 ทฤษฎีของออยเลอร์

แขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดียว สามารถพิจารณาเสมือนบีมท่อนหนึ่ง ในส่วนของทฤษฎีได้มีการนำเอาทฤษฎีของ ออยเลอร์-เบอร์นูลี (Euler-Bernoulli) มาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ อธิบายการเคลื่อนที่ของบีมดังนี้

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

เมื่อ E คือ ค่ามอดูลัสของยัง (Young's modulus)

I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของภาคตัดขวาง (moment of inertia of the cross section)

EI คือ ความเกร็งต้านการโค้งงอ (flexural rigidity of beam)

A คือ พื้นที่ภาคตัดขวางของบีม (area of the cross-section)

ρ คือ ความหนาแน่นของมวล (density of the material)

$y = y(x,t)$ คือ ฟังก์ชันของระยะขจัด (displacement function)

ตัวอย่างการสร้างแบบจำลองนี้ได้แก่ การสร้างแบบจำลองของแบลเลสซาและคณะ (Bellezza et al.) [4]

2.1.2 ทฤษฎีของเรเลห์

เรเลห์ (Rayleigh) ได้พัฒนาสมการของออยเลอร์-เบอร์นูลีให้ดีขึ้นโดยพิจารณาผลกระทบจากความเฉื่อยของการหมุน (Rotary inertia) ได้สมการการเคลื่อนที่ของบีมดังนี้

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}-I_\rho\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2}+\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

โดยที่ I_ρ คือโมเมนต์ความเฉื่อยของการหมุน

2.1.3 ทฤษฎีของทิมอสเชนโก

ในปี ค.ศ. 1971 ทิมมอสเชนโก (Timoshenko) ได้พัฒนาสมการของเรเลห์ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้นโดยพิจารณาผลกระทบอันเนื่องมาจากความเค้นเฉือน (transverse shear) ที่มีผลต่อบีมสามารถสร้างสมการการเคลื่อนที่ของบีมได้ดังนี้

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-I_\rho\left(1-\frac{E}{\kappa^2 G}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\rho^2 I}{\kappa^2 G}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0$$

เมื่อ G คือ มอดูลัสความแข็งของเนื้อสาร (modulus of the material) เป็นค่าที่บ่งบอกว่าวัตถุนั้นมีความเปราะมากน้อยเพียงใด เช่น การหักลวด กับหักชอกล์ ลวดจะมีความยืดหยุ่นมากกว่าชอกล์ นั่นคือลวดจะมีค่า E มากแต่ชอกล์จะมีค่า G มาก

κ คือ สัมประสิทธิ์ความเค้นของทิมอสเชนโก (Timoshenko's coefficient)

2.1.4 ทฤษฎีของนักวิทยาศาสตร์ท่านอื่นๆ

ในการศึกษาแบบจำลองคณิตศาสตร์ในระยะต่อมามีผู้ศึกษาพบว่าในบีมมีพื้นที่ตัดขวางเป็นรูปสี่เหลี่ยมพื้นผ้าจะมีผลกระทบของการแปรรูปของความเค้นเฉือนต่อการสั่นของบีมมีน้ำหนักเป็นสามเท่าของผลกระทบความเฉื่อยของการหมุน ตัวอย่างของแบบจำลองของแขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดียวที่มีการพิจารณาผลกระทบดังกล่าวนี้ศึกษาโดย ชี และเชน (Qi and Chen) [5]

ในระยะต่อมาได้มีการนำเอาทฤษฎีต่างๆมาพัฒนารวมทั้งการนำเอาทฤษฎีใหม่ๆมาใช้ในการแก้ปัญหาและสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของแขนกลดังนี้

ในปี ค.ศ. 1984 แคนนอน และ ชมิช (Cannon and Schmitz) [1] ได้ศึกษาและวิจัยเกี่ยวกับแบบจำลองคณิตศาสตร์ของแขนกลอ่อนตัวจากแนวทางของจีวอเตอร์ [1970] โดยอาศัยหลักการเคลื่อนที่แบบจำลองสำหรับแขนกล และต้องการออกแบบในตำแหน่งปลายของแขนกลโดยวิเคราะห์และจัดสมการให้อยู่ในรูปแบบทั่วๆไป ในการออกแบบจำลองสำหรับบีมได้นำทฤษฎีของ ออยเลอร์-เบอร์นูลีมาใช้ ในการสร้างแบบจำลองของ แคนนอน และ ชมิช ในครั้งนั้นยังไม่มีการพิจารณาความเฉื่อยของการหมุน และการเปลี่ยนของความเค้น และได้นำหลัก

ของ แฮมินตัน (Hamilton's principle) ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ จะได้รูปแบบของสมการเริ่มต้นของอนุพันธ์ย่อยอันดับสี่และสี่เงื่อนไขขอบเขต

ในปี ค.ศ. 1988 เบโย (Bayo) [3] ได้สร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์สำหรับแขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดียวโดยวิธีไฟไนท์ อีลีเมนท์ (finite element method)

ใน ค.ศ. 1990 บัท ทานากะ และมิอุ (Bhat , Tanaka and Miu) ได้ศึกษาและสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ของแขนกลชนิดนี้โดยใช้เทคนิคของ ลาปลาซ ทรานส์ฟอร์ม (Laplace transform technique) ในการแก้ปัญหา การพิจารณาในส่วนของบีมนั้นจะพิจารณาจากตำแหน่งของจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งของบีมซึ่งเปรียบเสมือนในลักษณะของบีมแบบปลายหนุน-ปลายอิสระ (pinned-free beam) ซึ่งการศึกษาคุณสมบัติทางกายภาพของบีม โดยอาศัยคำตอบของสมการทางคณิตศาสตร์ (mathematical solutions)

ในปี ค.ศ. 1992 เจียง (Jiang) [8] ได้สร้างแบบจำลองของแขนกลอ่อนตัวชนิดนี้โดยใช้หลักของแฮมิตันเช่นกัน

ในปี ค.ศ. 1993 เลา (Lao) ได้สร้างแบบจำลองนี้โดยศึกษาจากทฤษฎีใหม่ (new theory) และอาศัยหลักการของ เอ- ดีเพนเดนท์ ดิฟเฟอร์เรนเทียล (A-dependent differential operators) ในหลักการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และในปีเดียวกันนี้ คูบิกา และแวง (Kubica and Wang) [6] ได้สร้างแบบจำลองชนิดนี้เช่นกันได้พิจารณาปลายติดแน่น-ปลายอิสระ (clamp-free beam) ได้ศึกษาแนวทางของกริชนันโดยเอาทฤษฎีบีมออยเลอร์-เบอร์นูลีมาใช้ในการสร้างแบบจำลอง

ในปี ค.ศ. 1994 ลิน และ เลวีส (Lin and Lawis) [4] ได้สร้างทฤษฎีโดยอาศัยสมมติฐานวิธีการสมมติโหมดเช่นกัน ซีนาน และ โครามิ (Zeinoun and Khorrami) ได้สร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์โดยพิจารณาในกรณีแบบปลายติดแน่น-ปลายอิสระเช่นกัน โดยใช้หลักการการเคลื่อนที่ของ ลากราน (Lagrangian dynamics) ใช้แก้ปัญหาและสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทั้งหมด

2.2 ชนิดของความหน่วงสำหรับบีม

ในที่นี้จะกล่าวถึง

2.2.1 ความหน่วงภายนอก (external damping)

2.2.1.1 ความหน่วงอากาศ (air damping) หรือ เรียกอย่างหนึ่งว่า ความหนืดอากาศ (viscous air damping) ซึ่งเกิดจากผลกระทบภายนอกที่มากระทบต่อแขนกล ซึ่งมีรูปแบบของสมการที่เขียนได้ในรูปทั่วไปดังนี้

$$\gamma y_t(x,t)$$

โดยที่ $y_t(x,t) = \dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t}$

γ เป็นค่าคงที่ของความหน่วงอากาศ

$y_t(x,t)$ เป็นค่าความเร็วของแขนในทิศทางตัดขวาง

2.2.2 ความหน่วงภายใน (internal damping)

2.2.2.1 ความหน่วงเควิล-วอจ์ท (Kelvin-Voigt damping) หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า ความหน่วงสเตรน-เรส (strain-rate damping) ซึ่งเป็นความหน่วงที่เกิดจากกลไกภายในของเนื้อสาร รูปแบบสมการเขียนในรูปทั่วๆไปได้ดังนี้

$$\zeta I \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$$

I คือ โมเมนต์ของความเฉื่อย

ζ คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วงสเตรน-เรส

$y(x,t)$ แทนการเคลื่อนที่ตามขวาง

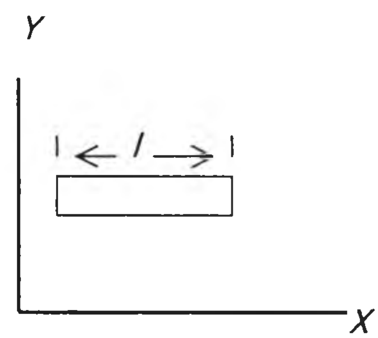
แบบจำลองทั้งหมดที่ได้กล่าวมา และผลกระทบจากความหน่วงชนิดต่างๆยังไม่ได้มีการศึกษาและพิจารณาในหลายๆเงื่อนไข

ต่อไปนี้จะเป็นการศึกษาการสร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ของบีมโดยจะกล่าวถึงรายละเอียดในการสร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ของบีมของออยเลอร์เพื่อจะได้เป็นแนวทางในการสร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ของบีมที่พิจารณาผลกระทบจากความหน่วงต่อไป

2.3 แบบจำลองคณิตศาสตร์ของบีม

2.3.1 สมการบีมของออยเลอร์ (Euler's beam equation)

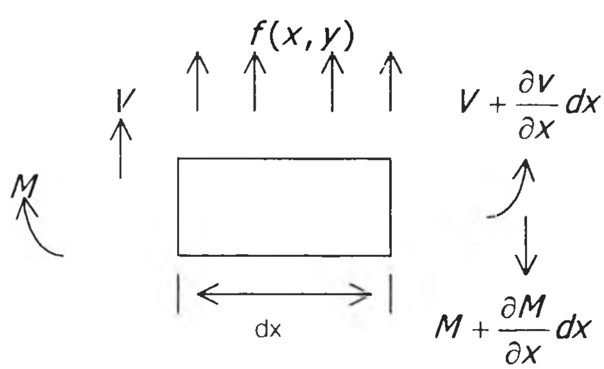
แขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดียวสามารถพิจารณาได้ในรูปของบีม แบบจำลองคณิตศาสตร์ของบีมบรรยายได้ด้วยทฤษฎีของออยเลอร์ (Euler's theory) สมการบีมของออยเลอร์ (Euler) เป็นสมการที่บรรยายปรากฏการณ์ทางกายภาพของบีมในรูปแบบง่ายๆ โดยได้อธิบายถึงการสั่นตามขวางของบีม ดังนี้



รูปที่ 2.1 บีมเอกรูป (uniform beam)

เมื่อ l แทนความยาวของบีม เพื่อความสะดวกในการพิจารณาตัดบีมออกมาให้มีความยาว dx แล้วพิจารณาแรงและโมเมนต์ที่มากระทำกับบีม

พิจารณาบีมส่วนเล็กๆมีความยาว dx ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 ส่วนเล็กๆของบีมเอกรูป

เมื่อ V คือแรงเค้นเฉือน (shear force)

M คือโมเมนต์ของการโค้งงอ (bending moment)

dx คือความยาวส่วนเล็กๆของบีม

$f(x,t)$ คือ แรงที่กระทำต่อความยาวหนึ่งหน่วยของบีม (external force per unit length of the beam)

พิจารณารูปที่ 2.2 มีสิ่งที่มากระทำกับส่วนของความยาว dx 2 อย่างคือ

1. แรงเค้นเฉือนภายใน (internal shear force)
2. โมเมนต์ (moment)

ให้ y = ตำแหน่งที่เบนจากแนวอ้างอิง (deflection)

พิจารณารูปที่ 2.1 ให้ l เป็นความยาวของบีมที่ประกอบด้วยวัสดุเนื้อเดียว (homogenous) และมีหน้าตัดเหมือนกันตลอดทั้งบีม (uniform cross-section) ภายใต้น้ำหนักที่บีมรองรับจะทำให้เกิดการบิดงอและโก่งตัว เรียกเส้นโก่ง (curve of deflection) หรือเส้นโค้งยืดหยุ่น (elastic curve)

ให้แกน X เป็นแกนสมมาตร

จากทฤษฎีการยืดหยุ่นโมเมนต์ของการโค้งงอ (bending moment) $M(x)$ ที่จุด x ใดๆ จะมีความสัมพันธ์กับน้ำหนักต่อหน่วยความยาว $W(x)$ ดังสมการ

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = W(x)$$

โมเมนต์ของการโค้งงอจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับค่าความโค้ง k ของเส้นโค้งยืดหยุ่น ดังสมการ

$$M(x) = EIk$$

จากทฤษฎีเรื่องความโค้งงอจะได้ว่า

$$k = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

เมื่อระยะเบี่ยงจากแนวเดิมมีค่าน้อยๆ ความชัน $y' \approx 0$
ดังนั้นจะได้ว่า

$$k \approx y''$$

จะได้ว่า

$$EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = M$$

โดยที่ M คือโมเมนต์ (moment)

ดังนั้นจะได้

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

จะได้

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \text{ความชัน (slope)}$$

$$EI\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{\partial M}{\partial x} = V \text{ แรงเค้นเฉือน (shear)}$$

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{\partial V}{\partial x} = W(x) \text{ ความเข้มภาระ (load intensity)}$$

พิจารณารูปที่ 2.2 กำหนดได้ดังนี้

$M(x,t)$ คือ โมเมนต์ของการโค้งงอ (bending moment)
$V(x,t)$ คือ แรงเค้นเฉือน (shear force)
$f(x,t)$ คือ แรงที่กระทำต่อความยาวหนึ่งหน่วยของบีม (external force per unit length of the beam)

แรงคงที่ที่มากระทำที่บีมมีปริมาณเป็น

$$\rho A dx \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

โดยที่

ρ คือ ความหนาแน่นของมวล

A คือ พื้นที่หน้าตัดของบีม (beam)

สามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ตามแนวแกน Y ได้ดังนี้

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน จะได้ว่า

$$\sum F_y = ma$$

$$\sum F_y = \rho\, A dx \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \tag{2}$$

ดังนั้นเมื่อรวมแรงทั้งหมดที่กระทำกับบีมที่มีความยาว dx จะได้ดังสมการที่ (2-1)

$$V - (V + dv) + f(x,t)\, dx = \rho\, A(x) dx \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \tag{2-1}$$

สมการโมเมนต์ที่กระทำกับส่วนของบีมที่ยาว dx คือ

$$(M + dM) - (V + dV)dx + f(x,t)dx \frac{dx}{2} - M = 0 \tag{2-2}$$

โดยที่

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx$$

และ $$dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx$$

จากสมการ (2-1) จะได้

$$V - \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) + f(x,t)\, dx = \rho\, A dx \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

$$V - V - \frac{\partial V}{\partial x} dx + f(x,t)\, dx \quad = \quad \rho\, Adx \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

นำ dx หารตลอดจะได้

$$-\frac{\partial V}{\partial x} + f(x,t) \quad = \quad \rho\, A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \tag{2-3}$$

จากสมการ (2-3) จะได้

$$\left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx\right) - \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx\right) dx + f(x,t) dx \frac{dx}{2} - M \quad = \quad 0$$

$$M + \frac{\partial M}{\partial x} dx - Vdx - \frac{\partial V}{\partial x} dxdx + f(x,t) dx \frac{dx}{2} - M \quad = \quad 0$$

$\frac{\partial V}{\partial x}$ คือความเข้มของภาระ ในกรณีนี้ไม่พิจารณาว่าบีมมีความเข้มของภาระ ดังนั้น $\frac{\partial V}{\partial x} \quad = \quad 0$

$f(x,t)$ คือแรงภายนอกที่มากระทำกับบีม ในกรณีไม่คิดแรงภายนอกที่มากระทำ ดังนั้น $f(x,t) \quad = \quad 0$

นำ dx หารตลอดจะได้

$$\frac{\partial M}{\partial x} - V(x,t) \quad = \quad 0$$

ดังนั้นจะเห็นได้ว่า

$$V(x,t) \quad = \quad \frac{\partial M}{\partial x} \tag{2-4}$$

จากสมการ (2-3) และ (2-4) จะได้

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -\rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \qquad (2\text{-}5)$$

จากหลักเบื้องต้นของความโค้งงอของบีม (bending of beam) ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ของการโค้งงอ (bending moment) และการเบนของบีมจากแนวอ้างอิง (deflection) สามารถเขียนสมการได้เป็น

$$M(x,t) = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (2\text{-}6)$$

โดยที่ E คือค่ามอดูลัสของยัง (Young's modulus)

I คือโมเมนต์ความเฉื่อยของภาคตัดขวาง (moment of inertia of cross section)

หรือเรียก EI ว่า ความแกร่งการโค้งงอ

แทนค่าสมการ (2-6) ลงในสมการ (2-5) จะได้สมการการเคลื่อนที่ของการสั่นในแนวขวางที่ไม่เป็นเอกรูป (lateral vibration of nonuniform beam) คือ

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right] + \rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) \qquad (2\text{-}7)$$

จัดรูปใหม่จะได้เป็น

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) \qquad (2\text{-}8)$$

หากคิดเป็นการสั่นอิสระ (free vibration) นั่นคือ $f(x,t) = 0$ จะได้สมการเป็น

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} = -\rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \qquad (2\text{-}9)$$

ในสมการการเคลื่อนที่นี้ มีสมการอนุพันธ์อันดับสี่ (fourth order derivative) เทียบกับ x และมีสมการอนุพันธ์อันดับสอง (second order derivative) ที่เทียบกับเวลา

ดังนั้นสมการ (2-9) ต้องมีสองเงื่อนไขเริ่มต้น (two initial conditions) และสี่เงื่อนไขขอบเขต (four boundary conditions) เพื่อใช้แก้สมการ และสมการคำตอบจะอยู่ในรูป

$$y_n(x,t) \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) q_n(t) \tag{2-10}$$

จัดสมการ (2-9) ใหม่จะได้

$$EI\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \rho\, A\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \quad = \quad 0$$

เอา $\rho\, A$ หารสมการข้างบนตลอดจะได้

$$\frac{EI}{\rho\, A}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \quad = \quad 0$$

กำหนดให้ $a^2 \quad = \quad \dfrac{EI}{\rho\, A}$

จัดรูปสมการข้างบนใหม่จะได้

$$a^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \quad = \quad 0 \tag{2-11}$$

เรียกสมการ (2-11) ว่าสมการบีมของออยเลอร์ (Euler's beam equation) จะแก้สมการ (2-11) ด้วยวิธีแยกตัวแปร (Separation of variables method) ดังนี้

ให้สมการคำตอบของสมการ (2-11) อยู่ในรูป

$$y_n(x,t) \quad = \quad \phi_n(x) q_n(t) \tag{2-11A}$$

โดยที่

$\phi(x)$ เป็นฟังก์ชันระยะทาง x

$q(t)$ เป็นฟังก์ชันของเวลา t

แทนค่าสมการ (2-10) ลงในสมการ (2-11) จะได้

$$a^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4}\left[\phi(x)q(t)\right] + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\phi(x)q(t)\right] = 0$$

$$\frac{a^2}{\phi(x)}\frac{\partial^4 \phi(x)}{\partial x^4} = -\frac{1}{q(t)}\frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2}$$

กำหนดให้

$$\frac{a^2}{\phi(x)}\frac{\partial^4 \phi(x)}{\partial x^4} = -\frac{1}{q(t)}\frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} = \omega^2 \qquad (2\text{-}12)$$

โดย ω เป็นค่าคงที่
ดังนั้นจะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} = -\omega^2 q(t)$$

นั่นคือ

$$\frac{\partial^2 q(t)}{\partial t^2} + \omega^2 q(t) = 0 \qquad (2\text{-}13)$$

จากสมการ (2-12) จัดสมการใหม่จะได้

$$\frac{a^2}{\phi(x)}\frac{\partial^4 \phi(x)}{\partial x^4} = \omega^2$$

$$\frac{\partial^4 \phi(x)}{\partial x^4} = \frac{\omega^2}{a^2}\phi(x)$$

กำหนดให้ $\frac{\omega^2}{a^2} = k^4$

จัดรูปสมการใหม่จะได้

$$\frac{\partial^4 \phi(x)}{\partial x^4} - k^4 \phi(x) = 0 \qquad (2\text{-}14)$$

สมการที่ (2-13) เป็นสมการเอกพันธ์มีสมการช่วยเป็น

$$r^2 + \omega^2 = 0$$

$$r_{(1,2)} = \pm \omega i$$

ดังนั้นจะได้สมการคำตอบของสมการ (2-13) ในรูป

$$q(t) = A'e^{i\omega t} + B'e^{-i\omega t}$$

$$q(t) = A'(\cos\omega t + i\sin\omega t) + B'(\cos\omega t - i\sin\omega t)$$

$$q(t) = A'\cos wt + iA'\sin\omega t + B'\cos\omega t - iB'\sin\omega t$$

$$q(t) = (A' + B')\cos\omega t + i(A' - B')\sin\omega t$$

กำหนดให้ A, B เป็นค่าคงที่ จะได้ความสัมพันธ์

$$A = (A' + B')$$

$$B = i(A' - B')$$

คำตอบของสมการ (2-13) จะอยู่ในรูป

$$q(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{2-15}$$

จากสมการ (2-14) ให้ $\phi(x) = e^{rx}$ โดยที่ r เป็นค่าคงที่ จะได้

$$\frac{\partial^4 e^{rx}}{\partial x^4} - k^4 e^{rx} = 0$$

$$r^4 - k^4 = 0$$

$$(r-k)(r+k)(r^2+k^2) = 0$$

$$r_{(1,2)} = \pm k$$

$$r_{(3,4)} = \pm ik$$

ได้สมการคำตอบอยู่ในรูป

$$\phi(x) = Ce^{kx} + De^{-kx} + Ee^{ikx} + Fe^{-ikx} \quad (2\text{-}16)$$

$$\phi(x) = C(\cosh kx + \sinh kx) + D(\cosh kx - \sinh kx) + E(\cos kx + i\sin kx) + F(\cos kx - i\sin kx)$$

$$\phi(x) = C\cosh kx + C\sinh kx + D\cosh kx - D\sinh kx + E\cos kx + iE\sin kx + F\cos kx - iF\sin kx$$

$$\phi(x) = (C + D)\cosh kx + (C - D)\sinh kx + (E + F)\cos kx + i(E - F)\sin kx$$

ให้ C_1, C_2, C_3, C_4 เป็นค่าคงที่ จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$C + D = C_1$$

$$C - D = C_2$$

$$E + F = C_3$$

$$E - F = C_4$$

จะได้สมการคำตอบอยู่ในรูปของ

$$\phi(x) = C_1\cosh kx + C_2\sinh kx + C_3\cos kx + C_4\sin kx \quad (2\text{-}17)$$

ดังนั้นสามารถเขียนคำตอบสมการบีมของออยเลอร์ได้เป็น

$$y(x,t) = [C_1 \cosh kx + C_2 \sinh kx + C_3 \cos kx + C_4 \sin kx]q(t) \tag{2-18}$$

พิจารณา $q(t)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลาจะได้

$$\omega = k^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{2-19}$$

จะเห็นว่าในสมการ (2-18) มีค่าคงตัวอยู่ 4 ค่า เพื่อหาค่าคงที่ทั้ง 4 ค่าจึงกำหนดเงื่อนไขขอบเขตให้กับบีม เงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดขึ้นจะขึ้นอยู่กับชนิดของบีมดังนี้

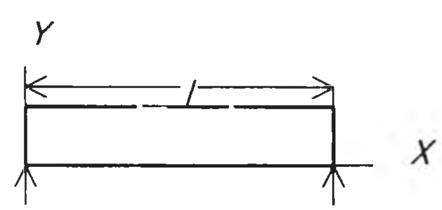
ลักษณะของบีมที่จะพิจารณาจะใช้เพียง 2 ลักษณะดังนี้ คือ

- บีมที่ไม่พิจารณาผลกระทบอันเนื่องมาจากความหน่วง
- บีมที่พิจารณาผลกระทบอันเนื่องมาจากความหน่วง

บีมที่ไม่พิจารณาผลกระทบอันเนื่องมาจากความหน่วง

บีมประเภทนี้แยกพิจารณาได้ 2 กรณีมีดังนี้

บีมกรณีปลายหมุนทั้งสองข้าง (pinned-pinned beam)



รูปที่ 2.3 บีมปลายหมุนทั้งสองข้าง (pinned-pinned beam)

จากรูปที่ 2.3 กำหนดให้บีมวางตัวอยู่ในแนวแกน X ดังนั้นจะได้ว่า

$y = 0$ เนื่องจากไม่มีการเคลื่อนที่ขึ้นลงในแนวแกน Y ที่จุด $x = 0$ และ $x = l$

สร้างเงื่อนไขขอบเขตที่ $x = 0$ และที่ $x = l$ โดยมีกำหนดเงื่อนไขได้ 4 เงื่อนไขดังนี้

1. $y(0,t) = 0$

2. $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0,t) = \frac{M}{EI} = 0$

3. $y(l,t) = 0$

4. $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l,t) = \frac{M}{EI} = 0$

จะใช้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้เพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้ง 4 เพื่อหาค่า C_1 และ C_3

1. $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
2. $\cosh 0 = 1$
3. $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
4. $\sinh 0 = 0$
5. $\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$
6. $\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$

จากสมการที่ (2-18)

$$y(x) = [C_1 \cosh kx + C_2 \sinh kx + C_3 \cos kx + C_4 \sin kx]q(t)$$

ใช้เงื่อนไขข้อที่ 1 จะได้

$$y(0,t) = (C_1 + C_3)q(t)$$

ดังนั้นตามเงื่อนไขข้อที่ 1 จะได้

$$C_1 + C_3 \quad = \quad 0 \tag{2-20}$$

จากเงื่อนไขข้อที่ 2 $\frac{M}{EI} = 0$ ที่ความจุดเริ่มต้นของบีม โมเมนต์ของบีมจะเป็น 0 เพราะไม่มีการหมุนเกิดขึ้นเนื่องจากการตรึงบีมให้อยู่กับที่ ใช้เงื่อนไขข้อที่ 2 กับสมการ (2-18) จะได้

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) \quad = \quad k[C_1 \sinh kx + C_2 \cosh kx - C_3 \sin kx + C_4 \cos kx]q(t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) \quad = \quad k^2[C_1 \cosh kx + C_2 \sinh kx - C_3 \cos kx - C_4 \sin kx]q(t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0,t) \quad = \quad k^2[C_1 - C_3]q(t)$$

ดังนั้นตามเงื่อนไขข้อที่ 2 จะได้

$$k^2[C_1 - C_3] \quad = \quad 0$$

$$C_1 - C_3 \quad = \quad 0 \tag{2-21}$$

ทำการแก้สมการ (2-20) และ (2-21) จะได้

$$C_1 \quad = \quad 0 \text{ และ } C_3 \quad = \quad 0 \tag{2-22}$$

ใช้เงื่อนไขข้อที่ 3 กับสมการ (2-18) ภายใต้เงื่อนไข ของสมการ (2-22) จะได้

$$y(l,t) \quad = \quad (C_2 \sinh kl + C_4 \sin kl)q(t)$$

จะได้

$$C_2 \sinh kl + C_4 \sin kl \quad = \quad 0 \tag{2-23}$$

จากเงื่อนไขข้อที่ 4 บีมที่รยะยาว l ถูกตรึงที่ปลายจึงทำให้โมเมนต์ที่จุดปลายเป็น 0 ใช้เงื่อนไขข้อ 4 กับสมการ (2-18) ภายใต้เงื่อนไข ของสมการ (2-22) จะได้

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l,t) \quad = \quad C_2 \sinh kl + C_4 \sin kl$$

จะได้

$$C_2 \sinh kl - C_4 \sin kl \quad = \quad 0 \tag{2-24}$$

$$C_2 \sinh kl \quad = \quad C_4 \sin kl \quad = \quad 0$$

นำสมการที่ (2-23) + (2-24) แก้สมการเพื่อหาค่า C_2 และ C_4

พิจารณาให้ $kl \neq 0$

จะได้

$C_2 \sinh kl = 0$ เนื่องจาก $\sinh kl = 0$ เฉพาะเมื่อ $k = 0$

ดังนั้นให้ $C_2 = 0$ และ $C_4 \neq 0$

$\therefore \sin kl = 0$

$C_2 \sinh kl = 0$ หมายความว่า $C_2 = 0$ หรือ $\sinh kl = 0$

ดังนั้น $\sinh kl \neq 0$

เมื่อ $\sin kl = 0$

$\therefore kl = n\pi \quad ; \quad n = 1,2,3,\ldots$

จากสมการที่ (2-19)

$$\omega_n = ak^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{2-25}$$

ω_n คือความถี่ของการสั่น

$$\omega_n = 2\pi f_n$$

$$f_n = \frac{n^2\pi}{2l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad ; \quad n = 1,2,3,\ldots \tag{2-26}$$

ภายใต้เงื่อนไข $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ นำไปแทนลงในสมการ (2-17) จะได้

$$\phi(x) = C_4 \sin kx = C_4 \sin\frac{n\pi x}{l} \quad , \quad n = 1,2,3,\ldots$$

เรียก $\phi(x)$ ว่าฟังก์ชันของโหมดความถี่ธรรมชาติ (natural mode shape function) ทำรูปฟังก์ชัน $\phi(x)$ ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันปกติ (normalize)
จะได้

$$\int_0^1 (\phi(x))^2 dx = 1$$

$$C_4^2 \int_0^1 \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = 1$$

$$\frac{C_4^2}{2}\int_0^1 [1 - \cos\frac{2n\pi x}{l}] dx = 1$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มและสามารถเลือกได้ทุกค่าของ n ในที่นี้ให้ $n = 1$

จะได้ $C_4 = \sqrt{2}$

ดังนั้นจะได้ฟังก์ชันโหมดความถี่ธรรมชาติเป็น

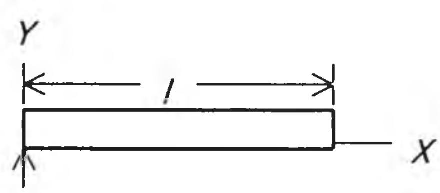
$$\phi_n(x) = \sqrt{2}\sin\frac{n\pi x}{l} \quad ; \quad n = 1,2,3,\ldots \tag{2-27}$$

นำสมการ (2-15) และสมการ (2-27) แทนกลับเข้าไปในสมการ (2-11A) จะได้สมการการเคลื่อนที่ของบีมซึ่งเป็นคำตอบทั่วไปดังนี้

$$y_n(x,t) = \sqrt{2}\sin\frac{n\pi x}{l}\left[A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t\right] \tag{2-27A}$$

จากสมการ (2-27A) วิเคราะห์ได้ว่าการสั่นของบีมที่ถูกตรึงปลายทั้งสองข้างจะมีลักษณะการสั่นอยู่ในรูปของฟังก์ชันไซน์และฟังก์โคไซน์ และที่ปลายของบีมที่ความยาว $x = l$ ระยะกระจัดจะเป็นศูนย์

บีมกรณีปลายด้านหนึ่งหมุนปลายด้านหนึ่งอิสระ (pinned-free beam)



รูปที่ 2.4 ปลายหมุน-ปลายอิสระ (pinned-free beam)

จากรูปที่ 2.4 วางบีมอยู่ในแนวแกน X กำหนดเงื่อนไขได้ 4 ข้อดังนี้

1. $y(0,t) = 0$

2. $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0,t) = \dfrac{M}{EI} = 0$

3. $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l,t) = \dfrac{M}{EI} = 0$

4. $$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(l,t) \quad = \quad \frac{V}{EI} \quad = \quad 0$$

ใช้เงื่อนไขข้อที่ 1 กับสมการ (2-18)

$$y(0,t) \quad = \quad C_1 + C_3$$

$$C_1 + C_3 \quad = \quad 0 \tag{2-28}$$

ใช้เงื่อนไขข้อที่ 2 กับสมการ (2-18) จะได้

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0,t) \quad = \quad k^2[C_1 - C_3]$$

ภายใต้เงื่อนไขข้อที่ 2 จะได้

$$k^2[C_1 - C_3] \quad = \quad 0$$

$$C_1 - C_3 \quad = \quad 0 \tag{2-29}$$

แก้สมการ (2-28) และ (2-29) เพื่อหาค่า C_1 และ C_3 จะได้

$$C_1 \quad = \quad 0 \text{ และ } C_3 \quad = \quad 0 \tag{2-30}$$

ใช้เงื่อนไขข้อที่ 3 และข้อที่ 4 เพื่อหาค่า C_2 และ C_4 ภายใต้เงื่อนไขสมการ (2-30) จะได้

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l,t) \quad = \quad k^2[C_2 \sinh kl - C_2 \sin kl]q(t)$$

จากเงื่อนไขข้อที่ 3 $\frac{M}{EI} \quad = \quad 0$ ที่ระยะความยาวของบีมเท่ากับ l บีมจะมีโมเมนต์เนื่องจากปลายอิสระที่ปลายจึงมีการสั่น แต่ปริมาณ $\frac{M}{EI} \quad = \quad 0$ เนื่องมาจากบีมไม่มีการยึด

ออกจากเดิม ดังนั้น $\Delta l = 0$ ทำให้ ปริมาณ E มีค่าเป็นอนันต์ จึงทำให้ปริมาณ $\frac{M}{EI} = 0$ ใช้เงื่อนไขข้อที่ 3 กับสมการ (2-18)

$$C_2 \sinh kl - C_4 \sin kl = 0 \tag{2-31}$$

ใช้เงื่อนไขข้อ 4 กับสมการ (2-18) จะได้

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(l,t) = k^3[C_2 \cosh kl - C_4 \cos kl]q(t)$$

ดังนั้นภายใต้เงื่อนไขข้อ 4 จะได้

$$C_2 \cosh kl - C_4 \cos kl = 0 \tag{2-32}$$

แก้สมการหาค่า C_2 และ C_4 โดยใช้เมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} \sinh kl & -\sin kl \\ \cosh kl & -\cos kl \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_2 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อ C_2 และ C_4 มีค่าเป็น 0 จะได้

$$\begin{vmatrix} \sinh kl & -\sin kl \\ \cosh kl & -\cos kl \end{vmatrix} = 0$$

$$\cosh kl \sinh kl - \sinh kl \cos kl = 0$$

$$\cosh kl \sin kl = \sinh kl \cos kl$$

$$\frac{\sinh kl}{\cosh kl} = \frac{\sin kl}{\cos kl}$$

ได้ $\tanh kl = \tan kl$

แก้สมการหาค่า kl โดยการเขียนกราฟจะได้ค่า kl 5 ค่าแรกดังนี้

$$k_1 l = 3.9266$$

$$k_2 l = 7.0685$$

$$k_3 l = 10.2101$$

$$k_4 l = 13.3517$$

$$k_5 l = 16.4798$$

จากสมการ (2-25) จะได้ค่า ω 5 ค่าแรกเช่นกัน ดังนี้

$$\omega_1 = \frac{15.4182}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad rad/s$$

$$\omega_2 = \frac{49.9651}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad rad/s$$

$$\omega_3 = \frac{104.2461}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad rad/s$$

$$\omega_4 = \frac{178.2697}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad rad/s$$

$$\omega_5 = \frac{271.5838}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad rad/s$$

จากสมการ (2-26) สามารถหาความถี่ได้ 5 ค่าแรก ดังนี้

$$f_1 = \frac{2.4539}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad Hz$$

$$f_2 = \frac{7.9522}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad Hz$$

$$f_3 = \frac{16.591}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad Hz$$

$$f_4 = \frac{28.3725}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad Hz$$

$$f_5 = \frac{43.2239}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad Hz$$

จากสมการ (2-31) และสมการ (2-32) ให้ $C_4 = 1$ จะได้

$$C_2 \cosh kl + \cos kl = 0$$

$$C_2 = \frac{\cos kl}{\cosh kl}$$

ให้ $C_2 = \alpha_n$

ดังนั้นสมการ (2-17) จะได้เป็น

$$\phi_n(x) = \sin k_n x - \alpha_n \sinh k_n x$$

สมการการเคลื่อนที่ของบีมจะได้

$$y_n(x,t) = [\sin k_n x - \alpha_n \sinh k_n x][A\cos \omega_n t + B \sin \omega_n t] \quad (2\text{-}32A)$$

เมื่อมีการกำหนดจุดตรึงหนึ่งจุดและปล่อยให้ปลายบีมเคลื่อนที่อิสระรูปแบบสมการการเคลื่อนที่จะเปลี่ยนไป โดยโหมดการสั่นที่ปลายบีมจะมีหลายค่าและขึ้นอยู่กับคุณสมบัติตามธรรมชาติของวัสดุที่นำมาทำบีม

ดังนั้นการเลือกประเภทของวัสดุที่นำมาทำบีมจึงมีความสำคัญเพราะจะมีผลต่อการสั่นของแขนกล