บทที่ 3

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของแขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดียวของหุ่นยนต์

3.1 แบบจำลองของออยเลอร์-เบอร์นูลลี (Euler-Bernoulli)

แบบจำลองของออยเลอร์-เบอร์นูลลี (Euler-Bernoulli) เป็นแบบจำลองแบบแรกที่ถูกสร้างขึ้นสำหรับบีม วัตถุประสงค์เพื่ออธิบายการเคลื่อนที่ของบีมให้ถูกต้อง ซึ่งมีสมการดังนี้

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{3.1}$$

E คือมอดูลัสของความยืดหยุ่น (modulus of elasticity)

I คือโมเมนต์ของความเฉื่อย (moment of inertia)

EI คือปริมาณต้านความโค้งงอของของแข็งในบีม (flexural rigidity of beam)

A คือพื้นที่ภาคตัดขวาง (area of the cross-section)

ρ คือความหนาแน่นของวัสดุ (density of the material)

$y = y(x,t)$ คือฟังก์ชันของระยะขจัด (displacement function)

3.2 ต่อมาเรเลห์ (Rayleigh) ได้พัฒนาสมการของออยเลอร์-เบอร์นูลลีให้ดีขึ้นโดยพิจารณาผลกระทบจากความเฉื่อยของการหมุน (rotational inertia) ได้สมการการเคลื่อนที่ของบีมในรูปดังต่อไปนี้

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - I\rho\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{3-2}$$

3.3 ต่อมาในปี ค.ศ. 1921 ทิมอสเชนโก (Timoshenko) ได้พัฒนาสมการของเรเลห์ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้นโดยพิจารณาผลกระทบอันเนื่องมาจากความเค้นเฉือน (transverse shear) ที่มีต่อบีมจนสามารถสร้างสมการการเคลื่อนที่ของบีมได้ดังนี้

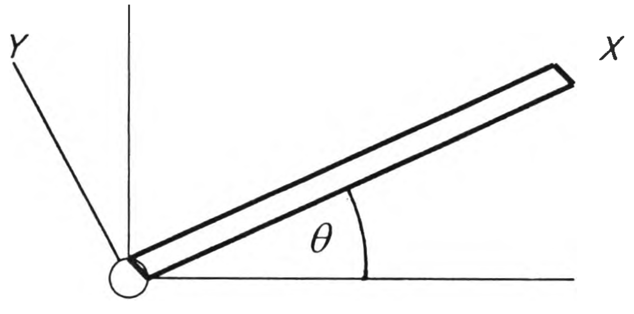
$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - I\rho\left(1 + \frac{E}{\kappa^2 G}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{\kappa^2 G}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0 \tag{3-3}$$

G คือมอดูลัสความแข็งของเนื้อสาร (modulus of rigidity of the material)

κ คือสัมประสิทธิ์ความเค้นของทิมอสเชนโก (Timoshenko's coefficient)

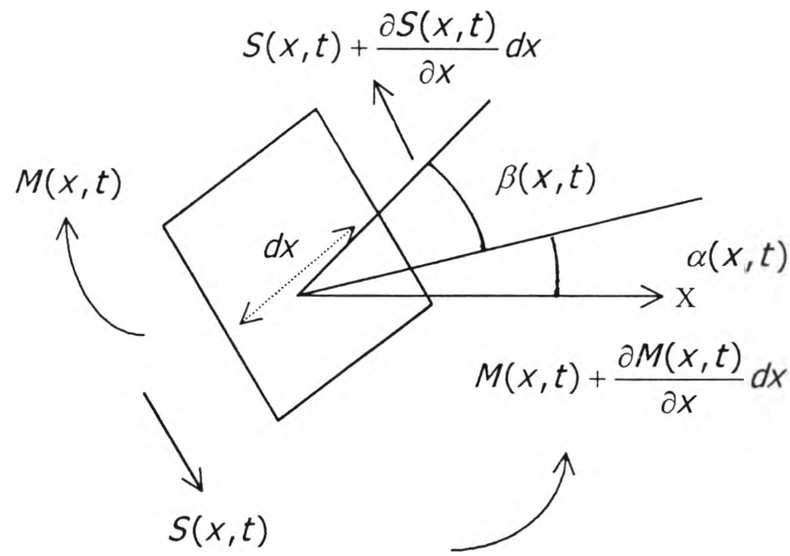
จะเห็นว่าในสมการการเคลื่อนที่ของบีมทั้งหมดที่ผ่านมาไม่ได้มีการพิจารณาผลกระทบจากความหน่วงต่อจากนี้จะเป็นการสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ของแขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดียวอันมีผลกระทบจากความหน่วง

3.4 การสร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ของแขนกลที่มีผลกระทบจากความหน่วง



รูปที่ 3.1 ลักษณะของแขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดียว

รูปที่ 3.1 เป็นบีมที่มีลักษณะเนื้อสารเหมือนกันตลอดทั้งบีม ตัดบีมส่วนเล็กๆยาว dx มาพิจารณาดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 ผลกระทบจากโมเมนต์และแรงเค้นที่กระทำกับส่วนแขนกล

พิจารณาตามรูปที่ 3.2 แบ่งบีมออกเป็นส่วนเล็กๆยาว dx ส่วนเล็กของบีมยาว dx ถูกแรงเค้นกระทำ ทำให้ส่วน dx เบี่ยงเบนไปจากเดิม

กำหนดให้

$\beta(x,t)$ คือ ความชันที่เกิดจากความเค้น (shear angle)
$\alpha(x,t)$ คือ ความชันที่เกิดจากการหมุนแล้วเบี่ยงออกจากแนวเดิม
$y(x,t)$ คือ ระยะเบี่ยงทั้งหมด (total bending)

เมื่อ β และ α มีขนาดเล็กๆ

สามารถสร้างสมการได้ดังนี้

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \alpha(x,t)+\beta(x,t) \tag{3-4}$$

จากรูปที่ 3.2 แยกพิจารณาได้ 2 ส่วนคือ

1. รวมแรงทั้งหมดที่กระทำกระบีมยาว dx โดยใช้กฎข้อที่ 2 ของนิวตันจะได้

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}dx - \gamma\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}dx = \rho A\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}dx$$

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} - \gamma\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \rho A\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \quad (3\text{-}5)$$

โดยที่ $\rho A\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$ คือแรงเฉื่อยตามขวาง (transverse inertia force)

$S(x,t)$ คือ แรงเค้น (shear force)

$\gamma\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$ คือ แรงเสียดทานอากาศ (air resistance force)

2. รวมโมเมนต์ทั้งหมดที่กระทำกับ dx สร้างสมการได้ดังนี้

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x}dx - S(x,t)dx = \rho I\frac{\partial^2 \alpha(x,t)}{\partial t^2}dx$$

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} - S(x,t) = \rho I\frac{\partial^2 \alpha(x,t)}{\partial t^2} \quad (3\text{-}6)$$

โดยที่ $\rho I\frac{\partial^2 \alpha(x,t)}{\partial t^2}$ คือ ความเฉื่อยเนื่องจากการหมุน (rotational inertia)

$M(x,t)$ คือ โมเมนต์ของการโค้งงอ (bending moment)

กำหนดให้

$$M(x,t) = EI\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \varsigma I\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t \partial x} \quad (3\text{-}7)$$

โดยที่ $\varsigma I\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t \partial x}$ คือ ความหน่วงเคลวิน-วอจ์ท

$$S(x,t) = \kappa AG\beta(x,t) = \kappa AG\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} - \alpha(x,t)\right) \quad (3\text{-}8)$$

แทน (3-8) ลงใน (3-5) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x}[\kappa AG\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}-\alpha(x,t)\right)-\gamma\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \rho A\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\kappa AG[\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial \alpha(x,t)}{\partial x}]-\gamma\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \rho A\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

จัดรูปสมการใหม่จะได้

$$\kappa AGy_{xx}-\kappa AG\alpha_x-\gamma y_t = \rho Ay_{tt}$$

$$\kappa AG(y_{xx}-\alpha_x)-\gamma y_t = \rho Ay_{tt} \tag{3-8A}$$

$$y_{xx}-\alpha_x = \frac{1}{\kappa AG}[\gamma y_t+\rho Ay_{tt}] \tag{3-8B}$$

$$\alpha_x = y_{xx}-\frac{\rho}{\kappa G}y_{tt}-\frac{\gamma}{\kappa AG}y_t \tag{3-8C}$$

เมื่อ $y_t = \frac{\partial y}{\partial t}$, $y_{tt} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, $y_t = \frac{\partial x}{\partial t}$, $y_{xx} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

แทนสมการ (3-7) ลงในสมการ (3-6) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x}[EI\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\varsigma I\frac{\partial^2\alpha}{\partial t\partial x}]-\kappa AG[\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}-\alpha(x,t)] = \rho I\frac{\partial^2\alpha(x,t)}{\partial t^2}$$

$$EI\alpha_{xx}+\varsigma I\alpha_{xxt}-\kappa AG(y_x-\alpha) = \rho I\alpha_{tt} \tag{3-9}$$

แทนสมการ (3-7) และ (3-8) ลงในสมการ (3-5) และ (3-6) จะได้

$$\kappa AG(y_{xx}-\alpha_x)-\gamma y_t = \rho Ay_{tt} \tag{3-9A}$$

$$EI\alpha_{xx}+\varsigma I\alpha_{xxt}+\kappa AG(y_x-\alpha) = \rho I\alpha_{tt} \tag{3-9B}$$

จากสมการที่ (3-8C)

$$\alpha_x = y_{xx} - \frac{\rho}{\kappa G} y_{tt} - \frac{\gamma}{\kappa AG} y_t$$

$$\alpha_{xx} = y_{xxx} - \frac{\rho}{\kappa G} y_{xtt} - \frac{\gamma}{\kappa AG} y_{xt}$$

$$\alpha_{xxx} = y_{xxxx} - \frac{\rho}{\kappa G} y_{xxtt} - \frac{\gamma}{\kappa AG} y_{xxt}$$

$$\alpha_{xtt} = y_{xxtt} - \frac{\rho}{\kappa G} y_{tttt} - \frac{\gamma}{\kappa AG} y_{ttt}$$

$$\alpha_{xxxt} = y_{xxxxt} - \frac{\rho}{\kappa G} y_{xxttt} - \frac{\gamma}{\kappa AG} y_{xxtt}$$

หาอนุพันธ์สมการ (3-9B) เทียบกับ x อีกหนึ่งครั้งจะได้

$$EI\alpha_{xxx} + \varsigma I\alpha_{xxxt} + \kappa AGy_{xx} - \kappa AG\alpha_x = \rho I\alpha_{xtt}$$

$$EI\alpha_{xxx} + \varsigma I\alpha_{xxxt} + \kappa AGy_{xx}$$
$$- \kappa AG(y_{xx} - \frac{\rho}{\kappa G} y_{tt} - \frac{\gamma}{\kappa AG} y_t) = \rho I\alpha_{xtt}$$

$$EI\alpha_{xxx} + \varsigma I\alpha_{xxxt} + \kappa AGy_{xx} - \kappa AGy_{xx}$$

$$+ A\rho y_{tt} + \gamma y_t = \rho I\alpha_{xtt}$$

$$EI\alpha_{xxx} + \varsigma I\alpha_{xxxt} + \rho Ay_{tt} + \gamma y_t - \rho I\alpha_{xtt} = 0 \qquad (3\text{-}10)$$

ในสมการ (3-10) มีเทอมที่พิจารณาอยู่ 5 พจน์ดังนี้

พจน์ที่ 1

$$EI\alpha_{xxx} = EIy_{xxxx} - \frac{EI\rho}{\kappa G} y_{xxtt} - \frac{EI\gamma}{\kappa AG} y_{xxt}$$

พจน์ที่ 2

$$\varsigma I\alpha_{xxxt} = \varsigma Iy_{xxxxt} - \frac{\varsigma I\rho}{\kappa G}y_{xxttt} - \frac{\varsigma I\gamma}{\kappa AG}y_{xxtt}$$

พจน์ที่ 3

$$\rho Ay_{tt}$$

พจน์ที่ 4

$$\gamma y_t$$

พจน์ที่ 5

$$\rho I\alpha_{xtt} = \rho Iy_{xxtt} - \frac{i\rho^2}{\kappa G}y_{tttt} - \frac{\rho I\gamma}{\kappa AG}y_{ttt}$$

แทนทั้ง 5 พจน์ลงในสมการ (3-10) จะได้สมการ ทิมอสเชนโก ที่พิจารณาผลกระทบจากความหน่วงซึ่งมีสมการอยู่ในรูป

$$EIy_{xxxx} - \frac{EI\rho}{\kappa G}y_{xxtt} - \frac{EI\gamma}{\kappa AG}y_{xxt} + \varsigma Iy_{xxxxt} - \frac{\varsigma I\rho}{\kappa G}y_{xxttt} - \frac{\varsigma I\gamma}{\kappa AG}y_{xxtt}$$

$$+ \rho Ay_{tt} + \gamma y_t - \rho Iy_{xxtt} + \frac{\rho^2 I}{\kappa G}y_{tttt} + \frac{\rho I\gamma}{\kappa AG}y_{ttt} = 0 \quad (3\text{-}11)$$

จัดรูปสมการ (3-11) ใหม่เพื่อให้รูปแบบสมการดูง่ายขึ้น จะได้

$$ay_{xxxx} + (b+f+j)y_{xxtt} + cy_{xxt} + dy_{xxxxt} + ey_{xxttt} + gy_{tt} + hy_t$$

$$+ ky_{tttt} + ry_{ttt} = 0$$

(3-12)

กำหนดค่าคงที่ต่างๆดังนี้

$$a = EI, \qquad b = -\frac{E\rho I}{\kappa G}$$

$$c = -\frac{EI\gamma}{\kappa AG}, \qquad d = \varsigma I$$

$$e = -\frac{\varsigma I\rho}{\kappa G}, \qquad f = -\frac{\varsigma I\gamma}{\kappa AG}$$

$$g = \rho A \qquad h = \gamma$$

$$j = -\rho I, \qquad k = \frac{\rho^2 I}{\kappa G}$$

$$r = \frac{\rho I\gamma}{\kappa AG}$$

จากสมการที่ (3-12) เป็นสมการการเคลื่อนที่ของแขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดียวที่พิจารณาผลกระทบจากความหน่วง ซึ่งอธิบายได้ด้วย สมการอนุพันธ์ย่อย อันดับ 5

พิจารณาสมการ (3-12) หากไม่พิจารณาผลกระทบจากความหน่วง คือตัดเทอมที่มี γ (ค่าคงที่ของความหน่วงอากาศ) และ ς (ค่าคงที่ความหน่วงเคลวิน-วอจ์ท) สมการ (3-12) จะกลายเป็นสมการ ทิมอสเชนโก

$$ay_{xxxx} + by_{xxtt} + gy_{tt} + jy_{xxtt} + ky_{tttt} = 0$$

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + -\frac{E\rho I}{\kappa G}\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \rho I\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^4} + \frac{\rho^2 I}{\kappa G}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0 \tag{3-12A}$$

สมการ (3-12A) หากไม่พิจารณาผลกระทบจากความหน่วงและไม่พิจารณาผลกระทบจากความเฉื่อยเนื่องจากการหมุน (rotation inertia) และ การเสียรูปเนื่องจากความเค้น (shear deformation) สมการ (3-12A) จะกลายเป็นสมการของออยเลอร์-เบอร์นูลี

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

หาคำตอบของสมการ (3-12) โดยวิธีแยกตัวแปร (separation of variables). สมมติให้คำตอบอยู่ในรูป

$$y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)\psi_n(t) \tag{3-13}$$

จะเห็นว่ามีฟังก์ชันอยู่ 2 ฟังก์ชัน คือ

1. ฟังก์ชัน $\phi_n(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ x

   1.1 สำหรับการแก้ปัญหาเพื่อหาค่า $\phi_n(x)$ นั้นกำหนดให้ $\phi_n(x)$ เป็น mode shape โดยให้บีมเป็นชนิดบีมปลายหมุนทั้งสองข้าง (pinned-pinned beam) ที่เป็นไปตามเงื่อนไขสมการบีมปลายหมุนทั้งสองข้าง (pinned-pinned beam) ของออยเลอร์-เบอร์นูลลี

   สมมติให้ mode shape แบบ อยู่ในรูป

$$\phi_n(x) = \sin\frac{n\pi(x)}{L}, \quad n = 1,2,3,\ldots \tag{3-14}$$

   เนื่องจากบีมปลายหมุนทั้งสองข้างมีเงื่อนไขขอบเขตอยู่ 4 เงื่อนไขในสมการของ $\phi(x)$ จึงมีค่าคงที่เกิดขึ้น 4 ค่า จากสมการ (2-27) ได้ฟังก์ชันโหมดความถี่ธรรมชาติเป็น

$$\phi_n(x) = \sqrt{2}\sin\frac{n\pi(x)}{L}$$

   หากฟังก์ชันโหมดความถี่อยู่ในรูปทั่วไป ควรจะมีสมการอยู่ในรูป

$$\phi(x) = C_1\sin\delta x + C_2\sinh\delta x + C_3\cos\delta x + C_4\cosh\delta x \tag{3-14A}$$

   เมื่อนำสมการ (3-14A) แทนลงในสมการ (3-13) ก็จะได้คำตอบ 4 ค่าเหมือนเดิม

   แทนสมการ (3-13) และ (3-17) ลงในสมการ (3-12) เพื่อพิจารณาให้ง่ายขึ้น

จึงจะขอแยกพิจารณาทีละเทอมดังนี้

กำหนดให้ $\delta_n = \dfrac{n\pi}{L}$

พจน์ที่ 1

$$ay_{xxxx} = a\delta_n^4\psi_n(t)\sin\delta_n x$$

พจน์ที่ 2

$$by_{xxtt} = -b\delta_n^2\psi_n^2(t)\sin\delta_n x$$

พจน์ที่ 3

$$cy_{xxt} = -c\delta_n^2\dot{\psi}_n(t)\sin\delta_n x$$

พจน์ที่ 4

$$y_{tt} = \psi_n^2(t)\sin\delta x$$

พจน์ที่ 5

$$dy_{xxxxt} = d\delta_n^4\dot{\psi}_n(t)\sin\delta_n x$$

พจน์ที่ 6

$$ey_{xxttt} = -e\delta_n^2\psi_n^{(3)}(t)\sin\delta_n x$$

พจน์ที่ 7

$$fy_{xxtt} = -f\delta_n^2\psi_n^{(2)}(t)\sin\delta_n x$$

พจน์ที่ 8

$$gy_{tt} = g\psi_n^{(2)}(t)\sin\delta_n x$$

พจน์ที่ 9

$$hy_t = h\dot{\psi}_n(t)\sin\delta_n x$$

รวมทั้ง 9 พจน์แทนลงในสมการ (3-12) จะได้

$$a\delta_n^4\psi_n(t)\sin\delta_n x + \psi_n^{(2)}(t)\sin\delta_n x - b\delta_n^2\psi_n(t)\sin\delta_n x +$$

$$c\psi_n^{(4)}(t)\sin\delta_n x + d\delta_n^4\dot{\psi}_n(t)\sin\delta_n x - e\delta_n^2\dot{\psi}_n(t)\sin\delta_n x -$$

$$f\delta_n^2\psi_n^{(3)}(t)\sin\delta_n x + g\dot{\psi}_n(t)\sin\delta_n x + h\psi_n^{(3)}(t)\sin\delta_n x = 0 \tag{3-15}$$

เอา $\sin\delta_n x$ หารตลอดพร้อมกับจัดรูปสมการ (3-15)

$$a\delta_n^4\psi_n(t) + \psi_n^{(2)}(t) - b\delta_n^2\psi_n(t) + c\psi_n^{(4)}(t) + d\delta_n^4\dot{\psi}_n(t) -$$

$$e\delta_n^2\dot{\psi}_n(t) - f\delta_n^2\psi_n^{(3)}(t) + g\dot{\psi}_n(t) + h\psi_n^{(3)}(t) = 0$$

จัดรูปสมการใหม่จะได้

$$c\psi_n^{(4)}(t) + (h - f\delta_n^2)\psi_n^{(3)}(t) + (1 - b\delta_n^2)\psi_n^{(2)}(t) +$$

$$(d\delta_n^4 - e\delta_n^2 + g)\dot{\varphi}_n(t) + a\delta_n^4\psi_n(t) = 0 \tag{3-16}$$

นำ c หารตลอดจะได้

$$\psi_n^{(4)}(t)+\frac{(h-f\delta_n^2)}{c}\psi_n^{(3)}(t)+\frac{(1-b\delta_n^2)}{c}\psi_n^{(2)}(t)+$$

$$\frac{(d\delta_n^4-e\delta_n^2+g)}{c}\dot{\varphi}_n(t)+\frac{a\delta_n^4}{c}\psi_n(t)\quad=\quad 0$$

เปลี่ยนค่าคงที่ในสมการ (3-16) ใหม่

$$A\quad=\quad\frac{(h-f\delta_n^2)}{c}\quad,\quad B\quad=\quad\frac{(1-b\delta_n^2)}{c}\quad,$$

$$C\quad=\quad\frac{(d\delta_n^4-e\delta_n^2)}{c}\quad,\quad D\quad=\quad\frac{a\delta_n^2}{c}$$

ดังนั้นสมการ (3-16) จะอยู่ในรูป

$$\psi_n^{(4)}(t)+A\psi_n^{(3)}(t)+B\psi_n^{(2)}(t)+C\dot{\psi}_n(t)+D\psi_n(t)\quad=\quad 0 \tag{3-17}$$

ให้คำตอบของสมการ (3-17) อยู่ในรูป

$$\varphi_n\quad=\quad me^{xt} \tag{3-18}$$

แทนสมการ (3-18) ลงในสมการ (3-17) จะได้

$$[x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D]me^{xt}\quad=\quad 0$$

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D\quad=\quad 0 \tag{3-18A}$$

ค่า x ที่ได้คือรากสมการ (3-18A) ซึ่งมีทั้งหมด 4 ค่าคือ x_1 , x_2 x_3 และ x_4 ในการหาค่า x ได้ใช้โปรแกรม Mathematica ช่วยในการคำนวณ เนื่องจากสมการ (3-18A) เป็นสมการโพลิโนเมียลอันดับสี่ หากทำการวิเคราะห์ด้วยมือจะมีความยุ่งยากลำบากมาก โปรแกรม Mathematica เป็นโปรแกรมที่ช่วยคำนวณหาคำตอบของสมการต่างๆ ในโปรแกรม Mathematica จะมีคำสั่งเฉพาะเพื่อให้โปแกรมหาคำตอบสมการ ก่อนที่จะแก้สมการ (3-18A) ขอยกตัวอย่างการใช้โปรแกรม Mathematica ก่อนดังตัวอย่างต่อไปนี้

$In[1] = Solve[x\char`^2 + x - 6 == 0, x]$

หมายความว่าสั่งให้โปรแกรม Mathematica คำนวณหาค่า x เมื่อโปรแกรมทำการคำนวณเสร็จสิ้นจะให้ผลลัพธ์ออกมาในบรรทัดที่สองเป็น

$Out[1] = \{\{x \to -2\}, \{x \to 3\}\}$

สำหรับคำสั่งอีกคำสั่งหนึ่งที่ใช้สั่งให้โปรแกรม Mathematica คำนวณคือ *NSolve* เป็นคำสั่งที่ให้โปรแกรมคำนวณคำตอบสมการออกมาในรูปของตัวเลขธรรมดา ไม่ว่าคำตอบจะอยู่ในรูปของรากอันดับที่เท่าไรก็ตาม โปรแกรมจะทำการถอดรากให้คำตอบอยู่ในรูปตัวเลขธรรมดา ดังตัวอย่าง

$In[1] = NSolve[x\char`^2 + x + 1 == 0, x]$

$Out[1] = \{\{x \to -0.5 - 0.866025\, i\}, \{x \to -0.5 + 0.866025\, i\}\}$

เริ่มแก้สมการ (3-18A) โดยใช้โปรแกรม Mathematica ดังนี้

In[1]:= Solve[x^4 + A x^3 + B x^2 + C x + D == 0, x]

Out[1]= $$\Bigg\{\Bigg\{x \to -\frac{A}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\Bigg(\frac{A^2}{4} - \frac{2B}{3} + (2^{1/3}(B^2 - 3AC + 12D))\Big/ \Big(3\,\big(2B^3 - 9ABC + 27C^2 + 27A^2D - 72BD + \sqrt{(-4(B^2 - 3AC + 12D)^3 + (2B^3 - 9ABC + 27C^2 + 27A^2D - 72BD)\,\hat{}\,2)}\big)\,\hat{}\,(1/3)\Big) + \frac{1}{3\,2^{1/3}}\Big(\big(2B^3 - 9ABC + 27C^2 + 27A^2D - 72BD + \sqrt{(-4(B^2 - 3AC + 12D)^3 + (2B^3 - 9ABC + 27C^2 + 27A^2D - 72BD)^2)}\big)\,\hat{}\,(1/3)\Big)\Bigg)}$$

$$- \frac{1}{2}\sqrt{\Bigg(\frac{A^2}{2} - \frac{4B}{3} - (2^{1/3}(B^2 - 3AC + 12D))\Big/ \Big(3\,\big(2B^3 - 9ABC + 27C^2 + 27A^2D - 72BD + \sqrt{(-4(B^2 - 3AC + 12D)^3 + (2B^3 - 9ABC + 27C^2 + 27A^2D - 72BD)\,\hat{}\,2)}\big)\,\hat{}\,(1/3)\Big) - \frac{1}{3\,2^{1/3}}\Big(\big(2B^3 - 9ABC + 27C^2 + 27A^2D - 72BD + \sqrt{(-4(B^2 - 3AC + 12D)^3 + (2B^3 - 9ABC + 27C^2 + 27A^2D - 72BD)^2)}\big)\,\hat{}\,(1/3)\Big) -}$$

$$(-A^3 + 4AB - 8C)\Big/ \Bigg(4\sqrt{\Bigg(\frac{A^2}{4} - \frac{2B}{3} + (2^{1/3}(B^2 - 3AC + 12D))\Big/ \Big(3\,\big(2B^3 - 9ABC + 27C^2 + 27A^2D - 72BD + \sqrt{(-4(B^2 - 3AC + 12D)^3 + (2B^3 - 9ABC + 27C^2 + 27A^2D - 72BD)\,\hat{}\,2)}\big)\,\hat{}\,(1/3)\Big) +}$$

$$\frac{1}{3\ 2^{1/3}}\left(\left(2\ B^3-9\ A\ B\ C+27\ C^2+27\ A^2\ D-72\ B\ D+\sqrt{}\left(-4\ (B^2-3\ A\ C+12\ D)^3+(2\ B^3-9\ A\ B\ C+27\ C^2+27\ A^2\ D-72\ B\ D)\ \hat{}\ 2\right)\right)\ \hat{}\ (1/3)\right)\Big)\Big)\Big)\Big\},$$

$$\Big\{x\to-\frac{A}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{}\left(\frac{A^2}{4}-\frac{2\ B}{3}+(2^{1/3}\ (B^2-3\ A\ C+12\ D))\ /\ \left(3\ \left(2\ B^3-9\ A\ B\ C+27\ C^2+27\ A^2\ D-72\ B\ D+\sqrt{}\left(-4\ (B^2-3\ A\ C+12\ D)^3+(2\ B^3-9\ A\ B\ C+27\ C^2+27\ A^2\ D-72\ B\ D)\ \hat{}\ 2\right)\right)\ \hat{}\ (1/3)\right)+\frac{1}{3\ 2^{1/3}}\left(\left(2\ B^3-9\ A\ B\ C+27\ C^2+27\ A^2\ D-72\ B\ D+\sqrt{}\left(-4\ (B^2-3\ A\ C+12\ D)^3+(2\ B^3-9\ A\ B\ C+27\ C^2+27\ A^2\ D-72\ B\ D)^2\right)\right)\ \hat{}\ (1/3)\right)\right)+$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{}\Bigg(\frac{A^2}{2}-\frac{4\ B}{3}-(2^{1/3}\ (B^2-3\ A\ C+12\ D))\ /\ \left(3\ \left(2\ B^3-9\ A\ B\ C+27\ C^2+27\ A^2\ D-72\ B\ D+\sqrt{}\left(-4\ (B^2-3\ A\ C+12\ D)^3+(2\ B^3-9\ A\ B\ C+27\ C^2+27\ A^2\ D-72\ B\ D)\ \hat{}\ 2\right)\right)\ \hat{}\ (1/3)\right)-\frac{1}{3\ 2^{1/3}}\left(\left(2\ B^3-9\ A\ B\ C+27\ C^2+27\ A^2\ D-72\ B\ D+\sqrt{}\left(-4\ (B^2-3\ A\ C+12\ D)^3+(2\ B^3-9\ A\ B\ C+27\ C^2+27\ A^2\ D-72\ B\ D)^2\right)\right)\ \hat{}\ (1/3)\right)-$$

$$(-A^3+4\ A\ B-8\ C)\ \Big/\ \Bigg(4\sqrt{}\left(\frac{A^2}{4}-\frac{2\ B}{3}+(2^{1/3}\ (B^2-3\ A\ C+12\ D))\ /\ \left(3\ \left(2\ B^3-9\ A\ B\ C+27\ C^2+27\ A^2\ D-\right.\right.\right.$$

$$72\,B\,D + \sqrt{\Big(-4\ (B^2 - 3\,A\,C + 12\,D)^3 +}$$

$$(2\,B^3 - 9\,A\,B\,C + 27\,C^2 + 27\,A^2$$

$$D - 72\,B\,D)\,\hat{}\,2\Big)\Big)\,\hat{}\,(1\,/\,3)\Big) +$$

$$\frac{1}{3\ 2^{1/3}}\Big(\Big(2\,B^3 - 9\,A\,B\,C + 27\,C^2 + 27\,A^2\,D -$$

$$72\,B\,D + \sqrt{\Big(-4\ (B^2 - 3\,A\,C + 12\,D)^3 +}$$

$$(2\,B^3 - 9\,A\,B\,C + 27\,C^2 + 27\,A^2\,D -$$

$$72\,B\,D)\,\hat{}\,2\Big)\Big)\,\hat{}\,(1\,/\,3)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big\},$$

$$\Big\{x \to -\frac{A}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\Big(\frac{A^2}{4} - \frac{2\,B}{3} + (2^{1/3}\ (B^2 - 3\,A\,C + 12\,D))\,\Big/}$$

$$\Big(3\ \Big(2\,B^3 - 9\,A\,B\,C + 27\,C^2 + 27\,A^2\,D -$$

$$72\,B\,D + \sqrt{\Big(-4\ (B^2 - 3\,A\,C + 12\,D)^3 +}$$

$$(2\,B^3 - 9\,A\,B\,C + 27\,C^2 + 27\,A^2\,D -$$

$$72\,B\,D)\,\hat{}\,2\Big)\Big)\,\hat{}\,(1\,/\,3)\Big) +$$

$$\frac{1}{3\ 2^{1/3}}\Big(\Big(2\,B^3 - 9\,A\,B\,C + 27\,C^2 + 27\,A^2\,D -$$

$$72\,B\,D + \sqrt{\Big(-4\ (B^2 - 3\,A\,C + 12\,D)^3 +}$$

$$(2\,B^3 - 9\,A\,B\,C + 27\,C^2 + 27\,A^2\,D - 72\,B\,D)^2$$

$$\Big)\Big)\,\hat{}\,(1\,/\,3)\Big)\Big) -$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\Big(\frac{A^2}{2} - \frac{4\,B}{3} - (2^{1/3}\ (B^2 - 3\,A\,C + 12\,D))\,\Big/}$$

$$\Big(3\ \Big(2\,B^3 - 9\,A\,B\,C + 27\,C^2 + 27\,A^2\,D - 72\,B\,D +$$

$$\sqrt{\Big(-4\ (B^2 - 3\,A\,C + 12\,D)^3 + (2\,B^3 - 9\,A\,B\,C +}$$

$$27\,C^2 + 27\,A^2\,D - 72\,B\,D)\,\hat{}\,2\Big)\Big)\,\hat{}$$

$$(1\,/\,3)\Big) - \frac{1}{3\ 2^{1/3}}\Big(\Big(2\,B^3 - 9\,A\,B\,C + 27\,C^2 +$$

$$27\,A^2\,D - 72\,B\,D + \sqrt{\Big(-4\ (B^2 - 3\,A\,C + 12\,D)^3 +}$$

$$(2\,B^3 - 9\,A\,B\,C + 27\,C^2 + 27\,A^2\,D - 72\,B\,D)^2$$

$$\Big)\Big)\,\hat{}\,(1\,/\,3)\Big) +$$

$$(-A^3 + 4\,A\,B - 8\,C)\,\Big/$$

$$\left(4\sqrt{\left(\frac{A^2}{4}-\frac{2B}{3}+(2^{1/3}(B^2-3AC+12D))\,/\right.}\right.$$
$$\left(3\left(2B^3-9ABC+27C^2+27A^2D-\right.\right.$$
$$72BD+\sqrt{\left(-4(B^2-3AC+12D)^3+\right.}$$
$$(2B^3-9ABC+27C^2+27A^2$$
$$\left.\left.\left.D-72BD)\,\hat{}\,2\right)\right)\,\hat{}\,(1/3)\right)+$$
$$\frac{1}{3\,2^{1/3}}\left(\left(2B^3-9ABC+27C^2+27A^2D-\right.\right.$$
$$72BD+\sqrt{\left(-4(B^2-3AC+12D)^3+\right.}$$
$$(2B^3-9ABC+27C^2+27A^2D-$$
$$\left.\left.\left.\left.\left.72BD)\,\hat{}\,2\right)\right)\,\hat{}\,(1/3)\right)\right)\right)\right)\Big\},$$

$$\Big\{x\to-\frac{A}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{A^2}{4}-\frac{2B}{3}+(2^{1/3}(B^2-3AC+12D))\,/\right.}$$
$$\left(3\left(2B^3-9ABC+27C^2+27A^2D-\right.\right.$$
$$72BD+\sqrt{\left(-4(B^2-3AC+12D)^3+\right.}$$
$$(2B^3-9ABC+27C^2+27A^2D-$$
$$\left.\left.\left.72BD)\,\hat{}\,2\right)\right)\,\hat{}\,(1/3)\right)+$$
$$\frac{1}{3\,2^{1/3}}\left(\left(2B^3-9ABC+27C^2+27A^2D-\right.\right.$$
$$72BD+\sqrt{\left(-4(B^2-3AC+12D)^3+\right.}$$
$$(2B^3-9ABC+27C^2+27A^2D-72BD)^2$$
$$\left.\left.\left.\right)\right)\,\hat{}\,(1/3)\right)\Big)+$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{A^2}{2}-\frac{4B}{3}-(2^{1/3}(B^2-3AC+12D))\,/\right.}$$
$$\left(3\left(2B^3-9ABC+27C^2+27A^2D-72BD+\right.\right.$$
$$\sqrt{\left(-4(B^2-3AC+12D)^3+(2B^3-9ABC+\right.}$$
$$\left.\left.27C^2+27A^2D-72BD)\,\hat{}\,2\right)\right)\,\hat{}$$
$$(1/3)\Big)-\frac{1}{3\,2^{1/3}}\left(\left(2B^3-9ABC+27C^2+\right.\right.$$
$$27A^2D-72BD+\sqrt{\left(-4(B^2-3AC+12D)^3+\right.}$$
$$(2B^3-9ABC+27C^2+27A^2D-72BD)^2$$

$$\Big)\Big) \wedge (1/3)\Big) +$$

$$(-A^3 + 4\,A\,B - 8\,C) \Big/$$

$$\Bigg(4\,\sqrt{\Bigg(\frac{A^2}{4} - \frac{2\,B}{3} + (2^{1/3}\,(B^2 - 3\,A\,C + 12\,D))\Big/}$$

$$\Big(3\,\Big(2\,B^3 - 9\,A\,B\,C + 27\,C^2 + 27\,A^2\,D -$$

$$72\,B\,D + \sqrt{\Big(-4\,(B^2 - 3\,A\,C + 12\,D)^3 +}$$

$$(2\,B^3 - 9\,A\,B\,C + 27\,C^2 + 27\,A^2$$

$$D - 72\,B\,D) \wedge 2\Big)\Big) \wedge (1/3)\Big) +$$

$$\frac{1}{3\,2^{1/3}}\Big(\Big(2\,B^3 - 9\,A\,B\,C + 27\,C^2 + 27\,A^2\,D -$$

$$72\,B\,D + \sqrt{\Big(-4\,(B^2 - 3\,A\,C + 12\,D)^3 +}$$

$$(2\,B^3 - 9\,A\,B\,C + 27\,C^2 + 27\,A^2\,D -$$

$$72\,B\,D) \wedge 2\Big)\Big) \wedge (1/3)\Big)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg)$$

```
In[3]:= NSolve[
          x^4 + 100000 x^3 + 3000000 x^2 + 2001 x + 2 == 0, x]

Out[3]= {{x → -99970.}, {x → -30.0083},
          {x → -0.000333496 - 0.000745293 i},
          {x → -0.000333496 + 0.000745293 i}}

In[4]:= NSolve[
          x^4 + 100000 x^3 + 3000000 x^2 + 2010 x + 2 == 0, x]

Out[4]= {{x → -99970.}, {x → -30.0083},
          {x → -0.000334996 - 0.00074462 i},
          {x → -0.000334996 + 0.00074462 i}}

In[5]:= NSolve[
          x^4 + 100000 x^3 + 3000000 x^2 + 2050 x + 2 == 0, x]

Out[5]= {{x → -99970.}, {x → -30.0083},
          {x → -0.000341663 - 0.000741585 i},
          {x → -0.000341663 + 0.000741585 i}}

In[6]:= NSolve[
          x^4 + 100000 x^3 + 3000000 x^2 + 2100 x + 2 == 0, x]

Out[6]= {{x → -99970.}, {x → -30.0083},
          {x → -0.000349997 - 0.000737688 i},
          {x → -0.000349997 + 0.000737688 i}}

In[7]:= NSolve[x^4 + 5 x^3 + 3 x^2 + x + 2 == 0, x]

Out[7]= {{x → -4.33691}, {x → -1.},
          {x → 0.168456 - 0.65786 i},
          {x → 0.168456 + 0.65786 i}}

In[8]:= NSolve[x^4 + 10 x^3 + 300 x^2 + 20 x + 2 == 0, x]

Out[8]= {{x → -4.9667 - 16.573 i}, {x → -4.9667 + 16.573 i},
          {x → -0.0332969 - 0.0746516 i},
          {x → -0.0332969 + 0.0746516 i}}
```

จากค่า x ทั้ง 4 ค่าซึ่งเป็นคำตอบของสมการ $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ จะเห็นว่าค่าที่ควรนำมาวิเคราะห์ควรจะเป็นค่าที่อยู่ในรากที่สองมีสองราก เพราะเป็นค่าที่ทำให้เกิดจำนวนจินตภาพ คำตอบเหล่านี้สามารถหาความหมายทางฟิสิกส์ได้

เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์คำตอบของสมการจะทำการแทนค่า A, B, C, D แต่ละค่าลงไป เพราะค่า A, B, C, D แต่ละค่าจะให้คำตอบที่แตกต่างกัน คำตอบทั้ง สี่ค่าจะเป็นตัวบ่งชี้ถึงลักษณะการสั่นของบีมว่ามีการสั่นในลักษณะใด

```
In[2]:= Solve[x^4 + 2 x^3 + 2 x^2 + 2 x + 2 == 0, x]
```

Out[2]=

$$\left\{\left\{x \to -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{1}{3} + \frac{8\ 2^{2/3}}{3\left(-5 + 3\, i\sqrt{111}\right)^{1/3}} + \frac{1}{3}\left(2\left(-5 + 3\, i\sqrt{111}\right)\right)^{1/3}\right)} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{2}{3} - \frac{8\ 2^{2/3}}{3\left(-5 + 3\, i\sqrt{111}\right)^{1/3}} - \frac{1}{3}\left(2\left(-5 + 3\, i\sqrt{111}\right)\right)^{1/3} - 2\Bigg/\left(\sqrt{\left(-\frac{1}{3} + \frac{8\ 2^{2/3}}{3\left(-5 + 3\, i\sqrt{111}\right)^{1/3}} + \frac{1}{3}\left(2\left(-5 + 3\, i\sqrt{111}\right)\right)^{1/3}\right)}\right)\right)}\right\},\right.$$

$$\left\{x \to -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{1}{3} + \frac{8\ 2^{2/3}}{3\left(-5+3\,\mathrm{i}\sqrt{111}\right)^{1/3}} + \frac{1}{3}\left(2\left(-5+3\,\mathrm{i}\sqrt{111}\right)\right)^{1/3}\right)} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{2}{3} - \frac{8\ 2^{2/3}}{3\left(-5+3\,\mathrm{i}\sqrt{111}\right)^{1/3}} - \frac{1}{3}\left(2\left(-5+3\,\mathrm{i}\sqrt{111}\right)\right)^{1/3} - 2\Big/\left(\sqrt{\left(-\frac{1}{3} + \frac{8\ 2^{2/3}}{3\left(-5+3\,\mathrm{i}\sqrt{111}\right)^{1/3}} + \frac{1}{3}\left(2\left(-5+3\,\mathrm{i}\sqrt{111}\right)\right)^{1/3}\right)}\right)\right)}\right\},$$

$$\left\{x \to -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{1}{3} + \frac{8\ 2^{2/3}}{3\left(-5+3\,\mathrm{i}\sqrt{111}\right)^{1/3}} + \frac{1}{3}\left(2\left(-5+3\,\mathrm{i}\sqrt{111}\right)\right)^{1/3}\right)} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{2}{3} - \frac{8\ 2^{2/3}}{3\left(-5+3\,\mathrm{i}\sqrt{111}\right)^{1/3}} - \frac{1}{3}\left(2\left(-5+3\,\mathrm{i}\sqrt{111}\right)\right)^{1/3} + 2\Big/\left(\sqrt{\left(-\frac{1}{3} + \frac{8\ 2^{2/3}}{3\left(-5+3\,\mathrm{i}\sqrt{111}\right)^{1/3}} + \frac{1}{3}\left(2\left(-5+3\,\mathrm{i}\sqrt{111}\right)\right)^{1/3}\right)}\right)\right)}\right\},$$

$$\left\{x \to -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{1}{3} + \frac{8\ 2^{2/3}}{3\left(-5 + 3\,\mathrm{i}\sqrt{111}\right)^{1/3}} + \frac{1}{3}\left(2\left(-5 + 3\,\mathrm{i}\sqrt{111}\right)\right)^{1/3}\right)} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{2}{3} - \frac{8\ 2^{2/3}}{3\left(-5 + 3\,\mathrm{i}\sqrt{111}\right)^{1/3}} - \frac{1}{3}\left(2\left(-5 + 3\,\mathrm{i}\sqrt{111}\right)\right)^{1/3} + 2\Big/\left(\sqrt{\left(-\frac{1}{3} + \frac{8\ 2^{2/3}}{3\left(-5 + 3\,\mathrm{i}\sqrt{111}\right)^{1/3}} + \frac{1}{3}\left(2\left(-5 + 3\,\mathrm{i}\sqrt{111}\right)\right)^{1/3}\right)}\right)\right)}\right\}\}$$

```
In[3]:= NSolve[x^4 + 2 x^3 + 2 x^2 + 2 x + 2 == 0, x]

Out[3]= {{x → -1.18978 - 0.602803 i},
   {x → -1.18978 + 0.602803 i},
   {x → 0.189785 - 1.04318 i},
   {x → 0.189785 + 1.04318 i}}
```

```
In[5]:= NSolve[x^4 + 100 x^3 + 2 x^2 + 2 x + 2 == 0, x]

Out[5]= {{x → -99.9802}, {x → -0.253332},
   {x → 0.116763 - 0.255597 i},
   {x → 0.116763 + 0.255597 i}}
```

```
In[6]:= NSolve[x^4 + 2000 x^3 + 2 x^2 + 2 x + 2 == 0, x]

Out[6]= {{x → -2000.}, {x → -0.0969924},
  {x → 0.0479965 - 0.0894786 i},
  {x → 0.0479965 + 0.0894786 i}}
```

```
In[9]:= NSolve[x^4 + 1000000 x^3 + 2 x^2 + 2 x + 2 == 0, x]

Out[9]= {{x → -1. × 10^6}, {x → -0.012547},
  {x → 0.00627248 - 0.0109571 i},
  {x → 0.00627248 + 0.0109571 i}}
```

```
In[10]:= NSolve[
  x^4 + 1000000000 x^3 + 2 x^2 + 2 x + 2 == 0, x]

Out[10]= {{x → -1. × 10^9}, {x → -0.00125939},
  {x → 0.000629695 - 0.00109158 i},
  {x → 0.000629695 + 0.00109158 i}}
```

```
In[11]:= NSolve[x^4 + 2 x^3 + 100 x^2 + 2 x + 2 == 0, x]

Out[11]= {{x → -0.990192 - 9.9479 i},
  {x → -0.990192 + 9.9479 i},
  {x → -0.00980762 - 0.141123 i},
  {x → -0.00980762 + 0.141123 i}}
```

```
In[12]:= NSolve[x^4 + 2 x^3 + 1000000 x^2 + 2 x + 2 == 0, x]

Out[12]= {{x → -0.999999 - 999.999 i},
  {x → -0.999999 + 999.999 i},
  {x → -0.00141421 i}, {x → 0.00141421 i}}
```

```
In[13]:= NSolve[
           x^4 + 1000000 x^3 + 500000 x^2 + 2 x + 2 == 0, x]

Out[13]= {{x → -999999.}, {x → -0.500004},
          {x → 1.99995×10^-6 - 0.00199999 i},
          {x → 1.99995×10^-6 + 0.00199999 i}}
```

```
In[14]:= NSolve[x^4 + 1000000 x^3 +
             500000 x^2 + 2 x + 10000 == 0, x]

Out[14]= {{x → -999999.}, {x → -0.534942},
          {x → 0.0174707 - 0.135604 i},
          {x → 0.0174707 + 0.135604 i}}
```

```
In[15]:= NSolve[x^4 + 1000000 x^3 +
             500000 x^2 + 100 x + 10000 == 0, x]

Out[15]= {{x → -999999.}, {x → -0.53478},
          {x → 0.0173897 - 0.135635 i},
          {x → 0.0173897 + 0.135635 i}}
```

```
In[16]:= NSolve[x^4 + 1000000 x^3 +
             500000 x^2 + 1000 x + 10000 == 0, x]

Out[16]= {{x → -999999.}, {x → -0.533287},
          {x → 0.0166436 - 0.135921 i},
          {x → 0.0166436 + 0.135921 i}}
```

```
In[7]:= NSolve[x^4 + 1000 x^3 + 30000 x^2 + 200 x + 2 == 0, x]

Out[7]= {{x → -969.042}, {x → -30.9515},
  {x → -0.00333296 - 0.00745472 ⅈ},
  {x → -0.00333296 + 0.00745472 ⅈ}}

In[8]:= NSolve[x^4 + 10000 x^3 + 30000 x^2 + 200 x + 2 == 0, x]

Out[8]= {{x → -9997.}, {x → -2.99424},
  {x → -0.00332959 - 0.00746517 ⅈ},
  {x → -0.00332959 + 0.00746517 ⅈ}}

In[9]:= NSolve[
  x^4 + 1000000 x^3 + 30000 x^2 + 200 x + 2 == 0, x]

Out[9]= {{x → -0.00333333 - 0.00745356 ⅈ},
  {x → -0.00333333 + 0.00745356 ⅈ},
  {x → 0.00333333 - 173.205 ⅈ},
  {x → 0.00333333 + 173.205 ⅈ}}

In[10]:= NSolve[
  x^4 + 100000 x^3 + 3000000 x^2 + 200 x + 2 == 0, x]

Out[10]= {{x → -99970.}, {x → -30.0089},
  {x → -0.0000333223 - 0.000815817 ⅈ},
  {x → -0.0000333223 + 0.000815817 ⅈ}}

In[12]:= NSolve[x^4 + 10000000 x^3 +
    300000000 x^2 + 200 x + 2 == 0, x]

Out[12]= {{x → -1. × 10^7}, {x → -0.00472513},
  {x → 0.00236257 - 0.00606178 ⅈ},
  {x → 0.00236257 + 0.00606178 ⅈ}}
```

จากการสุ่มแทนตัวเลขเพื่อแทนค่า A , B , C , D พบว่า คำตอบที่ได้มี 4 คำตอบ มีทั้งเป็นจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน พบว่าคำตอบส่วนที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนอย่างน้อยจะมี 1 คู่ที่เป็นคอนจูเกตกัน เช่น

$$In[1] = NSolve[x\verb|^|4 + 10x\verb|^|3 + 300x\verb|^|2 + 20x + 2 == 0, x]$$

$$Out[1] = \begin{Bmatrix} \{x \to -4.9667 - 16.573\, i\}, \{x \to -4.9667 + 16.573\, i\}, \\ \{x \to -0.0332969 - 0.0746516\, i\}, \{x \to -0.0332969 + 0.0746516\, i\} \end{Bmatrix}$$

ในตัวอย่างนี้เป็นการแสดงให้เห็นว่า เราสามารถนำค่าทั้ง 4 ค่านี้มาวิเคราะห์ได้ว่าบีมมีการสั่นในลักษณะใดและค่าที่ทำให้สมการเปลี่ยนคำตอบที่ดีความหมายในเชิงการสั่นของบีมมากที่สุดคือค่าของ A , B และ C ดังนั้นอาจสรุปได้ว่าค่าคงที่ทั้ง 3 ค่าจะเป็นตัวกำหนดว่าบีมจะสั่นมากหรือน้อยหรือไม่มีการสั่นเลย ในตัวอย่างนี้วิเคราะห์ได้ว่าบีมมีการสั่นแล้วทำให้แอมปลิจูดของการสั่นลดลงจนสุดท้ายบีมจะหยุดนิ่ง การหยุดนิ่งของบีมมีผลมาจากความหน่วงที่มากระทำกับบีมซึ่งเป็นไปตามเป้าหมายของการสร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ของแขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดียวของหุ่นยนต์ที่พิจารณาผลกระทบจากความหน่วง

จากการแก้สมการ (3-18A) ได้คำตอบทั้งหมด 4 ค่า ดังนั้นคำตอบทั่วไปของสมการ (3-17) จะอยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$\varphi_n(t) \quad = \quad m_1 e^{x_1 t} + m_2 e^{x_2 t} + m_3 e^{x_3 t} + m_4 e^{x_4 t}$$

และได้สมการการเคลื่อนที่ของบีมที่พิจารณาผลกระทบจากความหน่วงอยู่ในรูป

$$y_n(x,t) \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} [\sin \delta_n x][\, m_1 e^{x_1 t} + m_2 e^{x_2 t} + m_3 e^{x_3 t} + m_4 e^{x_4 t}\,] \qquad (3\text{-}19)$$

เมื่อ x_1 , x_2 , x_3 , x_4 เป็นรากของสมการ (3-18A)

จากการทดลองแทนค่า A , B , C, D ซึ่งเป็นค่าคงที่ทั้งหมดผลของคำตอบจะได้ออกมาแตกต่างกัน ค่า A , B , C, D เหล่านี้ต่างก็เป็นคุณสมบัติเฉพาะของวัสดุแต่ละชนิด

ดังนั้นสรุปได้ว่าหากต้องการให้ปลายบีมหยุดสั่นในขณะทำงาน จะต้องเลือกวัสดุที่มีคุณสมบัติเหมาะสมกับการทำงานโดยใช้ สัมประสิทธิ์หน้าตัวแปรเป็นหลักเพื่อเลือกวัสดุที่นำมาทำบีม จากการทดลองสุ่มแทนค่า A , B , C, D ลงในสมการ (3-18A) ค่าคงที่ที่เป็นตัวบ่งบอกว่าบีมจะหยุดสั่นคือค่าคงที่ที่อยู่ในเทอมของ A, B และ C

โดยที่ $$A = \frac{(h - f\delta_n^2)}{c} = \frac{\gamma + \dfrac{\varsigma I\gamma\delta_n^2}{\kappa AG}}{-\dfrac{EI\gamma}{\kappa AG}} = -\left(\frac{\kappa AG + \varsigma I\delta_n^2}{EI}\right)$$

$$B = \frac{(1 - b\delta_n^2)}{c} = \frac{1 + \dfrac{E\rho I\delta_n^2}{\kappa G}}{-\dfrac{EI\gamma}{\kappa AG}} = -\left(\frac{\kappa AG + EIA\rho\delta_n^2}{EI\gamma}\right)$$

$$C = \frac{(d\delta_n^4 - e\delta_n^2)}{c} = \left(\frac{\varsigma I\delta_n^4 + \dfrac{\varsigma I\rho\delta_n^2}{\kappa G}}{-\dfrac{EI\gamma}{\kappa AG}}\right) = -\varsigma\delta_n^2\left(\frac{\kappa G\delta_n^2 + \rho}{E\gamma}\right)$$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ตัวแปรของสมการ (3-18A) ได้จากคุณสมบัติธรรมชาติของบีมนั้น ในแง่ของทฤษฎีสามารถกล่าวได้ว่าปัญหาการสั่นของแขนกลนั่นแก้ได้โดยการกำหนดคุณสมบัติของวัสดุที่จะนำมาทำแขนกลให้เหมาะสมและสอดคล้องกับทฤษฎี โดยดูได้จากค่าคงที่ 3 ค่าคือค่า A, B และ C ทั้งสามค่ามีผลกระทบต่อกันอย่างมีนัยสำคัญ ในการหาค่าคงที่ดังที่กล่าวมายังเป็นปัญหาที่น่าสนใจและควรจะได้มีการศึกษาต่อไป และเป็นหน้าที่ของผู้ที่จะสร้างแขนกลต้องหาวิธีวัดค่าคงที่เหล่านี้ออกมาเพื่อจะได้สร้างแขนกลให้ถูกต้องตามความต้องการ

ถ้าแขนกลเป็นอลูมิเนียมบางสมประสิทธิ์ของ $\psi_n^{(4)}(t)$ และ $\psi_n^{(3)}(t)$ จะมีค่าน้อยมากจะเหลือเฉพาะสัมประสิทธิ์ของเทอมที่มีอันดับต่ำๆซึ่งเป็นผลที่คาดคะเนได้จากการทดลอง ดังนั้นในสมการ (3-16) จะประมาณค่าให้เหลือเพียงเทอมที่มีอนุพันธ์อันดับสองเท่านั้น

จากสมการเดิม

$$c\psi_n^{(4)}(t) + (h - f\delta_n^2)\psi_n^{(3)}(t) + (1 - b\delta_n^2)\psi_n^{(2)}(t) +$$

$$(d\delta_n^4 - e\delta_n^2 + g)\varphi_n^{\bullet}(t) + a\delta_n^4\psi_n(t) = 0$$

ตัดพจน์ที่มีอนุพันธ์อันดับ 4 และอันดับ 3 ทิ้งจะได้

$$(1 - b\delta_n^2)\psi_n^{(2)}(t) + (d\delta_n^4 - e\delta_n^2 + g)\varphi_n^{\bullet}(t) + a\delta_n^4\psi_n(t) = 0$$

กำหนดให้

$$m_n = 1 - b\delta_n^2$$

$$l_n = d\delta_n^4 - e\delta_n^2 + g$$

$$k_n = a\delta_n^4$$

ดังนั้นจะได้สมการเป็น

$$m_n\psi_n^{(2)}(t) + l_n\dot{\psi}_n(t) + k_n\psi_n(t) = 0 \qquad (3\text{-}20)$$

พิจารณาสมการ (3-18) จะเห็นว่าเป็นสมการที่บรรยายการกวัดแกว่งแบบถูกหน่วง (damping oscillation) ที่มีรูปแบบคำตอบดังนี้

$$\psi_n(t) = Ae^{\lambda t} \qquad (3\text{-}20A)$$

เมื่อ A เป็นค่าคงที่ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขการทดลอง (arbitrary constant) ส่วน λ เป็นค่าที่ต้องหาในเทอมของ m, l และ k

แทนสมการ (3-20A) ลงในสมการ (3-20) จะได้

$$(m\lambda^2 + l\lambda + k)Ae^{\lambda t} = 0$$

$$(m\lambda^2 + l\lambda + k) = 0$$

แก้สมการได้ค่า λ ดังนี้

$$\lambda = \frac{-l \pm \sqrt{l^2 - 4mk}}{2m}$$

จะได้ค่า λ สองค่าดังนี้

$$\lambda_1 = \frac{-l + \sqrt{l^2 - 4mk}}{2m}$$

$$\lambda_1 = \frac{-l - \sqrt{l^2 - 4mk}}{2m}$$

จากสมการ (3-20A) จะได้คำตอบอยู่ในรูป

$$\psi_n(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \qquad (3\text{-}20B)$$

แทนค่า λ_1 และ λ_2 ลงในสมการ (3-20B) จะได้

$$\psi_n(t) = e^{-(\frac{l}{2m})t}\left[Ae^{(\sqrt{\frac{l^2}{4m^2}-\frac{k}{m}})t} + Be^{(-\sqrt{\frac{l^2}{4m^2}-\frac{k}{m}})t}\right]$$

ในที่นี้จะพิจารณาคำตอบกรณีที่ $\frac{l^2}{4m^2} < \frac{k}{m}$ ซึ่งเป็นกรณี underdamping oscillation ในกรณีนี้จะมีคำตอบในรูปจำนวนจินตภาพติดอยู่ จากสมการ (3-20B) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\psi_n(t) = Ae^{i\lambda_1 t} + Be^{i\lambda_2 t}$$

ดังนั้นจะได้คำตอบของสมการ (3-20) ดังนี้

$$\psi_n(t) = e^{-(\frac{l}{2m})t}\left[Ae^{(i\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{l^2}{4m^2}})t} + Be^{(-i\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{l^2}{4m^2}})t}\right]$$

$$\psi_n(t) = e^{-(\frac{l}{2m})t}\left[(A+B)\cos(\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{l^2}{4m^2}})t + i(A-B)\sin(\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{l^2}{4m^2}})t\right]$$

ให้ $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$\mu = \dfrac{l}{2m}$

$\omega_n{}^2 = \omega_0^2 - \mu^2$

จะได้สมการใหม่เป็น

$$\psi_n(t) = e^{-\mu t}\left[(A+B)\cos(\omega_n t) + i(A-B)\sin(\omega_n t)\right]$$

จัดสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\psi_n(t) = e^{-\mu t}\left[C_1\cos(\omega_n t) + C_2\sin(\omega_n t)\right]$$

เมื่อ C_1 และ C_2 เป็นจำนวนจริง
แปลงรูปสมการใหม่ได้สมการดังนี้

$$\psi_n(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\,e^{-\mu t}\left[\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\cos(\omega_n t) + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\sin(\omega_n t)\right] \tag{3-21}$$

กำหนดให้ $\cos\beta = \dfrac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$ (3-21A)

$\sin\beta = -\dfrac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$ (3-21B)

แทนสมการ (3-21A) และ (3-21B) ลงในสมการ (3-21) จะได้รูปสมการดังนี้

$$\psi_n(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\,e^{-\mu t}\left[\cos\beta\cos(\omega_n t) - \sin\beta\sin(\omega_n t)\right]$$

$$\psi_n(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\,e^{-\mu t}\left[\cos(\omega_n t + \beta)\right] \tag{3-22}$$

กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นดังนี้

$$\psi_n(0) = \psi_0 \cos\beta \quad \text{เมื่อ} \quad t = 0$$

ใช้เงื่อนไขเริ่มต้นแทนลงในสมการ (3-22) จะได้

$$\psi_0 \cos\beta = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\cos\beta$$

ดังนั้น

$$\psi_0 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \qquad (3\text{-}22\text{A})$$

แทนสมการ (3-22A) ลงในสมการ (3-22) จะได้

$$\psi_n(t) = \psi_0 e^{-\mu t}\left[\cos(\omega_n t + \beta)\right] \qquad (3\text{-}23)$$

จากสมการการเคลื่อนที่ของบีม

$$y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)\psi_n(t)$$

รวมสมการ (3-14) กับสมการ (3-23) แทนลงในสมการ (3-13) จะได้สมการดังนี้

$$y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{L}\,\psi_0 e^{-\mu t}\left[\cos(\omega_n t + \beta)\right]$$

$$y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_0 e^{-\mu t})[\sin(\frac{n\pi x}{L})]\left[\cos(\omega_n t + \beta)\right] \qquad (3\text{-}24)$$

สมการที่ (3-24) เป็นคำตอบของสมการ (3-12) และเป็นแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ของแขนกลอ่อนตัวข้อต่อเดียวของหุ่นยนต์ที่พิจารณาผลกระทบจากความหน่วงภายในและภายนอกบีม สมการการเคลื่อนที่นี้เป็นตัวบ่งบอกว่า ณ จุดปลายของบีมซึ่งเป็นจุดที่ $x = l$ จะทำให้เกิดเทอม $\sin n\pi = 0$ (n เป็นจำนวนเต็ม) นั่นหมายความว่าที่จุดปลายของบีมจะไม่มีการเคลื่อนที่ นั่นคือปลายของบีมจะนิ่ง ซึ่งเป็นผลจากความหน่วงที่มากระทำกับบีม