

ตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดสำหรับสี่อาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนด



นายอรรณพ แก้วขาว

สถาบันวิทยบริการ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์

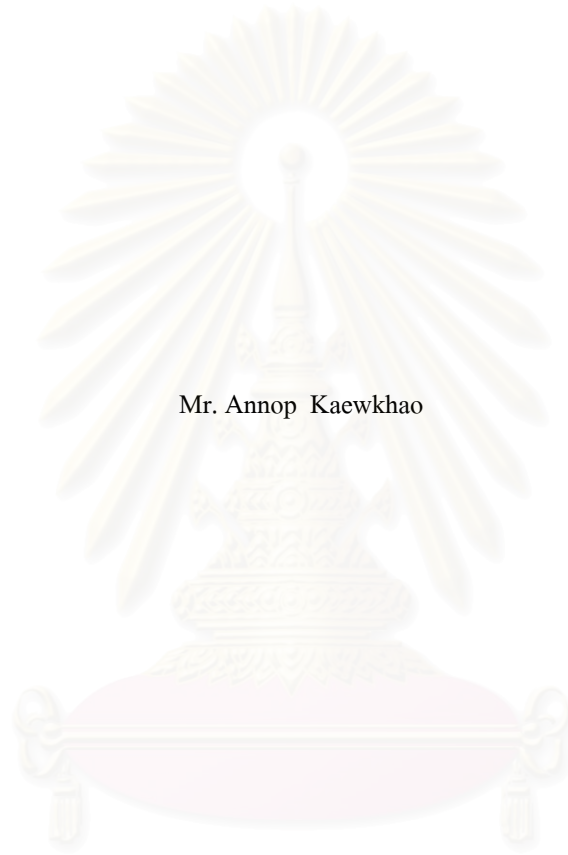
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2548

ISBN 974-17-4051-4

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

SHORTEST ENCLOSURE FOR FOUR REGIONS OF GIVEN AREAS



Mr. Annop Kaewkhao

สถาบันวิทยบริการ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2005

ISBN 974-17-4051-4

หัวข้อวิทยานิพนธ์

ตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดสำหรับสี่อาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนด

โดย

นายอรณพ แก้วขาว

สาขาวิชา

คณิตศาสตร์


อาจารย์ที่ปรึกษา

อาจารย์ ดร. วัชรินทร์ วิจิรมาลา

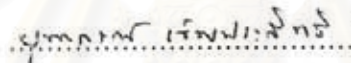
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม


ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อัมจิตต์ เต็มวุฒิพงษ์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยอนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต


..... คณบดีคณะวิทยาศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.เปี่ยมศักดิ์ เมนะเสวต)

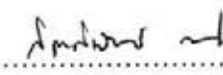
คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์


..... ประธานกรรมการ
(ศาสตราจารย์ ดร. ยุพากรณ์ เข้มประสิทธิ์)


..... อาจารย์ที่ปรึกษา
(อาจารย์ ดร. วัชรินทร์ วิจิรมาลา)


..... อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อัมจิตต์ เต็มวุฒิพงษ์)


..... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วิษณุ ลี้วกริตยกุล)


..... กรรมการ
(อาจารย์ ดร. กิตติพัฒน์ วง)

นายอรรถพร แก้วขาว : ตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดสำหรับสี่อาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนด
(SHORTEST ENCLOSURE FOR FOUR REGIONS OF GIVEN AREAS)

อ. ที่ปรึกษา : อ. ดร. วชิรินทร์ วิจิรมลลา, อ. ที่ปรึกษาร่วม : ผศ. ดร. อัมจิตต์ เต็มวุฒิพงษ์
25 หน้า. ISBN 974- 17-4051-4

ในวิทยานิพนธ์นี้เราจะหาเงื่อนไขจำเป็นของตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดสำหรับสี่อาณาบริเวณเมื่อ
กำหนดพื้นที่ของแต่ละอาณาบริเวณให้ กรณี $P_1 = P_2 = P_3 > P_4$ เมื่อ P_i เป็นความดันของอาณา
บริเวณที่ i เราพบว่า

1. สำหรับตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดแต่ละเซลล์ของอาณาบริเวณที่มีไม่เกิน 9 ด้าน
2. ถ้าอาณาบริเวณที่สี่เป็นบริเวณเชื่อมโยง แล้วเซลล์ของอาณาบริเวณที่สี่ต้องเป็นเซลล์
ข้างนอก



สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

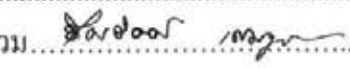
ภาควิชา.....คณิตศาสตร์.....

สาขาวิชา.....คณิตศาสตร์.....

ปีการศึกษา.....2548.....

ลายมือชื่อนิสิค 

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา 

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม 

4672498423 : MAJOR MATHEMATICS

KEY WORD : SOAP BUBBLE PROBLEM / SHORTEST ENCLOSURE

ANNOP KAEWKHAO : SHORTEST ENCLOSURE FOR FOUR REGIONS
OF GIVEN AREAS. THESIS ADVISOR : WACHARIN WICHIRAMALA, Ph.D.,
THESIS COADVISOR: ASST. PROF. IMCHIT TERMWUTTIPONG, Ph.D., 25 pp.
ISBN: 974-17-4051-4.

In this thesis, we find necessary conditions of the shortest enclosure for four regions of given areas in case $P_1 = P_2 = P_3 > P_4$ where P_i is the pressure of region i . We obtain the following results

- (1) each cell of the forth region in the shortest enclosure may have at most 9 sides;
- (2) if the forth region is connected, then it must be an external cell.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Department.....**Mathematics**....

Field of study....**Mathematics**....

Academic year.....**2005**.....

Student's signature*Annop Kaewkhao*.....

Advisor's signature*Wacharin Wichiramala*.....

Co-advisor's signature.....*Imchit Termwuttipong*.....

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณ คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ศาสตราจารย์ ดร. ยุพากรณ์ เข้มประสิทธิ์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิชาญ ลีวศิริยุดกุล และอาจารย์ ดร. กิตติพัฒน์ วงศ์ สำหรับข้อเสนอแนะต่างๆในการจัดทำวิทยานิพนธ์เล่มนี้ ขอขอบคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อิมจิตต์ เต็มวุฒิพงษ์ อาจารย์ที่ปรึกษาผู้ซึ่งให้ความเมตตา เสียสละเวลาในการแนะนำ ตรวจสอบให้วิทยานิพนธ์เล่มนี้มีความสมบูรณ์ และขอขอบคุณอาจารย์ ดร. วัชรินทร์ วิชรมาลา อาจารย์ที่ปรึกษาผู้ซึ่งเสียสละเวลาให้ความช่วยเหลือ แนะนำในการค้นคว้าและจัดทำวิทยานิพนธ์เล่มนี้ ตลอดจนกำลังใจที่ดีเสมอมา จนวิทยานิพนธ์เล่มนี้เสร็จสมบูรณ์

ขอขอบคุณเจ้าหน้าที่บัณฑิต เจ้าหน้าที่ห้องสมุด สำหรับการอำนวยความสะดวกในการติดต่อประสานงาน การค้นคว้า ขอขอบคุณนายบัญญัติ สร้อยแสง สำหรับการช่วยเหลือแนะนำในการจัดพิมพ์

สุดท้ายนี้ขอขอบคุณครอบครัวสำหรับความรักและกำลังใจที่ดีเสมอมา



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อวิทยานิพนธ์ภาษาไทย	ง
บทคัดย่อวิทยานิพนธ์ภาษาอังกฤษ	จ
กิตติกรรมประกาศ	ฉ
สารบัญ	ช
บทที่	
1. บทนำ	1
2. ความรู้เบื้องต้น	3
3. เจาะใจทั่วไปบนตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุด	10
4. ตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดสำหรับ 4 อาณาบริเวณ	15
5. งานวิจัยต่อเนื่อง	24
รายการอ้างอิง	25
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์	26

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

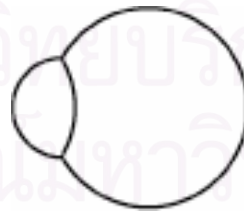
บทที่ 1

บทนำ

ปัญหาการปิดล้อมและแยกอาณาบริเวณบนระนาบซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดโดยใช้เส้นปิดล้อมที่มีความยาวรวมน้อยสุด เป็นปัญหาที่มนุษย์ให้ความสนใจตั้งแต่สมัยโบราณ ชาวกรีกโบราณได้ตั้งข้อสงสัยว่า จะทำอย่างไรจึงจะใช้เชือกเส้นหนึ่งล้อมรอบอาณาบริเวณให้ได้พื้นที่มากที่สุด ซึ่งได้ถูกคาดการณ์ว่าต้องล้อมเป็นวงกลม คำถามของชาวกรีกนั้นเทียบได้กับปัญหาการปิดล้อมและแยกหนึ่งอาณาบริเวณบนระนาบซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดโดยใช้เส้นปิดล้อมที่มีความยาวรวมน้อยสุด คำถามนี้มนุษย์เกือบทุกคนจะตอบอย่างมั่นใจว่ารูปนั้นต้องเป็นวงกลม แต่เมื่อมีคำถามต่อไปว่าทำไมจึงเป็นวงกลมพิสูจน์ให้เห็นได้หรือไม่ นักคณิตศาสตร์ใช้ความพยายามมากในการพิสูจน์คำตอบนี้ ส่วนหนึ่งที่ทำให้เราคิดว่าคำตอบต้องเป็นวงกลมก็คือเราคิดว่าอาณาบริเวณไม่ควรถูกแยกจากกัน แต่ในความเป็นจริงอาณาบริเวณอาจจะถูกแยกออกเป็นหลายบริเวณย่อยได้ และถ้าต้องการปิดล้อมและแยกอาณาบริเวณมากกว่าหนึ่งอาณาบริเวณ แล้วจะมีรูปแบบใดหรือไม่ที่เป็นคำตอบของปัญหานี้ สำหรับปัญหาที่มีเพียงหนึ่งอาณาบริเวณนั้นพิสูจน์คำตอบได้ในปี ค.ศ.1880 ว่าตัวปิดล้อมต้องเป็นวงกลม

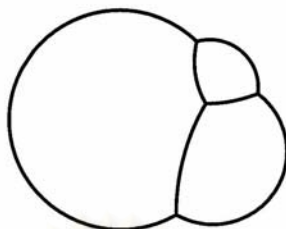
ในปี ค.ศ.1994 Morgan[1] สามารถพิสูจน์ได้ว่า มีรูปแบบที่ปิดล้อมและแยกหลายอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดที่มีความยาวรวมของเส้นปิดล้อมน้อยสุด

สำหรับปัญหาการปิดล้อมและแยกสองอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดให้เส้นปิดล้อมที่มีความยาวรวมน้อยสุดมีคำตอบเป็นดังแสดงในภาพที่ 1.1 ซึ่งมีการพิสูจน์ในปี ค.ศ.1993 โดย J. Foisy, M. Alfaro, J. Brock, N. Hodges และ J. Zimba [2]



ภาพที่ 1.1 : ตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดสำหรับสองอาณาบริเวณ [2]

ในปัจจุบันปัญหาการปิดล้อมและแยกอาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ตามที่กำหนดให้มีความยาวรวมของเส้นปิดล้อมน้อยสุด นั้นสามารถพิสูจน์คำตอบได้ถึงเพียงการปิดล้อมและแยกสามอาณาบริเวณ ซึ่งพิสูจน์ได้ในปี ค.ศ.2002 โดย วัชรินทร์ วิชรมาลา [3,4] และเป็นดังภาพที่ 1.2



ภาพที่ 1.2 : ตัวปิดล้อมสำหรับสามอาณาบริเวณ [3,4]

เนื่องจากปัญหาการปิดล้อมและแยกอาณาบริเวณ คล้ายกับปัญหาจำนวนเรมซี (Ramsey Number) นั่นคือยิ่งเพิ่มจำนวนอาณาบริเวณความยากและความซับซ้อนของปัญหาก็ยิ่งยากเป็นทวีคูณ ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะศึกษาเงื่อนไขที่จำเป็นของตัวปิดล้อมและแยกสำหรับสี่อาณาบริเวณในกรณีเฉพาะ เพื่อที่จะลดปริมาณตัวปิดล้อมโดยกำจัดส่วนที่ไม่ใช่ตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดออกไปอันจะเป็นประโยชน์ในงานวิจัยต่อไป

ในบทที่สอง จะรวบรวมถึงบทนิยามต่างๆที่จำเป็นสำหรับการศึกษาปัญหานี้ และทฤษฎีบทต่างๆที่สำคัญ โดยเฉพาะอย่างยิ่งทฤษฎีบทการมีอยู่จริงของตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุด รวมไปถึงการไม่มีช่องว่างและการมีความดันไม่น้อยกว่าศูนย์ของตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดด้วย

ในบทที่สาม เราศึกษาเงื่อนไขที่จำเป็นบนตัวปิดล้อมสำหรับปัญหาการปิดล้อมและแยกอาณาบริเวณเมื่อมีอย่างน้อยสามอาณาบริเวณมีความดันเท่ากันและได้นำผลที่ได้ไปประยุกต์ใช้ในบทที่สี่

ในบทที่สี่ เราศึกษาตัวปิดล้อมภายใต้เงื่อนไขการไม่มีช่องว่างและมีความดันไม่น้อยกว่าศูนย์สำหรับสี่อาณาบริเวณ โดยที่ $P_1 = P_2 = P_3 > P_4$ เมื่อ P_i คือความดันของอาณาบริเวณที่ i และอาณาบริเวณที่มีความดันต่ำสุดเป็นบริเวณเชื่อมโยง ซึ่งผลที่ได้นั้นทำให้เราสามารถลดจำนวนขอบเขตของตัวปิดล้อมที่มีโอกาสเป็นตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดให้น้อยลง

สำหรับบทที่ห้า เรากล่าวถึงข้อคาดการณ์และข้อสนับสนุนต่างๆที่จะเป็นประโยชน์ต่องานวิจัยในอนาคต

บทที่ 2

ความรู้เบื้องต้น

ปัญหาการปิดล้อมและแยกอาณาบริเวณ เป็นงานวิจัยที่พยายามค้นหารูปแบบที่สามารถปิดล้อมและแยกอาณาบริเวณเมื่อกำหนดพื้นที่ของแต่ละอาณาบริเวณมาให้ โดยใช้ความยาวรวมของเส้นปิดล้อมในการปิดล้อมน้อยที่สุด โดยทั่วไปเราจะเรียกปัญหานี้ว่า “ ปัญหาฟองสบู่บนระนาบ (The planar soap bubble problem) ” รูปแบบต่างๆที่จะปิดล้อมและแยกอาณาบริเวณนั้นเราพิจารณาจากลักษณะของเส้นปิดล้อมและแยกบนระนาบ

สำหรับแต่ละรูปแบบในการปิดล้อมและแยก n อาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ A_1, A_2, \dots, A_n เราให้ R_i แทนอาณาบริเวณที่ i ซึ่งบรรจุพื้นที่ทั้งหมด A_i เมื่อ $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ เราจะเรียกอาณาบริเวณซึ่งไม่ใช่อาณาบริเวณ R_i ใดเลยว่า **อาณาบริเวณว่างหรือ R_0** ดังนั้นเราจะเห็นว่าอาณาบริเวณว่างหรือ R_0 เป็นอาณาบริเวณเดียวที่ไม่มีขอบเขต (unbounded region) เราจะเรียกแต่ละส่วนของอาณาบริเวณ R_i ว่า **บริเวณย่อย R_i** เรียกส่วนของอาณาบริเวณ R_0 ที่มีขอบเขต (bounded region) ว่า **ช่องว่าง (empty chamber)** เรียกรูปแบบการปิดล้อมและแยกที่ใช้ความยาวรวมของเส้นปิดล้อมน้อยที่สุดว่า **ตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุด (shortest enclosure)** เพื่อความสะดวกเราจะเรียกบริเวณย่อยว่า **เซลล์** เซลล์ที่ติด R_0 เราเรียกว่า **เซลล์ข้างนอก (external cell)** เซลล์ที่ไม่ติด R_0 เราเรียกว่า **เซลล์ข้างใน (internal cell)**

ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

ในปี 1994 Morgan [1] ได้แสดงให้เห็นถึงการมีอยู่จริงและเงื่อนไขพื้นฐานที่จำเป็นของตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุด สำหรับ n อาณาบริเวณใดๆเมื่อกำหนดพื้นที่ของแต่ละอาณาบริเวณมาให้

ทฤษฎีบทที่ 2.1 [1] เมื่อกำหนดจำนวนจริงบวก m ค่ามาให้จะมีตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดสำหรับ m อาณาบริเวณซึ่งมีพื้นที่ m ค่าตามที่กำหนด และตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขดังนี้

1. เป็นกราฟที่ประกอบด้วยจุดยอด (vertex) และเส้นเชื่อม (edge) เป็นจำนวนจำกัด

2. ทุกเส้นเป็นส่วนโค้งของวงกลมหรือเส้นตรง (constant curvature)
3. ทุกจุดยอดเป็นจุดบรรจบของสามเส้นที่พบกันด้วยมุม 120° (each vertex is a trinary of edges meeting at equal 120° angles)
4. ทุกเส้นที่แยกบริเวณคู่เดียวกันจะมีค่าความโค้งเท่ากัน(all adges separating a specific pair of regions have the same curvature)

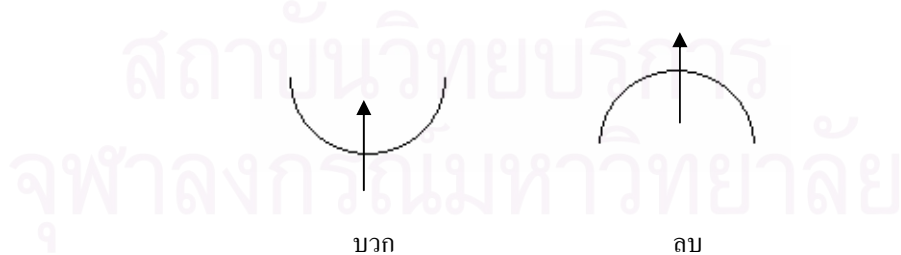
ดังนั้นเราจะเรียกรูปแบบการปิดล้อมและแยกที่สอดคล้องเงื่อนไขทั้ง 4 ข้อ ของทฤษฎีบทที่ 2.1 ว่า **ตัวปิดล้อมที่ดี**

ทฤษฎีบทที่ 2.2 [3,4] ตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดสำหรับ m อาณาบริเวณเมื่อ $m \leq 6$ จะไม่มีช่องว่าง

ทฤษฎีบทที่ 2.3 [5,6,7] ตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดจะต้องเป็นวิถีเชื่อมโยง (path-connected) และแต่ละเซลล์จะต้องเป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว (simply connected region) ซึ่งผลรวมของค่าความโค้ง ณ จุดยอดใดๆเป็นศูนย์

โดยทฤษฎีบทที่ 2.3 นี้เราสามารถเรียกบริเวณย่อยว่า **เซลล์ n ด้าน** ถ้าบริเวณหรือเซลล์นั้นประกอบด้วยด้าน n ด้าน

เนื่องจากตัวปิดล้อมประกอบด้วยส่วนโค้งของวงกลม หรือเส้นตรง และแต่ละเซลล์เป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว ดังนั้นเราสามารถกำหนด**ความดัน** (pressure) ของแต่ละเซลล์เมื่อกำหนดให้ความดันของเซลล์ R_0 เป็นศูนย์ สำหรับเซลล์อื่นๆค่าความดันให้เท่ากับ ผลรวมของค่าทิศทางความโค้งเมื่อเราลากวิถี (pick path) จาก R_0 ตัดผ่านเส้นต่างๆของตัวปิดล้อมไปสู่เซลล์นั้นๆ เมื่อกำหนดให้ค่าทิศทางความโค้งเป็นดังภาพที่ 2.1



ภาพที่ 2.1: แสดงค่าทิศทางความโค้ง

Cox และคณะ [8] ได้แสดงว่าสำหรับวิถีปิด (closed path) ที่ตัดผ่านเส้นของตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุด ผลรวมของค่าทิศทางความโค้งของเส้นที่วิถีนั้นตัดผ่านเป็นศูนย์ และต่อมา Vaughn [9]

ได้แสดงให้เห็นว่าสำหรับวิถีใดๆที่เริ่มต้นและสิ้นสุดบนบริเวณของอาณาบริเวณเดียวกัน (ไม่จำเป็นต้องเป็นเซลล์เดียวกัน) ผลรวมของค่าทิศทางความโค้งของเส้นที่วิถีนั้นตัดผ่านยังคงเป็นศูนย์ ซึ่งผลที่ได้นี้ทำให้เราสามารถกำหนดค่าความดันของแต่ละอาณาบริเวณได้ นั่นคือค่าความดันของอาณาบริเวณใดๆเท่ากับค่าความดันของเซลล์ของอาณาบริเวณนั้นๆ

หมายเหตุ ด้านของเซลล์จะนูนเข้าไปในเซลล์ที่มีความดันต่ำกว่า และด้านที่อยู่ระหว่างสองเซลล์ที่มีความดันเท่ากันจะเป็นเส้นตรง นั่นคือค่าความโค้งเป็นศูนย์

ทฤษฎีบทที่ 2.4 [8] ตัวปิดล้อมสำหรับ m อาณาบริเวณซึ่งบรรจุพื้นที่ A_1, A_2, \dots, A_m และมีความดัน

$$P_1, P_2, \dots, P_m \text{ ตามลำดับ จะมีความยาวรวมเท่ากับ } 2 \sum_{i=1}^m P_i A_i$$

ข้อสังเกต บางอาณาบริเวณอาจมีความดันน้อยกว่าศูนย์ แต่โดยทฤษฎีบทข้างต้นเราเห็นได้ว่าอาณาบริเวณที่มีความดันสูงสุดต้องมีค่าความดันมากกว่าศูนย์

ทฤษฎีบทที่ 2.5 [3,4] สำหรับจำนวนอาณาบริเวณที่น้อยกว่าหก ตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดจะต้องมีความดันของแต่ละอาณาบริเวณไม่น้อยกว่าศูนย์

บทนิยามที่ 2.1 กำหนดเครื่องหมาย (sign) ของเส้นโค้งที่มีทิศทางให้เป็นบวกถ้าเส้นโค้งเลี้ยวซ้าย (turning left) และเป็นลบถ้าเส้นโค้งเลี้ยวขวา (turning right)

ข้อสังเกต เมื่อเราพิจารณาเซลล์ C เราจะมองด้านทิศทางของเซลล์ C แบบทวนเข็มนาฬิกา (counterclockwise) นั่นคือเซลล์ C จะอยู่ทางซ้ายของด้าน ด้วยเหตุนี้คำนิยามของทิศทางความโค้งของด้านของเซลล์จึงแจ่มชัด

บทนิยามที่ 2.2 มุมเลี้ยว (turning angle) ของด้านคือผลคูณระหว่างทิศทางความโค้งและความยาวของด้านนั้นๆ

ทฤษฎีบทที่ 2.6 [3,4] ผลรวมของมุมเลี้ยวทั้งหมดของด้านของเซลล์ n ด้านบนตัวปิดล้อมเท่ากับ $\left(\frac{6-n}{3}\right)\pi$ เมื่อเซลล์มีขอบเขต และเท่ากับ $\left(\frac{6-n}{3}\right)\pi$ เมื่อเซลล์ไม่มีขอบเขต (มีเพียงเซลล์เดียว)

ทฤษฎีบทที่ 2.7 [5,6,7] สองเซลล์ใดๆบนตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดจะมีด้านร่วมกันไม่เกิน 1 ด้าน

ทฤษฎีบทที่ 2.8 [2] ตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดสำหรับอาณาบริเวณที่มากกว่าสองอาณาบริเวณจะต้องไม่มีเซลล์สองด้าน

บทนิยามที่ 2.3 สองเซลล์ใดๆ **อิสระจากกัน** ก็ต่อเมื่อ ไม่มีด้านร่วมกัน

บทนิยามที่ 2.4 เซลล์ C จะได้ชื่อว่าเป็นเซลล์ **คอนเวกซ์** (convex) ถ้าทุกด้านมีความโค้งไม่น้อยกว่าศูนย์

บทนิยามที่ 2.5 เซลล์ C จะได้ชื่อว่าเป็นเซลล์ **คอนเวกซ์แท้** (strictly convex) ถ้าเซลล์ C คอนเวกซ์และมีอย่างน้อย 1 ด้าน ที่มีความโค้งมากกว่าศูนย์

ทฤษฎีบทที่ 2.9 [3,4] ตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดสำหรับ m อาณาบริเวณจะมีเซลล์คอนเวกซ์แท้ที่เป็นอิสระกันได้ไม่เกิน m เซลล์

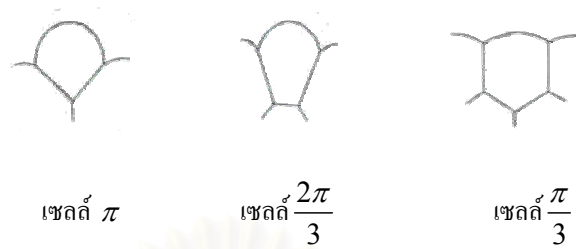
บทแทรกที่ 2.1 [3,4] ตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดสำหรับ m อาณาบริเวณ ถ้ามีเซลล์คอนเวกซ์แท้ที่เป็นอิสระกัน m เซลล์ แล้วจะต้องไม่มีด้านที่มีมุมเลี้ยวมากกว่าหรือเท่ากับ π

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทข้างต้น วัชรินทร์ วิจิรมาลา [3,4] ใช้แนวคิดเกี่ยวกับความเป็นอิสระเชิงเส้น (linearly independent) โดยเมื่อใดที่เราสามารถปรับปรุงตัวปิดล้อมให้แต่ละอาณาบริเวณยังคงมีพื้นที่เท่าเดิมได้ ตัวปิดล้อมตัวนั้นจะไม่ใช่ตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุด เปรียบเสมือนความไม่เป็นอิสระเชิงเส้นของ n เวกเตอร์ในปริภูมิ m มิติ เมื่อ $n > m$

เราจะเรียกสองเซลล์ของอาณาบริเวณใดๆว่า **เหมือนกัน** (identical) ถ้าสองเซลล์นั้นเท่ากันทุกประการและมีอาณาบริเวณที่ล้อมรอบเหมือนกัน

ทฤษฎีบทที่ 2.10 [3,4] ตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดจะต้องไม่มีสองเซลล์คอนเวกซ์แท้ที่เหมือนกัน

ต่อไปจะกล่าวถึงสมบัติต่างๆของเซลล์ 3-5 ด้าน ซึ่งมีเพียง 1 ด้านเท่านั้นที่ติดกับเซลล์ที่มีความดันต่ำกว่า ส่วนด้านที่เหลือติดกับเซลล์ที่มีความดันเท่ากันดังนั้นรูปแบบของเซลล์ดังกล่าวมีลักษณะดังภาพที่ 2.2



ภาพที่ 2.2 : แสดงเซกต์ $\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$

โดยทฤษฎีบทที่ 2.6 ด้านที่ติดกับเซกต์ที่มีความคั่นต่ำกว่าของแต่ละเซกต์จะมีมุมเลี้ยวเป็น $\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ ตามลำดับ ดังนั้นเพื่อความสะดวกเราจะเรียก เซกต์ 3 ด้าน เซกต์ 4 ด้าน และเซกต์ 5 ด้านดังกล่าวนี้ว่า เซกต์ π เซกต์ $\frac{2\pi}{3}$ และเซกต์ $\frac{\pi}{3}$ ตามลำดับ

Vaughn [9] ได้ศึกษาสมบัติและลักษณะต่างของ เซกต์ π เซกต์ $\frac{2\pi}{3}$ และเซกต์ $\frac{\pi}{3}$ เมื่อกำหนดค่าความโค้งของด้านที่ติดกับเซกต์ที่มีความคั่นต่ำกว่าให้ดังนี้

1. เซกต์ π จะเป็นไปได้แบบเดียว
2. เซกต์ $\frac{2\pi}{3}$ จะถูกกำหนดโดยพารามิเตอร์ 1 ตัว นั่นคือความยาวของด้านใดด้านหนึ่ง
3. เซกต์ $\frac{\pi}{3}$ จะถูกกำหนดโดยพารามิเตอร์ 2 ตัว นั่นคือความยาวของด้านที่ติดกับด้านโค้ง และด้านที่ไม่ติดกับด้านโค้ง

ซึ่งผลที่ได้ทำให้เราได้ผลลัพธ์สำคัญดังนี้

บทแทรกที่ 2.2 (ความเท่ากันทุกประการ)

1. เซกต์ π สองเซกต์ใดๆ จะเท่ากันทุกประการ
2. เซกต์ $\frac{2\pi}{3}$ สองเซกต์ใดๆที่ติดกัน จะเท่ากันทุกประการ
3. เซกต์ $\frac{\pi}{3}$ สองเซกต์ใดๆที่ถูกแทรกด้วยเซกต์ π จะเท่ากันทุกประการ

บทพิสูจน์ 1. เพราะเซลล์ π เป็นไปได้แบบเดียว

2. เพราะสองเซลล์นั้นมีด้านร่วมกัน 1 ด้าน

3. เพราะสองเซลล์นั้นมีด้านร่วมกัน 1 ด้าน และมีด้านที่ติดกับเซลล์ π ยาวเท่ากัน

□

บทแทรกที่ 2.3 (การฝังตัว)

1. สำหรับเซลล์ $\frac{2\pi}{3}$ สองเซลล์ใดๆ เซลล์หนึ่งสามารถฝังตัวลงไปอีกเซลล์หนึ่งได้

2. สำหรับเซลล์ $\frac{\pi}{3}$ สองเซลล์ใดๆ ที่ติดกัน เซลล์หนึ่งสามารถฝังตัวลงไปอีกเซลล์หนึ่งได้

บทพิสูจน์ 1. เพราะเซลล์ $\frac{2\pi}{3}$ ถูกกำหนดโดยพารามิเตอร์ 1 ตัว

2. เพราะเซลล์ $\frac{\pi}{3}$ ถูกกำหนดโดยพารามิเตอร์ 2 ตัว แต่กรณีนี้มีด้านร่วมกันแล้ว 1 ด้าน ดังนั้นจึงแตกต่างกันที่พารามิเตอร์อีก 1 ตัว

□

ทฤษฎีบทที่ 2.11 [9] เซลล์ $\frac{2\pi}{3}$ ที่ติดกับเซลล์ π สามารถฝังตัวเข้าไปในเซลล์ π ได้

Vaughn [9] ได้แสดงว่าเมื่อกำหนดค่าความโค้งของทั้ง 3 ด้าน มาให้จะสร้างเซลล์ 3 ด้านได้แบบเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบทที่ 2.12 [9] เมื่อกำหนดค่าความโค้งของแต่ละด้านมาให้จะสร้างเซลล์ 3 ด้านได้แบบเดียว

วัชรินทร์ วิชรมาลา [3,4] ได้ศึกษาสมบัติและลักษณะต่างๆทางเรขาคณิตของเซลล์ต่างๆไว้มากมายแต่ก่อนที่จะกล่าวถึงสมบัติเหล่านั้นเราจะให้บทนิยามก่อนดังนี้

บทนิยามที่ 2.5 ส่วนโค้งของวงกลมสองเส้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ วงกลมทั้งสองมีจุดศูนย์กลางร่วมกัน

ทฤษฎีบทที่ 2.13 [3,4] สำหรับเส้น e, f, g ซึ่งเป็นด้านของเซลล์เดียวกันที่ตามกันมา และ e กับ g มีค่าทิศทางความโค้งเท่ากัน แต่ไม่ขนานกัน ถ้า l เป็นเส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ \overline{pq} เมื่อ p และ q เป็นจุดศูนย์กลางของ e และ g ตามลำดับ แล้ว l จะแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ f

ทฤษฎีบทที่ 2.14 [3,4] สำหรับคู่ e กับ f ใดๆของส่วนโค้งที่ไม่ขนานกันของวงกลม และมีค่าทิศทางความโค้ง k ใดๆจะมีเส้นโค้งอย่างมาก 2 เส้น ที่ตัด e และ f ด้วยมุม 120° โดยเฉพาะอย่างยิ่งถ้ามี 2 เส้น แล้วทั้งสองเส้นจะต้องอยู่บนวงกลมเดียวกัน

หมายเหตุ ข้อความในทฤษฎีบทข้างต้นไม่เป็นจริงถ้า e และ f มีค่าความโค้งเป็นศูนย์ และ $k=0$ ตัวอย่างเช่น เซลล์ $\frac{2\pi}{3}$ มีเส้นตรงที่ตัด e และ f ด้วยมุม 120° ไม่จำกัดเส้น



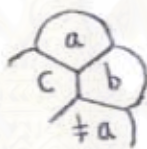
สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 3

เงื่อนไขทั่วไปของตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุด

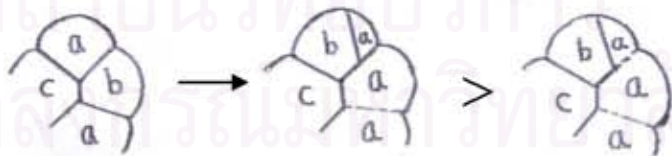
ในบทนี้เราจะกล่าวถึงเงื่อนไขต่างๆและสมบัติของเซลล์บนตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดสำหรับ m อาณาบริเวณ ที่ทำให้เกิดเซลล์ π เซลล์ $\frac{2\pi}{3}$ และเซลล์ $\frac{\pi}{3}$ นั่นคือจะต้องมีอย่างน้อย 3 อาณาบริเวณที่มีความดันเท่ากัน ซึ่งเราจะนำผลที่ได้ไปพิจารณาตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดสำหรับ 4 อาณาบริเวณในบทต่อไป

ทฤษฎีบทที่ 3.1 ให้ B เป็นตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุด ถ้ามีเซลล์ π ติดกับเซลล์ $\frac{2\pi}{3}$ แล้วเซลล์ที่ติดกับเซลล์ $\frac{2\pi}{3}$ ต้องไม่เป็นบริเวณเดียวกับเซลล์ π (ดังภาพที่ 3.1)



ภาพที่ 3.1 : แสดงเซลล์ π ติดกับเซลล์ $\frac{2\pi}{3}$

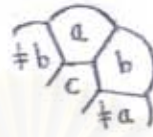
บทพิสูจน์ สมมุติเซลล์ที่ติดกับเซลล์ $\frac{2\pi}{3}$ เป็นบริเวณเดียวกับเซลล์ π โดยทฤษฎีบทที่ 2.11 เราสามารถแลกเปลี่ยนบริเวณระหว่างเซลล์ π กับเซลล์ $\frac{2\pi}{3}$ (ดังภาพที่ 3.1.1) ซึ่งทำให้ความยาวลดลง ดังนั้นเกิดข้อขัดแย้ง



ภาพที่ 3.1.1 : แสดงการแลกเปลี่ยนบริเวณระหว่างเซลล์ π กับเซลล์ $\frac{2\pi}{3}$

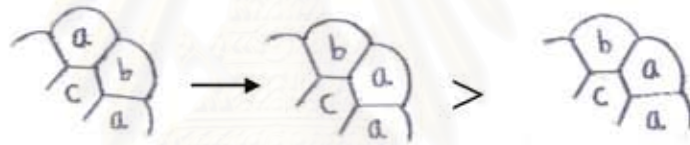
□

ทฤษฎีบทที่ 3.2 ให้ B เป็นตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุด ถ้ามีเซลด $\frac{2\pi}{3}$ ติดกับเซลด $\frac{2\pi}{3}$ แล้วเซลดที่ติดกับเซลด $\frac{2\pi}{3}$ ต้องไม่เป็นบริเวณเดียวกับเซลด $\frac{2\pi}{3}$ (ดังภาพที่ 3.2)



ภาพที่ 3.2 : แสดงเซลด $\frac{2\pi}{3}$ ติดกับเซลด $\frac{2\pi}{3}$

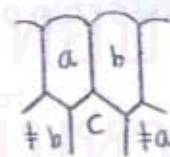
บทพิสูจน์ สมมติว่าเซลดที่ติดกับเซลด $\frac{2\pi}{3}$ เป็นบริเวณเดียวกับเซลด $\frac{2\pi}{3}$ โดยบทแทรกที่ 2.2 เราสามารถแลกเปลี่ยนบริเวณระหว่างเซลด $\frac{2\pi}{3}$ ได้ (ดังภาพที่ 3.2.1) ซึ่งทำให้ความยาวลดลง ดังนั้นเกิดข้อขัดแย้ง



ภาพที่ 3.2.1 : แสดงการแลกเปลี่ยนบริเวณระหว่างเซลด $\frac{2\pi}{3}$

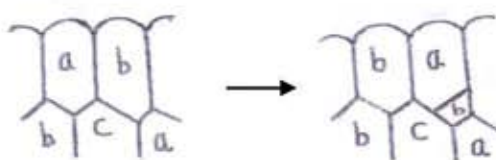
□

ทฤษฎีบทที่ 3.3 ให้ B เป็นตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุด ถ้ามีเซลด $\frac{\pi}{3}$ ติดกับเซลด $\frac{\pi}{3}$ แล้วเซลดที่ติดกับเซลด $\frac{\pi}{3}$ ต้องไม่เป็นบริเวณเดียวกับเซลด $\frac{\pi}{3}$ (ดังภาพที่ 3.3)



ภาพที่ 3.3 : แสดงเซลด $\frac{\pi}{3}$ ติดกับเซลด $\frac{\pi}{3}$

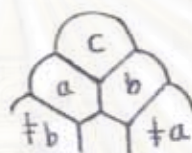
บทพิสูจน์ สมมติว่าเซลดที่ติดกับเซลด $\frac{\pi}{3}$ เป็นบริเวณเดียวกับเซลด $\frac{\pi}{3}$ โดยบทแทรกที่ 2.3 เราสามารถแลกเปลี่ยนบริเวณระหว่างเซลด $\frac{\pi}{3}$ ได้ (ดังภาพที่ 3.3.1) ซึ่งทำให้การปิดล้อมรูปแบบดังกล่าวมีความยาวเท่ากับรูปแบบที่ไม่ดี ดังนั้นเกิดข้อขัดแย้ง



ภาพที่ 3.3.1 : แสดงการแลกเปลี่ยนบริเวณระหว่างเซลล์ $\frac{\pi}{3}$

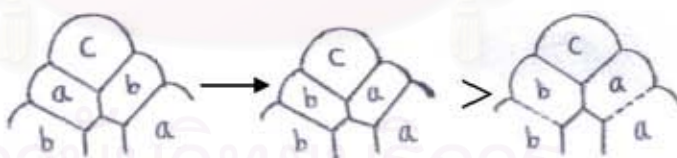
□

ทฤษฎีบทที่ 3.4 ให้ B เป็นตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุด ถ้ามีเซลล์ π ถูกขนานไปด้วยเซลล์ $\frac{\pi}{3}$ แล้วเซลล์ที่ติดกับเซลล์ $\frac{\pi}{3}$ ต้องไม่เป็นบริเวณเดียวกับเซลล์ $\frac{\pi}{3}$ (ดังภาพที่ 3.4)



ภาพที่ 3.4 : แสดงเซลล์ π ถูกขนานด้วยเซลล์ $\frac{\pi}{3}$

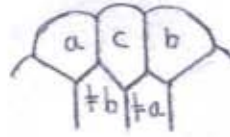
บทพิสูจน์ สมมติให้เซลล์ที่ติดกับเซลล์ $\frac{\pi}{3}$ เป็นบริเวณเดียวกับเซลล์ $\frac{\pi}{3}$ โดยบทแทรกที่ 2.2 เราสามารถแลกเปลี่ยนบริเวณระหว่างเซลล์ $\frac{\pi}{3}$ ได้ (ดังภาพที่ 3.4.1) ซึ่งทำให้ความยาวลดลง ดังนั้นเกิดข้อขัดแย้ง



ภาพที่ 3.4.1 : แสดงการแลกเปลี่ยนบริเวณระหว่างเซลล์ $\frac{\pi}{3}$

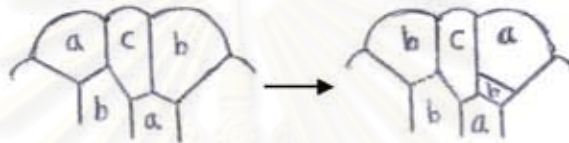
□

ทฤษฎีบทที่ 3.5 ให้ B เป็นตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุด ถ้ามีเซลล์ $\frac{\pi}{3}$ ถูกขนานด้วยเซลล์ $\frac{2\pi}{3}$ แล้วเซลล์ที่ติดกับเซลล์ $\frac{\pi}{3}$ และเซลล์ $\frac{2\pi}{3}$ ต้องไม่เป็นบริเวณเดียวกับเซลล์ $\frac{2\pi}{3}$ (ดังภาพที่ 3.5)



ภาพที่ 3.5 : แสดงเซลล์ $\frac{\pi}{3}$ ถูกขนานนามด้วยเซลล์ $\frac{2\pi}{3}$

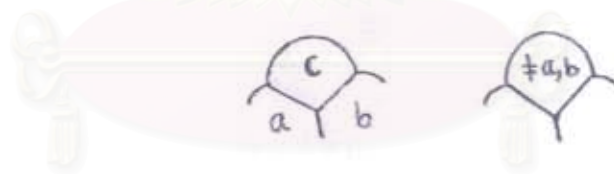
บทพิสูจน์ สมมติให้เซลล์ที่ติดกับเซลล์ $\frac{\pi}{3}$ และเซลล์ $\frac{2\pi}{3}$ เป็นบริเวณเดียวกับเซลล์ $\frac{2\pi}{3}$ โดยบทแทรกที่ 2.3 เราสามารถแลกเปลี่ยนบริเวณระหว่างเซลล์ $\frac{2\pi}{3}$ ได้ (ดังภาพที่ 3.5.1) ซึ่งทำให้การปิดล้อมรูปแบบดังกล่าวมีความยาวเท่ากับกับรูปแบบที่ไม่ดี ดังนั้นเกิดข้อขัดแย้ง



ภาพที่ 3.5.1 : แสดงการแลกเปลี่ยนบริเวณระหว่างเซลล์ $\frac{2\pi}{3}$

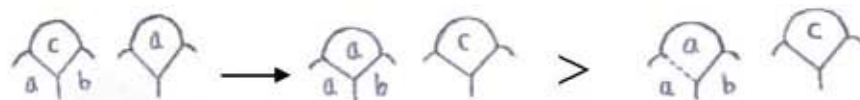
□

ทฤษฎีบทที่ 3.6 ให้ B เป็นตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุด ถ้ามีเซลล์ π มากกว่า 1 เซลล์ แล้วเซลล์ π จะต้องไม่เป็นบริเวณเดียวกับเซลล์ที่ติดกับเซลล์ π (ดังภาพที่ 3.6)



ภาพที่ 3.6 : แสดงเซลล์ π มากกว่า 1 เซลล์

บทพิสูจน์ สมมติให้เซลล์ π เป็นบริเวณเดียวกับเซลล์ที่ติดกับเซลล์ π โดยบทแทรกที่ 2.2 เราสามารถแลกเปลี่ยนบริเวณระหว่างเซลล์ π ได้ (ดังภาพที่ 3.6.1) ซึ่งทำให้ความยาวลดลง ดังนั้นเกิดข้อขัดแย้ง



ภาพที่ 3.6.1 : แลกเปลี่ยนบริเวณระหว่างเซลล์ π

□

พิจารณาเซลล์ 4 ด้าน ซึ่งมี 2 ด้าน ที่อยู่ตรงข้ามกันติดกับเซลล์ที่มีความดันต่ำกว่า และอีก 2 ด้านติดกับเซลล์ที่มีความดันเท่ากัน จะเห็นได้ว่าเซลล์ดังกล่าวนี้เป็นไปได้ 2 แบบ คือแบบขนาน และไม่ขนาน เพื่อความสะดวกเราจะเรียกเซลล์แบบขนานว่า เซลล์ 4 เหลี่ยมขนาน และเซลล์ 4 เหลี่ยมไม่ขนาน



เซลล์ 4 เหลี่ยมขนาน



เซลล์ 4 เหลี่ยมไม่ขนาน

ภาพที่ 3.7 : แสดงเซลล์ 4 เหลี่ยม

หมายเหตุ 1. สองด้านที่มีค่าความโค้งไม่เป็นศูนย์ของเซลล์ 4 เหลี่ยมขนาน จะต้องมีความโค้งเท่ากัน

2. ถ้าสองด้านที่มีค่าความโค้งไม่เป็นศูนย์ของเซลล์ 4 เหลี่ยมขนานกัน แล้วจะต้องมีค่าความโค้งเท่ากัน(เป็นส่วน โค้งของวงกลมเดียวกัน) [3,4]

ทฤษฎีบทที่ 3.7 เซลล์ 4 เหลี่ยม 2 เซลล์ใดๆที่ติดกันจะบรรจุพื้นที่เท่ากัน

บทพิสูจน์ โดยทฤษฎีบทที่ 2.14 และหมายเหตุข้างต้น

□

บทแทรกที่ 3.1 ให้ B เป็นตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดสำหรับ m อาณาบริเวณ เมื่อ $m > 3$ ถ้ามีเซลล์ 4 เหลี่ยมติดกัน 3 เซลล์ แล้วทั้ง 3 เซลล์จะต้องเป็นบริเวณที่แตกต่างกัน

บทพิสูจน์ โดยทฤษฎีบทที่ 3.7

□

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 4

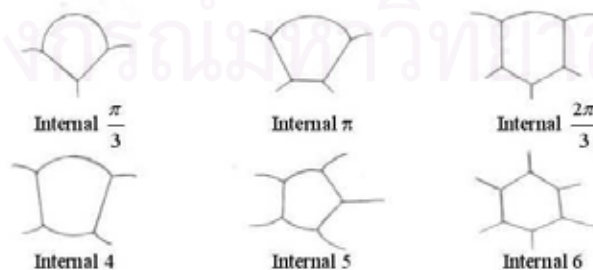
ตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดสำหรับ 4 อาณาบริเวณ

ในงานนี้เราสนใจพิจารณาตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดสำหรับ 4 อาณาบริเวณภายใต้เงื่อนไขการไม่มีช่องว่าง และความดันของแต่ละอาณาบริเวณไม่น้อยกว่าศูนย์ เมื่อกำหนดให้อาณาบริเวณที่ i มีพื้นที่ A_i และมีความดัน P_i เมื่อ $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ โดยที่ $P_1 = P_2 = P_3 > P_4$ และกำหนดให้ R_i แทนเซลล์ของอาณาบริเวณที่ i เมื่อ $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ โดย R_0 แทนอาณาบริเวณว่าง ตัวปิดล้อมที่เป็นผลเฉลยของปัญหานี้อาจมีหลายรูปแบบลักษณะพื้นฐาน คือ อาณาบริเวณที่สี่เป็นบริเวณเชื่อมโยง (connected region) หรืออาจจะเป็นอาณาบริเวณไม่เชื่อมโยง (disconnected region) เราจะแสดงให้เห็นว่าตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดสำหรับกรณีที่อาณาบริเวณที่สี่ (อาณาบริเวณที่มีความดันต่ำสุด) เป็นบริเวณเชื่อมโยงจะต้องมีอาณาบริเวณที่สี่เป็นเซลล์ไม่เกิน 9 ด้านและเป็นบริเวณข้างนอก ซึ่งสำหรับกรณีที่อาณาบริเวณที่สี่ เป็นบริเวณไม่เชื่อมโยงนั้นจะเป็นงานวิจัยที่เราจะศึกษาต่อในอนาคต และจะกล่าวถึงข้อคาดการณ์ในบทถัดไป

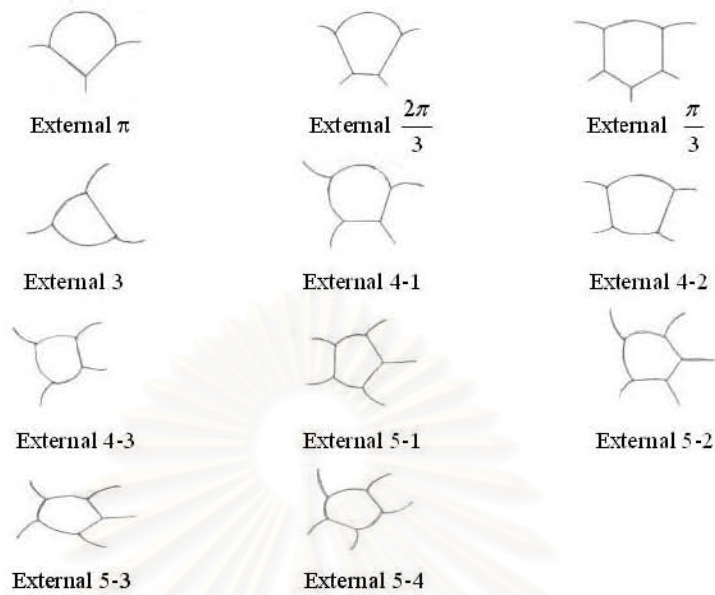
ก่อนที่จะกล่าวถึงผลการศึกษาที่ได้ เราจะพิจารณารูปแบบของ R_i โดยที่ $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

4.1 รูปแบบและเงื่อนไขของ R_i เมื่อ $i \in \{1, 2, 3\}$ บนตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุด

เนื่องจาก $P_1 = P_2 = P_3 > P_4$ โดยทฤษฎีบทที่ 2.6 และทฤษฎีบทที่ 2.8 เราได้ว่าเซลล์ R_i มีตั้งแต่ 3-6 ด้าน และถ้าเซลล์ R_i มี 3-5 ด้าน จะต้องมีอย่างน้อย 1 ด้านที่ค่าความโค้งไม่เป็นศูนย์ นั่นคือต้องนูนออก (คิด R_0 หรือ R_4) ถ้าเซลล์ R_i มี 6 ด้าน จะได้ว่าทุกด้านของเซลล์ R_i ต้องมีค่าความโค้งเป็นศูนย์ นั่นคือเป็นเส้นตรง (ไม่คิด R_0 หรือ R_4) ดังนั้นรูปแบบทั้งหมดที่เป็นไปได้ของเซลล์ R_i เมื่อเป็นเซลล์ข้างใน (internal cell) ย่อมเป็นดังภาพที่ 4.1 และเมื่อเป็นเซลล์ข้างนอก (external cell) ย่อมเป็นดังภาพที่ 4.2



ภาพที่ 4.1 : แสดงเซลล์ข้างใน



ภาพที่ 4.2 : แสดงเซลล์ข้างนอก

ข้อสังเกต เซลล์ที่อยู่ระหว่างเซลล์ข้างในเป็นเซลล์ข้างใน

ต่อไปเราจะกล่าวถึงเงื่อนไขที่จำเป็นเกี่ยวกับเซลล์ R_i เมื่อ $i \in \{1, 2, 3\}$ ของตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุด

ทฤษฎีบทที่ 4.1 ตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดจะต้องไม่มีเซลล์ R_i แบบเซลล์ข้างใน(ข้างนอก) π ติดกับเซลล์ข้างใน(ข้างนอก) $\frac{2\pi}{3}$ (ดังภาพที่ 4.3)



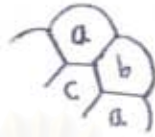
ภาพที่ 4.3 : แสดงเซลล์ข้างใน(ข้างนอก) π ติดกับเซลล์ข้างใน(ข้างนอก) $\frac{2\pi}{3}$

บทพิสูจน์ โดยทฤษฎีบทที่ 3.1

□

ทฤษฎีบทที่ 4.2 ตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดจะต้องไม่มีเซลล์ R , แบบเซลล์ข้างใน(ข้างนอก) $\frac{2\pi}{3}$ ติดกับ

เซลล์ข้างใน(ข้างนอก) $\frac{2\pi}{3}$ (ดังภาพที่ 4.4)



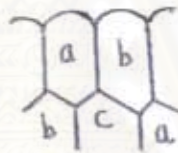
ภาพที่ 4.4 : แสดงเซลล์ข้างใน(ข้างนอก) $\frac{2\pi}{3}$ ติดกับเซลล์ข้างใน(ข้างนอก) $\frac{2\pi}{3}$

บทพิสูจน์ โดยทฤษฎีบทที่ 3.2

□

ทฤษฎีบทที่ 4.3 ตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดจะต้องไม่มีเซลล์ R , แบบเซลล์ข้างใน(ข้างนอก) $\frac{\pi}{3}$ ติดกับ

เซลล์ข้างใน(ข้างนอก) $\frac{\pi}{3}$ (ดังภาพที่ 4.5)



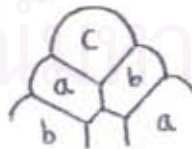
ภาพที่ 4.5: แสดงเซลล์ข้างใน(ข้างนอก) $\frac{\pi}{3}$ ติดกับเซลล์ข้างใน(ข้างนอก) $\frac{\pi}{3}$

บทพิสูจน์ โดยทฤษฎีบทที่ 3.3

□

ทฤษฎีบทที่ 4.4 ตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุด จะต้องไม่มีเซลล์ R , แบบเซลล์ข้างใน(ข้างนอก) π ถูกขนาบ

ด้วยเซลล์ข้างใน(ข้างนอก) $\frac{\pi}{3}$ (ดังภาพที่ 4.6)



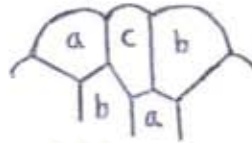
ภาพที่ 4.6: แสดงเซลล์ข้างใน(ข้างนอก) π ถูกขนาบด้วยเซลล์ข้างใน(ข้างนอก) $\frac{\pi}{3}$

บทพิสูจน์ โดยทฤษฎีบทที่ 3.4

□

ทฤษฎีบทที่ 4.5 ตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุด จะต้องไม่มีเซลล์ R_4 แบบเซลล์ข้างใน(ข้างนอก) $\frac{\pi}{3}$ ถูกขนาบ

ด้วยเซลล์ข้างใน(ข้างนอก) $\frac{2\pi}{3}$ (ดังภาพที่ 4.7)



ภาพที่ 4.7 : แสดงเซลล์ข้างใน(ข้างนอก) $\frac{\pi}{3}$ ถูกขนาบด้วยเซลล์ข้างใน(ข้างนอก) $\frac{2\pi}{3}$

บทพิสูจน์ โดยทฤษฎีบทที่ 3.5

□

ทฤษฎีบทที่ 4.6 ตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดจะมีเซลล์ R_4 แบบเซลล์ข้างใน(ข้างนอก) π ได้ไม่เกิน 1 เซลล์

บทพิสูจน์ โดยทฤษฎีบทที่ 3.6 และทฤษฎีบทที่ 2.10

□

ทฤษฎีบทที่ 4.7 ตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดจะต้องไม่มีเซลล์ 4 เหลี่ยมติดกันมากกว่า 2 เซลล์

บทพิสูจน์ โดยบทแทรกที่ 3.1

□

เราจะเรียกทฤษฎีบทที่ 4.1–4.7 ว่าทฤษฎีบทเงื่อนไข ต่อไปเราจะแสดงให้เห็นถึงข้อจำกัดเกี่ยวกับจำนวนด้านของ R_4

4.2 รูปแบบและเงื่อนไขของ R_4 บนตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุด

เนื่องจากอาณาบริเวณที่สี่มีความดันต่ำสุด ดังนั้นเมื่อเซลล์ R_4 เป็นเซลล์ข้างใน ด้านทุกด้านจะต้องเว้าเข้า (มีค่าความโค้งน้อยกว่าศูนย์) และโดยทฤษฎีบทที่ 2.6 เซลล์ R_4 จะต้องมียาวกว่า 6 ด้าน สำหรับกรณีที่เซลล์ R_4 เป็นเซลล์ข้างนอกนั้นจะมีด้านหนึ่งที่ติดกับอาณาบริเวณว่าง (R_0) ซึ่งด้านที่ติดกับ R_0 จะเป็นเส้นตรงเมื่อ $P_4 = 0$ และเป็นเส้นโค้ง (นูนเข้าไปใน R_0) เมื่อ $P_4 > 0$

เมื่อ $P_4 = 0$ โดยทฤษฎีบทที่ 2.6 R_4 -ข้างนอก จะต้องมียาวกว่า 6 ด้าน และเมื่อ $P_4 > 0$ โดยทฤษฎีบทที่ 2.6 และทฤษฎีบทที่ 2.8 R_4 -ข้างนอก จะต้องมียาวกว่า 2 ด้าน

ต่อไปเราจะแสดงให้เห็นว่าเซลล์ R_4 บนตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุด ต้องมียาวกว่าไม่เกิน 9 ด้าน

ทฤษฎีบทที่ 4.8 ตัวปิดล้อมใด ๆ ซึ่งมี R_4 มากกว่า 9 ด้าน ย่อมไม่ใช่ตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุด
บทพิสูจน์ ให้ B เป็นตัวปิดล้อม ซึ่ง R_4 มี n ด้าน โดยที่ $n \geq 10$

กรณีที่ 1 ถ้าทุกด้านของ R_4 ไม่ทำให้เกิดเซลล์ข้างใน π เราได้ว่าเซลล์คอนเวกซ์แท้ที่อิสระ

กันมีจำนวนเท่ากับ $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{10}{2} \right\rfloor = 5$ เซลล์ โดยทฤษฎีบทที่ 2.9 B ไม่ใช่ตัวปิดล้อม
ที่สั้นที่สุด

กรณีที่ 2 ถ้ามีบางด้านของ R_4 ทำให้เกิดเซลล์ข้างใน π โดยทฤษฎีบทที่ 4.6 จะเกิดเซลล์

ข้างใน π ได้ 1 เซลล์ นั่นคือมีเซลล์คอนเวกซ์แท้ที่อิสระกันเท่ากับ $\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{8}{2} \right\rfloor = 4$

เซลล์ และมีด้านที่มีมุมเดียว π ดังนั้น โดยบทแทรกที่ 2.1 B ไม่ใช่ตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุด



ภาพที่ 4.8 : แสดง R_4 ทำให้เกิดเซลล์ข้างใน π

□

ทฤษฎีบทที่ 4.9 ถ้าตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดมีเซลล์ข้างใน π แล้ว R_4 ต้องเป็นเซลล์ข้างนอก

และ $P_4 > 0$

บทพิสูจน์ ให้ B เป็นตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุด และมีเซลล์ข้างใน π

ให้จำนวนด้านของ R_4 คือ n และ t_i เป็นมุมเดียวของด้านที่ i ดังนั้นมี j ซึ่ง $t_j = -\pi$

เมื่อ $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ โดยทฤษฎีบทที่ 2.6 เราได้ว่า

$$\sum_{i \neq j} t_i - \pi = \frac{(6-n)}{3} \pi$$

$$\sum_{i \neq j} t_i = \frac{(9-n)}{3} \pi$$

สมมุติว่า $P_4 = 0$ หรือ R_4 เป็นเซลล์ข้างใน เราได้ว่า $\sum_{i \neq j} t_i < 0$

นั่นคือ $9-n < 0$ หรือ $n > 9$ ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบทที่ 4.8

ดังนั้น $P_4 > 0$ และ R_4 ต้องเป็นเซลล์ข้างนอก

□

โดยทฤษฎีบทที่ 4.8 และทฤษฎีบทที่ 4.9 เมื่อตัวปิดล้อมมีเซลล์ R_4 เป็นเซลล์ข้างใน
เพียงพอที่เราจะพิจารณาตัวปิดล้อมที่มีเซลล์ R_4 ตั้งแต่ 7 ถึง 9 ด้าน และไม่มีเซลล์ข้างใน π ดังนั้น
ก่อนจะศึกษาตัวปิดล้อมเราจะพิจารณารูปแบบทั้งหมดของเซลล์ R_4 ที่เป็นไปได้

ให้ R_n เป็นเซลล์ข้างในซึ่งมี n ด้าน และ t_i เป็นมุมเฉี้ยวของด้านที่ i ดังนั้น $t_i < 0$ ทุก i

โดยทฤษฎีบทที่ 2.6 เราได้ $\sum_{i=1}^n t_i = \frac{6-n}{3}\pi$

เมื่อ $n=7$ เราได้ $\sum_{i=1}^7 t_i = \frac{-\pi}{3}$ นั่นคือเซลล์ R_7 ข้างในที่มี 7 ด้าน ไม่ทำให้เกิดเซลล์

ข้างใน

เมื่อ $n=8$ เราได้ $\sum_{i=1}^8 t_i = \frac{-2\pi}{3}$ นั่นคือเซลล์ R_8 ข้างในที่มี 8 ด้าน สามารถทำให้เกิด

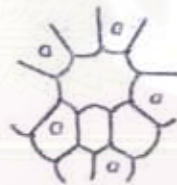
เซลล์ $\frac{\pi}{3}$ เป็นเซลล์ข้างในได้ 1 เซลล์

เมื่อ $n=9$ เราได้ $\sum_{i=1}^9 t_i = -\pi$ นั่นคือเซลล์ R_9 ข้างในที่มี 9 ด้าน สามารถทำให้เกิด

เซลล์ $\frac{\pi}{3}$ เป็นเซลล์ข้างในได้อย่างมาก 2 เซลล์ (แต่ต้องไม่ติดกัน) หรือสามารถทำให้เกิดเซลล์

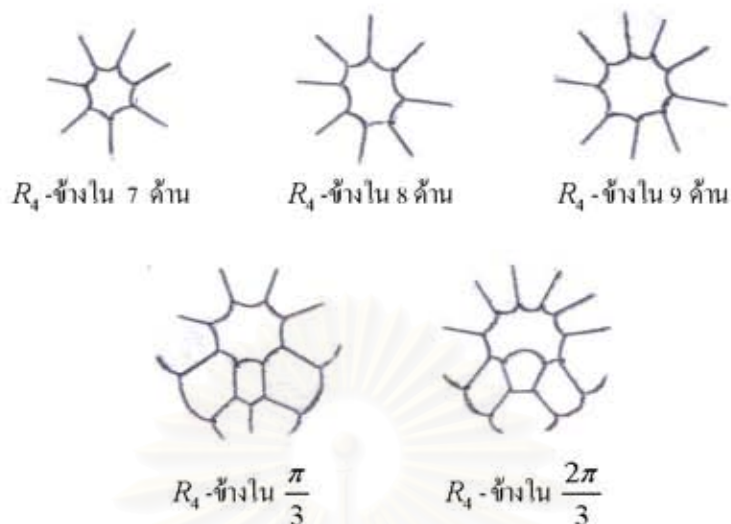
$\frac{2\pi}{3}$ เป็นเซลล์ข้างในได้ 1 เซลล์ แบบใดแบบหนึ่ง

เมื่อพิจารณาตัวปิดล้อมที่มีเซลล์ R_9 ข้างในซึ่งมี 9 ด้านแบบที่ทำให้เกิดเซลล์ $\frac{\pi}{3}$ เป็นเซลล์ข้างใน เราจะเห็นว่า มีเซลล์ก่อนเวกซ์แท้ที่เป็นอิสระต่อกันเกิน 4 เซลล์ ดังนั้นตัวปิดล้อมที่มีลักษณะดังกล่าวไม่ใช่ตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุด



ภาพที่ 4.9 : แสดงเซลล์ R_9 ข้างใน 9 ด้านแบบที่ทำให้เกิดเซลล์ $\frac{\pi}{3}$ เป็นเซลล์ข้างใน

เราจะเรียกเซลล์ R_n ซึ่งเป็นเซลล์ข้างในที่มี 7, 8, 9 ด้าน แบบที่ไม่ทำให้เกิดเซลล์ข้างในว่า R_7 -ข้างใน 7 ด้าน, R_8 -ข้างใน 8 ด้าน, R_9 -ข้างใน 9 ด้าน ตามลำดับ และเรียกเซลล์ R_8 ที่เป็นเซลล์ข้างใน 8 ด้าน แบบที่ทำให้เกิดเซลล์ $\frac{\pi}{3}$ ข้างใน เซลล์ R_9 ที่เป็นเซลล์ข้างใน 9 ด้าน แบบที่ทำให้เกิดเซลล์ $\frac{2\pi}{3}$ ข้างในว่า R_8 -ข้างใน $\frac{\pi}{3}$ และ R_9 -ข้างใน $\frac{2\pi}{3}$ ตามลำดับ

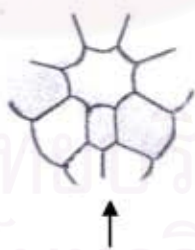


ภาพที่ 4.10 : แสดงเซลล์ R_4 -ข้างในที่เป็นไปได้ทั้งหมด

ทฤษฎีบทที่ 4.10 ให้ B เป็นตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุด ถ้า R_4 เป็นบริเวณเชื่อมโยง แล้ว R_4 ต้องเป็นบริเวณข้างนอก

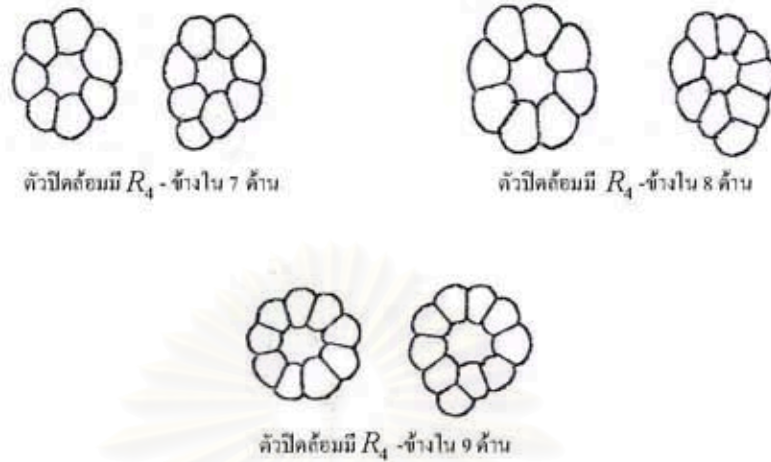
บทพิสูจน์ ให้ B เป็นตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดซึ่งมี R_4 เป็นบริเวณเชื่อมโยง สมมุติว่า R_4 เป็นบริเวณข้างใน

กรณีที่ 1 R_4 -ข้างใน $\frac{\pi}{3}$ จะเห็นว่าบนตัวปิดล้อมเกิดเซลล์ข้างนอก $\frac{2\pi}{3}$ ติดกับเซลล์ข้างนอก $\frac{2\pi}{3}$ หรือเกิดเซลล์ข้างนอก π ถูกขนาบด้วยเซลล์ข้างนอก $\frac{\pi}{3}$ แบบใดแบบหนึ่ง ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง



ภาพที่ 4.11 : แสดงส่วนของตัวปิดล้อมที่มี R_4 -ข้างใน $\frac{\pi}{3}$ (R_4 เป็นบริเวณเชื่อมโยง)

กรณีที่ 2 R_4 -ข้างใน 7 ด้าน, R_4 -ข้างใน 8 ด้าน และ R_4 -ข้างใน 9 ด้าน จะเกิดสองลักษณะคือ แบบไม่โยงกับเซลล์ข้างนอก π และแบบโยงเซลล์ข้างนอก π (ดังภาพที่ 4.12) ซึ่งถ้าโยงกับเซลล์ข้างนอก π โดยทฤษฎีบทที่ 4.6 จะโยงได้เซลล์เดี่ยวซึ่งไม่ว่าจะเป็นแบบใดเราจะเห็นว่าเกิดเซลล์ 4 เหลี่ยมติดกันมากกว่า 2 เซลล์ ดังนั้นเกิดข้อขัดแย้ง



ภาพที่ 4.12 : แสดงตัวปิดล้อมที่มี R_4 -ข้างใน 7 ด้าน, R_4 -ข้างใน 8 ด้านและ R_4 ข้างใน 9 ด้าน (R_4 เป็นบริเวณเชื่อมต่อ)

กรณีที่ 3 R_4 -ข้างใน $\frac{2\pi}{3}$ จะเกิด 2 ลักษณะคือ แบบไม่โยงกับเซลล์ข้างนอก π และแบบ โยงเซลล์ข้างนอก π (ดังภาพที่ 4.13) ซึ่งถ้าโยงกับเซลล์ข้างนอก π โดยทฤษฎีบทที่ 4.6 จะโยง ได้เซลล์เดียว ถ้าเป็นแบบไม่โยงกับเซลล์ข้างนอก π เราจะเห็นว่าเกิดเซลล์ 4 เหลี่ยมติดกัน มากกว่า 2 เซลล์ ดังนั้นเกิดข้อขัดแย้ง ถ้าเป็นแบบโยงกับเซลล์ข้างนอก π เราจะเห็นว่าเกิดเซลล์ คอนเวกซ์แท้ที่เป็นอิสระต่อกันมากกว่า 4 เซลล์ หรือไม่มีเซลล์คอนเวกซ์แท้ที่เป็นอิสระต่อกัน 4 เซลล์ กับด้านที่ยาว π ดังนั้นเกิดข้อขัดแย้ง

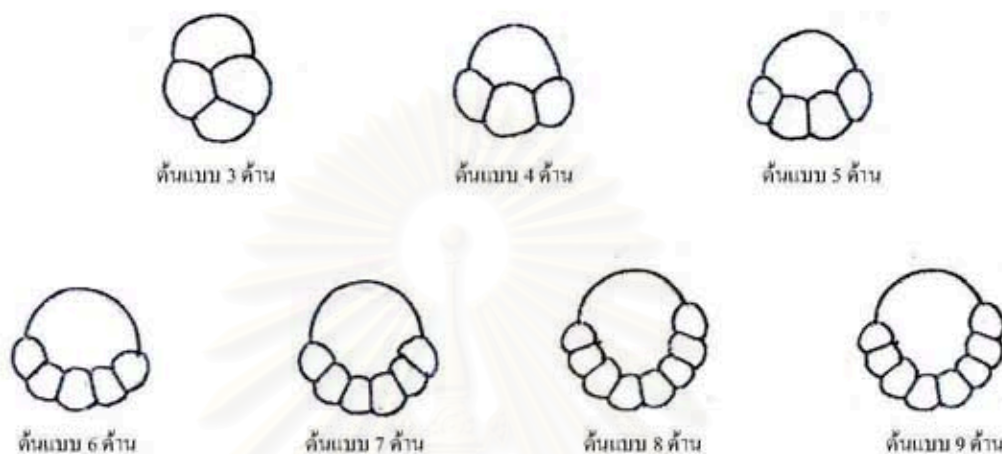


ภาพที่ 4.13 : แสดงตัวปิดล้อมที่มี R_4 -ข้างใน $\frac{2\pi}{3}$ (R_4 เป็นบริเวณเชื่อมต่อ)

เราเห็นได้ว่าทุกกรณีที่ R_4 เป็นบริเวณข้างในจะเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้นตัวปิดล้อมที่ดีที่สุด R_4 ต้อง เป็นบริเวณข้างนอก

□

โดยทฤษฎีบทที่ 4.10 และทฤษฎีบทที่ 4.8 ถ้าตัวปิดล้อมมีอาณาบริเวณที่สี่เป็นอาณาบริเวณเชื่อมโยง เราจะพิจารณาเฉพาะตัวปิดล้อมที่มี R_4 เป็นเซลล์ข้างนอก และมีไม่เกิน 9 ด้าน ซึ่งตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดจะถือกำเนิดจากตัวปิดล้อมต้นแบบเพียง 7 รูปแบบดังภาพที่ 4.14



ภาพที่ 4.14: แสดงตัวปิดล้อมต้นแบบทั้งหมด

หมายเหตุ โดยทฤษฎีบทที่ 4.7 ตัวปิดล้อมต้นแบบ 6 ด้าน, 7 ด้าน, 8 ด้าน และ 9 ด้านไม่ใช่ตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุด เราคาดว่าตัวปิดล้อมต้นแบบ 3 ด้าน และตัวปิดล้อมต้นแบบ 4 ด้าน จะเป็นตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดเนื่องจากทุกอาณาบริเวณเป็นบริเวณเชื่อมโยง

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 5

งานวิจัยต่อเนื่อง

ในบทนี้เราเสนอข้อคาดการณ์ที่สำคัญพร้อมทั้งข้อสนับสนุนต่างๆเพื่อนำไปพิจารณาตัวปิดล้อมกรณีที่อาณาบริเวณที่สี่ไม่เป็นบริเวณเชื่อมโยงคือ

ข้อคาดการณ์ 1. ตัวปิดล้อมจะมีเซลล์ R_4 ที่เป็นเซลล์ข้างในได้อย่างมาก 1 เซลล์
ข้อสนับสนุน โดยรูปแบบของเซลล์ R_4 ที่เป็นเซลล์ข้างใน เราพบว่า ถ้าตัวปิดล้อมมีเซลล์ R_4 ที่เป็นเซลล์ข้างในมากกว่า 1 เซลล์ แล้วน่าจะเกิดเซลล์คอนเวกซ์แท้ที่เป็นอิสระกันมากกว่า 4 เซลล์

ข้อคาดการณ์ 2. ตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดน่าจะมีลักษณะดังตัวปิดล้อมต้นแบบ 4 ด้าน
ข้อสนับสนุน เนื่องจากทุกอาณาบริเวณเป็นบริเวณเชื่อมโยง

สำหรับงานการแจงกรณีของรูปแบบตัวปิดล้อมที่มีโอกาสเป็นตัวปิดล้อมที่สั้นที่สุดนั้นผู้วิจัยคิดว่าน่าจะใช้การแจงกรณีแบบการทำให้เกิดเซลล์ข้างในของอาณาบริเวณที่สี่ประกอบด้วยทฤษฎีบทข้อห้าม 4.1-4.7 โดยใช้ตัวปิดล้อมต้นแบบทั้งเจ็ด ช่วยในการค้นหาตัวปิดล้อมที่ยังคงเหลืออยู่ซึ่งไม่น่าจะมากกว่า 99 แบบและจะเป็นงานวิจัยที่ผู้เขียนคาดว่าจะศึกษาต่อไปในอนาคต

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

รายการอ้างอิง

1. Morgan, F. Soap bubble in \mathbb{R}^2 and on surfaces. Pacific J. Math. 165(1994):347-361
2. Foisy, J., Alfaro, M., Brock, J., Hodges, N., Zimba, J. The standard soap bubble in \mathbb{R}^2 uniquely minimizes perimeter. Pacific. J. Math. 159 (1993): 47-59
3. Wichiramala, W. The planar triple bubble problem. Ph.D. thesis, University of Illinois, Urbana-Champaign, May 2002.
4. Wichiramala, W. Proof of the planar triple bubble conjecture. J.Reine Angew. Math. 569 (2004) :1-49
5. Bleicher, M.N. Isoperimetric division into a finite number of cells in the plane. Studia Sci. Math. Hungar. 22 (1987):123-137.
6. Bleicher, M.N. Isoperimetric divisions into several cells with natural boundary. Intuitive geometry (Siofok, 1985), Collog. Math. Soc.Janos Bolyai, 48. North-Holland, Amsterdam-New York (1987): 63-84.
7. Bleicher, M.N. Isoperimetric networks in the Euclidean plane. Studia Sci. Math. Hungar. 31 (1996):455-478
8. Cox, C., Harrison, L., Hutchings, M., Kim, S., Light, J., Mauer, A., Tilton, M. The shortest enclosure of three connected areas in \mathbb{R}^2 . Real Anal. Exchange 20 (1994/95):313-335
9. Vaughn, R. Planar soap bubbles. Ph.D. thesis. University of California, Davis. 1998

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายอรรถพร แก้วขาว เกิดเมื่อวันที่ 14 ธันวาคม พ.ศ.2521 ที่จังหวัดชลบุรี ประเทศไทย สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรีศึกษาศาสตร์บัณฑิต สาขาวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ จากมหาวิทยาลัยบูรพา และเข้าศึกษาในระดับปริญญาโทสาขาคณิตศาสตร์ ณ ภาควิชาคณิตศาสตร์คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และได้รับทุนพัฒนาอาจารย์สาขาคณิตศาสตร์จากมหาวิทยาลัยบูรพา



สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย