บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงทดลอง ซึ่งจำลองข้อมูลขึ้นด้วยการทำงานของเครื่องคอมพิวเตอร์โดยใช้เทคนิคมอนติคาร์โลซิมูเลชั่น(Monte Carlo Simulition Technique) เพื่อเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของตัวสถิติทดสอบค่าเฉลี่ยของประชากรกลุ่มเดียวที่มีการแจกแจงแบบเบ้ขวา ณ ระดับความเบ้ต่างกัน โดยในขั้นตอนแรกจะทำการเปรียบเทียบค่าระดับนัยสำคัญของเกณฑ์การทดสอบที่แท้จริง α กับระดับนัยสำคัญที่ประมาณได้ $\hat{\alpha}$ โดยใช้เกณฑ์การทดสอบทวินาม (binomial test) ว่าค่าประมาณ $\hat{\alpha}$ มีค่าอยู่ในช่วง α ที่กำหนดหรือไม่ ถ้าอยู่ในช่วง α ที่กำหนดจึงคำนวณหาอำนาจการทดสอบเพื่อเปรียบเทียบว่าตัวสถิติทดสอบวิธีใดให้อำนาจการทดสอบ(power of the test) สูงกว่ากัน ซึ่งในบทนี้จะได้กล่าวถึงรายละเอียดของขั้นตอนในการทดลองและโปรแกรมที่ใช้ในการทดลองดังต่อไปนี้

3.1 ขั้นตอนในการทดลอง

3.1.1 กำหนดระดับนัยสำคัญและขนาดตัวอย่าง

3.1.2 สร้างข้อมูลที่มีการแจกแจงแกมมา การแจกแจงไวบูลย์และการแจกแจงลอกนอร์มอล ณ พารามิเตอร์ที่กำหนดจากเกณฑ์สัมประสิทธิ์ความเบ้ ในระดับต่างๆ

3.1.3 คำนวณหาค่าตัวสถิติแต่ละตัว

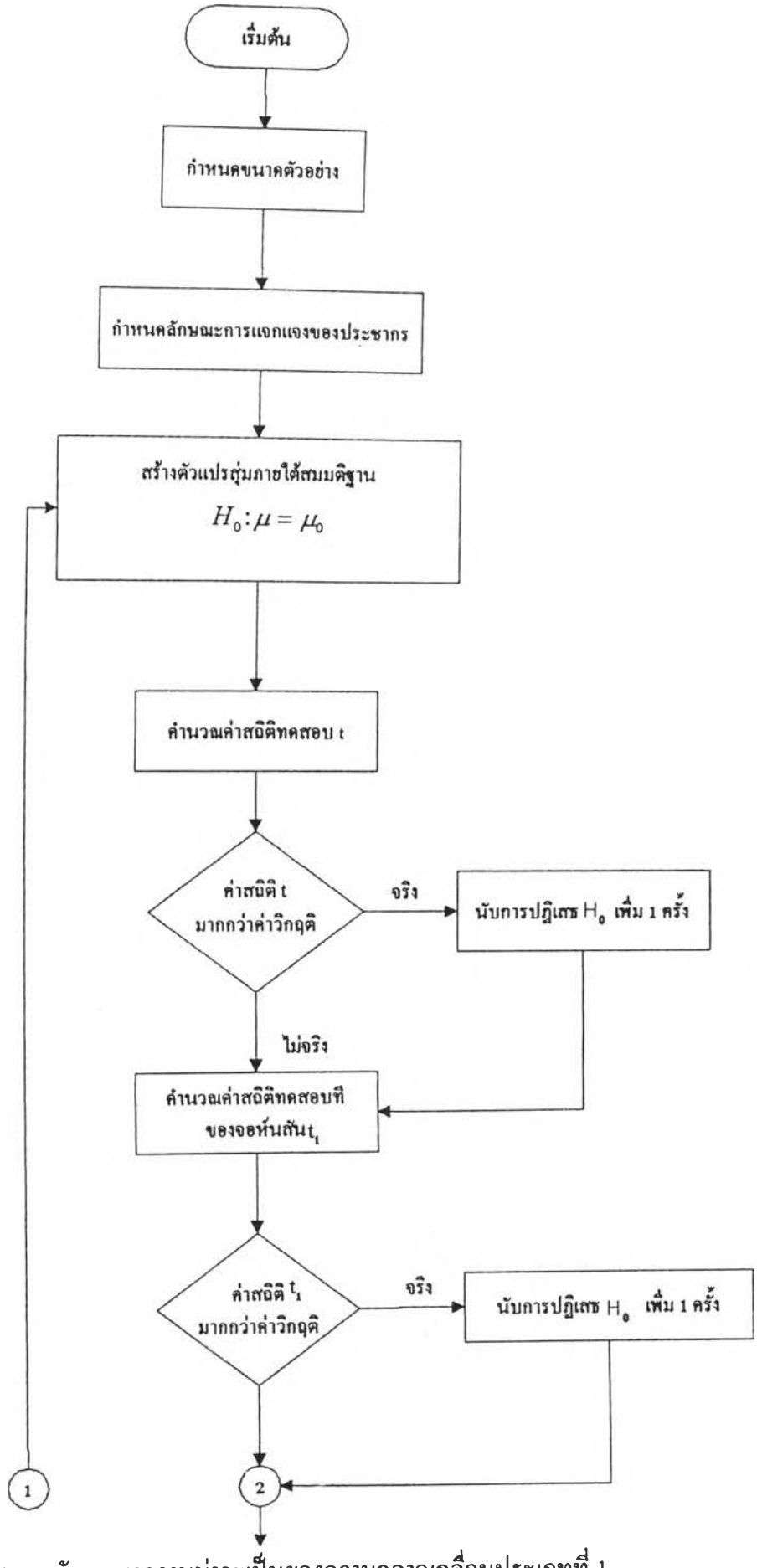
3.1.4 เปรียบเทียบค่าของตัวสถิติแต่ละตัวกับบริเวณวิกฤติ

3.1.5 คำนวณค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 โดยอาศัยเกณฑ์การทดสอบทวินาม (binomial test) กล่าวคือ ค่าประมาณของระดับนัยสำคัญที่ได้จากการทดลอง $(\hat{\alpha})$ ควรมีค่าไม่มากกว่าระดับนัยสำคัญที่กำหนด (α) อย่างมีนัยสำคัญ

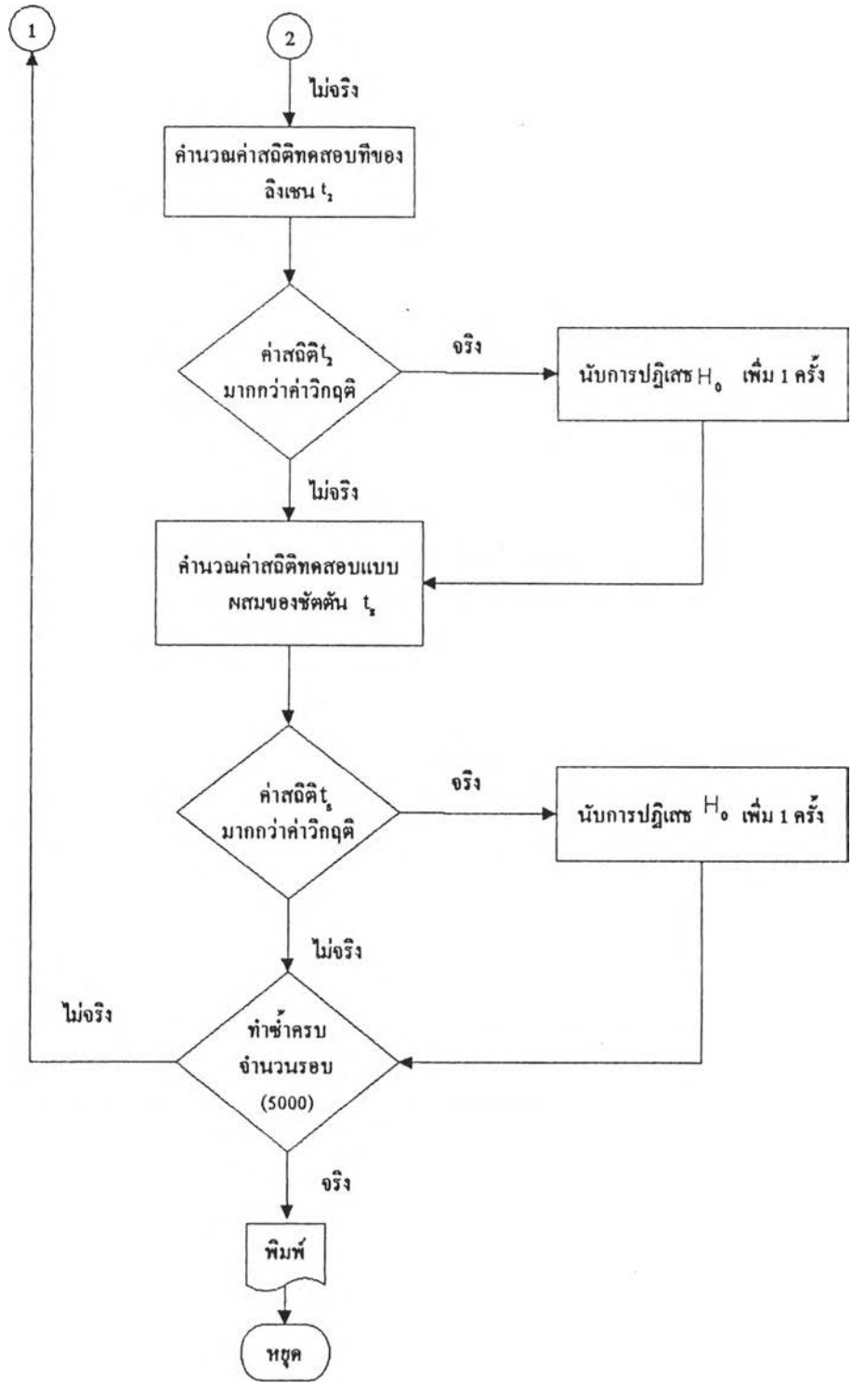
3.1.6 เปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของตัวสถิติ สำหรับกรณีที่สามารถควบคุมค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้

3.1.7 ทำตามขั้นตอน 3.1.1 -3.1.6 จนครบทุกกรณี

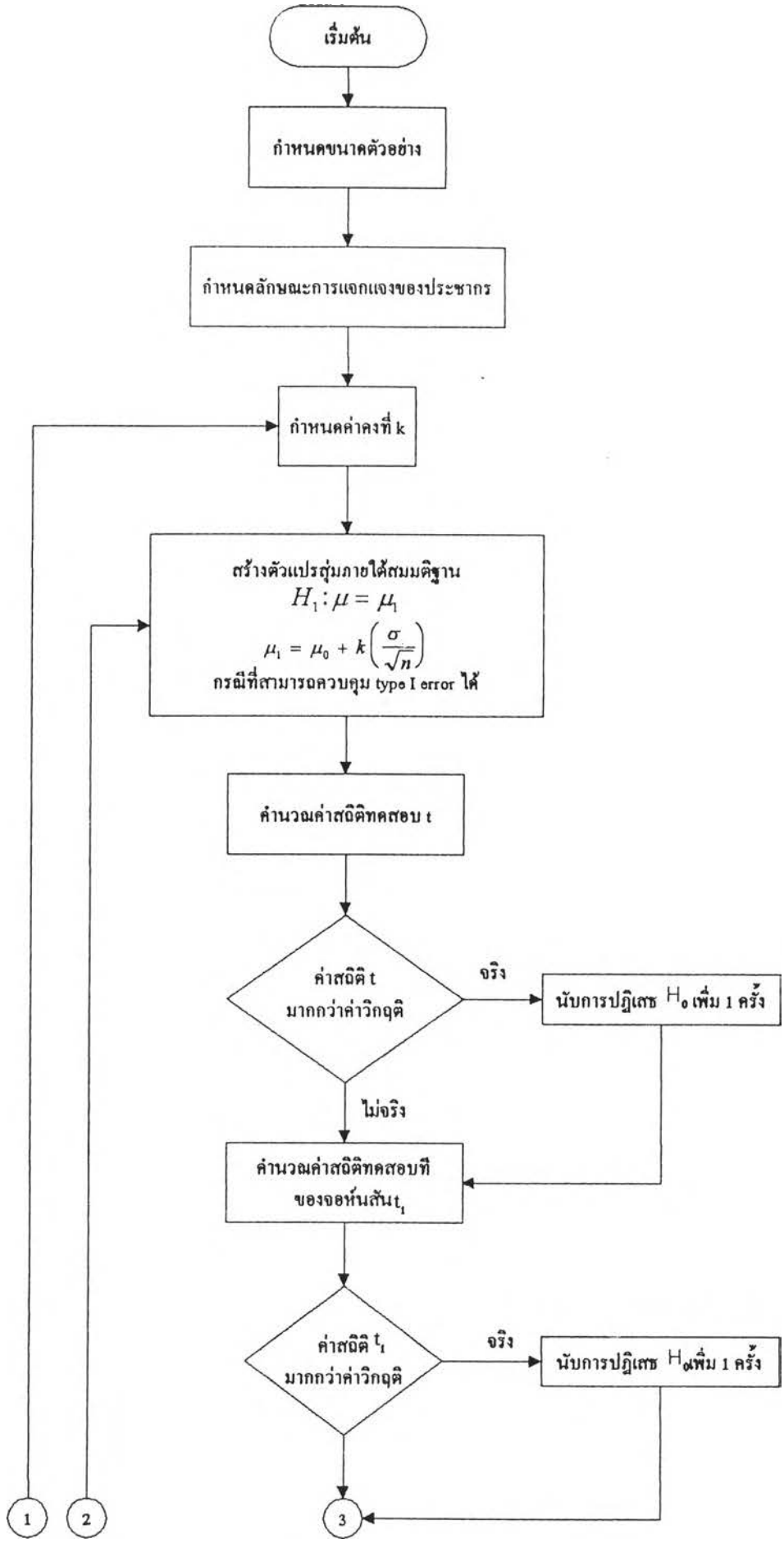
แสดงขั้นตอนการดำเนินงานข้างต้นได้ดังรูปที่ 3.1 -3.2



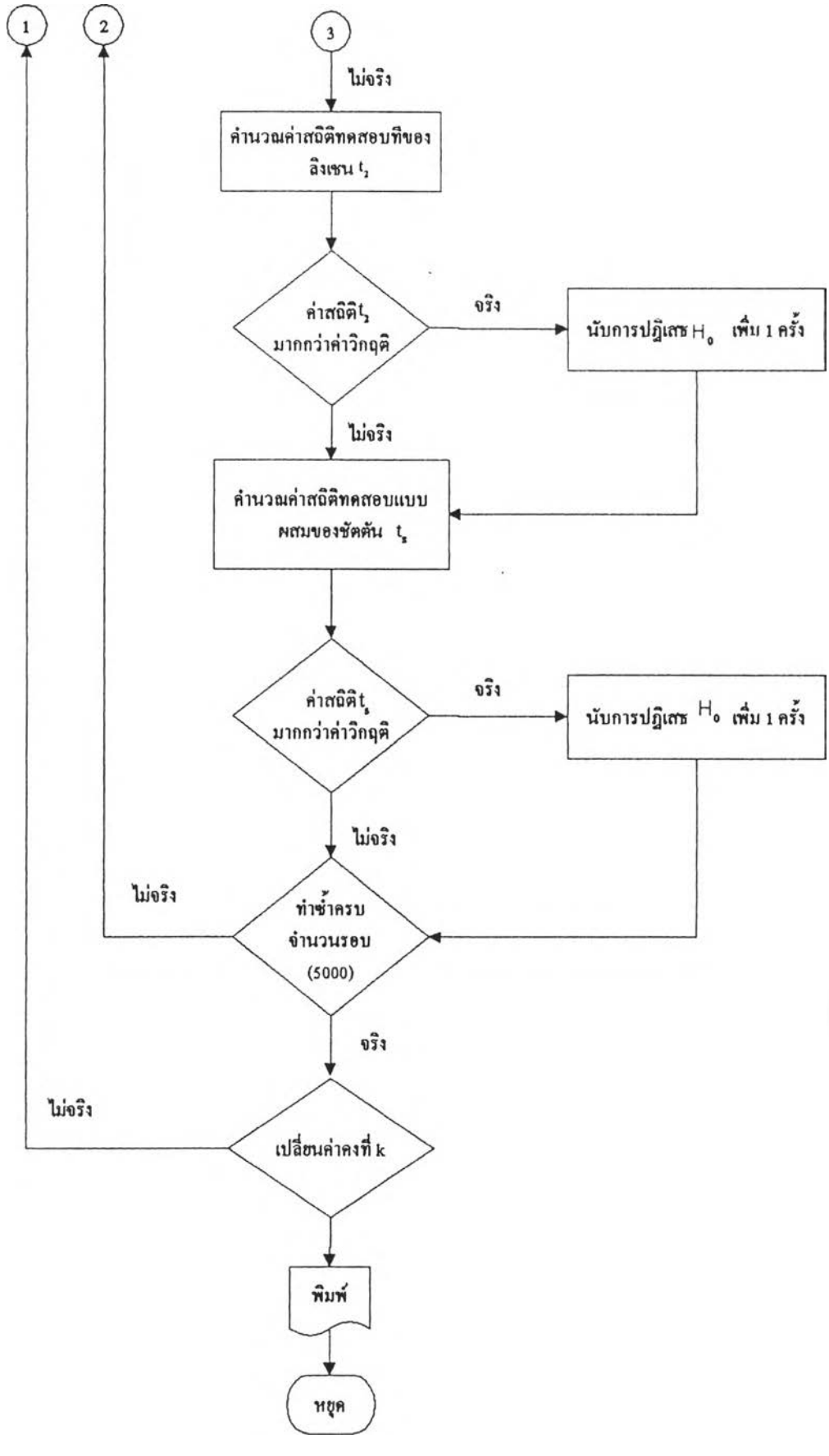
รูปที่3.1แผนผังการหาความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1
ของตัวสถิติทดสอบค่าเฉลี่ย 4 วิธี



รูปที่ 3.1 แผนผังการหาความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1
ของตัวสถิติทดสอบค่าเฉลี่ย 4 วิธี (ต่อ)



รูปที่ 3.2 แผนผังการหาอำนาจการทดสอบของตัวสถิติทดสอบค่าเฉลี่ย 4 วิธี



รูปที่ 3.2 แผนผังการหาอำนาจการทดสอบของตัวสถิติทดสอบค่าเฉลี่ย 4 วิธี (ต่อ)

3.2 การผลิตตัวแปรสุ่มให้มีการแจกแจงตามที่กำหนด

ในการสร้างตัวแปรสุ่มให้มีการแจกแจงตามคุณสมบัติที่ต้องการ สามารถทำได้จากการจำลองข้อมูลด้วยการใช้เทคนิคมอนติคาร์โล โดยการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ภาษาฟอร์แทรน 77 (FORTRAN)

3.2.1 <u>การผลิตเลขสุ่มที่มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอในช่วง (0,1)</u>

การผลิตเลขสุ่มเป็นพื้นฐานในการผลิตเลขสุ่มที่มีการแจกแจงแบบอื่นๆ ซึ่งเลขสุ่มที่ผลิตขึ้นต้องมีลักษณะความเป็นอิสระซึ่งกันและกัน และมีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอในช่วง (0,1) มีผู้เสนอเทคนิคการผลิตเลขสุ่มไว้หลายวิธี แต่วิธีที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายวิธีหนึ่งคือ วิธีของ Lehmer ซึ่งเสนอวิธีผลิตเลขสุ่มด้วยการใช้เศษจากการหารผลคูณ (Multiplicative Congruential Method) โดยสามารถหาเลขสุ่มได้จากสมการ

$$X_i = \left(aX_{i-1}\right) \bmod M \qquad ;i = 1,2,3... \qquad \text{------ (3.1)}$$

เมื่อ X_i เป็นเลขสุ่มตัวที่ i

X_0 เป็นตัวเลขค่าเริ่มต้น

M เป็นค่าคงที่

a เป็นตัวคูณคงที่ (Constant Multiplier)

จากสมการ (3.1) หมายความว่า X_i คือเศษเหลือ(จำนวนเต็ม)ที่ได้จากการหาร $\left(aX_{i-1}\right)$ ด้วย M

เมื่อเริ่มค่า X_0 เป็นค่าเริ่มต้น (initial value หรือ seed) จะได้ตัวเลขสุ่ม $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ตามลำดับ เป็นเลขจำนวนเต็มที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง $M-1$ ค่าตัวเลขสุ่มที่ได้เป็นค่าที่ไม่ต่อเนื่อง ซึ่งการกำหนดค่า M, a และ X_0 จะมีความสำคัญในการผลิตเลขสุ่ม โดยการที่จะผลิตเลขสุ่มที่มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอในช่วง(0,1) ต้องกำหนดค่า M ให้มีค่าของจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดและเป็นเลขคี่ ที่สามารถคำนวณได้จากเครื่องคอมพิวเตอร์ โดยที่ $M = 2^b$ เมื่อ b เป็นค่าความยาว 1 คำ หรือ จำนวนบิต (bit) ใน 1 คำ เช่นเครื่องคอมพิวเตอร์ 32 บิต จะกำหนดค่า M = 2147483647 การผลิตตัวเลขสุ่มของวิธีนี้ได้ผ่านการทดสอบแล้วอย่างมากและกำหนดค่า a เท่ากับ 7^5 = 16807 ซึ่งเป็นค่าคงที่ และค่า X_0 มีค่าเป็นเลขจำนวนเต็มบวกที่เป็นเลขคี่

ดังนั้น การผลิตเลขสุ่มที่มีแจกแจงแบบสม่ำเสมอในช่วง(0,1) สามารถเขียนเป็นโปรแกรมย่อยสับรูทีน RAND ได้ดังนี้

```
SUBROUTINE RAND(IX,YFL)
REAL YFL
IY = IX*16807
IF (IY.LT.0) IY = IY+2147483647+1
YFL = IY
YFL = YFL*0.465661E-9
IX = IY
RETURN
END
```

รูปที่3.3 แสดงโปรแกรมย่อยสับรูทีนที่ใช้ผลิตค่าเลขสุ่มU(0,1)

3.2.2 <u>การผลิตตัวแปรสุ่มให้มีการแจกแจงแกมมา</u>

การสร้างตัวแปรสุ่ม ให้มีการแจกแจงแกมมา ที่มีพารามิเตอร์ (α, β) สามารถแบ่งได้ 3 กรณี คือ

3.2.2.1 กรณีที่ $0 < \alpha < 1$

ใน ค.ศ. 1974 Ahrens และ Dieter ได้เสนอวิธีการสร้างตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแกมมา เมื่อพารามิเตอร์ α มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 โดยอาศัยเทคนิค acceptance- rejection ซึ่งมีหลักการดังต่อไปนี้

1. คำนวณหาค่า b จากสมการ $b=(e+\alpha)/e$
2. สร้างตัวแปรสุ่ม U_1 จากโปรแกรมย่อยสับรูทีน RAND และให้ $P = bU_1$
   ถ้า $P > 1$ ข้ามไปทำขั้นตอนที่ 4
3. ให้ $Y = P^{1/\alpha}$ และสร้างตัวแปรสุ่ม U_2 จากโปรแกรมย่อยสับรูทีน RAND
   ถ้า $U_2 \le e^{-Y}$ ให้ $X = Y$ สำหรับกรณีอื่น ๆ ให้กลับไปทำในขั้นตอนที่ 2
4. ให้ $Y = -\ln[(b-P)/\alpha]$
   ถ้า $U_2 \le Y^{\alpha-1}$ ให้ $X = Y$ สำหรับกรณีอื่น ๆ ให้กลับไปทำในขั้นตอนที่ 2

สามารถเขียนเป็นโปรแกรมย่อยสับรูทีน GAM_1 ดังรูปที่ 3.4

```
      SUBROUTINE GAM_1(ALPHA,XX)
      DOUBLE PRECISION  XX,ALPHA,B,P,Y,CHK1,CHK2
      COMMON /SEED/IX
      B = (EXP(1)+ALPHA)/EXP(1)
10    CALL RAND(IX,YFL)
      RONE = YFL
      P =  B*RONE
      CALL RAND(IX,YFL)
      RTWO = YFL
      IF (P.GT.1.00) GOTO 40
      Y = P**(1.00/ALPHA)
      CHK1 = EXP(-Y)
      IF (RTWO.LE.CHK1) THEN
            XX = Y
      ELSE   GOTO 10
      END IF
      RETURN
40    Y = -ALOG((B-P)/ALPHA)
      CHK2 = Y**(ALPHA-1.00)
      IF (RTWO.LE.CHK2) THEN
            XX=Y
      ELSE  GOTO 10
      END IF
      RETURN
      END
```

รูปที่ 3.4 แสดงโปรแกรมย่อยสับรูทีนที่ใช้ผลิตตัวแปรสุ่มแกมมา
ที่มีพารามิเตอร์ α อยู่ระหว่าง 0 ถึง 1

3.2.2.2 กรณีที่ $\alpha > 1$

ใน ค.ศ. 1977 Cheng ได้เสนอวิธีการสร้างตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแกมมาเมื่อพารามิเตอร์ α มีค่ามากกว่า 1 โดยอาศัยเทคนิค acceptance-rejection ซึ่งมีหลักการดังต่อไปนี้

1. คำนวณหาค่า a, b, q และ d จากสูตรต่อไปนี้

$$a = 1/\sqrt{2\alpha - 1} \quad : \quad b = \alpha - \ln 4 \quad : \quad q = \alpha + 1/a$$

และ $d = 1 + \ln\theta$ เมื่อ $\theta = 4.5$

2. สร้างตัวแปรสุ่ม U_1 และ U_2 จากโปรแกรมย่อยสับรูทีน RAND

3. กำหนดให้

$$V = a\ln\left[U_1/(1-U_1)\right]$$

$$Y = \alpha e^{V}$$

$$Z = U_1^2 U_2$$

และ $W = b + qV - Y$

ถ้า $W + d - \theta Z \geq 0$ ให้ $X = Y$ สำหรับกรณีอื่น ๆ ให้ไปทำตามขั้นตอนที่ 5

4. ถ้า $W \geq \ln Z$ ให้ $X = Y$ สำหรับกรณีอื่น ๆ ให้ไปทำตามขั้นตอนที่ 1

สามารถเขียนโปรแกรมย่อยสับรูทีน GAM_2 ดังรูปที่ 3.5

```
      SUBROUTINE GAM_2(ALPHA,XX)
      DOUBLE PRECISION  XX,ALPHA
      COMMON /SEED/IX
      A1 = 1/SQRT((2*ALPHA)-1)
      A2 = ALPHA-ALOG(4)
      A3 = ALPHA+(1/A1)
      A4 = 1+ALOG(4.5)
10    CALL RAND(IX,YFL)
      RAN1 = YFL
      CALL RAND(IX,YFL)
      RAN2 = YFL
      V = A1*ALOG(RAN1/(1-RAN1))
      Y = ALPHA*EXP(V)
      Z = (RAN1**2)*RAN2
      W = A2+(A3*V)-Y
      CHK1 = W+(A4)-(4.5*Z)
      IF (CHK1.GE.0) THEN
            XX = Y
      RETURN
      END IF
```

```
CHK2 = ALOG(Z)
IF (W.GE.CHK2) THEN
        XX = Y
ELSE
        GOTO 10
END IF
RETURN
END
```

รูปที่ 3.5 แสดงโปรแกรมย่อยสับรูทีนที่ใช้ผลิตตัวแปรสุ่มแกมมาที่มีพารามิเตอร์ $\alpha > 1$

3.2.2.3 กรณีที่ $\alpha = 1$

การสร้างตัวแปรสุ่มให้มีการแจกแจงแกมมา เมื่อพารามิเตอร์ α มีค่าเท่ากับ 1 ใช้คุณสมบัติ reproductive property คือ ถ้า X_i เป็นตัวแปรสุ่มจากการแจกแจง Gam (α_i, β) แล้ว $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ จะมีรูปแบบเป็น $G(\alpha, \beta)$ เมื่อ $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ เมื่อ α เป็นจำนวนเต็มหรือ $\alpha = m$ ตัวแปรสุ่มจาก $G(m, \beta)$ สามารถสร้างได้ดังนี้

$$X = \beta \sum_{i=1}^{m} \left(- \ln U_i \right) = - \beta \ln \prod_{i=1}^{m} U_i$$

เมื่อ U_i เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอในช่วง (0,1)

สามารถเขียนโปรแกรมย่อยสับรูทีน GAM_3 ดังรูปที่ 3.6

```
      SUBROUTINE GAM_3(BETA,XX)
      DOUBLE PRECISION  XX,BETA
      COMMON /SEED/IX
10    CALL RAND(IX,YFL)
      V = -ALOG(YFL)
      XX = BETA * V
      RETURN
      END
```

รูปที่ 3.6 แสดงโปรแกรมย่อยสับรูทีนที่ใช้ผลิตตัวแปรสุ่มแกมมาที่มีพารามิเตอร์ $\alpha = 1$

3.2.3 <u>การผลิตตัวแปรสุ่มให้มีการแจกแจงไวบูลย์</u>

การสร้างตัวแปรสุ่มให้มีการแจกแจงไวบูลย์ที่มีพารามิเตอร์ (α, β) โดยใช้เทคนิคการแปลงผกผัน (Inverse Transformation) มีหลักการดังต่อไปนี้

1. สร้างค่าเลขสุ่ม (R) จากโปรแกรมย่อยสับรูทีน RAND ดังรูป 3.2

2. ผลิตตัวแปรสุ่มให้มีการแจกแจงไวบูลย์ที่มีพารามิเตอร์ (α, β) โดยนำตัวเลขสุ่มที่สร้างได้ในข้อ 2 มาแทนในสมการ (3.2) ดังนี้

$$X = \beta\left[-\log_e(1-R)\right]^{1/\alpha} \qquad \text{------(3.2)}$$

จะสามารถเขียนโปรแกรมย่อยสับรูทีน WEI ดังรูปที่ 3.7

```
SUBROUTINE WEI(ALPHA,BETA,XX)
DOUBLE PRECISION  XX,ALPHA,BETA
COMMON /SEED/IX
CALL RAND(IX,YFL)
AK = -ALOG(1-YFL)
WX = 1.0/ALPHA
XX = BETA*(AK**WX)
RETURN
END
```

รูปที่3.7 แสดงโปรแกรมย่อยสับรูทีนที่ใช้ผลิตตัวแปรสุ่มไวบูลย์ที่มีพารามิเตอร์ (α, β)

3.2.4 <u>การผลิตตัวแปรสุ่มให้มีการแจกแจงปกติ</u>

Box และ Muller ได้เสนอวิธีสร้างตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติมาตรฐานที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และค่าความแปรปรวนเป็น 1 พร้อมกัน 2 ค่า โดยใช้ตัวผลิต (generator) Z_1 และ Z_2

$$Z_1 = \left[-2\ln(R_1)\right]^{1/2}\cos(2\pi R_2)$$

$$Z_2 = \left[-2\ln(R_1)\right]^{1/2}\sin(2\pi R_2)$$

โดยที่ R_1 และ R_2 เป็นค่าตัวเลขสุ่มที่สร้างจากโปรแกรมย่อยสับรูทีน RAND(รูปที่ 3.2) เมื่อได้ตัวเลขสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานแล้ว จะทำการแปลงเลขสุ่มดังกล่าวโดยอาศัยฟังก์ชัน

$$X_1 = \mu_b + \sigma Z_1$$

$$X_2 = \mu_b + \sigma Z_2$$

จะได้ว่า X_1 และ X_2 มีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย $E(X_i) = \mu_b$ และความแปรปรวน $Var(X_i) = \sigma^2$ เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้ $X_i \sim N(\mu_b, \sigma^2)$; $i = 1,2$

สามารถเขียนโปรแกรมย่อยสับรูทีน NORM ดังรูปที่ 3.8

```
      SUBROUTINE NORM(DMEAN,SIGMA,IK,XL)
      DOUBLE PRECISION  XL
      COMMON /SEED/IX
      PI = 3.1415926
      IF (IK.EQ.1) GOTO 10
    5 CALL RAND(IX,YFL)
      IF ((YFL.LE.0.).OR.(YFL.GT.1.)) GOTO 5
      RONE = YFL
    6 CALL RAND(IX,YFL)
      IF ((YFL.LE.0.).OR.(YFL.GT.1.)) GOTO 6
            RTWO = YFL
            ZONE = SQRT(-2*ALOG(RONE))*COS(2*PI*RTWO)
            ZTWO = SQRT(-2*ALOG(RONE))*SIN(2*PI*RTWO)
            XL   = ZONE * SIGMA + DMEAN
      IK = 1  RETURN
   10       XL   = ZTWO * SIGMA + DMEAN
      IK = 0  RETURN
      END
```

รูปที่3.8 แสดงโปรแกรมย่อยสับรูทีนที่ใช้ผลิตตัวแปรสุ่มแบบปกติที่มีพารามิเตอร์ (μ_b, σ^2)

3.2.5 <u>การผลิตตัวแปรสุ่มให้มีการแจกแจงลอกนอร์มอล</u>

เนื่องจากการแจกแจงลอกนอร์มอล มีความสัมพันธ์กับการแจกแจงปกติ คือ ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติ ที่มีค่าเฉลี่ย μ_b และความแปรปรวน σ^2 แล้ว $Y = \exp(X)$ จะมีการแจกแจงแบบลอกนอร์มอล

ดังนั้น การสร้างตัวแปรสุ่มให้มีการแจกแจงลอกนอร์มอล ที่มีพารามิเตอร์ (μ_b, σ^2) มีหลักการดังนี้

1. สร้างตัวแปรสุ่มแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ_b และความแปรปรวน σ^2 ดังรูปที่ 3.8

2. สร้างตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงลอกนอร์มอล ได้จากค่าชี้กำลัง (Exponential) ของตัวแปรสุ่มแบบปกติ ที่ได้จากข้อ 1

สามารถเขียนโปรแกรมย่อยสับรูทีน LOGN ดังรูปที่ 3.9

```
SUBROUTINE LOGN(DMEAN,SIGMA,IK,XX)
DOUBLE PRECISION XX,X,XL
COMMON /SEED/IX
CALL NORM(DMEAN,SIGMA,IK,XL)
XX = EXP(XL)
RETURN
END
```

รูปที่ 3.9 แสดงโปรแกรมย่อยสับรูทีนที่ใช้ในการผลิตตัวแปรสุ่มลอกนอร์มอลที่มีพารามิเตอร์ (μ_b, σ^2)