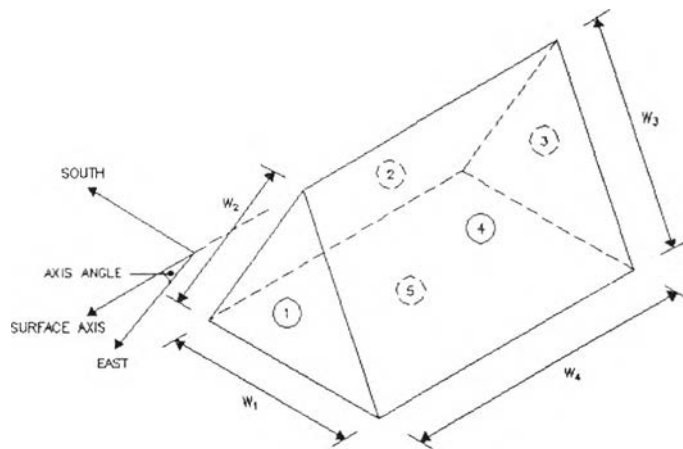


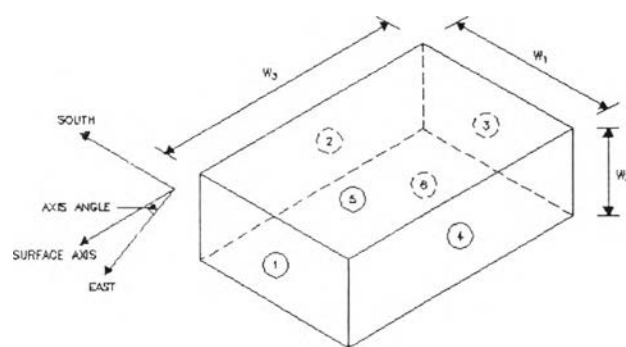
บทที่ 3

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของกลไกการถ่ายเทความร้อนผ่านระบบหลังคา ภายใต้สถานะไม่อยู่ตัว (transient condition) เลือกใช้วิธีผลต่างสี่เหลี่ยม (finite difference method) แบบอิมพลิสิต (implicit method) โดยใช้วิธีการประมาณจากผลต่างแบบตรงกลาง (central difference) และสมมุติให้การถ่ายเทความร้อนที่เกิดขึ้นมีทิศทางไหลเข้าสู่จุด (node) ที่กำหนดโดยการกำหนดจุดเริ่มจากผิวด้านนอกของหลังคาแต่ละด้าน และให้ระยะระหว่างจุดเป็น ΔL ส่วนค่าของช่วงเวลาการเปลี่ยนแปลง (step time) เป็น Δt



รูปที่ 3.1 แสดงรูปแบบของหลังคาหน้าจั่วและลำดับด้าน



รูปที่ 3.2 แสดงรูปแบบของหลังคาเรียบและลำดับด้าน

สมมติฐาน

- 1 เป็นการนำความร้อนในทิศทางเดียว ตามแนวความหนาของวัสดุหลังคาและหลังคาเป็นพื้นผิวเรียบ สำหรับหลังคากระเบื้องที่เป็นลอนโดยที่มุมภายในของลอนที่มีค่ามาก

กว่า 120 องศา ข้อสมมติฐานนี้จะไม่ทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนมากนัก [Duffie and Beckman, 1991]

2 คุณสมบัติทางความร้อนของวัสดุหลังคามีค่าคงที่

3 การแผ่รังสีความร้อนที่ผิวของหลังคา มีลักษณะเป็นผิวสีเทา (gray surface)

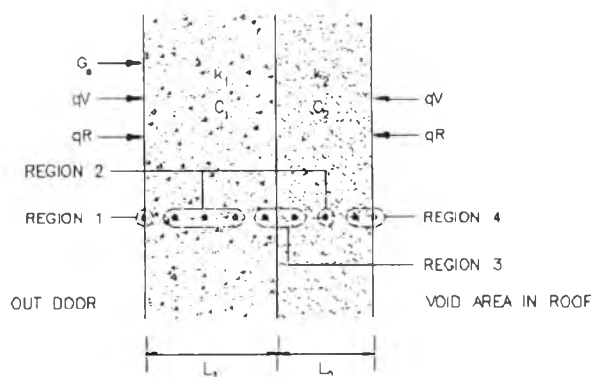
จากหลักสมดุลย์พลังงานสำหรับปริมาตรควบคุม (control volume) ของจุดที่กำหนดจะได้ว่า

$$E_{in} + E_g = E_{st} + E_{out} \quad (3.1)$$

เนื่องจากไม่มีการสร้างพลังงานภายในจุดที่กำหนดและการถ่ายเทความร้อนมีทิศทางไหลเข้าสู่จุดที่กำหนด ดังนั้นจากสมการ (3.1) ได้ว่า

$$E_{in} = E_{st} \quad (3.2)$$

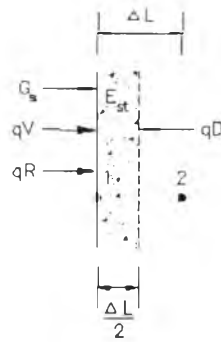
1. พิจารณากลไกการถ่ายเทความร้อนที่เกิดขึ้นที่ผิวและภายในเนื้อวัสดุของหลังคาแต่ละด้าน ดังแสดงในรูปที่ 3.3 ซึ่งสามารถแยกพิจารณาได้เป็น 4 บริเวณดังนี้



รูปที่ 3.3 แสดงกลไกการถ่ายเทความร้อนที่ผิวและภายในเนื้อวัสดุของหลังคาแต่ละด้าน

1.1 บริเวณที่ 1 พิจารณากลไกการถ่ายเทความร้อนที่ผิวด้านนอกของหลังคาแต่ละด้าน

-พิจารณาผิวด้านนอกของหลังคาที่ 1,2,3,4 สำหรับหลังคาหน้าจั่ว และด้านที่ 1,2,3,4,5 สำหรับหลังคาเรียบ เกิดการถ่ายเทความร้อนเนื่องจาก ได้รับรังสีความร้อนจากแสงแดด การนำความร้อนภายในเนื้อวัสดุสู่ผิวด้านนอก การพาความร้อนจากอากาศภายนอกสู่ผิวหลังคา การแผ่รังสีความร้อนระหว่างผิวด้านนอกกับท้องฟ้าและการสะสมความร้อนในเนื้อวัสดุ ดังแสดงใน รูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 แสดงกลไกการถ่ายเทความร้อนที่ผิวด้านนอกของหลังคา

$$\begin{aligned}
 (1-\phi)G_s A + kA \frac{T_{m+1}^{p+1} - T_m^{p+1}}{\Delta L} + hA(T_\infty - T_m^{p+1}) + \epsilon A \sigma (T_{sky}^4 - (T_m^{p+1})^4) \\
 = \rho c A \frac{\Delta L}{2} \frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t} \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

เมื่อ

รังสีความร้อนจากแสงแดด = $(1-\phi)G_s A$

การนำความร้อนภายในเนื้อวัสดุสู่ผิวด้านนอก = $kA \frac{T_{m+1}^{p+1} - T_m^{p+1}}{\Delta L}$

การพาความร้อนจากอากาศภายนอกสู่ผิวหลังคา = $hA(T_\infty - T_m^{p+1})$

การแผ่รังสีความร้อนระหว่างผิวหลังคาด้านนอกกับท้องฟ้า = $\epsilon A \sigma (T_{sky}^4 - (T_m^{p+1})^4)$

การสะสมความร้อนในเนื้อวัสดุ = $\rho c A \frac{\Delta L}{2} \frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t}$

-พิจารณาผิวด้านนอกของหลังคาด้านที่ 5 สำหรับหลังคาหน้าจั่วและด้านที่ 6 สำหรับหลังคาเรียบ เกิดการถ่ายเทความร้อนเนื่องจากการนำความร้อนภายในเนื้อวัสดุสู่ผิวด้านนอก การพาความร้อนจากอากาศภายในอาคารสู่ผิวหลังคา และการสะสมความร้อนในเนื้อวัสดุ

$$kA \frac{T_{m+1}^{p+1} - T_m^{p+1}}{\Delta L} + hA(T_R - T_m^{p+1}) = \rho c A \frac{\Delta L}{2} \frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t} \quad (3.4)$$

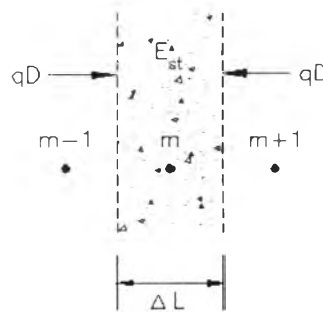
เมื่อ

การนำความร้อนภายในเนื้อวัสดุสู่ผิวด้านนอก = $kA \frac{T_{m+1}^{p+1} - T_m^{p+1}}{\Delta L}$

การพาความร้อนจากอากาศภายในอาคารสู่ผิวหลังคา = $hA(T_R - T_m^{p+1})$

$$\text{การสะสมความร้อนในเนื้อวัสดุ} = \rho CA \frac{\Delta L}{2} \frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t}$$

1.2 บริเวณที่ 2 พิจารณากลไกการถ่ายเทความร้อนภายในเนื้อวัสดุของหลังคาแต่ละด้าน ซึ่งเกิดการถ่ายเทความร้อนเนื่องจากการนำความร้อนภายในเนื้อวัสดุจากจุดข้างเคียงสู่จุดที่ทำการพิจารณา และการสะสมความร้อนภายในเนื้อวัสดุบริเวณจุดที่พิจารณา ดังแสดงในรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 แสดงกลไกการถ่ายเทความร้อนภายในเนื้อวัสดุของหลังคา

$$kA \frac{T_{m-1}^{p+1} - T_m^{p+1}}{\Delta L} + kA \frac{T_{m+1}^{p+1} - T_m^{p+1}}{\Delta L} = \rho CA \Delta L \frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t}$$

$$kA \frac{T_{m+1}^{p+1} + T_{m-1}^{p+1} - 2T_m^{p+1}}{\Delta L} = \rho CA \Delta L \frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t} \quad (3.5)$$

เมื่อ

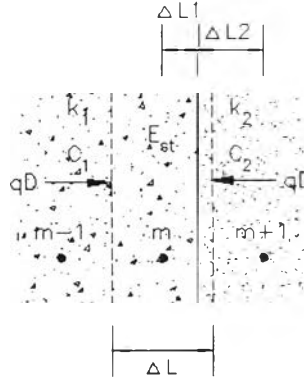
$$\text{การนำความร้อนภายในเนื้อวัสดุ} = kA \frac{T_{m+1}^{p+1} + T_{m-1}^{p+1} - 2T_m^{p+1}}{\Delta L}$$

$$\text{การสะสมความร้อนภายในเนื้อวัสดุ} = \rho CA \Delta L \frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t}$$

1.3 บริเวณที่ 3 พิจารณากลไกการถ่ายเทความร้อนภายในเนื้อวัสดุของหลังคาแต่ละด้าน ซึ่งเกิดการถ่ายเทความร้อนเนื่องจากการนำความร้อนภายในเนื้อวัสดุจากจุดข้างเคียงสู่จุดที่ทำการพิจารณา โดยการนำความร้อนที่เกิดขึ้นมีการถ่ายเทความร้อนระหว่างวัสดุ

2 ชั้น ที่อยู่ติดกันในลักษณะผนังประสม (composite wall) และการสะสมความร้อนภายในเนื้อวัสดุบริเวณจุดที่พิจารณา

-จุดที่พิจารณาอยู่ภายในเนื้อวัสดุที่ 1 ดังแสดงในรูปที่ 3.6 (กรณี $\Delta L_1 < \Delta L_2$)



รูปที่ 3.6 แสดงกลไกการนำความร้อนภายในเนื้อวัสดุของหลังคาระหว่างวัสดุ 2 ชั้น โดยจุดพิจารณาอยู่ในเนื้อวัสดุที่ 1

$$\begin{aligned}
 kA \frac{T_{m-1}^{p+1} - T_m^{p+1}}{\Delta L} + A \frac{T_{m+1}^{p+1} - T_m^{p+1}}{\frac{\Delta L_1}{k_1} + \frac{\Delta L_2}{k_2}} \\
 = (\rho_1 C_1 (\frac{\Delta L}{2} + \Delta L_1) + \rho_2 C_2 (\frac{\Delta L}{2} - \Delta L_1)) A \frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t} \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}
 \text{การนำความร้อนภายในเนื้อวัสดุ} &= kA \frac{T_{m-1}^{p+1} - T_m^{p+1}}{\Delta L} + A \frac{T_{m+1}^{p+1} - T_m^{p+1}}{\frac{\Delta L_1}{k_1} + \frac{\Delta L_2}{k_2}} \\
 \text{การสะสมความร้อนภายในเนื้อวัสดุ} &= (\rho_1 C_1 (\frac{\Delta L}{2} + \Delta L_1) + \rho_2 C_2 (\frac{\Delta L}{2} - \Delta L_1)) A \frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t}
 \end{aligned}$$

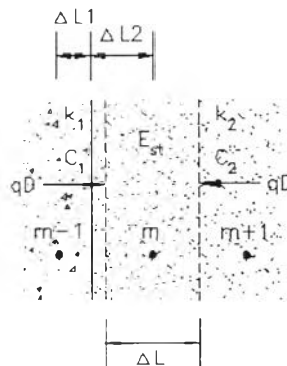
-จุดที่พิจารณาอยู่ภายในเนื้อวัสดุที่ 2 ดังแสดงในรูปที่ 3.7 (กรณี $\Delta L_1 < \Delta L_2$)

$$A \frac{T_{m-1}^{p+1} - T_m^{p+1}}{\frac{\Delta L_1}{k_1} + \frac{\Delta L_2}{k_2}} + kA \frac{T_{m+1}^{p+1} - T_m^{p+1}}{\Delta L} = \rho_2 C_2 A \Delta L \frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t} \quad (3.7)$$

เมื่อ

$$\text{การนำความร้อนภายในเนื้อวัสดุ} = A \frac{T_{m-1}^{p+1} - T_m^{p+1}}{\frac{\Delta L_1}{k_1} + \frac{\Delta L_2}{k_2}} + kA \frac{T_{m+1}^{p+1} - T_m^{p+1}}{\Delta L}$$

$$\text{การสะสมความร้อนภายในเนื้อวัสดุ} = \rho_2 C_2 A \Delta L \frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t}$$



รูปที่ 3.7 แสดงกลไกการนำความร้อนภายในเนื้อวัสดุของหลังคาระหว่างวัสดุ 2 ชนิด โดยจุดพิจารณาอยู่ในเนื้อวัสดุที่ 2

1.4 บริเวณที่ 4 พิจารณาการถ่ายเทความร้อนที่ผิวด้านในของหลังคาแต่ละด้าน

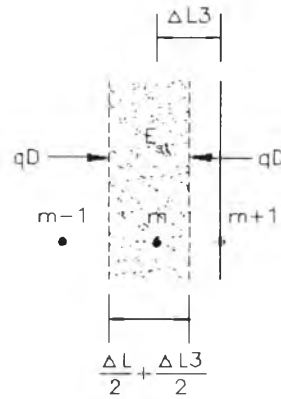
-จุดที่พิจารณาอยู่ในเนื้อวัสดุซึ่งอยู่ถัดจากผิวด้านในของหลังคาซึ่งเกิดการถ่ายเทความร้อน เนื่องจากการนำความร้อนภายในเนื้อวัสดุจากจุดข้างเคียงสู่จุดที่ทำการพิจารณาและการสะสมความร้อนภายในเนื้อวัสดุบริเวณจุดที่พิจารณา โดยที่ระยะ ΔL_3 เป็นระยะที่เหลือเศษจากการกำหนดจุดจากผิวด้านนอกของหลังคาถึงจุดที่พิจารณาซึ่งอยู่ถัดจากผิวด้านในของหลังคา ดังแสดงในรูปที่ 3.8 ($\Delta L_3 < \Delta L$)

$$kA \frac{T_{m-1}^{p+1} - T_m^{p+1}}{\Delta L} + kA \frac{T_{m+1}^{p+1} - T_m^{p+1}}{\Delta L_3} = \rho C A \left(\frac{\Delta L}{2} + \frac{\Delta L_3}{2} \right) \frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t} \quad (3.8)$$

เมื่อ

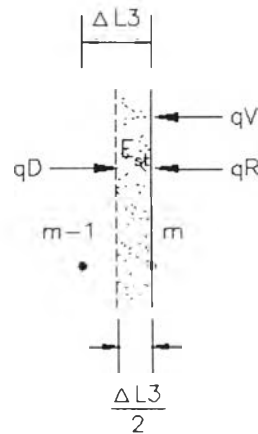
$$\text{การนำความร้อนภายในเนื้อวัสดุ} = kA \frac{T_{m-1}^{p+1} - T_m^{p+1}}{\Delta L} + kA \frac{T_{m+1}^{p+1} - T_m^{p+1}}{\Delta L_3}$$

$$\text{การสะสมความร้อนภายในเนื้อวัสดุ} = \rho C A \left(\frac{\Delta L}{2} + \frac{\Delta L_3}{2} \right) \frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t}$$



รูปที่ 3.8 แสดงกลไกการนำความร้อนภายในเนื้อวัสดุของหลังคา โดยจุดที่พิจารณาอยู่ภายในเนื้อวัสดุซึ่งอยู่ถัดจากผิวด้านในของหลังคา

-จุดที่พิจารณาอยู่ที่ผิวด้านในของหลังคาซึ่งเกิดการถ่ายเทความร้อนเนื่องจากการนำความร้อนภายในเนื้อวัสดุสู่ผิวด้านใน การพาความร้อนจากอากาศซึ่งอยู่ภายในช่องว่างระหว่างหลังคา กับฝ้าเพดานสู่ผิวหลังคา การแผ่รังสีความร้อนระหว่างผิวหลังคาด้านในซึ่งกันและกัน และการสะสมความร้อนในเนื้อวัสดุ ดังแสดงในรูปที่ 3.9



รูปที่ 3.9 แสดงกลไกการถ่ายเทความร้อนที่ผิวด้านในของหลังคา

$$\begin{aligned}
 & kA \frac{T_{m-1}^{p+1} - T_m^{p+1}}{\Delta L_3} + hA(T_{vo}^{p+1} - T_m^{p+1}) + \epsilon A \frac{J - \sigma(T_m^{p+1})^4}{(1 - \epsilon)} \\
 & = \rho CA \frac{\Delta L_3}{2} \frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t} \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

เมื่อ

$$\text{จากการนำความร้อนภายในเนื้อวัสดุสู่ผิวด้านใน} = kA \frac{T_{m-1}^{p+1} - T_m^{p+1}}{\Delta L_3}$$

$$\text{การพาความร้อน} = hA(T_{vo}^{p+1} - T_m^{p+1})$$

$$\text{การแผ่รังสีความร้อนระหว่างผิวหลังคา} = \varepsilon A \frac{J - \sigma(T_m^{p+1})^4}{(1 - \varepsilon)}$$

$$\text{การสะสมความร้อนในเนื้อวัสดุ} = \rho c A \frac{\Delta L_3}{2} \frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t}$$

-จุดที่พิจารณาอยู่ที่ผิวด้านในของหลังคากรณีไม่มีฝ้าเพดานซึ่งเกิดการถ่ายเทความร้อนเนื่องจากการนำความร้อนภายในเนื้อวัสดุสู่ผิวด้านใน การพาความร้อนจากอากาศซึ่งอยู่ภายในช่องว่างระหว่างหลังคา กับฝ้าเพดานสู่ผิวด้านใน และการสะสมความร้อนในเนื้อวัสดุ

$$kA \frac{T_{m-1}^{p+1} - T_m^{p+1}}{\Delta L_3} + hA(T_{vo}^{p+1} - T_m^{p+1}) = \rho c A \frac{\Delta L_3}{2} \frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t} \quad (3.10)$$

เมื่อ

$$\text{การนำความร้อนภายในเนื้อวัสดุสู่ผิวด้านใน} = kA \frac{T_{m-1}^{p+1} - T_m^{p+1}}{\Delta L_3}$$

$$\text{การพาความร้อน} = hA(T_{vo}^{p+1} - T_m^{p+1})$$

$$\text{การสะสมความร้อนในเนื้อวัสดุ} = \rho c A \frac{\Delta L_3}{2} \frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t}$$

2. พิจารณาหลักการถ่ายเทความร้อนของปริมาตรควบคุมของอากาศภายในช่องว่างระหว่างหลังคา กับฝ้าเพดานที่เกิดขึ้นเนื่องจากการพาความร้อนจากผิวด้านในของหลังคาสู่อากาศที่อยู่ภายในช่องว่างระหว่างหลังคา กับฝ้าเพดาน การระบายอากาศ (ventilation) และการสะสมความร้อนของอากาศภายในช่องว่างระหว่างหลังคา กับฝ้าเพดานดังแสดงในรูปที่ 3.10

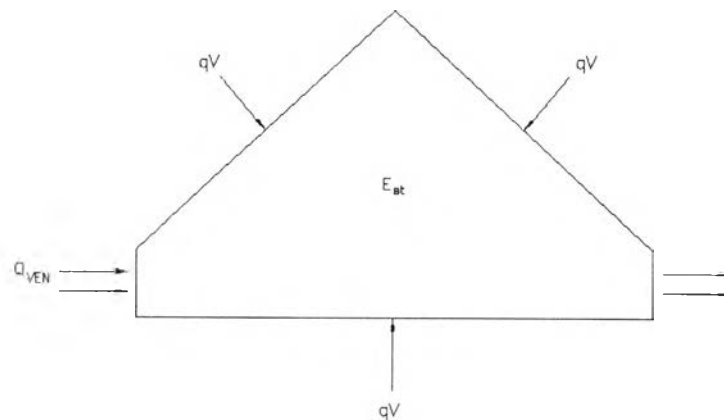
$$\sum hA(T_m^{p+1} - T_{vo}^{p+1}) + m_{vent} C (T_{oc} - T_{vo}^{p+1}) = M_{vo} C \frac{T_{vo}^{p+1} - T_{vo}^p}{\Delta t} \quad (3.11)$$

เมื่อ

$$\text{การพาความร้อน} = \sum hA(T_m^{p+1} - T_{vo}^{p+1})$$

$$\text{การระบายอากาศ} = m_{vent} C (T_{oc} - T_{vo}^{p+1})$$

$$\text{การสะสมความร้อนของอากาศ} = M_{vo} C \frac{T_{vo}^{p+1} - T_{vo}^p}{\Delta t}$$



รูปที่ 3.10 แสดงกลไกการถ่ายเทความร้อนของอากาศภายในช่องว่างระหว่างหลังคา กับฝ้าเพดาน

จากระบบสมการข้างต้นจะเห็นได้ว่ามีตัวแปรไม่ทราบค่าคือค่าอุณหภูมิในช่วงเวลาถัดไปที่จุดต่าง ๆ ที่กำหนด (T_m^{p+1}) และอุณหภูมิในช่วงเวลาถัดไปของอากาศภายในช่องว่างระหว่างหลังคาฝ้าเพดาน (T_{vo}^{p+1}) สำหรับสภาวะเริ่มต้น (initial condition) สำหรับการคำนวณของอุณหภูมิปัจจุบัน T_m^p และ T_{vo}^p นั้น กำหนดให้มีค่าเท่ากับอุณหภูมิของอากาศภายนอก ยกเว้นค่าเริ่มต้นของอุณหภูมิของหลังคาด้านที่ 5 สำหรับหลังคาหน้าจั่ว และด้านที่ 6 สำหรับหลังคาเรียบ ซึ่งเป็นฝ้าเพดาน กำหนดให้มีค่าเท่ากับอุณหภูมิของอากาศภายในอาคาร สำหรับจำนวนสมการมีเท่ากับจำนวนตัวแปร คือเท่ากับจำนวนจุดที่กำหนดทั้งหมดบวกอีกหนึ่งสมการสำหรับสมการของสมดุลพลังงานของปริมาตรควบคุมของอากาศภายในช่องว่างระหว่างหลังคาฝ้าเพดาน

เนื่องจากบางสมการเป็นสมการไม่เชิงเส้น (Nonlinear equations) ดังนั้นการแก้สมการเพื่อหาค่าตัวแปรจึงใช้วิธี หลักการของนิวตัน - ราฟสัน (Newton-Raphson method) ซึ่งมีขั้นตอนดังต่อไปนี้ [Stoecker, 1989]

1. จัดรูปสมการข้างต้นให้ด้านขวามีค่าเป็นศูนย์และให้เท่ากับค่า f_k โดยเริ่มจากสมการสมดุลพลังงานของปริมาตรควบคุมของจุดที่อยู่ผิวด้านนอกของหลังคาด้านที่ 1 จัดรูปสมการให้ด้านขวามีค่าเป็นศูนย์และให้เท่ากับ f_k แล้วทำเช่นเดิมสำหรับจุดถัดไปจนถึงจุดที่ผิวด้านในของหลังคาด้านที่ 1 แล้วทำเช่นเดียวกันกับด้านที่ 2,3,4,5 สำหรับหลังคาหน้าจั่ว และด้านที่ 2,3,4,5,6 สำหรับหลังคาเรียบ โดยกำหนดให้ค่า n ซึ่งแสดงลำดับที่ของ f มีค่าต่อเนื่องกัน และค่า n สุดท้ายคือการจัดรูปสมการของสมดุลพลังงานของปริมาตรควบคุมของอากาศภายในช่องว่างระหว่างหลังคาฝ้าเพดานให้ด้านขวามีค่าเป็นศูนย์และให้เท่ากับ f_k

$$f_1 = 0 \quad (3.12.1)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$f_n = 0 \quad (3.12.n)$$

2. สมมุติค่าเริ่มต้นให้กับตัวแปรซึ่งเป็นค่าของอุณหภูมิของช่วงเวลาถัดไป โดยให้มีค่าเท่ากับ อุณหภูมิที่เวลาปัจจุบัน

$$T_m^{p+1} = T_m^p, \quad T_{vo}^{p+1} = T_{vo}^p$$

3. คำนวณหาค่า f_n โดยแทนค่าตัวแปรด้วยค่าสมมุติเริ่มต้น
4. หาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันทั้งหมดเทียบกับตัวแปรทั้งหมด

$$\frac{\partial f_j}{\partial T_{i,m}} = a_{k,j}, \quad \frac{\partial f_j}{\partial T_{vo}} = a_{l,n}$$

5. จัดรูปแบบระบบสมการ

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta T_{1,1} \\ \Delta T_{1,2} \\ \vdots \\ \Delta T_{5,m} \\ \Delta T_{vo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

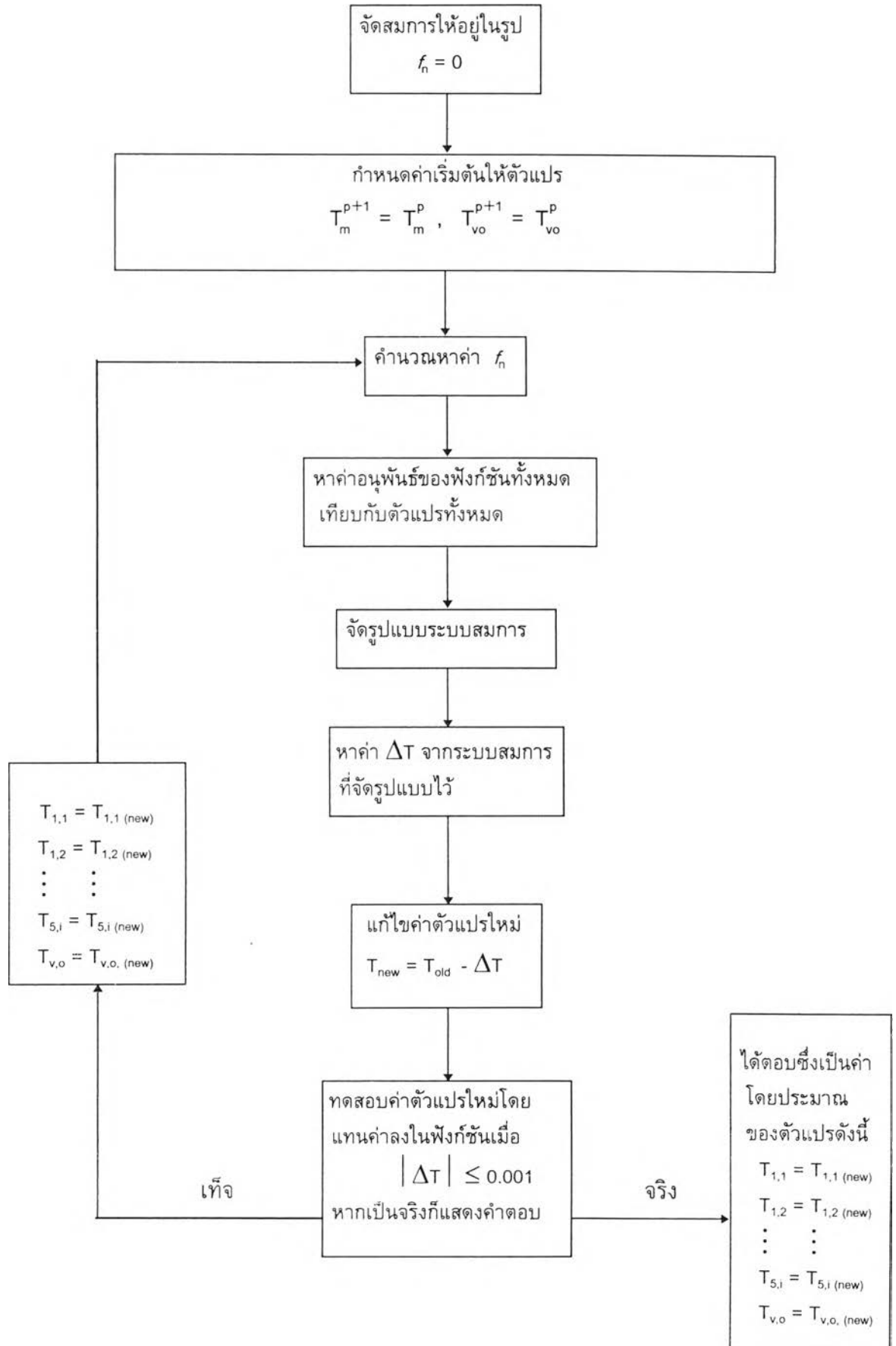
6. หาค่า ΔT จากสมการ (3.13) ซึ่งเป็นระบบสมการเชิงเส้น (Linear equations) ด้วยระเบียบวิธีกำจัดแบบเกาส์ (gauss elimination method)

7. แก้ไขค่าของตัวแปรใหม่

$$T_{NEW} = T_{OLD} - \Delta T$$

8. ถ้าค่าของ $|\Delta T| \leq 0.001$ แสดงว่า ค่าตัวแปรใหม่เป็นค่าประมาณของตัวแปรที่ต้องการหาค่า แต่ ถ้าค่าของ $|\Delta T| \geq 0.001$ ให้ทำซ้ำข้อ 3 ถึงข้อ 8 ใหม่ โดยให้ค่าตัวแปรใหม่ที่ได้ออกมาเป็นค่าสมมุติให้กับตัวแปรในข้อ 2.

แผนผังแสดงการหาคำตอบจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยวิธีเชิงตัวเลข
(หลังคาน้ำจั่ว)



แผนผังแสดงการหาคำตอบจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยวิธีเชิงตัวเลข
(หลังคาเรียบ)

