บทที่ 2

สถิติทดสอบและผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ตัวสถิติทดสอบที่ใช้สำหรับทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากรได้มีการพัฒนาขึ้นเรื่อย ๆ จากนักสถิติ พร้อมทั้งได้เสนอผลงานวิจัยเพื่อเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบเหล่านั้นอยู่มากมาย

ในบทนี้จะกล่าวถึงรายละเอียดของการทดสอบแต่ละวิธีและรายละเอียดการแจกแจงที่สำคัญที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ รวมทั้งเสนอผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

ให้ $x_i = \left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in_i}\right)$ เป็นตัวอย่างขนาด n_i จากประชากรที่ i ซึ่งมีความแปรปรวนเป็น $\sigma_i^2 \; (i = 1,2,\ldots,g)$ ให้ $\bar{x}_i$ เป็นค่าเฉลี่ยตัวอย่าง และ s_i^2 เป็นความแปรปรวนตัวอย่าง

$$\bar{x}_i = \left(\frac{1}{n_i}\right)\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$$

$$s_i^2 = \sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)^2 \Big/ \left(n_i - 1\right)$$

และให้ $$n = \sum_{i=1}^{g} n_i \quad , \quad \upsilon_i = n_i - 1 \quad , \quad \upsilon = \sum_{i=1}^{g} \upsilon_i \quad , \quad a_i = \upsilon_i / \upsilon$$

g = จำนวนประชากร

สมมติฐานสำหรับการทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนคือ

$H_0: \; \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_g^2$

H_1 : ความแปรปรวนของประชากรอย่างน้อย 2 กลุ่มมีความแปรปรวนต่างกัน

ในการวิจัยครั้งนี้ ได้กำหนดจำนวนประชากรเท่ากับ 3 กลุ่มและ 5 กลุ่ม (g = 3,5) และสถิติทดสอบต่างๆ ที่ใช้ในการทดลองมีรายละเอียดดังนี้

2.1 <u>สถิติทดสอบบาร์ตเลต</u> (Bartlett test tatistic : Bar)

ตัวสถิติทดสอบบาร์ตเลต เป็นสถิติทดสอบที่พัฒนามาจาก สถิติทดสอบของเนย์แมน-เพียร์สัน (Neyman-Pearson' s test statistic) ซึ่งสร้างตัวสถิติทดสอบ โดยใช้อัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum likehood ratio) โดยการแทนตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดที่เอียงเอน (biased maximum likehood estimators) ด้วยตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง (nbiased estimators) ของความแปรปรวน และเปลี่ยนค่าความเป็นอิสระจาก n_i เป็น $(n_i - 1)$ จึงได้สถิติทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวน ดังนี้

$$Bar = \frac{1}{C}\sum_{i=1}^{g}(n_i - 1)(\ln s^2 - \ln s_i^2)$$

$$s_i^2 = \sum_{i=1}^{n_i}(x_{ij} - \bar{x})^2 \Big/ (n_i - 1)$$

เมื่อ

$$s^2 = \sum_{i=1}^{g}(n_i - 1)s_i^2 \Big/ \sum_{i=}^{g}(n_i - 1)$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(g-1)}\left[\sum_{i=1}^{g}\frac{1}{\upsilon_i} - \frac{1}{\upsilon}\right]$$

n_i : ขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่ i

g : จำนวนประชากร

สถิติทดสอบบาร์ตเลตสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithm function) ฐาน 10 ได้ดังนี้

$$Bar = \frac{1}{C}\left[2.3026\left[\sum_{i=1}^{g}(n_i - 1)\log s^2 - \sum_{i=1}^{g}(n_i - 1)\log s_i^2\right]\right]$$

$$C = 1+\frac{1}{3(g-1)}\left[\sum_{i=1}^{g}\frac{1}{\upsilon_i}-\frac{1}{\upsilon}\right]$$

จะปฏิเสธสมมติฐานว่างเมื่อ ค่าสถิติทดสอบบาร์ตเลตที่คำนวณได้มากกว่า χ^2 ที่องศาความเป็นอิสระ(degree of freedom) เท่ากับ g-1 $\left(\chi^2_{\alpha,(g-1)}\right)$

2.2 <u>สถิติทดสอบโอบรีน</u> (O' Brien test statiatic : OB)

ตัวสถิติทดสอบโอบรีนเป็นตัวสถิติที่ได้รับการพัฒนาจาก O' Brien , R.G. (1981) โดยใช้แนวความคิดของการวิเคราะห์ความแปรปรวน คือ การนำความแปรปรวนทั้งหมด หรือ ความแปรปรวนรวม (Total Mean Square) มาแยกความแปรปรวนออกเป็น 2 ส่วน คือ ความแปรปรวนระหว่างกลุ่ม (Between mean square) และความแปรปรวนภายในกลุ่ม (Within mean square) โดยการแปลงค่าสังเกต (Transformation) x_{ij} เป็น

$$z_{ij} = \frac{\left[(w+n_i-2)n_i\left(x_{ij}-\bar{x}_i\right)^2 - ws_i^2(n_i-1)\right]}{\left[(n_i-1)(n_i-2)\right]}$$

s_i^2 เป็นความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างที่ i

โดยที่ w เป็นตัวถ่วงน้ำหนัก (weighting factor) ซึ่ง O' Brien แนะนำ $w = 0.5$

จากค่า z_{ij} ที่ได้จากการแปลงค่าสังเกตุ x_{ij} นำมาวิเคราะห์ด้วยวิธี การวิเคราะห์ความแปรปรวน ซึ่งสามารถเขียนแสดงเป็นตาราง ANOVA ได้ดังนี้

ตารางที่ 2.1 แสดงตาราง ANOVA

สาเหตุของความแปรปรวน (Source of Variation)	ผลรวมกำลังสอง (Sum of Squares)	องศาความเป็นอิสระ (Degree of Freedom)	ผลรวมกำลังสองเฉลี่ย (Mean Square)
ระหว่างกลุ่ม (Between groups)	$\sum_{i=1}^{g} n_i\left(\bar{z}_i-\bar{z}\right)^2$	$(g-1)$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{g} n_i\left(\bar{z}_i-\bar{z}\right)^2}{(g-1)}$
ภายในกลุ่ม (Within groups)	$\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_i}\left(z_{ij}-\bar{z}_i\right)^2$	$\sum_{i=1}^{g}(n_i-1)$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_i}\left(z_{ij}-\bar{z}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{g}(n_i-1)}$
รวม (Total)	$\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_i}\left(z_{ij}-\bar{z}\right)^2$	$\sum_{i=1}^{g}(n_i-1)$	-

สถิติทดสอบโอบรีน (OB)

$$= \frac{Mean\ Square\left(Between\ Groups\right)}{Mean\ Square\left(Within\ groupss\right)}$$

$$OB = \frac{\sum_{i=1}^{g} n_i\left(\bar{z}_i-\bar{z}\right)^2 \Big/ (g-1)}{\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_i}\left(z_{ij}-\bar{z}_i\right)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{g}(n_i-1)}$$

มีการแจกแจงโดยประมาณแบบ F ที่องศาความเป็นอิสระ (degree of freedom) เท่ากับ $\left[(g-1),\sum_{i=1}^{g}(n_i-1)\right]$ ดังนั้นจะปฏิเสธสมมติฐานว่าง เมื่อค่าที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ $F_{\left[\alpha,(g-1),\sum_{i=1}^{g}(n_i-1)\right]}$

2.3 <u>สถิติทดสอบเลแจค</u> (Lay-Jack test statistic : LJ)

จากสถิติทดสอบที่เสนอโดย Layard (1973 : 193-198) คือเมื่อ n_i มีขนาดใหญ่พอ $(n_i-1)^{\frac{1}{2}}\ \ln s_i^2 \sim N(\ln\sigma_i^2, \tau_i^2)$ ซึ่ง $\tau_i^2 = 2+\{1-(1/n_i)\}\gamma$ เมื่อ γ คือความโด่ง และประมาณความโด่งด้วยการรวมความโด่งของทุกกลุ่มตัวอย่าง Quenouill ได้เสนอการประมาณความโด่งใหม่ โดยอาศัยหลักการของ Jackknife เรียกสถิติทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนนี้ว่า ตัวสถิติทดสอบเลแจค มีรายละเอียดดังนี้

จากสถิติทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวน $\chi^2 - \textit{test statistic}$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{g} \upsilon_i \left\{ \ln s_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^{g} \upsilon_i \ln s_i^2}{\upsilon} \right\} / \tau^2$$

$$\tau^2 = 2+[1-(g/n)]\gamma$$

$$\gamma = \sum_{i=1}^{g} \gamma_i / g$$

Scheffe (1973) ได้เสนอการประมาณค่าค่าโด่งจากสูตร

$$\gamma = \frac{1}{\sum_{i=i}^{g} n_i} \sum_{i=1}^{g} n_i^2 \left[\frac{\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij}-\bar{x}_i)^4}{\left[\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij}-\bar{x}_i)^2\right]^2} \right] - 3$$

ในปีคียวกันนั้นเอง Layard (1973 : 195-198) ได้เสนอความคิดเห็นว่า ความโด่งที่ประมาณได้ มีความเอนเอียงมาก ในกรณีที่ตัวอย่างสุ่มมาจากประชากรที่ไม่มีการแจกแจงแบบปกติ ดังนั้น Layard จึงได้เสนอตัวประมาณความโด่งขึ้นใหม่ที่มีความเอนเอียงน้อยกว่า ตัวประมาณความโด่งของ Scheffe โดยการประมาณโมเมนต์ที่ 4 ของความแปรปรวน จากค่าสังเกตุทั้งหมด ดังนี้

$$\gamma = \frac{n\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij}-\bar{x}_i\right)^4}{\left\{\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij}-\bar{x}_i\right)^2\right\}^2} - 3$$

Quenouill ในการสร้างตัวประมาณความโด่งใหม่ เพื่อลดความเอนเอียงตัวประมาณความโด่งของ Layard โดยอาศัยหลักการของ Jackknife เขียนแทนด้วยสัญญลักษณ์ γ_J

จากตัวประมาณค่าความโด่งของ Layard โดยอาศัยค่าสังเกตทั้งหมดในการคำนวณ แต่สำหรับหลักการของ Jackknife คือจะตัดค่าสังเกตของกลุ่มที่ i เพื่อคำนวณค่าดังนี้

$$\gamma_{(-i)} = \frac{\left(\sum_{l\neq i=1}^{g} n_l\right)\sum_{l\neq i=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij}-\bar{x}_l\right)^4}{\left\{\sum_{l\neq i=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{lj}-\bar{x}_l\right)^2\right\}^2} - 3$$

จากนั้นคำนวณค่าเทียม (Pseudo Value)

$$\gamma_i = g\gamma - (g-1)\gamma_{(-i)} \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, g$$

และจะได้ตัวประมาณความโด่งจากหลักการของ Jackknife คือ

$$\gamma_J = \sum_{i=1}^{g} \gamma_i \big/ g$$

จากนั้นนำค่าประมาณที่ได้แทนในสูตรของ Layard' s $\chi^2 - test$ เพื่อเป็นเกียรติแก่ผู้ค้นพบสถิติทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวน ที่เกิดจากการนำสถิติทดสอบของ Layard แต่ใช้ตัวประมาณความโด่งตามหลักการของ Jackknife จึงให้ชื่อสถิติทดสอบใหม่นี้ว่า ตัวสถิติทดสอบเลแจค (Lay-Jack) ดังสูตร

$$Lay-Jack = \sum_{i=1}^{g} \upsilon_i \left\{ \ln s_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^{g} \upsilon_i \ln s_i^2}{\upsilon} \right\} / \tau^2$$

เมื่อ

$$\tau^2 = 2+\left[1-(g/n)\right]\gamma_J$$

$$\gamma_J = \sum_{i=1}^{g}\gamma_i/g$$

$$\gamma_i = g\gamma-(g-1)\gamma_{(-i)} \quad ; \quad i = 1,2,\ldots,g$$

$$\gamma_{(-i)} = \frac{\left(\sum_{l\neq i=1}^{g} n_l\right)\sum_{l\neq i=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_l}\left(x_{lj}-\bar{x}_l\right)^4}{\left\{\sum_{l\neq i=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_l}\left(x_{lj}-\bar{x}_l\right)^2\right\}^2} - 3$$

และ

$$\gamma = \frac{n\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij}-\bar{x}_i\right)^4}{\left\{\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij}-\bar{x}_i\right)^2\right\}}-3$$

ค่าวิกฤตของสถิติทดสอบ Lay-Jack คือ χ^2 ที่องศาความเป็นอิสระ (degree of freedom) เท่ากับ (g-1) นั่นคือจะปฏิเสธสมมติฐานว่างเมื่อค่าที่คำนวณที่ได้มากกว่า $\chi^2_{(\alpha,g-1)}$

2.4 <u>การคำนวณค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวน</u>

เพื่อความเข้าใจในขั้นตอนการคำนวณ สถิติทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของ สถิติทดสอบบาร์ตเลต สถิติทดสอบโอบรีน และ สถิติทดสอบเลแจค จะอาศัยข้อมูลของตัวอย่างสุ่ม 3 ชุด (i =1,2,3) จากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ ค่าเฉลี่ย (μ) เท่ากับ 100 และความแปรปรวน (σ^2) เท่ากับ 3 ตัวอย่างสุ่มแต่ละชุดมีขนาดเท่ากันคือ 5 (j =1,2,3,4,5) ดังตารางที่ 2.2

<u>ตารางที่ 2.2</u> แสดงข้อมูลของตัวอย่างสุ่ม 3 ชุดที่เป็นอิสระกัน

x_{ij}	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	x_{i4}	x_{i5}
x_1	98.78	103.50	102.77	95.78	100.86
x_2	100.32	96.79	104.68	101.78	95.94
x_4	98.43	99.17	100.38	101.55	98.23

จากตารางที่ 2.2

ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างชุดที่ 1 $(\bar{x}_1)$ = 100.34

ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างชุดที่ 2 $(\bar{x}_2)$ = 99.90

ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างชุดที่ 3 $(\bar{x}_3)$ = 99.55

จากข้อมูลในตารางที่ 2.2 จะนำมาทำการคำนวณค่าสถิติทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนทั้ง 3 ประเภท ดังที่ได้กล่าวรายละเอียดไว้ดังข้างต้น

2.4.1 วิธีการคำนวณค่าสถิติทดสอบบาร์ตเลต (Bartlett test tatistic : Bar)

$$Bar = \frac{1}{C}\sum_{i=1}^{g}(n_i - 1)\left(\ln s^2 - s_i^2\right)$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(g-1)}\left[\sum_{i=1}^{g}\frac{1}{(n_i - 1)} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{g}(n_i - 1)}\right]$$

$$s_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^{g}\left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)^2}{(n_i - 1)}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{g}(n_i - 1)s_i^2}{\sum_{i=1}^{g}(n_i - 1)}$$

จากตารางที่ 2.2 ค่า $\bar{x}_1 = 100.34$ ค่า $\bar{x}_2 = 99.90$ ค่า $\bar{x}_3 = 99.55$

$$s_1^2 = \frac{(98.79 - 100.34)^2 + (103.50 - 100.34)^2 + \ldots + (100.86 - 100.34)^2}{(5-1)}$$

$$= 9.86$$

$$s_2^2 = \frac{(100.32-99.90)^2+(96.79-99.90)^2+\ldots+(95.94-99.90)^2}{(5-1)}$$

$$= 13.00$$

$$s_3^2 = \frac{(98.43-99.55)^2+(99.17-99.55)^2+\ldots(98.23-99.52)^2}{(5-1)}$$

$$= 1.96$$

$$s^2 = \frac{(5-1)\ 9.86+(5-1)\ 13.00+(5-1)\ 1.96}{(5-1)+(5-1)+(5-1)}$$

$$= 8.29$$

$$C = 1+\frac{1}{3(3-1)}\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4+4+4}\right)\right]$$

$$= 1.1111$$

$$Bar = \frac{1}{1.1111}\left[\sum_{i=1}^{g}(5-1)\left(\ln s^2-\ln s_i^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{1.1111[(4\ln 8.27-4\ln 9.86)+\ldots+(4\ln 8.27-4\ln 1.96)]}$$

$$= 2.91$$

จากค่าคำนวณ สถิติทดสอบบาร์ตเลต (Bar) นำไปเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการเปิดตารางที่ α เท่ากับ 0.01 และ df เท่ากับ 2 จะได้ค่า $\chi^2_{(0.01,2)}$ = 9.210 แสดงว่า ค่าที่คำนวณได้น้อยกว่าค่าในตาราง จึงสรุปได้ว่า กลุ่มตัวอย่างทั้ง 3 กลุ่มนั้น มาจากประชากรที่มีความแปรปรวนเท่ากัน

2.4.2 วิธีการคำนวณค่าสถิติทดสอบโอบรีน (O ' Brien test statistic : OB)

$$OB = \frac{\sum_{i=1}^{g} n_i(\bar{z}_i - \bar{z})^2 / (g-1)}{\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_i}(z_{ij} - \bar{z}_i)^2 / \sum_{i=1}^{g}(n_i - 1)}$$

ทำการแปลงค่าสังเกต x_{ij} ให้อยู่ในรูปของ

$$z_{ij} = \left[\frac{(w+0.5-2)\,n_i\,(x_{ij} - \bar{x}_i)^2 - ws_i^2(n_i - 1)}{(n_i - 1)(n_i - 2)}\right] \quad ; \quad i = 1,2,3$$

จากข้อมูลสามารถแปลงค่าให้อยู่ในรูปของค่า z_{ij} ได้ดังนี้

ค่าที่คำนวณ $\bar{x}_1 = 100.34$; $s_i^2 = 9.86$

$\bar{x}_2 = 99.90$; $s_2^2 = 13.00$

$\bar{x}_3 = 99.55$; $s_3^2 = 1.96$

ตารางที่ 2.3 แสดงข้อมูลที่ได้จากการแปลงค่า x_{ij} ให้อยู่ในรูปของ z_{ij}

j	z_{1j}	z_{2j}	z_{3j}
1	1.86	-1.91	1.51
2	12.92	11.96	-0.12
3	6.97	31.13	0.67
4	28.68	2.98	5.49
5	-1.25	20.72	2.22
ผลรวม	49.17	64.87	9.78

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างแต่ละชุด $\bar{z}_1 = 9.83$

$\bar{z}_2 = 12.97$

$\bar{z}_3 = 1.96$

ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างสุ่มรวม $\bar{z} = 8.26$

จากนั้นทำการคำนวณค่า $\left(z_{ij} - \bar{z}_i\right)^2$ ได้ดังตารางที่ 2.4

ตารางที่ 2.4 แสดงค่าที่ได้จากคำนวณ $\left(z_{ij} - \bar{z}_i\right)^2$

j	$\left(z_{1j} - \bar{z}_1\right)^2$	$\left(z_{2j} - \bar{z}_2\right)^2$	$\left(z_{3j} - \bar{z}_3\right)^2$
1	63.52	221.41	0.20
2	9.55	1.02	4.33
3	8.18	329.79	1.66
4	335.32	99.80	12.46
5	122.77	60.06	0.07
ผลรวม	559.34	721.08	18.72

ดังนั้น

$$\frac{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}\left(z_{ij} - \bar{z}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{3}\left(n_i - 1\right)} = \frac{(559.34 + 712.08 + 18.72)}{(4 + 4 + 4)}$$

$$= \frac{1290}{12}$$

$$= 107.5$$

ค่า

$$\frac{\sum_{i=1}^{3} n_i\left(\bar{z}_i - \bar{z}\right)^2}{(g-1)} = \frac{\left[5(9.83 - 8.26)^2\right] + \left[5(12.97 - 8.26)^2\right] + \left[5(1.96 - 8.26)^2\right]}{(3-1)}$$

$$= \frac{322.26}{2}$$

$$= 160.85$$

$$OB = \frac{160.85}{107.50}$$

$$= 1.50$$

จากค่าคำนวณสถิติทดสอบโอบรีน (OB) นำไปเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการเปิดตารางที่ α เท่ากับ 0.01 และ df เท่ากับ (2,12) นั้น จะได้ค่า $F_{0.01,(2,12)}$ = 6.930 แสดงว่า ค่าที่คำนวณได้ น้อยกว่าค่าในที่เปิดได้จากตาราง จึงสรุปได้ว่า กลุ่มตัวอย่างทั้ง 3 กลุ่ม สุ่มเลือกมาจากประชากรที่มีความแปรปรวนเท่ากัน

2.4.3 วิธีการคำนวณค่าสถิติทดสอบเลแจค (Lay-Jack test statistic : LJ)

$$Lay-Jack = \sum_{i=1}^{g}(n_i-1)\left\{\ln s_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^{g}(n_i-1)\ln s_i^2}{\sum_{i=1}^{g}(n_i-1)}\right\}^2 \Big/ \tau^2$$

$$\tau^2 = 2+\{1-(g/n)\}\gamma_J \ ,$$

$$\gamma_J = \sum_{i=1}^{g}\gamma_i/g$$

$$\gamma_i = g\gamma-(g-1)\gamma_{(-i)} \quad ; i = 1,2,3$$

$$\gamma_{(-i)} = \frac{\left(\sum_{l\neq i=1}^{g} n_i\right)\sum_{l\neq i=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij}-\bar{x}\right)^4}{\left\{\sum_{l\neq i=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij}-\bar{x}\right)^2\right\}^2} - 3$$

$$\gamma = \frac{n\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij}-\bar{x}_i\right)^4}{\left\{\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij}-\bar{x}_i\right)^2\right\}^2} - 3$$

จากตารางที่ 2.2 : $s_1^2 = 9.86$ $s_2^2 = 13.00$ $s_3^2 = 1.96$

$\ln s_1^2 = 2.29$ $\ln s_2^2 = 2.56$ $\ln s_3^2 = 0.67$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}\left(x_{ij}-\bar{x}_i\right)^4 = (98.79-100.34)^4+\ldots+(100.81-100.34)^4+(100.32-99.90)^4+\ldots+$$
$$(95.94-99.90)^4+(98.43-99.55)^4+\ldots+(98.23-99.55)^4$$
$$= 1467.43$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}\left(x_{ij}-\bar{x}_i\right)^2 = (98.79-100.34)^2+\ldots+(100.86-100.34)^2+(100.32-99.90)^2+\ldots+$$
$$(95.94-99.90)^2+(98.43-99.55)^2+\ldots+(78.23-99.55)^2$$
$$= 99.13$$

$$\left[\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}\left(x_{ij}-\bar{x}_i\right)^2\right]^2 = (99.13)^2 = 9826.76$$

$$\sum_{i=1}^{3} n_i = 5+5+5 = 15$$

$$(g/n) = 3/15 = 0.2$$

$$\gamma = \frac{15(1467.43)}{9826.76} - 3$$
$$= -0.76$$

ขั้นตอนการคำนวณค่า $\gamma_{(-i)}$:

$$\gamma_{(-1)} = \frac{(10)\left[(100.32-99.90)^4+\ldots+(95.94-99.90)^4+(98.43-99.55)^4+\ldots+(98.23-99.55)^4\right]}{\left[(100.32-99.90)^2+\ldots+(95.94-99.90)^2+(98.43-99.55)^2+\ldots+(98.23-99.55)^2\right]^2}$$

$$= 2.51-3$$

$$= -0.49$$

$$\gamma_{(-2)} = \frac{(10)\left[(98.79-100.34)^4+\ldots+(100.86-100.34)^4+(98.43-99.55)^4+\ldots+(98.23-99.55)^4\right]}{\left[(98.79-100.34)^2+\ldots+(100.86-100.34)^2+(98.43-99.55)^2+\ldots+(98.23-99.55)^2\right]^2}$$

$$= 2.663-3$$

$$= -0.34$$

$$\gamma_{(-3)} = \frac{(10)\left[(98.77-100.34)^4+\ldots+(100.86-100.34)^4+(100.32-99.90)^4+\ldots+(98.23-99.90)^4\right]}{\left[(98.77-100.34)^2+\ldots+(100.86-100.34)^2+(100.32-99.90)^2+\ldots+(98.23-99.90)^2\right]^2}$$

$$= 1.74-3$$

$$= -1.26$$

จากสูตร $\gamma_i \;=\; g\gamma-(g-1)\gamma_{(-i)}$

$$\gamma_1 = 3(-0.76)-(3-1)(-0.49) = -1.29$$

$$\gamma_2 = 3(-0.76)-(3-1)(-0.34) = -1.60$$

$$\gamma_3 = 3(-0.76)-(3-1)(-1.26) = -0.88$$

จากสถิติทดสอบ Lay-Jack $= \sum_{i=1}^{3}(n_i - 1)\left\{\ln s_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^{3}(n_i - 1)\ln s_i^2}{\sum_{i=1}^{3}(n_i - 1)}\right\}^2 \Big/ \tau^2$

$$\frac{\sum_{i=1}^{3}(n_i - 1)\ln s_i^2}{\sum_{i=1}^{3}(n_i - 1)} = \frac{(5-1)(2.29)+(5-1)(2.56)+(5-1)(0.67)}{(5-1)(5-1)(5-1)}$$

$$= 1.84$$

$$\sum_{i=1}^{3}(n_i - 1)\left\{\ln s_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^{3}(n_i - 1)\ln s_i^2}{\sum_{i=1}^{3}(n_i - 1)}\right\}^2 = (5-1)(2.29-1.84)^2 + (5-1)(2.56-1.84)^2 + (5-1)(0.67-1.84)^2$$

$$= 8.32$$

$$= \frac{8.32}{1.29}$$

Lay-Jack $= 6.45$

จากค่าสถิติทดสอบเลแจค (Lay-Jack) ที่คำนวณได้ นำไปเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการเปิดตารางที่ α เท่ากับ 0.01 และ df เท่ากับ 2 นั้น จะได้ค่า $\chi^2_{0.01,2} = 6.930$ แสดงว่า ค่าที่คำนวณได้น้อยกว่าค่าที่ได้จากการเปิดตาราง สรุปได้ว่า กลุ่มตัวอย่างทั้ง 3 สุ่มมาจากประชากรที่มีความแปรปรวนเท่ากัน

เนื่องจากงานวิจัยครั้งนี้ สนใจที่จะทำการศึกษาความแกร่งของสถิติทดสอบ 3 วิธี ดังกล่าวข้างต้นเมื่อข้อมูลตัวอย่างสุ่มมาจากประชากรเดียวกัน และประชากรที่มีการแจกแจงแตกต่างกัน โดยการแจกแจงของประชากรที่ทำการศึกษาคือ ประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ การแจกแจงแบบไวบูลล์ การแจกแจงแบบที ซึ่งรายละเอียดและคุณสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับการแจกแจงดังกล่าว จะเสนอดังนี้

2.5 การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)

การแจกแจงแบบปกติเป็นการแจกแจงแบบต่อเนื่องที่มีความสำคัญมากในการอนุมานเชิงสถิติที่สำคัญคือ การประมาณค่าพารามิเตอร์และการทดสอบสมมติฐานทางสถิติ

การแจกแจงแบบปกติได้รับการค้นพบโดย อับราฮัม เดอมูวร์ (Abrahom De Morive : 1667-1754) ซึ่งเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ต่อมาปีแอร์ ลาปาส (Lapace : 1747-1827) นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษได้ประยุกต์ใช้ในทางสังคมศาสตร์และวิทยาศาสตร์อย่างแพร่หลาย และคาร์ลเกาส์ (Carl Gauss : 1777-1855) นักคณิตศาตร์ชาวเยอรมัน ได้ขยายงานต่อโดยนำทฤษฎีนี้ไปศึกษาหาความคลาดเคลื่อน (Error) โดยการวัดซ้ำ ๆ ในกลุ่มที่มีขนาดคงเดิม และ พบว่าการแจกแจงที่ได้จะมีลักษณะเป็นโค้งปกติ ดังนั้น การแจกแจงแบบปกติจึงเรียกอีกอย่างหนึ่งว่าการแจกแจงของเกาส์ (Gaussian Distribution) (นิภา ศรีไพโรจน์ ; 2533 : 11-14)

ฟังก์ชันความหนาแน่น (pdf) ของการแจกแจงแบบปกติคือ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad ; \quad -\infty < x < \infty$$

$f(x)$ = แทนความสูงของโค้งที่วัดจากแกนนอน ณ. จุดใดๆทุกจุด

σ^2 = ความแปรปรวนของประชากร , $\sigma^2 > 0$
เป็นพารามิเตอร์ที่แสดงถึงขนาดของการแจกแจง (Scale Parameter)

μ = ค่าเฉลี่ยของประชากร , $-\infty < \mu < \infty$
เป็นพารามิเตอร์ที่แสดงตำแหน่งของการแจกแจง (Location Parameter)

π = 3.1416

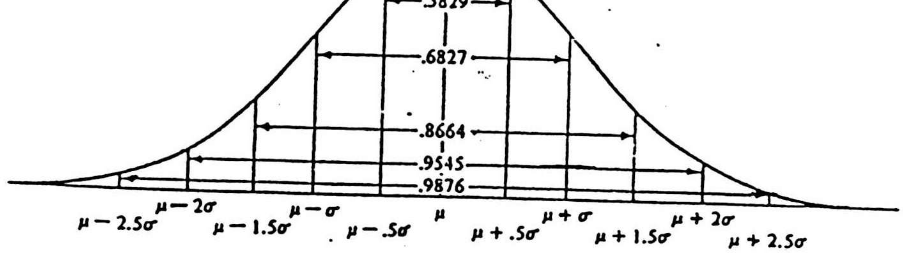
e = 2.7183

x = ค่าของข้อมูลจากกลุ่มตัวอย่าง

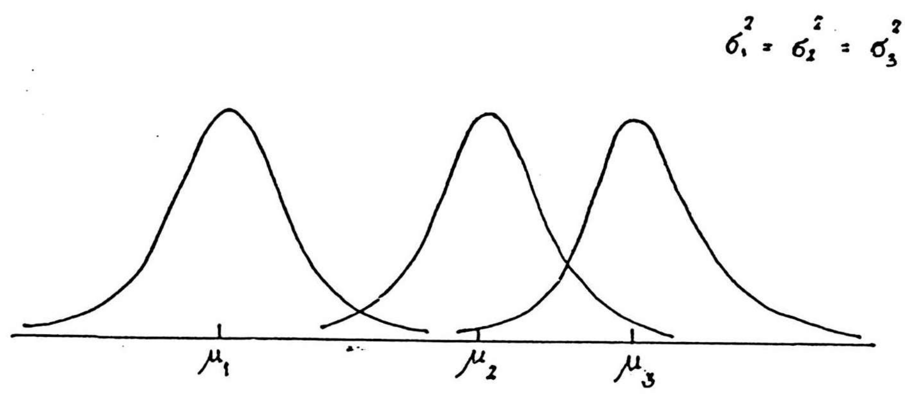
โดยที่ค่า μ , σ เป็นพารามิเตอร์ที่บอกถึงลักษณะของประชากรว่าประชากรนั้นมีตำแหน่งอยู่ที่ใด และมีการกระจายมากน้อยเพียงใด

2.5.1 <u>คุณสมบัติและลักษณะของการแจกแจงแบบปกติ</u>

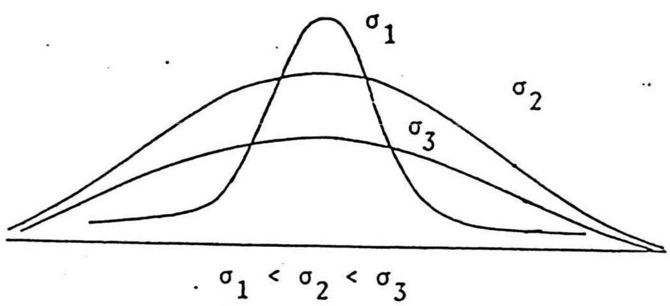
1. ลักษณะของโค้งเป็นรูประฆังคว่ำ (Bell Shape)
2. เส้นแบ่งโค้งอยู่ที่จุดที่เป็นค่าเฉลี่ยของข้อมูล และเส้นนี้ทำให้เส้นโค้งที่อยู่ทั้งสองข้างมีลักษณะสมมาตร (Symmetry)
3. ค่าเฉลี่ย ค่ามัธยฐาน และฐานนิยมมีค่าเท่ากัน เท่ากับ μ
4. มีค่าความโด่ง (Kurtosis) เท่ากับ 3 ซึ่งเรียกว่า Mesokurtic และจุดเปลี่ยนโค้งทั้งสองข้างอยู่ ณ ตรง 1 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
5. ค่าความเบ้ (Skewness) เท่ากับ 0
6. ปลายโค้งจะเข้าใกล้แกน x เมื่อ x มีค่าห่างจาก μ ออกไปแต่จะไม่ตัดกับแกนทั้งสองข้าง
7. ถ้าลากเส้นตั้งฉากจากแกน x ไปยังเส้นโค้ง โดยที่เส้นดังกล่าวห่างจากค่าเฉลี่ยด้านซ้ายและด้านขวาของระยะหนึ่งเท่า สองเท่าและสามเท่าของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน พื้นที่ที่ปิดกั้นด้วยเส้นตั้งฉากกับเส้นโค้งจะเท่ากับ 68.27% , 95.45% และ 99.73% ของพื้นที่ทั้งหมดตามลำดับ
8. ค่าเฉลี่ย (μ) และความแปรปรวน (σ^2) เป็นพารามิเตอร์ของการแจกแจงแบบปกติโดยที่ ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนจะเป็นตัวกำหนดตำแหน่งที่ตั้งของเส้นโค้งและลักษณะของเส้นโค้งว่าจะแบนหรือโด่งอย่างไร



รูปที่ 2.1 แสดงพื้นที่โค้งของการแจกแจงแบบปกติ



รูปที่ 2.2 แสดงการแจกแจงแบบปกติ 3 รูปซึ่งมีค่าเฉลี่ยต่าง กันแต่มีค่าความแปรปรวนเท่ากัน



รูปที่ 2.3 แสดงการแจกแจงแบบปกติ 3 รูป ซึ่งมีค่าความแปรปรวนต่างกันแต่มีคาเฉลี่ยเท่ากัน

2.6 การแจกแจงแบบไวบูลล์ (Weibull Distribution)

นักฟิสิกส์ชาวสวีเดนชื่อ Waloddi Weibull เป็นผู้แนะนำการแจกแจงนี้เมื่อ ค.ศ 1939 ซึ่งเป็นการแจกแจงที่เกิดขึ้นเนื่องจากรูปแบบความเป็นจริงโดยทั่วไป สำหรับอายุการใช้งานของเครื่องจักรกลต่าง ๆ โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นเป็นดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta^{-\alpha}.x^{\alpha-1}.e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}} & ; \; x>0,\ \alpha>0,\ \beta>0 \\ 0 & ; \; else \end{cases}$$

โดยที่

x เป็นค่าข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบไวบูลล์

α เป็นพารามิเตอร์ที่แสดงรูปร่างของการแจกแจง (Shape Parameter)

β เป็นพารามิเตอร์ที่แสดงถึงขนาดของการแจกแจง (Scale Parameter)

2.6.1 <u>คุณสมบัติของการแจกแจงแบบไวบูลล์</u>

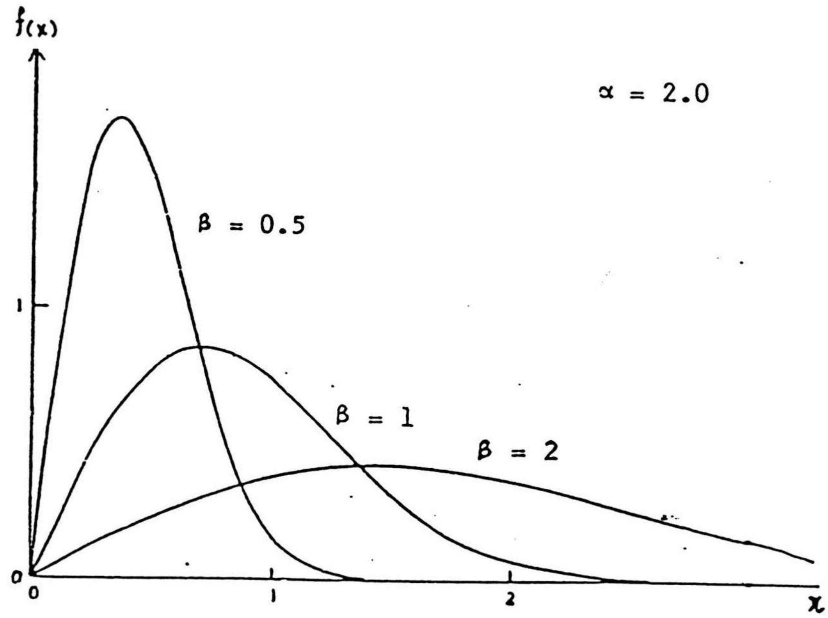
1. โค้งมีลักษณะเปลี่ยนแปลงไปตามพารามิเตอร์ α เมื่อ $\alpha = 2$ โค้งจะมีลักษณะเบ้ขวา ซึ่งจะมีลักษณะการแจกแจงที่คล้ายกับการแจกแจงแบบไคสแควร์
2. ค่าความแปรปรวนและค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มไวบูลล์ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ α และ β โดยที่

$$\text{ค่าเฉลี่ย} = \frac{\beta}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

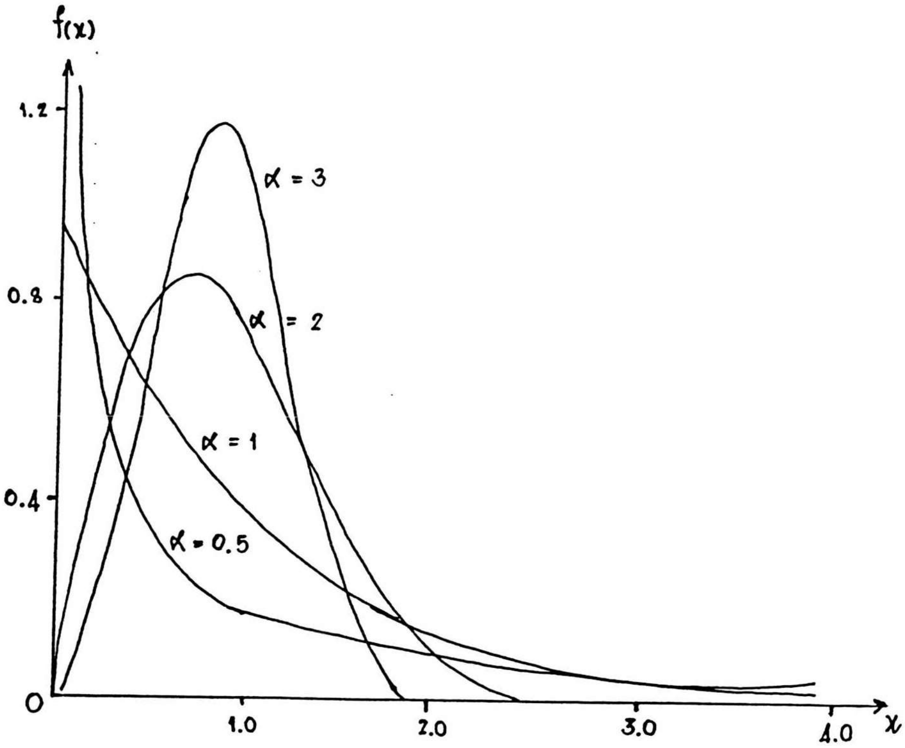
$$\text{ค่าความแปรปรวน} = \frac{\beta^2}{\alpha}\left\{2\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha}\left[\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2\right\}$$

3. การแจกแจงไวบูลล์ที่มีค่า $\alpha = 1$ และ β เป็นค่าใดๆที่มากกว่า 0 นั้นจะเป็นการแจกแจงแบบเอกซโปเนนเชียล (Exponential Distribution) ที่มีพารามิเตอร์เป็น β นั่นคือ

$$Weibull(1, \beta) \equiv \exp(\beta)$$



รูปที่ 2.4 การแจกแจงแบบไวบูลล์ เมื่อ $\alpha = 2.0$ และ $\beta = 0.5, 1, 2$



รูปที่ 2.5 การแจกแจงแบบไวบูลล์ เมื่อ $\alpha = 0.5,1,2,3$ และ $\beta = ,1,$

2.7 <u>การแจกแจงแบบที</u> (T Distribution)

การแจกแจงแบบทีจะมีลักษณะใกล้เคียงกับการแจกแจงแบบปกติ แต่มีลักษณะหางยาวอย่างเห็นได้ชัดเจนมากกว่าแบบปกติ โดยข้อมูลที่มีลักษณะดังกล่าวมักจะมีค่าที่น้อยและมากจำนวนเท่า ๆ กัน ซึ่งมีความแตกต่างจากข้อมูลส่วนใหญ่กอสเซทท์ (W.S. Gossette) และอาร์เอ ฟิชเชอร์ (R..A. Fisher) เป็นผู้ที่สร้างและปรับปรุงการแจกแจงชนิดนี้ขึ้นเมื่อปี 1908

T-Distribution หรือ Student's t-Distribution เป็นชื่อเรียกเพื่อเป็นเกียรติแก่กอสเซทท์ ซึ่งได้พิมพ์ผลงานเรื่อง "Small Sample" โดยใช้นามปากกาว่า "Student"

การแจกแจงแบบที เกี่ยวข้องกับการแจกแจงแบบปกติและไคสแควร์ ซึ่งสามารถเขียนในสูตรรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$t_{(n)} = \frac{z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(n)}}{n}}}$$

เมื่อ n คือ องศาความเป็นอิสระ (Degrees of freedom : df)

Z คือ การแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1 เขียนแทนด้วย $Z \sim N(0,1)$

$\chi^2_{(n)}$ คือ การแจกแจงแบบไคสแควร์ที่มีองศาความเป็นอิสระเท่ากับ n

ฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงแบบที คือ

$$f(x) = \frac{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{-(n+1)}{2}}}{\sqrt{n}\,B\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)} \quad ; -\infty < x < \infty \ ; \ n = 1,2,\ldots$$

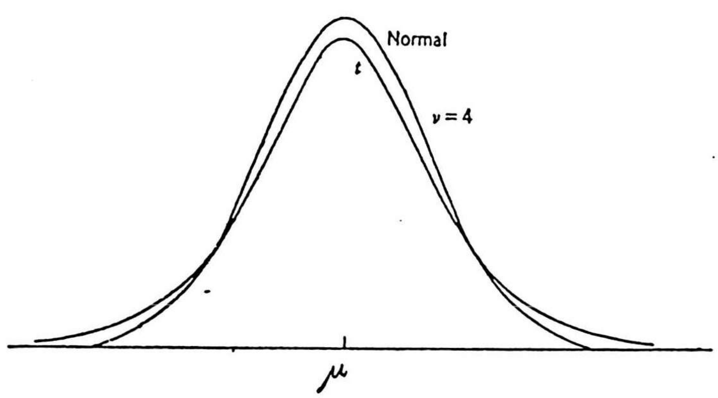
โดยที่ $B(a,b)$ เป็นเบต้าฟังก์ชัน ซึ่ง $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

และ n คือ องศาความเป็นอิสระ (degrees of fredom)

2.7.1 <u>คุณสมบัติของการแจกแจงแบบที</u> มีดังนี้

1. โค้งมีลักษณะเป็นสมมาตรและหางยาว ค่าเฉลี่ย , มัธยฐานและฐานนิยมของการแจกแจงแบบที อยู่ที่จุดเดียวกันที่มีค่าเท่ากับ 0
2. ความแปรปรวนเท่ากับ $\frac{n}{(n-2)}$ (เมื่อ n เป็นองศาความเป็นอิสระ > 2) ซึ่งจะมีค่าเข้าใกล้ 1 เมื่อ n มีค่ามากขึ้น
3. ถ้า n มีค่ามาก ๆ การกระจายจะมีลักษณะใกล้เคียงโค้งปกติ

ลักษณะการแจกแจงของที จะเปลี่ยนไปตามองศาความเป็นอิสระ ซึ่งในที่นี้คือ n หรือ กล่าวได้ว่า การกระจายหรือการแจกแจงแบบที นั้นขึ้นอยู่กับขนาดกลุ่มตัวอย่าง ดังรูป



<u>รูปที่ 2.6</u> แสดงการแจกแจงแบบที ที่ระดับองศาความเป็นอิสระเท่ากับ 4

ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

สำหรับผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องในการศึกษาเกี่ยวกับสถิติทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนนั้น โดยส่วนใหญ่ใช้วิธีมอนติคาร์โล (Monte Calo Method) และงานวิจัยที่จะเสนอต่อไปนี้เป็นการศึกษาเพื่อเปรียบเทียบตัวสถิติทดสอบต่างๆ โดยอาศัยค่าอำนาจการทดสอบ และความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 เป็นเกณฑ์ในการตัดสินใจ มีรายละเอียดดังนี้

Cadwell (1953 : 336-346) ได้ใช้สถิติทดสอบการเท่ากันของความแปรปรวนโดยพัฒนามาจากตัวสถิติทดสอบของฮาร์ตเลย์ (Hartley's test statistic หรือ F_{max} test statistic) ซึ่งคำนวณค่าสถิติทดสอบโดยใช้อัตราส่วนระหว่างความแปรปรวนที่น้อยที่สุด(minimum variance) สำหรับเปรียบเทียบตั้งแต่สองประชากรขึ้นไปที่มีการแจกแจงแบบปกติและใช้กลุ่มตัวอย่างขนาดเท่ากัน สำหรับสถิติทดสอบแคดเวล (Cadwell test statistic) นั้น คำนวณโดยใช้อัตราส่วนระหว่างพิสัยที่มากที่สุด (maximum range) และพิสัยที่น้อยที่สุด (minimum range) ซึ่งเป็นสถิติทดสอบที่ใช้ทดสอบได้รวดเร็ว เพราะไม่ยุ่งยากในการคำนวณ

Gartside (1972 : 342-346) ได้ทำการศึกษาตัวสถิติ เพื่อทำการเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบตัวสถิติ 6 ประเภท คือ สถิติทดสอบบาร์ตเลต (Bartlett test statistic) สถิติทดสอบดัดแปลง (The modified Bartlett test statistic) สถิติทดสอบคอครัน (Cochran test statistic) สถิติทดสอบฮาร์ตเลย์ (Hartley test statistic) สถิติทดสอบแคดเวล (Cadwell test statistic) สถิติทดสอบลอคอโนวา (Log-Anova test statistic) พบว่า ค่าสังเกตที่มีการแจกแจงแบบปกติสถิติทดสอบบาร์ตเลตมีอำนาจการทดสอบสูง แต่สำหรับค่าสังเกตที่ไม่ได้มีการแจกแจงแบบปกติสถิติทดสอบลอคอนวามีอำนาจการทดสอบในระดับต่ำ นอกจากนี้ Gartside ได้เสนอว่าหากสงสัยว่ามีเพียงกลุ่มเดียวเท่านั้นที่มีความแปรปรวนสูงกว่ากลุ่มอื่นๆ ตัวสถิติที่เหมาะสม คือสถิติทดสอบคอครันแต่สำหรับสถิติทดสอบที่ให้ผลลัพธ์รวดเร็วสำหรับการคำนวณควรใช้สถิติทดสอบฮาร์ตเลย์ หรือสถิติทดสอบแคดเวล

Layard (1973 : 195-198) ศึกษาเปรียบเทียบตัวสถิติทดสอบที่ใช้ทดสอบทั้งหมด 4 ประเภทคือ สถิติทดสอบบาร์ตเลต (Bartlett test statistic) สถิติทดสอบไคสแควร์ที่ถูกเสนอขึ้นโดย Layard (Layard ' s Chi-Square test statistic) สถิติทดสอบบอกซ์ (Box test statistic) และสถิติทดสอบแจคไนฟ (Jackkinfe test statistic) โดยกำหนดขนาดตัวอย่าง 10 และ 25 ภายใต้ลักษณะการแจกแจงของประชากร 3 รูปแบบที่ทำการศึกษา คือ การแจกแบบแจงยูนิฟอร์ม การแจกแจงแบบดับเบิ้ลเอกซโพเนนเชียล และ การแจกแจงแบบปกติ เมื่ออัตราส่วนความแปรปรวนกำหนดเป็น 1:1:1:1 , 1:1:2:2 , 1:2:3:4 , 1:1:4:4 พบว่า สถิติทดสอบแจคไนฟและ

สถิติไคแควร์มีความแกร่งสำหรับตัวอย่างที่มีขนาดเล็ก และมีอำนาจการทดสอบมากกว่าสถิติทดสอบบอกซ์ สำหรับในกรณีที่ประชากรมีการแจกแจงแบบปกติสถิติทดสอบบาร์ตเลตมีอำนาจการทดสอบสูงสุด แต่สถิติทดสอบบอกซ์เป็นสถิติทดสอบที่มีความแกร่ง Layard กล่าวว่า หากประชากรมีการแจกแจงแบบไม่ปกติ สถิติทดสอบทั้งหมดมีอำนาจการทดสอบไม่แตกต่างกันมาก และได้เสนอแนะว่า หากผู้วิจัยต้องการสถิติทดสอบที่มีความแกร่งและอำนาจการทดสอบอยู่ในระดับที่สามารถยอมรับได้ ควรเลือกสถิติทดสอบเลยาร์ดไคสแควร์ หรือ สถิติทดสอบแจคไนฟ์ เพราะถึงแม้ว่าสถิติทดสอบบอกซ์จะมีความเชื่อถือได้เมื่อมีการฝ่าฝืนข้อสมมติเบื้องต้นแต่ก็มีอำนาจการทดสอบต่ำกว่าสถิติทดสอบทั้ง 2

Brown and Forsythe (1974 : 364-367) ทำการศึกษาเปรียบเทียบสถิติทดสอบ 3 วิธี คือ สถิติทดทสอบเลเวเน (Levene test statistic) สถิติทดสอบแจคไนฟ์ถูกเสนอโดย Layard (Layard 's Jackknife test statistic) และ สถิติทดสอบไคสแควร์ที่เสนอโดย Layard (Layard 's Chi-square test statistic) ได้ผลสรุปว่า สถิติทดสอบเลเวเนมีความแกร่งสำหรับการแจกแจงที่ไม่ใช่การแจกแจงแบบปกติ สถิติทดสอบแจคไนฟ์และสถิติทดสอบไคสแควร์ มีอำนาจการทดสอบน้อยเมื่อค่าสังเกตไม่ใช่การแจกแจงแบบปกติ

Seber (1977 :147-149) กล่าวว่า ตัวสถิติทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากรที่จำนวนกลุ่มของประชากรมากกว่า 2 กลุ่ม ภายใต้ข้อสมมติเบื้องต้นว่า การแจกแจงของประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ (Normallity assumption) ผู้วิจัยมักเลือกใช้สถิติทดสอบบาร์ตเลต (Bartlett test statistic) มากกว่าสถิติทดสอบฮาร์ตเลย์ (Hartley test statistic) หรือ สถิติทดสอบคอครัน (Cochran test statistic) เนื่องจากภายใต้สมมติฐานดังกล่าว สถิติทดสอบบาร์ตเลตมีอำนาจการทดสอบสูงกว่าสถิติทดสอบทั้งสอง

Conover , Johnson and Johnson (1984 : 351-361) ศึกษาเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของถิติทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวน ซึ่งเป็นสถิติทดสอบที่ใช้พารามิเตอร์ (Parametric test statistic) และ สถิติทดสอบแบบไร้พารามิเตอร์ (Nonparametric test statistic) ทั้งหมด 56 ประเภท ได้ผลสรุปคือ สถิติทดสอบที่มีความแกร่ง คือ สถิติทดสอบของบาร์ตเลต (Bartlett test statistic) สถิติทดสอบเลเวเน (Levene test statistic) ที่ได้นำส่วนเบี่ยงเบนที่ได้จากค่ามัธยฐานของตัวอย่างมาใช้แทนค่าเฉลี่ยในการคำนวณ สถิติทดสอบที่ได้รับการปรับปรุงจากสถิติทดสอบของเลเวเน (Modified of the Levene test statistic) เป็นวิธีที่แทนค่าสังเกตแต่ละค่าด้วยค่าสัมบูรณ์ของส่วนเบี่ยงเบน และพบอีกว่า สถิติทดสอบส่วนมากจะมีความไว ต่อรูปแบบการแจกแจงของประชากร ยกเว้นสถิติทดสอบของ Brown-Forsythy ที่มีความสามารถในการควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ แม้ว่าการแจกแจงของประชากรจะมีการเปลี่ยนแปลงก็ตาม

Olejnik (1987) ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากร โดยเปรียบเทียบสถิติทดสอบ 4 ประเภท คือ สถิติทดสอบซีเกลทูกี้ (Siegel-Tukey test statistic) สถิติทดสอบบราวน์ฟอร์ซีส (Brown-Forsythe test statistic) สถิติทดสอบโอบรีน (O' Brein test statistic) และ สถิติทดสอบคลอทซ์ (Klotz test statistic) โดยการเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และ ค่าอำนาจการทดสอบได้ผลสรุปว่า สถิติทดสอบโอบรีนสามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ได้ เมื่อการแจกแจงของประชากรเป็นแบบปกติและการแจกแจงที่ไม่ใช่แบบปกติ