บทที่ ๒

ทฤษฎี

๒.๑ การ Optimization

การ Optimization ที่กล่าวในที่นี้ หมายความถึงการทำฟังชั่นที่กำลังพิจารณาให้มีค่าต่ำสุด (Minimization) ภายใต้เงื่อนไขของสมการบังคับ (constraints) ฟังชั่นที่กำลังพิจารณาเราเรียกว่า "Objective Function"

Objective Function : $\min f(x)$ (2.1)

S.T $P_i(x) = a_i \qquad i = 1,2,\ldots,m_1 < n$ (2.2)

$q_j(x) \leq b_j \qquad j = 1,2,\ldots,m_2$ (2.3)

$C_k \leq x_k \leq d_k \qquad k = 1,2,\ldots,n$ (2.4)

ซึ่ง $f(x)$ คือ ฟังชั่นที่ต้องการทำให้มีค่าต่ำสุด (minimized) ซึ่งค่า a_i, b_j, C_k และ d_k เป็นค่าคงที่และ $P_i(x)$, $q_j(x)$, และ $f(x)$ เป็นฟังชั่นเชิงเส้นหรือฟังชั่นไม่เชิงเส้นก็ได้

การ Optimization ระบบ chiller และ Boiler ประกอบด้วย objective functions ซึ่งเป็นฟังชั่นไม่เชิงเส้น (nonlinear) และฟังชั่นเป็นแบบ separable ซึ่งหมายถึง Objective function $f(x)$ เขียนในรูปดังนี้

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(x_i)$$

วิธีการหาค่าผลลัพธ์ของระบบร่วม Chiller และ Boiler optimization อาจหาได้โดยวิธีการดังนี้ Lagrange Multiplier, Patterned Search, Simplex Method

2.2 Langrange Multiplier

วิธีการ Optimization ที่ใช้แก้ปัญหาระบบร่วมนั้นพิจารณาจากวิธีการของ Lagrange multiplier Technique ซึ่งหาจุดที่ทำให้สมการ Objective function มีค่าต่ำสุด และต้องสอดคล้องกับสมการ constraints

การสร้าง Lagrange multiplier augment function กระทำดังนี้ สมมุติว่ามีสมการที่กำลังพิจารณาดังนี้

$$\text{Min } f(x) \tag{2.5}$$

$$\text{S.T} \quad g_i(x) = 0 \qquad i = 1,2,3\ldots m < n \tag{2.6}$$

ซึ่ง f(x) เป็นสมการที่จะ optimized และ g_i (x) เป็นสมการ constraints โดยที่ x เป็นตัวแปรอิสระ ดังนั้นรูปแบบของ Lagrange Multiplier ซึ่งเรียกว่า "Lagrangian" คือ

$$L(\underline{x}, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \tag{2.7}$$

Lagrange Multipliers, λ_i เป็นตัวแปรไม่ทราบค่า ซึ่งจะได้ m+n สมการ และตัวแปรไม่ทราบค่า m+n ตัว การหาผลลัพธ์ของสมการ ทำได้โดยการหาอนุพันธ์บางส่วน เทียบกับตัวแปรไม่ทราบค่าแต่ละตัว แล้วให้สมการมีค่าเท่ากับศูนย์ อนุพันธ์บางส่วนของสมการ (2.7) คือ

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(x) \qquad i = 1,2,\ldots,m \tag{2.9}$$

ซึ่ง x_j เป็นค่าย่อยของ $\underline{x}$

ค่า optimal ของ Langrangian เป็นค่าเดียวกันกับค่า optimal ของสมการเริ่มแรก (พิสูจน์จาก Nicholson [11])

โดยการใช้วิธีดังกล่าวกับ Boiler optimization problem จะได้ (ดูสมการ 4.8)

$$\min \hat{k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i h_i x_i}{q_i(a_i+b_i x_i+c_i x_i^2+\ldots)} \tag{2.10}$$

$$S.T. \sum_{i=1}^{n} x_i = X$$

$$M_i \geq x_i \geq 0$$

ทำให้อยู่ในรูปของ Lagrangian ได้ดังนี้

$$L(\underline{x},\lambda) = \hat{k} + \lambda \left| X - \sum_{i=1}^{n} x_i \right| = 0 \tag{2.11}$$

โดยการ Simplification ประการแรกให้ฟังชั่นของ efficiency อยู่ในรูป quadratic และตัดเทอมที่มีกำลังสูงทิ้ง ประการที่สองให้รวมเทอมบางเทอมโดยถือว่า Boiler เป็นแบบเดียวกัน และน้ำมันเชื้อเพลิงเป็นชนิดเดียวกัน จะได้

$$\frac{R_i h_i}{q_i} = \frac{Rh}{q} = \overset{*}{R} \tag{2.12}$$

ดังนั้นสมการ (2.10) เขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\min \hat{k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overset{*}{R} x_i}{a_i+b_i x_i+c_i x_i^2} \tag{2.13}$$

$$S.T. \sum_{i=1}^{n} x_i = X$$

$$M_i \geq x_i \geq 0$$

ในการแก้สมการ Langrangian เพื่อหาจุด optimal $\overset{*}{\underline{x}}$. ให้หาอนุพันธ์บางส่วน (partial derivative) โดยเทียบกับตัวแปรแต่ละตัวดังนี้

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\overset{*}{R}(a_i - c_i x_i^2)}{(a_i+b_i x_i+c_i x_i^2)^2} - \lambda = 0 \quad i = 1,\ldots,4 \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = X - \sum_{i=1}^{4} x_i = 0 \qquad (2.15)$$

เขียนสมการใหม่โดยให้ P_i และ Q เป็นฟังก์ชั่นของสมการ (2.14) และ (2.15)

สมการใหม่คือ

$$P_i = \overset{*}{R}(a_i - c_i x_i^2) - \lambda(a_i + b_i x_i + c_i x_i^2)^2 = 0 \qquad (2.16)$$

$$Q = X - \sum_{i=1}^{4} x_i = 0 \qquad (2.17)$$

จะได้สมการ (P_i, Q) 5 สมการ และตัวไม่ทราบค่า (x_i, λ) 5 ตัว ซึ่งเป็นเซ็ทของสมการไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear equations) การหาค่าตอบที่เหมาะสมสำหรับสมการไม่เป็นเชิงเส้น[15] โดยวิธีการของ "นิวตัน" โดยการ iterative หรือ "recursive"

ให้ $X^{(0)}$ เป็นค่าที่เดาครั้งแรก ในการหาค่าของสมการไม่เป็นเชิงเส้น ใน $\underline{X}$ ให้ $\underline{F}(X^{(0)})$ เป็นค่าของสมการที่เดาครั้งแรก $\underline{J}(\underline{X}^{(0)})$ เป็นค่า Jacobian ที่ $\underline{X}^{(0)}$ (superscript แสดง iteration) ดังนั้น initial iteration คือ

$$\underline{J}(\underline{X}^{(0)})\ \underline{Y}^{(0)} = -\underline{F}(\underline{X}^{(0)}) \qquad (2.18)$$

ซึ่งหาค่า $\underline{Y}^{(0)}$ ได้ iterative ครั้งต่อไปใช้

$$\underline{X}^{(1)} = \underline{X}^{(0)} + \underline{Y}^{(0)} \qquad (2.19)$$

ดังนั้นเขียนในรูปทั่ว ๆ ไปได้

$$\underline{J}(\underline{X}^{(k)})\ \underline{Y}^{(k)} = -\underline{F}(\underline{X}^{(k)}) \qquad (2.20)$$

ซึ่งหาค่า $\underline{Y}^{(k)}$ ได้

และ $$\underline{X}^{(k+1)} = \underline{X}^{(k)} + \underline{Y}^{(k)} \qquad (2.21)$$

จะเกิด Convergence เมื่อผลลัพธ์

$$\left| \underline{X}^{(k+1)} - \underline{X}^{(k)} \right| < \varepsilon \tag{2.22}$$

For the Boiler optimization problem

$$\underline{F}(\underline{X}^{(k)}) = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ Q \end{bmatrix} \qquad \underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

เมื่อค่า P_i . Q หาได้ที่ $X^{(k)}$

$$\underline{J}(\underline{x}^{(k)}) = \frac{\partial (P_i, Q)}{\partial (x_i, \lambda)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} & \frac{\partial P_1}{\partial x_2} & \frac{\partial P_1}{\partial x_3} & \frac{\partial P_1}{\partial x_4} & \frac{\partial P_1}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial P_2}{\partial x_1} & \frac{\partial P_2}{\partial x_2} & \frac{\partial P_2}{\partial x_3} & \frac{\partial P_2}{\partial x_4} & \frac{\partial P_2}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial P_3}{\partial x_1} & \frac{\partial P_3}{\partial x_2} & \frac{\partial P_3}{\partial x_3} & \frac{\partial P_3}{\partial x_4} & \frac{\partial P_3}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial P_4}{\partial x_1} & \frac{\partial P_4}{\partial x_2} & \frac{\partial P_4}{\partial x_3} & \frac{\partial P_4}{\partial x_4} & \frac{\partial P_4}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial Q}{\partial x_1} & \frac{\partial Q}{\partial x_2} & \frac{\partial Q}{\partial x_3} & \frac{\partial Q}{\partial x_4} & \frac{\partial Q}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

การหาค่าอนุพันธ์บางส่วน $\qquad \frac{\partial P_i}{\partial x_j} = 0 \quad i \neq j \qquad (2.24)$

$$L_i = \frac{\partial P_i}{\partial x_i} = -2\overset{*}{R}\ C_i\ X_i - 2\lambda(a_i+b_ix_i+c_ix_i^2)(b_i+2C_iX_i) \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i} = -1 \tag{2.26}$$

$$M_i = \frac{\partial P_i}{\partial \lambda} = -(a_i+b_ix_i+c_ix_i^2)^2 \tag{2.27}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda} = 0 \tag{2.28}$$

ดังนั้น

$$\underline{J}(\underline{X}^{(k)}) = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 & M_1 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 & M_2 \\ 0 & 0 & L_3 & 0 & M_3 \\ 0 & 0 & 0 & L_4 & M_4 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.29)$$

$\underline{J}(\underline{X}^{(k)})\ \underline{Y}^{(k)} \quad = \quad -\underline{F}(\underline{X}^{(k)})$ จะได้

$$\begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 & M_1 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 & M_2 \\ 0 & 0 & L_3 & 0 & M_3 \\ 0 & 0 & 0 & L_4 & M_4 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_1 \\ -P_2 \\ -P_3 \\ -P_4 \\ -Q \end{bmatrix} \qquad (2.30)$$

1. หาร row i ด้วย L_i $\quad i = 1,\ldots,4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & M_1/L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & M_2/L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & M_3/L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & M_4/L_4 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_1/L_1 \\ -P_2/L_2 \\ -P_3/L_3 \\ -P_4/P_4 \\ -Q \end{bmatrix} \qquad (2.31)$$

๒. บวก row i เข้ากับ row 5, i = 1,...,4

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & M_1/L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & M_2/L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & M_3/L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & M_4/L_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_1/L_1 \\ -P_2/L_2 \\ -P_3/L_3 \\ -P_4/L_4 \\ L^* \end{bmatrix} \qquad (2.32)$$

ซึ่ง
$$K^* = M_1/L_1 + M_2/L_2 + M_3/L_3 + M_4/L_4 \qquad (2.33)$$

$$L^* = -Q - P_1/L_1 - P_2/L_2 - P_3/L_3 - P_4/L_4 \qquad (2.34)$$

๓. หาร row 5 ด้วย K^* คูณด้วย $-M_i/L_i$ และบวกเข้ากับ row i, i = 1,...,4

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_1/L_1-(L^*/K^*)(M_1/L_1) \\ -P_2/L_2-(L^*/K^*)(M_2/L_2) \\ -P_3/L_3-(L^*/K^*)(M_3/M_3) \\ -P_4/L_4-(L^*/K^*)(M_4/L_4) \\ L^* \end{bmatrix} \qquad (2.35)$$

๔. ผลลัพธ์ จะได้

$$Y_i = -P_i/L_i - (L^*/K^*)(M_i/L_i) \quad i = 1,\ldots,4 \qquad (2.36)$$

$$Y_5 = L^*/K^* \qquad (2.37)$$

ดังนั้นเราจะได้ iterative system ซึ่ง $\underline{X}^{(0)}$ เป็นค่าที่เดาครั้งแรก

$$\underline{X}^{(1)} = \underline{X}^{(0)} + \underline{Y}^{(0)}$$

ค่า $\underline{Y}^{(0)}$, Y_i หาได้จากสมการ (๒.๓๖) และ (๒.๓๗)

2.3 Least Square Fitting Approximation

วิธี Least Square เป็นการหาสมการที่เหมาะสมกับจำนวนข้อมูลที่มีอยู่ สำหรับข้อมูลที่มี m points ในรูปตัวแปรอิสระและตัวแปรตาม

$$(X_i\ ,\ Y_i) \qquad i = 0, 1, \ldots, m \tag{2.38}$$

รูป Polynomial ที่จะเลือกใช้ ควรมีค่าผลต่างระหว่างค่าของ Polynomial function และค่าตัวแปรตามน้อยที่สุด ในแต่ละค่าของตัวแปรอิสระที่เปลี่ยนไป ดังนั้นเราแทนรูป Polynomial โดยประมาณ P(X) ดังนี้

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \qquad n < m \tag{2.39}$$

แล้วหาค่าตัวคงที่ a_k เพื่อให้ error, E น้อยที่สุด

$$E = \sum_{i=0}^{m} (Y_i - P(X_i))^2 \tag{2.40}$$

กระจายสมการความคลาดเคลื่อน E ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=0}^{m} Y_i^2 - 2\sum_{i=0}^{m} P(X_i)Y_i + \sum_{i=0}^{m} (P(X_i))^2 \\ &= \sum_{i=0}^{m} Y_i^2 - 2\sum_{i=0}^{m} (\sum_{j=0}^{m} a_j X_i^j)Y_i + \sum_{i=0}^{m}(\sum_{j=0}^{n} a_j X_i^j)^2 \\ &= \sum_{i=0}^{m} Y_i^2 - 2\sum_{j=0}^{n} a_j(\sum_{i=0}^{m} Y_i X_i^j) + \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}(\sum_{i=0}^{m} X_i^{j+k}) \end{aligned} \tag{2.41}$$

ในการทำให้ค่า E น้อยที่สุด ให้ partial diff. เทียบกับค่า a_j แต่ละตัวแล้วให้อนุพันธ์ (derivative) เท่ากับศูนย์ นั้นคือ

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 \qquad j = 0.1. \ldots, n \tag{2.42}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = -2 \sum_{i=0}^{m} Y_i X_i^j + 2 \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=0}^{m} x_i^{j+k}$$

$$= 0 \qquad j = 0, 1, \ldots, n \qquad (2.43)$$

ผลคือจะได้ n+1 สมการที่มีตัวไม่ทราบค่า n+1 ตัวซึ่งเรียกว่า "normal equations"

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{=0}^{m} X_i^{j+k} = \sum_{i=0}^{m} Y_i X_i^j \qquad j = 0, 1. \ldots, n \qquad (2.44)$$

ซึ่งเขียนสมการออกมาได้ดังนี้

$$a_o \sum_{i=0}^{m} X_i^o + a_1 \sum_{i=0}^{m} X_i^1 + \ldots + a_n \sum_{i=0}^{m} X_i^n = \sum_{i=0}^{m} Y_i X_i^o \qquad (2.45)$$

$$a_o \sum_{i=0}^{m} X_i^1 + a_1 \sum_{i=0}^{m} X_i^2 + \ldots + a_n \sum_{i=0}^{m} X_i^{n+1} = \sum_{i=0}^{m} Y_i X_i^1$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$a_o \sum_{i=0}^{m} X_i^n + a_1 \sum_{i=0}^{m} X_i^{n+1} + \ldots + a_n \sum_{i=0}^{m} X^{2n} = \sum_{i=0}^{m} Y_i X_i^n$$

เขียนในรูปของ Matrix ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \Sigma X^{o} & \Sigma X^{1} & \ldots & \Sigma X^{n} \\ \Sigma X^{1} & \Sigma X^{2} & \ldots & \Sigma X^{n+1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \Sigma X^{n} & \Sigma X^{n+1} & \ldots\ldots & \Sigma X^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_o \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma YX^{o} \\ \Sigma YX^{1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Sigma YX^{n} \end{bmatrix} \qquad (2.46)$$

ซึ่งผลรวมของทุกเทอมเริ่มต้นจาก $i = 0$ ถึง $i = m$ และทุกค่าของ x และ y ติด subscript i, x_i และ y_i

โดยพิจารณาให้ง่ายเข้า สามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$XA = P \qquad (2.47)$$

โดยการหาสัมประสิทธิ์ของ Matrix A :

$$X^{-1}XA = X^{-1}P$$

$$IA = X^{-1}P$$

$$A = X^{-1}P \qquad (2.48)$$

ผลลัพธ์จากวิธีการข้างต้นเราสามารถหาค่าสัมประสิทธิ a_j ได้ นั่นคือจะได้รูปของสมการ polynomial

ถ้า Y_i เป็นค่าจริงจากข้อมูล และ $P(X_i)$ เป็นค่าของฟังชั่น ความถูกต้องของ polynomial ที่ได้ แสดงได้ในรูป variance ให้ค่าแตกต่างระหว่างจุดต่อจุดดังนี้

$$e_i = P(x_i) - Y_i \qquad (2.49)$$

ถ้า N คือจำนวนจุด และ n คือ ดีกรีจะได้ค่าความคลาดเคลื่อนทั้งสิ้นคือ

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} e_i^2}{N-n-1} \qquad (2.50)$$

สำหรับข้อมูลที่กำหนดให้หนึ่งชุด สมการที่เหมาะสมอาจมีได้ตั้งแต่ n = 1ถึง n = N-1 อย่างไรก็ตามสมการ polynomial ที่เกิดขึ้นอาจผิดไปจากค่าประมาณกึ่งกลางระหว่างจุด ค่าประมาณกึ่งกลางที่เหมาะสมโดยปกติจะเลือกที่ทำให้ค่า variance ต่ำสุด δ^2 วิธีการนี้บางทีเรียกว่า "goodness of fit" method