บทที่ 4

คิเนมาติกของแขนกล (MANIPULATOR KINEMATICS)

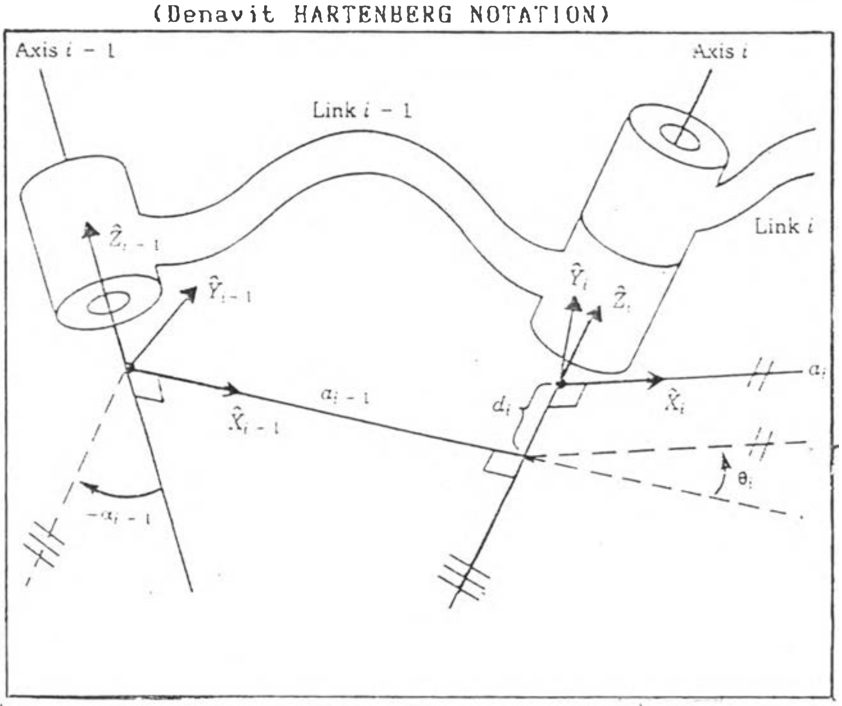
คิเนมาติกของแขนกล เป็นการศึกษาถึงเรขาคณิตของการเคลื่อนที่เทียบกับแกนอ้างอิงที่เวลาใดๆ โดยไม่คำนึงถึงแรง หรือโมเมนต์ที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่ การหาคิเนมาติกของแขนกลสามารถแยกได้เป็น 2 ลักษณะ คือ

1. เริ่มจากทราบขนาดมุมการเคลื่อนที่ของแขนย่อยแต่ละแขนของแขนกล แล้วหาตำแหน่งที่เคลื่อนที่ไปของปลายแขนแขนกล เรียกว่า ฟอร์เวิร์ดไคเนติก (forward kinematic)

2. เริ่มจากทราบตำแหน่งที่ปลายแขนแขนกล แล้วหาขนาดของมุมที่เคลื่อนที่ไปของแขนย่อยแต่ละแขน เรียกว่า อินเวอร์สคิเนมาติก (inverse kinematic)

ก่อนที่จะทำการพิจารณาถึงไคเนติกของแขนกลทั้ง 2 ลักษณะนี้ ควรทำความเข้าใจในเรื่องการกำหนดพารามิเตอร์ต่างๆของแขนกลเสียก่อน ทั้งนี้เป็นเพราะการกำหนดพารามิเตอร์ที่ใช้สำหรับแขนกลมีวิธีการกำหนดได้หลายวิธี และมีความแตกต่างกันอยู่มาก

การกำหนดพารามิเตอร์ต่างๆ ของแขนกลด้วยวิธีของดีนาวิท-ฮาเทนเบอร์ก (Denavit HARTENBERG NOTATION)



รูปที่ 4.1 แสดงการกำหนดพารามิเตอร์ต่างๆของแขนย่อยที่ i-1 และ i

(John J. ,1955 pp. 67)

จากความต้องการความสะดวกในการระบุตำแหน่งของแขนย่อยแต่ละแขนของแขนกล จึงได้มีวิธีการกำหนดพารามิเตอร์เพื่อแสดงถึงตำแหน่งต่างๆ ของแขนย่อยขึ้น วิธีของดีนาวิท-ฮาเทนเบอร์ก ก็เป็นวิธีหนึ่งที่นิยมใช้กันอย่างกว้างขวาง การกำหนดพารามิเตอร์สามารถกระทำได้โดยพิจารณาจากรูปที่ 4.1

กำหนดให้

Z_i = แกน Z ของระบบแกนอ้างอิง i โดยระบบแกนอ้างอิงนี้จะซ้อนทับกับแกนข้อต่อของแขนย่อยที่ i-1 และ i

Z_{i+1} = แกน Z ของระบบแกนอ้างอิง i+1 โดยระบบแกนอ้างอิงนี้จะซ้อนทับกับแกนข้อต่อของแขนย่อยที่ i และ i+1

X_i = แกน X ของระบบแกนอ้างอิง i โดยระบบแกนอ้างอิงนี้จะซ้อนทับกับแกนข้อต่อของแขนย่อยที่ i-1 และ i

X_{i+1} = แกน X ของระบบแกนอ้างอิง i+1 โดยระบบแกนอ้างอิงนี้จะซ้อนทับกับแกนข้อต่อของแขนย่อยที่ i และ i+1

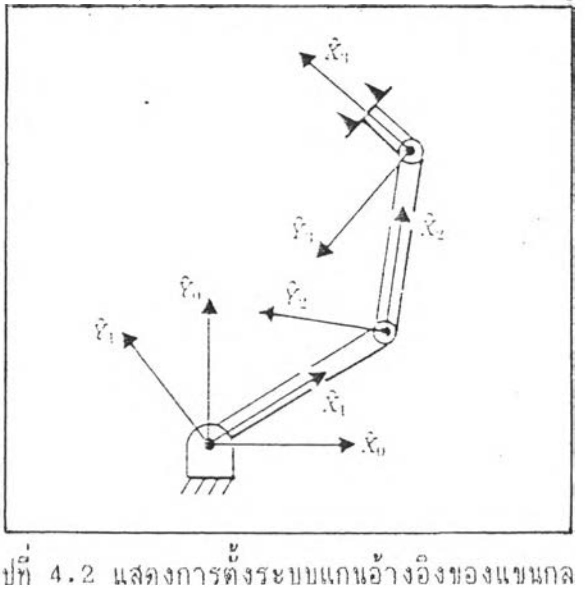
a_i = ระยะจาก Z_i ถึง Z_{i+1} โดยวัดตามแนวแกน X_i

α_i = มุมระหว่าง Z_i ถึง Z_{i+1} โดยวัดรอบแกน X_i

d_i = ระยะจาก X_{i-1} ถึง X_i โดยวัดตามแนวแกน Z_i

θ_i = มุมระหว่าง X_{i-1} ถึง X_i โดยวัดรอบแกน Z_i

และการเลือกตั้งระบบแกนอ้างอิงควรให้ แกน Z ซ้อนทับกับแกนของข้อต่อของแขนย่อยแต่ละแขน และให้แกน X อยู่ในแนวเดียวกับความยาวของแขน (รูปที่ 4.2)



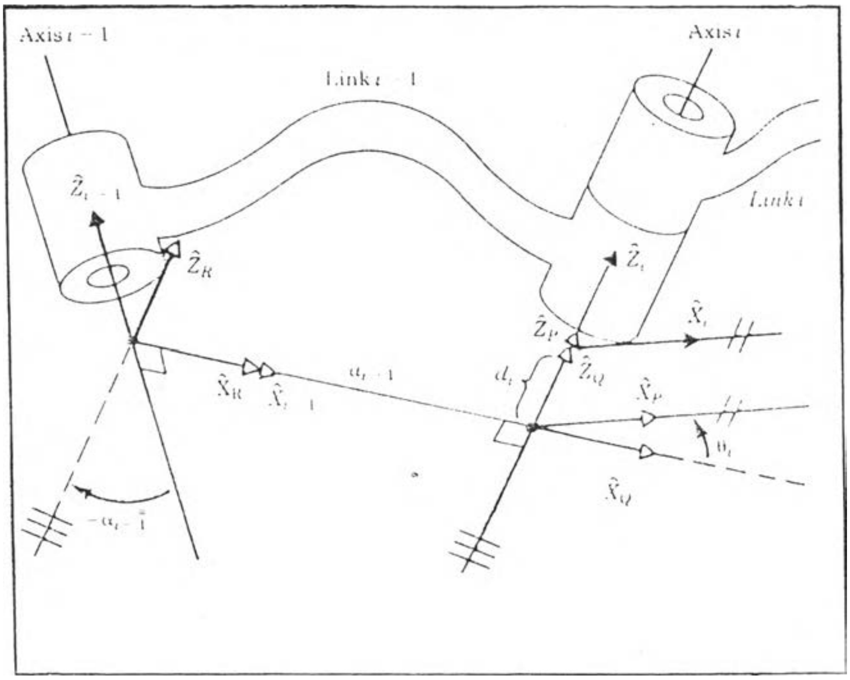
รูปที่ 4.2 แสดงการตั้งระบบแกนอ้างอิงของแขนกล

(John J., 1955 pp. 107)

สำหรับการบอกตำแหน่ง และการเรียงตัวของแขนย่อยของแขนกลโดยทั่วไปมักบอกเป็นรูปเวกเตอร์เทียบกับระบบแกนอ้างอิงใดๆ ซึ่งเขียนอยู่ในรูปเมตริก 4x4 เรียกว่า ทรานสฟอร์เมชั่นเมตริก (transformation matrix) ประกอบด้วย เมตริกย่อยของการเรียงตัว (oreintation matrix) และเวกเตอร์บอกตำแหน่ง (position vector)

T =	การเรียงตัว เมตริก 3x3	เวกเตอร์บอกตำแหน่ง เมตริก 3x1
	0 0 0	1

ในกรณีการบอกตำแหน่ง และการเรียงตัวของแขนย่อยที่ i เทียบกับแขนย่อยที่ i-1 ($^{i-1}{}_{i}T$) สามารถแสดงได้โดยพิจารณาจากรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 แสดงการบอกตำแหน่ง และการเรียงตัวของแขนย่อยที่ i เทียบกับแขนย่อยที่ i-1 (John J., 1955 pp. 73)

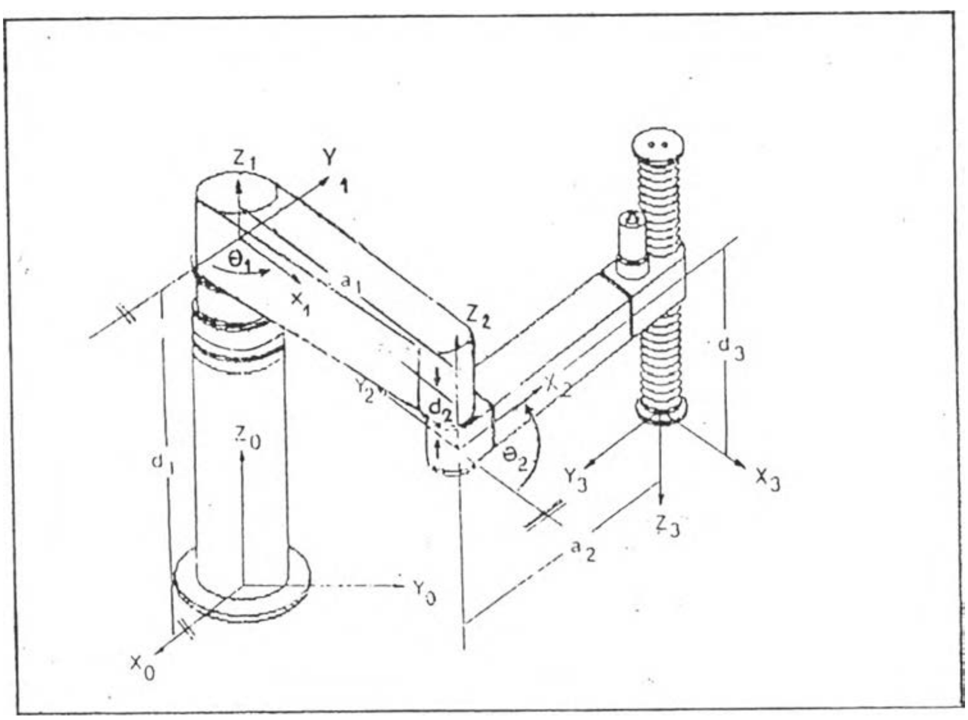
ซึ่งจะได้

$$
\begin{aligned}
{}^{i-1}_{\ \ i}T &= Rot(X_i,\alpha_{i-1})\ Trans(X_i,a_{i-1})\ Rot(Z_i,t_i)\ Trans(Z_i,d_i) \\
&= {}^{i-1}_{\ \ R}T\ \ {}^{R}_{Q}T\ \ {}^{Q}_{P}T\ \ {}^{P}_{i}T \\
&= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & -c\alpha_{i-1} & -c\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\qquad \text{.........} \ (4.1)
$$

โดย $c\theta_i$ และ $s\theta_i$ หมายถึง $\cos(\theta_i)$ และ $\sin(\theta_i)$ ตามลำดับ

$c\alpha_{i-1}$ และ $s\alpha_{i-1}$ หมายถึง $\cos(\alpha_{i-1})$ และ $\sin(\alpha_{i-1})$ ตามลำดับ

การหาฟอร์เวิร์ดคิเนมาติกสำหรับแขนกลจุฬา2



รูปที่ 4.4 แสดงการกำหนดพารามิเตอร์ต่างๆของแขนกลจุฬา2

เมื่อพิจารณาแขนกลจุฬา2 ดังรูปที่ 4.4 เราสามารถกำหนดพารามิเตอร์ของแขนย่อยต่างๆ สำหรับแขนกลจุฬา2 สามารถแสดงได้ดังนี้

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	d_1	θ_1
2	0	a_1	$-d_2$	θ_2
3	+180	a_2	d_3	+90

จากทรานฟอร์เมชั่นเมตริก ${}^{i-1}_{i}T$ เราจะได้ทรานฟอร์เมชั่นเมตริกของปลายแขนแขนกลเทียบกับระบบแกนอ้างอิงที่ฐานของแขนกลจุฬา2

$$
{}^{0}_{3}T = {}^{0}_{1}T \; {}^{1}_{2}T \; {}^{2}_{3}T
$$

$$
= \begin{bmatrix} s_{12} & -c_{12} & 0 & a_2c_{12} + a_1c_1 \\ -c_{12} & -s_{12} & 0 & a_2s_{12} + a_1s_1 \\ 0 & 0 & -1 & d_1 - d_2 - d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{......... (4.2)}
$$

โดย

s_{12} หมายถึง $\sin(\theta_1 + \theta_2)$

c_{12} หมายถึง $\cos(\theta_1 + \theta_2)$

ฉะนั้นตำแหน่งที่ปลายแขนแขนกลเทียบกับระบบแกนอ้างอิงที่ฐานแขนกล (x,y,z) คือ

$$
x = a_2c_{12} + a_1c_1
$$

$$y = a_2 s_{12} + a_1 s_1$$

$$z = d_1 - d_2 - d_3 \quad \text{.........} \quad (4.3)$$

การหาอินเวอร์สคิเนมาติกสำหรับแขนกลจุฬา2

การอินเวอร์สคิเนมาติกสำหรับแขนกล ใช้สำหรับหาขนาดของมุมที่เคลื่อนที่ไปของแขนย่อยแต่ละแขน เมื่อทราบตำแหน่งและการเรียงตัวที่ปลายแขนแขนกลเทียบกับระบบแกนอ้างอิงที่ฐานแขนกล

โดยกำหนดให้ ตำแหน่งและการเรียงตัวที่ปลายแขนแขนกลอยู่ในรูปทรานฟอร์เมชั่นเมตริก ${}^{B}_{E}T$

$${}^{B}_{E}T = \begin{bmatrix} c\phi & s\phi & 0 & x \\ s\phi & -c\phi & 0 & y \\ 0 & 0 & -1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.... (4.4)

เมื่อ ϕ เป็นมุมระหว่างแกน X ของระบบแกนอ้างอิงที่ปลายแขนแขนกล (Frame E) เทียบกับแกน X ของระบบแกนอ้างอิงที่ฐานแขนกล (Frame B)

x เป็นตำแหน่งของปลายแขนแขนกลเทียบกับระบบแกนอ้างอิงที่ฐานแขนกลในแนวแกน X

y เป็นตำแหน่งของปลายแขนแขนกลเทียบกับระบบแกนอ้างอิงที่ฐานแขนกลในแนวแกน Y

z เป็นตำแหน่งของปลายแขนแขนกลเทียบกับระบบแกนอ้างอิงที่ฐานแขนกลในแนวแกน Z

$c\phi$ หมายถึง $\cos(\phi)$

และ $s\phi$ หมายถึง $\sin(\phi)$

เมื่อนำค่าที่กำหนดนี้ไปเปรียบเทียบกับทรานฟอร์เมชั่นเมตริกของปลายแขนแขนกลที่หาจากฟอร์เวิร์ดคิเนมาติก เราจะได้

$$c\phi = s_{12} \quad \text{..........} \quad (4.5)$$

$$s\phi = -c_{12} \qquad \text{..........} \; (4.6)$$

$$x = a_2c_{12} + a_1c_1 \qquad \text{..........} \; (4.7)$$

$$y = a_2s_{12} + a_1s_1 \qquad \text{..........} \; (4.8)$$

$$z = d_1 - d_2 - d_3 \qquad \text{..........} \; (4.9)$$

จากสูตรผลบวกของ sine และ cosine

$$\sin(\theta_1 \pm \theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \pm \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)$$

$$\cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) \mp \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)$$

จะได้ว่า

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_1 - 90) \qquad \text{.........} \; (4.10)$$

$$-\cos(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1 + \theta_1 - 90) \qquad \text{.........} \; (4.11)$$

เมื่อนำไปเทียบกับสมการที่ 4.5 และ 4.6 จะได้

$$\phi = \theta_1 + \theta_2 - 90 \qquad \text{.......} \; (4.12)$$

และจากสมการที่ 4.7 และ 4.8

$$x^2 + y^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(t_2)$$

จะได้ $\cos(\theta_2) = (x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2)/(2a_1a_2)$

และ $\sin(\theta_2) = (1 - \cos^2(\theta_2))^{1/2}$

ฉะนั้นจะได้ $\theta_2 = \tan^{-1}(\sin(\theta_2)/\cos(\theta_2))$ ...... (4.13)

และจากสมการที่ 4.7 และ 4.8 แทนค่าผลบวกของ sine และ cosine

$$x = k_1\cos(\theta_1) - k_2\sin(\theta_1) \qquad \text{......} \; (4.14)$$

$$y = k_1\sin(\theta_1) + k_2\cos(\theta_1) \qquad \text{......} \; (4.15)$$

โดย $k_1 = a_2\cos(\theta_2) + a_1$

$k_2 = a_2\sin(\theta_2)$

เราสามารถแก้สมการได้ง่ายขึ้นโดยกำหนดให้

$$r = (k_1 + k_2)^{1/2}$$

และ $\beta = \tan^{-1}(k_2/k_1)$

ฉะนั้น $k_1 = r\cos(\beta)$

$k_2 = r\sin(\beta)$

จากสมการที่ 4.14 และ 4.15 เราสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$x/r = \cos(\beta + \theta_1)$$

$$y/r = \sin(\beta + \theta_1)$$

และจากสมการทั้ง2 เราจะได้

$$\theta_1 = \tan^{-1}(y/x) - \beta$$

$$= \tan^{-1}(y/x) - \tan^{-1}(k_2/k_1) \quad ...(4.16)$$

จะเห็นว่าในกรณีของแขนกลจุฬา2 นี้การเรียงตัวที่ปลายแขนแขนกล เราจะไม่สามารถกำหนดเองได้ มุมการเรียงตัว (ϕ) จะขึ้นกับการเปลี่ยนแปลงค่ามุมของแขนย่อยที่ 1 และ ที่ 2