# บทที่ 2

## ระเบียบวิธีที่ใช้ในการวิจัย

### 2.1 ข้อมูลผิดปกติ (Outlier)

โดยทั่วไปในการเก็บรวบรวมข้อมูลเพื่อที่จะศึกษาถึงลักษณะของประชากร มักจะมีข้อมูลบางค่าที่มีค่าแตกต่างไปจากข้อมูลส่วนใหญ่ โดยแตกต่างไปในทางมากกว่าหรือน้อยกว่า และข้อมูลที่มีค่าแตกต่างนี้อาจจะเป็นข้อมูลผิดปกติหรือไม่ก็ได้ ซึ่งจะทราบได้จากการทดสอบ ถ้าข้อมูลมีค่า Outlier เกิดขึ้น จะทำให้ผลที่ได้จากการวิเคราะห์ในทางสถิติ การหาค่าต่าง ๆ เช่น ค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ความสัมพันธ์ของข้อมูล และอิทธิพลของข้อมูลชุดหนึ่งหรือหลายชุด ไม่ตรงกับความเป็นจริง ทำให้เกิดความผิดพลาดในการนำผลการวิเคราะห์ไปใช้ ค่าเหล่านี้อาจมีสาเหตุมาจากความผิดพลาดในการเก็บรวบรวมข้อมูล หรือการเบี่ยงเบนจากข้อกำหนดของทฤษฎีการวิเคราะห์ข้อมูล ฉะนั้น จึงควรทดสอบข้อมูลที่ผิดปกติเสียก่อนทำการวิเคราะห์

การตรวจสอบข้อมูลที่ผิดปกติโดยวิธีการต่าง ๆ ส่วนใหญ่จะใช้วิธีวิเคราะห์การกระจายของข้อมูลบน Regression line ข้อมูลที่มีค่าแตกต่างไปจากค่าของข้อมูลบน Regression line อย่างเห็นได้ชัดมักจะเป็นข้อมูลผิดปกติ

### 2.2 การตรวจสอบข้อมูลผิดปกติในแผนแบบการทดลอง

การวิจัยเชิงทดลองโดยใช้แผนแบบการทดลองนั้น จะมีข้อตกลงเบื้องต้น และวิธีการวิเคราะห์ข้อมูลระบุเฉพาะแต่ละแผนแบบ ซึ่งข้อตกลงเหล่านี้สามารถนำมาใช้ประกอบการพิจารณาข้อมูลผิดปกติได้ เช่น การตรวจสอบข้อกำหนดของการแจกแจงของประชากรแบบปกติในข้อมูลจากแผนการทดลองแบบสุ่มตลอด การตรวจสอบการเกิดของข้อมูลแบบหุ่นบวกของแผนการทดลองแบบสุ่มในบล็อก เป็นต้น และใช้วิธีการทางกราฟ (Graphic Method) เพื่อช่วยตรวจสอบข้อมูลที่ผิดปกติ ซึ่งจะช่วยค้นหาข้อมูลผิดปกติได้เป็นอย่างดี หากผลการทดสอบข้อกำหนดของแผนแบบการทดลองไม่เป็นไปตามที่กำหนดไว้

## 2.3 การแก้ปัญหาข้อมูลผิดปกติ

วิธีการแก้ปัญหาข้อมูลผิดปกติ โดยทั่วไปหากพบข้อมูลผิดปกติจำนวนน้อย เช่น 1 ค่า หรือ 2 ค่า ผู้วิจัยอาจยอมรับข้อมูลนั้นได้ถ้าข้อมูลที่เก็บรวบรวมมามีจำนวนมากพอ การประมาณค่าขึ้นมาแทนด้วยค่าเฉลี่ย ค่ามัธยฐาน หรือค่าใกล้เคียงกับค่านั้น การคำนวณข้อมูลสูญหายหรือการใช้วิธีวิเคราะห์แบบนอนพาราเมตริก แต่ถ้าพบว่ามีข้อมูลผิดปกติจำนวนมาก ผู้วิจัยควรเลือกใช้วิธีการแปลงข้อมูลก่อนทำการวิเคราะห์ข้อมูล หรือการใช้วิธีวิเคราะห์แบบนอนพาราเมตริก

## 2.4 การเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างสองประชากร (2 Sample Problem Comparison)

ในการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับผลต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของสองประชากร ถ้าให้ $\mu_1$ และ $\mu_2$ แทนค่าเฉลี่ยของประชากรที่หนึ่ง และประชากรที่สองที่นำทดสอบสมมติฐาน ตัวสถิติที่ใช้ทดสอบสมมติฐาน

$H_o$ : $\mu_1 = \mu_2$

$H_a$ : $\mu_1 \neq \mu_2$

ให้ $\bar{y}_1$ = ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างขนาด $n_1$ ที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ ซึ่งมีค่าเฉลี่ย $\mu_1$ และความแปรปรวน $\sigma_1^2$

$\bar{y}_2$ ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างขนาด $n_2$ ที่สุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติมีค่าเฉลี่ย $\mu_1$ และความแปรปรวน $\sigma_2^2$

$\bar{y}_1 - \bar{y}_2$ จะมีการแจกแจงแบบปกติ ที่มีค่าเฉลี่ยเป็น $\mu_1 - \mu_2$ และความแปรปรวนเป็น $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$

$$Z = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

จะมีการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ และความแปรปรวนเป็นหนึ่ง

เนื่องจากโดยทั่ว ๆ ไป ผู้ทดสอบมักจะไม่ทราบค่าความแปรปรวนของประชากรทั้งสอง จึงต้องประมาณค่าความแปรปรวนของประชากรทั้งสองด้วย ค่าความแปรปรวนจากตัวอย่าง ($s_1^2$และ $s_2^2$) แต่การประมาณค่าความแปรปรวนของประชากรด้วยความแปรปรวนจากตัวอย่างมีผลทำให้การแจกแจงของตัวสถิติ

$$\frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\left[\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

มีการแจกแจงประมาณด้วยการแจกแจงแบบที (t) ที่มีองศาแห่งความอิสระ $\gamma$ โดยที่

$$\gamma = \left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2 \Bigg/ \left[\left[\frac{s_1^2}{n_1}\right]^2 \Big/ (n_1-1) + \left[\frac{s_2^2}{n_2}\right]^2 \Big/ (n_2-1)\right]$$

ในกรณีที่ความแปรปรวนของประชากรทั้งสองที่นำมาทดสอบเท่ากันคือ $\sigma^2$ ตัวสถิติเพื่อการทดสอบจะมีค่าเป็น

$$Z = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}}$$

$$= \frac{(y_1 - y_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

เมื่อประมาณค่าความแปรปรวนของประชากร($\sigma^2$) ด้วยค่าความแปรปรวนรวม (pooled variance) จากตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากรทั้งสอง ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $s_p^2$

เมื่อ $s_p^2$ = ค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักของค่าความแปรปรวน จากตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากรทั้งสอง

$$\frac{(n_1-1)\ s_1^2 + (n_2-1)\ s_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$$

การแจกแจงของ $\dfrac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$ จะเป็นแบบที (t-distribution)

โดยมีองศาแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ $n_1 + n_2 - 2$ นั่นคือ

$$T = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{(n_1+n_2-2)}$$

ถ้าจำนวนตัวอย่างที่สุ่มมาจากแต่ละประชากรมีขนาดใหญ่ จะใช้การแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน (Z) ประมาณการแจกแจงแบบ t

2.5 <u>แผนการทดลองแบบสุ่มตลอด</u> (Completely Randomized Design)

ในการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของประชากรตั้งแต่สามประชากรขึ้นไป ใช้วิธีวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance) หลักการสำคัญที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐานด้วยวิธีนี้คือ การแยกความแปรปรวนหรือความแตกต่างของข้อมูลที่เกิดขึ้นทั้งหมดออกจากสาเหตุต่าง ๆ แล้วพิจารณาสัดส่วนของความแปรปรวนหรือความแตกต่างระหว่างประชากรและความแปรปรวน หรือความแตกต่างภายในประชากรเดียวกันว่ามีค่ามากน้อยเพียงใด ถ้าอัตราส่วนดังกล่าวมีมาก แสดงว่าความแปรปรวนหรือความแตกต่างระหว่างประชากรมีมาก เมื่อเทียบกับความแปรปรวนหรือความแตกต่างภายในประชากรเดียวกัน สามารถสรุปได้ว่าจำนวนประชากรทั้งหมดที่นำมาทดสอบความแตกต่าง

ระหว่างค่าเฉลี่ย มีค่าเฉลี่ยของประชากรอย่างน้อยหนึ่งประชากรที่แตกต่างจากประชากรอื่น ๆ ที่นำมาทดสอบ แผนการทดลองนี้เป็นแผนการทดลองแบบง่ายที่สุด การวิเคราะห์ความแปรปรวนจะแยกสาเหตุของความแปรปรวนของข้อมูลทั้งหมดว่า เนื่องมาจากอิทธิพลของทรีทเมนต์ (Treatment Effect) แต่เพียงอย่างเดียว ดังนั้น เพื่อให้แผนการทดลองนี้มีประสิทธิภาพมากที่สุด หน่วยทดลอง (Experimental Unit) ที่นำมาใช้ ควรมีลักษณะเหมือนกัน หรือคล้ายคลึงกันมากที่สุด (Homogeneous) หรือให้มีความแปรปรวนระหว่างหน่วยทดลองน้อยที่สุด

2.5.1 การวิเคราะห์เมื่อมีจำนวนซ้ำเท่ากัน

ข้อมูลที่ใช้วิเคราะห์ สามารถจัดให้อยู่ในรูปตารางที่ 2.5.1

ตารางที่ 2.5.1 แสดงลักษณะข้อมูลจากแผนการทดลองแบบสุ่มตลอด

| | ทรีทเมนต์ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | . . . | t | |
| | $y_{11}$ | $y_{21}$ | $y_{31}$ | . . . | $y_{t1}$ | |
| | $y_{12}$ | $y_{22}$ | $y_{32}$ | | $y_{t2}$ | |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ | |
| | $y_{1r}$ | $y_{2r}$ | $y_{3r}$ | | $y_{tr}$ | |
| ผลรวมของทรีทเมนต์ | $y_{1.}$ | $y_{2.}$ | $y_{3.}$ | . . . | $y_{t.}$ | $y_{..}$ |
| ค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ | $\bar{y}_{1.}$ | $\bar{y}_{2.}$ | $\bar{y}_{3.}$ | | $\bar{y}_{t.}$ | $\bar{y}_{..}$ |

2.5.2 ตัวแบบของค่าสังเกตุ

ค่า y ในตาราง 2.5.1 สามารถแสดงในรูปของผลบวกขององค์ประกอบต่าง ๆ ซึ่งกรณีนี้ได้แก่ ค่าเฉลี่ยโดยทั่วไป (General mean) คือ $\mu$ ผลกระทบจากวิธีทดลองที่แตกต่างกัน (Treatment effect) คือ $\tau_i$ ความคลาดเคลื่อนเชิงสุ่ม (Random error) ที่เกิดจากหน่วยทดลองที่ j ของสิ่งทดลองที่ i คือ $\varepsilon_{ij}$ เมื่อรวมเขียนเป็นตัวแบบเส้นตรงเชิงบวก (Linear additive model)

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \quad ; \quad i = 1,2,\ldots,t. \quad j = 1,2,\ldots,r.$$

หรืออาจเขียนได้ในรูป

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$$

โดยที่ $\mu_i$ คือค่าเฉลี่ยจริงของสิ่งทดลองที่ i ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\mu + \tau_i$ นั่นเอง

2.5.3 ข้อสมมติในการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบจำนวนทางเดียว

1. $\varepsilon_{ij}$ มีการแจกแจงอย่างอิสระแบบปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และค่าความแปรปรวนร่วมกันคือ $\sigma^2$

2. $\tau_i$ มีข้อสมมติแยกเป็น 2 กรณีคือ

2.1 $\tau_i$ เป็นผลกระทบชนิดคงที่ (Fixed Effect) หมายถึงสิ่งทดลองที่ใช้ในการทดลองถูกกำหนดให้คงที่ ทำให้ $\tau_i$ คงที่และ $\sum_{i=1}^{t} \tau_i = 0$

2.2 $\tau_i$ เป็นผลกระทบเชิงสุ่ม (Random Effect) ในกรณีที่สิ่งทดลองที่ใช้ในการทดลองถูกเลือกอย่างสุ่ม จากประชากรของสิ่งทดลองทั้งหมด ค่า i เป็นตัวอย่างสุ่มที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ และความแปรปรวนเป็น $\sigma^2_\tau$

สมมติฐานในการทดสอบคือ ไม่มีความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของสิ่งทดลอง ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$H_o : \mu_{T_1} = \mu_{T_2} = \ldots = \mu_{T_t}$$

ซึ่งถ้าสมมติฐานนี้เป็นจริง ย่อมหมายถึงว่า $\mu_i = \mu + \tau_i$ = ค่าคงที่ ดังนั้นจึงอาจเขียนสมมติฐานได้อีกรูปแบบหนึ่งคือ

$$H_o : \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_t = 0$$

$H_a$ : $\tau_i$ อย่างน้อยหนึ่งค่าที่ไม่เท่ากับศูนย์

ถ้าสมมติฐานเป็นจริง ตัวแบบที่เหมาะสมสำหรับข้อมูลจะอยู่ในรูป $y_{ij} = \mu + \varepsilon_{ij}$

2.5.4 วิธีการวิเคราะห์ความแปรปรวน

ให้ $y_{ij}$ = ค่าสังเกตจากหน่วยทดลองที่ได้รับทรีทเมนต์ i ซ้ำที่ j

$y_{i.}$ = ผลรวมของค่าสังเกตจากหน่วยทดลองที่ได้รับทรีทเมนต์ที่ i

$$= \sum_{j=1}^{r} y_{ij}$$

$\bar{y}_{i.}$ = ค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ที่ $i = \frac{y_{i.}}{r}$

$y_{..}$ = ผลรวมของค่าสังเกตทั้งหมด

$\bar{Y}_{..}$ = ค่าเฉลี่ยของค่าสังเกตทั้งหมด

$$\text{Total SS} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} (y_{ij} - y_{..})^2 = \sum_{i=1}\sum_{j=1} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{tr}$$

$$\text{Treatment SS} = SST = r\sum_{i=1}^{t} (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^{t} \frac{y_{i.}^2}{r} - \frac{y_{..}^2}{tr}$$

$$\text{Error SS} = SSE = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 = \text{Total SS} - SST$$

$\frac{Y_{..}^2}{tr}$ เรียกว่า Correction Term (CT)

ตารางที่ 2.5.3 การวิเคราะห์ความแปรปรวนจากแผนการทดลองแบบสุ่มตลอด

| สาเหตุของความแปรปรวน | df | SS | MS | F |
|---|---|---|---|---|
| ระหว่างประชากร | t-1 | $\sum_{i=1}^{t} \frac{y_{i.}^2}{r} - CT$ | $\frac{SST}{t-1} = MST$ | $\frac{MST}{MSE}$ |
| ภายในประชากร | t (r-1) | by subtraction | $\frac{SSE}{t(r-1)} = MSE$ | |
| รวม | tr-1 | $\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{r} y_{ij}^2 - CT$ | | |

ค่าประมาณของ population variance ($\sigma^2$) คือ $S^2 = MSE$

Standard error ของ treatment mean $(S_{\bar{y}}) = \sqrt{S^2/r}$

Standard error ของผลต่างของ treatment $(S_{\bar{d}}) = \sqrt{2S^2/r}$

Coefficient of Variation $= \frac{S}{\bar{y}} \times 100$ %

ปฏิเสธสมมติฐานว่าง เมื่อ F มีค่ามากกว่า $F_{\alpha}$ ที่องศาแห่งความเป็นอิสระ t-1 และ t(r-1)

2.6 <u>แผนการทดลองแบบสุ่มในบล็อก</u> (Randomized Complete Block Design)

แผนการทดลองนี้ใช้ในการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของประชากรตั้งแต่สองประชากรขึ้นไป โดยที่แต่ละประชากรมีความแตกต่างกันเนื่องจากสองลักษณะ กรณีนี้เราสามารถแบ่งแยกกลุ่มสิ่งทดลองออกเป็นประเภทได้โดยมีเหตุผล ประเภท

หรือกลุ่มที่แบ่งออกเรียกว่าบล็อก จุดประสงค์ของการแบ่งบล็อกเพื่อให้หน่วยทดลองภายในบล็อกเดียวกันมีความแตกต่างกันน้อยกว่าระหว่างหน่วยที่อยู่คนละบล็อก

2.6.1 การวิเคราะห์ข้อมูล

ข้อมูลที่ใช้วิเคราะห์จัดให้อยู่ในรูปตารางที่ 2.6.1

ตารางที่ 2.6.1 แสดงลักษณะข้อมูลจากแผนการทดลองแบบสุ่มในบล็อก

| ทรีทเมนต์ $i = 1, 2, \ldots t$ | บล็อก, j 1 | 2 | ........ | b | ผลรวมของทรีทเมนต์ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $y_{11}$ | $y_{12}$ | ..... | $y_{1b}$ | $y_{1.}$ |
| 2 | $y_{21}$ | $y_{22}$ | ..... | $y_{2b}$ | $y_{2.}$ |
| . | . | . | | . | . |
| . | . | . | | . | . |
| . | . | . | | . | . |
| t | $y_{t1}$ | $y_{t2}$ | ..... | $y_{tb}$ | $y_{t.}$ |
| ผลรวมของบล็อก | $y_{.1}$ | $y_{.2}$ | ..... | $y_{.b}$ | $y_{..}$ |

2.6.2 ตัวแบบของค่าสังเกตุ

ค่า $y$ ในตาราง 2.6.1 สามารถแสดงในรูปผลบวกขององค์ประกอบต่าง ๆ ได้แก่ ค่าเฉลี่ยโดยทั่วไป ($\mu$) อิทธิพลของทรีทเมนต์ (Treatment effect) คือ $\tau_i$ อิทธิพลของบล็อก (Block effect) คือ $\beta_j$ และความคลาดเคลื่อนเชิงสุ่ม (Random error) ของหน่วยทดลองที่เกิดจากทรีทเมนต์ที่ i และบล็อกที่ j โดยรวมเขียนเป็นตัวแบบเส้นตรงเชิงบวก

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \quad , \quad \begin{array}{l} i = 1,2---t \\ j = 1,2---,b \end{array}$$

2.6.3 ข้อสมมุติในการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบจำแนกสองทาง

1. $\varepsilon_{ij}$ มีการแจกแจงอย่างอิสระแบบปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับศูนย์และค่าความแปรปรวนร่วมกันคือ $\sigma^2$

2. ข้อมูลเกิดขึ้นแบบหุ่นบวก

สมมุติฐานในการทดสอบ คือ ไม่มีความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$H_o$ : $\mu_{T_1} = \mu_{T_2} \ldots\ldots\ldots\ldots = \mu_{T_t}$

$H_a$ : ค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์อย่างน้อยหนึ่งค่าไม่เท่ากับค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์อื่น

2.6.4 วิธีวิเคราะห์ความแปรปรวน

ให้ $y_{ij}$ = ค่าสังเกตจากหน่วยทดลองที่ได้รับทรีทเมนต์ i บล็อกที่ j

$y_{i.}$ = ผลรวมของค่าสังเกตจากหน่วยทดลองที่ได้รับทรีทเมนต์ที่ i

$y_{.j}$ = ผลรวมของค่าสังเกตจากหน่วยทดลองในบล็อกที่ j

$y_{..}$ = ผลรวมของค่าสังเกตทั้งหมด

(1) Total SS $= \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{bt}$ = SSTOT

(2) Treatment SS = SST $= \sum_{i=1}^{t} \frac{y_{i.}^2}{b} - \frac{y_{..}^2}{bt}$

(3) Block SS = SSB $= \sum_{j=1}^{b} \frac{y_{.j}^2}{t} - \frac{y_{..}^2}{bt}$

(4) Error = SSE = Total SS - SST - SSB

$\frac{y_{..}^2}{bt}$ เรียกว่า Correction Term (CT)

ตารางที่ 2.6.4 การวิเคราะห์ความแปรปรวนจากแผนการทดลองแบบสุ่มในบล็อก

| สาเหตุของความแปรปรวน | df | SS | MS | F |
|---|---|---|---|---|
| ทรีทเมนต์ | t-1 | SST | SST/t-1 = MST | MST/MSE = FT |
| บล็อก | b-1 | SSB | SSB/b-1 = MSB | MSB/MSE |
| ความคลาดเคลื่อน | (t-1)(b-1) | SSE | SSE/(t-1)(b-1) = MSE | |
| รวม | bt-1 | SSTOT | | |

จะปฏิเสธสมมติฐานว่าง เมื่อ FT ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่า $F_{\alpha}$ ที่องศาแห่งความเป็นอิสระ t-1 และ [(b-1)(t-1)]

2.6.5 ข้อมูลสูญหาย (Missing Value)

ในการทดลองบางครั้งข้อมูลอาจมีค่าสังเกตสูญหายหรือใช้ไม่ได้ เช่น การบันทึกผิดพลาดอย่างเห็นได้ชัด หรือสิ่งทดลองสูญหายไป กรณีนี้สามารถประมาณค่าที่หายได้จากสูตรของ Yates แต่ค่าประมาณนี้เป็นเพียงค่าที่ช่วยให้ความสะดวกในการวิเคราะห์ข้อมูลที่เหลือเท่านั้น โดยใช้สูตรการคำนวณกรณีข้อมูลสูญหาย 1 ค่า

$$X = \frac{bB + tT - G}{(b-1)(t-1)}$$

เมื่อ X = ค่าที่สูญหาย

b และ t = จำนวนบล็อกและทรีทเมนต์ตามลำดับ

B และ T = ผลรวมของค่าสังเกตในบล็อกและทรีทเมนต์ที่มีค่าหายไป

G = ผลรวมของค่าสังเกตุทั้งหมด

เมื่อได้ค่า X แล้วนำไปวิเคราะห์วาเรียนซ์ร่วมกับข้อมูลที่เหลือโดยวิธีคำนวณปกติ แต่ df ของทั้งหมดและความคลาดเคลื่อนจะน้อยลงจากเดิมเท่ากับ 1 ค่าประมาณ X เป็นค่าที่ให้ Error Sum of Squares ในการวิเคราะห์วาเรียนซ์น้อยที่ต่ำที่สุด แต่ทรีทเมนต์ SS จะมีค่า

สูงขึ้นจากที่ควรจะเป็นเท่ากับ $\frac{[B-(t-1)X]^2}{t(t-1)}$ ซึ่งจะต้องนำไปลบออกจากค่าทรีทเมนต์ SS ดังนั้น

$$\text{Treatment SS (ปรับแล้ว)} = SST - \frac{[B-(t-1)X]^2}{t(t-1)}$$

$$\text{df ของความคลาดเคลื่อน} = (t-1)(b-1)-1$$

$$\text{df ของผลรวม} = (bt-1)-1$$

จากนั้นจึงนำค่าเหล่านี้ไปใช้วิเคราะห์ตามตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนตามปกติ

## 2.7 การทดสอบแบบแมน-วิทนีย์ (Mann-Whitney Test)

การทดสอบแบบแมน- วิทนีย์ เป็นวิธีการที่ใช้ทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของประชากร 2 กลุ่มที่เป็นอิสระกัน ซึ่งแมน และวิทนีย์ เป็นผู้เสนอในปี พ.ศ. 2490 ตัวสถิติทดสอบแบบ แมน-วิทนีย์ เป็นสถิติที่ไม่ใช้พารามิเตอร์

ข้อตกลงเบื้องต้นของตัวสถิติทดสอบ แมน-วิทนีย์ สำหรับการทดสอบสมมติฐาน การเท่ากันของค่าเฉลี่ยของประชากร 2 กลุ่ม (Gibbon 1971 : 140-149) มีดังนี้

1) ข้อมูลประกอบด้วยตัวอย่างสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_m$ จากประชากรกลุ่มที่หนึ่ง และ ตัวอย่างสุ่ม $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ จากประชากรกลุ่มที่สอง

2) ตัวอย่างสุ่มทั้งสองชุดเป็นอิสระกัน

3) ประชากรที่ศึกษามีการแจกแจงแบบต่อเนื่อง

4) สเกลที่ใช้วัดข้อมูลอย่างน้อยต้องเป็นสเกลแบบอันดับมาตรา (Ordinal Scale)

5) ประชากรทั้งสองที่ศึกษามีรูปบบการแจกแจงแบบเดียวกัน และความแปรปรวนเท่ากัน (Indentical form)

ตัวสถิติทดสอบแบบแมน-วิทนีย์ คือ U หรือ U' ซึ่งคำนวณได้ดังนี้

$$U = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} D_{ij}$$

$$\text{โดยที่} \quad D_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ ถ้า } y_j < x_i & ; \ i = 1, 2, \ldots\ldots, m \\ 0 \text{ ถ้า } y_j > x_i & ; \ j = 1, 2, \ldots\ldots, n \end{cases}$$

หรือ

$$U' = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (1-D_{ij})$$

โดยที่ $U'$ = จำนวนครั้งที่ $x_i < y_j$

ถ้า $m$ หรือ $n$ มีค่ามาก การคำนวณค่า $U$ และ $U'$ ด้วยวิธีดังกล่าวข้างต้น อาจไม่สะดวก ซึ่งอาจคำนวณค่า $U$ และ $U'$ ได้อีกวิธีหนึ่งดังนี้

$$U = mn + \frac{m(m+1)}{2} - R_x$$

$$U' = mn + \frac{n(n+1)}{2} - R_y$$

โดยที่ $R_x$ = ผลรวมของค่าอันดับของ $x$ จากการจัดอันดับร่วมกันของ $x$ และ $y$

$R_y$ = ผลรวมของค่าอันดับของ $y$ จากการจัดอันดับร่วมกันของ $x$ และ $y$

กรณีที่ต้องการทดสอบ 2 ด้าน (Two-sided test) จะปฏิเสธสมมติฐานว่าง ถ้าค่า $U$ หรือ $U'$ ที่คำนวณได้มีค่าน้อยกว่า $c_{\alpha/2}$ สำหรับการทดสอบแบบด้านเดียว (One-side test) จะปฏิเสธสมมติฐานว่า เมื่อ $U < c_\alpha$ หรือ $U' < c_\alpha$ โดยที่ $c_\alpha$ คือค่าวิกฤต (Critical value) ณ ระดับนัยสำคัญ $\alpha$ ซึ่งสามารถหาได้จากตารางการทดสอบแบบ แมน-วิทนีย์ (ดูตารางที่ 1 ในภาคผนวก ค)

ในกรณีที่ตัวอย่างสุ่มมีขนาดใหญ่ ค่าสถิติ U จะมีการแจกแจงใกล้เคียงกับการแจกแจงแบบปกติ โดยที่ค่าคาดหวังและค่าความแปรปรวนของ U มีลักษณะดังนี้

$$E(U) = \frac{mn}{2}$$

$$Var(U) = \frac{mn(m+n+1)}{12}$$

ดังนั้นตัวสถิติที่ใช้ทดสอบเมื่อตัวอย่างที่สุ่มมามีขนาดใหญ่คือ

$$Z = \frac{U - (mn/2)}{\left[\frac{mn(m+n+1)}{12}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

ซึ่งการแจกแจงของ Z สามารถประมาณด้วยการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน (Standard Normal) ซึ่งค่าวิกฤตหาได้จากตารางการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน การประมาณนี้จะใช้ได้ดีแม้ว่าขนาดตัวอย่างทั้ง 2 ชุด มีขนาดเพียง 6 เท่านั้น (Gibbon 1971 : 145)

2.8 <u>การทดสอบแบบครัสคัล-แวลิส</u> (The Kruskal-Wallis Test)

เป็นสถิติที่ไม่ใช้พารามิเตอร์วิธีหนึ่ง ซึ่งใช้ทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของประชากรตั้งแต่สามกลุ่มขึ้นไป ซึ่งครัสคัล-แวลิสได้พัฒนาขึ้นในปี พ.ศ. 2495 มีหลักการที่ใช้ในการทดสอบเป็นเช่นเดียวกับการทดสอบโดยใช้ตัวสถิติของ วิลค้อกซอน (Wilcoxon's Ranksum test) ต่างกันที่ว่าตัวสถิติของ ครัสคัล-แวลิส ใช้ทดสอบกับประชากร ตั้งแต่ 3 กลุ่มขึ้นไป และมีลักษณะการวิเคราะห์ทำนองเดียวกับการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบทางเดียว

ตารางที่ 2.8.1 แสดงลักษณะของข้อมูลที่ใช้ในการทดสอบแบบครัสคัล-แวลิส

| ทรีทเมนต์ | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | . . . . . | k |
| $Y_{11}$ | $Y_{21}$ | | $Y_{k1}$ |
| $Y_{12}$ | $Y_{22}$ | | $Y_{k2}$ |
| . | . | | . |
| . | . | | . |
| . | . | | . |
| $Y_{1n_1}$ | $Y_{2n_2}$ | | $Y_{kn_k}$ |

ให้ $R_i$ แทนผลรวมของค่าอันดับในกลุ่มที่ i

$$R_i = \sum_{j=1}^{n_i} R(Y_{ij}) \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

$$j = 1, 2, \ldots, n_i$$

ให้ N แทนจำนวนค่าสังเกตทั้งหมด

ดังนั้น $$N = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

$$E(R_i) = \left[\frac{n_i}{N}\right] \frac{N}{2}(N+1)$$

$$= \frac{n_i}{2}(N+1)$$

ตัวสถิติที่ใช้ทดสอบคือ $$S = \sum_{i=1}^{k} \left[R_i - E(R_i)\right]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left[R_i - \frac{n_i}{2}(N+1)\right]^2$$

จะปฏิเสธสมมติฐานว่าง (Null hypothesis) เมื่อ S มีค่ามากกว่า $S_\alpha$ โดยที่ $S_\alpha$ เป็นค่าวิกฤตซึ่งหาได้จากตารางการทดสอบของครัสคัล-แวลิส (ดูตารางที่ 2 ในภาคผนวก ค)

$$R(Y_{ij}) = 1,2......,N$$

$$E[R(Y_{ij})] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} i = \frac{1}{2}(N+1)$$

$$V[R(Y_{ij})] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(i-\frac{N+1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N} i^2 - 2\frac{(N+1)}{2}\sum_{i=1}^{N} + \frac{N(N+1)^2}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{N}\left[\frac{N}{6}(N+1)(2N+1)-(N+1)\frac{N}{2}(N+1)+\frac{N(N+1)^2}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{12} N^2-1$$

$$R_i = \sum_{j=1}^{n_i} R(y_{ij})$$

$$\bar{R}_i = \frac{R_i}{n_i}$$

$$E(\bar{R}_i) = E\left(\frac{R_i}{n_i}\right)$$

$$= \frac{1}{n_i}\left[\frac{n_i(N+1)}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}(N+1)$$

$$V(\bar{R}_i) = \frac{1}{12n_i}(N-n_i)(N+1)$$

ถ้า N มีขนาดใหญ่ เมื่อใช้ทฤษฎีลิมิตสู่ส่วนกลาง (Central limit theorem) จะได้

$$Z = \frac{\bar{R}_i - E(\bar{R}_i)}{\sqrt{V(\bar{R}_i)}} \sim N(0, 1)$$

ซึ่ง $Z_i^2$ จะมีการแจกแจงซึ่งสามารถประมาณได้ด้วยการแจกแจงแบบไคสแควร์โดยมีองศาแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ 1

พิจารณา

$$H = \sum_{i=1}^{k} (1-f_i)\, Z_i^2 \quad ; \quad f_i = \frac{n_i}{N}$$

$$= 12n_i \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{N-n_i}{N}\right) \frac{\left(\bar{R}_i - \frac{N+1}{2}\right)^2}{(N-n_i)(N+1)}$$

$$= \frac{12}{N(N+1)} \left[ \sum_{i=1}^{k} n_i \bar{R}_i^2 - (N+1) \sum_{i=1}^{k} n_i \bar{R}_i + \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 \sum_{i=1}^{k} n_i \right]$$

$$= \frac{12}{N(N+1)} \left[ \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - (N+1) \sum_{i=1}^{K} n_i \frac{R_i}{n_i} + \frac{N(N+1)^2}{4} \right]$$

$$= \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)$$

H จะมีการแจกแจงซึ่งสามารถประมาณได้ด้วยการแจกแจงแบบไคสแควร์ โดยมีองศาแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ k-1 เมื่อ N มีขนาดใหญ่ จะปฏิเสธสมมติฐานว่างเมื่อ H มีค่ามากกว่า $\chi^2_{(K-1),\alpha}$

ข้อตกลงเบื้องต้นสำหรับการทดสอบแบบครัสคัล-แวลิส (Conover ; 1980 : 230) มีดังต่อไปนี้

1) กลุ่มตัวอย่างทั้ง K กลุ่ม เป็นตัวอย่างที่สุ่มมาจากแต่ละประชากร

2) ตัวอย่างสุ่มภายในกลุ่ม และระหว่างกลุ่มเป็นอิสระกัน

3) สเกลที่ใช้วัดข้อมูลอย่างน้อยต้องเป็นสเกลแบบอันดับมาตรา (Ordinal Scale)

4) ประชากรที่นำมาทดสอบจะต้องมีการแจกแจงแบบเดียวกันและมีความแปรปรวนเท่ากัน

การคำนวณค่าสถิติ

1. กรณีที่ไม่มีอันดับเท่ากัน (Untied Rank)

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)$$

2. กรณีที่มีอันดับเท่ากัน (Ties rank) ให้ใช้ค่าเฉลี่ยของอันดับเป็นตัวแทนอันดับที่ซ้ำ

ให้ $t_s$ = ความถี่ของการซ้ำในอันดับที่ s

ดังนั้นตัวสถิติที่ใช้ทดสอบคือ

$$H = \frac{\frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)}{1 - \frac{1}{N^3-N} \sum_{s=1}^{d} (t_s^3 - t_s)}$$

โดยที่ N = จำนวนค่าสังเกตทั้งหมด

$n_i$ = จำนวนค่าสังเกตในแต่ละกลุ่มตัวอย่าง

$R_i$ = ผลรวมของอันดับในแต่ละกลุ่มตัวอย่าง

d = จำนวนอันดับที่มีการซ้ำเกิดขึ้น

เมื่อจำนวนกลุ่มตัวอย่างเท่ากับ 3 (k=3) และในแต่ละกลุ่มมีจำนวนค่าสังเกตน้อยกว่าหรือเท่ากับ 5 จะปฏิเสธสมมติฐานว่างเมื่อ S มีค่ามากกว่า $S_\alpha$ เมื่อกลุ่มตัวอย่างเท่ากับ 3 จำนวนค่าสังเกตในแต่ละกลุ่มมีค่ามากกว่า 5 หรือขนาดตัวอย่างมากกว่า 15 จะปฏิเสธสมมติฐานว่าง เมื่อ H มีค่ามากกว่า $\chi^2_{(k-1)}$

2.9 <u>การทดสอบแบบฟรีดแมน</u> (Friedman-Two-Way Analysis of Variance)

เป็นสถิติที่ไม่ใช้พารามิเตอร์ ซึ่งใช้ทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของประชากรตั้งแต่สามกลุ่มขึ้นไป กรณีข้อมูลมีการแจกแจงสองทางเช่นเดียวกันกับการวิเคราะห์

ข้อมูลในแผนแบบการทดลองแบบสุ่มในบล็อก

ตารางที่ 2.9.1 แสดงลักษณะของข้อมูลที่ใช้ในการทดสอบแบบฟรีดแมน

| j / i | | ทรีทเมนต์ 1 | 2 | n |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $X_{11}$ | $X_{12}$ . . . . . . . . . | $X_{1n}$ |
| Block | 2 | $X_{21}$ | $X_{22}$ . . . . . . . . . | $X_{2n}$ |
| | 3 | . | . . . . . . . . . . . | . |
| | . | . | . . . . . . . . . . . | . |
| | . | . | . . . . . . . . . . . | . |
| | . | . | . . . . . . . . . . . | . |
| | . | . | . . . . . . . . . . | . |
| | k | $X_{k1}$ | $X_{k2}$ . . . . . . . . . | $X_{kn}$ |

จากข้อมูลในตารางข้างต้นนำมาจัดอันดับ (Rank) ภายในแต่ละ Block ให้ $R_{ij}$ แทนค่าอันดับของข้อมูล ในบล็อก i และทรีทเมนต์ j จัดข้อมูลในตารางของอันดับได้ดังนี้

ตารางที่ 2.9.2 แสดงอันดับของข้อมูล

| j / i | ทรีทเมนต์ 1 | 2 | | n |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $R_{11}$ | $R_{12}$ | . . . . . | $R_{in}$ |
| 2 | $R_{21}$ | $R_{22}$ | . . . . . | $R_{2n}$ |
| . | : | : | | |
| . | | | | |
| k | $R_{k1}$ | $R_{k2}$ | . . . . . | $R_{kn}$ |
| ผลรวมของอันดับ | $R_1$ | $R_2$ | | $R_n$ |

ถ้าแต่ละ Treatment ไม่มีความแตกต่างกัน ผลรวมของอันดับควรจะเท่า ๆ กัน เท่ากับค่าเฉลี่ยของอันดับรวมทั้งหมด เท่ากับ $\left[\frac{nk}{2}(n+1)\right]/n$

ตัวสถิติที่ใช้ทดสอบคือ $S = \sum_{j=1}^{n} \left(R_j - \frac{k(n+1)}{2}\right)^2$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{k} \left(R_{ij} - \frac{(n+1)}{2}\right)\right]^2$$

จะปฏิเสธสมมติฐานว่าง (Null hypothesis) เมื่อ S มีค่ามากกว่า $S_\alpha$ และการคำนวณค่า $\alpha$ จะได้ค่าที่เป็น Exact probability ซึ่งกระทำได้ค่อนข้างยุ่งยากเมื่อมีข้อมูลจำนวนมาก จึงใช้สูตรตัวสถิติทดสอบ

$$F = \frac{12}{kn(n+1)} \sum_{j=1}^{n} R_j^2 - 3k(n+1)$$

เมื่อ $k$ = จำนวนแถว (Block)

$n$ = จำนวนสิ่งทดลอง (Treatment)

$R_j$ = ผลรวมของอันดับของแต่ละทรีทเมนต์

F จะมีการแจกแจงซึ่งประมาณได้ด้วยการแจกแจงแบบไคสแควส์ โดยมีองศาแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ n-1 และจะปฏิเสธสมมติฐานว่าง (Null hypothesis) เมื่อ F มีค่ามากกว่า $\chi^2_{\alpha,\, n-1}$

ข้อกำหนดสำหรับข้อมูลที่ใช้ในการทดสอบแบบฟรีดแมน คือ ข้อมูลอย่างน้อยต้องอยู่ในสเกลแบบอันดับมาตรา (Ordinal Scale)

2.10 <u>การทดสอบแบบหุ่นบวกของทูกี้</u> (Tukey's Test for Non-additivity)

การทดสอบแบบหุ่นบวกทูกี้ เป็นการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับข้อมูลว่าอยู่ในรูปของการเกิดข้อมูลแบบบวกหรือไม่ วิธีตรวจสอบนี้มีดังนี้

ตัวแบบ $X_{ij} = \mu + \beta_i + \tau_j + \varepsilon_{ij}$

เมื่อ $X_{ij}$ แทนค่าสังเกต Block i, Treatment j

$\beta_i$ แทนค่าอิทธิพล $\beta_i$

$\tau_j$ แทนค่าอิทธิพล $\tau_j$

$\varepsilon_{ij}$ แทนความคลาดเคลื่อนสุ่มของค่าสังเกต ij

ตารางที่ 2.10.1 แสดงลักษณะข้อมูลที่จะนำมาทดสอบ และค่าสถิติที่ใช้

| Block i | ทรีทเมนต์ j<br>1 2 c | $X_{i.}$ $\bar{X}_i$ $d_i$ $w_i = \sum_j X_{ji} d_i$ |
|---|---|---|
| 1<br>.<br>.<br>.<br>r | | |
| $X_{.j}$<br>$\bar{X}_{.j}$ | | $\sum_i w_i$ |
| $d_j$ | | $\bar{X}_{..}$ |

วิธีการคำนวณ

1. คำนวณ $d_i = \bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..}$

$d_j = \bar{X}_{.j} - \bar{X}_{..}$

2. คำนวณ $w_i = \sum_j X_{ji} d_j$

$N = \Sigma w_i d_i$

3. คำนวณ $\Sigma d_i^2$ , $\Sigma d_j^2$

$$D = (\Sigma d_i^2)(\Sigma d_j^2)$$

4. Sum of Square of Non-additivity $= \frac{N^2}{D}$

ค่า SS ที่เกิดจาก Non-additivity รวมอยู่ในความคลาดเคลื่อน SS (Error SS) เท่ากับ $\frac{N^2}{D}$ มี df เท่ากับ 1 การตรวจสอบกระทำโดย F-test ตัวหารคือส่วนที่เหลือในความคลาดเคลื่อน SS ซึ่งมีค่า df [(r-1)(c-1)-1] เมื่อ r และ c เป็นจำนวนแถวนอนและแถวตั้งตามลำดับ

ตารางที่ 2.10.2 การวิเคราะห์ความแปรปรวนและการตรวจสอบแบบหุ่นบวก

| SOV | df | SS | MS | F |
|---|---|---|---|---|
| Block | r-1 | | | |
| Treatment | c-1 | | | |
| Error | (r-1)(c-1) | ERRSS | | |
| Non-additivity | 1 | $\frac{N^2}{D}$ | $\frac{N^2}{D}$ = MSNON | $\frac{\text{MSNON}}{\text{MSREM}}$ |
| Remainder | [(r-1)(c-1)-1] | ERRSS $-\frac{N^2}{D}$ =REMSS | $\frac{\text{REMSS}}{[(r-1)(c-1)-1]}$ = MSREM | |

จะปฏิเสธสมมติฐานว่างที่กล่าวว่าข้อมูลเป็นแบบบวก เมื่อ F ที่คำนวณได้มากกว่า $F_\alpha$ (1, [(r-1)(c-1)-1])

## 2.11 การทดสอบแบบโคโมโกรอฟ-สมายนอฟ (Kolmogorov-Smirnov Test)

ใช้ทดสอบ Goodness of Fit ในกรณีหนึ่งตัวอย่าง โดยนำ Empirical Distribution เข้ามาใช้ด้วย ข้อมูลที่จะใช้อย่างน้อยต้องอยู่ในอันดับมาตรา การทดสอบสมมติฐาน ทดสอบได้ทั้งแบบด้านเดียวและสองด้าน

$$H_o \quad : \quad F_x(x) = F_o(x)$$

$$H_a \quad : \quad F_X(x) \neq F_o(x)$$

ตัวสถิติทดสอบ คือ

$$D_n = \sup_x \left| S_n(x) - F_X(x) \right|$$

โดย $F_X(x)$ คือ Cumnulative distribution function ของประชากรที่ต้องการทดสอบ

$S_n(x)$ คือ Empirical distribution function

จะปฏิเสธสมมติฐานว่าง เมื่อ $D_n > D_{n,\alpha}$ ค่า $D_{n,\alpha}$ เป็นค่าวิกฤตซึ่งหาได้จากตารางการทดสอบของโคโมกรอฟ-สมายนอฟ (ดูตารางที่ 3 ในภาคผนวก ค)