โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ ผลเฉลยเป็นคาบมูลฐาน p ของระบบสมการเชิงผลต่างบางแบบ
Prime period p solution of some system of difference equations

ชื่อนิสิต นางสาวนันทิยา กงละวัล 6033522423

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2563

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ผลเฉลยเป็นคาบมูลฐาน p ของระบบสมการเชิงผลต่างบางแบบ

นางสาวนันทิยา กงละวัล

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2563

Prime period p solution of some system of difference equations

Nanthiya Konglawan

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2020

หัวข้อโครงงาน	ผลเฉลยเป็นคาบมูลฐาน p ของระบบสมการเชิงผลต่างบางแบบ
โดย	นางสาวนันทิยา กงละวัล
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก	รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิต ในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

.... หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี) และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงงาน

.... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก

(รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ)

.... กรรมการ

(ศาสตราจารย์ ดร.ไพศาล นาคมหาชลาสินธุ์)

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สุจินต์ คมฤทัย)

นันทิยา กงละวัล: ผลเฉลยเป็นคาบมูลฐาน p ของระบบสมการเชิงผลต่างบางแบบ
(Prime period p solution of some system of difference equations)
อ.ที่ปรึกษาโครงงานหลัก : รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ, 28 หน้า.

โครงงานนี้ศึกษาผลเฉลยที่เป็นคาบมูลฐาน p พร้อมทั้งจุดสมดุลของระบบสมการเชิงผลต่างในรูป $x_{n+1} = |x_n| - y_n - b,\ y_{n+1} = x_n - |y_n| + 1$ เมื่อ $n \geq 0$, b เป็นจำนวนเต็มบางตัวที่ $b \geq 3$, $x_0 = 0$ และ $y_0 \geq 0$

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต นันทิยา กงละวัล
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงานหลัก
ปีการศึกษา 2563

6033522423: MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS : Difference equation, Equilibrium point, Prime period solution

NANTHIYA KONGLAWAN : Prime period p solution of some system of difference Equtions. ADVISOR : ASSOC. PROF. Ratinan Boonklurb, Ph.D., 28 pp.

The aim of this project is to study prime period p solutions and equilibrium points of the system of diference equations $x_{n+1} = |x_n| - y_n - b$ and $y_{n+1} = x_n - |y_n| + 1$ where $n \geq 0$, b is an integer such that $b \geq 3$, $x_0 = 0$ and $y_0 \geq 0$.

Department : Mathematics and Computer Science Student's Signature Nanthiya

Field of Study : Mathematics Advisor's Signature R. Boonklurb

Academic Year : 2020

กิตติกรรมประกาศ

โครงงานเรื่อง ผลเฉลยเป็นคาบมูลฐาน p ของระบบสมการเชิงผลต่างบางแบบได้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี เพราะได้รับความช่วยเหลือจากผู้มีพระคุณหลาย ๆ ท่านด้วยกัน ทางผู้ดำเนินงานโครงงานจึงขอขอบคุณในความช่วยเหลือต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ ที่กรุณารับเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานและคอยให้ความช่วยเหลือ ให้คำปรึกษา ชี้แนะให้เห็นปัญหาและข้อผิดพลาดต่าง ๆ ในการทำโครงงานตลอดมา ตั้งแต่เริ่มต้นทำงานจนโครงงานนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดีอย่างสมบูรณ์และมีประสิทธิภาพ

ขอขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.ไพศาล นาคมหาชลาสินธุ์ และรองศาสตราจารย์ ดร.สุจินต์ คมฤทัย ที่ให้ความกรุณาเป็นกรรมการสอบโครงงาน และได้ให้ข้อเสนอแนะ ข้อคิด รวมถึงชี้ให้เห็นข้อผิดพลาดต่าง ๆ ซึ่งทำให้โครงงานนี้สมบูรณ์และมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

นอกจากนี้ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านและรุ่นพี่ทุกคนที่ได้ให้ความรู้และคำแนะนำ ตลอดระยะเวลาที่ได้ศึกษาที่จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และตลอดระยะเวลาที่ได้ทำโครงงานนี้มา

สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ และครอบครัวที่คอยสนับสนุน และขอบคุณเพื่อน ๆ ทุกคนที่คอยให้กำลังใจ ให้คำปรึกษาและข้อเสนอแนะต่าง ๆ ในการทำโครงงานครั้งนี้

สารบัญ

บทที่ 1
บทนำและความรู้พื้นฐาน

นักคณิตศาสตร์สนใจศึกษาผลเฉลยและพฤติกรรมของผลเฉลยของสมการเชิงผลต่าง ตลอดจนระบบสมการเชิงผลต่างในรูปแบบต่าง ๆ มากมาย ซึ่งสมการและระบบสมการเชิงผลต่างเหล่านี้ สามารถนำไปประยุกต์ทั้งในวิชาคณิตศาสตร์และสามารถนำไปประยุกต์เป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายปรากฏการณ์ต่าง ๆ ในสาขาวิชาอื่น ๆ ได้ เช่น โครงข่ายประสาทเทียม และนิเวศวิทยา [1, 2, 5]

สำหรับระบบสมการเชิงผลต่างที่โครงงานนี้สนใจศึกษา เป็นระบบสมการเชิงผลต่างของสองตัวแปรอันดับ 1 ที่มีรูปแบบทั่วไปอยู่ในรูป

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n),\ \ y_{n+1} = g(x_n, y_n), n \geq 0 \qquad (1.1)$$

โดย f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจากเซต $J \times J$ ไปยังเซต J เมื่อ J เป็นช่วงบนจำนวนจริงหรือยูเนียนของช่วงบนจำนวนจริง

บทนิยาม 1.1 ผลเฉลยของระบบสมการเชิงผลต่าง (1.1) คือ ลำดับ $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ ที่สอดคล้องกับระบบสมการเชิงผลต่าง (1.1)

สังเกตว่า สำหรับเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 = \alpha$ และ $y_0 = \beta$ ที่ α และ β เป็นจำนวนจริง จะได้ผลเฉลย $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ ของระบบสมการเชิงผลต่าง (1.1) เพียงชุดเดียว

บทนิยาม 1.2 ผลเฉลยสมดุลของระบบสมการเชิงผลต่าง (1.1) คือ ผลเฉลยของระบบสมการเชิงผลต่าง (1.1) ที่เป็นลำดับคงตัว $x_n = \bar{x}$ และ $y_n = \bar{y}$ ทั้งคู่ ทุก $n \geq 0$ ในกรณีนี้จะเรียก $(\bar{x}, \bar{y})$ ว่าจุดสมดุลของ (1.1)

ผลเฉลยของระบบสมการเชิงผลต่าง (1.1) จะเรียกว่าเป็นผลเฉลยที่ลู่เข้าสู่จุดสมดุล ถ้ามีจำนวนนับ N ที่ $x_n = \bar{x}$ และ $y_n = \bar{y}$ ทุก $n \geq N$

บทนิยาม 1.3 ผลเฉลย $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ ของระบบสมการเชิงผลต่าง (1.1) จะเรียกว่าเป็นคาบมูลฐาน p เมื่อ p เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่สอดคล้อง

$$x_{n+p} = x_n \text{ และ } y_{n+p} = y_n \qquad (1.2)$$

ทุก $n \geq 0$

ผลเฉลยของระบบสมการเชิงผลต่าง (1.1) จะเรียกว่าเป็นผลเฉลยที่ลู่เข้าสู่ผลเฉลยที่เป็นคาบมูลฐาน p เมื่อ p เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด ถ้ามีจำนวนนับ N ที่ $x_{n+p} = x_n$ และ $y_{n+p} = y_n$ ทุก $n \geq N$

ตัวอย่างของระบบสมการเชิงผลต่างของสองตัวแปรอันดับ 1 ที่มีการศึกษามาก่อน [6] เช่น ระบบสมการเชิงผลต่างในรูป

$$x_{n+1} = |x_n| + ay_n + b,\ \ y_{n+1} = x_n + c|y_n| + d,\ n \geq 0 \quad (1.3)$$

โดยที่เงื่อนไขเริ่มต้น $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ และพารามิเตอร์ a, b, c และ d เป็นสมาชิกใน $\{-1,0,1\}$

ต่อมา Grove และคณะ [3] ศึกษาผลเฉลยของระบบสมการเชิงผลต่างที่เป็นรูปแบบเฉพาะของ (1.3) ในรูป

$$x_{n+1} = |x_n| - y_n - 1,\ \ y_{n+1} = x_n + |y_n|,\ n \geq 0 \quad (1.4)$$

แล้วพบว่ามีเงื่อนไขเริ่มต้นที่ทำให้ผลเฉลยของ (1.4) ลู่เข้าสู่ผลเฉลยสมดุล และมีเงื่อนไขเริ่มต้นที่ทำให้ผลเฉลยของ (1.4) ลู่เข้าสู่ผลเฉลยที่เป็นคาบมูลฐาน 3

Krinket และ Tikjha [4] ศึกษาผลเฉลยของระบบสมการเชิงผลต่างที่เป็นรูปแบบเฉพาะของ (1.3) ในรูป

$$x_{n+1} = |x_n| - y_n - 1,\ \ y_{n+1} = x_n + |y_n| + 1,\ n \geq 0 \quad (1.5)$$

ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น $x_0 = 0$ และ $y_0 \in (0,1) \cup \left(\frac{5}{4}, \infty\right)$ โดยพบว่า ผลเฉลยของที่ศึกษาลู่เข้าสู่ผลเฉลยที่เป็นคาบมูลฐาน 4

วิโรจน์ ติ๊กจ๊ะ [7] ขยายการศึกษาจาก (1.3) มาเป็นการศึกษาผลเฉลยของระบบสมการเชิงผลต่างในรูป

$$x_{n+1} = |x_n| - y_n - 2,\ y_{n+1} = x_n - |y_n| + 1,\ n \geq 0 \quad (1.6)$$

ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น $x_0 = 0$ และ $y_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ โดยพบว่า ผลเฉลยของที่ศึกษาลู่เข้าสู่ผลเฉลยที่เป็นคาบมูลฐาน 4

โครงงานนี้ สนใจที่จะศึกษาผลเฉลยที่เป็นผลเฉลยสมดุล และผลเฉลยที่เป็นคาบมูลฐาน p ของระบบสมการเชิงผลต่างที่ปรับรูปแบบจาก (1.3) เป็น

$$x_{n+1} = |x_n| - y_n - b,\ \ y_{n+1} = x_n - |y_n| + 1,\ n \geq 0$$

โดยพารามิเตอร์ b เป็นจำนวนนับบางตัวที่ $b \geq 3$ และ $x_0 = 0$ และ $y_0 \geq 0$

บทที่ 2

ผลเฉลยสมดุลและผลเฉลยเป็นคาบของระบบสมการเชิงผลต่าง

พิจารณาระบบสมการเชิงผลต่างในรูป

$$x_{n+1} = |x_n| - y_n - b,\ \ y_{n+1} = x_n - |y_n| + 1,\ n \geq 0 \qquad (2.1)$$

เมื่อพารามิเตอร์ b เป็นจำนวนนับบางตัวที่ $b \geq 3$, $x_0 = 0$ และ $y_0 \geq 0$

ในขั้นแรกจะพิสูจน์ทฤษฎีบทประกอบที่เกี่ยวกับจุดสมดุลของ (2.1) ดังนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 2.1 กำหนดให้ $\{(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{(y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ เป็นผลเฉลยของ (2.1) สมมติว่ามีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $y_N = -x_N - b + 1 < 0$ จะได้ว่า ถ้า $x_N < 0$ แล้ว

$$(x_n, y_n) = (-1, -b + 2)$$

ทุก $n > N$

พิสูจน์ สมมติว่ามีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $y_N = -x_N - b + 1$ ให้ $x_N < 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= |x_N| - y_N - b\ = -x_N - (-x_N - b + 1) - b = -1 \\ y_{N+1} &= x_N - |y_N| + 1 = \ x_N + (-x_N - b + 1) + 1\ = -b + 2 \end{aligned}$$

และเนื่องจาก $b \geq 3$ จะได้ว่า $-b + 2 < 0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} x_{N+2} &= |x_{N+1}| - y_{N+1} - b\ = 1 - (-b + 2) - b = -1 \\ y_{N+2} &= x_{N+1} - |y_{N+1}| + 1\ = -1 + (-b + 2) + 1\ = -b + 2 \end{aligned}$$

ดังนั้นโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ $(x_n, y_n) = (-1, -b + 2)$ ทุก $n > N$ □

ในกรณี $b = 4$ และ $b = 5$ จะได้ว่า ถ้า $x_0 = 0$ และ $y_0 \geq 0$ แล้ว จะมีจำนวนนับ N ที่ $x_n = \bar{x}$ และ $y_n = \bar{y}$ ทุก $n \geq N$ นั่นคือ ผลเฉลยของ (2.1) ในกรณีนี้ลู่เข้าสู่จุดสมดุล ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2 ถ้า $b = 4$ และเงื่อนไขเริ่มต้น (i) $(x_0, y_0) \in \{(x, y) | x = 0, 0 \leq y \leq 1\}$ หรือ (ii) $(x_0, y_0) \in \{(x, y) | x = 0, y > 1\}$ แล้วจะมีจำนวนนับ N ที่ผลเฉลย $\{(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{(y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ ของ (2.1) อยู่ในรูป $x_n = -1$ และ $y_n = -2$ ทุก $n \geq N$ นั่นคือ ผลเฉลย $\{(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{(y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ ของ (2.1) ลู่เข้าสู่จุดสมดุล $(-1, -2)$

พิสูจน์ (i) ให้ $(x_0, y_0) \in \{(x,y)|x = 0, 0 \le y \le 1\}$

จะได้ว่า $x_1 = |x_0| - y_0 - 4 = -y_0 - 4 < 0, \quad y_1 = x_0 - |y_0| + 1 = -y_0 + 1 \ge 0$

$x_2 = |x_1| - y_1 - 4 = 2y_0 - 1, \quad y_2 = x_1 - |y_1| + 1 = -4$

กรณี 1 ถ้า $y_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ แล้ว $x_2 < 0$ ทำให้ได้ว่า

$x_3 = |x_2| - y_2 - 4 = -2y_0 + 1 > 0, \quad y_3 = x_2 - |y_2| + 1 = 2y_0 - 4 < 0$

$x_4 = |x_3| - y_3 - 4 = -4y_0 + 1, \quad y_4 = x_3 - |y_3| + 1 = -2$

กรณี 1.1 ถ้า $y_0 \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ แล้ว $x_4 < 0$ ทำให้ได้ว่า

$x_5 = |x_4| - y_4 - 4 = 4y_0 - 3 < 0,$

$y_5 = x_4 - |y_4| + 1 = -4y_0 = -x_5 - 4 + 1$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จะได้ว่า $(x_n, y_n) = (-1, -2)$ ทุก $n \ge 6$

กรณี 1.2 ถ้า $y_0 \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ แล้ว $x_4 \ge 0$ ทำให้ได้ว่า

$x_5 = |x_4| - y_4 - 4 = -4y_0 - 1 < 0, \quad y_5 = x_4 - |y_4| + 1 = -4y_0 \le 0$

$x_6 = |x_5| - y_5 - 4 = 8y_0 - 3 < 0,$

$y_6 = x_5 - |y_5| + 1 = -8y_0 = -x_6 - 4 + 1$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จะได้ว่า $(x_n, y_n) = (-1, -2)$ ทุก $n \ge 7$

กรณี 2 ถ้า $y_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ แล้ว $x_2 \ge 0$ ทำให้ได้ว่า

$x_3 = |x_2| - y_2 - 4 = 2y_0 - 1 \ge 0, \quad y_3 = x_2 - |y_2| + 1 = 2y_0 - 4 < 0$

$x_4 = |x_3| - y_3 - 4 = -1, \quad y_4 = x_3 - |y_3| + 1 = 4y_0 - 4 \le 0$

$x_5 = |x_4| - y_4 - 4 = 1 - 4y_0 < 0,$

$y_5 = x_4 - |y_4| + 1 = 4y_0 - 4 = -x_5 - 4 + 1$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จะได้ว่า $(x_n, y_n) = (-1, -2)$ ทุก $n \ge 6$

(ii) ให้ $(x_0, y_0) \in \{(x,y)|x = 0, y > 1\}$

$x_1 = |x_0| - y_0 - 4 = -y_0 - 4 < 0, \quad y_1 = x_0 - |y_0| + 1 = -y_0 + 1 < 0$

$x_2 = |x_1| - y_1 - 4 = 2y_0 - 1 > 0, \quad y_2 = x_1 - |y_1| + 1 = -2y_0 - 2 < 0$

$x_3 = |x_2| - y_2 - 4 = 4y_0 - 3 > 0, \quad y_3 = x_2 - |y_2| + 1 = -2$

$x_4 = |x_3| - y_3 - 4 = 4y_0 - 5, \quad y_4 = x_3 - |y_3| + 1 = 4y_0 - 4 > 0$

กรณี 1 ถ้า $y_0 \in \left[\frac{5}{4}, \infty\right)$ แล้ว $x_4 \ge 0$ ทำให้ได้ว่า

$x_5 = |x_4| - y_4 - 4 = -5, \quad y_5 = x_4 - |y_4| + 1 = 0$

$x_6 = |x_5| - y_5 - 4 = 1, \quad y_6 = x_5 - |y_5| + 1 = 4$

$x_7 = |x_6| - y_6 - 4 = 1, \quad y_7 = x_6 - |y_6| + 1 = -2$

$x_8 = |x_7| - y_7 - 4 = -1, \quad y_8 = x_7 - |y_7| + 1 = 0$

$x_9 = |x_8| - y_8 - 4 = -3 < 0,$

$y_9 = x_8 - |y_8| + 1 = 0 = -x_9 - 4 + 1$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จะได้ว่า $(x_n, y_n) = (-1, -2)$ ทุก $n \geq 10$

กรณี 2 ถ้า $y_0 \in \left(1, \frac{5}{4}\right)$ แล้ว $x_4 < 0$ ทำให้ได้ว่า

$x_5 = |x_4| - y_4 - 4 = -8y_0 + 5 < 0$, $\quad y_5 = x_4 - |y_4| + 1 = 0$

$x_6 = |x_5| - y_5 - 4 = 8y_0 - 9$, $\quad y_6 = x_5 - |y_5| + 1 = -8y_0 + 6 < 0$

กรณี 2.1 ถ้า $y_0 \in \left(1, \frac{9}{8}\right)$ แล้ว $x_6 < 0$ และ $y_6 = -x_6 - 4 + 1$ โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จะได้ว่า $(x_n, y_n) = (-1, -2)$ ทุก $n \geq 7$

กรณี 2.2 ถ้า $y_0 \in \left[\frac{9}{8}, \frac{5}{4}\right)$ แล้ว $x_6 \geq 0$ ทำให้ได้ว่า

$x_7 = |x_6| - y_6 - 4 = 16y_0 - 19$, $\quad y_7 = x_6 - |y_6| + 1 = -2$

กรณี 2.2.1 ถ้า $y_0 \in \left[\frac{9}{8}, \frac{19}{16}\right)$ แล้ว $x_7 < 0$ ทำให้ได้ว่า

$x_8 = |x_7| - y_7 - 4 = -16y_0 + 17 < 0$,

$y_8 = x_7 - |y_7| + 1 = 16y_0 - 20 = -x_8 - 4 + 1$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จะได้ว่า $(x_n, y_n) = (-1, -2)$ ทุก $n \geq 9$

กรณี 2.2.2 ถ้า $y_0 \in \left[\frac{19}{16}, \frac{5}{4}\right)$ แล้ว $x_7 \geq 0$ ทำให้ได้ว่า

$x_8 = |x_7| - y_7 - 4 = 16y_0 - 21 < 0$, $y_8 = x_7 - |y_7| + 1 = 16y_0 - 20 \leq 0$

$x_9 = |x_8| - y_8 - 4 = -32y_0 + 37 < 0$,

$y_9 = x_8 - |y_8| + 1 = 32y_0 - 40 = -x_9 - 4 + 1$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จะได้ว่า $(x_n, y_n) = (-1, -2)$ ทุก $n \geq 10$ □

ทฤษฎีบท 2.3 ถ้า $b = 5$ และเงื่อนไขเริ่มต้น (i) $(x_0, y_0) \in \{(x, y) | x = 0, 0 \leq y \leq 1\}$ หรือ (ii) $(x_0, y_0) \in \{(x, y) | x = 0, y > 1\}$ แล้วจะมีจำนวนนับ N ที่ผลเฉลย $\{(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{(y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ ของ (2.1) อยู่ในรูป $x_n = -1$ และ $y_n = -3$ ทุก $n \geq N$ นั่นคือ ผลเฉลย $\{(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{(y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ ของ (2.1) ลู่เข้าสู่จุดสมดุล $(-1, -3)$

พิสูจน์ (i) ให้ $(x_0, y_0) \in \{(x, y) | x = 0, 0 \leq y \leq 1\}$

$x_1 = |x_0| - y_0 - 5 = -y_0 - 5 < 0$, $\quad y_1 = x_0 - |y_0| + 1 = -y_0 + 1 \geq 0$

$x_2 = |x_1| - y_1 - 5 = 2y_0 - 1$, $\quad y_2 = x_1 - |y_1| + 1 = -5$

กรณี 1 ถ้า $y_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ แล้ว $x_2 < 0$ ทำให้ได้ว่า

$x_3 = |x_2| - y_2 - 5 = -2y_0 + 1 > 0$, $\quad y_3 = x_2 - |y_2| + 1 = 2y_0 - 5 < 0$

$x_4 = |x_3| - y_3 - 5 = -4y_0 + 1$, $\quad y_4 = x_3 - |y_3| + 1 = -3$

กรณี 1.1 ถ้า $y_0 \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ แล้ว $x_4 < 0$ ทำให้ได้ว่า

$x_5 = |x_4| - y_4 - 5 = 4y_0 - 3 < 0$,

$y_5 = x_4 - |y_4| + 1 = -4y_0 = -x_5 - 5 + 1$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จะได้ว่า $(x_n, y_n) = (-1, -3)$ ทุก $n \geq 6$

กรณี 1.2 ถ้า $y_0 \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ แล้ว $x_4 \geq 0$ ทำให้ได้ว่า

$x_5 = |x_4| - y_4 - 5 = -4y_0 - 1 < 0$, $\quad y_5 = x_4 - |y_4| + 1 = -4y_0 - 1 < 0$

$x_6 = |x_5| - y_5 - 5 = 8y_0 - 3 < 0$,

$y_6 = x_5 - |y_5| + 1 = -8y_0 - 1 = -x_6 - 5 + 1$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จะได้ว่า $(x_n, y_n) = (-1, -3)$ ทุก $n \geq 7$

กรณี 2 ถ้า $y_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ แล้ว $x_2 \geq 0$ ทำให้ได้ว่า

$x_3 = |x_2| - y_2 - 5 = 2y_0 - 1 \geq 0$, $\quad y_3 = x_2 - |y_2| + 1 = 2y_0 - 5 < 0$

$x_4 = |x_3| - y_3 - 5 = -1$, $\quad y_4 = x_3 - |y_3| + 1 = 4y_0 - 5 \leq 0$

$x_5 = |x_4| - y_4 - 5 = 1 - 4y_0 < 0$,

$y_5 = x_4 - |y_4| + 1 = 4y_0 - 5 = -x_5 - 5 + 1$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จะได้ว่า $(x_n, y_n) = (-1, -3)$ ทุก $n \geq 6$

(ii) ให้ $(x_0, y_0) \in \{(x, y) | x = 0, y > 1\}$

$x_1 = |x_0| - y_0 - 5 = -y_0 - 5 < 0$, $\quad y_1 = x_0 - |y_0| + 1 = -y_0 + 1 < 0$

$x_2 = |x_1| - y_1 - 5 = 2y_0 - 1 > 0$, $\quad y_2 = x_1 - |y_1| + 1 = -2y_0 - 3 < 0$

$x_3 = |x_2| - y_2 - 5 = 4y_0 - 3 > 0$, $\quad y_3 = x_2 - |y_2| + 1 = -3$

$x_4 = |x_3| - y_3 - 5 = 4y_0 - 5$, $\quad y_4 = x_3 - |y_3| + 1 = 4y_0 - 5$

กรณี 1 ถ้า $y_0 \in \left[\frac{5}{4}, \infty\right)$ แล้ว $x_4 \geq 0$ และ $y_4 \geq 0$ ทำให้ได้ว่า

$x_5 = |x_4| - y_4 - 5 = -5$, $\quad y_5 = x_4 - |y_4| + 1 = 1$

$x_6 = |x_5| - y_5 - 5 = -1$, $\quad y_6 = x_5 - |y_5| + 1 = -5$

$x_7 = |x_6| - y_6 - 5 = 1$, $\quad y_7 = x_6 - |y_6| + 1 = -5$

$x_8 = |x_7| - y_7 - 5 = 1$, $\quad y_8 = x_7 - |y_7| + 1 = -3$

$x_9 = |x_8| - y_8 - 5 = -1$, $\quad y_9 = x_8 - |y_8| + 1 = -1$

$x_{10} = |x_9| - y_9 - 5 = -3$,

$y_{10} = x_9 - |y_9| + 1 = -1 = -x_{10} - 5 + 1$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จะได้ว่า $(x_n, y_n) = (-1, -3)$ ทุก $n \geq 11$

กรณี 2 ถ้า $y_0 \in \left(1, \frac{5}{4}\right)$ แล้ว $x_4 < 0$ และ $y_4 < 0$ ทำให้ได้ว่า

$x_5 = |x_4| - y_4 - 5 = -8y_0 + 5$, $\quad y_5 = x_4 - |y_4| + 1 = 8y_0 - 9$

กรณี 2.1 ถ้า $y_0 \in \left(1, \frac{9}{8}\right]$ แล้ว $x_5 \leq 0$ และ $y_5 = -x_5 - 5 + 1$ โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จะได้ว่า $(x_n, y_n) = (-1, -3)$ ทุก $n \geq 6$

กรณี 2.2 ถ้า $y_0 \in \left(\frac{9}{8}, \frac{5}{4}\right)$ แล้ว $x_5 < 0$ และ $y_5 > 0$ ทำให้ได้ว่า

$x_6 = |x_5| - y_5 - 5 = -1$, $\quad y_6 = x_5 - |y_5| + 1 = -16y_0 + 15 < 0$

$x_7 = |x_6| - y_6 - 5 = 16y_0 - 19$, $\quad y_7 = x_6 - |y_6| + 1 = -2$

กรณี 2.2.1 ถ้า $y_0 \in \left(\frac{19}{16}, \frac{5}{4}\right)$ แล้ว $x_7 > 0$ และ $y_7 < 0$ ทำให้ได้ว่า

$x_8 = |x_7| - y_7 - 5 = 32y_0 - 9 > 0$, $y_8 = x_7 - |y_7| + 1 = -3$

$x_9 = |x_8| - y_8 - 5 = 32y_0 - 11 > 0$,$y_9 = x_8 - |y_8| + 1 = 32y_0 - 11 > 0$

$x_{10} = |x_9| - y_9 - 5 = -5$, $\quad y_{10} = x_9 - |y_9| + 1 = 1$

$x_{11} = |x_{10}| - y_{10} - 5 = -1$, $\quad y_{11} = x_{10} - |y_{10}| + 1 = -5$

$x_{12} = |x_{11}| - y_{11} - 5 = 1$, $\quad y_{12} = x_{11} - |y_{11}| + 1 = -5$

$x_{13} = |x_{12}| - y_{12} - 5 = 1$, $\quad y_{13} = x_{12} - |y_{12}| + 1 = -3$

$x_{14} = |x_{13}| - y_{13} - 5 = -1$, $\quad y_{14} = x_{13} - |y_{13}| + 1 = -1$

$x_{15} = |x_{14}| - y_{14} - 5 = -3 < 0$,

$y_{15} = x_{14} - |y_{14}| + 1 = -1 = -x_{15} - 5 + 1$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จะได้ว่า $(x_n, y_n) = (-1, -3)$ ทุก $n \geq 16$

กรณี 2.2.2 ถ้า $y_0 \in \left(\frac{9}{8}, \frac{19}{16}\right]$ แล้ว $x_7 \leq 0$ และ $y_7 = -x_7 - 5 + 1$ โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.1 จะได้ว่า $(x_n, y_n) = (-1, -3)$ ทุก $n \geq 8$ □

ในกรณีที่ $b = 3$ และเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น $(0,0)$ หรือ $(0,1)$ แล้วจะมีจำนวนนับ N ที่ $(x_n, y_n) = (1, -3)$, $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (1, -1)$, $(x_{n+2}, y_{n+2}) = (-1, 1)$, $(x_{n+3}, y_{n+3}) = (-3, -1)$ และ $(x_{n+4}, y_{n+4}) = (x_n, y_n)$ ทุก $n \geq N$ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.4 ถ้า $b = 3$ และเงื่อนไขเริ่มต้น (i) $(x_0, y_0) = (0,0)$ หรือ (ii) $(x_0, y_0) = (0,1)$ แล้วผลเฉลย $\{(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{(y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ ของ (2.1) จะลู่เข้าสู่ผลเฉลยที่เป็นคาบมูลฐาน 4

พิสูจน์ (i) ให้ $(x_0, y_0) = (0,0)$

$x_1 = |x_0| - y_0 - 3 = -3$, $\quad y_1 = x_0 - |y_0| + 1 = 1$

$x_2 = |x_1| - y_1 - 3 = -1$, $\quad y_2 = x_1 - |y_1| + 1 = -3$

$x_3 = |x_2| - y_2 - 3 = 1$, $\quad y_3 = x_2 - |y_2| + 1 = -3$

$x_4 = |x_3| - y_3 - 3 = 1$, $\quad y_4 = x_3 - |y_3| + 1 = -1$

$x_5 = |x_4| - y_4 - 3 = -1$, $\quad y_5 = x_4 - |y_4| + 1 = 1$

$x_6 = |x_5| - y_5 - 3 = -3$, $\quad y_6 = x_5 - |y_5| + 1 = -1$

$x_7 = |x_6| - y_6 - 3 = 1 = x_3$, $\quad y_7 = x_6 - |y_6| + 1 = -3 = y_3$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $x_{n+4} = x_n$ และ $y_{n+4} = y_n$ ทุก $n \geq 3$

(ii) ให้ $(x_0, y_0) = (0,1)$

$$x_1 = |x_0| - y_0 - 3 = -4, \qquad y_1 = x_0 - |y_0| + 1 = 0$$
$$x_2 = |x_1| - y_1 - 3 = 1, \qquad y_2 = x_1 - |y_1| + 1 = -3$$
$$x_3 = |x_2| - y_2 - 3 = 1, \qquad y_3 = x_2 - |y_2| + 1 = -1$$
$$x_4 = |x_3| - y_3 - 3 = -1, \qquad y_4 = x_3 - |y_3| + 1 = 1$$
$$x_5 = |x_4| - y_4 - 3 = -3, \qquad y_5 = x_4 - |y_4| + 1 = -1$$
$$x_6 = |x_5| - y_5 - 3 = 1 = x_2, \qquad y_6 = x_5 - |y_5| + 1 = -3 = y_2$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $x_{n+4} = x_n$ และ $y_{n+4} = y_n$ ทุก $n \geq 2$ □

ในกรณีที่ $b > 3$ และ 7 หาร b ได้ k ครั้ง และเหลือเศษ 3 จะได้ว่า ถ้าเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น $(0, k)$ แล้วจะมี N ที่ $(x_n, y_n) = (2k - 1, -9k + 6)$, $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (4k - 3, -7k + 6)$, $(x_{n+2}, y_{n+2}) = (4k - 5, -3k + 4)$, $(x_{n+3}, y_{n+3}) = (-5, k)$, $(x_{n+4}, y_{n+4}) = (-8k + 9, -k - 4)$ และ $(x_{n+5}, y_{n+5}) = (x_n, y_n)$ ทุก $n \geq N$ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.5 ถ้า $b = 7k - 4$ เมื่อ k เป็นจำนวนนับซึ่ง $k \geq 2$ และเงื่อนไขเริ่มต้น $(x_0, y_0) = (0, k)$ แล้วผลเฉลย $\{(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{(y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ ของ (2.1) ลู่เข้าสู่ผลเฉลยที่เป็นคาบมูลฐานทุก 5

พิสูจน์ ให้ $(x_0, y_0) = (0, k)$

$$x_1 = |x_0| - y_0 - 7k + 4 = -8k + 4 < 0, y_1 = x_0 - |y_0| + 1 = -k + 1 < 0$$
$$x_2 = |x_1| - y_1 - 7\text{k} + 4 = 2k - 1 > 0, \quad y_2 = x_1 - |y_1| + 1 = -9k + 6 < 0$$
$$x_3 = |x_2| - y_2 - 7\text{k} + 4 = 4k - 3 > 0, \quad y_3 = x_2 - |y_2| + 1 = -7k + 6 < 0$$
$$x_4 = |x_3| - y_3 - 7\text{k} + 4 = 4k - 5 > 0, \quad y_4 = x_3 - |y_3| + 1 = -3k + 4 < 0$$
$$x_5 = |x_4| - y_4 - 7k + 4 = -5, \qquad y_5 = x_4 - |y_4| + 1 = k > 0$$
$$x_6 = |x_5| - y_5 - 7k + 4 = -8k + 9 < 0, y_6 = x_5 - |y_5| + 1 = -k - 4 < 0$$
$$x_7 = |x_6| - y_6 - 7k + 4 = 2k - 1 = x_2,$$
$$y_7 = x_6 - |y_6| + 1 = -9k + 6 = y_2$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $x_{n+5} = x_n$ และ $y_{n+5} = y_n$ ทุก $n \geq 2$ □

ในกรณีที่ $b > 3$ และ 7 หาร b ได้ k ครั้ง และเหลือเศษ 3 จะได้ว่า ถ้าเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น $(0, k + 1)$ แล้วจะมี N ที่ $(x_n, y_n) = (-5, 7k - 8)$, $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (-14k + 17, -7k + 4)$, $(x_{n+2}, y_{n+2}) = (14k - 17, -21k + 22)$, $(x_{n+3}, y_{n+3}) = (-28k - 35, -7k + 6)$ $(x_{n+4}, y_{n+4}) = (28k - 37, 21k - 28)$ และ $(x_{n+5}, y_{n+5}) = (x_n, y_n)$ ทุก $n \geq N$
ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.6 ถ้า $b = 7k - 4$ เมื่อ k เป็นจำนวนนับซึ่ง $k \geq 2$ และเงื่อนไขเริ่มต้น $(x_0, y_0) = (0, k+1)$ แล้วผลเฉลย $\{(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{(y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ ของ (2.1) จะลู่เข้าสู่ผลเฉลยที่เป็นคาบมูลฐานทุก 5

พิสูจน์ ให้ $\alpha \geq 0$, k เป็นจำนวนนับที่ $\frac{2^{3\alpha+2}+4}{3} < k \leq \frac{2^{3(\alpha+1)+2}+4}{3}$ และ $(x_0, y_0) = (0, k+1)$
จะได้ว่า $x_1 = |x_0| - y_0 - 7k + 4 = -8k + 3 < 0, y_1 = x_0 - |y_0| + 1 = -k < 0$

$x_2 = |x_1| - y_1 - 7k + 4 = 2k + 1 > 0, \quad y_2 = x_1 - |y_1| + 1 = -9k + 4 < 0$

$x_3 = |x_2| - y_2 - 7k + 4 = 4k + 1 > 0, \quad y_3 = x_2 - |y_2| + 1 = -7k + 6 < 0$

$x_4 = |x_3| - y_3 - 7k + 4 = 4k + 2^{3(0)+2} - 5 > 0,$

$y_4 = x_3 - |y_3| + 1 = -3k + 2^{3(0)+2} + 4$

เนื่องจาก $k > \frac{2^{3(0)+2}+4}{3}$ เพราะฉะนั้น $y_4 = x_3 - |y_3| + 1 = -3k + 2^{3(0)+2} + 4 < 0$

$x_5 = |x_4| - y_4 - 7k + 4 = -5,$

$y_5 = x_4 - |y_4| + 1 = k + 2(2^{3(0)+2}) > 0$

$x_6 = |x_5| - y_5 - 7k + 4 = -8k + 9 - 2(2^{3(0)+2}) < 0,$

$y_6 = x_5 - |y_5| + 1 = -k - 4 - 2(2^{3(0)+2}) < 0$

$x_7 = |x_6| - y_6 - 7k + 4 = 2k - 1 + 4(2^{3(0)+2}) > 0,$

$y_7 = x_6 - |y_6| + 1 = -9k + 6 - 4(2^{3(0)+2}) < 0$

$x_8 = |x_7| - y_7 - 7k + 4 = 4k - 3 + 8(2^{3(0)+2}) > 0,$

$y_8 = x_7 - |y_7| + 1 = -7k + 6 < 0$

$x_9 = |x_8| - y_8 - 7k + 4 = 4k + 2^{3(1)+2} - 5 > 0,$

$y_9 = x_8 - |y_8| + 1 = -3k + 2^{3(1)+2} + 4$

เนื่องจาก $k > \frac{2^{3(1)+2}+4}{3}$ เพราะฉะนั้น $y_9 = x_8 - |y_8| + 1 = -3k + 2^{3(1)+2} + 4 < 0$

$x_{10} = |x_9| - y_9 - 7k + 4 = -5,$

$y_{10} = x_9 - |y_9| + 1 = k + 2(2^{3(1)+2}) > 0$

$x_{11} = |x_{10}| - y_{10} - 7k + 4 = -8k + 9 - 2(2^{3(1)+2}) < 0,$

$y_{11} = x_{10} - |y_{10}| + 1 = -k - 4 - 2(2^{3(1)+2}) < 0$

$x_{12} = |x_{11}| - y_{11} - 7k + 4 = 2k - 1 + 4(2^{3(1)+2}) > 0,$

$y_{12} = x_{11} - |y_{11}| + 1 = -9k + 6 - 4(2^{3(1)+2}) < 0$

$x_{13} = |x_{12}| - y_{12} - 7k + 4 = 4k - 3 + 8(2^{3(1)+2}) > 0,$

$y_{13} = x_{12} - |y_{12}| + 1 = -7k + 6 < 0$

$x_{14} = |x_{13}| - y_{13} - 7k + 4 = 4k + 2^{3(2)+2} - 5 > 0,$

$y_{14} = x_{13} - |y_{13}| + 1 = -3k + 2^{3(2)+2} + 4$

เนื่องจาก $k > \frac{2^{3(2)+2}+4}{3}$ เพราะฉะนั้น $y_{14} = x_{13} - |y_{13}| + 1 = -3k + 2^{3(2)+2} + 4 < 0$

$x_{15} = |x_{14}| - y_{14} - 7k + 4 = -5,$

$y_{15} = x_{14} - |y_{14}| + 1 = k + 2(2^{3(2)+2}) > 0$

$x_{16} = |x_{15}| - y_{15} - 7k + 4 = -8k + 9 - 2(2^{3(2)+2}) < 0,$

$y_{16} = x_{15} - |y_{15}| + 1 = -k - 4 - 2(2^{3(2)+2}) < 0$

$x_{17} = |x_{16}| - y_{16} - 7k + 4 = 2k - 1 + 4(2^{3(2)+2}) > 0,$

$y_{17} = x_{16} - |y_{16}| + 1 = -9k + 6 - 4(2^{3(2)+2}) < 0$

$x_{18} = |x_{17}| - y_{17} - 7k + 4 = 4k - 3 + 8(2^{3(2)+2}) > 0,$

$y_{18} = x_{17} - |y_{17}| + 1 = -7k + 6 < 0$

$x_{19} = |x_{18}| - y_{18} - 7k + 4 = 4k + 2^{3(3)+2} - 5 > 0,$

$y_{19} = x_{18} - |y_{18}| + 1 = -3k + 2^{3(3)+2} + 4$

เนื่องจาก $k > \frac{2^{3(3)+2}+4}{3}$ เพราะฉะนั้น $y_{19} = x_{18} - |y_{18}| + 1 = -3k + 2^{3(3)+2} + 4 < 0$

ดำเนินการเช่นนี้เรื่อยไปจนได้ว่า

$x_{5(\alpha+1)} = |x_{5\alpha+4}| - y_{5\alpha+4} - 7k + 4 = -5,$

$y_{5(\alpha+1)} = x_{5\alpha+4} - |y_{5\alpha+4}| + 1 = k + 2(2^{3(\alpha)+2}) > 0$

$x_{5(\alpha+1)+1} = |x_{5(\alpha+1)}| - y_{5(\alpha+1)} - 7k + 4 = -8k + 9 - 2(2^{3(\alpha)+2}) < 0,$

$y_{5(\alpha+1)+1} = x_{5(\alpha+1)} - |y_{5(\alpha+1)}| + 1 = -k - 4 - 2(2^{3(\alpha)+2}) < 0$

$x_{5(\alpha+1)+2} = |x_{5(\alpha+1)+1}| - y_{5(\alpha+1)+1} - 7k + 4 = 2k - 1 + 4(2^{3(\alpha)+2}) > 0,$

$y_{5(\alpha+1)+2} = x_{5(\alpha+1)+1} - |y_{5(\alpha+1)+1}| + 1 = -9k + 6 - 4(2^{3(\alpha)+2}) < 0$

$x_{5(\alpha+1)+3} = |x_{5(\alpha+1)+2}| - y_{5(\alpha+1)+2} - 7k + 4 = 4k - 3 + 8(2^{3(\alpha)+2}) > 0,$

$y_{5(\alpha+1)+3} = x_{5(\alpha+1)+2} - |y_{5(\alpha+1)+2}| + 1 = -7k + 6 < 0$

$x_{5(\alpha+1)+4} = |x_{5(\alpha+1)+3}| - y_{5(\alpha+1)+3} - 7k + 4 = 4k + 2^{3(\alpha+1)+2} - 5 > 0,$

$y_{5(\alpha+1)+4} = x_{5(\alpha+1)+3} - |y_{5(\alpha+1)+3}| + 1 = -3k + 2^{3(\alpha+1)+2} + 4$

เนื่องจาก $k \leq \frac{2^{3(\alpha+1)+2}+4}{3}$ เพราะฉะนั้น

$y_{5(\alpha+1)+4} = x_{5(\alpha+1)+3} - |y_{5(\alpha+1)+3}| + 1 = -3k + 2^{3(\alpha+1)+2} + 4 \geq 0$

$x_{5(\alpha+2)} = |x_{5(\alpha+1)+4}| - y_{5(\alpha+1)+4} - 7k + 4 = -5,$

$y_{5(\alpha+2)} = x_{5(\alpha+1)+4} - |y_{5(\alpha+1)+4}| + 1 = 7k - 8 > 0$

$x_{5(\alpha+2)+1} = |x_{5(\alpha+2)}| - y_{5(\alpha+2)} - 7k + 4 = -14k + 17 < 0,$

$y_{5(\alpha+2)+1} = x_{5(\alpha+2)} - |y_{5(\alpha+2)}| + 1 = -7k + 4 < 0$

$x_{5(\alpha+2)+2} = |x_{5(\alpha+2)+1}| - y_{5(\alpha+2)+1} - 7k + 4 = 14k - 17 > 0,$

$y_{5(\alpha+2)+2} = x_{5(\alpha+2)+1} - |y_{5(\alpha+2)+1}| + 1 = -21k + 22 < 0$

$x_{5(\alpha+2)+3} = |x_{5(\alpha+2)+2}| - y_{5(\alpha+2)+2} - 7k + 4 = 28k - 35 > 0,$

$y_{5(\alpha+2)+3} = x_{5(\alpha+2)+2} - |y_{5(\alpha+2)+2}| + 1 = -7k + 6 < 0$

$$x_{5(\alpha+2)+4} = |x_{5(\alpha+2)+3}| - y_{5(\alpha+2)+3} - 7k + 4 = 28k - 37 > 0,$$

$$y_{5(\alpha+2)+4} = x_{5(\alpha+2)+3} - |y_{5(\alpha+2)+3}| + 1 = 21k - 28 > 0$$

$$x_{5(\alpha+3)} = |x_{5(\alpha+2)+4}| - y_{5(\alpha+2)+4} - 7k + 4 = -5 = x_{5(\alpha+2)},$$

$$y_{5(\alpha+3)} = x_{5(\alpha+2)+4} - |y_{5(\alpha+2)+4}| + 1 = 7k - 8 = y_{5(\alpha+2)}$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $x_{n+5} = x_n$ และ $y_{n+5} = y_n$ ทุก $n \geq 5(\alpha + 2)$ □

บทที่ 3
บทสรุปและข้อเสนอแนะ

โครงงานนี้ ศึกษาระบบสมการเชิงผลต่าง (2.1) ในรูป

$$x_{n+1} = |x_n| - y_n - b,\ \ y_{n+1} = x_n - |y_n| + 1,\ n \geq 0$$

เมื่อพารามิเตอร์ b เป็นจำนวนนับบางตัวที่ $b \geq 3$, $x_0 = 0$ และ $y_0 \geq 0$ ได้ผลดังนี้

พารามิเตอร์	เงื่อนไขเริ่มต้น	ลักษณะของผลเฉลย
$b = 3$	$y_0 = 0$	ผลเฉลย $\{(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{(y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ ของ (2.1) ลู่เข้าสู่ผลเฉลยที่เป็นคาบมูลฐาน 4
	$y_0 = 1$	
$b = 4$	$y_0 \geq 0$	ผลเฉลย $\{(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{(y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ ของ (2.1) ลู่เข้าสู่จุดสมดุล
$b = 5$	$y_0 \geq 0$	ผลเฉลย $\{(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{(y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ ของ (2.1) ลู่เข้าสู่จุดสมดุล
$b = 7k - 4$ เมื่อ k เป็นจำนวนนับซึ่ง $k \geq 2$	$y_0 = k$	ผลเฉลย $\{(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{(y_n)\}_{n=0}^{\infty}$ ของ (2.1) ลู่เข้าสู่ผลเฉลยที่เป็นคาบมูลฐาน 5
	$y_0 = k + 1$	

สังเกตว่าโครงงานฉบับนี้ศึกษา b ทั้งหมด 4 แบบ และแต่ละแบบมีค่าเริ่มต้น y_0 แตกต่างกันดังสรุปข้างต้น ด้วยแนวคิดเดียวกันนี้ ผู้ที่สนใจอาจพยายามสร้างข้อความคาดการณ์และทำการพิสูจน์ข้อสรุปเกี่ยวกับผลเฉลยของระบบสมการ $x_{n+1} = |x_n| - y_n - b,\ y_{n+1} = x_n - |y_n| + 1,$ $n \geq 0$ โดยพารามิเตอร์ b เป็นจำนวนนับในแบบอื่น ๆ นอกเหนือจาก 4 แบบเหล่านี้ หรือขยายแนวคิดไปสู่การพิจารณาค่าเริ่มต้นลักษณะอื่น ๆ เช่น $x_0 \neq 0$ ต่อไปได้

รายการอ้างอิง

[1] Chua, L.O. and Yang, L. “Cellular neural network: Applications.” *IEEE Transactions on circuits and systems* 38. (1991): 1273-1290.

[2] Grove, E.A. and Ladas, G. *Periodicities in nonlinear difference equations*. CRC Press, 2005.

[3] Grove, E.A., Lapierre E., and Tikjha, W. "On the global behavior of $x_{n+1} = |x_n| - y_n - 1$ and $y_{n+1} = x_n + |y_n|$." *CUBO, A Mathematical Journal* 14.2 (2012): 111-152.

[4] Krinket, S. and Tikjha, W. "Prime period solution of cartain piecewise linear system of difference equation." *Proceedings of the Pibulsongkram Research* (2015): 76-83.

[5] Kulenovic, M.R.S. and Merino, O. Discrete dynamic systems and difference equations with Mathematica. CRC Press, 2002.

[6] Lapierre, E.G. "On the Global Behavior of Some Systems of Difference." *Open Access Dissertations* (2013).

[7] วิโรจน์ ติ๊กจ๊ะ. “ผลเฉลยที่เป็นไพรม์พีเรียด 4 และจุดสมดุลของระบบสมการเชิงผลต่าง $x_{n+1} = |x_n| - y_n - 2$ และ $y_{n+1} = x_n - |y_n| + 1$ โดยเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 = 0$ และ $0 < y_0 < \frac{1}{2}$.” *วารสารวิทยาศาสตร์ มศว (Srinakharinwirot Science Journal)* 33.2 (2017): 183-194.

ภาคผนวก

ภาคผนวก
แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal
ปีการศึกษา 2563

ชื่อโครงงาน (ภาษาไทย)	ผลเฉลยเป็นคาบมูลฐาน p ของระบบสมการเชิงผลต่างบางแบบ
ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ)	Prime period p solution of some system of difference equations
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ
ผู้ดำเนินการ	นางสาวนันทิยา กงละวัล เลขประจำตัวนิสิต 6033522423
	สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
	คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

นักคณิตศาสตร์สนใจศึกษาผลเฉลยและพฤติกรรมของผลเฉลยของสมการเชิงผลต่าง ตลอดจนระบบสมการเชิงผลต่างในรูปแบบต่าง ๆ มากมาย ซึ่งสมการและระบบสมการเชิงผลต่างเหล่านี้ สามารถนำไปประยุกต์ทั้งในวิชาคณิตศาสตร์และสามารถนำไปประยุกต์เป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายปรากฏการณ์ต่าง ๆ ในสาขาวิชาอื่น ๆ ได้ เช่น โครงข่ายประสาทเทียม และนิเวศวิทยา [1, 2, 5]

สำหรับระบบสมการเชิงผลต่างที่โครงงานนี้สนใจศึกษา เป็นระบบสมการเชิงผลต่างอันดับ 1 ที่มีรูปแบบทั่วไปอยู่ในรูป

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n),\ y_{n+1} = g(x_n, y_n), n \geq 0 \tag{1}$$

โดยที่ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจากเซต $J \times J$ ไปยังเซต J เมื่อ J เป็นช่วงบนจำนวนจริงหรือยูเนียนของช่วงบนจำนวนจริง ผลเฉลยของระบบสมการเชิงผลต่าง คือ ลำดับ $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ ที่สอดคล้องกับระบบสมการเชิงผลต่าง (1) ทุก $n \geq 0$ เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 = \alpha$ และ $y_0 = \beta$ โดยที่ α และ β เป็นจำนวนจริง และสำหรับแต่ละเงื่อนไขเริ่มต้นจะได้ผลเฉลย $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ และ $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ เพียงชุดเดียว ผลเฉลยของระบบสมการเชิงผลต่าง (1) ที่เป็นลำดับคงตัว $x_n = \bar{x}$ และ $y_n = \bar{y}$ ทั้งคู่ จะเรียกว่าผลเฉลยสมดุล และเรียก $(\bar{x}, \bar{y})$ ว่าจุดสมดุลของระบบสมการเชิงผลต่าง (1) นอกจากนี้ผลเฉลยของระบบสมการนี้จะเรียกว่าเป็นคาบ p เมื่อมีจำนวนเต็ม $p \geq 1$ ซึ่ง

$$x_{n+p} = x_n \text{ และ } y_{n+p} = y_n \text{ ทุก } n \geq 0 \tag{2}$$

ยิ่งไปกว่านั้น ผลเฉลยของระบบสมการนี้จะเรียกว่าเป็นคาบมูลฐาน p ถ้า p เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่สอดคล้อง (2)

ตัวอย่างของระบบสมการเชิงผลต่างอันดับ 1 ที่มีการศึกษามาก่อน [6] เช่น ระบบสมการเชิงผลต่างในรูป

$$x_{n+1} = |x_n| + ay_n + b,\ \ y_{n+1} = x_n + c|y_n| + d,\ n \geq 0 \tag{3}$$

โดยที่เงื่อนไขเริ่มต้น $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ และพารามิเตอร์ a, b, c และ d เป็นสมาชิกใน $\{-1,0,1\}$

ต่อมา Grove และคณะ [3] ศึกษาผลเฉลยของระบบสมการที่เป็นรูปแบบเฉพาะของ (3) ในรูป

$$x_{n+1} = |x_n| - y_n - 1,\ \ y_{n+1} = x_n + |y_n|,\ n \geq 0 \tag{4}$$

พบว่ามีเงื่อนไขเริ่มต้นที่ทำให้ผลเฉลยของ (4) เป็นผลเฉลยสมดุล หรือมีเงื่อนไขเริ่มต้นที่ทำให้ผลเฉลยของ (4) เป็นคาบมูลฐาน 3

Krinket และ Tikjha [4] ศึกษาผลเฉลยของระบบสมการที่เป็นรูปแบบเฉพาะของ (3) ในรูป

$$x_{n+1} = |x_n| - y_n - 1,\ \ y_{n+1} = x_n + |y_n| + 1,\ n \geq 0 \tag{5}$$

ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น $x_0 = 0$ และ $y_0 \in (0,1) \cup \left(\frac{5}{4}, \infty\right)$ โดยพบว่า จะมีจำนวนเต็ม N ที่ทำให้ผลเฉลยของระบบสมการ (5) ที่สอดคล้องเงื่อนไขเริ่มต้นดังกล่าวเป็นคาบมูลฐาน 4 เมื่อ $n \geq N$

วิโรจน์ ติ๊กจ๊ะ [7] ขยายการศึกษาจาก (3) มาเป็นการศึกษาผลเฉลยของระบบสมการในรูป

$$x_{n+1} = |x_n| - y_n - 2,\ y_{n+1} = x_n - |y_n| + 1,\ n \geq 0 \tag{6}$$

ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น $x_0 = 0$ และ $y_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ โดยพบว่า จะมีจำนวนเต็ม N ที่ทำให้ผลเฉลยของระบบสมการ (6) ที่สอดคล้องเงื่อนไขเริ่มต้นดังกล่าวเป็นคาบมูลฐาน 4 เมื่อ $n \geq N$

โครงงานนี้ สนใจที่จะศึกษาผลเฉลยที่เป็นคาบมูลฐานของระบบสมการที่ปรับรูปแบบจาก (3) ในรูป

$$x_{n+1} = |x_n| - y_n - b,\ \ y_{n+1} = x_n - |y_n| + 1,\ n \geq 0 \tag{7}$$

โดยพารามิเตอร์ b เป็นจำนวนนับบางตัวที่มากกว่าหรือเท่ากับ 3 และ $x_0 = 0$

วัตถุประสงค์

โครงงานนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาระบบสมการเชิงผลต่างในรูป $x_{n+1} = |x_n| - y_n - b$, $y_{n+1} = x_n - |y_n| + 1$ เมื่อ $n \geq 0$, b เป็นจำนวนนับบางตัวที่มากกว่าหรือเท่ากับ 3 และ $x_0 = 0$ โดยจะหาช่วงของจำนวนจริง y_0 ที่ไม่เป็นลบที่ทำให้เกิดผลเฉลยสมดุลของระบบสมการดังกล่าว หรือช่วงของ y_0 ที่ทำให้เกิดผลเฉลยเป็นคาบมูลฐาน $p \geq 2$ ของระบบสมการดังกล่าว

ขอบเขตของโครงงาน

ในโครงงานนี้จะศึกษาเฉพาะระบบสมการในรูป $x_{n+1} = |x_n| - y_n - b$, $y_{n+1} = x_n - |y_n| + 1$ เมื่อ $n \geq 0$, b เป็นจำนวนนับบางตัวที่มากกว่าหรือเท่ากับ 3, $x_0 = 0$ และ $y_0 \geq 0$ เท่านั้น

วิธีการดำเนินงาน

1. ศึกษาปัญหา สืบค้นข้อมูลเพิ่มเติมเกี่ยวกับงานวิจัย และกำหนดหัวข้อที่จะศึกษา
2. สำรวจพฤติกรรมของผลเฉลยของระบบสมการ (7) โดยใช้โปรแกรม Microsoft Excel เมื่อเปลี่ยนเงื่อนไขค่าเริ่มต้น (x_0, y_0) เป็นค่าต่าง ๆ
3. นำผลจากการสำรวจมาสร้างข้อความคาดการณ์และทำการพิสูจน์
4. ตรวจสอบความถูกต้องของผลการดำเนินงาน
5. สรุปและจัดทำรูปเล่มรายงาน

วิธีการดำเนินงาน	สิงหาคม 2563 - เมษายน 2563								
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.
1. ศึกษาปัญหา สืบค้นข้อมูลเพิ่มเติมเกี่ยวกับงานวิจัย และกำหนดหัวข้อที่จะศึกษา									
2. สำรวจพฤติกรรมของผลเฉลยของระบบสมการ (7) โดยใช้โปรแกรม Microsoft Excel เมื่อเปลี่ยนเงื่อนไขค่าเริ่มต้น (x_0, y_0) เป็นค่าต่าง ๆ									
3. นำผลจากการสำรวจมาสร้างข้อความคาดการณ์และทำการพิสูจน์									
4. ตรวจสอบความถูกต้องของผลการดำเนินงาน									
5. สรุปและจัดทำรูปเล่มรายงาน									

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ได้ช่วงของจำนวนจริง y_0 ที่ไม่เป็นลบที่ทำให้เกิดผลเฉลยสมดุลของระบบสมการ (7) หรือช่วงของ y_0 ที่ทำให้เกิดผลเฉลยเป็นคาบมูลฐาน $p \geq 2$ ของระบบสมการ (7) เมื่อ b เป็นจำนวนนับบางตัวที่มากกว่าหรือเท่ากับ 3 และ $x_0 = 0$

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

1. กระดาษ A4
2. Notebook
3. โปรแกรม Microsoft Excel และ โปรแกรม Microsoft Word

งบประมาณ

1. Digital AV Adapter	1,790	บาท
2. USB Adapter Wi-Fi	220	บาท

เอกสารอ้างอิง

[1] Chua, L.O. and Yang, L. “Cellular neural network: Applications.” *IEEE Transactions on circuits and systems* 38. (1991): 1273-1290.

[2] Grove, E.A. and Ladas, G. *Periodicities in nonlinear difference equations*. CRC Press, 2005.

[3] Grove, E.A., Lapierre E., and Tikjha, W. "On the global behavior of $x_{n+1} = |x_n| - y_n - 1$ and $y_{n+1} = x_n + |y_n|$." *CUBO, A Mathematical Journal* 14.2 (2012): 111-152.

[4] Krinket, S. and Tikjha, W. "Prime period solution of cartain piecewise linear system of difference equation." *Proceedings of the Pibulsongkram Research* (2015): 76-83.

[5] Kulenovic, M.R.S. and Merino, O. Discrete dynamic systems and difference equations with Mathematica. CRC Press, 2002.

[6] Lapierre, E.G. "On the Global Behavior of Some Systems of Difference." *Open Access Dissertations* (2013).

[7] วิโรจน์ ติ๊กจ๊ะ. “ผลเฉลยที่เป็นไพรม์พีเรียด 4 และจุดสมดุลของระบบสมการเชิงผลต่าง $x_{n+1} = |x_n| - y_n - 2$ และ $y_{n+1} = x_n - |y_n| + 1$ โดยเงื่อนไขเริ่มต้น $x_0 = 0$ และ $0 < y_0 < \frac{1}{2}$.” *วารสารวิทยาศาสตร์ มศว (Srinakharinwirot Science Journal)* 33.2 (2017): 183-194.

ประวัติผู้เขียน

นางสาวนันทิยา กงละวัล

รหัสประจำตัวนิสิต 6033522423

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย