บทที่ 2

ตัวสถิติทดสอบและคุณสมบัติของการแจกแจง

ในการวิจัยครั้งนี้จะทำการศึกษาเปรียบเทียบความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และอำนาจการทดสอบของตัวสถิติทดสอบ 4 วิธี คือ ตัวสถิติทดสอบเอฟ ตัวสถิติทดสอบครัสคัล-วัลลิส ตัวสถิติทดสอบนอร์มอลสกอร์ และตัวสถิติทดสอบแบบดัดแปลงอย่างต่อเนื่อง ภายใต้ลักษณะการแจกแจงของประชากรที่กำหนดและปัจจัยต่างๆ ที่คาดว่าจะมีผลต่อการศึกษาดังได้กล่าวไว้ในขอบเขตของการวิจัยในบทที่ 1 สำหรับสมมติฐานของการทดสอบความเท่ากันของค่าเฉลี่ยประชากรในกรณีที่มีหลายประชากร มีรูปแบบดังนี้

H_0 : $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$

H_1 : มีค่าเฉลี่ยอย่างน้อย 1 คู่ที่แตกต่างกัน

โดยที่ μ_i แทนค่าเฉลี่ยของประชากรที่ i, $i = 1,2,3,\ldots,k$

สำหรับการวิจัยครั้งนี้ กำหนดจำนวนกลุ่มตัวอย่าง (k) เท่ากับ 3 และ 5 ซึ่งในบทนี้ จะกล่าวถึงรายละเอียดของการทดสอบแต่ละวิธี และรายละเอียดของการแจกแจงที่สำคัญที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้

2.1 ตัวสถิติทดสอบที่ใช้ในการวิจัย

2.1.1 ตัวสถิติทดสอบเอฟ (F Test)

การวิเคราะห์ความแปรปรวน ซึ่งเป็นวิธีการทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยประชากรตั้งแต่ 3 ประชากรขึ้นไป โดยมีสมมติฐานในการทดสอบข้างต้น ซึ่งเกณฑ์สำคัญที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐานคือ การแยกความแปรผันทั้งหมดของข้อมูลออกตามสาเหตุที่ทำให้ข้อมูลแตกต่างกัน นั่นคือ แยกความแปรผันทั้งหมดของข้อมูลออกเป็น

1. ความผันแปรหรือความแตกต่างระหว่างตัวอย่างแต่ละชุด
2. ความผันแปรหรือความแตกต่างภายในตัวอย่างแต่ละชุด

ความผันแปรทั้งหมด = ความผันแปรระหว่างตัวอย่าง + ความผันแปรภายในตัวอย่างเดียวกัน

วิธีการทดสอบ

1. ทำการทดสอบโดยอาศัยตัวสถิติทดสอบเอฟ คือ อัตราส่วนระหว่างผลรวมกำลังสองเฉลี่ยระหว่างตัวอย่างแต่ละชุด (treatment) กับผลรวมกำลังสองเฉลี่ยของภายในตัวอย่างแต่ละชุด

$$F = \frac{(N-k)\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{X}_i - \bar{X})^2}{(k-1)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2}$$

เมื่อ $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$, $\bar{X}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$ และ $\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i \bar{X}_i$

ภายใต้ H_0 ตัวสถิติทดสอบเอฟจะมีการแจกแจงเอฟ ด้วยองศาความเป็นอิสระ $(k-1)$ และ $(N-k)$

2. จะปฏิเสธ H_0 ถ้า $F_{cal} \geq F_{(1-\alpha),[(k-1),(N-k)]}$

2.1.2 ตัวสถิติทดสอบครัสคัล-วัลลิส (Kruskal-Wallis Test)

ครัสคัลและวัลลิส เป็นผู้พัฒนาสถิติทดสอบนี้ขึ้นมาในปี ค.ศ. 1952 เพื่อศึกษาเปรียบเทียบความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติของประชากร ซึ่งเป็นที่มาของกลุ่มตัวอย่างสุ่มตั้งแต่ 3 กลุ่มที่เป็นอิสระกัน ตัวสถิติทดสอบของครัสคัล-วัลลิสนี้มีพื้นฐานการสร้างเช่นเดียวกับตัวสถิติทดสอบของวิลคอกซัน (Wilcoxon' Rank-Sum Test) แตกต่างกันที่ตัวสถิติทดสอบครัสคัล-วัลลิส นั้นใช้เปรียบเทียบกับกลุ่มตัวอย่างที่มากกว่า 2 กลุ่มขึ้นไป และมีลักษณะการวิเคราะห์ในทำนองเดียวกับการวิเคราะห์ความแปรปรวนทางเดียว

<u>ข้อตกลงเบื้องต้น</u>

1. กลุ่มตัวอย่างทั้ง k กลุ่มต้องเป็นกลุ่มตัวอย่างสุ่มของแต่ละประชากร
2. กลุ่มตัวอย่างสุ่มภายในกลุ่มและระหว่างกลุ่มเป็นอิสระต่อกัน
3. มาตรากการวัดอย่างน้อยที่สุดเป็นมาตราจัดลำดับ
4. การแจกแจงของกลุ่มตัวอย่าง k กลุ่มเป็นอันหนึ่งอันเดียวกันโดยประมาณ
5. $n_i \geq 5 \ ;i = 1,2,\ldots,k$ โดยที่ n_i ขนาดตัวอย่างกลุ่มที่ i

<u>วิธีการทดสอบ</u>

1. ให้ลำดับที่แก่ข้อมูลทั้งหมด $(1,2,\ldots,n)$ โดยเรียงลำดับจากน้อยไปหามาก นั่นคือ ให้ค่าต่ำสุดเป็นลำดับที่ 1 และค่าสูงสุดเป็นลำดับที่ n

2. หาผลรวมของลำดับที่ในข้อมูลแต่ละกลุ่ม ให้เป็น $R_i \ ;i = 1,2,\ldots,k$

3. คำนวณค่าสถิติ

$$H = \frac{12}{N(N+1)}\sum_{i=1}^{k}\frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)$$

เมื่อ n_i = จำนวนชุดข้อมูลในกลุ่มที่ i

$N = \sum_{i=1}^{k} n_i$

R_i = ผลบวกของลำดับที่ของข้อมูลตัวอย่างกลุ่มที่ $i \ ;i = 1,2,\ldots,k$

4. ปฏิเสธสมมติฐาน H_0 ถ้า $H_{cal} \geq \chi^2_{(k-1);1-\alpha}$

2.1.3 ตัวสถิติทดสอบนอร์มอลสกอร์ (Normal Scores Test)

แวน เดอ แวร์เดน (Van der Waerden) เป็นผู้สร้างสถิติทดสอบนี้ขึ้นมาเมื่อ ค.ศ. 1953 โดยใช้ค่าของ inverse-normal scores $(Z^{(i)})$ แทนค่าที่ได้จากการสังเกต

<u>การแปลงคะแนนให้เป็น inverse-normal scores</u> $(Z^{(i)})$

ให้ $r_1, r_2, \ldots, r_n$ เป็นค่าอันดับคะแนนที่ได้มาจากการสังเกต และให้ p_i เป็นเปอร์เซ็นไทล์อันดับ (percentile rank) ซึ่งสัมพันธ์กับค่าสังเกต (normalized observation) จะได้ว่า

$$p_i = \frac{r_i}{N+1} \qquad ,i = 1,2,\ldots,n$$

ให้ $\phi(Z^{(i)})$ คือ การแจกแจงสะสม (comulative distribution) ของ $Z^{(i)}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} p_i &= \phi(Z^{(i)}) \\ Z^{(i)} &= \phi^{-1}(p_i) \\ &= \phi^{-1}\left(\frac{r_1}{N+1}\right) \end{aligned}$$

<u>ข้อตกลงเบื้องต้น</u>

1. กลุ่มตัวอย่างเป็นอิสระกัน (independent groups) และเป็นกลุ่มตัวอย่างสุ่ม
2. ตัวอย่างในกลุ่มเป็นอิสระกัน (independent within samples)
3. ไม่มีอันดับที่ซ้ำกัน (tied rank)

<u>วิธีการทดสอบ</u>

1. นำคะแนนที่ได้มาจากการสังเกตทั้งหมดมาจัดอันดับ เป็น R_{ij} เพื่อคำนวณหาค่า $Z^{(i)}$ ของแต่ละกลุ่มประชากร

2. ทำการทดสอบโดยอาศัยตัวสถิติ

$$Q = \frac{N-1}{\sum_{i=1}^{N}\left[\Phi^{-1}\left(\frac{i}{N+1}\right)\right]^2}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n_j}\Phi^{-1}\left(\frac{R_{ij}}{N+1}\right)\right]^2$$

เมื่อ $R_1,\ldots,\ R_N$ แทนลำดับของค่าสังเกต

$$N = \sum_{j=1}^{k} n_j$$

3. จะปฏิเสธ H_0 ถ้า $Q \geq \chi^2_{(k-1);1-\alpha}$

2.1.4 **ตัวสถิติทดสอบแบบดัดแปลงอย่างต่อเนื่อง** (Continuously Adaptive test)

ตัวสถิติทดสอบแบบดัดแปลงอย่างต่อเนื่อง เป็นการเลือกใช้ตัวสถิติทดสอบที่อาศัยเปอร์เซ็นไทล์ตัวอย่างที่เปอร์เซ็นไทล์ 25 และ 75 ใช้ความยาวหางทางซ้ายและขวาและพิสัยควอไทล์ (interquartile range : IQR)

<u>วิธีการทดสอบ</u>

1. นำข้อมูลทั้งหมดมาจัดเรียงอันดับเป็น R_{ij}

2. พิจารณาคะแนนสำหรับตัวสถิติทดสอบแบบดัดแปลงอย่างต่อเนื่องเป็น

$$a_{CA}(R_{ij}) = \begin{cases} L + (0.8401/T_L^*)^2(R_{ij} - L) & , \ R_{ij} < L \\ R_{ij} & , \ L \leq R_{ij} \leq U \\ U + (0.8401/T_R^*)^2(R_{ij} - U) & , \ R_{ij} > U \end{cases}$$

เมื่อ $L = \dfrac{(N+1)}{4}$ และ $U = \dfrac{3(N+1)}{2}$

$T_R^* = \max(T_R, 0.4)$ และ $T_L^* = \max(T_L, 0.4)$

โดยที่ T_R (ความยาวหางทางขวา) $= \dfrac{\left(\hat{\xi}_{0.95} - \hat{\xi}_{0.75}\right)}{IQR}$

T_L (ความยาวหางทางซ้าย) $= \dfrac{\left(\hat{\xi}_{0.25} - \hat{\xi}_{0.05}\right)}{IQR}$

$\hat{\xi}_p$ เป็นตัวอย่างเปอร์เซ็นไทล์ที่ 100

IQR แทนพิสัยควอไทล์ (Interquartile) $= \hat{\xi}_{0.75} - \hat{\xi}_{0.25}$

3. ทำการทดสอบโดยอาศัยตัวสถิติ

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{a}_i - \bar{a})^2}{\left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \left\{a(R_{ij}) - \bar{a}\right\}^2\right] \Big/ (N-1)}$$

ในขณะที่ $\bar{a}_i = \dfrac{\left\{\sum_{j=1}^{n_i} a(R_{ij})\right\}}{n_i}$

และ $\bar{a} = \dfrac{\left\{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} a(R_{ij})\right\}}{N}$

เมื่อ R_{ij} เป็นลำดับที่ของ x_{ij} ในตัวอย่างที่รวบรวมได้

$a(R_{ij})$ เป็นคะแนนที่กำหนดให้กับค่าสังเกตด้วยลำดับ R_{ij}

$N = n_1 + \ldots + n_k$

4. ปฏิเสธ H_0 ถ้า $A \geq \chi^2_{(k-1);1-\alpha}$

2.2 คุณสมบัติและลักษณะการแจกแจงของประชากรที่ศึกษา

2.2.1 การแจกแจงแลมดาของตูกีร์ (Tukey's Lambda Distribution)

Ramberg และ Schmeiser ได้เสนอวิธีการสร้างตัวแปรสุ่มที่ขึ้นอยู่กับความเบ้ (skewness : λ_3) และความโด่ง (kurtosis : λ_4) โดยตัวแปรสุ่มนี้มีการแจกแจงที่เรียกว่า "การแจกแจงแลมดาของตูกีร์" โดยที่ตัวแปรสุ่มนี้ถูกกำหนดจากค่าพารามิเตอร์ 4 ค่า ซึ่งมีความสัมพันธ์กับความเบ้และความโด่งดังนี้

$$X = R(p) = \lambda_1 + [p^{\lambda_3} - (1-p)^{\lambda_4}] / \lambda_2 \qquad ;0 \le p \le 1$$

ดังนั้น ตัวแปรสุ่ม X ที่มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแลมดาของตูกีร์ ด้วยพารามิเตอร์ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ และ λ_4 ถ้า X มีฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงคือ

$$\begin{aligned} f(x) &= f[R(p)] \\ &= 1 / R'(p) \\ f(x) &= \lambda_2 \left[\lambda_3 p^{\lambda_3 - 1} + \lambda_4 (1-p)^{\lambda_4 - 1}\right]^{-1}; \quad 0 \le p \le 1 \end{aligned}$$

เมื่อ p เป็นเลขสุ่มที่มีค่าระหว่าง 0 และ 1

λ_1 เป็นพารามิเตอร์ตำแหน่ง (Location parameter)

λ_2 เป็นพารามิเตอร์ขนาด (Scale parameter)

λ_3, λ_4 เป็นพารามิเตอร์รูปร่าง (Shape parameter) ซึ่งขึ้นกับค่าความเบ้และความโด่งที่กำหนด ถ้าการแจกแจงเป็นแบบสมมาตร จะได้ว่า $\lambda_3 = \lambda_4$

ค่าเฉลี่ย $E(X) = \lambda_1 + A / \lambda_2$

ค่าความแปรปรวน $V(x) = (B - A^2) / \lambda_2^2$

สัมประสิทธิ์ความเบ้ $\alpha_3 = \mu_3 / \sigma^3$

สัมประสิทธิ์ความโด่ง $\alpha_4 = \mu_4 / \sigma^4$

และ $\mu_3 = (C - 3AB + 2A^3) / \lambda_2^3$

$\mu_4 = (D - 4AC + 6A^2 B - 3A^4) / \lambda_2^4$

กำหนด

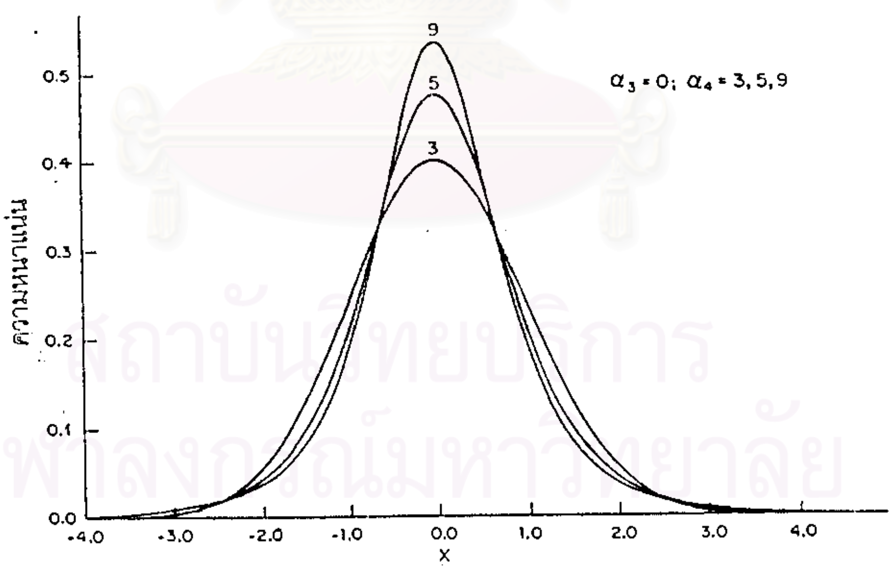
$$A = 1/(1+\lambda_3) - 1/(1+\lambda_4)$$

$$B = 1/(1+2\lambda_3) + 1/(1+2\lambda_4) - 2\beta(1+\lambda_3, 1+\lambda_4)$$

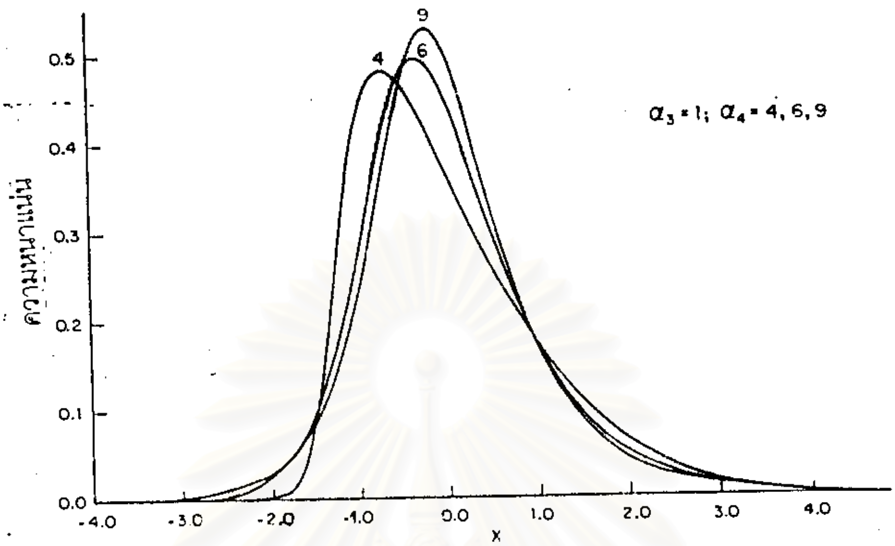
$$C = 1/(1+3\lambda_3) - 3\beta(1+2\lambda_3, 1+\lambda_4) + 3\beta(1+\lambda_3, 1+2\lambda_4) - 1/(1+3\lambda_4)$$

$$D = 1/(1+4\lambda_3) - 4\beta(1+3\lambda_3, 1+\lambda_4) + 6\beta(1+2\lambda_3, 1+2\lambda_4) - 4\beta(1+\lambda_3, 1+3\lambda_4) + 1/(1+4\lambda_4)$$

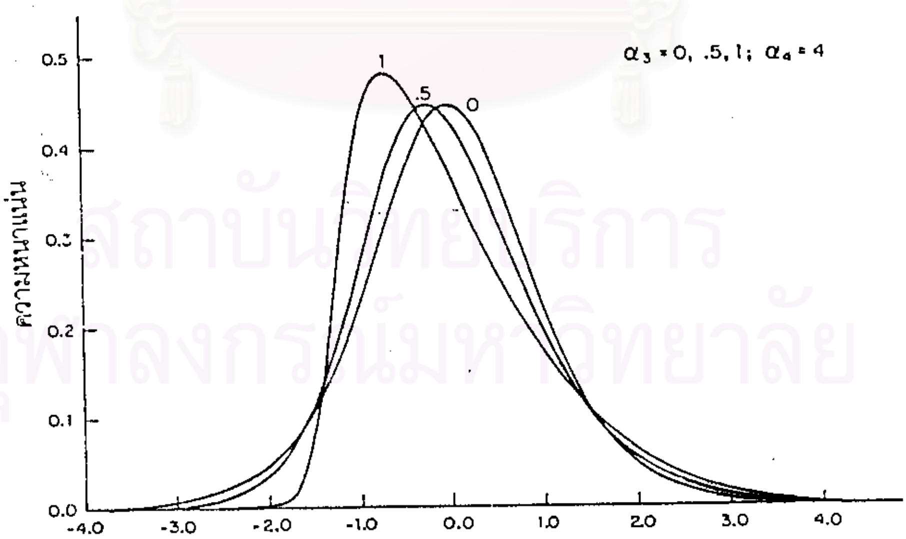
ฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงแลมดาของตูกีร์ มีลักษณะสมมาตร คล้ายการแจกแจงปกติ เมื่อพารามิเตอร์ λ_3 และ λ_4 เท่ากับ 0.0 และ 3.0 ตามลำดับ ซึ่งกราฟของฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงจะขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ กราฟแสดงฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงแลมดาของตูกีร์แสดงดังรูปที่ 2.1-2.3



รูปที่ 2.1 แสดงฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงแลมดาของตูกีร์ ที่มีความเบ้เป็น 0 , ความโด่งเท่ากับ 3, 5, 9



รูปที่ 2.2 แสดงฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงแลมดาของตูกีร์ ที่มีความเบ้เป็น 1 , ความโด่งเท่ากับ 4, 6, 9



รูปที่ 2.3 แสดงฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงแลมดาของตูกีร์ ที่มีความเบ้เท่ากับ 0 ,0.5, 1.0, ความโด่งเป็น 4

2.2.2 **การแจกแจงปกติ** (Normal Distribution)

ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงความน่าจะเป็นปกติ **ด้วยพารามิเตอร์** μ และ σ^2 ถ้า X มีฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจง

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right] \quad ; \; -\infty < x < \infty$$

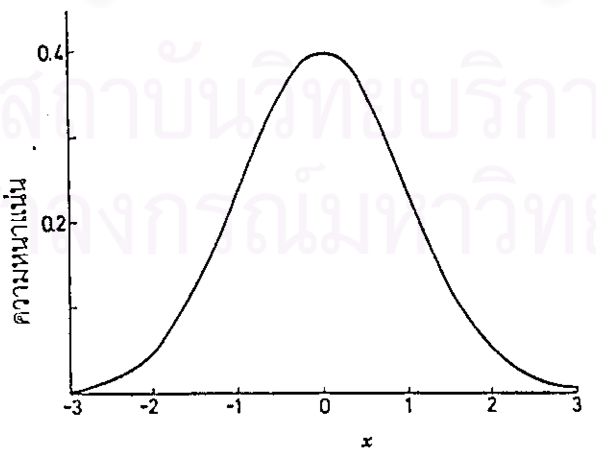
$$, \; -\infty < \mu < \infty \, , \; \sigma^2 > 0$$

เมื่อ μ เป็นพารามิเตอร์ตำแหน่ง (Location Parameter)

σ^2 เป็นพารามิเตอร์ขนาด (Scale Parameter)

ค่าเฉลี่ย	$E(X)$	=	μ
ค่าความแปรปรวน	$V(X)$	=	σ^2
สัมประสิทธิ์ความเบ้	α_3	=	0.0
สัมประสิทธิ์ความโด่ง	α_4	=	3.0

กราฟแสดงฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงปกติแสดงดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 แสดงฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงปกติมาตรฐาน $N(0,1)$

2.2.3 การแจกแจงแกมมา (Gamma Distribution)

ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแกมมา ด้วยพารามิเตอร์ α และ λ ถ้า X มีฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจง

$$f(x) \;=\; \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}.x^{\alpha-1}.e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0; \lambda > 0, \alpha > 0$$

เมื่อ α เป็นพารามิเตอร์รูปร่าง (Shape Parameter)

λ เป็นพารามิเตอร์ขนาด (Scale Parameter)

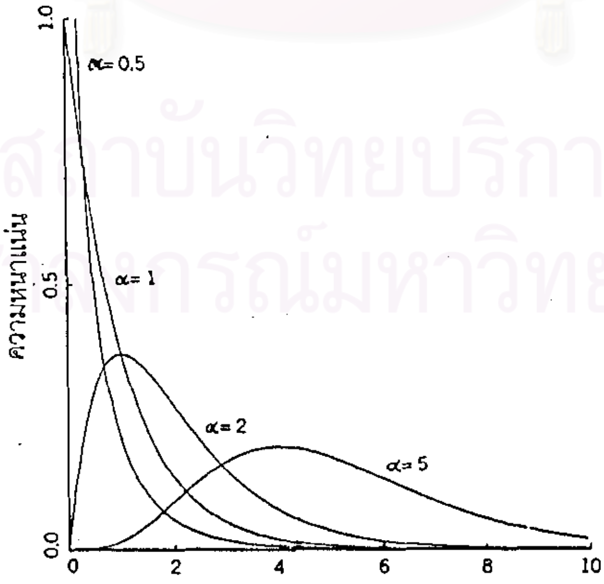
ค่าเฉลี่ย $E(X) = \dfrac{\alpha}{\lambda}$

ค่าความแปรปรวน $V(X) = \dfrac{\alpha}{\lambda^2}$

สัมประสิทธิ์ความเบ้ $\alpha_3 = \dfrac{2}{\sqrt{\alpha}}$

สัมประสิทธิ์ความโด่ง $\alpha_4 = 3+\dfrac{6}{\alpha}$

กราฟแสดงฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงแกมมาแสดงดังรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 แสดงฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงแกมมา

2.2.4 การแจกแจงลอกนอร์มอล (Lognormal Distribution)

ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงความน่าจะเป็นลอกนอร์มอล ด้วยพารามิเตอร์ μ และ σ^2 ถ้า X มีฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจง

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2}\left(\ln x-\mu\right)^2\right), \qquad x>0,$$

$$-\infty<\mu<\infty, \;\; \sigma>0$$

เมื่อ μ เป็นพารามิเตอร์ที่แสดงค่าเฉลี่ยของ $\ln X$

σ^2 เป็นพารามิเตอร์ที่แสดงความแปรปรวนของ $\ln X$

ค่าเฉลี่ย $E(x) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$

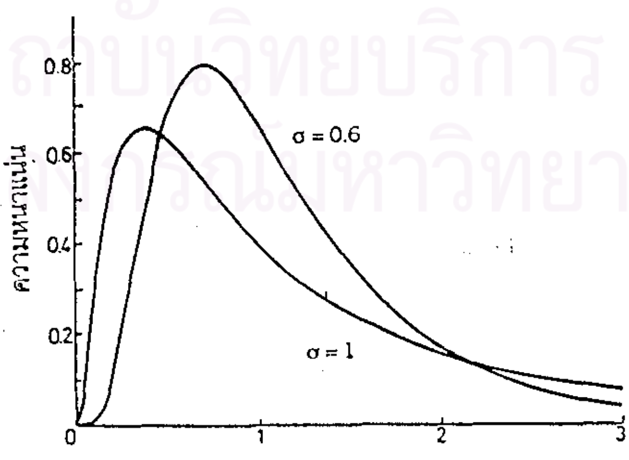
ค่าความแปรปรวน $V(x) = e^{2(\mu+\sigma^2)}.(e^{\sigma^2}-1)$

สัมประสิทธิ์ความเบ้ $\alpha_3 = (w+2)(w-1)^{1/2}$

สัมประสิทธิ์ความโด่ง $\alpha_4 = w^4+2w^3+3w^2-3$

กำหนด $w=\exp(\sigma^2)$

กราฟแสดงฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงลอกนอร์มอล มีลักษณะเบ้ขวา และถ้าค่าสัมประสิทธิ์ความแปรผันต่ำๆ หรือค่าความแปรปรวนต่ำๆ จะทำให้กราฟฟังก์ชันความหนาแน่นเข้าใกล้การแจกแจงปกติมากขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 แสดงฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงลอกนอร์มอล