# การปรับปรุงวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์เพื่อวิเคราะห์ไอเกนโมดในท่อนำคลื่นมีสัน
# โดยใช้อีลีเมนต์ขอบแบบเอกฐานและการปรับแบบจำลองไฟไนต์อีลีเมนต์

นายสุวิชาญ กาวาฮารา



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2545

ISBN 974-17-2516-7

# IMPROVEMENT OF THE FINITE ELEMENT ANALYSIS OF EIGENMODES IN RIDGE WAVEGUIDES BY USING THE SINGULAR EDGE ELEMENT AND ADAPTIVE MESHING

Mr. Suwichan Kawahara



A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering in Electrical Engineering
Department of Electrical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2002
ISBN 974-17-2516-7

| | |
|---|---|
| หัวข้อวิทยานิพนธ์ | การปรับปรุงวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์เพื่อวิเคราะห์ไอเกนโมดในท่อนำคลื่น-มีสันโดยใช้อีลีเมนต์ขอบแบบเอกฐานและการปรับแบบจำลองไฟไนต์-อีลีเมนต์ |
| โดย | นายสุวิชาญ กาวาฮารา |
| สาขาวิชา | วิศวกรรมไฟฟ้า |
| อาจารย์ที่ปรึกษา | ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทับทิม อ่างแก้ว |

---

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.................................................. คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.สมศักดิ์ ปัญญาแก้ว)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.................................................. ประธานกรรมการ
(ศาสตราจารย์ ดร.มงคล เดชนครินทร์)

.................................................. อาจารย์ที่ปรึกษา
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทับทิม อ่างแก้ว)

.................................................. กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.ฉัตรชัย ไวยาพัฒนกร)

.................................................. กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ประยุทธ อัครเอกฒาลิน)

สุวิชาญ กาวาฮารา : การปรับปรุงวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์เพื่อวิเคราะห์ไอเกนโมดในท่อนำคลื่นมีสันโดยใช้อีลีเมนต์ขอบแบบเอกฐานและการปรับแบบจำลองไฟไนต์อีลีเมนต์ (IMPROVEMENT OF THE FINITE ELEMENT ANALYSIS OF EIGENMODES IN RIDGE WAVEGUIDES BY USING THE SINGULAR EDGE ELEMENT AND ADAPTIVE MESHING) อ. ที่ปรึกษา : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทับทิม อ่างแก้ว, 133 หน้า. ISBN 974-17-2516-7.

วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอการปรับปรุงระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ ในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นมีสัน 2 มิติ ซึ่งโครงสร้างของท่อนำคลื่นมีสันทำให้สนามแม่เหล็กไฟฟ้ามีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วบริเวณมุมสัน ดังนั้นข้อเสียในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นมีสัน โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์แบบปกติคือ จะมีอัตราการลู่เข้าที่ช้ากว่าเมื่อเปรียบเทียบกับการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นไม่มีสัน วิทยานิพนธ์นี้เสนอแนวทางในการปรับปรุงระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ เพื่อให้อัตราการลู่เข้าดีขึ้น 2 แนวทางคือ การใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบแบบเอกฐานที่บริเวณมุมสันร่วมกับฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบแบบปกติ และการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ เพื่อให้มีความสอดคล้องกับลักษณะการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นในท่อนำคลื่นมีสัน

การคำนวณในวิทยานิพนธ์นี้ ใช้ฟังก์ชันรูปร่าง 4 แบบคือ ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบปกติ ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบปกติ และฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน ผลที่ได้จากการคำนวณพบว่า ผลเฉลยมีอัตราการลู่เข้าเร็วขึ้น ตามลำดับของฟังก์ชันรูปร่างที่ได้นำเสนอ และการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ช่วยให้อัตราการลู่เข้าดีกว่าการแบ่งอีลีเมนต์แบบทั่วๆ ไป ผลการคำนวณที่ได้สอดคล้องกับผลในบทความอ้างอิง



ภาควิชา วิศวกรรมไฟฟ้า ลายมือชื่อนิสิต

สาขาวิชา วิศวกรรมไฟฟ้า ลายมือชื่ออาจารย์

ปีการศึกษา 2545

## 4270628021 : MAJOR ELECTRICAL ENGINEERING

KEYWORD: FINITE ELEMENT / SINGULAR ELEMENT / RIDGE WAVGUIDE / ADAPTIVE MESHING

SUWICHAN KAWAHARA : THESIS TITLE. (IMPROVEMENT OF THE FINITE ELEMENT ANALYSIS OF EIGENMODES IN RIDGE WAVEGUIDES BY USING THE SINGULAR EDGE ELEMENT AND ADAPTIVE MESHING) THESIS ADVISOR : ASST.PROF. TUPTIM ANGKAEW Ph.D., 133 pp. ISBN 974-17-2516-7

This thesis presents the improvement of finite element method analysis ridge waveguides in 2 dimensional. The structure of ridge waveguides make to be fast variation electromagnetic wave at region corner. So, the analysis ridge waveguides is slower convergence rate than general waveguides when use FEM. This thesis proposes the 2 methods of improvement convergence rate of FEM. The first method uses singular edge element shape function to model at the region corner combine with normal edge element shape function. The second method uses adaptive meshing. Both methods must satisfy the variation of electromagnetic wave in ridge waveguides.

This thesis computes by using 4 shape functions are as follow : normal constant edge element, singular constant edge element, normal linear edge element and singular linear edge element. Simulation results, it is found that the presented shape functions are good convergence rate respectively. And the convergence rate of the adaptive meshing better than the general discretization. The simulation results in this thesis are inclined to the reference paper.



Department Electrical Engineering Student's signature ______________

Field of study Electrical Engineering Advisor's signature ______________

Academic year 2002

# กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทับทิม อ่างแก้ว อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ได้ให้คำแนะนำในการวิจัย แนวทางการวิจัย ตลอดจนให้คำปรึกษา ข้อคิดเห็นต่างๆ ในการวิจัย และจัดหาอุปกรณ์การดำเนินการวิจัยให้แก่ผู้วิจัยอย่างครบถ้วน ทำให้งานวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้

ขอขอบคุณ นายสุรพัชร์ เจริญยิ่ง ที่ได้สละเวลาให้คำแนะนำและคำปรึกษาในงานวิทยานิพนธ์นี้, ขอขอบคุณ นายณัฐวุฒิ พุทธประสิทธิ์ ที่ได้สละเวลาให้คำแนะนำและคำปรึกษาในงานวิทยานิพนธ์นี้

นอกจากนั้นขอขอบคุณสมาชิกในห้องปฏิบัติการวิจัยคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า พี่ๆ น้องๆ และเพื่อนๆ ทั้งที่จบไปแล้วและที่ยังศึกษาอยู่ทุกท่านที่คอยให้ความช่วยเหลือและเป็นกำลังใจให้ตลอดมา

ท้ายนี้ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา พี่สาว และพี่ชายของผู้วิจัยที่ได้สนับสนุนด้านการเรียนและเป็นกำลังใจตลอดเวลาที่ได้ศึกษาจนกระทั่งสำเร็จการศึกษา

# สารบัญ


บทที่ หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย ง

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ จ

กิตติกรรมประกาศ ฉ

สารบัญ ช

สารบัญตาราง ญ

สารบัญภาพ ฐ

คำอธิบายสัญลักษณ์ ถ

บทที่ 1 บทนำ 1

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา 1

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย 5

1.3 ขอบเขตของการวิจัย 6

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ 6

1.5 ขั้นตอนและวิธีดำเนินงานวิจัย 6

บทที่ 2 การปรับปรุงการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นมีสัน 2 มิติ
โดยใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน 7

2.1 ความนำ 7

2.2 ระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ 7

2.2.1 ระเบียบวิธีแปรผันริทซ์ 10

2.2.2 ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง 11

2.3 ฟังก์ชันรูปร่าง 13

2.3.1 ฟังก์ชันรูปร่างโนดเชิงเส้น 13

2.3.2 ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ 15

2.4 ฟังก์ชันรูปร่างแบบเอกฐาน 18

2.4.1 ฟังก์ชันรูปร่างโนดเชิงเส้นแบบเอกฐาน 20

2.4.2 ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน 21

2.5 ผลการตรวจสอบโดยคำนวณตัวอย่าง 6 ตัวอย่าง 23

2.5.1 ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว 23

2.5.2 ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ 28

## สารบัญ (ต่อ)

บทที่ หน้า

2.5.3 ท่อนำคลื่นรูปร่าง L 33
2.5.4 ท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน 37
2.5.5 ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก 41
2.5.6 ท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก 45
2.6 สรุปผลการคำนวณ 49
บทที่ 3 การปรับปรุงการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นมีสัน 2 มิติ
โดยใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน 51
3.1 ความนำ 51
3.2 ฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้น 51
3.2.1 ฟังก์ชันรูปร่างโนดกำลังสอง 52
3.2.2 ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น 54
3.3 ฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้นแบบเอกฐาน 56
3.3.1 ฟังก์ชันรูปร่างโนดกำลังสองแบบเอกฐาน 56
3.3.2 ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน 58
3.4 ผลการตรวจสอบโดยคำนวณตัวอย่าง 6 ตัวอย่าง 60
3.4.1 ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว 61
3.4.2 ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ 63
3.4.3 ท่อนำคลื่นรูปร่าง L 65
3.4.4 ท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน 67
3.4.5 ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก 68
3.4.5 ท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก 71
3.5 สรุปผลการคำนวณ 73
บทที่ 4 การปรับปรุงการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นมีสัน 2 มิติ
โดยการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ 75
4.1 ความนำ 75
4.2 ชนิดของการปรับตัว 75
4.3 การประมาณความผิดพลาด 76

# สารบัญ (ต่อ)

บทที่ หน้า

4.4 กระบวนการปรับปรุงอีลีเมนต์ 77

4.4.1 การสร้างสามเหลี่ยม 79

4.4.2 การตรวจสอบคุณสมบัติอีลีเมนต์ 79

4.5 ผลการตรวจสอบโดยคำนวณตัวอย่าง 6 ตัวอย่าง 81

4.5.1 ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว 81

4.5.2 ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ 84

4.5.3 ท่อนำคลื่นรูปร่าง L 86

4.5.4 ท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน 89

4.5.5 ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก 92

4.5.6 ท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก 94

4.6 สรุปผลการคำนวณ 97

บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ 98

5.1 สรุปผลการวิจัย 98

5.2 ข้อเสนอแนะ 99

รายการอ้างอิง 100

ภาคผนวก 103

ภาคผนวก ก การพิสูจน์สมการไฟไนต์อีลีเมนต์แบบเวกเตอร์ ในท่อนำคลื่น โดยใช้สนามแม่เหล็ก 3 องค์ประกอบ 104

ภาคผนวก ข การพิสูจน์สมการอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบปกติ 109

ภาคผนวก ค การพิสูจน์สมการอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน 113

ภาคผนวก ง การประมาณการอินทิเกรตแบบเกาส์ 117

ภาคผนวก จ การแปลงพิกัดเรขาคณิต 119

ภาคผนวก ฉ การพิสูจน์สมการอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบปกติ 123

ภาคผนวก ช การพิสูจน์สมการอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน 128

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์ 133

# สารบัญตาราง

ตาราง หน้า

ตารางที่ 2.1 ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ 26
ตารางที่ 2.2 เปรียบเทียบเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว ที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้
กับผลในบทความอ้างอิง 3 บทความ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์
ขอบคงที่แบบเอกฐาน 26
ตารางที่ 2.3 ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ 31
ตารางที่ 2.4 เปรียบเทียบเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ ที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้
กับผลในบทความอ้างอิง 3 บทความ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์
ขอบคงที่แบบเอกฐาน 31
ตารางที่ 2.5 ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นรูปร่าง L
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ 35
ตารางที่ 2.6 เปรียบเทียบเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นรูปร่าง L ที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้กับ
ผลในบทความอ้างอิง 3 บทความ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ 36
ตารางที่ 2.7 ผลการคำนวณตัวเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ 39
ตารางที่ 2.8 ผลการคำนวณความถี่ตัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ 43
ตารางที่ 2.9 ผลการคำนวณความถี่ตัดของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ 48
ตารางที่ 2.10 เปรียบเทียบค่าคงตัวการแพร่กระจายของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่ง
ไดอิเล็กทริก ที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่
แบบเอกฐานกับผลในบทความอ้างอิงของ Ng, K.T., and Chan, C.H. (1989) 49
ตารางที่ 3.1 ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น 61
ตารางที่ 3.2 เปรียบเทียบเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว ที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้
กับผลในบทความอ้างอิง 3 บทความ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น
แบบเอกฐาน 61

## สารบัญตาราง (ต่อ)

ตาราง หน้า

ตารางที่ 3.3 ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น 63
ตารางที่ 3.4 เปรียบเทียบเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ ที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้กับผลในบทความอ้างอิง 3 บทความ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน 63
ตารางที่ 3.5 ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นรูปร่าง L เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น 65
ตารางที่ 3.6 เปรียบเทียบเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นรูปร่าง L ที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้กับผลในบทความอ้างอิง 3 บทความ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น 65
ตารางที่ 3.7 ผลการคำนวณตัวเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น 67
ตารางที่ 3.8 ผลการคำนวณความถี่ตัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น 69
ตารางที่ 3.9 ผลการคำนวณความถี่ตัดของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น 71
ตารางที่ 3.10 เปรียบเทียบค่าคงตัวการแพร่กระจายของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก ที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐานกับผลในบทความอ้างอิง (Ng, K.T., and Chan, C.H., 1989) 73
ตารางที่ 4.1 ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ 82
ตารางที่ 4.2 ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ 84
ตารางที่ 4.3 ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นรูปร่าง L เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ 87
ตารางที่ 4.4 ผลการคำนวณตัวเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ 90
ตารางที่ 4.5 ผลการคำนวณความถี่ตัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ 92

## สารบัญตาราง (ต่อ)

ตาราง หน้า

ตารางที่ 4.6 ผลการคำนวณความถี่ของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก
เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัว 95
ตารางที่ ง.1 พิกัดของจุดอินทิเกรตและตัวถ่วงน้ำหนักในการประมาณการอินทิเกรต 4 จุด 118
ตารางที่ ง.2 พิกัดของจุดอินทิเกรตและตัวถ่วงน้ำหนักในการประมาณการอินทิเกรต 9 จุด 118
ตารางที่ ฉ.1 ค่าของพารามิเตอร์ที่นำไปใช้ในการอินทิเกรตฟังก์ชันรูปร่าง($\times\frac{1}{2A_e}$) 127

# สารบัญภาพ


ภาพประกอบ หน้า

รูปที่ 1.1 โครงสร้างภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นมีสันชนิดต่างๆ 1

รูปที่ 1.2 ลักษณะโครงสร้างของท่อนำคลื่น 2 ชนิด 2

รูปที่ 1.3 เปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยม
กับท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ 2

รูปที่ 1.4 แบบรูปสนามแม่เหล็กของท่อนำคลื่น 2 ชนิด 3

รูปที่ 2.1 ภาคตัดขวางท่อนำคลื่นรูปร่างใดๆ 8

รูปที่ 2.2 พารามิเตอร์บนอีลีเมนต์ขอบคงที่ 13

รูปที่ 2.3 ฟังก์ชันรูปร่างโนดเชิงเส้น 15

รูปที่ 2.4 แบบรูปของฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ 16

รูปที่ 2.5 การหมุนวนของสนาม 2 อีลีเมนต์ติดกัน
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบปกติ 17

รูปที่ 2.6 บริเวณมุมสันของตัวนำ 18

รูปที่ 2.7 อีลีเมนต์สามเหลี่ยมบริเวณมุมสันของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ 19

รูปที่ 2.8 พารามิเตอร์บนอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน 19

รูปที่ 2.9 ฟังก์ชันรูปร่างโนดเชิงเส้นแบบเอกฐาน 20

รูปที่ 2.10 แบบรูปของฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน 21

รูปที่ 2.11 โครงสร้างภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว 24

รูปที่ 2.12 แบบรูปสนามแม่เหล็กของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ จำนวน 142 อีลีเมนต์ 24

รูปที่ 2.13 กราฟการกระจายตามความถี่ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ 25

รูปที่ 2.14 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ 27

รูปที่ 2.15 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ 27

รูปที่ 2.16 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ โดยเปลี่ยนแปลงค่า $\rho$ 28

รูปที่ 2.17 โครงสร้างภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ 29

## สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพประกอบ หน้า

รูปที่ 2.18 แบบรูปสนามแม่เหล็กของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ จำนวน 100 อีลีเมนต์ 29

รูปที่ 2.19 กราฟการกระจายตามความถี่ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ 30

รูปที่ 2.20 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ 32

รูปที่ 2.21 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ 32

รูปที่ 2.22 โครงสร้างภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นมีสันแบบรูปร่าง L 33

รูปที่ 2.23 แบบรูปสนามแม่เหล็กของท่อนำคลื่นรูปร่าง L เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ จำนวน 150 อีลีเมนต์ 33

รูปที่ 2.24 กราฟการกระจายตามความถี่ของท่อนำคลื่นรูปร่าง L เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ 34

รูปที่ 2.25 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นรูปร่าง L เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ 36

รูปที่ 2.26 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นรูปร่าง L เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ 37

รูปที่ 2.27 โครงสร้างภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน 37

รูปที่ 2.28 แบบรูปสนามแม่เหล็กของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ จำนวน 104 อีลีเมนต์ 38

รูปที่ 2.29 กราฟการกระจายตามความถี่ของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ 38

รูปที่ 2.30 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ 40

รูปที่ 2.31 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ 40

รูปที่ 2.32 โครงสร้างภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก 41

## สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพประกอบ หน้า

รูปที่ 2.33 แบบรูปสนามแม่เหล็กของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ จำนวน 102 อีลีเมนต์ 41
รูปที่ 2.34 กราฟการกระจายตามความถี่ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ 42
รูปที่ 2.35 ความถี่ตัดโมด $TE_{10}$ ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ 44
รูปที่ 2.36 ความถี่ตัดโมด $TE_{01}$ ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ 44
รูปที่ 2.37 เปรียบเทียบค่าคงตัวการแพร่กระจายของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว บรรจุด้วยไดอิเล็กทริก ที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ แบบเอกฐาน กับผลในบทความอ้างอิงของ Ng, K.T., and Chan, C.H. (1989) 45
รูปที่ 2.38 โครงสร้างภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก 46
รูปที่ 2.39 แบบรูปสนามแม่เหล็กของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ จำนวน 132 อีลีเมนต์ 46
รูปที่ 2.40 กราฟการกระจายตามความถี่ของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ 47
รูปที่ 2.41 ความถี่ตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ 48
รูปที่ 2.42 ความถี่ตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ 49
รูปที่ 3.1 พารามิเตอร์บนอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น 52
รูปที่ 3.2 ฟังก์ชันรูปร่างโนดกำลังสอง 53
รูปที่ 3.3 แบบรูปของฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น 54
รูปที่ 3.4 การหมุนวนของสนาม 2 อีลีเมนต์ติดกัน เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบปกติ 55
รูปที่ 3.5 พารามิเตอร์บนอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน 56
รูปที่ 3.6 ฟังก์ชันรูปร่างโนดกำลังสองแบบเอกฐาน 57
รูปที่ 3.7 แบบรูปของฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน 59

## สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพประกอบ หน้า

รูปที่ 3.8 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น 62

รูปที่ 3.9 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น 62

รูปที่ 3.10 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่และขอบเชิงเส้น 64

รูปที่ 3.11 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่และขอบเชิงเส้น 64

รูปที่ 3.12 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นรูปร่าง L
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่และขอบเชิงเส้น 66

รูปที่ 3.13 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นรูปร่าง L
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่และขอบเชิงเส้น 66

รูปที่ 3.14 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่และขอบเชิงเส้น 67

รูปที่ 3.15 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่และขอบเชิงเส้น 68

รูปที่ 3.16 ความถี่ตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่และขอบเชิงเส้น 69

รูปที่ 3.17 ความถี่ตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่และขอบเชิงเส้น 70

รูปที่ 3.18 เปรียบเทียบค่าคงตัวการแพร่กระจายของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วย
ไดอิเล็กทริก ที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น
แบบเอกฐานกับ ผลในบทความอ้างอิง (Ng, K.T., and Chan, C.H., 1989) 70

รูปที่ 3.19 ความถี่ตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่และขอบเชิงเส้น 72

รูปที่ 3.20 ความถี่ตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่และขอบเชิงเส้น 72

# สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพประกอบ หน้า

รูปที่ 4.1 อัลกอริทึมของระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ 78
รูปที่ 4.2 แบบรูปการแบ่งอีลีเมนต์ 79
รูปที่ 4.3 การกลับเส้นทแยงมุมสามเหลี่ยม 79
รูปที่ 4.4 ไม่เป็นสามเหลี่ยมเดอลอเน 80
รูปที่ 4.5 สามเหลี่ยมเดอลอเน 80
รูปที่ 4.6 ผลตัวชี้วัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวในแบบต่างๆ 81
รูปที่ 4.7 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว
เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ 82
รูปที่ 4.8 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว
เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ 83
รูปที่ 4.9 การแบ่งอีลีเมนต์ด้วยกระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้
ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว 83
รูปที่ 4.10 ผลตัวชี้วัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ในแบบต่างๆ 84
รูปที่ 4.11 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่
เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ 85
รูปที่ 4.12 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่
เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ 85
รูปที่ 4.13 การแบ่งอีลีเมนต์ด้วยกระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้
ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ 86
รูปที่ 4.14 ผลตัวชี้วัดของท่อนำคลื่นรูปร่าง L ในแบบต่างๆ 87
รูปที่ 4.15 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นรูปร่าง L
เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ 87
รูปที่ 4.16 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นรูปร่าง L
เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ 88
รูปที่ 4.17 การแบ่งอีลีเมนต์ด้วยกระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้
ของท่อนำคลื่นรูปร่าง L 88
รูปที่ 4.18 ผลตัวชี้วัดของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสันในแบบต่างๆ 89

## สารบัญภาพ (ต่อ)


ภาพประกอบ หน้า

รูปที่ 4.19 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ 90

รูปที่ 4.20 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ 91

รูปที่ 4.21 การแบ่งอีลีเมนต์ด้วยกระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ ของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน 91

รูปที่ 4.22 ผลตัวชี้วัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริกในแบบต่างๆ 92

รูปที่ 4.23 ความถี่ตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ 93

รูปที่ 4.24 ความถี่ตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ 93

รูปที่ 4.25 การแบ่งอีลีเมนต์ด้วยกระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก 94

รูปที่ 4.26 ผลตัวชี้วัดของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริกในแบบต่างๆ 95

รูปที่ 4.27 ความถี่ตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ 95

รูปที่ 4.28 ความถี่ตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ 96

รูปที่ 4.29 การแบ่งอีลีเมนต์ด้วยกระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ ของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก 96

รูปที่ ข.1 การกำหนดทิศของความยาวของขอบ 110

รูปที่ ง.1 อีลีเมนต์อ้างอิงรูปสามเหลี่ยม 117

รูปที่ ง.2 การประมาณการอินทิเกรต 4 จุด 117

รูปที่ ง.3 การประมาณการอินทิเกรต 9 จุด 118

รูปที่ จ.1 การแปลงพิกัดเรขาคณิต 119

## คำอธิบายสัญลักษณ์

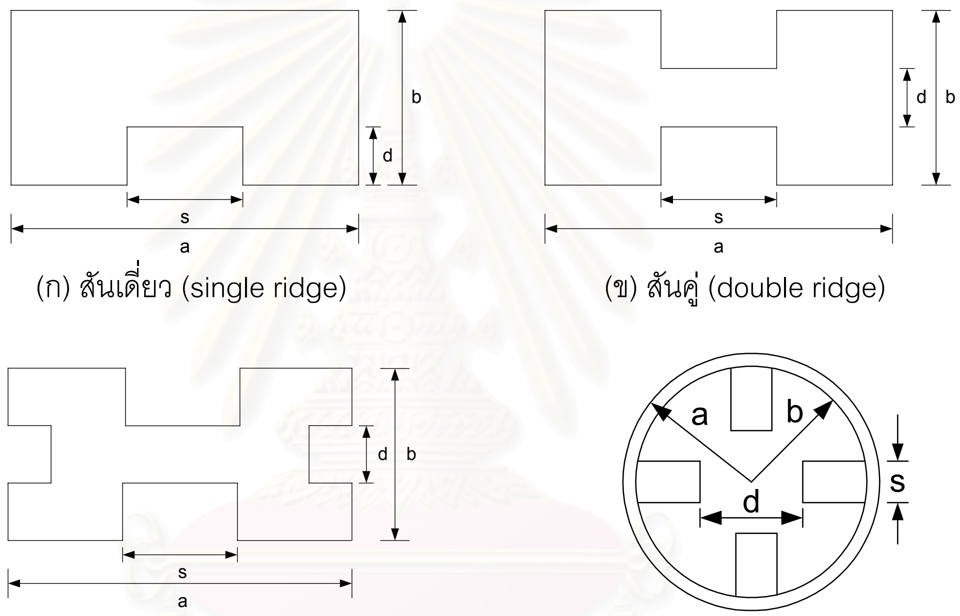
| สัญลักษณ์ | ความหมาย |
|---|---|
| $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$ | เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง x,y,z |
| $\overline{E}$ | เวกเตอร์ความเข้มสนามไฟฟ้า |
| $\overline{H}$ | เวกเตอร์ความเข้มสนามแม่เหล็ก |
| $\overline{H}_t$ | เวกเตอร์ความเข้มสนามแม่เหล็กตามขวาง |
| $H_z$ | เวกเตอร์ความเข้มสนามแม่เหล็กตามยาว |
| $\overline{B}$ | ความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็ก |
| $\overline{n}$ | เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวตั้งฉาก |
| $\gamma$ | ค่าคงตัวการแพร่กระจาย |
| $\omega$ | ความถี่เชิงมุม |
| $\varepsilon$ | สภาพยอมไฟฟ้า |
| $\mu$ | ความซาบซึมได้ |
| $k_0$ | เลขคลื่นของอวกาศว่าง |
| $A_e$ | พื้นที่ของอีลีเมนต์สามเหลี่ยม |
| $w$ | ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก |
| $N_i$ | ฟังก์ชันรูปร่างโนด |
| $\overline{N}_i$ | ฟังก์ชันรูปร่างขอบ |
| $L_i$ | พิกัดพื้นที่ |
| $l_i$ | ความยาวของด้านในอีลีเมนต์สามเหลี่ยมและใช้ในการกำหนดทิศทางของสนามในอีลีเมนต์ขอบ |
| $e$ | ค่าความคลาดเคลื่อน |

# บทที่ 1

# บทนำ

## 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ท่อนำคลื่นมีสัน (ridge waveguide) มีลักษณะทางกายภาพก็คือ มีการเว้าของผนังตัวนำเข้าไป หรือมีการใส่สันตัวนำเข้าไปในท่อนำคลื่นทั่วๆ ไป (general waveguide) และมีรูปร่างแตกต่างกันเป็นหลายแบบดังในรูปที่ 1.1




(ก) สันเดี่ยว (single ridge)    (ข) สันคู่ (double ridge)

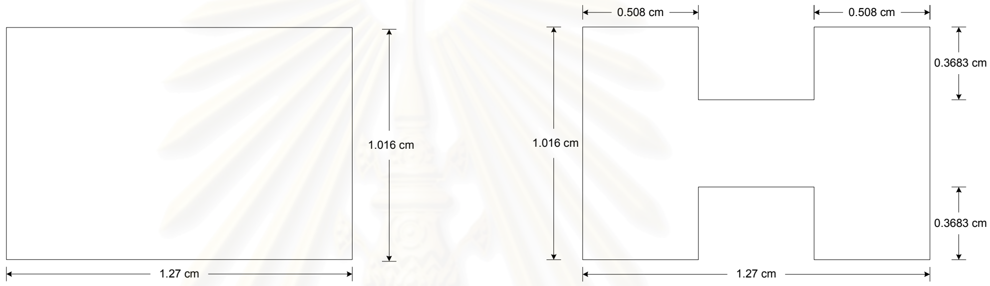
(ค) สันสี่ (quadruple ridge)    (ง) วงกลมสันสี่ (quadruple ridge circular)

รูปที่ 1.1 โครงสร้างภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นมีสันชนิดต่างๆ



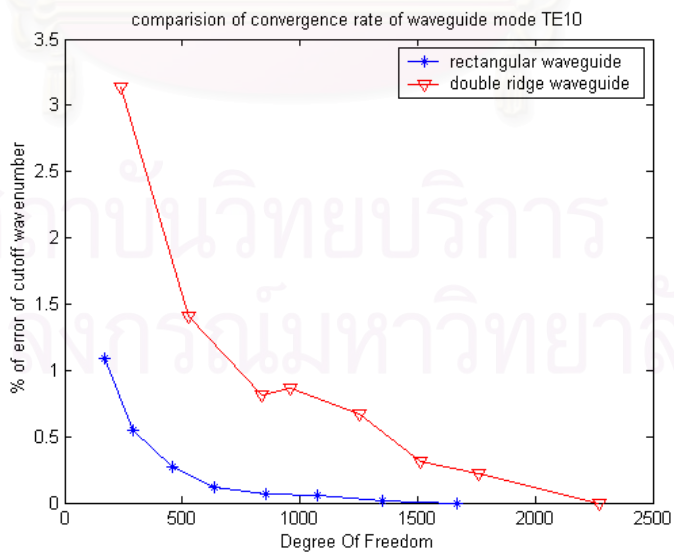
คุณลักษณะการแพร่กระจายของท่อนำคลื่นมีสันเมื่อเปรียบเทียบกับท่อนำคลื่นทั่วๆ ไป มีการเปลี่ยนแปลงไปจากเดิมเช่น ความกว้างแถบ (bandwidth) กว้างขึ้นเนื่องจากท่อนำ-คลื่นมีสันจะทำให้ความถี่ตัดของโมดพื้นฐาน (dominance mode) ต่ำลง อิมพีแดนซ์คุณลักษณะ (characteristic impedance) มีค่าต่ำลง ความเร็วเฟส (phase velocity) ต่ำลง และการลดทอน (attenuation) สูงขึ้น เนื่องจากค่าการลดทอนสูงจึงทำให้สามารถใช้งานได้ในระยะทางสั้นๆ

ในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นมีสันด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ (Finite Element Method : FEM) พบว่าอัตราการลู่เข้า (convergence rate) ของผลเฉลยไม่ดีนัก เมื่อเปรียบเทียบกับท่อนำคลื่นทั่วๆ ไป รูปที่ 1.2 แสดงลักษณะโครงสร้างของท่อนำคลื่น 2 ชนิดระหว่างท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยม (rectangular waveguide) กับท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ (double ridge waveguide) โดยคำนวณอัตราการลู่เข้าของค่าผิดพลาดของเลขคลื่นตัด (cutoff wavenumber) ในโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นทั้งสองแสดงดังรูปที่ 1.3 แกนนอนคือ ระดับขั้นความเสรี (Degree Of Freedom : DOF) และแกนตั้งคือเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาด (% of error) ของเลขคลื่นตัด พบว่าอัตราการลู่เข้าของผลเฉลยขึ้นอยู่กับลักษณะโครงสร้างของท่อนำคลื่น ดังนั้นจึงเล็งเห็นถึงปัญหาที่เกิดขึ้นในการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์



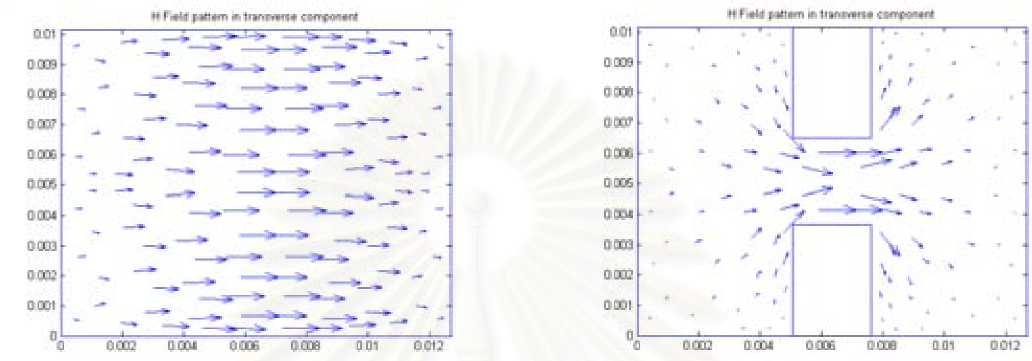

ก. ท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยม ข. ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่

รูปที่ 1.2 ลักษณะโครงสร้างของท่อนำคลื่น 2 ชนิด




รูปที่ 1.3 เปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดของเลขคลื่นตัดของ
ท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยมกับท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่

ปัญหาที่พบจากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ คืออัตราการลู่เข้าของผลเฉลยไม่ดี ดังนั้นผู้วิจัยจึงตั้งสมมติฐานโดยพิจารณาจากแบบรูปของสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นในท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยมและท่อนำคลื่นมีสัน ดังในรูปที่ 1.4 จะสังเกตพบว่าสนามแม่เหล็กในท่อนำ-คลื่นมีสัน ณ บริเวณมุมสัน สนามแม่เหล็กมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว น่าจะเป็นสาเหตุทำให้การคำนวณที่ได้นั้นมีความผิดพลาดเกิดขึ้น




ก. ท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยม ข. ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่

รูปที่ 1.4 แบบรูปสนามแม่เหล็กของท่อนำคลื่น 2 ชนิด

ดังนั้นจากสมมติฐานดังกล่าว และจากการศึกษางานวิจัยที่ได้มีผู้นำเสนอไว้แล้วว่า สนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นในท่อนำคลื่นมีสันมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว ณ บริเวณมุมสัน ผู้วิจัยจึงเสนอแนวทางในการปรับปรุงความถูกต้องผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบ-วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ให้ดียิ่งขึ้น 3 แนวทางคือ การใช้ฟังก์ชันพิเศษ (special function) การเพิ่มอันดับของฟังก์ชัน (higher order) และการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ (adaptive meshing)

จากงานวิจัยที่ได้มีผู้นำเสนอไว้แล้วในการใช้ฟังก์ชันพิเศษ เพื่อเพิ่มความถูกต้องของผลเฉลย คือการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์แบบเอกฐาน ซึ่งทั่วไปแล้วนิยมใช้ในงานวิศวกรรมเครื่องกลและมักใช้เพียงฟังก์ชันรูปร่างแบบสเกลาร์ ทำให้ในงานคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้านั้นจึงยังไม่มีผู้ทำวิจัยเกี่ยวกับประเด็นนี้มากนัก การใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์แบบเอกฐานเพื่อประมาณสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว ณ บริเวณมุมสัน ซึ่งพิจารณาเฉพาะบริเวณมุมสันร่วมกับการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์แบบปกติ นอกเหนือบริเวณมุมสัน มีผู้ที่นำเสนอฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบดังนี้ Pantic-Tanner, Z., Scott Savage, J., Tanner, D.R., และ Peterson, A.F. (1998) เสนอการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเอกฐานแบบ Linear-Tangential/Quadratic-Normal : LT/QN และ Gil, J.M. และ Webb, J.P. (1997) เสนอฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเอกฐานแบบ

กำลังสอง โดยผู้วิจัยได้เล็งเห็นว่ายังไม่มีผู้วิจัยใดได้นำเสนอฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน (constant singular edge element shape function) เลย เนื่องจากว่าในการสร้างให้มีความสอดคล้องกับฟังก์ชันรูปร่างแบบปกตินั้นอาจทำได้ยาก และอาจเกิดผลเฉลยปลอมเทียมได้ (spurious solution) ดังนั้นในงานวิทยานิพนธ์นี้นำฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์เอกฐานแบบสเกลาร์ (scalar singular element) ของ Akin, J.E. (1976) มาสร้างเป็นฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน โดยใช้รูปแบบวิทเนย์ (Whitney form) ในการสร้างฟังก์ชัน

แนวทางที่สองในการปรับปรุงระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ คือ การเพิ่มอันดับของฟังก์ชันรูปร่าง เนื่องจากในการประมาณฟังก์ชันนั้น ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของสนามที่เกิดขึ้นมีความสำคัญต่อความถูกต้องของผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ เพราะถ้าฟังก์ชันรูปร่างมีความสอดคล้องกับพฤติกรรมของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเท่าใด ความแม่นยำในการประมาณสนามก็จะดีมากขึ้นเท่านั้น ดังนั้นผู้วิจัยจึงนำเสนอการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐานเพื่อประมาณสนามบริเวณมุมสัน ร่วมกับการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบปกติ นอกเหนือบริเวณมุมสัน โดยนำฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์เอกฐานแบบสเกลาร์ของ Akin, J.E. (1976) มาสร้างในทำนองเดียวกับการสร้างฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน

แนวทางสุดท้ายก็คือการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ เหตุผลของการแบ่งอีลีเมนต์เพื่อเพิ่มความแม่นยำของผลเฉลยนั้น เนื่องจากในการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ เมื่อเพิ่มจำนวนอีลีเมนต์ให้มากขึ้น ซึ่งเป็นการลดช่วงของการประมาณ ก็จะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยมีค่าลดลง โดยจะแบ่งอีลีเมนต์ให้มีความเหมาะสมกับลักษณะการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ซึ่งก็คือบริเวณใดมีอัตราการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยต่อพื้นที่มากจะมีความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยมากเช่นกัน ดังนั้นในการแบ่งอีลีเมนต์ให้มีประสิทธิภาพมากที่สุด จึงต้องกระจายความคลาดเคลื่อนเหล่านี้ให้มีค่าใกล้เคียงกันตลอดทั้งโดเมนปัญหา โดยอีลี-เมนต์ขนาดเล็กในพื้นที่ที่มีความคลาดเคลื่อนมาก และอีลีเมนต์ขนาดใหญ่ในพื้นที่ที่มีความคลาดเคลื่อนน้อย แต่ในกระบวนการแบ่งอีลีเมนต์ควรจะมีหลักเกณฑ์ในการแบ่ง จากการศึกษาได้มีผู้นำเสนอหลักเกณฑ์หลายรูปแบบเช่น ความหนาแน่นฟลักซ์ (flux density) Raizer, A., Meunier, G., and Coulomb, J.L., (1989) และพลังงาน (energy) O'Dwyer, J., and Evans, P., (1997) เป็นต้น ผู้วิจัยได้นำเสนอหลักเกณฑ์รูปแบบใหม่ในการพิจารณาการแบ่งอีลีเมนต์คือ $\nabla_t \times \overline{\phi}_t \cdot \overline{a}_z$ ซึ่งเป็นตัวชี้วัดการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า เพื่อให้ง่ายในการคำนวณ และมีความสอดคล้องกับระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

ในกระบวนการตรวจสอบผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณในวิทยานิพนธ์นี้ ผู้วิจัยได้วิเคราะห์กรณีตัวอย่าง 6 ตัวอย่างโดยแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะคือ ท่อนำคลื่นที่มีตัวกลางภายในเป็นอากาศ และท่อนำคลื่นที่มีตัวกลางภายในเป็นอากาศผสมกับไดอิเล็กทริก เพื่อให้แน่ใจในรูปแบบวิธีการคำนวณที่ได้นำเสนอมานั้นมีความสอดคล้องกันอย่างสมบูรณ์ทุกกรณีตัวอย่าง และเปรียบเทียบกับผลในบทความอ้างอิงที่มีผู้ได้คำนวณไว้แล้ว เพื่อแสดงให้เห็นว่าผลเฉลยที่เปรียบเทียบกันนั้น มิได้ผิดเพี้ยนไปยังคงมีความใกล้เคียงกันเมื่อเปรียบเทียบกับบทความอ้างอิงทำให้ยืนยันถึงผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณในวิทยานิพนธ์นี้มีความถูกต้องอย่างแน่นอน

การนำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้แบ่งออกเป็น 5 บท ดังนี้คือ บทที่ 1 บทนำ กล่าวถึงงานวิจัยที่ได้มีผู้นำเสนอมาแล้ว โดยจะแบ่งออกเป็นส่วนๆ ได้แก่ ปัญหาที่เกิดจากการวิเคราะห์ท่อ-นำคลื่นมีสันด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ และการแก้ปัญหาด้วยแนวทาง 3 แนวทาง โดยนำเสนอประเด็นในงานวิทยานิพนธ์นี้ ในบทที่ 2 เสนอการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นมีสันด้วยระเบียบวิธี-ไฟไนต์อีลีเมนต์ โดยใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน เพื่อประมาณสนามบริเวณมุมสัน ร่วมกับฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบปกติ และแสดงตัวอย่างการวิเคราะห์ 6 ตัวอย่างได้แก่ ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว (single ridge waveguides) ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ (double ridge waveguides) ท่อนำคลื่นรูปร่าง L (L-shaped waveguides) ท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน (triangular ridge waveguide) ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก (dielectric-loaded single ridge waveguides) และท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก (slotted dielectric-loaded ridged waveguides) บทที่ 3 เสนอการเพิ่มอันดับของฟังก์ชันรูปร่าง คือ ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน เพื่อเพิ่มอันดับฟังก์ชันการประมาณในการคำนวณ สามารถทำให้ผลเฉลยมีค่าถูกต้องมากยิ่งขึ้น บทที่ 4 การแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ใช้ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ โดยนำเสนอหลักเกณฑ์ในการแบ่งอีลีเมนต์รูปแบบใหม่ เพื่อให้สอดคล้องกับลักษณะการเปลี่ยนแปลงของสนามและสอดคล้องกับระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์และบทสุดท้าย บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

## 1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เสนอฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบแบบเอกฐาน เพื่อการประมาณสนามแม่-เหล็กไฟฟ้าในบริเวณมุมสันให้สอดคล้องกับลักษณะการเปลี่ยนแปลงของสนาม ซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว ยังผลให้ไม่ต้องแบ่งอีลีเมนต์บริเวณมุมสันเป็นอีลีเมนต์ขนาดเล็กจำนวนมาก

2. เสนอเงื่อนไขสำหรับวิธีการแบ่งอีลีเมนต์ที่สามารถปรับขนาดของอีลีเมนต์ให้สอดคล้องกับลักษณะการเปลี่ยนแปลงของแบบรูปโมด (mode pattern) ของโมดแต่ละโมด หรือที่

เรียกว่า การแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ เพื่อให้สามารถวิเคราะห์โมดได้อย่างแม่นยำและประหยัดอีลีเมนต์

**1.3 ขอบเขตของการวิจัย**

1. ศึกษาและวิเคราะห์ปัญหาที่เกิดขึ้นในท่อนำคลื่นมีสัน

2. ศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ร่วมกับอีลีเมนต์ขอบเอกฐาน

3. ศึกษาวิธีการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ (adaptive meshing)

4. เขียนโปรแกรมเพื่อคำนวณตามวิธีวิเคราะห์และประยุกต์กับท่อนำคลื่นมีสันอย่างน้อย 5 แบบ

5. เปรียบเทียบผลที่ได้กับผลของนักวิจัยอื่นๆ

**1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ**

1. วิธีการวิเคราะห์ปัญหาในท่อนำคลื่นมีสัน

2. อัลกอริทึมการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้

3. โปรแกรมจำลองผลการวิเคราะห์

**1.5 ขั้นตอนและวิธีดำเนินการวิจัย**

1. ศึกษาทฤษฎีและวิธีวิเคราะห์ของท่อนำคลื่นมีสันที่มีผู้นำเสนอมาแล้ว

2. ศึกษาอีลีเมนต์แบบพิเศษเพื่อใช้ในระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

3. ศึกษาวิธีการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้

4. เขียนโปรแกรมจำลองผลการวิเคราะห์

5. เปรียบผลที่ได้กับบทความที่มีผู้นำเสนอมาแล้ว

6. จัดทำเอกสารวิทยานิพนธ์

# บทที่ 2

# การปรับปรุงการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นมีสัน 2 มิติ โดยใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน

## 2.1 ความนำ

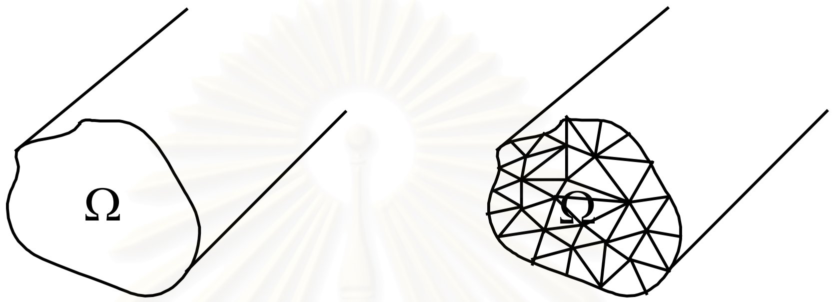
ในบทนี้จะกล่าวถึงการปรับปรุงระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในการวิเคราะห์ท่อนำ-คลื่นมีสัน 2 มิติ โดยใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน เพื่อประมาณสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว ณ บริเวณมุมสัน ร่วมกับการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบปกติ ซึ่งผู้วิจัยได้นำฟังก์ชันรูปร่างแบบสเกลาร์ของ Akin, J.E. (1976) มาพัฒนาต่อเป็นฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ เนื่องจากยังไม่มีผู้วิจัยใดได้เสนอฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน เพื่อการตรวจสอบแนวคิดที่นำเสนอ ผู้วิจัยได้ทดลองคำนวณในกรณีตัวอย่าง 6 ตัวอย่าง เพื่อยืนยันความถูกต้องในรูปแบบวิธีการคำนวณว่ามีความสอดคล้องกับผลที่ได้จากการคำนวณที่มีผู้นำเสนอไว้แล้ว และเสนอผลการเปรียบเทียบอัตราการลู่เข้าของคำตอบเชิงเลข (convergence rate of numerical result) ระหว่างการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบปกติเพียงอย่างเดียว กับการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐานร่วมกับฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบปกติ

## 2.2 ระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

การวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ เป็นการวิเคราะห์โดยการสมมติปัญหาที่ต่อเนื่องให้มีลักษณะเป็นชิ้นส่วนย่อยประกอบกัน (discretization) ซึ่งชิ้นส่วนย่อยๆ นั้นเรียกว่าอีลีเมนต์ และใช้สมการทางคณิตศาสตร์จำลองพฤติกรรมของอีลีเมนต์เหล่านั้น ร่วมกับการวิเคราะห์พฤติกรรมของอีลีเมนต์ทั้งหมดรวมกัน ทำให้สามารถหาค่าการประมาณของผลเฉลยของปัญหาต่อเนื่องนั้นได้ ความแม่นยำของผลเฉลยนั้นขึ้นอยู่กับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (ซึ่งก็คือฟังก์ชันรูปร่าง) และจำนวนของอีลีเมนต์ประกอบกัน ยิ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์มีความสอดคล้องกับพฤติกรรมของปัญหามากเท่าไร ความแม่นยำในการประมาณของอีลีเมนต์ก็ดีมากขึ้นเท่านั้น ในขณะที่การเพิ่มจำนวนของอีลีเมนต์ซึ่งเป็นการลดช่วงของการประมาณ จะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยลดลงด้วยเช่นกัน ระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์เป็นระเบียบวิธีเชิง-ตัวเลขวิธีหนึ่งที่ได้รับความนิยมในการใช้งานมาก เนื่องจากมีความยืดหยุ่นในการวิเคราะห์โครงสร้างซับซ้อนใดๆ ได้ดี ซึ่งถ้าใช้การวิเคราะห์หาผลเฉลยแม่นตรง (exact solution) อาจทำได้

ยากหรือทำไม่ได้เลย เนื่องจากโครงสร้างซับซ้อนเกินไป หลักการพื้นฐานของระเบียบวิธีไฟไนต์-อีลีเมนต์มีดังนี้

- กำหนดโดเมนของปัญหา แล้วแบ่งบริเวณของปัญหาออกเป็นส่วนย่อยๆ ดังรูปที่ 2.1
- ประมาณฟังก์ชันในแต่ละอีลีเมนต์
- รวมระบบสมการของแต่ละอีลีเมนต์เป็นระบบสมการเมทริกซ์
- หาผลเฉลยของระบบสมการเมทริกซ์




รูปที่ 2.1 ภาคตัดขวางท่อนำคลื่นรูปร่างใดๆ

งานวิทยานิพนธ์นี้นำเสนอระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์โดยใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ (vector shape function) เนื่องจากสามารถกำจัดผลเฉลยปลอมเทียมที่เกิดขึ้น มีความสอดคล้องกับแบบรูปสนามแม่เหล็กไฟฟ้า และสามารถใช้ได้กับตัวกลางใดๆ ได้เป็นอย่างดี ผู้วิจัยจะนำเสนอการใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ 2 รูปแบบ คือ ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ กับฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น ซึ่งจะได้กล่าวในบทต่อไป ในหัวข้อนี้ผู้วิจัยจะกล่าวถึงการสร้างระบบสมการเมทริกซ์ เพื่อหาค่าเจาะจง และเวกเตอร์เจาะจง ซึ่งก็คือ ค่าคงตัวเฟส และค่าของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในแต่ละตำแหน่งของโดเมนปัญหา ตามลำดับ โดยเริ่มต้นจากสมการแมกซ์-เวลล์ (Maxwell's equation) ที่ไม่มีแหล่งกำเนิด (source free) และตัวกลางภายในแบบไอโซทรอ-ปิก (isotropic media)

$$\nabla \times \overline{E} = -j\omega\mu_0\mu_r\overline{H} \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \overline{H} = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\overline{E} \tag{2.2}$$

จะได้สมการคลื่นในรูปแบบเวกเตอร์ดังนี้

$$\nabla \times \frac{1}{\varepsilon_r}\nabla \times \overline{H} - k_0^2\mu_r\overline{H} = 0 \tag{2.3}$$

โดยที่ $k_0$ คือ เลขคลื่นของคลื่นในอวกาศว่าง (free-space wavenumber)

$\varepsilon$ คือ สภาพยอม (permittivity) ของตัวกลาง

$\mu$ คือ ความซาบซึมได้ (permeability) ของตัวกลาง

และเงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) ของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเป็นดังนี้

$$\overline{n} \times \overline{E} = 0$$ บนผนังไฟฟ้า (electric wall)

$$\overline{n} \times \nabla \times \overline{E} = 0$$ บนผนังแม่เหล็ก (magnetic wall)

$$\left.\begin{array}{l} \overline{n} \times \overline{E} = continuous \quad function \\ \overline{n} \times \overline{H} = continuous \quad function \end{array}\right\}$$ บริเวณรอยต่อระหว่างตัวกลาง 2 ชนิด

สนามแม่เหล็ก $\overline{H}$ ขึ้นกับ z ในรูป $e^{-\gamma z}$ และเมื่อแยกองค์ประกอบสนามแม่เหล็กและตัวดำเนินการเดลออกเป็น 2 องค์ประกอบคือ องค์ประกอบของสนามแม่เหล็กตามขวาง (transverse magnetic component) และองค์ประกอบของสนามแม่เหล็กตามยาว (longitudinal magnetic component) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\overline{H} = \overline{H}_t + H_z \overline{a}_z \tag{2.4}$$

และตัวดำเนินการเดล (del operator) สามารถแสดงได้เป็นดังนี้

$$\nabla = \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} \overline{a}_z \tag{2.5}$$

ดังนั้นจะได้องค์ประกอบสนามแม่เหล็กตามขวางและตามยาว (รายละเอียดอยู่ในภาคผนวก ก)

$$\nabla_t \times \varepsilon_r^{-1} \nabla_t \times \overline{H}_t - \gamma \varepsilon_r^{-1} \nabla_t H_z - \left(k_0^2 \mu_r + \gamma^2 \varepsilon_r^{-1}\right) \overline{H}_t = 0 \tag{2.6}$$

$$\nabla_t \cdot \varepsilon_r^{-1} \nabla_t H_z + \gamma \nabla_t \cdot \varepsilon_r^{-1} \overline{H}_t + k_0^2 \mu_r H_z = 0 \tag{2.7}$$

ระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์เป็นวิธีแก้ปัญหาค่าขอบเขต (boundary value problem) โดยทั่วไปแล้วมีวิธีที่นิยมใช้ในการแก้ปัญหาค่าขอบเขตนี้อยู่ 2 วิธีคือ ระเบียบวิธีแปรผันริตซ์ (Ritz variational method) และระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง

นิยามปัญหาค่าขอบเขตในบริเวณ $\Omega$ จากรูปแบบตัวดำเนินการ

$$L\phi = f \tag{2.8}$$

โดยที่ $L$ คือ ตัวดำเนินการ (operator)

$\phi$ คือ พารามิเตอร์ไม่ทราบค่า (unknown parameter)

$f$ คือ ฟังก์ชันกระตุ้น (excitation function)

กระบวนการสร้างระบบสมการของปัญหาแบบค่าขอบเขต มี 2 แนวทาง ดังนี้

2.2.1 ระเบียบวิธีแปรผันริตซ์ (Jin, J.M., 1993)

แนวคิดของระเบียบวิธีแปรผันริตซ์นี้คือ จากสมการปัญหาค่าขอบเขต นำมาสร้างให้อยู่ในรูปแบบนิพจน์แปรผัน (variational expression) หรือที่เรียกว่า ฟังก์ชันนอล (functional) แล้วพิจารณาหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนอลคือ จุดสภาวะนิ่ง (stationary point) ซึ่งอยู่ภายใต้เงื่อนไขขอบเขต โดยนิยามจากผลคูณภายใน (inner product) จะได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\langle \phi, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \phi \cdot \varphi^* d\Omega \tag{2.9}$$

กับตัวดำเนินการผูกพันตัวเอง (self-adjoint operator)

$$\langle L\phi, \varphi \rangle = \langle \phi, L\varphi \rangle \tag{2.10}$$

และนิยามค่าจำกัดบวก (positive definite)

$$\langle L\phi, \varphi \rangle = \begin{cases} \rangle \quad 0 & ; \quad \phi \neq 0 \\ = \quad 0 & ; \quad \phi = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

ดังนั้นจุดสภาวะนิ่งของฟังก์ชันนอลนี้คือ

$$F(\tilde{\phi}) = \frac{1}{2}\langle L\tilde{\phi}, \tilde{\phi} \rangle - \langle f, \tilde{\phi} \rangle \tag{2.12}$$

โดยที่ $\tilde{\phi}$ คือ ฟังก์ชันทดสอบ (testing function)

จากนั้นผลคูณภายในตลอดบริเวณ $\Omega$ แล้วหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนอล โดยเทียบกับฟังก์ชันที่ทราบค่าแล้วให้เท่ากับศูนย์

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = 0 \tag{2.13}$$

2.2.2 ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง

แนวคิดของระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างคือ การพยายามทำให้เศษตกค้าง ซึ่งก็คือผลต่างระหว่างผลเฉลยแม่นตรงกับผลเฉลยทดสอบมีค่าน้อยที่สุด หรือศูนย์ แต่ในความเป็นจริงไม่สามารถทำให้เป็นศูนย์ได้ ทำได้เพียงโดยประมาณให้ใกล้เคียง

$$R = L\tilde{\phi} - f \tag{2.14}$$

สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตที่จะทำให้ $\tilde{\phi} = \phi$ แล้วบังคับให้ $R = 0$ ภายในบริเวณ $\Omega$ และใช้ระเบียบวิธีกาเลอร์คิน (Galerkin's method) ในการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง โดยฟังก์ชันทดสอบใช้เหมือนกับฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก

เนื่องจากงานวิทยานิพนธ์นี้เลือกใช้ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง จึงนำเสนอกระบวนการสร้างระบบสมการในระเบียบวิธีนี้ แปลงปัญหาค่าขอบเขตของสมการ (2.6) และ (2.7) เป็นรูปแบบสมการเมทริกซ์เชิงเส้น โดยใช้ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก คือ $\overline{w}_t$ มาสร้างผลคูณเชิงสเกลาร์ (dot product) ในสมการ (2.6) และ $w_z$ นำมาคูณในสมการ (2.7) แล้วอินทิเกรตตลอดบริเวณภาคตัดขวางของท่อนำคลื่น จะได้สมการต่อไปนี้ (รายละเอียดอยู่ในภาคผนวก ก)

$$\int_{\Omega}\left[\,\overline{w}_t\cdot\nabla_t\times\varepsilon_r^{-1}\nabla_t\times\overline{H}_t-\overline{w}_t\cdot\gamma\varepsilon_r^{-1}\nabla_t H_z-\overline{w}_t\cdot\left(k_0^2\mu_r+\gamma^2\varepsilon_r^{-1}\right)\overline{H}_t\,\right]d\Omega=0 \tag{2.15}$$

$$\int_{\Omega}\left[\,w_z\nabla_t\cdot\varepsilon_r^{-1}\nabla_t H_z+w_z\gamma\nabla_t\cdot\varepsilon_r^{-1}\overline{H}_t+w_z k_0^2\mu_r H_z\,\right]d\Omega=0 \tag{2.16}$$

เมื่อพิจารณาเงื่อนไขขอบเขต จะสามารถจัดรูปสมการได้ดังนี้

$$\int_{\Omega}\left[\left(\nabla\times\overline{w}_t\right)\cdot\varepsilon_r^{-1}\left(\nabla_t\times\overline{H}_t\right)-\left(k_0^2\mu_r+\gamma^2\varepsilon_r^{-1}\right)\overline{w}_t\cdot\overline{H}_t-\gamma\varepsilon_r^{-1}\overline{w}_t\cdot\nabla_t H_z\right]d\Omega=0 \tag{2.17}$$

$$\int_{\Omega}\left[\nabla_t w_z\cdot\varepsilon_r^{-1}\nabla_t\overline{H}_z+\gamma\nabla_t w_z\cdot\varepsilon_r^{-1}\overline{H}_t-k_0^2\mu_r w_z H_z\right]d\Omega=0 \tag{2.18}$$

เมื่อแบ่งบริเวณภาคตัดขวางท่อนำคลื่นเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยม จากนั้นประมาณสนามแม่เหล็กในรูปตัวแปรไม่ทราบค่าของฟังก์ชันรูปร่างในอีลีเมนต์แต่ละอีลีเมนต์ ดังสมการ

$$\overline{H}_t^e=\sum_{i=1}^{n}\overline{N}_i^e\;H_{ti}^e \tag{2.19}$$

$$H_z^e=\sum_{i=1}^{n}N_i^e\;H_{zi}^e \tag{2.20}$$

โดยที่ $n$ คือ จำนวนตัวไม่ทราบค่าในแต่ละอีลีเมนต์

$\overline{N}_i^e$ คือ ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบ

$N_i^e$ คือ ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์โนด

โดยแทนฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักด้วย $\overline{w}_t = \overline{N}$ และ $w_z = N$ ลงในสมการ (2.17) และ (2.18) แล้วจัดระบบสมการได้ดังนี้

$$[A][h_t] - k_0^2[B][h_t] - \gamma[C][h_z] - \gamma^2[D][h_t] = 0 \tag{2.21}$$

$$[E][h_z] - k_0^2[F][h_z] + \gamma[C]^T[h_t] = 0 \tag{2.22}$$

เนื่องจากสมการที่ (2.21) และ (2.22) ไม่อยู่ในรูประบบสมการเจาะจง (eigen equation) ดังนั้นจึงปรับรูปสมการ โดยให้ $[h_z^{'}] = \dfrac{[h_z]}{\gamma}$ แล้วนำ $\gamma$ คูณในสมการ (2.22) จะได้ระบบสมการใหม่อยู่ในระบบสมการเจาะจง $[A][X] = \lambda[B][X]$ ดังนี้

$$[A][h_t] - k_0^2[B][h_t] - \gamma^2\left\{[C][h_z^{'}] + [D][h_t]\right\} = 0 \tag{2.23}$$

$$\gamma^2\left\{[E][h_z^{'}] - k_0^2[F][h_z^{'}] + [C]^T[h_t]\right\} = 0 \tag{2.24}$$

หรือจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} [A]-k_0^2[B] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_t \\ h_z^{'} \end{bmatrix} = \gamma^2\begin{bmatrix} [D] & [C] \\ [C]^T & [E]-k_0^2[F] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_t \\ h_z^{'} \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

โดยที่

$$[A] = \varepsilon_r^{-1}\int_\Omega \left(\nabla_t \times \overline{N}_m\right)\cdot\left(\nabla_t \times \overline{N}_n\right) d\Omega \tag{2.26}$$

$$[B] = \mu_r\int_\Omega \left(\overline{N}_m \cdot \overline{N}_n\right) d\Omega \tag{2.27}$$

$$[C] = \varepsilon_r^{-1}\int_\Omega \left(\overline{N}_m \cdot \overline{N}_n\right) d\Omega \tag{2.28}$$

$$[D] = \varepsilon_r^{-1}\int_\Omega \left(\overline{N}_m \cdot \nabla_t L_n\right) d\Omega \tag{2.29}$$

$$[E] = \varepsilon_r^{-1}\int_\Omega \left(\nabla_t L_m \cdot \nabla_t L_n\right) d\Omega \tag{2.30}$$

$$[F] = \mu_r\int_\Omega \left(L_m L_n\right) d\Omega \tag{2.31}$$

จากสมการ (2.25) ถึง (2.31) สามารถจัดรูปให้ดูง่ายขึ้นเป็น

$$\begin{bmatrix} A_{tt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_t \\ h_z^{'} \end{bmatrix} = \gamma^2\begin{bmatrix} B_{tt} & B_{tz} \\ B_{zt} & B_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_t \\ h_z^{'} \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

หรือสามารถจัดรูปให้อยู่ในรูปของสนามแม่เหล็กตามขวางเพียงอย่างเดียวจะได้ดังสมการ

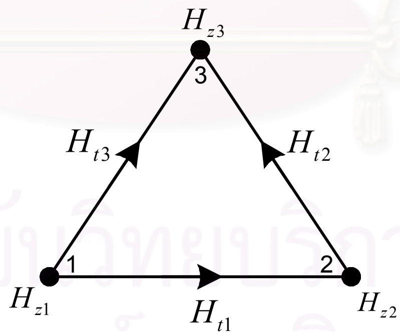
$$[A_{tt}][h_t]=\gamma^2\left\{[B_{tt}]-[B_{tz}][B_{zz}]^{-1}[B_{zt}]\right\}[h_t] \tag{2.33}$$

โดยที่

$$[A_{tt}]=[A]-k_0^2[B] \tag{2.34}$$
$$[B_{tt}]=[D] \tag{2.35}$$
$$[B_{tz}]=[C] \tag{2.36}$$
$$[B_{zt}]=[C]^T \tag{2.37}$$
$$[B_{zz}]=[E]-k_0^2[F] \tag{2.38}$$

## 2.3 ฟังก์ชันรูปร่าง

ฟังก์ชันรูปร่างประกอบด้วย ฟังก์ชันรูปร่างโนดและฟังก์ชันรูปร่างขอบ ซึ่งฟังก์ชันรูปร่างโนดใช้สำหรับประมาณสเกลาร์บนจุดแทนองค์ประกอบของสนามตามยาว ส่วนฟังก์ชันรูป-ร่างขอบใช้สำหรับประมาณเวกเตอร์บนด้านแทนองค์ประกอบของสนามตามขวางบนอีลีเมนต์สามเหลี่ยมรูปร่างใดๆ โดยมีพารามิเตอร์ไม่ทราบค่า 3 ตัวบนขอบแทนตำแหน่งของสนามตามขวาง และอีก 3 ตัวบนโนดแทนตำแหน่งของสนามตามยาว ภายในอีลีเมนต์แต่ละอีลีเมนต์ ดังรูปที่ 2.2




รูปที่ 2.2 พารามิเตอร์บนอีลีเมนต์ขอบคงที่

### 2.3.1 ฟังก์ชันรูปร่างโนดเชิงเส้น (Linear nodal shape function)

การประมาณองค์ประกอบของสนามตามยาว อยู่ในรูปของผลบวกของผลคูณระหว่างฟังก์ชันรูปร่างโนดกับพารามิเตอร์ไม่ทราบค่าทั้ง 3 จุด ดังสมการ

$$H_z^e = \sum_{i=1}^{3} N_i^e \; H_{zi}^e \tag{2.39}$$

การประมาณฟังก์ชันสเกลาร์ภายในรูปสามเหลี่ยม โดยใช้ฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function) อันดับหนึ่ง หรือฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function) ซึ่งมีรูปสมการดังนี้

$$L_i^e = \frac{1}{2A_e}\left(a_i + b_i x + c_i y\right) \qquad i = 1,2,3 \tag{2.40}$$

โดยที่

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j \tag{2.41}$$

$$b_i = y_j - y_k \tag{2.42}$$

$$c_i = x_k - x_j \tag{2.43}$$

$$A_e = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \tag{2.44}$$

ซึ่งมีรหัสเวียน (cyclic code) เป็น $(i, j, k) = \{\, (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) \,\}$

$$N_i^e = L_i^e \tag{2.45}$$

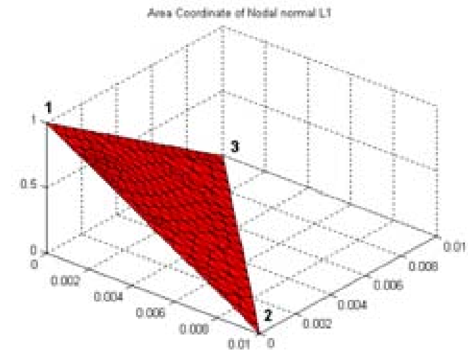
โดยฟังก์ชันรูปร่างโนดมีคุณสมบัติดังนี้ มีค่าเป็น 1 ในโนดแต่ละโนด และผลรวมของพิกัดพื้นที่มีค่าเท่ากับ 1 ตามสมการที่ (2.46) และ (2.47) ตามลำดับ ซึ่งสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.3 ยกตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน $L_1$ มีค่าเป็น 0 ที่ด้านตรงข้ามกับโนดหนึ่ง (ด้าน 2-3) และมีค่าเป็น 1 ที่โนดหนึ่ง ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนี้เป็นไปอย่างเชิงเส้น ส่วนฟังก์ชัน $L_2$ และ $L_3$ มีคุณสมบัติเช่นเดียวกันกับฟังก์ชัน $L_1$

คุณสมบัติของพิกัดพื้นที่จะเป็นดังสมการ

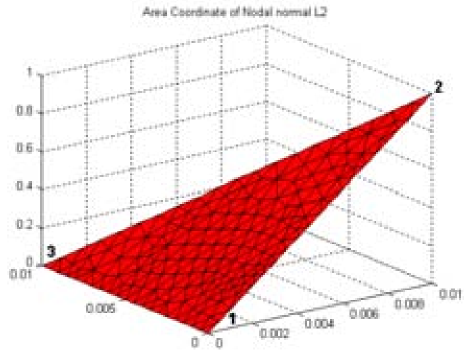
$$L_i^e = \begin{cases} 1, & at\ node\ i \\ 0, & at\ node\ j,k \end{cases} \tag{2.46}$$

$$\sum_{i=1}^{3} L_i^e(x,y) = 1 \tag{2.47}$$

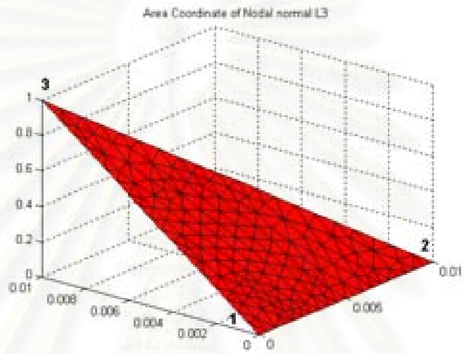
รหัสเวียนเป็น $(i, j, k) = \{\, (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) \,\}$




ก. ฟังก์ชันรูปร่างโนด $N_1^e$




ข. ฟังก์ชันรูปร่างโนด $N_2^e$




ค. ฟังก์ชันรูปร่างโนด $N_3^e$

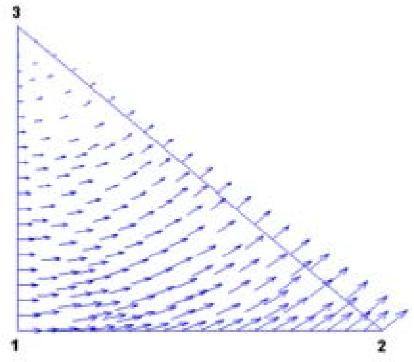
รูปที่ 2.3 ฟังก์ชันรูปร่างโนดเชิงเส้น

2.3.2 ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่

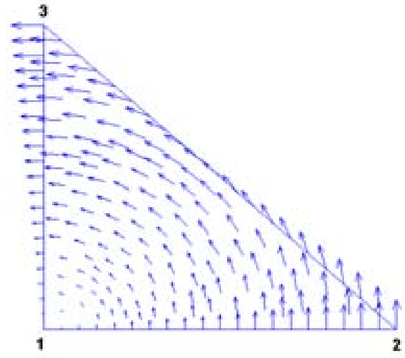
การประมาณองค์ประกอบของสนามตามขวาง อยู่ในรูปของผลบวกของผลคูณระหว่างฟังก์ชันรูปร่างกับพารามิเตอร์ไม่ทราบค่า ทั้ง 3 ด้าน ดังสมการ

$$H_t^e = \sum_{i=1}^{3} \overline{N}_i^e \; H_{ti}^e \tag{2.48}$$

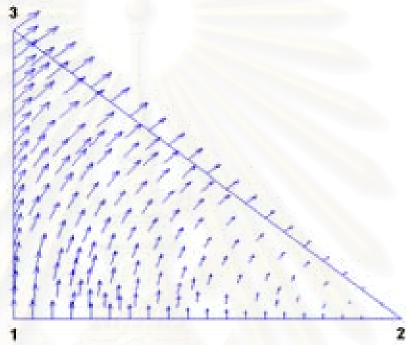
โดยพารามิเตอร์เป็นเวกเตอร์อยู่บนด้านมีคุณสมบัติคือ เปลี่ยนแปลงในแนวสัมผัสแบบคงที่ตลอดด้าน และเปลี่ยนแปลงในแนวตั้งฉากแบบเชิงเส้น (Constant Tangential / Linear Normal : CT/LN) ดังรูปที่ 2.4 ยกตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน $\overline{N}_1^e$ พิจารณาด้าน 1-2 มีเวกเตอร์อยู่ในแนวสัมผัส ส่วนด้าน 2-3 และด้าน 3-1 มีเฉพาะเวกเตอร์ในแนวตั้งฉากเท่านั้น เงื่อนไขขอบเขตระหว่างอีลีเมนต์หรือเคิร์ลคอนฟอร์มมิง (culr conforming) คือสนามต่อเนื่องในองค์ประกอบแนวสัมผัส และสนามไม่ต่อเนื่องในองค์ประกอบแนวตั้งฉากระหว่างอีลีเมนต์



ก. $\overline{N}_1^e$



ข. $\overline{N}_2^e$



ค. $\overline{N}_3^e$

รูปที่ 2.4 แบบรูปของฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่

ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ (รายละเอียดอยู่ในภาคผนวก ข) แสดงเป็นสมการได้ดังนี้

$$\overline{N}_i = l_i\left(L_i\nabla L_j - L_j\nabla L_i\right) \tag{2.49}$$

ซึ่งมีรหัสเวียน (cyclic code) เป็น $(i,j,k)=\{\,(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\,\}$

นำสมการ (2.40) แทนลงในสมการ (2.49) จะได้ดังสมการ

$$\overline{N}_1 = \frac{l_1}{2A_e}\left[(y_3-y)\overline{a}_x + (x-x_3)\overline{a}_y\right] \tag{2.50}$$

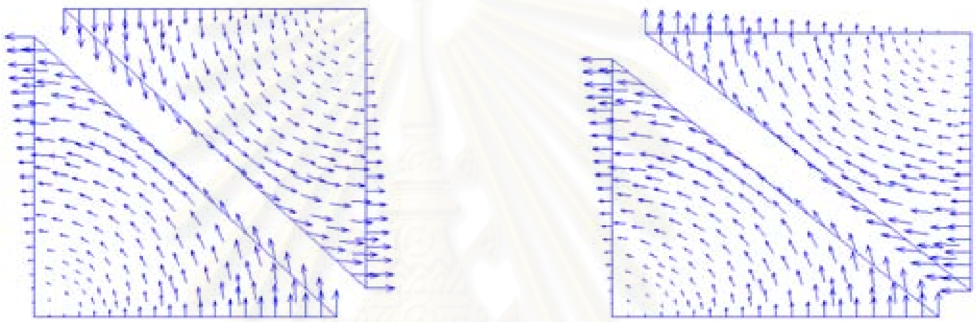
$$\overline{N}_2 = \frac{l_2}{2A_e}\left[(y_1-y)\overline{a}_x + (x-x_1)\overline{a}_y\right] \tag{2.51}$$

$$\overline{N}_3 = \frac{l_3}{2A_e}\left[(y_2-y)\overline{a}_x + (x-x_2)\overline{a}_y\right] \tag{2.52}$$

โดยที่ $l_i$ คือ ความยาวด้านของอีลีเมนต์สามเหลี่ยม $\quad i=1,2,3$

$$l_i = \begin{cases} \sqrt{b_k^2 + c_k^2}, & b_k < 0 \; or \; b_k = 0, c_m > 0 \\ -\sqrt{b_k^2 + c_k^2}, & b_k > 0 \; or \; b_k = 0, c_m < 0 \end{cases} \tag{2.53}$$

ในทั่วไปจุดของอีลีเมนต์สามเหลี่ยมใดๆ จะกำหนดหมุนวนในทิศทวนเข็มนาฬิกา ดังนั้นเมื่อพิจารณาอีลีเมนต์ 2 อีลีเมนต์ติดกัน จะพบว่าสนามที่หมุนในทิศทวนเข็มนั้นมีทิศสวนทางกัน ทำให้สนามที่ได้หักล้างกัน ดังนั้น $l_i$ จึงจำเป็นต้องกำหนดทิศทางของสนามหมุนให้อยู่ในทิศทางเดียวกัน เพื่อทำให้สนามที่หมุนนั้นเสริมกัน ดังรูปที่ 2.5 โดยพิจารณาที่ตำแหน่งของพิกัดของจุดในอีลีเมนต์แต่ละอีลีเมนต์ที่ติดกันตามสมการ (2.53) นั่นคือตำแหน่งจุดของอีลีเมนต์ใดอยู่สูงกว่ากำหนดให้เป็นบวก และถ้าตำแหน่งจุดของอีลีเมนต์ใดอยู่ต่ำกว่าก็กำหนดให้เป็นลบ



ก. ไม่ได้กำหนดทิศทาง ข. กำหนดทิศทาง

รูปที่ 2.5 การหมุนวนของสนาม 2 อีลีเมนต์ติดกัน
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่

คุณสมบัติฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่

1. $\nabla \cdot \overline{N}_i^e = \nabla \cdot \left(L_i^e \nabla L_j^e\right) - \nabla \cdot \left(L_j^e \nabla L_i^e\right) = 0$ (2.54)

2. $\nabla \times \overline{N}_i^e = 2\left(\nabla L_i^e \times \nabla L_j^e\right)$ (2.55)

3. $\hat{a}_i \cdot \overline{N}_i^e = 1$ บนด้าน $i - j$ (2.56)

$\hat{a}_i \cdot \overline{N}_j^e = 0$ บนด้าน $i - j$ (2.57)

$\hat{a}_i \cdot \overline{N}_k^e = 0$ บนด้าน $i - j$ (2.58)

รหัสเวียนเป็น $(i, j, k) = \{\, (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) \,\}$

จากคุณสมบัติทั้ง 3 ข้อ ทำให้ทราบถึงคุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ซึ่งก็คือ สามารถทำให้ปราศจากผลเฉลยปลอมเทียม และองค์ประกอบแนวสัมผัสกับด้านมีค่าคงที่ ดังนั้นจึงสอดคล้องกับคุณสมบัติของฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่

## 2.4 ฟังก์ชันรูปร่างแบบเอกฐาน

จากการศึกษางานวิจัยของ Gil, J.M., and Webb, J.P. (1997) Bladel J.V. (1991) และ Meixner, J. (1972) พบว่าที่บริเวณมุมสัน หรือบริเวณใดๆ ที่มีการหักมุมของตัวนำ สนามแม่เหล็กไฟฟ้าจะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว และมีความหนาแน่นประจุไฟฟ้าสูงใกล้บริเวณมุมสัน โดย Gil, J.M., and Webb, J.P. (1997) ได้เสนอไว้ว่าสนามแม่เหล็กแปรผันตามระยะรัศมีจากมุมสัน $r$ ตามสมการที่ (2.59) ถึง (2.60) และดังรูปที่ 2.6

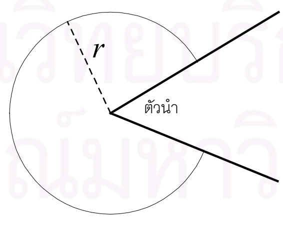
$$H_t \rightarrow r^{\rho-1} \tag{2.59}$$

$$H_z \rightarrow r^{\rho} \tag{2.60}$$

โดยที่ $\rho$ คือ อันดับของสภาวะเอกฐาน (order of the singularity) ซึ่งขึ้นอยู่กับโครงสร้างทางเรขาคณิต และคุณสมบัติของวัสดุ (material properties) $0<\rho<1$

$r$ คือ รัศมีของมุมสัน

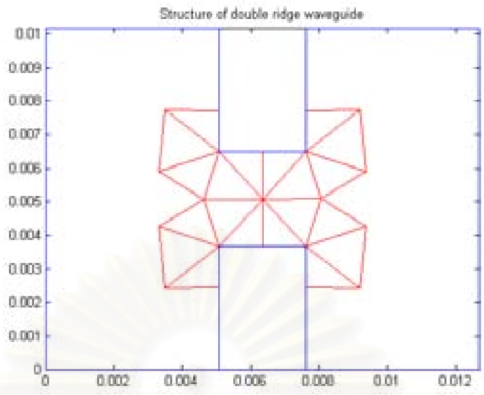
จากสมการที่ (2.59) สังเกตได้ว่าสนามแม่เหล็กองค์ประกอบตามขวางแปรผันตามระยะ $r$ ยกกำลังค่าติดลบ เนื่องจาก $0<\rho<1$ แสดงว่าสนามแม่เหล็กองค์ประกอบตามขวางมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วคล้ายคลึงกับเอกซ์โพเนนเชียล และสมการที่ (2.60) แสดงว่าองค์ประกอบสนามแม่เหล็กตามยาวมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วเช่นเดียวกันตามระยะ $r$




รูปที่ 2.6 บริเวณมุมสันของตัวนำ

ในการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ ผู้วิจัยได้นำฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบแบบเอกฐานมาประมาณลักษณะของการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ณ บริเวณมุม

สัน ดังแสดงในกรณีตัวอย่างท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ ในรูปที่ 2.7 ส่วนบริเวณนอกเหนืออีลีเมนต์สามเหลี่ยมชุดนี้ ใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบแบบปกติมาประมาณสนามเช่นเดียวกัน

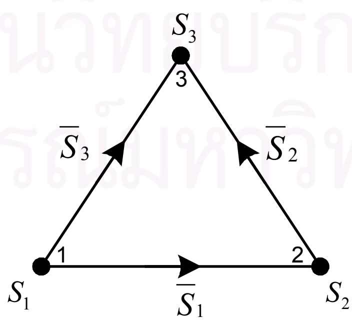



รูปที่ 2.7 อีลีเมนต์สามเหลี่ยมบริเวณมุมสันของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่

ฟังก์ชันรูปร่างแบบเอกฐานนั้นจะประกอบด้วย ฟังก์ชันรูปร่างโนดแบบเอกฐาน และฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบแบบเอกฐาน ซึ่งมีลักษณะเช่นเดียวกับฟังก์ชันรูปร่างแบบปกติในหัวข้อที่ 2.3 โดยใช้ในการประมาณสนามขององค์ประกอบตามขวางและองค์ประกอบตามยาว ตามสมการที่ (2.61) ถึง (2.62) ซึ่งมีพารามิเตอร์ไม่ทราบค่า 3 ตัวบนขอบแทนตำแหน่งของสนามตามขวาง และอีก 3 ตัวบนโนดแทนตำแหน่งของสนามตามยาว ดังรูปที่ 2.8

$$H_z^e = \sum_{i=1}^{3} S_i^e \; H_{zi}^e \tag{2.61}$$

$$H_t^e = \sum_{i=1}^{3} \overline{S}_i^e \; H_{ti}^e \tag{2.62}$$




รูปที่ 2.8 พารามิเตอร์บนอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน

2.4.1 ฟังก์ชันรูปร่างโนดเชิงเส้นแบบเอกฐาน (Singular nodal shape function)

ฟังก์ชันรูปร่างโนดเชิงเส้นแบบเอกฐาน ที่ผู้วิจัยได้นำมาใช้เป็นของ Akin,J.E. (1976) โดยสามารถแสดงอยู่ในรูปของฟังก์ชันพิกัดพื้นที่ อ้างอิงจากฟังก์ชันรูปร่างโนดเชิงเส้นแบบปกติ ดังสมการ

$$S_1 = 1-\left(1-L_1\right)^{1-\rho} \tag{2.63}$$

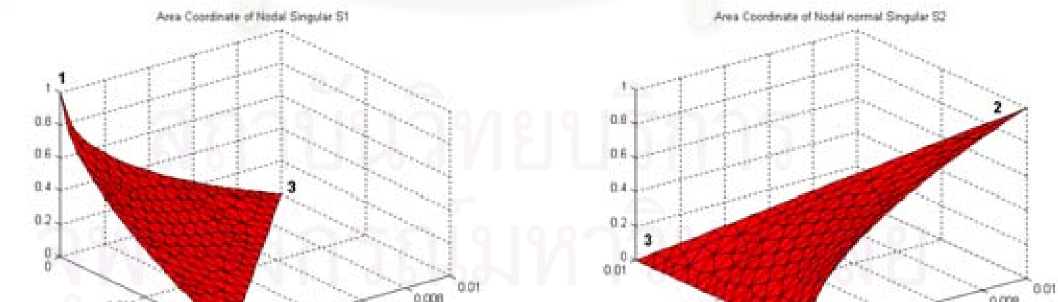
$$S_2 = \frac{L_2}{\left(1-L_1\right)^{\rho}} \tag{2.64}$$

$$S_3 = \frac{L_3}{\left(1-L_1\right)^{\rho}} \tag{2.65}$$

โดยคุณสมบัติของฟังก์ชันรูปร่างโนดเชิงเส้นแบบเอกฐาน มีลักษณะคล้ายคลึงกับฟังก์ชันรูปร่างโนดเชิงเส้นแบบปกติ สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.9 ยกตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน $S_1$ มีค่าเป็น 0 ที่ด้านตรงข้ามกับโนดหนึ่ง (ด้าน 2-3) และมีค่าเป็น 1 ที่โนดหนึ่ง แต่ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน $S_1$ ลดลงอย่างรวดเร็วตามลักษณะ $r^{\rho}$ เฉพาะที่โนดหนึ่ง ส่วนฟังก์ชัน $S_2$ และ $S_3$ มีคุณสมบัติเช่นเดียวกันแต่มีลักษณะการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันเป็นแบบเชิงเส้น ตามสมการ

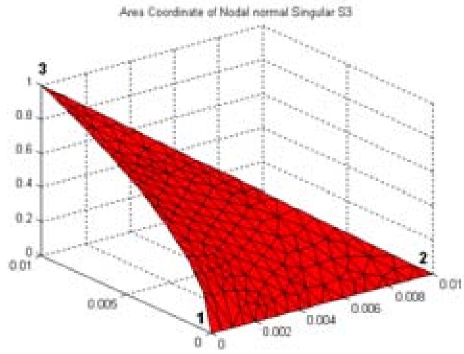
$$S_i = \begin{cases} 1, & at\ node\ i \\ 0, & at\ node\ j,k \end{cases} \tag{2.66}$$

$$\sum_{i=1}^{3} S_i\left(x,y\right) = 1 \tag{2.67}$$




ก. ฟังก์ชันรูปร่างโนด $S_1^e$ ข. ฟังก์ชันรูปร่างโนด $S_2^e$

รูปที่ 2.9 ฟังก์ชันรูปร่างโนดเชิงเส้นแบบเอกฐาน

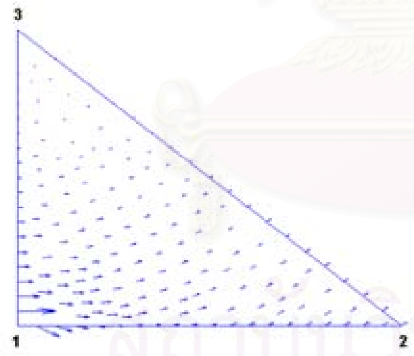



ค. ฟังก์ชันรูปร่างโนด $S_3^e$

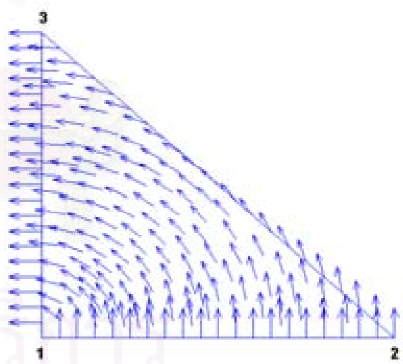
รูปที่ 2.9 (ต่อ) ฟังก์ชันรูปร่างโนดเชิงเส้นแบบเอกฐาน

2.4.2 ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน

ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐานมีคุณสมบัติเช่นเดียวกับฟังก์ชันรูป-ร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบปกติ สามารถแสดงดังรูปที่ 2.8 คือมีพารามิเตอร์เป็นเวกเตอร์อยู่บนด้านคงที่ตลอดด้าน และเวกเตอร์เปลี่ยนแปลงในแนวสัมผัสแบบคงที่ตลอดด้าน และเวกเตอร์เปลี่ยนแปลงในแนวตั้งฉากแบบเชิงเส้น

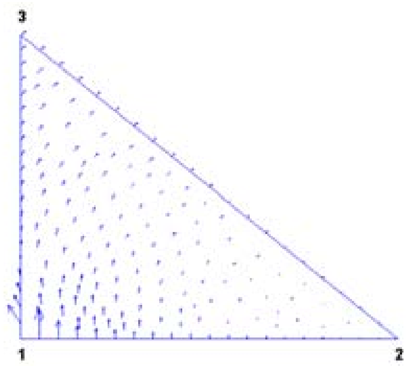


ก. $\overline{S}_1^e$



ข. $\overline{S}_2^e$

รูปที่ 2.10 แบบรูปของฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน



ค. $\overline{S}_3^e$

รูปที่ 2.10 (ต่อ) แบบรูปของฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน

ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน (รายละเอียดอยู่ในภาคผนวก ค) แสดงสมการดังนี้

$$\overline{S}_i = l_i\left(S_i \nabla S_j - S_j \nabla S_i\right) \tag{2.68}$$

ซึ่งมีรหัสเวียน (cyclic code) เป็น $(i, j, k) = \{\, (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) \,\}$

เมื่อนำสมการที่ (2.63) ถึง (2.65) แทนลงในสมการ (2.68) จะได้ฟังก์ชันรูปร่างขอบแบบเอกฐานทั้ง 3 ด้านดังสมการ (2.69) ถึง (2.71) โดยพารามิเตอร์อ้างอิงจากฟังก์ชันรูปร่างขอบแบบปกติ

$$\begin{aligned}\overline{S}_1 = {} & \frac{l_1}{2A_e(1-L_1)^{2\rho}}\left\{ b_1\left[\rho L_2(1-L_1)^{\rho-1} - L_2\right] + b_2\left[(1-L_1)^{\rho} - (1-L_1)\right]\right\}\overline{a}_x \\ & + \frac{l_1}{2A_e(1-L_1)^{2\rho}}\left\{ c_1\left[\rho L_2(1-L_1)^{\rho-1} - L_2\right] + c_2\left[(1-L_1)^{\rho} - (1-L_1)\right]\right\}\overline{a}_y\end{aligned} \tag{2.69}$$

$$\overline{S}_2 = \frac{l_2}{2A_e(1-L_1)^{2\rho}}\left\{ (b_3L_2 - b_2L_3)\,\overline{a}_x + (c_3L_2 - c_2L_3)\,\overline{a}_y \right\} \tag{2.70}$$

$$\begin{aligned}\overline{S}_3 = {} & \frac{l_3}{2A_e(1-L_1)^{2\rho}}\left\{ b_1\left[L_3 - \rho L_3(1-L_1)^{\rho-1}\right] + b_3\left[(1-L_1) - (1-L_1)^{\rho}\right]\right\}\overline{a}_x \\ & + \frac{l_3}{2A_e(1-L_1)^{2\rho}}\left\{ c_1\left[L_3 - \rho L_3(1-L_1)^{\rho-1}\right] + c_3\left[(1-L_1) - (1-L_1)^{\rho}\right]\right\}\overline{a}_y\end{aligned} \tag{2.71}$$

และในการปรับทิศทางของสนามที่มีทิศสวนทางกัน ก็ใช้หลักการเดียวกับในการปรับสนามหมุนของฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบแบบปกติ ตามสมการ (2.53)

การวิเคราะห์ท่อนำคลื่นมีสันด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ โดยใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ ซึ่งผสมกันระหว่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบปกติ กับอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอก-

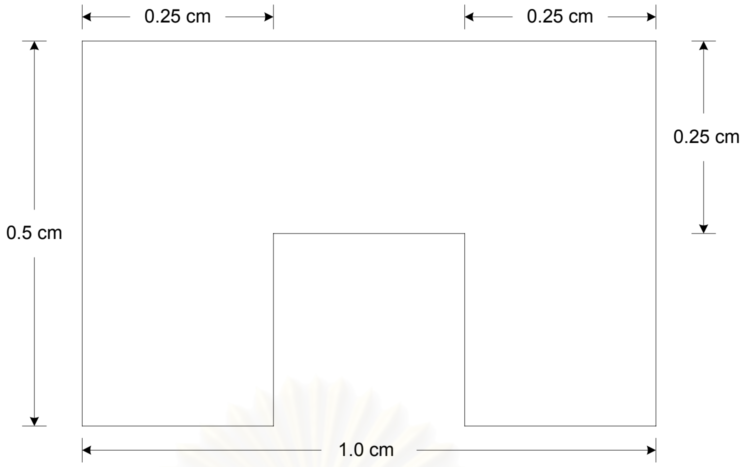
ฐาน โดยอีลีเมนต์ขอบแบบเอกฐานใช้กับอีลีเมนต์สามเหลี่ยมที่อยู่ตรงบริเวณมุมสัน และอีลีเมนต์ขอบแบบปกติใช้กับอีลีเมนต์สามเหลี่ยมนอกเหนือตรงบริเวณมุมสัน เพื่อประมาณสนามที่อยู่ตรงบริเวณมุมสันให้มีลักษณะใกล้เคียงกับการเปลี่ยนแปลงของสนามที่เกิดขึ้น ดังจะได้เห็นผลการตรวจสอบแนวคิดที่ได้เสนอในวิทยานิพนธ์นี้ในหัวข้อต่อไป

**2.5 ผลการตรวจสอบโดยคำนวณตัวอย่าง 6 ตัวอย่าง**

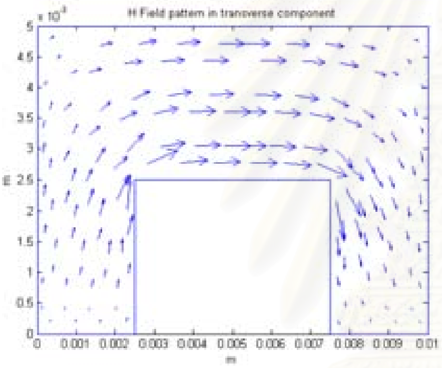
ในการคำนวณชุดตัวอย่างนี้ ผู้วิจัยได้วิเคราะห์ฟังก์ชันรูปแบบ 2 ฟังก์ชันคือ ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบปกติเพียงอย่างเดียว กับฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบปกติร่วมกับฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน ซึ่งฟังก์ชันรูปร่างแบบเอกฐานนั้นใช้ค่า $\rho$ = 0.5 ซึ่งค่า $\rho$ ผู้วิจัยได้เลือกมาเพียงหนึ่งค่า อยู่ในช่วง 0 ถึง 1 เพื่อจะได้กำหนดค่าในการคำนวณให้เป็นไปในทางเดียวกัน อย่างไรก็ตามเมื่อนำค่า $\rho$ เท่าใดมาพิจารณาก็จะยังให้ผลเฉลยที่ได้มีค่าที่ดีกว่าการไม่ใช้ค่า $\rho$ เลย (ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบแบบปกติ) ซึ่งจะได้แสดงการคำนวณในตัวอย่างท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวเป็นกรณีตัวอย่างเดียวในการเปลี่ยนแปลงค่า $\rho$ ในชุดตัวอย่างทั้ง 6 นี้ โดยคำนวณหาเลขคลื่นตัด (cutoff wavenumber) และความถี่ตัด (cutoff frequency) ของท่อนำคลื่นในตัวอย่างแต่ละตัวอย่าง ซึ่งคำนวณเพียง 2 โมดแรกเท่านั้น เนื่องจากในการใช้งานนั้น จะพิจารณาเฉพาะช่วงความถี่ที่นำไปใช้งาน ซึ่งก็คือระยะห่างระหว่างการเกิดความถี่ตัดของโมดที่ 1 และโมดที่ 2 และเพื่อให้ทราบถึงการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลย จึงค่อยๆ เพิ่มอีลีเมนต์ทีละช่วง โดยเปรียบเทียบผลจากการคำนวณด้วยการใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบปกติอย่างเดียว กับการใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบผสมในรูปแบบของกราฟ แกนนอนของกราฟคือ แกนของระดับขั้นความเสรี (Degree Of Freedom : DOF) แกนตั้งของกราฟคือ เลขคลื่นตัด หรือความถี่ตัด ซึ่งในกรณีตัวอย่างทั้งหมดนี้ยกเว้นกรณีท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน ผู้วิจัยได้เลือกนำมาคำนวณ เนื่องจากมีการนำเสนอไว้ในบทความอ้างอิงหลายๆ บทความ เพื่อจะนำมาเปรียบเทียบผลที่ได้จากการคำนวณกับผลในบทความอ้างอิง และเพื่อแสดงได้ว่าผลที่ได้จากการคำนวณนี้มิได้ผิดเพี้ยนไป ยังคงมีความใกล้เคียงกันเมื่อเปรียบเทียบกับบทความอ้างอิง

2.5.1 ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว

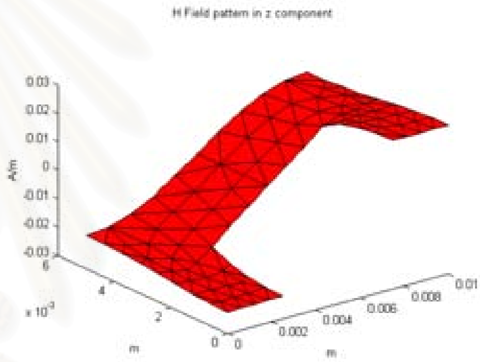
โครงสร้างภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว มีลักษณะทางกายภาพคือ มีการเว้าของผนังตัวนำ 1 ด้าน หรือมีการสอดตัวนำเข้าไป 1 แท่ง ดังรูปที่ 2.11 โดยในการเลือกตัวอย่างนี้นำมาคำนวณ เนื่องจากเป็นที่นิยมนำมาใช้ในทางปฏิบัติ มีความสมมาตรในแกน x และโครงสร้างมีการหักมุม 2 มุม ทำให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นอย่างดี



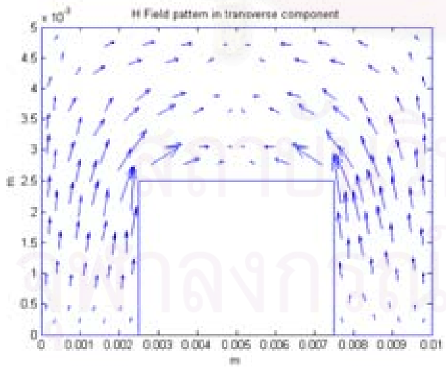

รูปที่ 2.11 โครงสร้างภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว



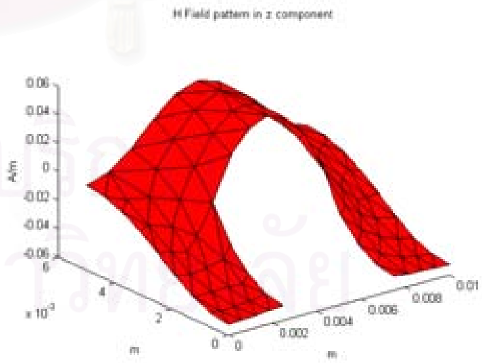

ก. โมด $TE_{10}$ ตามขวาง




ข. โมด $TE_{10}$ ตามยาว



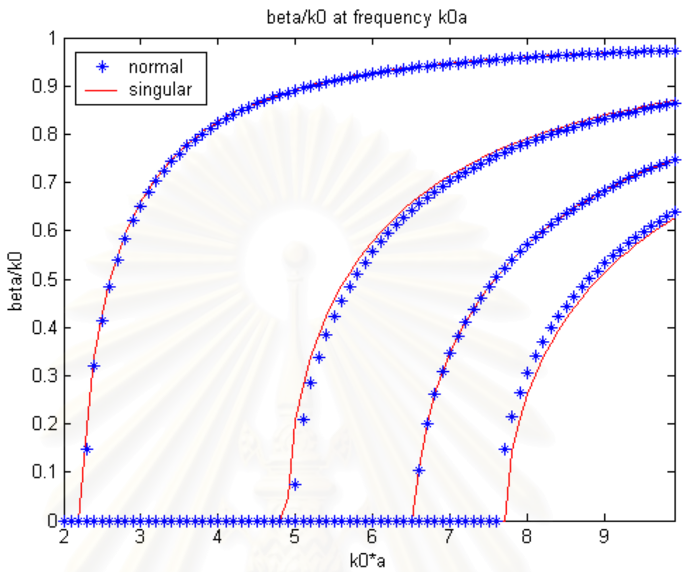

ค. โมด $TE_{01}$ ตามขวาง




ง. โมด $TE_{01}$ ตามยาว

รูปที่ 2.12 แบบรูปสนามแม่เหล็กของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ จำนวน 142 อีลีเมนต์

แบบรูปของสนามแม่เหล็กแสดงไว้ในรูปที่ 2.12 เพื่อให้เห็นการกระจายตัวสนามแม่เหล็กว่ามีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว ณ บริเวณมุมสัน ทั้ง 2 โมด และกราฟการกระจายตามความถี่ (dispersion) ไว้ในรูปที่ 2.13 เพื่อแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างค่าคงตัวเฟสกับความถี่ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว ซึ่งคำนวณด้วยอีลีเมนต์จำนวน 142 อีลีเมนต์




รูปที่ 2.13 กราฟการกระจายตามความถี่ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่

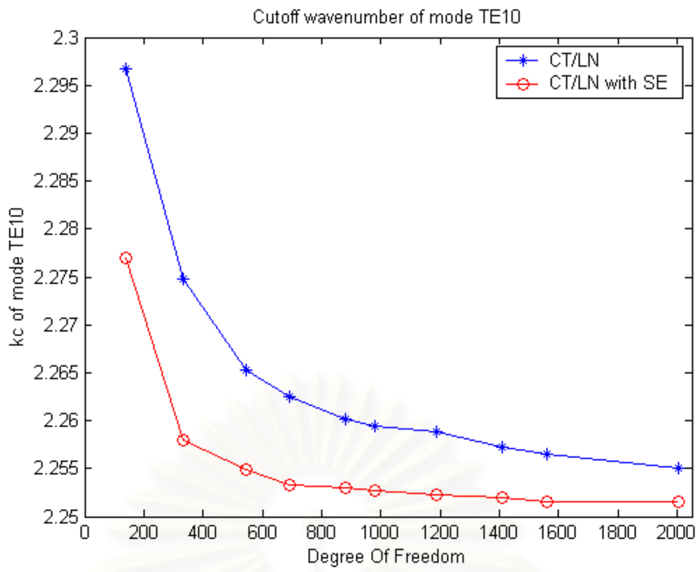
ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดแสดงไว้ในตารางที่ 2.1 ซึ่งเปรียบเทียบผลที่ได้จากฟังก์ชันรูปร่าง 2 แบบคือ แบบปกติ กับแบบผสม และตารางที่ 2.2 เปรียบเทียบผลที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้กับผลในบทความอ้างอิง 3 บทความของ Guan, J.M. and Su, C.C. (1995) เสนอการใช้ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference Method) Sheng, L.L., Le, W.L., Tat, S.Y., and Mook, S.L. (2001) ใช้การประมาณโพลีโนเมียล (polynomial approximation) และ Swaminathan, M., Arvas, E. Sarkar, T.K., and Djordjevic, A.R. (1990) ใช้ระเบียบวิธีโมเมนต์ (Method of Moment) ในการคำนวณเลขคลื่นตัด

ตารางที่ 2.1 ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่

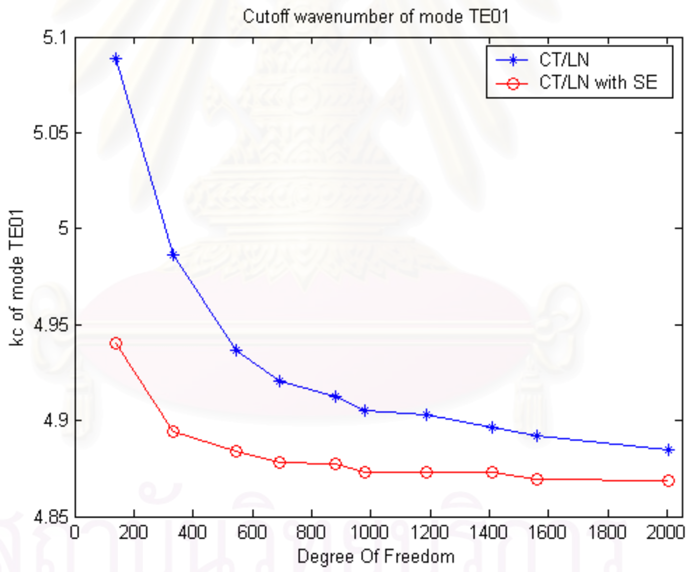
| Mode | | $TE_{10}$ | | $TE_{01}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| Element | DOF | CT/LN | CT/LN with SE | CT/LN | CT/LN with SE |
| 54 | 139 | 2.29668 | 2.27696 | 5.08854 | 4.94040 |
| 142 | 333 | 2.27472 | 2.25796 | 4.98608 | 4.89408 |
| 240 | 545 | 2.26528 | 2.25488 | 4.93638 | 4.88414 |
| 310 | 693 | 2.26246 | 2.25336 | 4.92072 | 4.87826 |
| 398 | 881 | 2.26018 | 2.25302 | 4.91224 | 4.87712 |
| 445 | 978 | 2.25942 | 2.25268 | 4.90544 | 4.87284 |
| 544 | 1187 | 2.25880 | 2.25224 | 4.90292 | 4.87278 |
| 652 | 1409 | 2.25728 | 2.25204 | 4.89650 | 4.87268 |
| 724 | 1563 | 2.25654 | 2.25152 | 4.89214 | 4.86960 |
| 940 | 2007 | 2.25506 | 2.25154 | 4.88508 | 4.86862 |

ตารางที่ 2.2 เปรียบเทียบเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว ที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้
กับผลในบทความอ้างอิง 3 บทความ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน

| กรณีศึกษา | $TE_{10}$ | $TE_{01}$ |
|---|---|---|
| วิทยานิพนธ์ | 2.25154 | 4.86862 |
| Guan, J.M. and Su, C.C. (1995) | 2.24220 | 4.85430 |
| Sheng, L.L., Le, W.L., Tat, S.Y., and Mook, S.L. (2001) | 2.27720 | 4.97050 |
| Swaminathan, M., Arvas, E. Sarkar, T.K., and Djordjevic, A.R.(1990) | 2.24960 | 4.94360 |




รูปที่ 2.14 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่

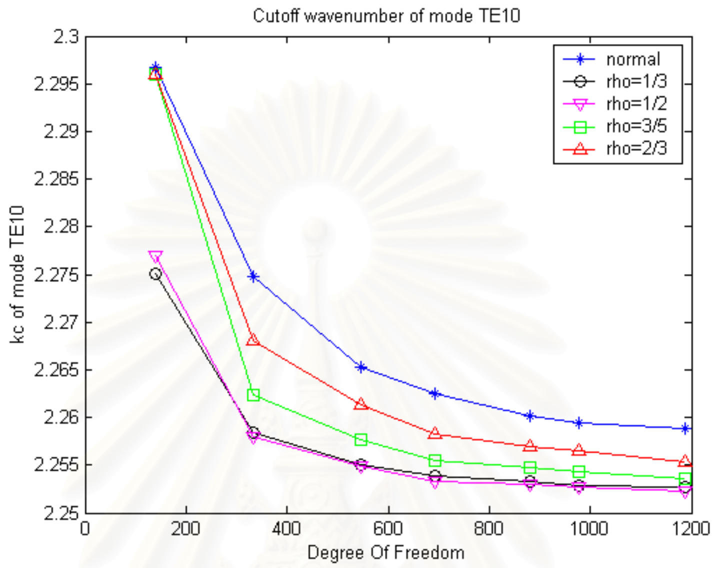



รูปที่ 2.15 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่



เปรียบเทียบผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของโมด $TE_{10}$ และโมด $TE_{01}$ ไว้ในกราฟรูปที่ 2.14 และ 2.15 ตามลำดับ ซึ่งผลการคำนวณที่ได้แสดงว่าการนำฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐานมาใช้ ทำให้อัตราการลู่เข้าดีกว่าการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบปกติเพียงอย่างเดียว สังเกตได้จากกราฟทั้ง 2 พบว่าเมื่อจำนวนระดับขั้นความเสรีเท่ากัน เลขคลื่นตัด

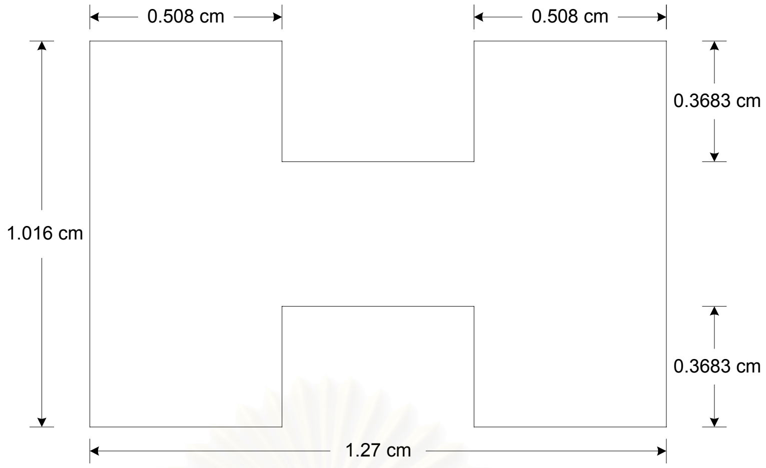
ของฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐานมีค่าผิดพลาดน้อยกว่าฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบปกติ และผลการเปรียบเทียบค่า $\rho$ ในแต่ละค่าที่ได้เลือกสุ่มทดลองคำนวณ อยู่ในช่วง 0 ถึง 1 แสดงในรูปที่ 2.16 จะพบว่าไม่ว่าค่า $\rho$ เท่าใดก็ตามจะยังคงให้ผลเฉลยที่ได้ดีกว่าการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบปกติ และในกรณีนี้ค่า $\rho = \frac{1}{2}$ เป็นค่าที่ดีที่สุด



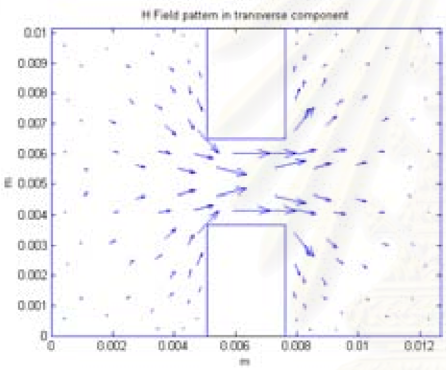

รูปที่ 2.16 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ โดยเปลี่ยนแปลงค่า $\rho$

### 2.5.2 ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่

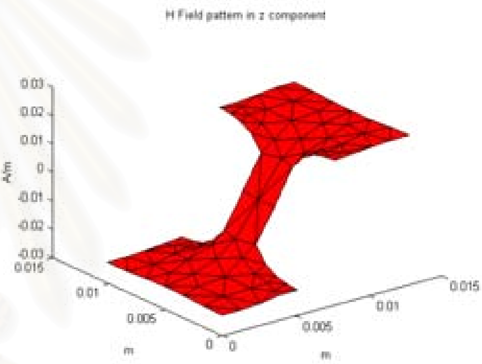
โครงสร้างภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ มีลักษณะทางกายภาพคือ มีการเว้าของผนังตัวนำ 2 ด้าน หรือมีการสอดตัวนำเข้าไป 2 แท่ง ดังรูปที่ 2.17 โดยในการเลือกตัวอย่างนี้นำมาคำนวณ เนื่องจากเป็นที่นิยมนำมาใช้ในทางปฏิบัติ มีความสมมาตรทุกแกน และโครงสร้างค่อนข้างมีมุมสันเยอะ แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นอย่างดี



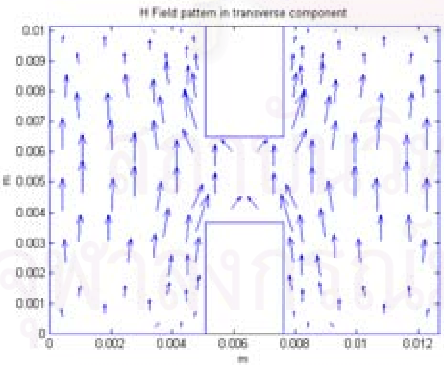

รูปที่ 2.17 โครงสร้างภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่



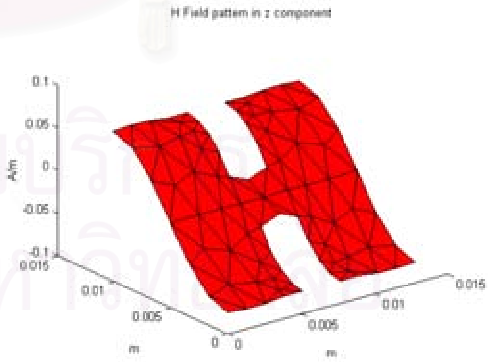

ก. โมด $TE_{10}$ ตามขวาง




ข. โมด $TE_{10}$ ตามยาว



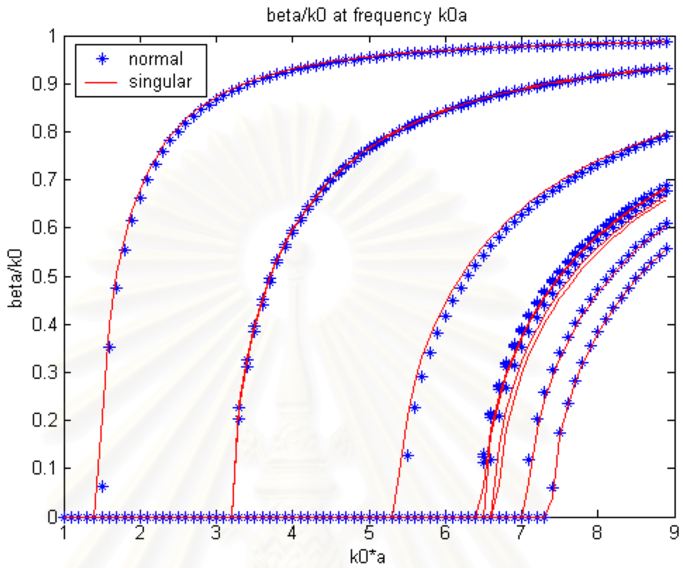

ค. โมด $TE_{01}$ ตามขวาง




ง. โมด $TE_{01}$ ตามยาว

รูปที่ 2.18 แบบรูปสนามแม่เหล็กของท่อนำคลื่นมีสัน
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ จำนวน 100 อีลีเมนต์

แบบรูปของสนามแม่เหล็กแสดงไว้ในรูปที่ 2.18 เพื่อแสดงให้เห็นว่าการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กในท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว ณ บริเวณมุมสัน ทั้ง 2 โมด และกราฟการกระจายตามความถี่ที่คำนวณด้วยอีลีเมนต์จำนวน 100 อีลีเมนต์อยู่ในรูปที่ 2.19 เพื่อแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างค่าคงตัวเฟสกับความถี่




รูปที่ 2.19 กราฟการกระจายตามความถี่ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่

ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดแสดงไว้ในตารางที่ 2.3 ซึ่งผลที่ได้นั้นแสดงให้เห็นว่าการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐานช่วยเพิ่มให้ผลเฉลยมีค่าดีขึ้น และตารางที่ 2.4 เปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้กับผลในบทความอ้างอิง 3 บทความของ Guan, J.M. and Su, C.C. (1995) Sheng, L.L., Le, W.L., Tat, S.Y., and Mook, S.L. (2001) และ Gil, J.M., and Zapata, J. (1994) ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์โดยใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์สเกลาร์แบบเอกฐานในการประมาณสนาม เพื่อคำนวณเลขคลื่นตัด

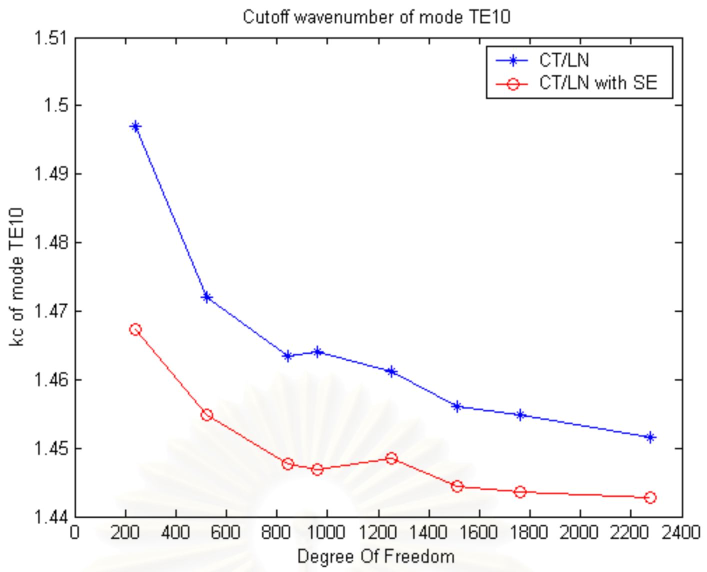
ตารางที่ 2.3 ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่

| Mode | | $TE_{10}$ | | $TE_{01}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| Element | DOF | CT/LN | CT/LN with SE | CT/LN | CT/LN with SE |
| 100 | 241 | 1.49706 | 1.46737 | 3.21327 | 3.20795 |
| 232 | 525 | 1.47195 | 1.45493 | 3.18116 | 3.17967 |
| 380 | 841 | 1.46337 | 1.44759 | 3.17773 | 3.17173 |
| 436 | 957 | 1.46409 | 1.44679 | 3.17697 | 3.17112 |
| 574 | 1251 | 1.46125 | 1.44843 | 3.17492 | 3.16839 |
| 700 | 1511 | 1.45600 | 1.44432 | 3.16993 | 3.16419 |
| 820 | 1759 | 1.45476 | 1.44361 | 3.16850 | 3.16377 |
| 1070 | 2273 | 1.45153 | 1.44284 | 3.16695 | 3.16231 |

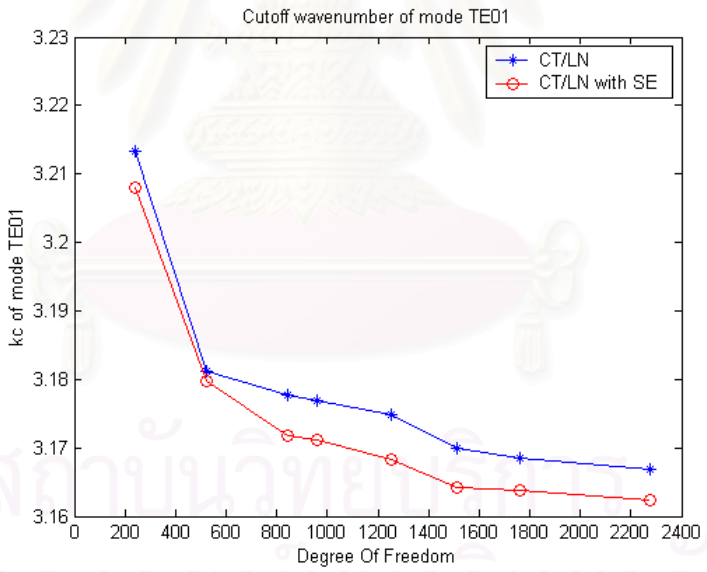
ตารางที่ 2.4 เปรียบเทียบผลของเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ ที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้
กับผลในบทความอ้างอิง 3 บทความ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่

| กรณีศึกษา | $TE_{10}$ | $TE_{01}$ |
|---|---|---|
| วิทยานิพนธ์ | 1.44284 | 3.16231 |
| Guan, J.M. and Su, C.C. (1995) | 1.43400 | 3.16800 |
| Sheng, L.L., Le, W.L., Tat, S.Y., and Mook, S.L. (2001) | 1.48490 | 3.20150 |
| Gil, J.M., and Zapata, J. (1994) | 1.43900 | - |

จากข้อมูลในตารางที่ 2.3 นำมาสร้างกราฟ เพื่อเปรียบเทียบผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของโมด $TE_{10}$ และโมด $TE_{01}$ ไว้ในกราฟรูปที่ 2.20 และ 2.21 ตามลำดับ ผลที่ได้นั้นแสดงให้เห็นว่าการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน ส่งผลให้อัตราการลู่เข้าดีกว่าการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่เพียงอย่างเดียว ซึ่งให้ผลที่ดีทั้ง 2 โมด



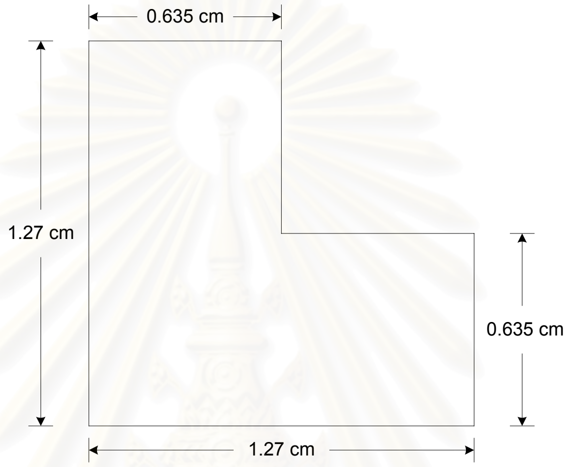

รูปที่ 2.20 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่



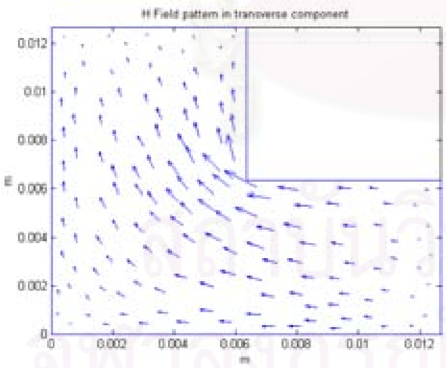

รูปที่ 2.21 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่

### 2.5.3 ท่อนำคลื่นรูปร่าง L

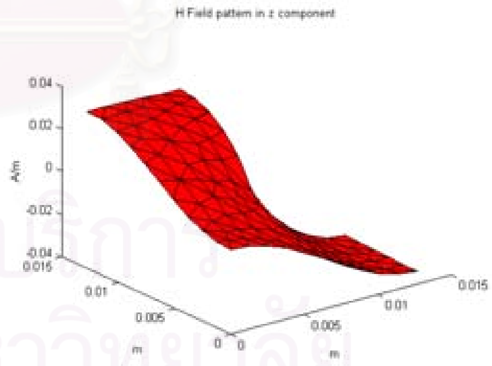
โครงสร้างภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นมีสันแบบรูปร่าง L มีลักษณะทางกายภาพ คือ รูปร่างของท่อนำคลื่นเหมือนรูปตัว L ความยาวด้านแนวตั้งและแนวนอนมีขนาดเท่ากัน ดังรูปที่ 2.22 โดยในการเลือกตัวอย่างนี้นำมาคำนวณ เนื่องจากโครงสร้างของท่อนำคลื่นรูปร่าง L เปลี่ยนแปลงทั้ง 2 ด้านในมุมสันเดียว ทำให้เห็นแบบรูปสนามแม่เหล็กในท่อนำคลื่นรูปร่าง L ต่างจากท่อ-นำคลื่นแบบอื่นๆ




รูปที่ 2.22 โครงสร้างภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นมีสันแบบรูปร่าง L

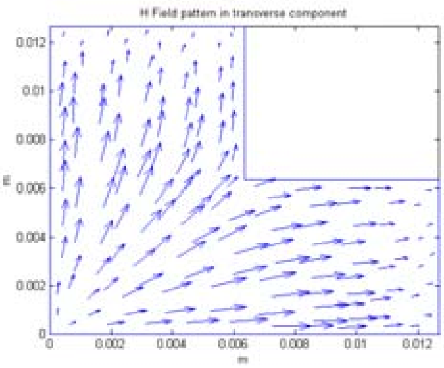



ก. โมด $TE_{10}$ ตามขวาง

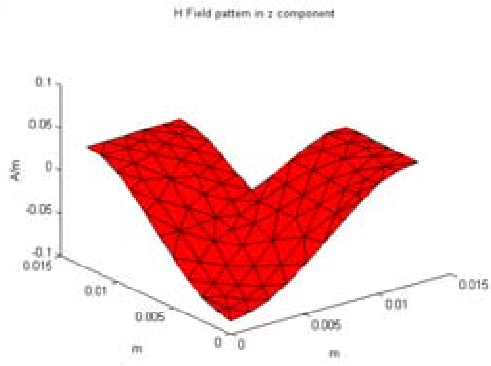



ข. โมด $TE_{10}$ ตามยาว

รูปที่ 2.23 แบบรูปสนามแม่เหล็กของท่อนำคลื่นรูปร่าง L
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ จำนวน 150 อีลีเมนต์



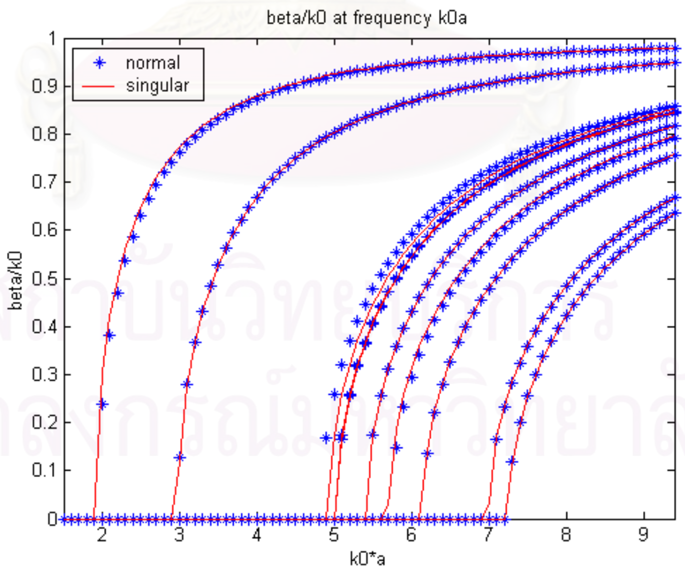

ค. โมด $TE_{01}$ ตามขวาง




ง. โมด $TE_{01}$ ตามยาว

รูปที่ 2.23 (ต่อ) แบบรูปสนามแม่เหล็กของท่อนำคลื่นรูปร่าง L
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ จำนวน 150 อีลีเมนต์

แบบรูปของสนามแม่เหล็กแสดงไว้ในรูปที่ 2.23 ปรากฏว่าในโมด $TE_{10}$ สนามแม่เหล็กมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วบริเวณมุมสัน แต่โมด $TE_{01}$ สนามแม่เหล็กไม่ได้มีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วบริเวณมุมสัน จะส่งผลให้การคำนวณที่ได้จากการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐานมีค่าผิดพลาดกว่าฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ และกราฟการกระจายตามความถี่ที่คำนวณด้วยอีลีเมนต์จำนวน 150 อีลีเมนต์แสดงไว้ในรูปที่ 2.24




รูปที่ 2.24 กราฟการกระจายตามความถี่ของท่อนำคลื่นรูปร่าง L
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่

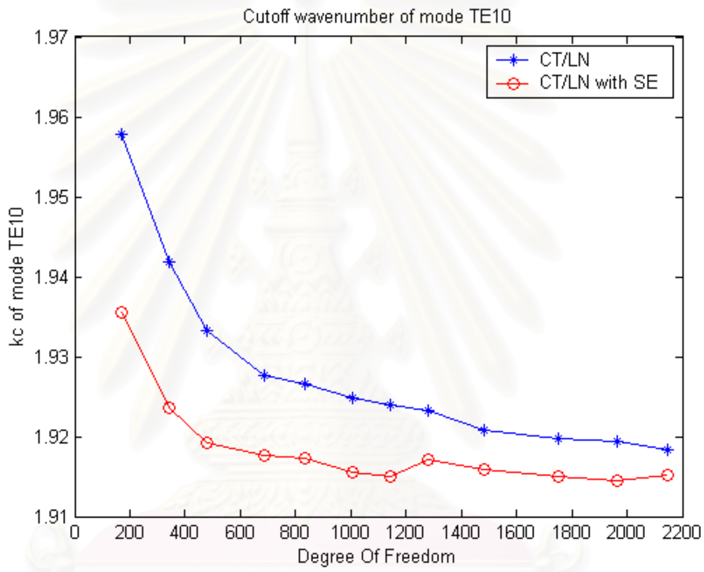
ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของโมด $TE_{10}$ และโมด $TE_{01}$ อยู่ในตารางที่ 2.5 เมื่อนำข้อมูลมาสร้างกราฟเลขคลื่นตัดจะได้ดังรูปที่ 2.25 และ 2.26 ตามลำดับ พบว่าผลการคำนวณในโมด $TE_{10}$ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐานมีค่าผิดพลาดน้อยกว่าฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบปกติ แต่ในโมด $TE_{01}$ ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐานมีค่าผิดพลาดมากกว่า เนื่องจากแบบรูปของสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นไม่มีการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กที่บริเวณมุมสันตามรูปที่ 2.23 (ค) และตารางที่ 2.6 เปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้กับผลในบทความอ้างอิง 3 บทความของ Guan, J.M. and Su, C.C. (1995) Sheng, L.L., Le, W.L., Tat, S.Y., and Mook, S.L. (2001) และ Swaminathan, M., Arvas, E. Sarkar, T.K., and Djordjevic, A.R. (1990) ปรากฏว่าเลขคลื่นตัดมีค่าใกล้เคียงกัน

ตารางที่ 2.5 ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นรูปร่าง L
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่

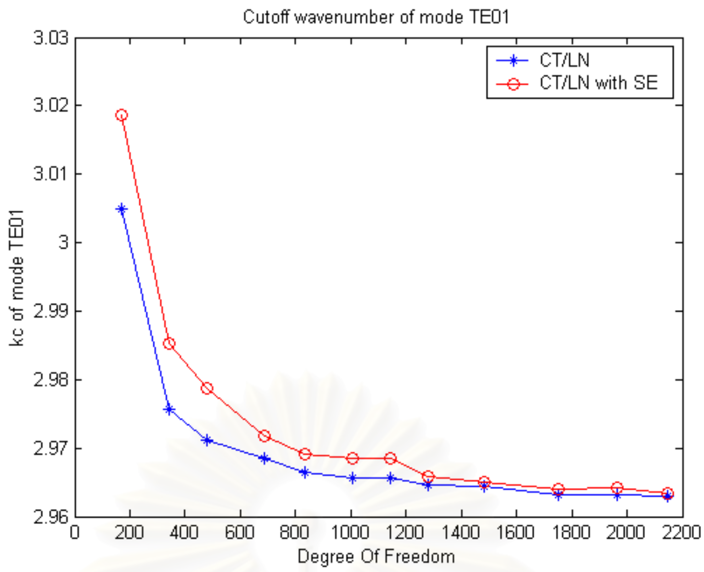
| Mode | | $TE_{10}$ | | $TE_{01}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| Element | DOF | CT/LN | CT/LN with SE | CT/LN | CT/LN with SE |
| 70 | 169 | 1.95772 | 1.93557 | 3.00495 | 3.01860 |
| 150 | 341 | 1.94189 | 1.92359 | 2.97576 | 2.98518 |
| 216 | 481 | 1.93316 | 1.91922 | 2.97125 | 2.97883 |
| 312 | 685 | 1.92756 | 1.91771 | 2.96851 | 2.97179 |
| 384 | 833 | 1.92650 | 1.91733 | 2.96651 | 2.96904 |
| 466 | 1005 | 1.92476 | 1.91551 | 2.96571 | 2.96841 |
| 534 | 1145 | 1.92395 | 1.91492 | 2.96557 | 2.96859 |
| 600 | 1281 | 1.92325 | 1.91715 | 2.96457 | 2.96580 |
| 696 | 1481 | 1.92075 | 1.91590 | 2.96437 | 2.96509 |
| 828 | 1753 | 1.91972 | 1.91496 | 2.96326 | 2.96404 |
| 930 | 1965 | 1.91938 | 1.91447 | 2.96325 | 2.96419 |
| 1020 | 2149 | 1.91831 | 1.91510 | 2.96305 | 2.96343 |

ตารางที่ 2.6 เปรียบเทียบผลของเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นรูปร่าง L ที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้
กับผลในบทความอ้างอิง 3 บทความ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่

| กรณีศึกษา | $TE_{10}$ | $TE_{01}$ |
|---|---|---|
| วิทยานิพนธ์ | 1.91510 | 2.96343 |
| Guan, J.M. and Su, C.C. (1995) | 1.91110 | 2.96000 |
| Sheng, L.L., Le, W.L., Tat, S.Y., and Mook, S.L. (2001) | 1.96530 | 2.96320 |
| Swaminathan, M., Arvas, E. Sarkar, T.K., and Djordjevic, A.R. (1990) | 1.89170 | 2.91590 |



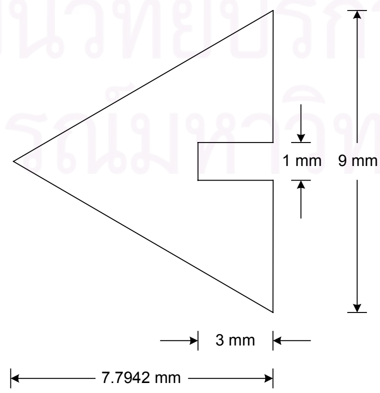

รูปที่ 2.25 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นรูปร่าง L
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่



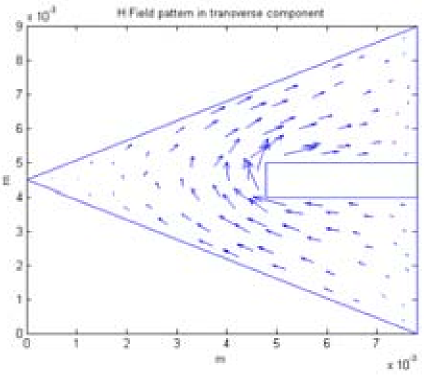

รูปที่ 2.26 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นรูปร่าง L
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่

2.5.4 ท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน

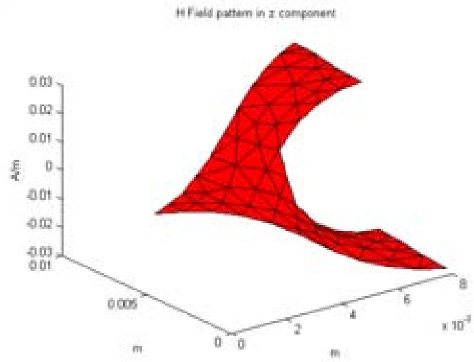
โครงสร้างภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน มีลักษณะทางกายภาพ คือ รูปร่างของท่อนำคลื่นเป็นโครงสร้างสามเหลี่ยม โดยมีสันเป็นแท่งสี่เหลี่ยมอยู่ด้านใน ดังรูปที่ 2.27 โดยในการเลือกตัวอย่างนี้นำมาคำนวณ เนื่องจากเป็นโครงสร้างรูปแบบใหม่ ยังไม่ค่อยมีบทความอ้างอิงเกี่ยวกับลักษณะของท่อนำคลื่นชนิดนี้มากนัก จึงไม่มีการเปรียบเทียบกับบทความใดๆ และเพื่อแสดงให้เห็นว่าการคำนวณนี้สามารถคำนวณได้ทุกโครงสร้างที่มีมุมสันได้ทุกกรณี



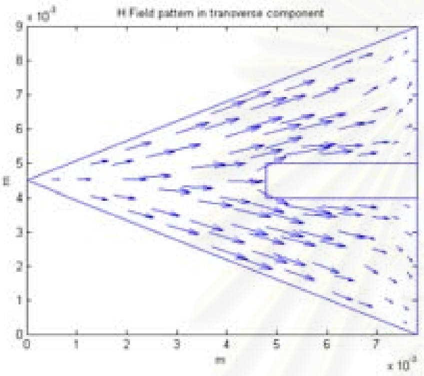

รูปที่ 2.27 โครงสร้างภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน



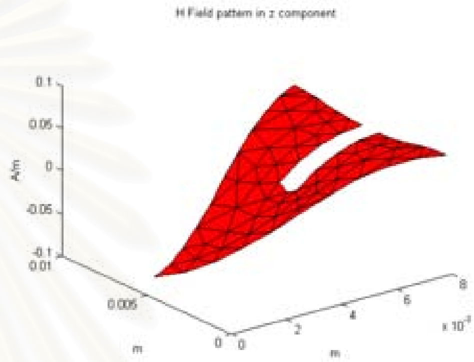

ก. โมด $TE_{10}$ ตามขวาง




ข. โมด $TE_{10}$ ตามยาว

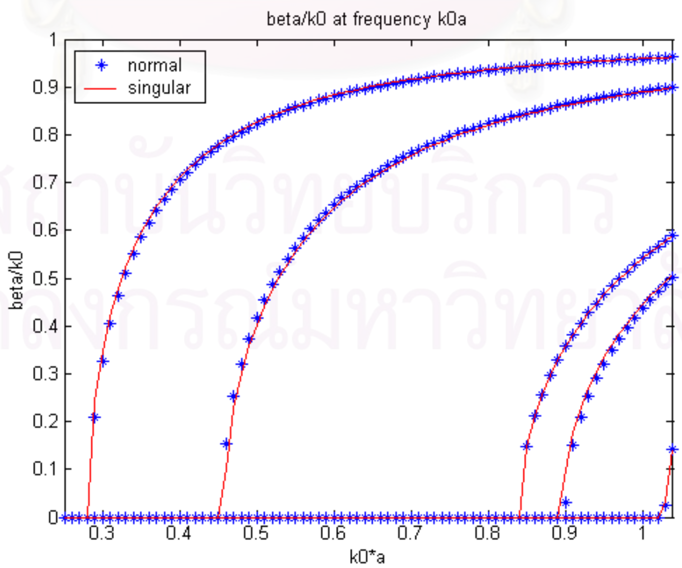



ค. โมด $TE_{01}$ ตามขวาง




ง. โมด $TE_{01}$ ตามยาว

รูปที่ 2.28 แบบรูปสนามแม่เหล็กของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ จำนวน 104 อีลีเมนต์



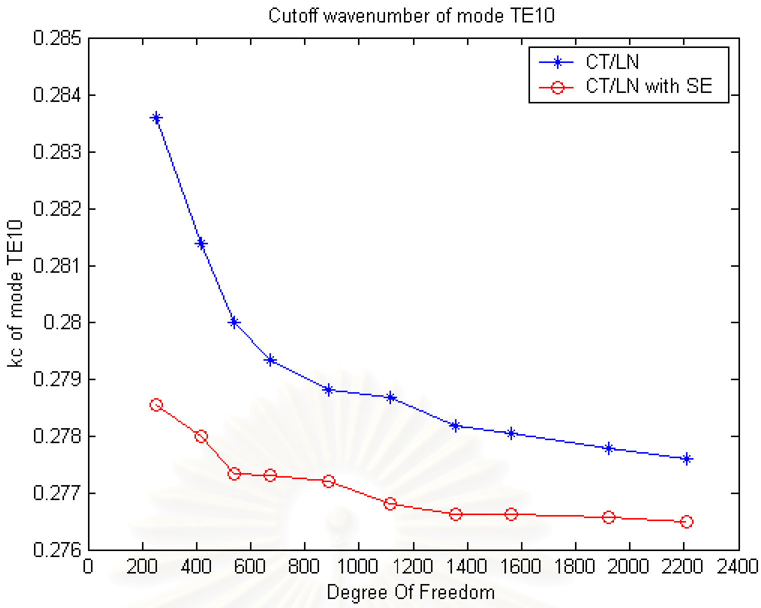

รูปที่ 2.29 กราฟการกระจายตามความถี่ของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่

แบบรูปของสนามแม่เหล็กแสดงไว้ในรูปที่ 2.28 พบว่าการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กบริเวณมุมสัน มีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว ทั้ง 2 โมด และในรูปที่ 2.29 แสดงกราฟการกระจายตามความถี่ เพื่อให้ทราบถึงความสัมพันธ์ของค่าคงตัวเฟสกับความถี่

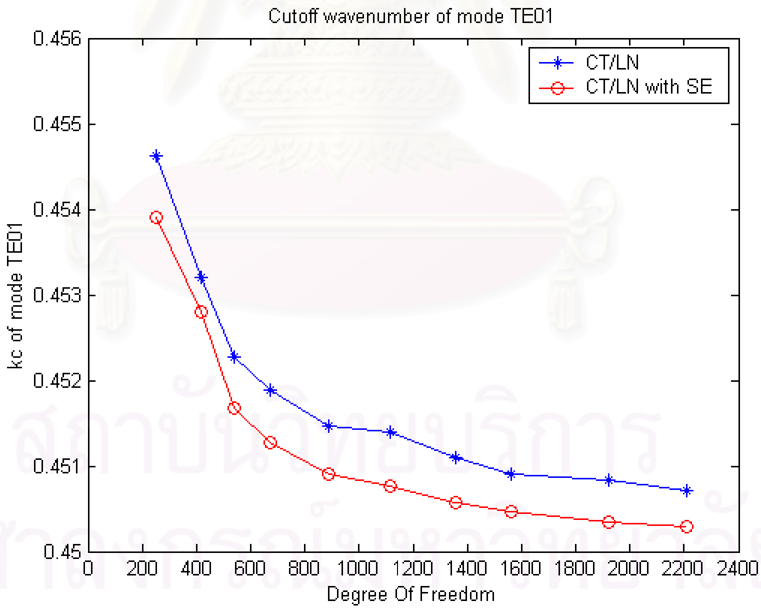
ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของโมด $TE_{10}$ และโมด $TE_{01}$ อยู่ในตารางที่ 2.7 เมื่อนำข้อมูลในตารางมาสร้างกราฟเลขคลื่นตัดไว้ในรูปที่ 2.30 และ 2.31 ตามลำดับ เพื่อเปรียบเทียบระหว่างการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบปกติ กับการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน พบว่าผลมีความสอดคล้องกันตามตัวอย่างที่ 1 และ 2 นั่นคือฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐานช่วยให้ผลเฉลยที่ได้มีค่าผิดพลาดที่น้อยกว่า แต่ในกรณีตัวอย่างนี้ไม่ได้มีการเปรียบเทียบผลกับบทความอ้างอิง เนื่องจากยังไม่มีผู้วิจัยรายใดวิเคราะห์เกี่ยวกับการคำนวณในกรณีตัวอย่างนี้เลย

ตารางที่ 2.7 ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่

| Mode | | $TE_{10}$ | | $TE_{01}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| Element | DOF | Normal | Singular | Normal | Singular |
| 104 | 251 | 0.28359 | 0.27855 | 0.45462 | 0.45390 |
| 180 | 419 | 0.28137 | 0.27799 | 0.45321 | 0.45279 |
| 237 | 538 | 0.27998 | 0.27733 | 0.45227 | 0.45168 |
| 300 | 673 | 0.27934 | 0.27730 | 0.45189 | 0.45127 |
| 402 | 889 | 0.27879 | 0.27721 | 0.45147 | 0.45091 |
| 512 | 1117 | 0.27867 | 0.27681 | 0.45139 | 0.45076 |
| 629 | 1360 | 0.27816 | 0.27663 | 0.45110 | 0.45057 |
| 727 | 1564 | 0.27803 | 0.27661 | 0.45091 | 0.45047 |
| 901 | 1924 | 0.27778 | 0.27656 | 0.45083 | 0.45035 |
| 1040 | 2211 | 0.27759 | 0.27648 | 0.45071 | 0.45029 |



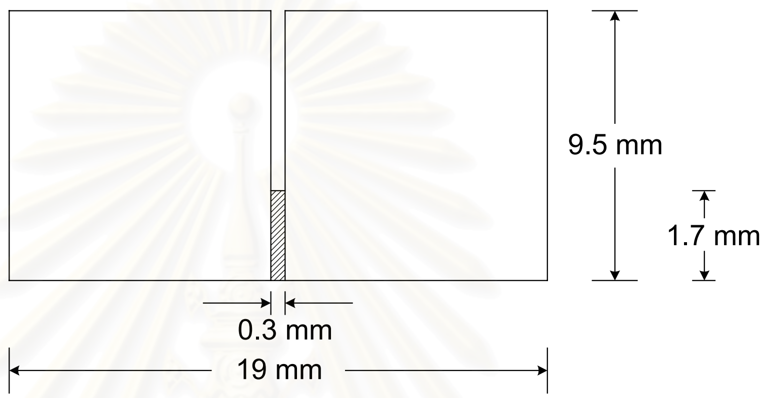

รูปที่ 2.30 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่



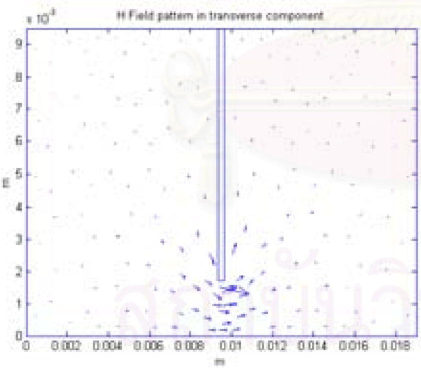

รูปที่ 2.31 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่

### 2.5.5 ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก

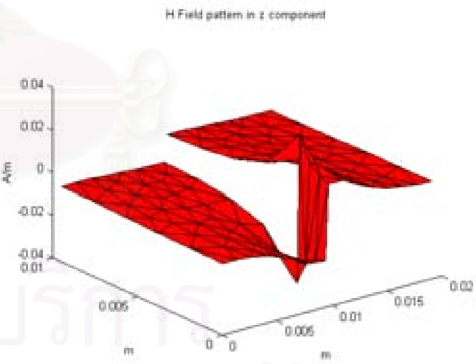
โครงสร้างภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก มีลักษณะทางกายภาพคือ รูปร่างของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว มีสันตัวนำเป็นแท่งสี่เหลี่ยม และสันตัวกลางชนิดไดอิเล็กทริกเป็นแท่งสี่เหลี่ยมอยู่ภายในท่อนำคลื่น ดังรูปที่ 2.32 โดยในการเลือกตัวอย่างนี้นำมาคำนวณ เนื่องจากมีสารไดอิเล็กทริกประกอบอยู่ภายในท่อนำคลื่นชนิดนี้ และสันมีขนาดที่แคบมากๆ ทำให้แบบรูปของสนามแม่เหล็กไฟฟ้ามีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว




รูปที่ 2.32 โครงสร้างภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก

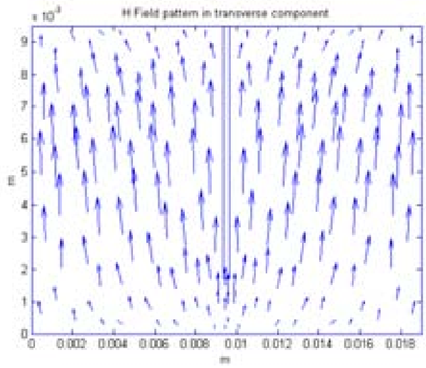



ก. โมด $TE_{10}$ ตามขวาง

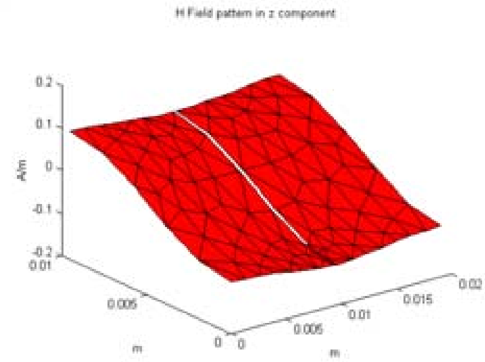



ข. โมด $TE_{10}$ ตามยาว

รูปที่ 2.33 แบบรูปสนามแม่เหล็กของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ จำนวน 102 อีลีเมนต์



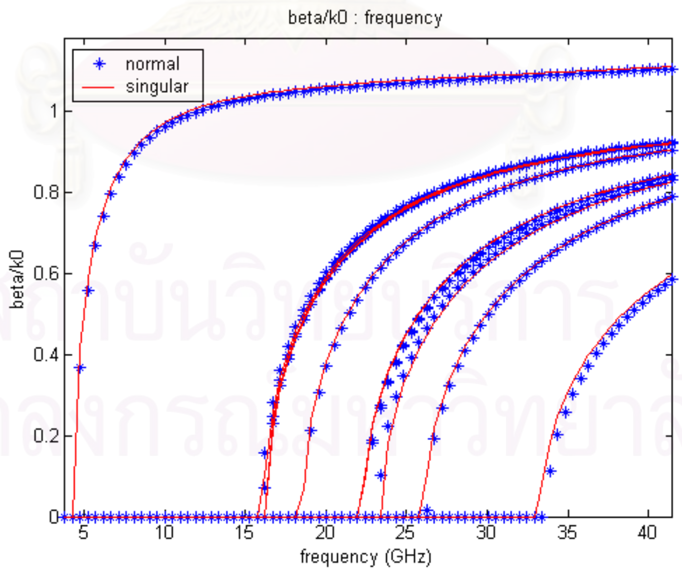

ค. โมด $TE_{01}$ ตามขวาง




ง. โมด $TE_{01}$ ตามยาว

รูปที่ 2.33 (ต่อ) แบบรูปสนามแม่เหล็กของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ จำนวน 102 อีลีเมนต์

แบบรูปของสนามแม่เหล็กแสดงไว้ในรูปที่ 2.33 พบว่าการกระจายตัวของสนามแม่เหล็กในโมด $TE_{10}$ หนาแน่นบริเวณมุมสัน แต่ในโมด $TE_{01}$ สนามแม่เหล็กไม่หนาแน่นบริเวณมุมสันเลย ซึ่งจะส่งผลให้การคำนวณที่ใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐานมีค่าผิดพลาดกว่าการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบปกติ และกราฟการกระจายตามความถี่แสดงไว้ในรูปที่ 2.34 เพื่อให้ทราบถึงความสัมพันธ์ของค่าคงตัวเฟสกับความถี่

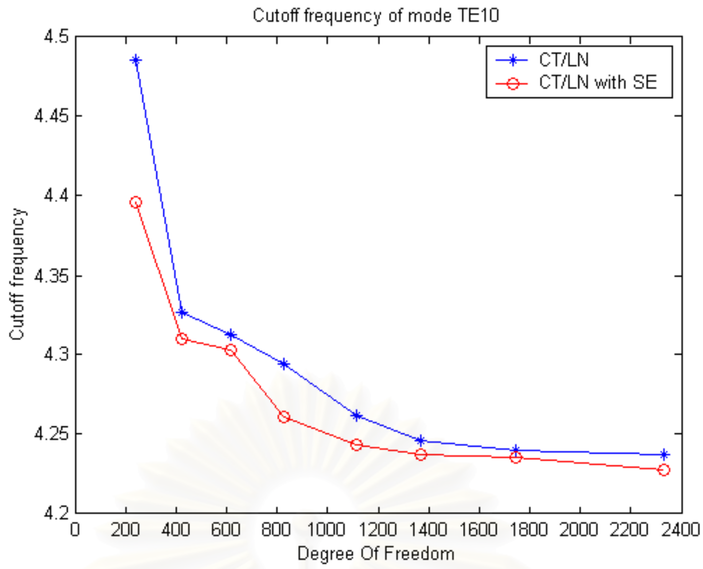



รูปที่ 2.34 กราฟการกระจายตามความถี่ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่

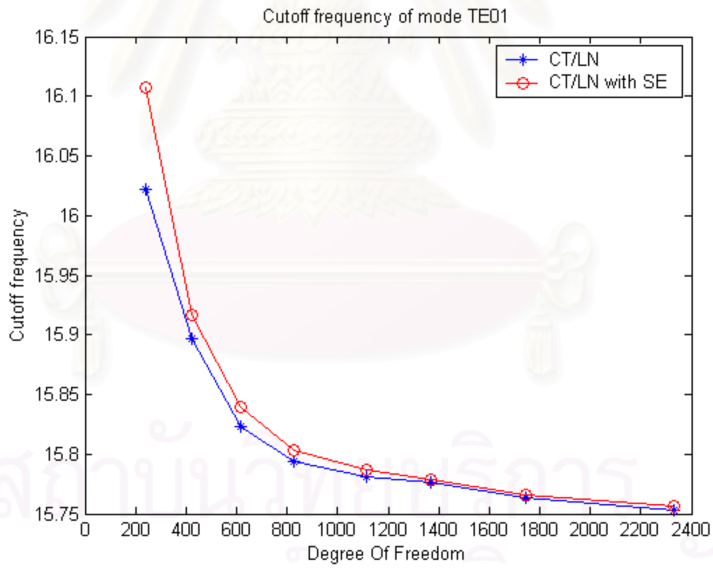
ผลการคำนวณความถี่ตัดของโมด $TE_{10}$ และโมด $TE_{01}$ อยู่ในตารางที่ 2.8 เมื่อนำผลในตารางมาสร้างกราฟ เพื่อเปรียบเทียบผลการคำนวณความถี่ตัดได้โดยง่าย แสดงไว้ในรูปที่ 2.35 และ 2.36 ตามลำดับ ปรากฏว่าผลการคำนวณสอดคล้องกับกรณีตัวอย่างท่อนำคลื่นรูปร่าง L นั่นคือผลการคำนวณเมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐานในโมด $TE_{10}$ ส่งผลให้ความถี่ตัดมีค่าดีกว่า แต่ในโมด $TE_{01}$ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน ทำให้ผลการคำนวณมีค่าผิดพลาดมากกว่า เนื่องจากแบบรูปของสนามแม่เหล็กในโมด $TE_{10}$ มีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว จึงทำให้ผลการคำนวณที่ได้ดีกว่า แต่ในโมด $TE_{01}$ แบบรูปของสนามแม่เหล็กไม่มีการเปลี่ยนแปลงบริเวณมุมสันเลย จึงทำให้ผลที่ได้ผิดพลาดมากกว่า

ตารางที่ 2.8 ผลการคำนวณความถี่ตัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่

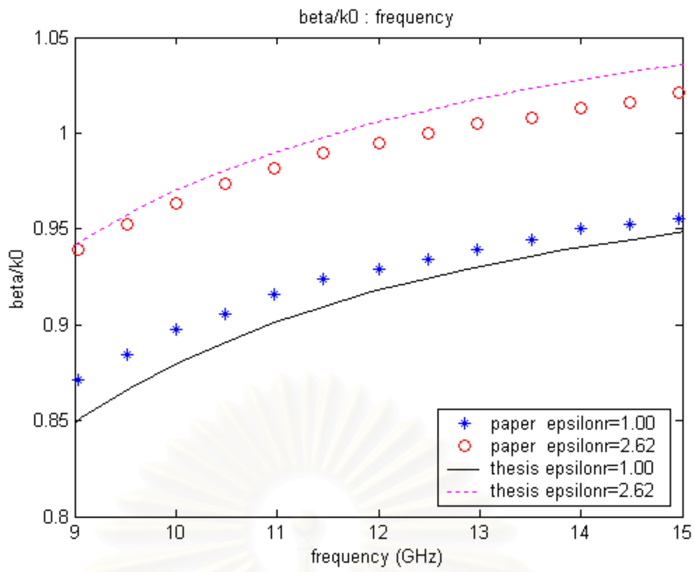
| Mode | | $TE_{10}$ (GHz) | | $TE_{01}$ (GHz) | |
|---|---|---|---|---|---|
| Element | DOF | Normal | Singular | Normal | Singular |
| 102 | 241 | 4.48549 | 4.39622 | 16.02233 | 16.10745 |
| 184 | 423 | 4.32704 | 4.31029 | 15.89684 | 15.91617 |
| 276 | 615 | 4.31277 | 4.30275 | 15.82327 | 15.83997 |
| 376 | 827 | 4.29455 | 4.26129 | 15.79407 | 15.80289 |
| 512 | 1115 | 4.26153 | 4.24382 | 15.78109 | 15.78653 |
| 636 | 1371 | 4.24607 | 4.23762 | 15.77574 | 15.77808 |
| 816 | 1747 | 4.24001 | 4.23567 | 15.76387 | 15.76630 |
| 1100 | 2331 | 4.23724 | 4.22755 | 15.75322 | 15.75614 |




รูปที่ 2.35 ความถี่ตัดโมด $TE_{10}$ ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่




รูปที่ 2.36 ความถี่ตัดโมด $TE_{01}$ ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่

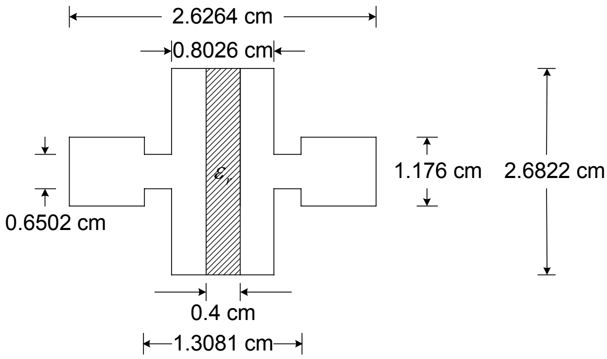



รูปที่ 2.37 เปรียบเทียบค่าคงตัวการแพร่กระจายของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก ที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐานกับผลในบทความอ้างอิงของ Ng, K.T., and Chan, C.H. (1989)

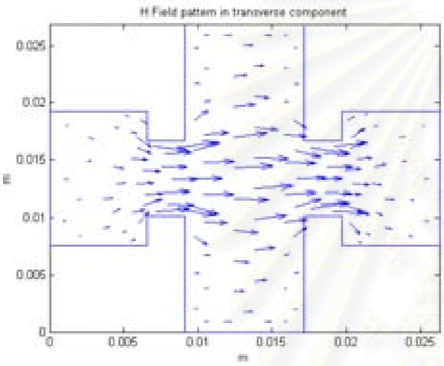
การเปรียบเทียบค่าคงตัวการแพร่กระจายของโมด $TE_{10}$ ที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้คำนวณด้วยฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน กับผลในบทความอ้างอิงของ Ng, K.T., and Chan, C.H. (1989) ซึ่งใช้ระเบียบวิธีสเปกตรัมโดเมน (Spectral Domain Method) ในการคำนวณความถี่ตัดของท่อนำคลื่นนี้ แสดงไว้ในรูปที่ 2.37 โดยคำนวณค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ตามบทความอ้างอิงนำเสนอไว้คือ $\varepsilon_r = 1.0$ และ $\varepsilon_r = 2.62$ ผลที่ได้มีค่าแตกต่างกัน เนื่องจากผลที่ได้จากการคำนวณนี้ยังมีค่าไม่ถูกต้องมากนัก

2.5.6 ท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก

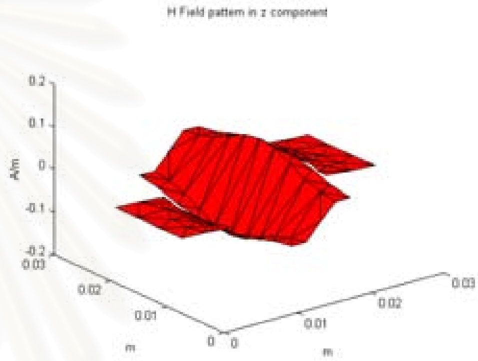
โครงสร้างภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก มีลักษณะทางกายภาพคือ รูปร่างของท่อนำคลื่นมีสัน มีแท่งไดอิเล็กทริกสอดอยู่กลางภายในท่อนำคลื่น ดังรูปที่ 2.38 โดยในการเลือกตัวอย่างนี้นำมาคำนวณ เนื่องจากมีสารไดอิเล็กทริกประกอบภายในท่อนำคลื่นชนิดนี้ และโครงสร้างค่อนข้างมีมุมสันเยอะ แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นอย่างดี



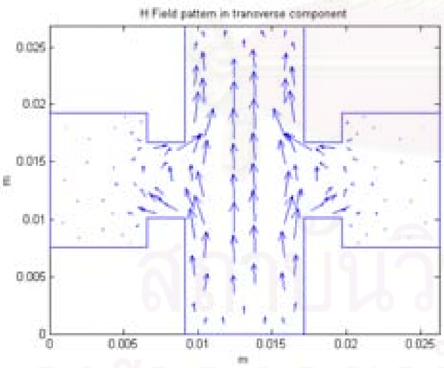

รูปที่ 2.38 โครงสร้างภาคตัดขวางของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก



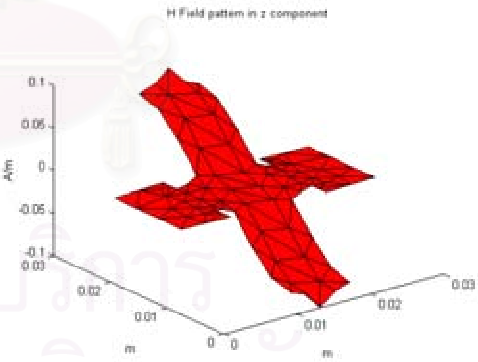

ก. โมด $TE_{10}$ ตามขวาง




ข. โมด $TE_{10}$ ตามยาว



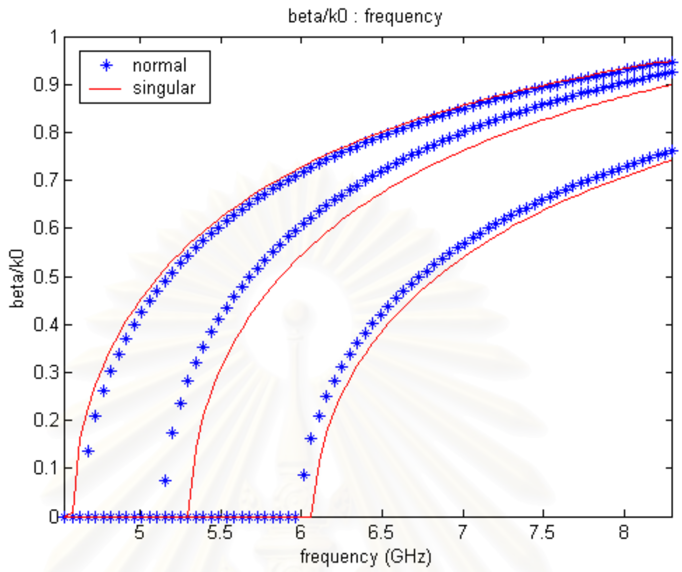

ค. โมด $TE_{01}$ ตามขวาง




ง. โมด $TE_{01}$ ตามยาว

รูปที่ 2.39 แบบรูปสนามแม่เหล็กของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ จำนวน 132 อีลีเมนต์

แบบรูปของสนามแม่เหล็กแสดงไว้ในรูปที่ 2.39 เพื่อให้ทราบว่าสนามแม่เหล็กมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว บริเวณมุมสัน ทั้ง 2 โมด ซึ่งในโครงสร้างนี้มีมุมสันค่อนข้างเยอะ ทำให้เห็นการเปลี่ยนแปลงได้อย่างชัดเจน และกราฟการกระจายตามความถี่อยู่ในรูปที่ 2.40

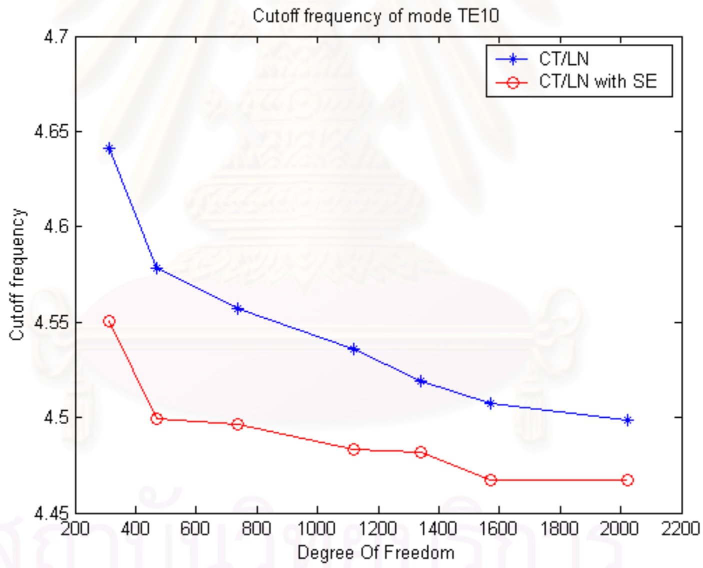



รูปที่ 2.40 กราฟการกระจายตามความถี่ของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่

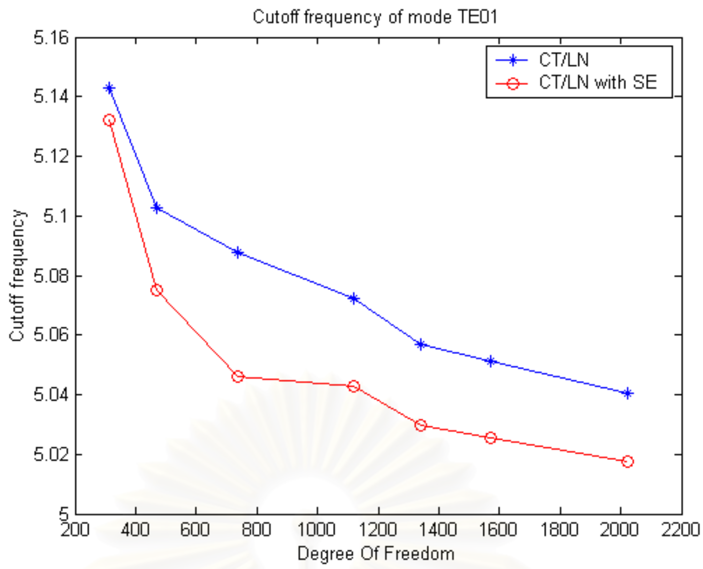
ผลการคำนวณความถี่ตัดของโมด $TE_{10}$ และโมด $TE_{01}$ อยู่ในตารางที่ 2.9 นำมาสร้างกราฟเส้นไว้ในรูปที่ 2.41 และ 2.42 ตามลำดับ เพื่อเปรียบเทียบผลการคำนวณความถี่ตัดได้โดยง่าย ซึ่งผลที่ได้นั้นมีความสอดคล้องกันกับกรณีตัวอย่างหลายๆ ตัวอย่างเช่น ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ เป็นต้น นั่นคือในการคำนวณทั้ง 2 โมด เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐานส่งผลให้ความถี่มีค่าผิดพลาดน้อยกว่าการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบปกติเพียงอย่างเดียว เนื่องจากสนามแม่เหล็กมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วบริเวณมุมสัน

ตารางที่ 2.9 ผลการคำนวณความถี่ตัดของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่

| Mode | | $TE_{10}$ (GHz) | | $TE_{01}$ (GHz) | |
|---|---|---|---|---|---|
| Element | DOF | Normal | Singular | Normal | Singular |
| 132 | 315 | 4.64098 | 4.55058 | 5.14296 | 5.13216 |
| 202 | 471 | 4.57806 | 4.49939 | 5.10265 | 5.07494 |
| 320 | 739 | 4.55743 | 4.49662 | 5.08754 | 5.04615 |
| 502 | 1121 | 4.53560 | 4.48322 | 5.07218 | 5.04260 |
| 604 | 1339 | 4.51881 | 4.48182 | 5.05672 | 5.02992 |
| 708 | 1571 | 4.50749 | 4.46728 | 5.05131 | 5.02543 |
| 930 | 2023 | 4.49867 | 4.46694 | 5.04045 | 5.01755 |




รูปที่ 2.41 ความถี่ตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่




รูปที่ 2.42 ความถี่ตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่

ตารางที่ 2.10 เปรียบเทียบค่าคงตัวการแพร่กระจายของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก
ที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน
กับผลในบทความอ้างอิงของ Ng, K.T., and Chan, C.H. (1989)

| กรณีศึกษา | $TE_{10}$ |
|---|---|
| วิทยานิพนธ์ | 0.7389 |
| Ng, K.T., and Chan, C.H. (1989) | 0.7317 |

ตารางที่ 2.10 แสดงการเปรียบเทียบผลของค่าคงตัวการแพร่กระจาย ที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้คำนวณด้วยฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน กับผลในบทความอ้างอิงของ Ng, K.T., and Chan, C.H. (1989) โดยคำนวณค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ตามบทความอ้างอิงนำเสนอไว้คือ $\varepsilon_r = 2.62$ ผลที่ได้มีค่าใกล้เคียงกัน

## 2.6 สรุปผลการคำนวณ

ในบทนี้ได้นำเสนอการปรับปรุงระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในการวิเคราะห์ท่อนำ-คลื่นมีสัน 2 มิติ โดยใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน เพื่อประมาณฟังก์ชันของสนามบริเวณมุมสัน ให้มีความสอดคล้องกับลักษณะการเปลี่ยนแปลงของสนามบริเวณนั้น ร่วม

กับการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบปกติ โดยใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบแบบเอกฐาน กับอีลีเมนต์สามเหลี่ยมบริเวณมุมสัน และใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบแบบปกติกับอีลีเมนต์สามเหลี่ยม ณ บริเวณอื่นๆ นอกเหนือมุมสัน คำนวณหาเลขคลื่นตัด 2 โมดคือโมด $TE_{10}$ กับโมด $TE_{01}$ ในกรณีตัวอย่าง 4 ตัวอย่างคือ ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ ท่อนำคลื่นรูปร่าง L และท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน คำนวณหาความถี่ตัด 2 โมดคือโมด $TE_{10}$ กับโมด $TE_{01}$ อีก 2 ตัวอย่างคือ ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก และท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก และเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้กับผลในบทความอ้างอิง

ผลการคำนวณเมื่อเปรียบเทียบการใช้ฟังก์ชันรูปแบบทั้ง 2 ฟังก์ชันแสดงให้เห็นว่า ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของสนามบริเวณมุมสันนั้นส่งผลให้การคำนวณด้วยฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบปกติเพียงอย่างเดียวมีค่าผิดพลาดมากกว่าการคำนวณด้วยฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบผสม ซึ่งเมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐานเข้าไปช่วยประมาณสนาม ทำให้ผลเฉลยที่ได้มีค่าถูกต้องมากยิ่งขึ้น จึงไม่จำเป็นต้องแบ่งอีลีเมนต์เป็นจำนวนมากๆ ดังตัวอย่างผลการคำนวณที่ได้นำเสนอไปข้างต้น แต่ในบางโมดสนามไม่ได้มีการเปลี่ยนแปลงบริเวณมุมสันเลย ซึ่งก็คือกรณีตัวอย่างของท่อนำคลื่นรูปร่าง L และท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริกในโมด $TE_{01}$ ผลการคำนวณของฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐานก็จะส่งผลให้คำตอบที่ได้มีค่าผิดพลาดมากกว่าการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบปกติ ดังนั้นเมื่อพิจารณาการใช้ฟังก์ชันรูปร่างควรคำนึงถึงลักษณะการเปลี่ยนแปลงของสนามที่เกิดขึ้นในท่อนำคลื่น เพื่อทำให้การใช้ฟังก์ชันรูปร่างเหมาะสมกับลักษณะของสนามที่เกิดขึ้น ส่วนในการเลือกใช้ค่า $\rho$ นั้นเลือกใช้อยู่ในช่วง 0 ถึง 1 โดยเลือกใช้เท่าใดก็ได้ ซึ่งในการเลือกใช้ค่า $\rho$ เท่าใดก็ตามยังคงให้ผลเฉลยที่ดีกว่าการไม่ใช้เลย (การใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบปกติ) และเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้กับผลในบทความอ้างอิง ปรากฏว่าผลการคำนวณที่ได้ค่อนข้างใกล้เคียงกัน แต่ผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณไม่ได้มีค่าถูกต้องมากนัก เนื่องจากการประมาณฟังก์ชันของฟังก์ชันรูปร่างนั้น เป็นการประมาณแบบบังคับสนามบนขอบของอีลีเมนต์ให้คงที่ตลอดด้าน ซึ่งลักษณะทางกายภาพของสนามแท้จริงมีการเปลี่ยนแปลงแบบเชิงเส้นหรือแบบกำลังสอง (quadratic) ถ้าประมาณฟังก์ชันรูปร่างแบบขอบให้สนามบนขอบของอีลีเมนต์มีลักษณะเป็นเชิงเส้น น่าจะทำให้ผลเฉลยที่ได้นั้นมีค่าถูกต้องมากยิ่งขึ้น ซึ่งจะได้นำเสนอในบทที่ 3 ต่อไป

# บทที่ 3

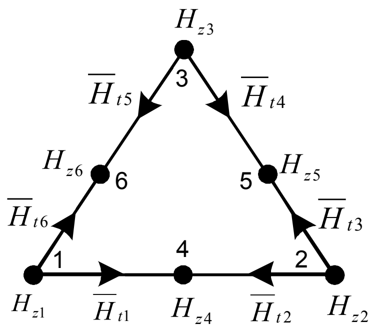
# การปรับปรุงการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นมีสัน 2 มิติ โดยใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน

## 3.1 ความนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงการปรับปรุงระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นมีสัน 2 มิติ โดยใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน (singular linear edge element) ให้สอดคล้องกับลักษณะการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าบริเวณมุมสัน ซึ่งลักษณะการสร้างฟังก์ชัน และการคำนวณจะคล้ายคลึงกับบทที่ 2 แตกต่างกันตรงลักษณะของฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นเป็นอันดับที่สูงกว่าฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ ทำให้การประมาณสนามมีลักษณะที่สอดคล้องมากกว่า เนื่องจากสนามที่มีการเปลี่ยนแปลงภายในท่อนำคลื่นนั้นมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว และในการตรวจสอบวิธีที่นำเสนอนี้ ผู้วิจัยได้ทดลองคำนวณในกรณีตัวอย่างเดียวกับในบทที่ 2 เพื่อยืนยันในความถูกต้องของวิธีการคำนวณว่ามีความสอดคล้องกับผลที่ได้จากการคำนวณที่มีผู้นำเสนอไว้แล้ว และเสนอผลการเปรียบเทียบอัตราการลู่เข้าของคำตอบเชิงเลข ระหว่างการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบปกติเพียงอย่างเดียวกับการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐานร่วมกับฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบปกติ และเปรียบเทียบกับผลในบทที่ 2 ด้วย

## 3.2 ฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้น

ลักษณะของฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้นจะคล้ายคลึงกับฟังก์ชันรูปร่างในบทที่ 2 ต่างกันเพียงอันดับของฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้นมีอันดับสูงกว่า จึงทำให้พารามิเตอร์มีมากกว่า โดยมีพารามิเตอร์ไม่ทราบค่า 6 ตัวบนขอบเป็นเวกเตอร์แทนองค์ประกอบของสนามตามขวาง และอีก 6 ตัวบนโนดเป็นสเกลาร์แทนองค์ประกอบของสนามตามยาว ภายในอีลีเมนต์แต่ละอีลีเมนต์ ดังรูปที่ 3.1




รูปที่ 3.1 พารามิเตอร์บนอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น

3.2.1 ฟังก์ชันรูปร่างโนดกำลังสอง (Quadratic nodal shape function)

การประมาณองค์ประกอบของสนามตามยาว อยู่ในรูปของผลบวกของผลคูณระหว่างฟังก์ชันรูปร่างโนดกับพารามิเตอร์ไม่ทราบค่าทั้ง 6 โนด ดังสมการ

$$H_z^e = \sum_{i=1}^{6} N_i^e \ H_{zi}^e \tag{3.1}$$

ฟังก์ชันรูปร่างโนดกำลังสองมีคุณสมบัติที่คล้ายคลึงกับฟังก์ชันรูปร่างโนดเชิงเส้นในบทที่ 2 แต่จะแตกต่างกันคือ มีอันดับสูงกว่าจึงทำให้ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของพิกัดพื้นที่เป็นไปอย่างกำลังสองของโนดทั้ง 6 โนด ตามสมการที่ (3.2) ถึง (3.7)

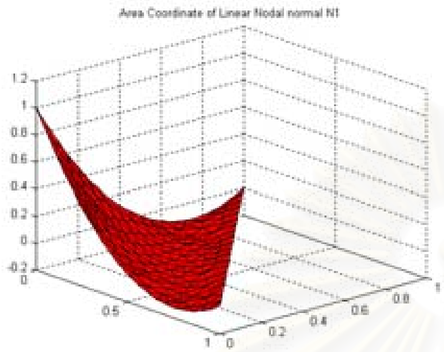
$$N_1 = L_1(2L_1 - 1) \tag{3.2}$$
$$N_2 = L_2(2L_2 - 1) \tag{3.3}$$
$$N_3 = L_3(2L_3 - 1) \tag{3.4}$$
$$N_4 = 4L_1L_2 \tag{3.5}$$
$$N_5 = 4L_2L_3 \tag{3.6}$$
$$N_6 = 4L_3L_1 \tag{3.7}$$

โดยคุณสมบัติของฟังก์ชันรูปร่างโนดกำลังสองเป็นดังนี้ มีค่าเป็น 1 ในโนดแต่ละโนด ซึ่งมีโนดอยู่ที่จุดยอดของสามเหลี่ยม และตรงกึ่งกลางด้านแต่ละด้าน และผลรวมของฟังก์ชันรูปร่างโนดนี้มีค่าเท่ากับ 1 ตามดังสมการ (3.8) ถึง (3.9) และสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 3.2 ยกตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน $N_1^e$ มีค่าเป็น 1 ที่โนดหนึ่ง และมีค่าเป็น 0 ที่โนดอื่นๆ ซึ่งลักษณะการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนี้เป็นไปอย่างกำลังสอง ส่วนฟังก์ชัน $N_2^e$ ถึง $N_6^e$ มีคุณสมบัติเช่นเดียวกันกับฟังก์ชัน $N_1^e$

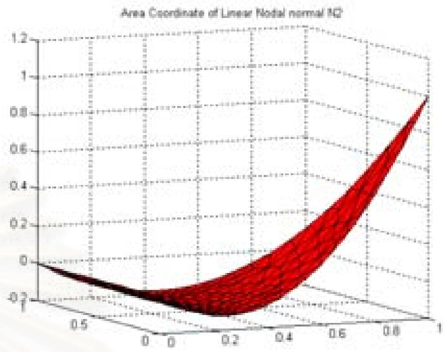
$$N_i = \begin{cases} 1, & at\ node\ \ i \\ 0, & at\ not\ node\ i \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\sum_{i=1}^{6} N_i(x,y) = 1 \tag{3.9}$$

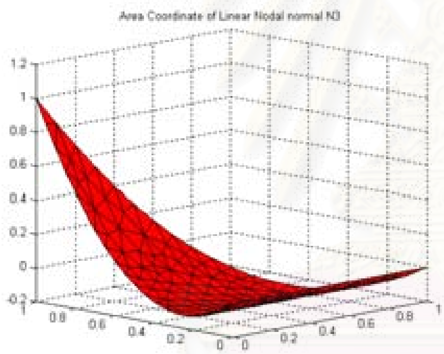
โดยที่ $i = 1,2,3,4,5,6$



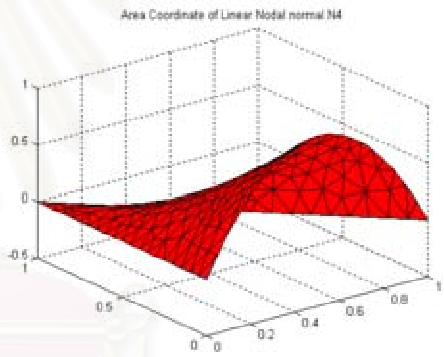

ก. ฟังก์ชันรูปร่างโนด $N_1^e$



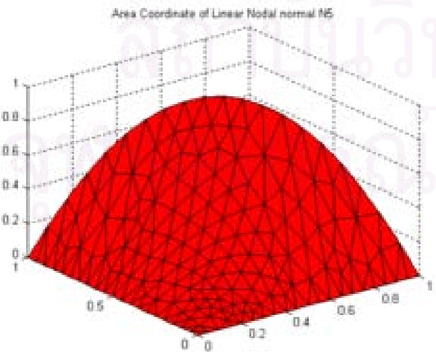

ข. ฟังก์ชันรูปร่างโนด $N_2^e$



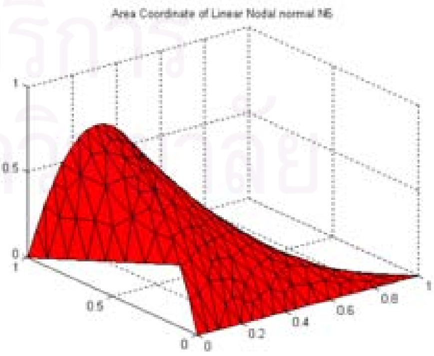

ค. ฟังก์ชันรูปร่างโนด $N_3^e$




ง. ฟังก์ชันรูปร่างโนด $N_4^e$




จ. ฟังก์ชันรูปร่างโนด $N_5^e$




ฉ. ฟังก์ชันรูปร่างโนด $N_6^e$

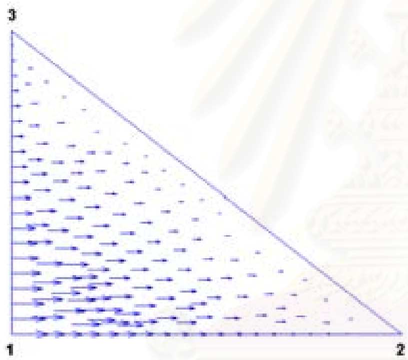
รูปที่ 3.2 ฟังก์ชันรูปร่างโนดกำลังสอง

3.2.2 ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น

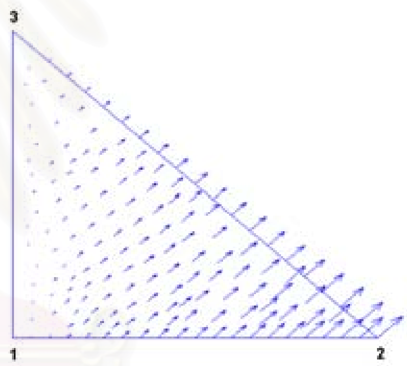
การประมาณองค์ประกอบของสนามตามขวาง อยู่ในรูปของผลบวกของผลคูณระหว่างฟังก์ชันรูปร่างกับพารามิเตอร์ไม่ทราบค่า 6 ตัว ดังสมการ

$$H_t^e = \sum_{i=1}^{6} \overline{N}_i^e \, H_{ti}^e \tag{3.10}$$

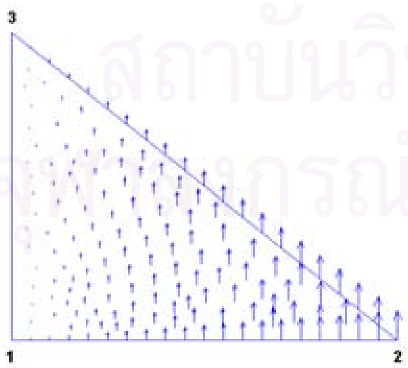
โดยคุณสมบัติของฟังก์ชันรูปร่างที่มีพารามิเตอร์เป็นเวกเตอร์บนขอบมีการเปลี่ยนแปลงแบบเชิงเส้น โดยเวกเตอร์เปลี่ยนแปลงในแนวสัมผัสแบบเชิงเส้น และเวกเตอร์เปลี่ยนแปลงในแนวตั้งฉากแบบเชิงเส้นด้วย (Linear Tangential / Linear Normal : LT/LN) ตามรูปที่ 3.3 ยกตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน $\overline{N}_1^e$ พิจารณาด้าน 1-2 มีเวกเตอร์อยู่ในแนวสัมผัส ส่วนด้าน 2-3 และด้าน 3-1 มีเฉพาะเวกเตอร์ในแนวตั้งฉากเท่านั้น และมีคุณสมบัติเคิร์ลคอนฟอร์มมิง (culr conforming) เหมือนกับฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่



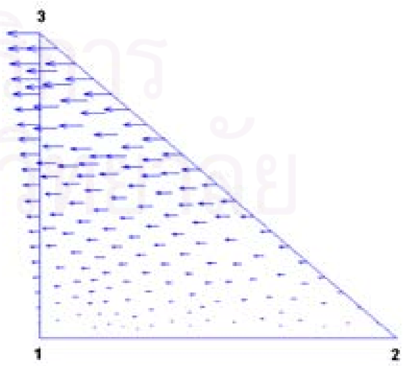

ก. $\overline{N}_1^e$




ข. $\overline{N}_2^e$

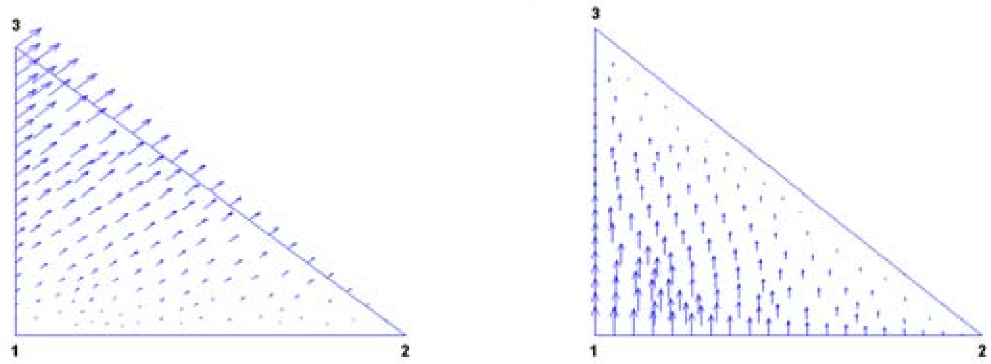



ค. $\overline{N}_3^e$




ง. $\overline{N}_4^e$

รูปที่ 3.3 แบบรูปของฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น




จ. $\overline{N}_5^e$ ฉ. $\overline{N}_6^e$

รูปที่ 3.3 (ต่อ) แบบรูปของฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น

ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น (รายละเอียดอยู่ในภาคผนวก ฉ) แสดงได้ดังสมการ

$$\overline{N}_1 = l_1(L_1\nabla L_2) \tag{3.11}$$

$$\overline{N}_2 = -l_1(L_2\nabla L_1) \tag{3.12}$$

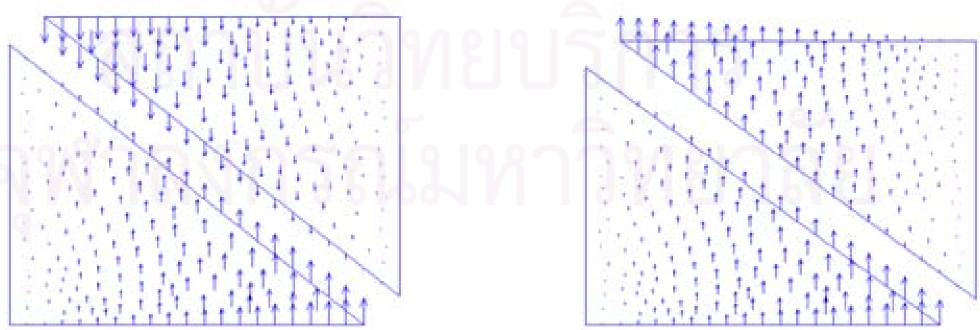
$$\overline{N}_3 = l_2(L_2\nabla L_3) \tag{3.13}$$

$$\overline{N}_4 = -l_2(L_3\nabla L_2) \tag{3.14}$$

$$\overline{N}_5 = l_3(L_3\nabla L_1) \tag{3.15}$$

$$\overline{N}_6 = -l_3(L_1\nabla L_3) \tag{3.16}$$

โดยพารามิเตอร์อ้างอิงจากในบทที่ 2 และ $l$ มีการกำหนดทิศของสนามเช่นเดียวกับการกำหนดทิศในบทที่ 2 จากสมการ (2.53) โดยแสดงสนามที่สวนทางกันและเสริมกันในรูปที่ 3.4



ก. ไม่ได้กำหนดทิศทาง ข. กำหนดทิศทาง

รูปที่ 3.4 การหมุนวนของสนาม 2 อีลีเมนต์ติดกัน
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น

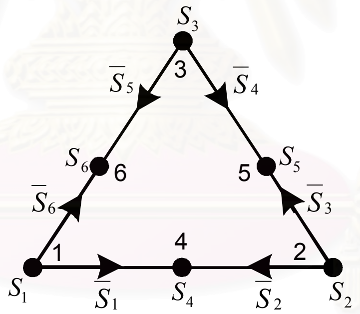
## 3.3 ฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้นแบบเอกฐาน

การคำนวณโดยใช้ฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้นแบบเอกฐานนี้ หลักการและทฤษฎีได้นำเสนอไว้แล้วในบทที่ 2 ซึ่งขั้นตอนและวิธีการสามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้กับในบทนี้ โดยมีคุณสมบัติที่คล้ายคลึงกันกับฟังก์ชันรูปร่างในบทที่ 2

ฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้นแบบเอกฐานจะประกอบด้วย ฟังก์ชันรูปร่างโนดกำลังสองแบบเอกฐานและฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน ซึ่งมีลักษณะเช่นเดียวกับฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้นแบบปกติในหัวข้อที่ 3.2 โดยใช้ในการประมาณสนามขององค์ประกอบตามขวางและองค์ประกอบตามยาวตามสมการที่ (2.61) ถึง (2.62) ซึ่งมีพารามิเตอร์ไม่ทราบค่า 6 ตัวบนขอบแทนตำแหน่งของสนามตามขวาง และอีก 6 ตัวบนโนดแทนตำแหน่งของสนามตามยาว ดังรูปที่ 3.5

$$H_z^e = \sum_{i=1}^{6} S_i^e \; H_{zi}^e \tag{3.17}$$

$$H_t^e = \sum_{i=1}^{6} \overline{S}_i^e \; H_{ti}^e \tag{3.18}$$




รูปที่ 3.5 พารามิเตอร์บนอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน

### 3.3.1 ฟังก์ชันรูปร่างโนดกำลังสองแบบเอกฐาน (Singular quadratic nodal)

การประมาณสนามตามยาวของฟังก์ชันรูปร่างโนดกำลังสองแบบเอกฐานนี้ประมาณอยู่ในรูปเดียวกับ ฟังก์ชันรูปร่างโนดกำลังสองแบบปกติ โดยฟังก์ชันรูปร่างนี้ผู้วิจัยได้นำมาจาก Akin, J.E. (1976) แสดงดังสมการ

$$S_1 = \left[1-(1-L_1)^{1-\rho}\right]\left[2\left(1-(1-L_1)^{1-\rho}\right)-1\right] \tag{3.19}$$

$$S_2 = \frac{L_2}{(1-L_1)^{\rho}}\left[2\frac{L_2}{(1-L_1)^{\rho}}-1\right] \tag{3.20}$$

$$S_3 = \frac{L_3}{(1-L_1)^{\rho}}\left[2\frac{L_3}{(1-L_1)^{\rho}}-1\right] \tag{3.21}$$

$$S_4 = 4\left[1-(1-L_1)^{1-\rho}\right]\left[\frac{L_2}{(1-L_1)^{\rho}}\right] \tag{3.22}$$

$$S_5 = 4\left[\frac{L_2}{(1-L_1)^{\rho}}\right]\left[\frac{L_3}{(1-L_1)^{\rho}}\right] \tag{3.23}$$

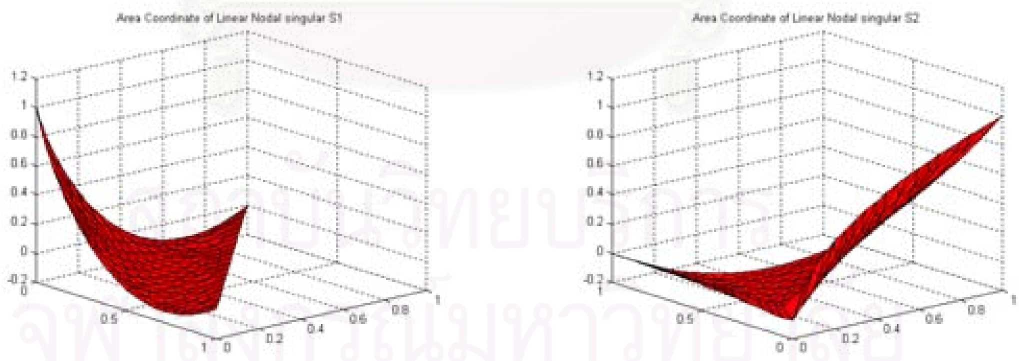
$$S_6 = 4\left[\frac{L_3}{(1-L_1)^{\rho}}\right]\left[1-(1-L_1)^{1-\rho}\right] \tag{3.24}$$

โดยคุณสมบัติของฟังก์ชันรูปร่างโนดกำลังสองแบบเอกฐาน มีลักษณะเช่นเดียวกับฟังก์ชันรูปร่างโนดกำลังสองแบบปกติ ตามสมการที่ (3.19) และ (3.20) แต่มีความแตกต่างกันตรงที่มีลักษณะการเปลี่ยนแปลงของพิกัดพื้นที่ลดลงอย่างรวดเร็วเป็นแบบเอกซ์โพเนนเชียลเฉพาะที่โนด 1 แสดงดังรูปที่ 3.6

$$S_i = \begin{cases} 1, & \textit{at node } i \\ 0, & \textit{at not node } i \end{cases} \tag{3.25}$$

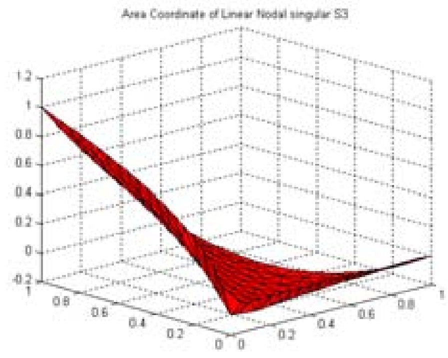
$$\sum_{i=1}^{6} S_i(x,y) = 1 \tag{3.26}$$

โดยที่ $i = 1,2,3,4,5,6$

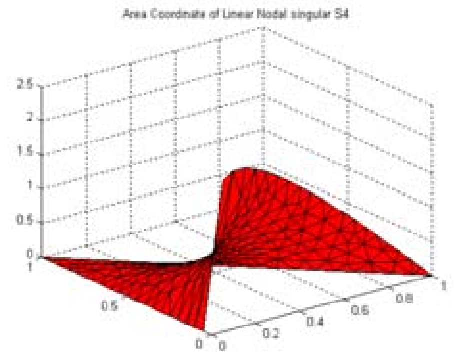



ก. ฟังก์ชันรูปร่างโนด $S_1^e$ ข. ฟังก์ชันรูปร่างโนด $S_2^e$

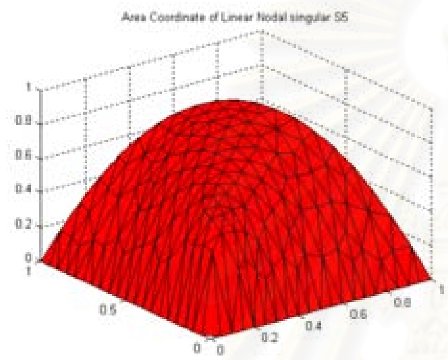
รูปที่ 3.6 ฟังก์ชันรูปร่างโนดกำลังสองแบบเอกฐาน



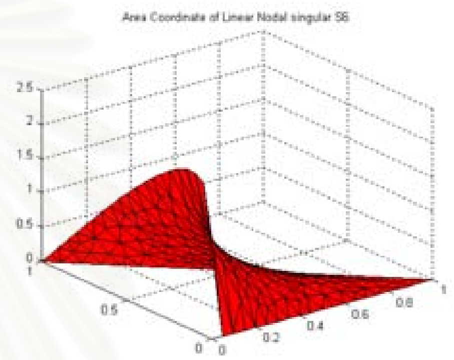

ค. ฟังก์ชันรูปร่างโนด $S_3^e$




ง. ฟังก์ชันรูปร่างโนด $S_4^e$




จ. ฟังก์ชันรูปร่าง $S_5^e$

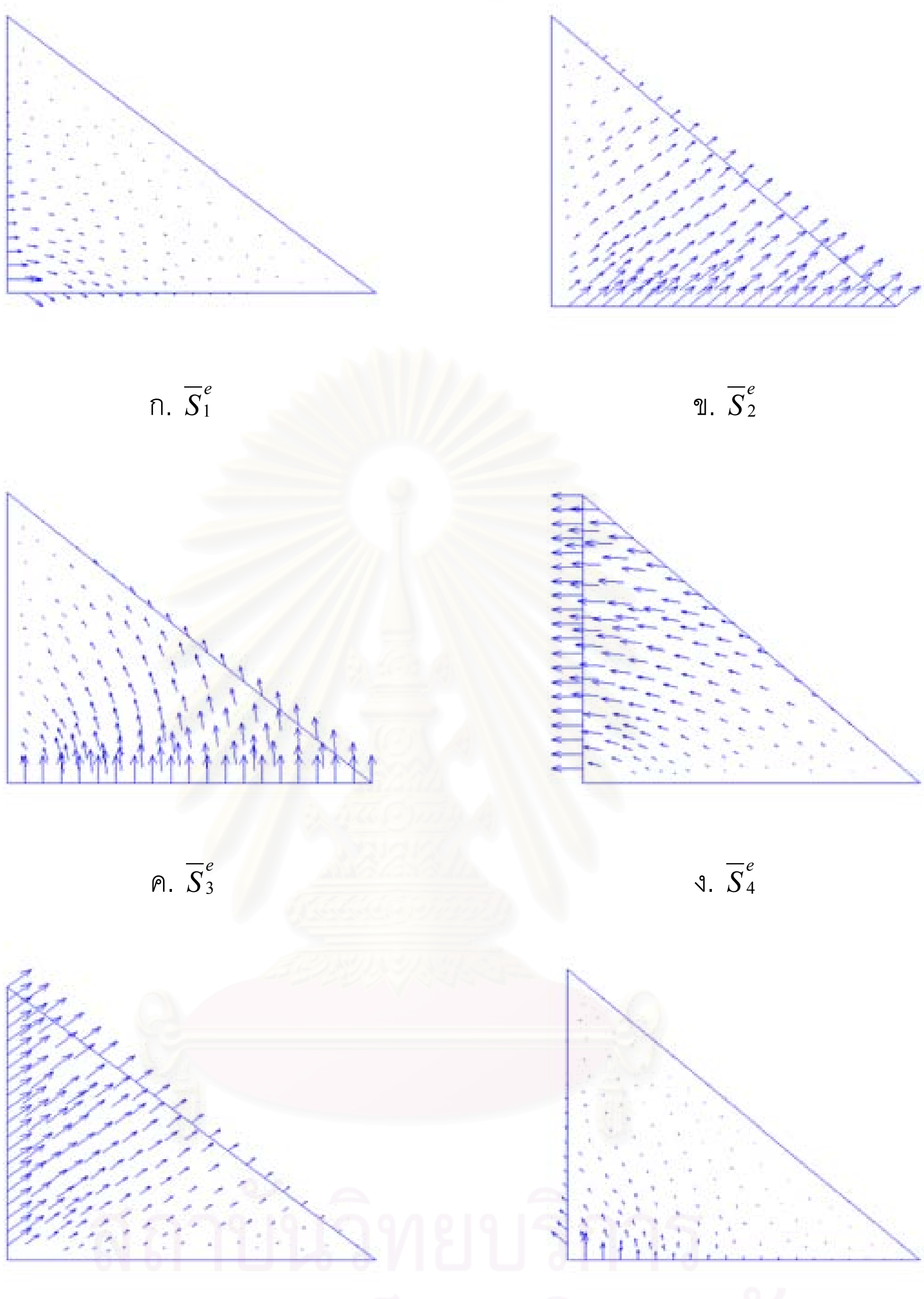



ฉ. ฟังก์ชันรูปร่างโนด $S_6^e$

รูปที่ 3.6 (ต่อ) ฟังก์ชันรูปร่างโนดกำลังสองแบบเอกฐาน

### 3.3.2 ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน

ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐานมีคุณสมบัติเช่นเดียวกับฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบปกติ สามารถแสดงดังรูปที่ 3.7 คือมีพารามิเตอร์เป็นเวกเตอร์อยู่บนด้าน โดยเวกเตอร์เปลี่ยนแปลงในแนวสัมผัสแบบเชิงเส้น และเวกเตอร์เปลี่ยนแปลงในแนวตั้งฉากแบบเชิงเส้น



ก. $\overline{S}_1^e$ ข. $\overline{S}_2^e$

ค. $\overline{S}_3^e$ ง. $\overline{S}_4^e$

จ. $\overline{S}_5^e$ ฉ. $\overline{S}_6^e$



รูปที่ 3.7 แบบรูปของฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน

ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน (รายละเอียดอยู่ในภาคผนวก ซ) แสดงเป็นสมการ

$$\overline{S}_1 = l_1\left[\left(1-(1-L_1)^{1-\rho}\right)\nabla\left(\frac{L_2}{(1-L_1)^{\rho}}\right)\right] \tag{3.27}$$

$$\overline{S}_2 = -l_1\left[\left(\frac{L_2}{(1-L_1)^{\rho}}\right)\nabla\left(1-(1-L_1)^{1-\rho}\right)\right] \tag{3.28}$$

$$\overline{S}_3 = \ l_2\left[\left(\frac{L_2}{(1-L_1)^{\rho}}\right)\nabla\left(\frac{L_3}{(1-L_1)^{\rho}}\right)\right] \tag{3.29}$$

$$\overline{S}_4 = -l_2\left[\left(\frac{L_3}{(1-L_1)^{\rho}}\right)\nabla\left(\frac{L_2}{(1-L_1)^{\rho}}\right)\right] \tag{3.30}$$

$$\overline{S}_5 = \ l_3\left[\left(\frac{L_3}{(1-L_1)^{\rho}}\right)\nabla\left(1-(1-L_1)^{1-\rho}\right)\right] \tag{3.31}$$

$$\overline{S}_6 = -l_3\left[\left(1-(1-L_1)^{1-\rho}\right)\nabla\left(\frac{L_3}{(1-L_1)^{\rho}}\right)\right] \tag{3.32}$$

พารามิเตอร์ที่ใช้ในสมการ (3.27) ถึง (3.32) อ้างอิงจากในบทที่ 2 และในการปรับทิศทางของสนามที่มีทิศสวนทางกัน ก็ใช้หลักการเดียวกับในการปรับสนามหมุนของฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบแบบปกติ ตามสมการ (2.53)

การวิเคราะห์ท่อนำคลื่นมีสันด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ โดยใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น ซึ่งผสมกันระหว่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบปกติ กับอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน พิจารณาประมาณอีลีเมนต์สามเหลี่ยมบริเวณมุมสันด้วยอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน และนอกเหนือบริเวณมุมสันด้วยอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบปกติ เพื่อทำให้การประมาณสนามตลอดทั้งบริเวณมีความสอดคล้องกันอย่างเหมาะสม และคาดว่าจะทำให้ได้ผลเฉลยที่ลู่เข้าสู่คำตอบถูกต้องได้เร็วที่สุดด้วย ดังนั้นผู้วิจัยจึงนำเสนอการเปรียบเทียบผลการคำนวณด้วยฟังก์ชันรูปร่างทั้ง 4 แบบตามที่ได้นำเสนอมาไว้ในบทที่ 2 และบทที่ 3

### 3.4 ผลการตรวจสอบโดยคำนวณตัวอย่าง 6 ตัวอย่าง

ในการคำนวณชุดตัวอย่างนี้ ผู้วิจัยได้วิเคราะห์ฟังก์ชันรูปแบบ 2 ฟังก์ชันคือ ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบปกติอย่างเดียว และฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบปกติร่วมกับฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน ฟังก์ชันรูปร่างแบบเอกฐานนั้นใช้ค่า $\rho = \frac{1}{6}$ ซึ่งค่า $\rho$ ผู้วิจัยได้เลือกมาเพียงหนึ่งค่า อยู่ในช่วง 0 ถึง 1 เพื่อจะได้กำหนดค่าในการคำนวณให้เป็นไปในทางเดียวกัน โดยเปลี่ยนค่าไปจากที่คำนวณในบทที่ 2 เพื่อทดสอบในแต่ละค่าของ $\rho$ อย่างไรก็ตามเมื่อนำค่า $\rho$ เท่าใดมาพิจารณาก็จะยังให้ผลเฉลยที่ได้มีค่าที่ดีกว่าการไม่ใช้ค่า $\rho$ เลย (ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบปกติ) โดยคำนวณด้วยตัวอย่างชุดเดียวกับตัว

อย่างในบทที่ 2 และนำผลของบทที่ 2 มาเปรียบเทียบกับการคำนวณด้วยฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นในกราฟเดียวกัน

3.4.1 ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว

โครงสร้างภาคตัดขวาง และแบบรูปของสนามแม่เหล็กของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว สามารถดูได้จากในบทที่ 2 ในรูปที่ 2.11 และ 2.12 ตามลำดับ ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดอยู่ในตารางที่ 3.1 แสดงเปรียบเทียบผลที่ได้จากฟังก์ชันรูปร่าง 2 แบบคือ แบบปกติ กับแบบผสม และตารางที่ 3.2 เปรียบเทียบผลที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้กับผลในบทความอ้างอิง 3 บทความเหมือนกับในบทที่ 2

ตารางที่ 3.1 ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น

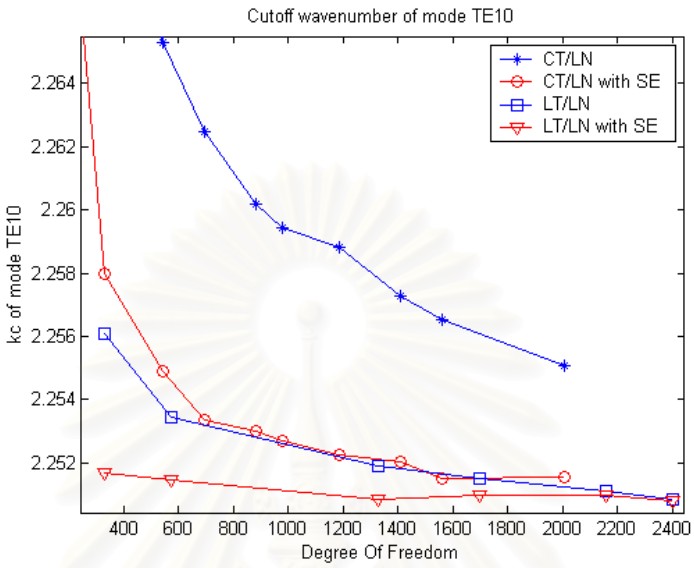
| Mode | | $TE_{10}$ | | $TE_{01}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| Element | DOF | LT/LN | LT/LN with SE | LT/LN | LT/LN with SE |
| 54 | 331 | 2.25610 | 2.25170 | 4.88836 | 4.86996 |
| 98 | 575 | 2.25346 | 2.25148 | 4.87674 | 4.86670 |
| 240 | 1329 | 2.25192 | 2.25086 | 4.86960 | 4.86222 |
| 310 | 1695 | 2.25152 | 2.25100 | 4.86778 | 4.86218 |
| 398 | 2159 | 2.25112 | 2.25098 | 4.86614 | 4.86294 |
| 445 | 2400 | 2.25086 | 2.25082 | 4.86500 | 4.86166 |

ตารางที่ 3.2 เปรียบเทียบเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว ที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้กับผลในบทความอ้างอิง 3 บทความ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน

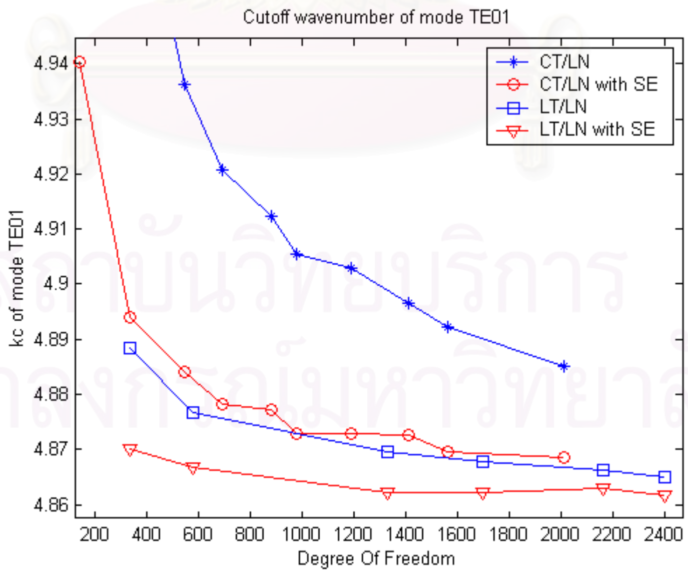
| กรณีศึกษา | $TE_{10}$ | $TE_{01}$ |
|---|---|---|
| วิทยานิพนธ์ | 2.25082 | 4.86166 |
| Guan, J.M. and Su, C.C. (1995) | 2.24220 | 4.85430 |
| Sheng, L.L., Le, W.L., Tat, S.Y., and Mook, S.L. (2001) | 2.27720 | 4.97050 |
| Swaminathan, M., Arvas, E. Sarkar, T.K., and Djordjevic, A.R.(1990) | 2.24960 | 4.94360 |

เมื่อนำผลในตารางที่ 3.1 มาสร้างกราฟเปรียบเทียบผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของโมด $TE_{10}$ และโมด $TE_{01}$ ไว้ในรูปที่ 3.8 และ 3.9 ตามลำดับ ซึ่งผลการคำนวณที่ได้แสดงว่า

การใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน ส่งผลให้อัตราการลู่เข้าดีกว่า การใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบปกติ และเมื่อเปรียบเทียบทั้ง 4 รูปแบบฟังก์ชัน จะพบว่าการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐานทำให้ได้ผลเฉลยดีที่สุด




รูปที่ 3.8 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่และขอบเชิงเส้น




รูปที่ 3.9 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่และขอบเชิงเส้น

3.4.2 ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่

โครงสร้างภาคตัดขวาง และแบบรูปของสนามแม่เหล็กของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ สามารถดูได้จากในบทที่ 2 ในรูปที่ 2.17 และ 2.18 ตามลำดับ ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดแสดงอยู่ในตารางที่ 3.3 และตารางที่ 3.4 เปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้กับบทความอ้างอิง 3 บทความ เหมือนกับในบทที่ 2

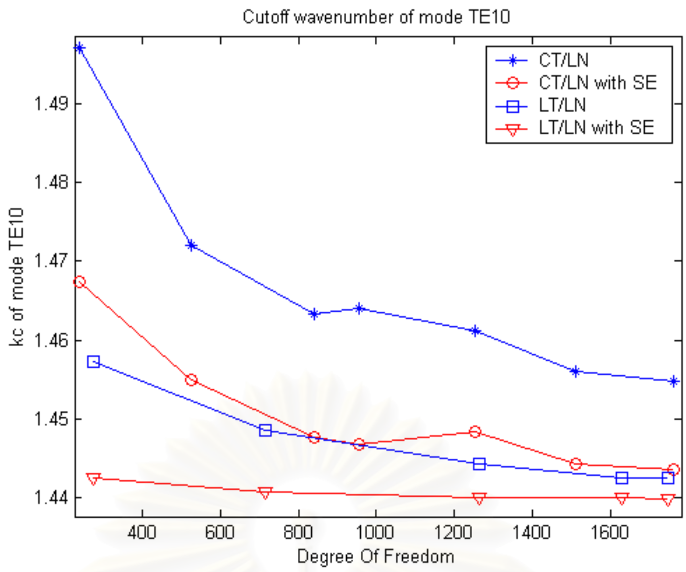
ตารางที่ 3.3 ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น

| Mode | | $TE_{10}$ | | $TE_{01}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| Element | DOF | LT/LN | LT/LN with SE | LT/LN | LT/LN with SE |
| 44 | 277 | 1.45729 | 1.44241 | 3.16616 | 3.16275 |
| 124 | 717 | 1.44855 | 1.44068 | 3.16305 | 3.16155 |
| 226 | 1263 | 1.44423 | 1.44008 | 3.16015 | 3.15977 |
| 296 | 1629 | 1.44253 | 1.44003 | 3.15985 | 3.15937 |

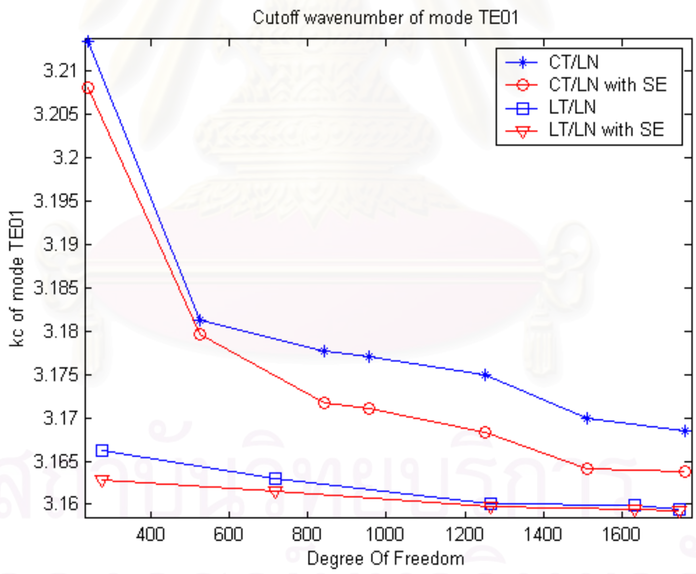
ตารางที่ 3.4 เปรียบเทียบเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ ที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้กับผลในบทความอ้างอิง 3 บทความ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน

| กรณีศึกษา | $TE_{10}$ | $TE_{01}$ |
|---|---|---|
| วิทยานิพนธ์ | 1.44003 | 3.15937 |
| Guan, J.M. and Su, C.C. (1995) | 1.43400 | 3.16800 |
| Sheng, L.L., Le, W.L., Tat, S.Y., and Mook, S.L. (2001) | 1.48490 | 3.20150 |
| Gil, J.M., and Zapata, J. (1994) | 1.43900 | - |

เปรียบเทียบผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของโมด $TE_{10}$ และโมด $TE_{01}$ ไว้ในกราฟรูปที่ 3.10 และ 3.11 ตามลำดับ โดยนำข้อมูลมาจากตารางที่ 3.3 เพื่อให้ง่ายในการพิจารณาเปรียบเทียบ ผลที่ได้แสดงว่า การใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน สามารถทำให้ผลเฉลยที่ได้ทั้ง 2 โมดมีอัตราการลู่เข้าดีที่สุด เมื่อเปรียบเทียบทั้ง 4 รูปแบบฟังก์ชัน




รูปที่ 3.10 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่และขอบเชิงเส้น




รูปที่ 3.11 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่และขอบเชิงเส้น

### 3.4.3 ท่อนำคลื่นรูปร่าง L

โครงสร้างภาคตัดขวาง และแบบรูปของสนามแม่เหล็กของท่อนำคลื่นรูปร่าง L สามารถดูได้จากในบทที่ 2 ในรูปที่ 2.22 และ 2.23 ตามลำดับ ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดอยู่ในตารางที่ 3.5 และตารางที่ 3.6 เปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้กับผลในบทความอ้างอิง 3 บทความ

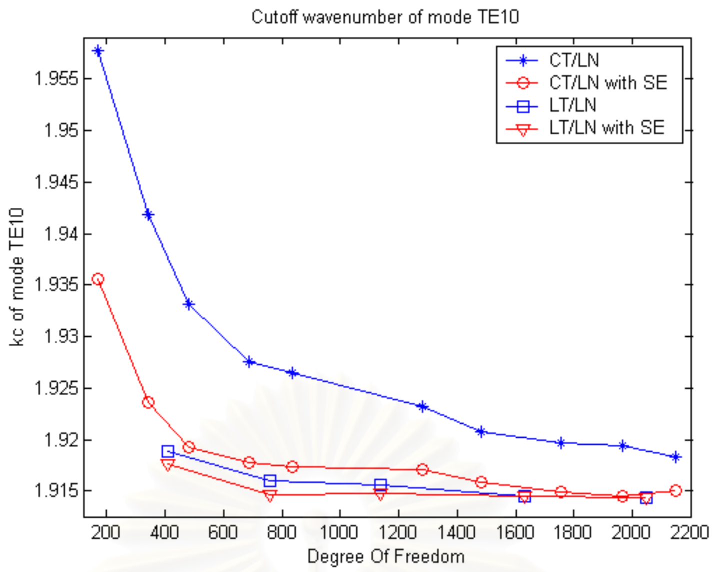
ตารางที่ 3.5 ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นรูปร่าง L
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น

| Mode | | $TE_{10}$ | | $TE_{01}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| Element | DOF | LT/LN | LT/LN with SE | LT/LN | LT/LN with SE |
| 70 | 407 | 1.91893 | 1.91765 | 2.96095 | 2.96334 |
| 136 | 757 | 1.91606 | 1.91466 | 2.96060 | 2.96234 |
| 208 | 1137 | 1.91564 | 1.91479 | 2.96054 | 2.96197 |
| 304 | 1633 | 1.91458 | 1.91446 | 2.96051 | 2.96150 |

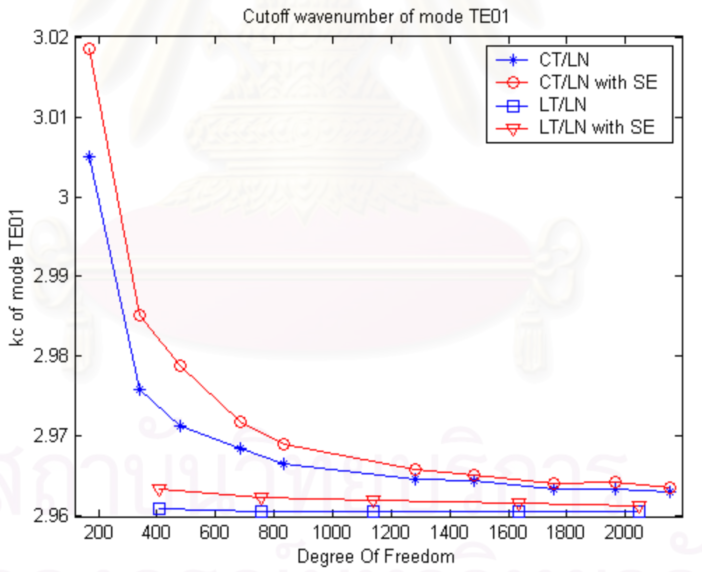
ตารางที่ 3.6 เปรียบเทียบเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นรูปร่าง L ที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้กับผลในบทความอ้างอิง 3 บทความ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น

| กรณีศึกษา | $TE_{10}$ | $TE_{01}$ |
|---|---|---|
| วิทยานิพนธ์ | 1.91446 | 2.96051 |
| Guan, J.M. and Su, C.C. (1995) | 1.91110 | 2.96000 |
| Sheng, L.L., Le, W.L., Tat, S.Y., and Mook, S.L. (2001) | 1.96530 | 2.96320 |
| Swaminathan, M., Arvas, E. Sarkar, T.K., and Djordjevic, A.R. (1990) | 1.89170 | 2.91590 |

ผลการคำนวณเปรียบเทียบเลขคลื่นตัดของโมด $TE_{10}$ และโมด $TE_{01}$ เมื่อนำผลในตารางที่ 3.5 มาสร้างกราฟเลขคลื่นตัดไว้ในรูปที่ 3.12 และ 3.13 ตามลำดับ พบว่าในโมด $TE_{10}$ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน ส่งผลให้อัตราการลู่เข้าดีที่สุด แต่สำหรับโมด $TE_{01}$ ส่งผลให้อัตราการลู่เข้าของการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบปกติดีที่สุด เนื่องจากแบบรูปของสนามแม่เหล็กในโมดนี้ไม่มีการเปลี่ยนแปลงบริเวณมุมสัน ดังรูปที่ 2.23 (ค) ทำให้การใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบแบบเอกฐานคำนวณผลที่ได้ผิดพลาดกว่าการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบแบบปกติ




รูปที่ 3.12 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นรูปร่าง L
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่และขอบเชิงเส้น



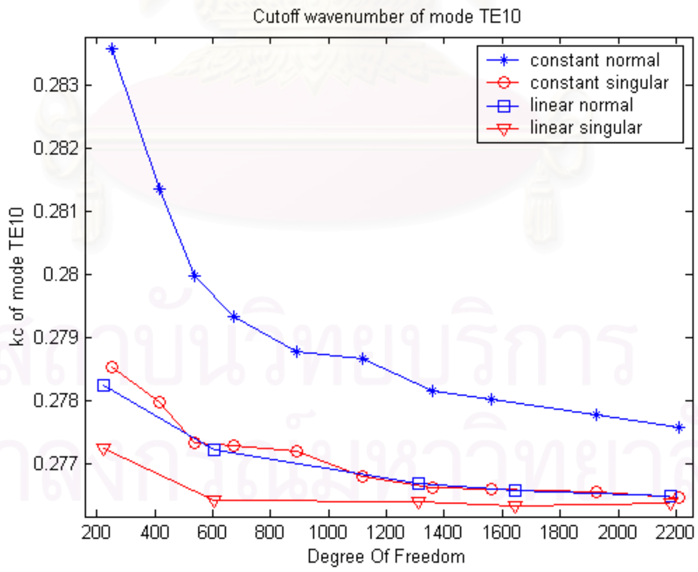

รูปที่ 3.13 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นรูปร่าง L
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่และขอบเชิงเส้น

3.4.4 ท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน

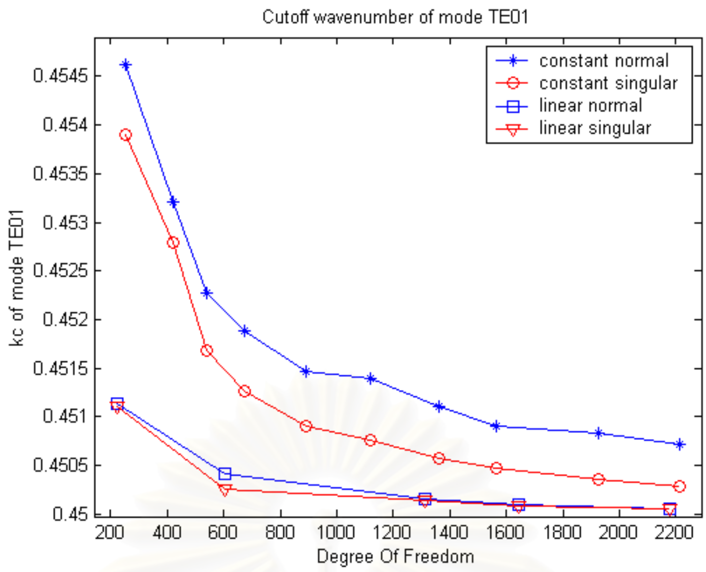
โครงสร้างภาคตัดขวาง และแบบรูปของสนามแม่เหล็กของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน สามารถดูได้จากในบทที่ 2 ในรูปที่ 2.27 และ 2.28 ตามลำดับ ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดแสดงในตารางที่ 3.7 โดยในกรณีตัวอย่างนี้ไม่มีการเปรียบเทียบกับบทความอ้างอิงใดๆ เนื่องจากเป็นโครงสร้างรูปแบบใหม่ จึงยังไม่มีผู้วิจัยรายใดวิเคราะห์เกี่ยวกับโครงสร้างนี้มากนัก และเพื่อทดสอบวิธีคำนวณในวิทยานิพนธ์นี้ว่าสามารถคำนวณได้ทุกกรณีโครงสร้างที่มีสันตัวนำ

ตารางที่ 3.7 ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน
เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น

| Mode | | $TE_{10}$ | | $TE_{01}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| Element | DOF | LT/LN | LT/LN with SE | LT/LN | LT/LN with SE |
| 35 | 222 | 0.27826 | 0.27724 | 0.45113 | 0.45111 |
| 104 | 605 | 0.27722 | 0.27642 | 0.45041 | 0.45026 |
| 237 | 1312 | 0.27669 | 0.27641 | 0.45015 | 0.45014 |
| 300 | 1645 | 0.27658 | 0.27633 | 0.45009 | 0.45008 |




รูปที่ 3.14 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน
โดยใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่และขอบเชิงเส้น




รูปที่ 3.15 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่และขอบเชิงเส้น

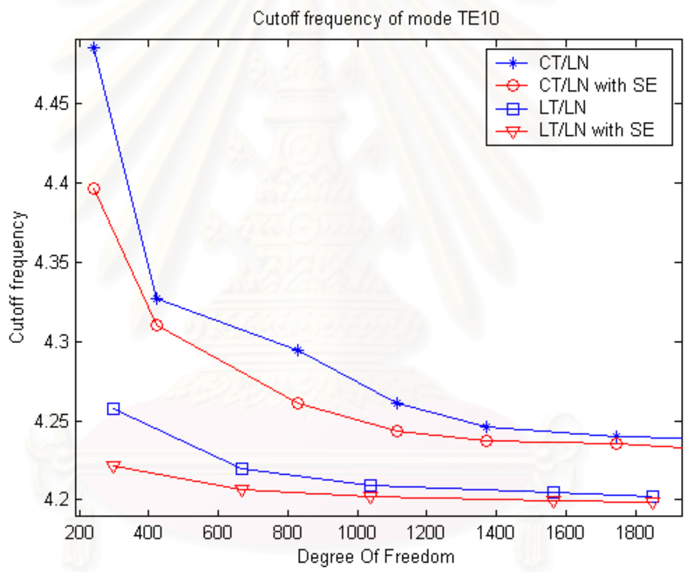
เมื่อนำผลในตารางที่ 3.7 มาสร้างเป็นกราฟ เพื่อเปรียบเทียบผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของโมด $TE_{10}$ และโมด $TE_{01}$ อยู่ในรูปที่ 3.14 และ 3.15 ตามลำดับ แสดงได้ว่าการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน สามารถทำให้อัตราการลู่เข้าดีที่สุดทั้ง 2 โมด เนื่องจากแบบรูปของสนามแม่เหล็กมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วบริเวณมุมสัน

3.4.5 ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก

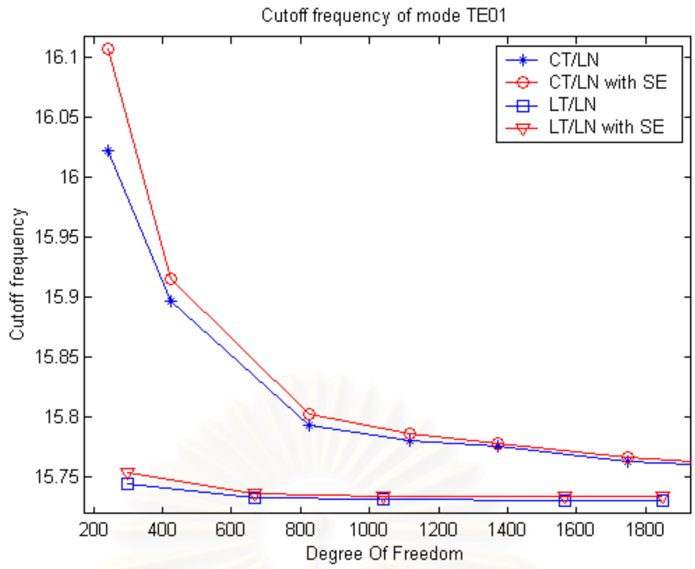
โครงสร้างภาคตัดขวาง และแบบรูปของสนามแม่เหล็กของท่อนำคลื่นแบบสัน-เดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก สามารถดูได้จากในบทที่ 2 ในรูปที่ 2.32 และ 2.33 ตามลำดับ ผลการคำนวณความถี่ตัดอยู่ในตารางที่ 3.8 และนำผลในตารางมาสร้างเป็นกราฟ เพื่อเปรียบเทียบผลการคำนวณความถี่ตัดของโมด $TE_{10}$ และโมด $TE_{01}$ แสดงไว้ในรูปที่ 3.16 และ 3.17 ตามลำดับ

ตารางที่ 3.8 ผลการคำนวณความถี่ตัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น

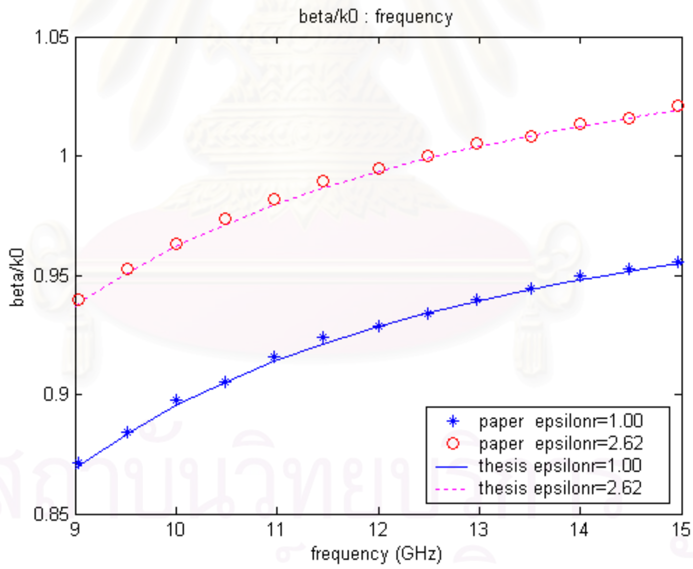
| Mode | | $TE_{10}$ (GHz) | | $TE_{01}$ (GHz) | |
|---|---|---|---|---|---|
| Element | DOF | LT/LN | LT/LN with SE | LT/LN | LT/LN with SE |
| 50 | 299 | 4.25733 | 4.22159 | 15.74478 | 15.75408 |
| 118 | 667 | 4.21968 | 4.20637 | 15.73295 | 15.73686 |
| 186 | 1039 | 4.20909 | 4.20193 | 15.73152 | 15.73438 |
| 288 | 1565 | 4.20494 | 4.19955 | 15.73123 | 15.73481 |
| 340 | 1849 | 4.20207 | 4.19874 | 15.73113 | 15.73400 |




รูปที่ 3.16 ความถี่ตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่และขอบเชิงเส้น




รูปที่ 3.17 ความถี่ตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่และขอบเชิงเส้น




รูปที่ 3.18 เปรียบเทียบค่าคงตัวการแพร่กระจายของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก ที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้ เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐานกับผลในบทความอ้างอิงของ Ng, K.T., and Chan, C.H. (1989)

ผลที่ได้จากการคำนวณความถี่ตัดในกราฟรูปที่ 3.16 และ 3.17 พบว่าคล้ายคลึงกับผลของท่อนำคลื่นรูปร่าง L เนื่องจากแบบรูปของสนามแม่เหล็กในโมด $TE_{01}$ ไม่มีการเปลี่ยน

แปลงบริเวณมุมสัน นั่นคือทำให้การใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบแบบเอกฐานมีอัตราการลู่เข้าที่ไม่ดี และเปรียบเทียบผลการคำนวณค่าคงตัวการแพร่กระจายที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้คำนวณด้วยฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน กับผลในบทความอ้างอิงของ Ng, K.T., and Chan, C.H. (1989) ในโมด $TE_{10}$ โดยใช้ค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ตามบทความอ้างอิงที่นำเสนอไว้คือ $\varepsilon_r = 1.0$ และ $\varepsilon_r = 2.62$ ผลที่ได้มีค่าใกล้เคียงกัน เนื่องจากในการคำนวณนี้ผลเฉลยมีค่าแม่นยำมากขึ้น เมื่อเปรียบเทียบผลที่ได้จากการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ในบทที่ 2

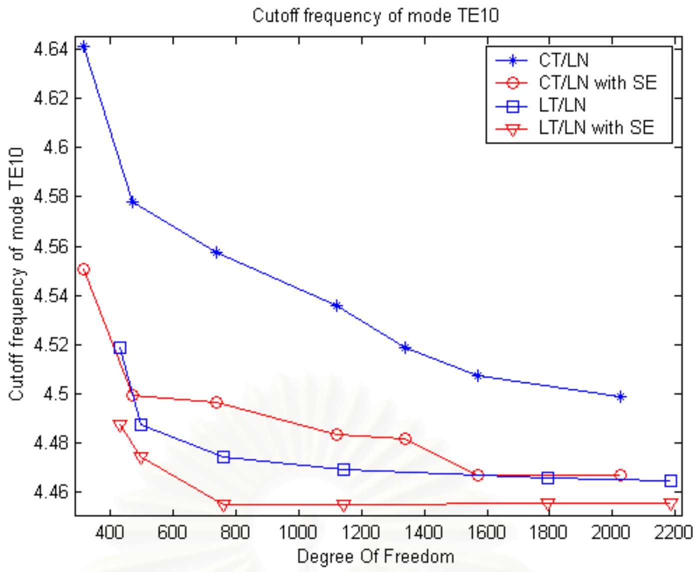
3.4.5 ท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก

โครงสร้างภาคตัดขวาง และแบบรูปของสนามแม่เหล็กของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก สามารถดูได้จากในบทที่ 2 ในรูปที่ 2.38 และ 2.39 ตามลำดับ ผลการคำนวณความถี่ตัด ดังในตารางที่ 3.9 และนำผลในตารางมาสร้างกราฟเปรียบเทียบผลการคำนวณความถี่ตัดของโมด $TE_{10}$ และโมด $TE_{01}$ ในรูปที่ 3.19 และ 3.20 ตามลำดับ

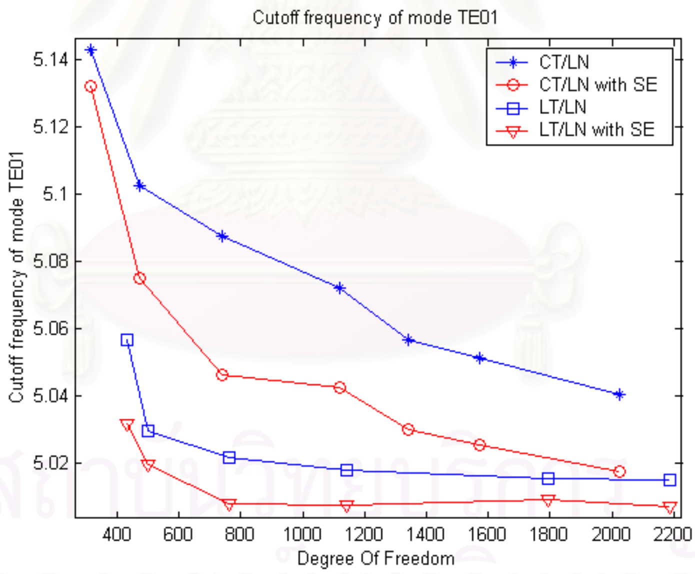
ตารางที่ 3.9 ผลการคำนวณความถี่ตัดของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น

| Mode | | $TE_{10}$ (GHz) | | $TE_{01}$ (GHz) | |
|---|---|---|---|---|---|
| Element | DOF | LT/LN | LT/LN with SE | LT/LN | LT/LN with SE |
| 68 | 433 | 4.51854 | 4.48751 | 5.05659 | 5.03152 |
| 82 | 499 | 4.48774 | 4.47457 | 5.02956 | 5.01969 |
| 132 | 761 | 4.47429 | 4.45491 | 5.02145 | 5.00777 |
| 202 | 1143 | 4.46912 | 4.45479 | 5.01783 | 5.00759 |
| 320 | 1793 | 4.46588 | 4.45553 | 5.01553 | 5.00930 |
| 390 | 2187 | 4.46459 | 4.45588 | 5.01479 | 5.00692 |

ผลการคำนวณความถี่ตัดที่ได้แสดงในกราฟรูปที่ 3.19 และ 3.20 นั้นสอดคล้องกันกับกรณีตัวอย่างข้างต้นหลายๆ ตัวอย่างเช่น ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว และท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ เป็นต้น คือในการคำนวณทั้ง 2 โมด การใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน ทำให้อัตราการลู่เข้าดีที่สุดในฟังก์ชันรูปร่างทั้ง 4 ฟังก์ชัน




รูปที่ 3.19 ความถี่ตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่และขอบเชิงเส้น




รูปที่ 3.20 ความถี่ตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่และขอบเชิงเส้น

ตารางที่ 3.10 เปรียบเทียบค่าคงตัวการแพร่กระจายของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก ที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้เมื่อใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐานกับ ผลในบทความอ้างอิงของ Ng, K.T., and Chan, C.H. (1989)

| กรณีศึกษา | $TE_{10}$ |
|---|---|
| วิทยานิพนธ์ | 0.7461 |
| Ng, K.T., and Chan, C.H. (1989) | 0.7317 |

ผลในตารางที่ 3.10 แสดงการเปรียบเทียบผลของค่าคงตัวการแพร่กระจาย ที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้คำนวณด้วยฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน กับผลในบทความอ้างอิงของ Ng, K.T., and Chan, C.H. (1989) โดยคำนวณค่าสภาพยอมสัมพัทธ์ตามบทความอ้างอิงนำเสนอไว้คือ $\varepsilon_r = 2.62$ ผลที่ได้มีค่าใกล้เคียงกัน

**3.5 สรุปผลการคำนวณ**

ในบทนี้ได้นำเสนอการปรับปรุงระเบียบวิธีวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นมีสัน 2 มิติ โดยใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน เพื่อประมาณฟังก์ชันของสนามบริเวณมุมสัน ให้มีความสอดคล้องกับลักษณะการเปลี่ยนแปลงของสนามบริเวณนั้นร่วมกับการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบปกติ และเพื่อเพิ่มอันดับของฟังก์ชันการประมาณในการคำนวณ ซึ่งน่าจะสามารถทำให้ผลเฉลยที่ได้มีอัตราการลู่เข้าดีขึ้นกว่าการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน เนื่องจากฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นมีอันดับสูงกว่าฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ ซึ่งสอดคล้องกับลักษณะการเปลี่ยนแปลงของสนามที่เกิดขึ้นในท่อนำคลื่นมากกว่า โดยคำนวณเลขคลื่นตัดและความถี่ตัด ในตัวอย่างชุดเดียวกับในบทที่ 2 และนำผลของบทที่ 2 ที่คำนวณด้วยฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่มาเปรียบเทียบในกราฟรูปเดียวกัน และเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้จากวิทยานิพนธ์นี้กับผลในบทความอ้างอิง

จากผลการคำนวณโดยเปรียบเทียบการใช้ฟังก์ชันรูปร่างทั้ง 4 ฟังก์ชันนั้น แสดงให้เห็นว่าการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐานร่วมกับอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบปกติ สามารถเพิ่มช่วงของการประมาณ ทำให้ผลเฉลยที่ได้มีค่าลู่เข้าสู่คำตอบได้ดีที่สุด ทำให้ไม่จำเป็นต้องแบ่งอีลีเมนต์เป็นจำนวนมากๆ ดังนั้นถ้าต้องการผลเฉลยที่ถูกต้องมากที่สุด ควรใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐานร่วมกับฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบปกติ ซึ่งมีค่าลู่เข้าเร็วที่สุดในฟังก์ชันรูปร่างทั้ง 4 แบบที่ได้นำเสนอมา อย่างไรก็ตามยังคงต้องพิจารณาถึงแบบรูปสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นในท่อนำคลื่นว่ามีการเปลี่ยนแปลงมากน้อยเท่า

ใด เพราะถ้าสนามแม่เหล็กไฟฟ้าไม่มีการเปลี่ยนแปลงจะทำให้ผลเฉลยที่คำนวณจากการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบแบบเอกฐานมีค่าผิดพลาดมากกว่า การใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบแบบปกติเพียงอย่างเดียว และถ้าพิจารณาถึงลักษณะอีลีเมนต์ที่นำมาใช้ในการคำนวณนั้นเป็นลักษณะกระจายตลอดทั่วบริเวณปัญหา มิได้คำนึงถึงลักษณะของอีลีเมนต์ในบริเวณปัญหาว่าควรมีความละเอียดมากบริเวณใดและน้อยบริเวณใด ซึ่งจะได้นำเสนอไว้ในบทที่ 4 เป็นการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ เพื่อทำให้อีลีเมนต์ที่แบ่งในบริเวณปัญหานั้นเหมาะสมกับลักษณะการเปลี่ยนแปลงของสนามภายในท่อนำคลื่น ซึ่งคาดว่าจะสามารถทำให้ผลเฉลยที่ได้มีค่าลู่เข้าเร็วยิ่งขึ้น

# บทที่ 4

# การปรับปรุงการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นมีสัน 2 มิติ โดยใช้การแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

## 4.1 ความนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ โดยใช้ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ การวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ เป็นการวิเคราะห์ปัญหาที่ต่อเนื่องให้มีลักษณะเป็นอีลีเมนต์ประกอบกัน และใช้ฟังก์ชันรูปร่างจำลองพฤติกรรมของสนามแม่-เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นในท่อนำคลื่น ดังนั้นปัจจัยสำคัญที่มีผลต่อค่าความถูกต้องของผลเฉลย จึงมี 2 ปัจจัยด้วยกัน ในบทที่ 2 และบทที่ 3 ได้นำเสนอถึงความสำคัญของการเพิ่มอันดับของฟังก์ชันการประมาณ ซึ่งถ้ามีลักษณะเป็นอันดับสูงๆ สามารถช่วยทำให้ผลเฉลยมีค่าถูกต้องมากยิ่งขึ้น และในบทนี้จะได้นำเสนอการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ เพื่อทำให้อีลีเมนต์มีความเหมาะสมกับปัญหาที่พิจารณา ซึ่งก็คือบริเวณใดมีอัตราการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยต่อพื้นที่มาก ก็จะมีความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยมากเช่นกัน ดังนั้นในการวิเคราะห์ปัญหาให้มีประสิทธิภาพมากที่สุด จึงต้องกระจายความคลาดเคลื่อนเหล่านี้ให้มีค่าใกล้เคียงตลอดทั้งโดเมนของปัญหา สามารถทำได้โดยการใช้อีลีเมนต์ให้มีความเหมาะสมกับพื้นที่ของปัญหา โดยอีลีเมนต์ขนาดเล็กในพื้นที่ที่มีความคลาดเคลื่อนมาก และอีลีเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณที่มีความคลาดเคลื่อนน้อย ยังผลให้การคำนวณสอดคล้องกับปัญหาที่พิจารณา ในการตรวจสอบแนวคิดที่นำเสนอ ผู้วิจัยได้ทดลองคำนวณในกรณีตัวอย่าง 6 ตัวอย่าง เพื่อยืนยันความถูกต้องในรูปแบบวิธีการคำนวณว่ามีความสอดคล้องกัน โดยเสนอผลการเปรียบเทียบอัตราการลู่เข้าของคำตอบเชิงเลข (convergence rate of numerical result) ของการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบปกติเพียงอย่างเดียว การใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นร่วมกับฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน และการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นร่วมกับการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้

## 4.2 ชนิดของการปรับตัว

ชนิดของการปรับตัวมี 2 แบบคือ

4.2.1 การปรับตัวแบบเอช (h-adaptation) คือการปรับอีลีเมนต์ให้มีขนาดเล็กลง ซึ่งจะทำให้อีลีเมนต์มีความละเอียดมากยิ่งขึ้น เพื่อลดค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลย ยังผลให้มีค่าความถูกต้องมากยิ่งขึ้น

4.2.2 การปรับตัวแบบพี (p-adaptation) คือการปรับอันดับของฟังก์ชันรูปร่างในระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ การเพิ่มอันดับของฟังก์ชันรูปร่างนั้นสามารถลดค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลย โดยไม่จำเป็นต้องแบ่งอีลีเมนต์เป็นจำนวนมาก

### 4.3 **การประมาณความผิดพลาด** (Error Estimation)

โดยทั่วๆ ไปการคำนวณความคลาดเคลื่อนของวิธีการใดๆ ก็ตาม จะทำได้โดยการเปรียบเทียบกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีการนั้นๆ กับผลเฉลยแม่นตรง ดังสมการ

$$e = u - \tilde{u} \tag{4.1}$$

โดยที่ $e$ คือ ค่าความคลาดเคลื่อน

$u$ คือ ผลเฉลยแม่นตรง

$\tilde{u}$ คือ ผลเฉลยที่ได้จากการวิเคราะห์

แต่ในกระบวนการปรับอีลีเมนต์นั้นเราไม่ทราบถึงผลเฉลยแม่นตรงของปัญหา ทำให้ไม่สามารถหาค่าความคลาดเคลื่อนของปัญหานั้นได้ตามสมการที่ (4.1) จำเป็นต้องประมาณจากการเปรียบเทียบกับผลเฉลยอื่นที่มีค่าความถูกต้องมากกว่าผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ หรือเปรียบเทียบกับผลเฉลยของระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์หลังจากทำการปรับอีลีเมนต์แล้วใช้ช่วงผลต่างของผลเฉลยต่อกัน สำหรับค่าความคลาดเคลื่อนนี้สามารถสร้างสมการใหม่ได้ดังนี้

$$e^* = u^* - \tilde{u} \tag{4.2}$$

โดยที่ $e^*$ คือ ค่าประมาณความคลาดเคลื่อน

$u^*$ คือ ค่าผลเฉลยที่มีความถูกต้องกว่าผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

การประมาณค่าความผิดพลาดในการคำนวณ จากงานวิจัยที่ผ่านมาได้มีผู้นำเสนอหลายรูปแบบเช่น ความหนาแน่นฟลักซ์ (Raizer, A., Meunier, G., and Coulomb, J.L., 1989) พลังงาน (O'Dwyer, J., and Evans, P., 1997) เป็นต้น ในงานวิทยานิพนธ์นี้ได้นำเสนอรูปแบบใหม่ในการพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของสนามที่เกิดขึ้นว่าการเปลี่ยนแปลงของสนามบริเวณใดสูง พิจารณา ณ บริเวณนั้น เพื่อจะปรับอีลีเมนต์ให้มีขนาดเล็กลงและเพิ่มจำนวนอีลีเมนต์มากขึ้น ณ บริเวณนั้นด้วย โดยพิจารณาตามสมการ

$$\nabla_t \times \bar{\phi}_t \cdot \bar{a}_z \quad \rightarrow \quad \text{ตัวชี้วัดการเปลี่ยนแปลงของสนาม} \tag{4.3}$$

ในที่นี้ $\overline{\phi}_t = \overline{H}_t$ เนื่องจากวิทยานิพนธ์นี้พิจารณาจากสนามแม่เหล็กมาตั้งแต่ต้น และในกระบวนการหาผลเฉลยจากระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ สามารถพิจารณาเงื่อนไขนี้ได้ง่ายและไม่ซับซ้อนในการสร้างสมการใหม่ หรือต้องไปคำนวณใหม่อีก เพื่อให้ง่ายในการวิเคราะห์จึงนำเสนอรูปแบบการพิจารณาเงื่อนไขตามสมการนี้

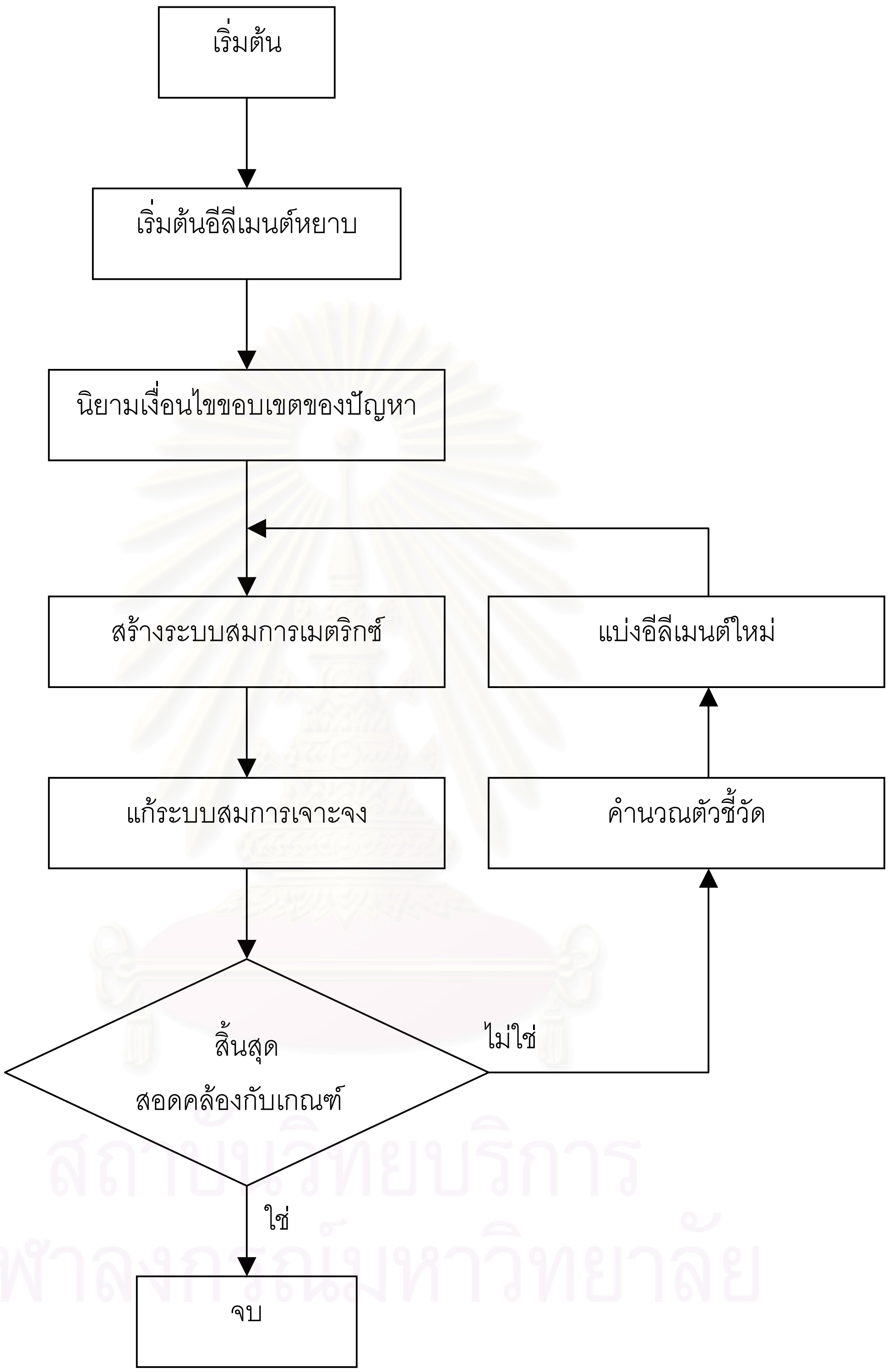
$$\nabla_t \times \overline{H}_t \cdot \overline{a}_z = \sum_{i=1}^{n} \nabla_t \times \overline{N}_i H_t \cdot \overline{a}_z \tag{4.4}$$

โดยที่ $\overline{N}_i$ คือ ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น

$n$ คือ จำนวนพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าในแต่ละอีลีเมนต์

### 4.4 กระบวนการปรับปรุงอีลีเมนต์

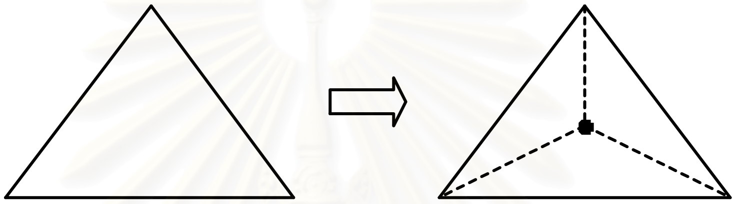
กระบวนการปรับปรุงอีลีเมนต์นั้น ต้องทราบผลเฉลยที่ได้จากการหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ครั้งแรก (อีลีเมนต์หยาบ) ว่าค่าความผิดพลาดอยู่ในเกณฑ์ยอมรับได้หรือไม่ ถ้าไม่ ต้องปรับปรุงเพื่อแบ่งอีลีเมนต์ให้เหมาะสมกับลักษณะของสนาม ณ บริเวณนั้นแล้วส่งผลของอีลีเมนต์แบบปรับปรุงแล้ว นำไปคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ใหม่ซ้ำอีกครั้ง ถ้ายังไม่ดีก็ทำเช่นนี้ไปจนกว่าจะถึงค่าที่ยอมรับได้ รูปที่ 4.1 แสดงขั้นตอนระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์แบบปรับตัวได้




รูปที่ 4.1 อัลกอริทึมของระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์แบบปรับตัวได้

4.4.1 การสร้างสามเหลี่ยม

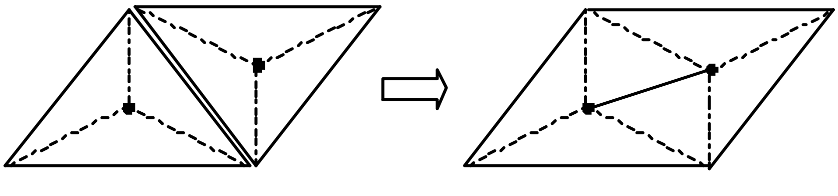
การสร้างสามเหลี่ยมในกระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัว จะถูกแบ่งก็ต่อเมื่อตัวชี้วัดมีค่าการเปลี่ยนแปลงของสนามในการคำนวณตามสมการ (4.4) เมื่อค่าที่คำนวณได้ถึงจุดเริ่มเปลี่ยน (threshold) จะแบ่งอีลีเมนต์โดยอาศัยจากอีลีเมนต์ที่มีอยู่เดิมในการปรับอีลีเมนต์ใหม่ทำให้ง่ายในกระบวนการปรับรูปแบบอีลีเมนต์ ดังรูปที่ 4.2 แสดงการแบ่งอีลีเมนต์ โดยใช้จุดเซ็น-ทรอยด์ (centroid) เป็นตัวแบ่งทำให้ได้อีลีเมนต์เปลี่ยนเป็น 3 อีลีเมนต์แทนตำแหน่ง 1 อีลีเมนต์ เนื่องจากในการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์นั้น จำเป็นต้องหาจุดเซ็นทรอยด์มาเพื่อการคำนวณอยู่แล้ว จึงเสนอการนำค่าที่มีอยู่มาใช้ให้เกิดประโยชน์ ไม่จำเป็นต้องไปคำนวณใหม่



รูปที่ 4.2 แบบรูปการแบ่งอีลีเมนต์

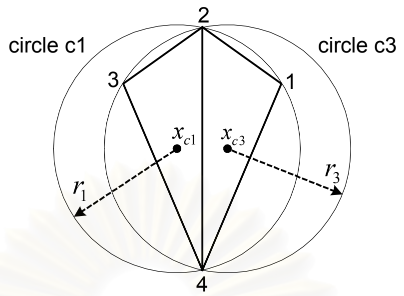
4.4.2 การตรวจสอบคุณสมบัติอีลีเมนต์

คุณสมบัติทางกายภาพของอีลีเมนต์สามเหลี่ยม มีเงื่อนไขที่ควรทราบว่ามีคุณ-สมบัติอย่างไร จึงจะเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยมพอเพียงที่จะนำไปคำนวณได้ ดังนั้นหลักการสร้างสามเหลี่ยมของเดอลอเน (Delaunay triangulation) จึงมีประโยชน์ในการนำมาประยุกต์ใช้ในการสร้างอีลีเมนต์สามเหลี่ยมในกระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ ซึ่งจากการแบ่งอีลีเมนต์สามเหลี่ยมในวิธีข้างต้นนั้นได้เกิดมีมุมแหลมขึ้น ทำให้การคำนวณอาจเกิดปัญหาขึ้นได้ และผลเฉลยที่ได้มีค่าผิดพลาดขึ้น ดังนั้นจึงเสนอการกลับเส้นทแยงมุมสามเหลี่ยม (swap diagonal) ในสามเหลี่ยม 2 รูปติดกัน เพื่อทำให้มุมที่ได้มีขนาดไม่เล็กเกินไปตามคุณสมบัติของสามเหลี่ยมเดอลอเน ดังรูปที่ 4.3

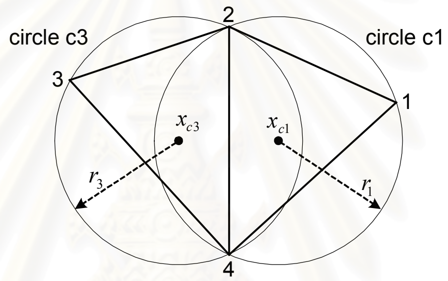


รูปที่ 4.3 การกลับเส้นทแยงมุมสามเหลี่ยม

คุณสมบัติของสามเหลี่ยมเดอลอเน พิจารณาจากการสร้างวงกลมขึ้นมาครอบคลุมสามเหลี่ยม เพื่อให้ทราบถึงรัศมีของวงกลมที่สร้างขึ้นมาไว้อ้างอิงกับขนาดมุมของอีลีเมนต์สามเหลี่ยมกำลังพิจารณา แสดงได้ดังรูปที่ 4.4 และ 4.5 ดังนั้นสามารถสรุปได้ 3 กรณี




รูปที่ 4.4 ไม่เป็นสามเหลี่ยมเดอลอเน




รูปที่ 4.5 สามเหลี่ยมเดอลอเน

โดยที่ $x_{c1}$ คือ จุดศูนย์กลางแนวแกน $x$ ของวงกลม $c_1$

$x_{c3}$ คือ จุดศูนย์กลางแนวแกน $x$ ของวงกลม $c_3$

- กรณี $x_{c1} = x_{c3}$ คือวงกลม $c_1$ และ $c_3$ ซ้อนทับกัน จุดยอดของสามเหลี่ยมทุกจุด ผ่านเส้นรอบวงทั้ง 2 วง ฉะนั้นแสดงว่าสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเป็นสามเหลี่ยมเดอลอเน

- กรณี $x_{c1} > x_{c3}$ คือวงกลม $c_1$ และ $c_3$ ไม่ซ้อนทับกัน จุดยอดของสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปอยู่ในเส้นรอบวงทั้ง 4 จุด ฉะนั้นแสดงว่าสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปไม่เป็นสามเหลี่ยมเดอลอเน ดังในรูปที่ 4.4

- กรณี $x_{c1} < x_{c3}$ คือวงกลม $c_1$ และ $c_3$ ไม่ซ้อนทับกัน จุดยอดของสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปไม่อยู่ในเส้นรอบวงทั้ง 4 จุด ฉะนั้นแสดงว่าสามเหลี่ยมทั้ง 2 รูปเป็นสามเหลี่ยมเดอลอเน ดังในรูปที่ 4.5

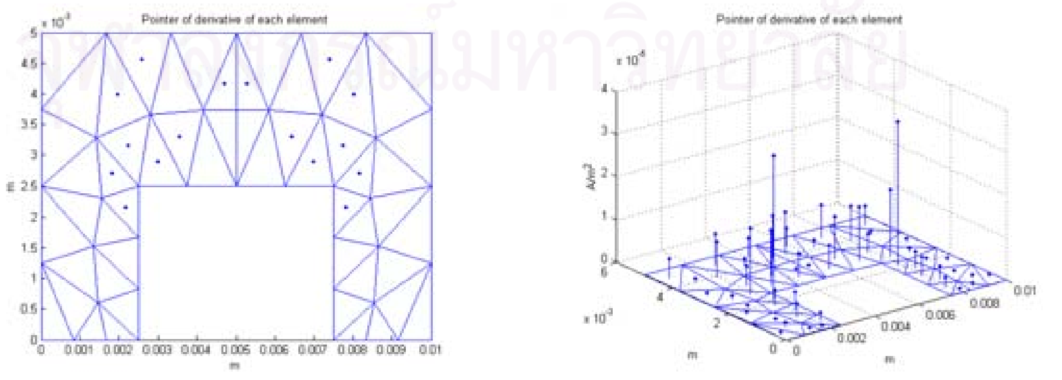
กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัว นำมาใช้ร่วมกับระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ เพื่อทำให้การวิเคราะห์หาผลเฉลยเหมาะสมกับอีลีเมนต์ที่นำมาใช้ ทำให้สามารถลดจำนวนของพารามิเตอร์ได้ และเวลาที่คำนวณมีค่าลดลงด้วย ดังจะได้แสดงในกรณีตัวอย่างทั้ง 6 ตัวอย่าง การคำนวณในกระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัว พิจารณาใช้กับฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบปกติ เนื่องจากฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่ ทำให้ผลเฉลยที่ได้มีค่าความคลาดเคลื่อนมากในการคำนวณหาจุดชี้วัด และไม่มีความแม่นยำมากพอในการคำนวณหาผลเฉลย ทำให้การคำนวณที่ได้ไม่เหมาะสมกับการหาจุดชี้วัดของสนามที่เปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วนัก

### 4.5 ผลการตรวจสอบโดยคำนวณตัวอย่าง 6 ตัวอย่าง

ในการคำนวณชุดตัวอย่างนี้ ผู้วิจัยวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ โดยใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบปกติ และปรับอีลีเมนต์ด้วยกระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ โดยคำนวณหาเลขคลื่นตัด หรือความถี่ตัดของท่อนำคลื่นในตัวอย่างแต่ละตัวอย่าง และแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณระหว่างการใช้อีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบปกติ แบบเอกฐาน และแบบการปรับอีลีเมนต์ด้วยกระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัว โดยกรณีตัวอย่างนี้เป็นตัวอย่างชุดเดียวกับตัวอย่างในบทที่ 2 และนำผลของบทที่ 3 มาเปรียบเทียบในกราฟเดียวกัน

#### 4.5.1 ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว

โครงสร้างภาคตัดขวางตัวอย่างเดียวกับในบทที่ 2 โดยคำนวณเลขคลื่นตัดด้วยการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ ผลของค่าจุดเริ่มเปลี่ยนเป็นตัวชี้วัดในการแบ่งอีลีเมนต์ ดังรูปที่ 4.6 แสดงผลของตัวชี้วัดในแบบต่างๆ ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดแสดงในตารางที่ 4.1 เปรียบเทียบผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของโมด $TE_{10}$ และโมด $TE_{01}$ ไว้ในกราฟรูปที่ 4.7 และ 4.8 ตามลำดับ และการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้แสดงไว้ในรูปที่ 4.9

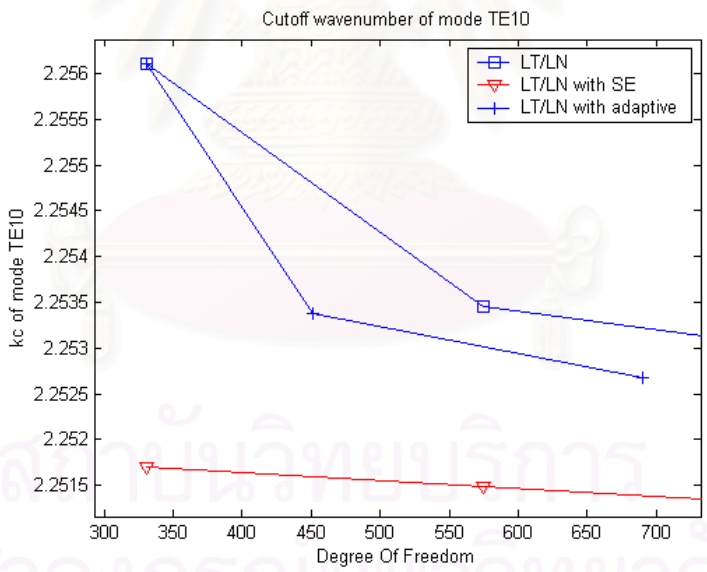



รูปที่ 4.6 ผลตัวชี้วัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวในแบบต่างๆ

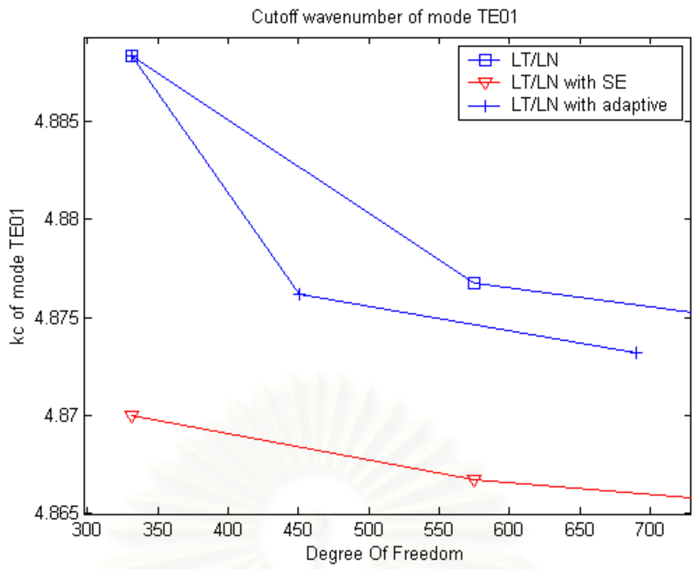
ตารางที่ 4.1 ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว
เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัว

| Mode | | $TE_{10}$ | $TE_{01}$ |
|---|---|---|---|
| Element | DOF | Adaptive | Adaptive |
| 54 | 331 | 2.25610 | 4.88836 |
| 86 | 451 | 2.25338 | 4.87620 |
| 204 | 690 | 2.25268 | 4.87319 |

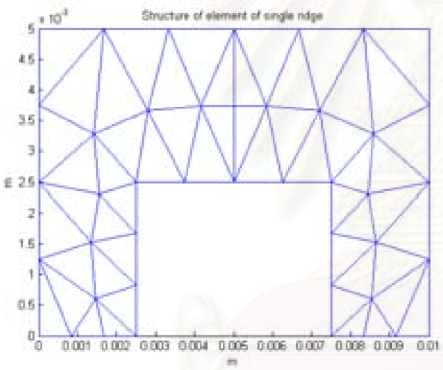
ผลการคำนวณในตารางที่ 4.1 นำมาสร้างกราฟทั้ง 2 โมด ดังในรูปที่ 4.7 และ 4.8 ปรากฏว่าเมื่อใช้การแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ สามารถทำให้เลขคลื่นตัดที่คำนวณนั้นมีค่าที่ถูกต้องกว่าการแบ่งอีลีเมนต์แบบทั่วไป แต่ยังคงไม่ดีกว่าการคำนวณด้วยฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน เนื่องจากการประมาณของฟังก์ชันแบบเอกฐาน ยังคงสอดคล้องกับลักษณะการเปลี่ยนแปลงของสนามมากกว่า



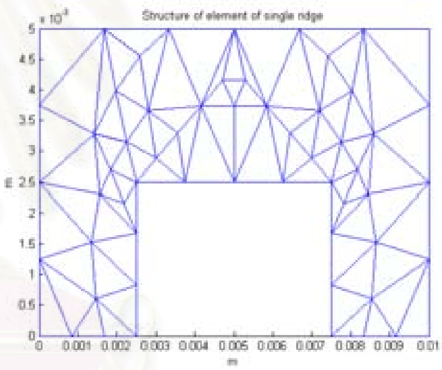

รูปที่ 4.7 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว
เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้



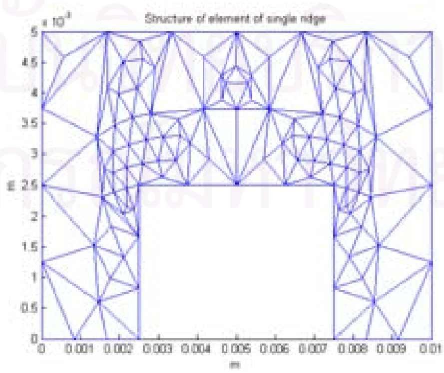

รูปที่ 4.8 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว
เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้




ก. อีลีเมนต์เริ่มต้น




ข. แบ่งอีลีเมนต์ครั้งที่ 1

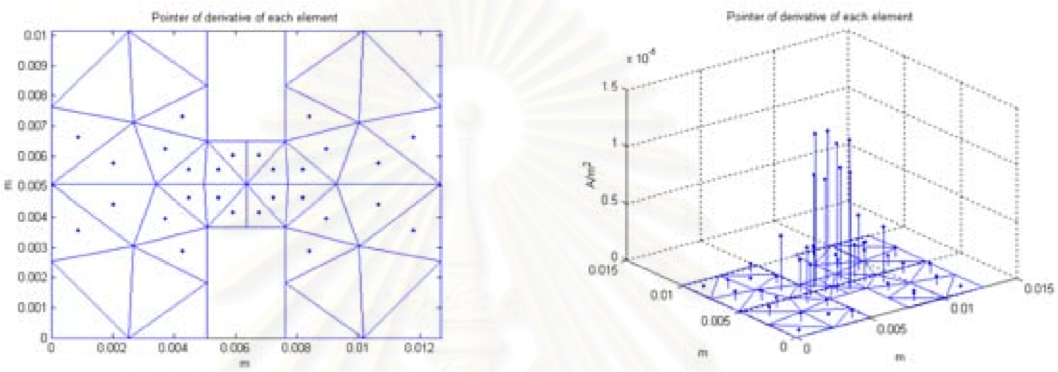



ค. แบ่งอีลีเมนต์ครั้งที่ 2

รูปที่ 4.9 การแบ่งอีลีเมนต์ด้วยกระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้
ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว

4.5.2 ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่

โครงสร้างภาคตัดขวางตัวอย่างเดียวกับในบทที่ 2 โดยคำนวณเลขคลื่นตัดด้วยการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ ผลของค่าจุดเริ่มเปลี่ยนเป็นตัวชี้วัดในการแบ่งอีลีเมนต์ ดังรูปที่ 4.10 แสดงผลของตัวชี้วัดในแบบต่างๆ ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดแสดงในตารางที่ 4.2 เปรียบเทียบผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของโมด $TE_{10}$ และโมด $TE_{01}$ ไว้ในกราฟรูปที่ 4.11 และ 4.12 ตามลำดับ และการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้แสดงไว้ในรูปที่ 4.13

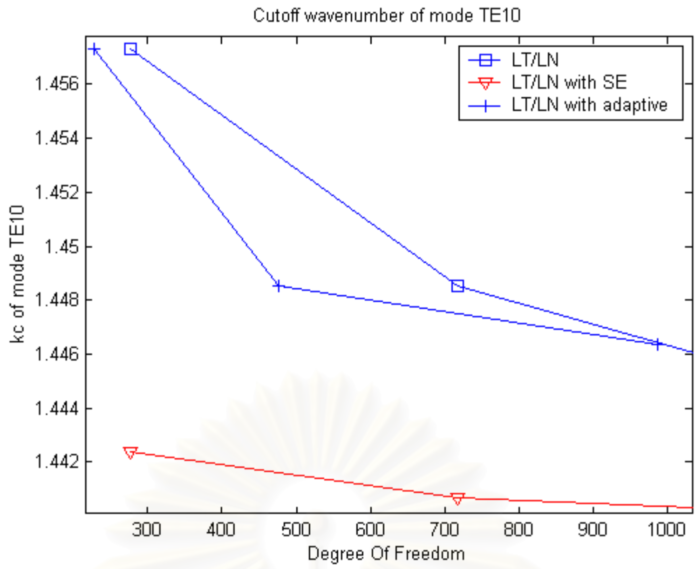



รูปที่ 4.10 ผลตัวชี้วัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ในแบบต่างๆ

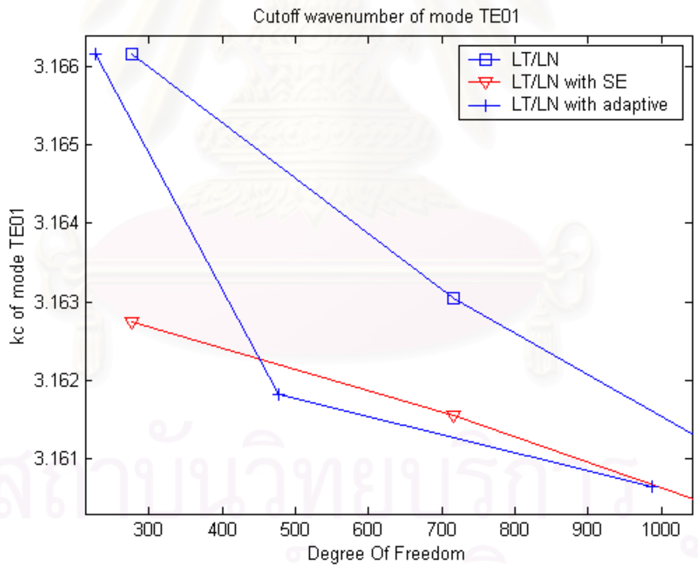
ตารางที่ 4.2 ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่
เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้

| Mode | | $TE_{10}$ | $TE_{01}$ |
|---|---|---|---|
| Element | DOF | Adaptive | Adaptive |
| 44 | 227 | 1.45729 | 3.16616 |
| 100 | 477 | 1.44854 | 3.16182 |
| 248 | 987 | 1.44635 | 3.16065 |

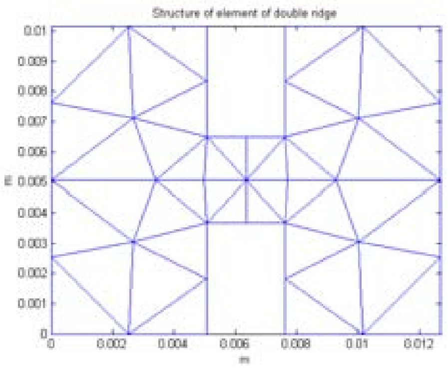
ผลการคำนวณในตารางที่ 4.2 นำมาสร้างกราฟทั้ง 2 โมด ดังในรูปที่ 4.11 และ 4.12 พบว่าเมื่อใช้การแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ สามารถทำให้เลขคลื่นตัดที่คำนวณนั้นมีค่าที่ถูกต้องกว่าการแบ่งอีลีเมนต์แบบทั่วไป และในบางโมดดีกว่าการคำนวณด้วยฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน เนื่องจากการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้สอดคล้องกับลักษณะการเปลี่ยนแปลงของสนาม



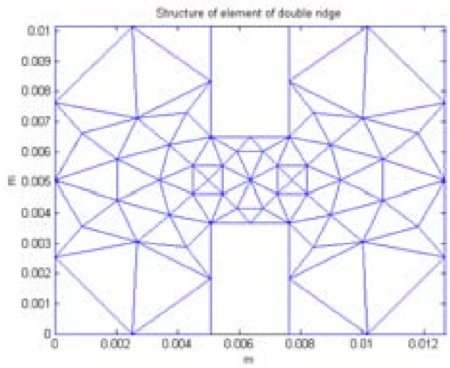

รูปที่ 4.11 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่
เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้



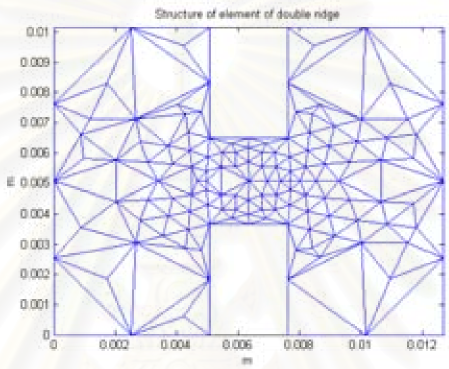

รูปที่ 4.12 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่
เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้




ก. อีลีเมนต์เริ่มต้น




ข. แบ่งอีลีเมนต์ครั้งที่ 1

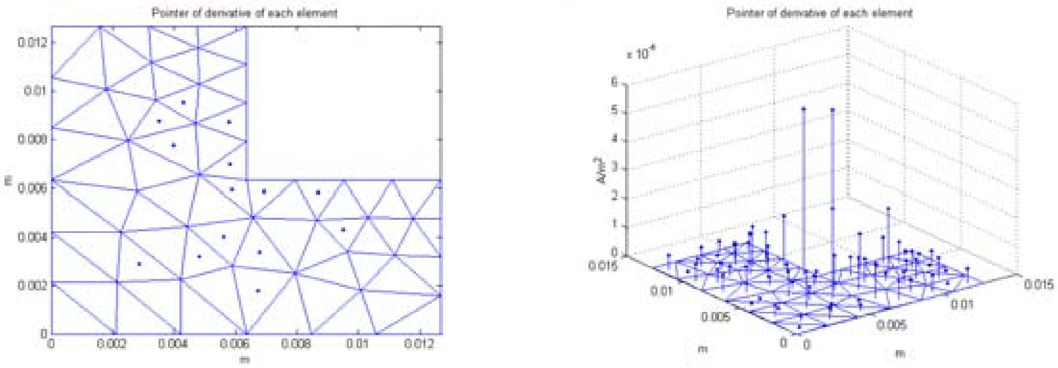



ค. แบ่งอีลีเมนต์ครั้งที่ 2

รูปที่ 4.13 การแบ่งอีลีเมนต์ด้วยกระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่

4.5.3 ท่อนำคลื่นรูปร่าง L

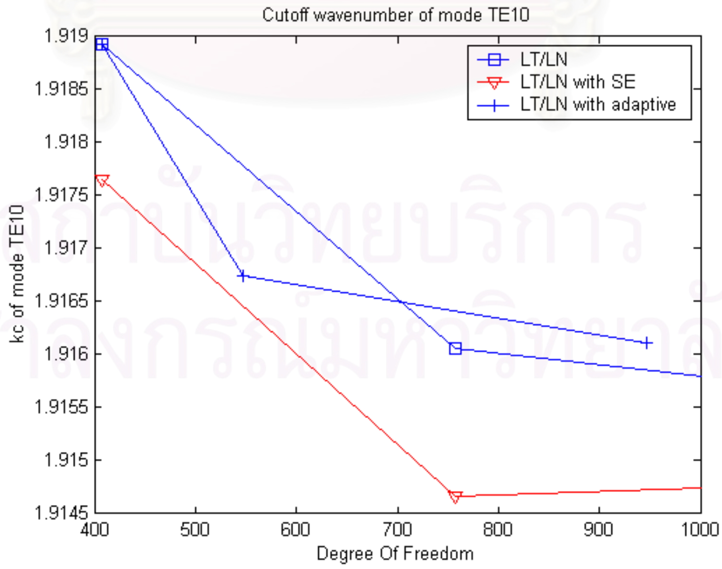
โครงสร้างภาคตัดขวางตัวอย่างเดียวกับในบทที่ 2 โดยคำนวณเลขคลื่นตัดด้วยการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ ผลของค่าจุดเริ่มเปลี่ยนเป็นตัวชี้วัดในการแบ่งอีลีเมนต์ ดังรูปที่ 4.14 แสดงผลของตัวชี้วัดในแบบต่างๆ ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดแสดงในตารางที่ 4.3 เปรียบเทียบผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของโมด $TE_{10}$ และโมด $TE_{01}$ ไว้ในกราฟรูปที่ 4.15 และ 4.16 ตามลำดับ และการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้แสดงไว้ในรูปที่ 4.17



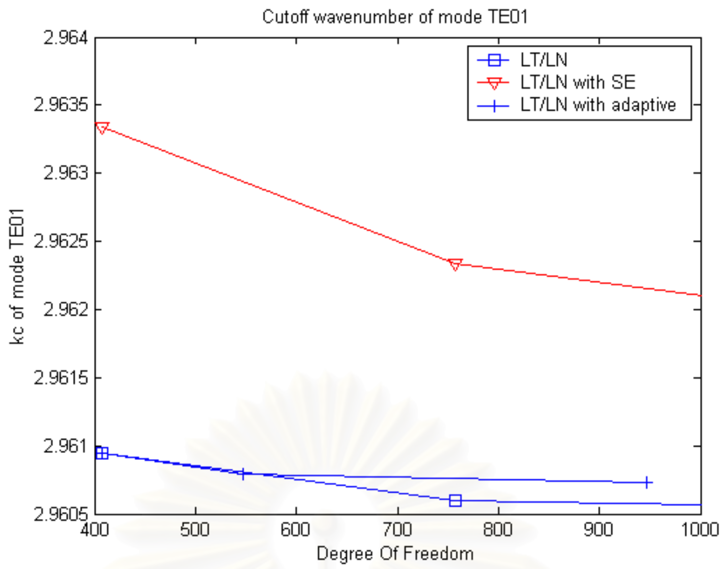

รูปที่ 4.14 ผลตัวชี้วัดของท่อนำคลื่นรูปร่าง L ในแบบต่างๆ

ตารางที่ 4.3 ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นรูปร่าง L
เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้

| Mode | | $TE_{10}$ | $TE_{01}$ |
|---|---|---|---|
| Element | DOF | Adaptive | Adaptive |
| 70 | 407 | 1.91893 | 2.96095 |
| 98 | 547 | 1.91675 | 2.96079 |
| 178 | 947 | 1.91611 | 2.96073 |

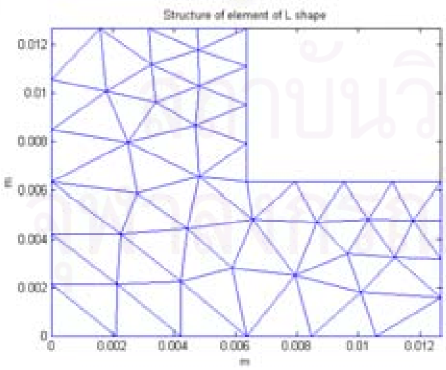



รูปที่ 4.15 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นรูปร่าง L
เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้

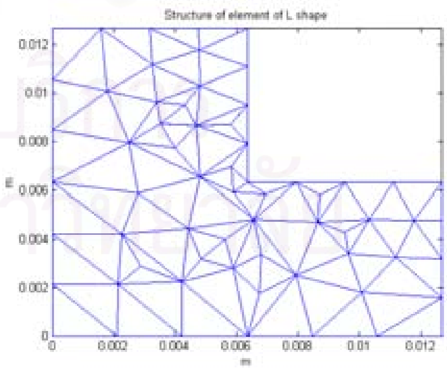



รูปที่ 4.16 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นรูปร่าง L
เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้

ผลการคำนวณในตารางที่ 4.3 นำมาสร้างกราฟแสดงดังรูปที่ 4.15 และ 4.16 พบว่าเมื่อใช้การแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ สามารถทำให้เลขคลื่นตัดที่คำนวณนั้นมีค่าที่ถูกต้องกว่าการแบ่งอีลีเมนต์แบบทั่วไป แต่ในกรณีท่อนำคลื่นรูปร่าง L นี้ผลการคำนวณในแต่ละโมดไม่สามารถสรุปได้ว่าผลคำนวณดีกว่าการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของสนามในโมด $TE_{10}$ มีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว แต่ในโมด $TE_{01}$ สนามไม่มีการเปลี่ยนแปลง อย่างไรก็ตามการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้แบ่งได้ดีกว่าแบบทั่วไป

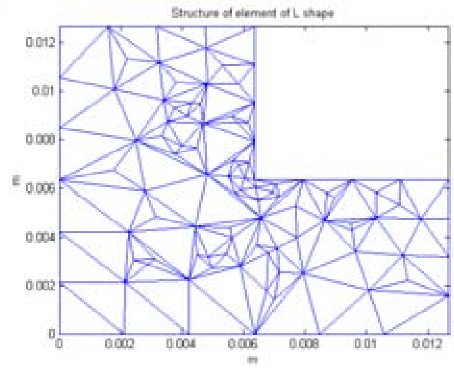



ก. อีลีเมนต์เริ่มต้น




ข. แบ่งอีลีเมนต์ครั้งที่ 1

รูปที่ 4.17 การแบ่งอีลีเมนต์ด้วยกระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้
ของท่อนำคลื่นรูปร่าง L

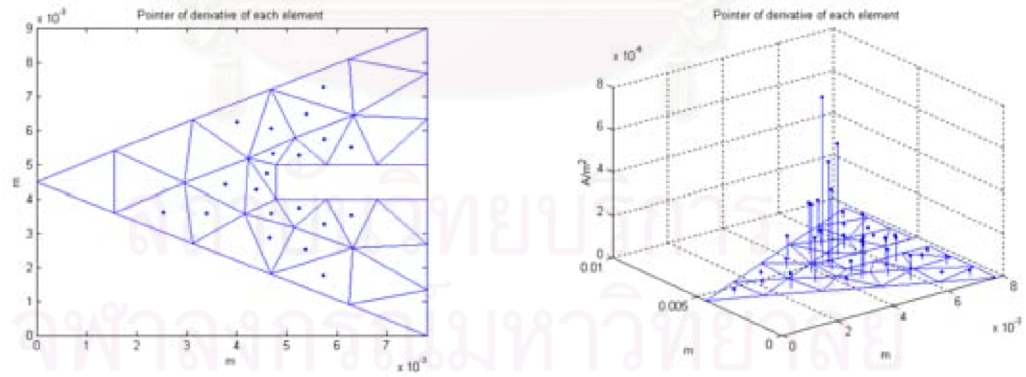



ค. แบ่งอีลีเมนต์ครั้งที่ 2

รูปที่ 4.17 (ต่อ) การแบ่งอีลีเมนต์ด้วยกระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้
ของท่อนำคลื่นรูปร่าง L

4.5.4 ท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน

โครงสร้างภาคตัดขวางตัวอย่างเดียวกับในบทที่ 2 โดยคำนวณเลขคลื่นตัดด้วยการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ ผลของค่าจุดเริ่มเปลี่ยนเป็นตัวชี้วัดในการแบ่งอีลีเมนต์ ดังรูปที่ 4.18 แสดงผลของตัวชี้วัดในแบบต่างๆ ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดแสดงในตารางที่ 4.4 เปรียบเทียบผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของโมด $TE_{10}$ และโมด $TE_{01}$ ไว้ในกราฟรูปที่ 4.19 และ 4.20 ตามลำดับ และการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้แสดงไว้ในรูปที่ 4.21

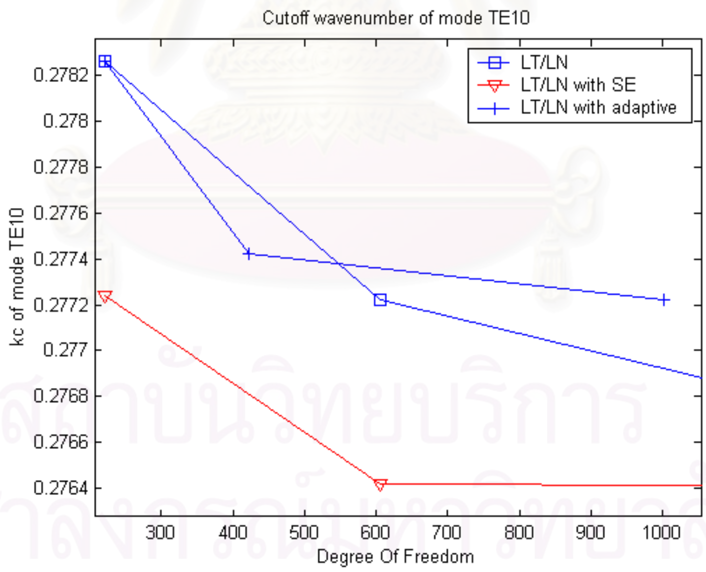



รูปที่ 4.18 ผลตัวชี้วัดของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสันในแบบต่างๆ

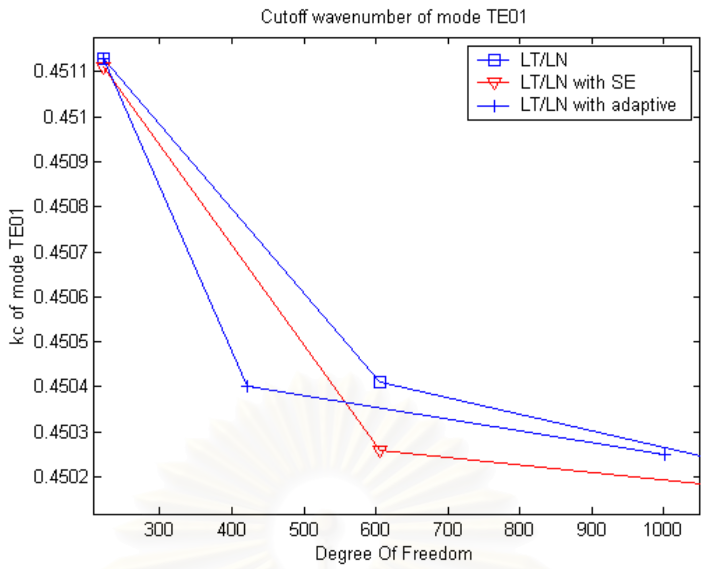
ตารางที่ 4.4 ผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้

| Mode | | $TE_{10}$ | $TE_{01}$ |
|---|---|---|---|
| Element | DOF | Adaptive | Adaptive |
| 35 | 222 | 0.27826 | 0.45113 |
| 75 | 422 | 0.27742 | 0.45040 |
| 191 | 1002 | 0.27722 | 0.45025 |

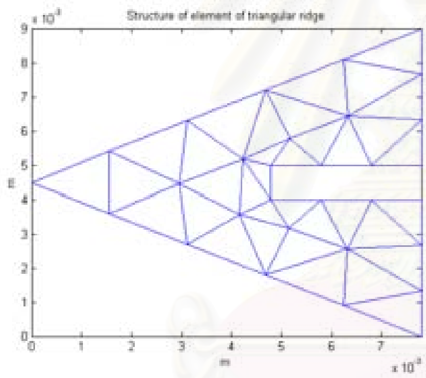
ผลการคำนวณในตารางที่ 4.4 นำมาสร้างกราฟทั้ง 2 โมด ดังในรูปที่ 4.19 และ 4.20 พบว่าคล้ายคลึงกับกรณีตัวอย่างข้างต้นเช่น ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยว และท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ คือเมื่อใช้การแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ สามารถทำให้เลขคลื่นตัดที่คำนวณนั้นมีค่าที่ถูกต้องกว่าการแบ่งอีลีเมนต์แบบทั่วไป แต่เมื่อแบ่งมากขึ้นจะทำให้ผลการคำนวณนั้นแย่กว่า เนื่องจากว่าในกระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้นี้รูปแบบของการแบ่งยังไม่ดีพอนัก เพราะใช้รูปแบบการแบ่งเพียงรูปแบบเดียว



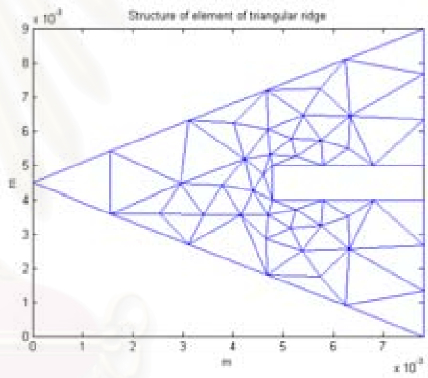

รูปที่ 4.19 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้



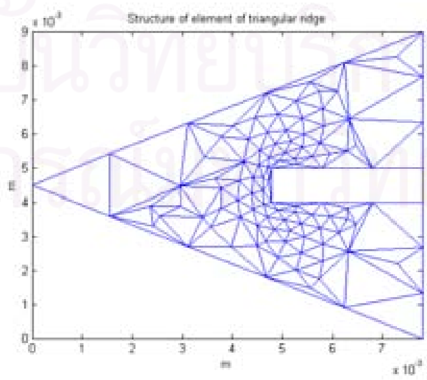

รูปที่ 4.20 เลขคลื่นตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน
เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้




ก. อีลีเมนต์เริ่มต้น




ข. แบ่งอีลีเมนต์ครั้งที่ 1

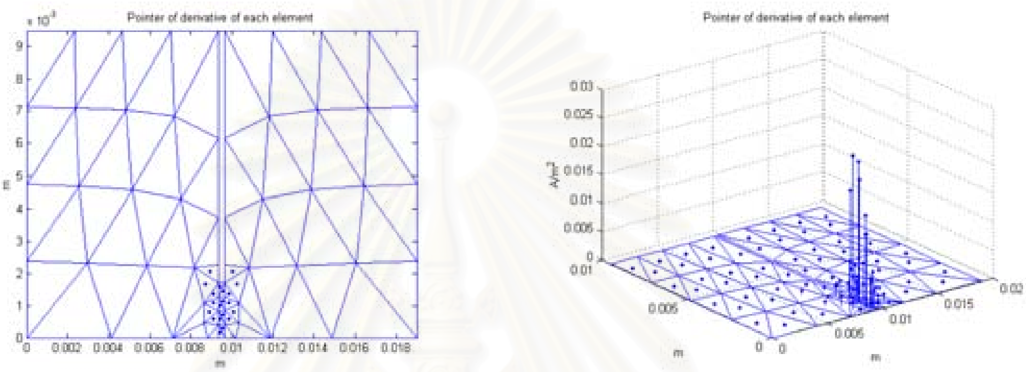



ค. แบ่งอีลีเมนต์ครั้งที่ 2

รูปที่ 4.21 การแบ่งอีลีเมนต์ด้วยกระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้
ของท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน

### 4.5.5 ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก

โครงสร้างภาคตัดขวางตัวอย่างเดียวกับในบทที่ 2 โดยคำนวณความถี่ตัดด้วยการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ ผลของค่าจุดเริ่มเปลี่ยนเป็นตัวชี้วัดในการแบ่งอีลีเมนต์ ดังรูปที่ 4.22 โดยแสดงผลของตัวชี้วัดในแบบต่างๆ ผลการคำนวณความถี่ตัดแสดงในตารางที่ 4.5 เปรียบเทียบผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของโมด $TE_{10}$ และโมด $TE_{01}$ ไว้ในกราฟรูปที่ 4.23 และ 4.24 ตามลำดับ และการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวแสดงไว้ในรูปที่ 4.25

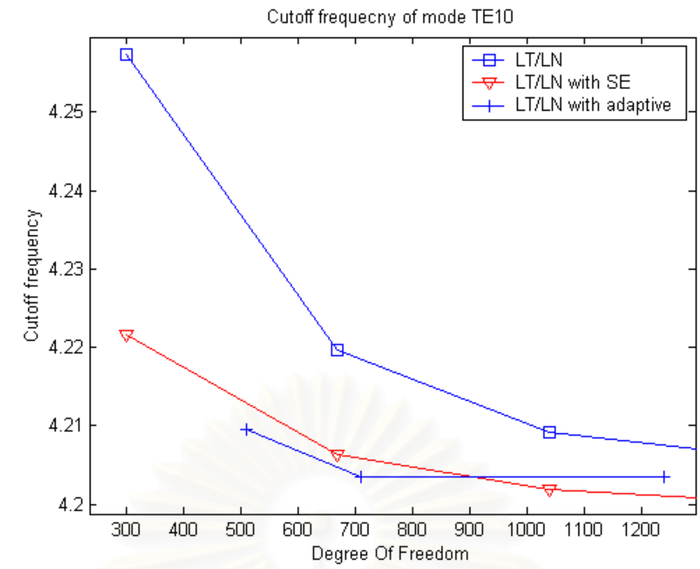



รูปที่ 4.22 ผลตัวชี้วัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริกในแบบต่างๆ

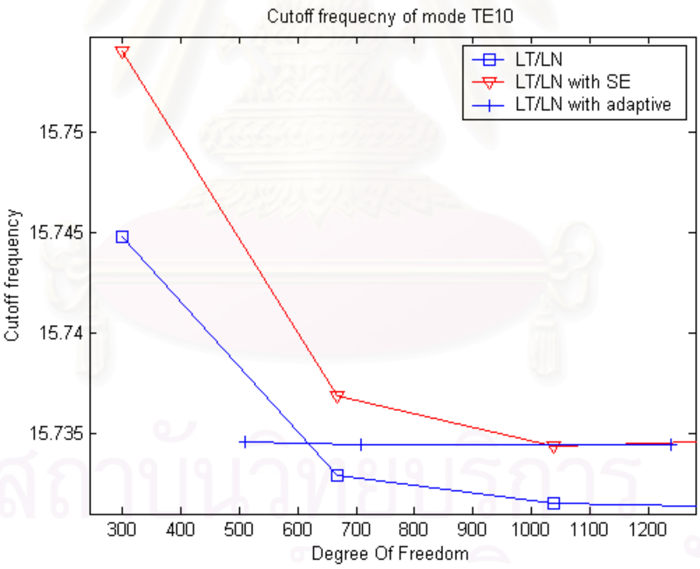
ตารางที่ 4.5 ผลการคำนวณความถี่ตัดของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัว

| Mode | | $TE_{10}$ (GHz) | $TE_{01}$ (GHz) |
|---|---|---|---|
| Element | DOF | Adaptive | Adaptive |
| 88 | 509 | 4.20957 | 15.73457 |
| 128 | 709 | 4.20355 | 15.73447 |
| 234 | 1239 | 4.20355 | 15.73447 |

ผลการคำนวณความถี่ตัดจะคล้ายคลึงกับผลของท่อนำคลื่นรูปร่าง L เนื่องจากลักษณะการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กที่บริเวณมุมสันแตกต่างกันทั้ง 2 โมด โดยผลการคำนวณความถี่ตัดในตารางที่ 4.5 สร้างเป็นกราฟได้แสดงในรูปที่ 4.23 และ 4.24 ปรากฏว่าการใช้การแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ยังคงส่งผลให้อัตราการลู่เข้าดีกว่าการแบ่งอีลีเมนต์แบบทั่วๆ ไปในการคำนวณด้วยฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น

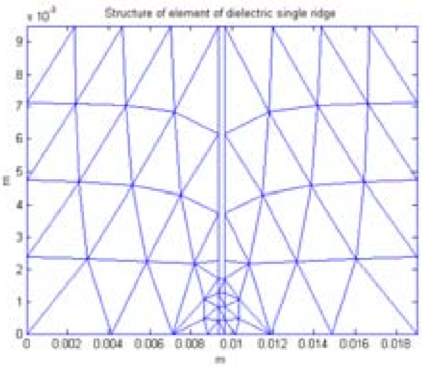



รูปที่ 4.23 ความถี่ตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัว

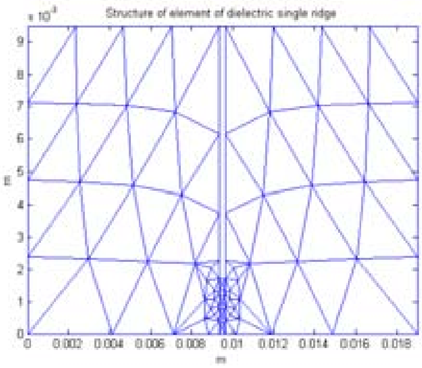




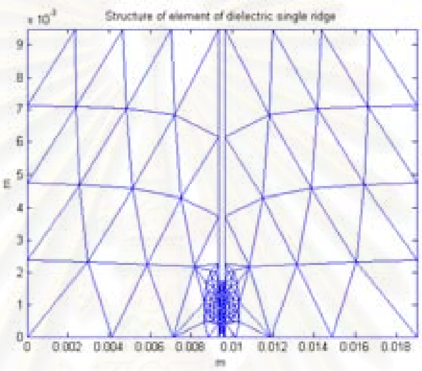

รูปที่ 4.24 ความถี่ตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัว




ก. อีลีเมนต์เริ่มต้น




ข. แบ่งอีลีเมนต์ครั้งที่ 1

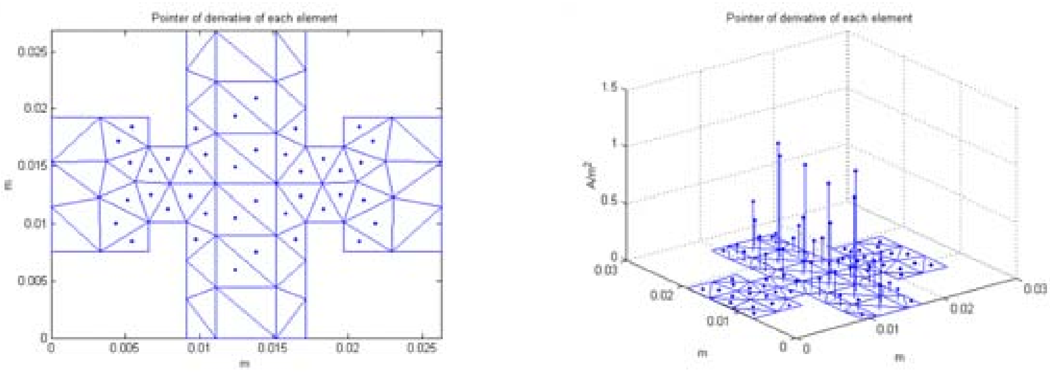



ค. แบ่งอีลีเมนต์ครั้งที่ 2

รูปที่ 4.25 การแบ่งอีลีเมนต์ด้วยกระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวของท่อนำคลื่นมีสันแบบสันเดี่ยวบรรจุด้วยไดอิเล็กทริก

### 4.5.6 ท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก

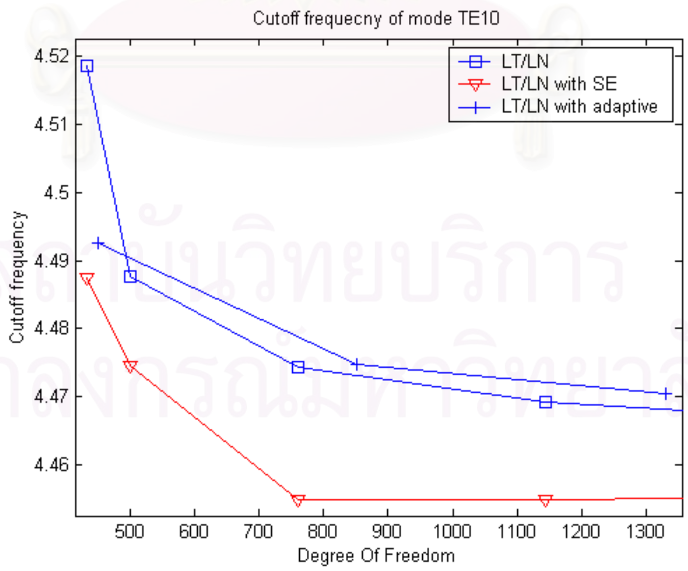
โครงสร้างภาคตัดขวางตัวอย่างเดียวกับในบทที่ 2 โดยคำนวณความถี่ตัดด้วยการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ ผลของค่าจุดเริ่มเปลี่ยนเป็นตัวชี้วัดในการแบ่งอีลีเมนต์ ดังรูปที่ 4.26 แสดงผลของตัวชี้วัดในแบบต่างๆ ผลการคำนวณความถี่ตัดแสดงในตารางที่ 4.6 และเปรียบเทียบผลการคำนวณเลขคลื่นตัดของโมด $TE_{10}$ และโมด $TE_{01}$ ไว้ในกราฟรูปที่ 4.27 และ 4.28 ตามลำดับ และการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวแสดงไว้ในรูปที่ 4.29



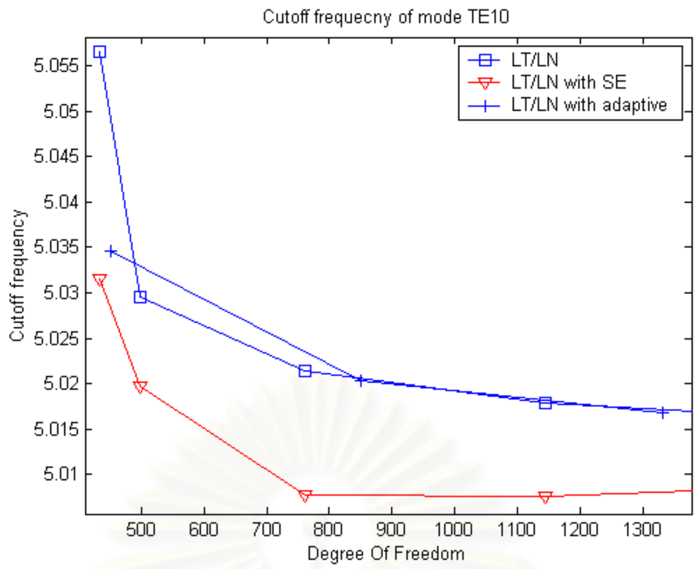

รูปที่ 4.26 ผลตัวชี้วัดของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริกในแบบต่างๆ

ตารางที่ 4.6 ผลการคำนวณความถี่ของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก
เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัว

| Mode | | $TE_{10}$ (GHz) | $TE_{01}$ (GHz) |
|---|---|---|---|
| Element | DOF | Adaptive | Adaptive |
| 74 | 451 | 4.49251 | 5.03462 |
| 154 | 851 | 4.47469 | 5.02041 |
| 250 | 1331 | 4.47043 | 5.01688 |

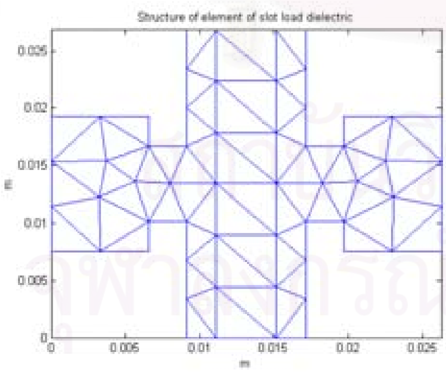



รูปที่ 4.27 ความถี่ตัดโมด $TE_{10}$ ของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก
เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัว

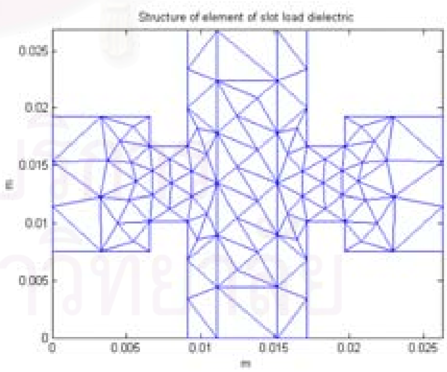



รูปที่ 4.28 ความถี่ตัดโมด $TE_{01}$ ของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก
เมื่อใช้กระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัว

ผลการคำนวณความถี่ตัดในกราฟรูปที่ 4.27 และ 4.28 พบว่าการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ส่งผลให้อัตราการลู่เข้าดีกว่าการแบ่งอีลีเมนต์แบบทั่วไป ในการคำนวณด้วยฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น แต่เมื่อแบ่งมากขึ้นจะทำให้ผลการคำนวณนั้นแย่กว่า เนื่องจากว่าในกระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้นี้รูปแบบของการแบ่งยังไม่ดีพอนัก เพราะใช้รูปแบบการแบ่งเพียงรูปแบบเดียว

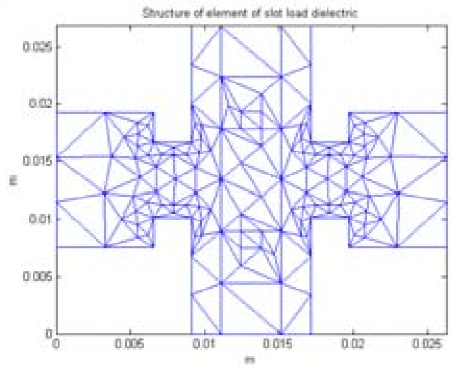



ก. อีลีเมนต์เริ่มต้น




ข. แบ่งอีลีเมนต์ครั้งที่ 1

รูปที่ 4.29 การแบ่งอีลีเมนต์ด้วยกระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัว
ของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก




ค. แบ่งอีลีเมนต์ครั้งที่ 2

รูปที่ 4.29 (ต่อ) การแบ่งอีลีเมนต์ด้วยกระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัว ของท่อนำคลื่นมีสันบรรจุด้วยแท่งไดอิเล็กทริก

## 4.6 สรุปผลการคำนวณ

ในบทนี้ได้นำเสนอการปรับปรุงระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นมีสัน 2 มิติ ด้วยกระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ โดยใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้น เนื่องจากมีความแม่นยำสูง ทำให้การคำนวณหาตัวชี้วัดมีค่าถูกต้องในการหาพื้นที่ที่มีการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าอย่างรวดเร็ว เพื่อให้ทราบถึงบริเวณตำแหน่งของอีลีเมนต์ที่จะปรับตัวอีลีเมนต์ด้วยเงื่อนไขที่ตั้งไว้ และเพื่อเป็นการตรวจสอบแนวคิดเกี่ยวกับการคำนวณหาตัวชี้วัดดังที่ได้นำเสนอไว้ว่าน่าจะเหมาะสมกับการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

จากการตรวจสอบแนวคิด ผลเฉลยที่ได้เมื่อเปรียบเทียบทั้ง 3 รูปแบบ แสดงให้เห็นว่าการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้สามารถทำให้ผลเฉลยที่คำนวณได้มีค่าถูกต้องมากกว่าการแบ่งอีลีเมนต์แบบทั่วๆ ไป ในการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบปกติ การคำนวณตัวชี้วัดก็แสดงให้เห็นว่าการคำนวณการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ควรมีการเพิ่มอีลีเมนต์เฉพาะบริเวณใดบ้าง และในบางกรณีตัวอย่างผลการคำนวณที่ได้จากการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ สามารถเพิ่มความถูกต้องได้มากกว่าการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน เช่น ท่อนำคลื่นมีสันแบบสันคู่ ท่อนำคลื่นสามเหลี่ยมมีสัน เป็นต้น แต่เมื่อปรับตัวอีลีเมนต์เป็นจำนวนครั้งมากขึ้น ทำให้ผลเฉลยที่ได้มีอัตราการลู่เข้าแย่ลง เนื่องจากกระบวนการแบ่งอีลีเมนต์ยังไม่ดีพอ ซึ่งก็คือเมื่อจำนวนครั้งการแบ่งอีลีเมนต์มากขึ้น อีลีเมนต์ที่ได้นั้นมีขนาดเล็กมากเกินไปและมีมุมแหลมมาก ทำให้ในการคำนวณอาจไม่สามารถทำได้ หรือผลเฉลยที่ได้มีค่าถูกต้องน้อยลง จึงควรหากระบวนการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวแบบใหม่ หรือผสมรูปแบบวิธีใหม่ไปเพื่อปรับเปลี่ยนข้อเสียของวิธีนี้

# บทที่ 5

# สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

## 5.1 สรุปผลการวิจัย

งานวิทยานิพนธ์นี้ได้นำเสนอการปรับปรุงระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในการวิเคราะห์ท่อนำคลื่นมีสัน 2 มิติ โดยเสนอการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบแบบเอกฐาน 2 ฟังก์ชัน คือ ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน และฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอก-ฐาน เพื่อประมาณลักษณะการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นบริเวณมุมสัน รวมทั้งเสนอการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้นำมาคำนวณด้วยฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบปกติ ซึ่งในการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ มิได้คำนึงถึงผลกระทบของค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นในท่อนำคลื่น ซึ่งลักษณะของท่อนำคลื่นที่นำมาพิจารณานั้นส่วนใหญ่แล้วเป็นรูปแบบที่มีการหักมุมของโครงสร้างของท่อนำคลื่น ทำให้ผลเฉลยที่ได้นั้นมีค่าผิดพลาดเมื่อคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ผู้วิจัยจึงเสนอการนำฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบแบบเอกฐาน เพื่อนำมาประมาณค่าของสนาม ณ บริเวณมุมสัน ทำให้ได้ผลเฉลยที่ดีขึ้น และการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ เพื่อแบ่งอีลีเมนต์ให้มีความสอดคล้องกับการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า นั่นคือบริเวณใดมีอัตราการเปลี่ยนแปลงสูงก็จะแบ่งอีลีเมนต์เป็นจำนวนมาก บริเวณใดมีอัตราการเปลี่ยนแปลงต่ำก็จะแบ่งอีลีเมนต์เป็นจำนวนน้อยหรือไม่แบ่งเลย ซึ่งจะทำให้ผลการคำนวณมีค่าที่ดียิ่งขึ้น

จากการทดลองคำนวณ ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบปกติ มีค่าความถูกต้องของผลเฉลยน้อยที่สุด เนื่องจากเป็นการประมาณฟังก์ชันรูปร่างแบบคงที่ ซึ่งจำกัดให้สนามตามขอบมีค่าคงที่ ทำให้คำตอบที่นั้นมีค่าความถูกต้องน้อยที่สุดจากทั้ง 4 ฟังก์ชัน ดังนั้นจากลักษณะของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว จึงนำฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐานมาใช้ร่วมกับแบบปกติ โดยประมาณสนามตรงบริเวณมุมสันกับแบบเอกฐานและนอกเหนือจากนั้นเป็นแบบปกติ ทำให้ผลเฉลยที่ได้มีค่าที่ถูกต้องมากยิ่งขึ้น จึงสามารถสรุปได้ว่าอีลีเมนต์ขอบแบบเอกฐานนั้นช่วยเพิ่มความละเอียดในการประมาณของฟังก์ชันรูปร่างทำให้ผลเฉลยถูกต้องมากยิ่งขึ้น แต่ผลเฉลยที่ได้นั้นยังไม่ละเอียดแม่นยำพอ เนื่องจากลักษณะการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กไฟฟ้ามีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว ดังนั้นการนำฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นมาใช้จะช่วยทำให้ผลเฉลยที่ได้มีค่าความถูกต้องมากยิ่งขึ้น โดยการคำนวณด้วยฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นนั้น ทำให้ผลเฉลยที่ได้มีค่าแม่นยำกว่าการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลี-เมนต์ขอบคงที่มาก แต่อาจจะใกล้เคียงกับการใช้ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐานใน

บางกรณี เนื่องจากในบางโครงสร้างมีความเหมาะสมกับฟังก์ชันรูปร่างแบบเอกฐาน ทำให้ผลเฉลยที่ได้มีค่าความถูกต้องใกล้เคียงกับฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบปกติ และการนำฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐานมาใช้นั้นทำให้ได้อัตราการลู่เข้าดีที่สุดจากทั้ง 4 ฟังก์ชันที่ได้คำนวณมา เนื่องจากการประมาณฟังก์ชันเหมาะสมกับลักษณะการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นในท่อนำคลื่น

การเลือกใช้ค่า $\rho$ ส่งผลให้ผลเฉลยที่ได้มีค่าการลู่เข้าของคำตอบที่เปลี่ยนไป การเลือกใช้ค่า $\rho$ เท่าไรก็ตามจะยังคงให้ผลเฉลยที่ดีกว่าการใช้ฟังก์ชันรูปร่างแบบปกติ เนื่องจากการประมาณฟังก์ชันนั้นขึ้นอยู่กับค่า $\rho$ และองค์ประกอบอีกหลายประการเช่น ลักษณะของโครงสร้างท่อนำคลื่น รูปแบบของอีลีเมนต์ และจำนวนของอีลีเมนต์ตรงบริเวณมุมสัน เป็นต้น

จากการคำนวณที่ผ่านมาได้พิจารณาถึงการเพิ่มฟังก์ชันการประมาณ แต่มิได้คำนึงถึงลักษณะรูปแบบของอีลีเมนต์ ดังนั้นงานวิทยานิพนธ์นี้จึงเสนอเพิ่มเติมการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวได้ เพื่อทำให้การแบ่งอีลีเมนต์มีประสิทธิภาพมากที่สุด และสอดคล้องกับลักษณะของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีการเปลี่ยนแปลงในท่อนำคลื่น ดังนั้นผลการคำนวณที่ได้แสดงให้เห็นว่าการแบ่งอีลีเมนต์ให้เหมาะสมกับลักษณะการเปลี่ยนแปลงของสนามยังผลทำให้อัตราการลู่เข้าที่ดีขึ้นและเสนอการหาตัวชี้วัดที่มีประสิทธิภาพ ง่ายต่อการคำนวณและให้ตำแหน่งของลักษณะการเปลี่ยนแปลงที่ถูกต้องด้วย ทำให้สามารถปรับเปลี่ยนอีลีเมนต์ได้อย่างเหมาะสม

### 5.2 ข้อเสนอแนะ

ในงานวิทยานิพนธ์นี้วิเคราะห์ปัญหาที่ก่อให้เกิดความผิดพลาดของการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ โดยแก้ไขถึงการนำฟังก์ชันรูปร่างแบบเอกฐานมาใช้และวิเคราะห์เฉพาะตัวกลางแบบไอโซทรอปิก ดังนั้นในงานวิจัยต่อไปนั้นอาจนำฟังก์ชันรูปร่างแบบเอกฐานที่มีสอดคล้องมากยิ่งขึ้นมาใช้ และสามารถวิเคราะห์ท่อนำคลื่นในตัวกลางที่เป็นแบบแอนไอโซทรอปิกได้ และการนำฟังก์ชันรูปร่างแบบกำลังสองมาใช้ หรือนำฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์แบบเส้นโค้ง (curvilinear element) มาใช้จะทำให้ฟังก์ชันการประมาณยิ่งมีอันดับที่สูงมากขึ้น ผลเฉลยที่ได้น่าจะมีความถูกต้องมากยิ่งขึ้นด้วย และในการประมาณการอินทิเกรตสามารถปรับปรุงวิธีการประมาณให้ดีขึ้นมากกว่านี้ เช่นการชักตัวอย่าง (sampling) ที่ละเอียดมากกว่านี้ในการคำนวณหรือการเปลี่ยนเทคนิคการประมาณการอินทิเกรต เป็นต้น ซึ่งถ้าการคำนวณมีค่าความถูกต้องมากๆ ยังผลให้ไม่จำเป็นต้องแบ่งอีลีเมนต์เป็นจำนวนมากๆ และอาจจะสามารถลดเวลาในการคำนวณได้ด้วย สุดท้ายการแบ่งอีลีเมนต์แบบปรับตัวนั้น ยังต้องมีการแก้ไขในรูปแบบของการปรับเปลี่ยนลักษณะของอีลีเมนต์ไม่ให้มีมุมแหลมมากเกินไป

# รายการอ้างอิง


Akin, J.E. The generation of elements with singularities. International Journal for Numerical Method in Engineering. Vol.10, (1976): 1249-1259.

Balanis, C.A. Advanced Engineering electromagnetics. John Wiley & Son, 1989.

Bladel J.V. Singular Electromagnetic Fields and Sources. IEEE PRESS, 1991.

Cendes, Z.J., Shenton, D., and Shahnasser H. Magnetic field computation using delaunay triangulation and complementary finite element method. IEEE Transactions on Magnetics. Vol.19, No.6, (November 1983): 2551-2555.

Dillon, B. M., and Webb, J. P. A comparison of formulations for the vector finite element analysis of waveguides. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. Vol.42, No.2, (February 1994): 308-316.

Gil, J.M., and Webb, J.P. A new edge element for the modeling of field singularities in transmission lines and waveguides. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. Vol.45, No.12 (December 1997): 2125-2130.

Gil, J.M., and Zapata, J. Efficient singular element for finite element analysis of quasi-TEM transmission lines and waveguides with sharp metal edges. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. Vol.42, No.1 (January 1994): 92-98

Gouri, D., and Gilbert, C. The Finite Element Method Displayed. John Wiley & Son, 1984.

Guan, J.M., and Su, C.C. Analysis of metallic waveguides with rectangular boundaries by using the finite-difference method and the simultaneous iteration with the Chebyshev acceleration. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. Vol.43, No.2 (February 1995): 374-382.

Helszajn, J. Ridge Waveguides and Passisve Microwave Components. IEE, 2000.

Helszajn, J., and Mckay, M. Voltage-current definition of impedance of double ridge waveguide using the finite element method. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. Vol.145, No.1 (February 1998): 39-44.

Hoefer, W.J.R., and Burton, M.N. Closed-Form Expressions for the Parameters of Finned and Ridged Waveguides. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. Vol.82, No.12, (December 1982): 2190-2194.

Hoole, S.R.H. Eigenvalue and eigenvector perturbation and adaptive mesh generation in the analysis of waveguides. IEEE Transactions on Magnetics. Vol.26, No.2 (March 1990): 791-794.

Hopfer, S. The design of ridged waveguides. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. Vol.3, No.5 (October 1955): 20-29.

Jin, J.M. The Finite Element Method in Electromagnetics. John Wiley & Son, 1993.

Koshiba, M., Maruyama, S., and Hirayama, K. A vector finite element method with the high order mixed-interpolation-type triangular elements for optical waveguiding problems. Journal of Lightwave Technology. Vol.12, No.3 (March 1994): 495-502.

Meixner, J. The behavior of electromagnetic fields at edges. IEEE Antennas and Propagation Magazine. Vol.20, No.4 (July 1972): 442-446.

Meyer, F.J.C., and Davidson, D.B. Adaptive mesh refinement of finite element solutions for two dimensional electromagnetic problems. IEEE Antennas and Propagation Magazine. Vol.37, No.5 (October 1996): 77-83.

Montgomery, J.P. On the complete eigenvalue solution of ridge waveguide. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. Vol.19, No.6, (June 1971): 547-555.

O'Dwyer, J., and Evans, P. Triangular element refinement in automatic adaptive mesh generation. IEEE Transactions on Magnetics. Vol.33, No.2 (March 1997): 1740-1743.

Pantic-Tanner, Z., Scott Savage, J., Tanner, D.R., and Peterson, A.F. Two-dimensional singular vector elements for finite-element analysis. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. Vol.46, No.2 (February 1998): 178-184.

Raizer, A., Meunier, G., and Coulomb, J.L. An approach for automatic adaptive mesh refinement in finite element computation of magnetic fields. IEEE Transactions on Magnetics. Vol.25, No.4 (July 1989): 2965-2967.

Sadiku, M.N.O. Numerical techniques in electromagnetics. CRC PRESS, 2000.

Sheng, L.L., Le, W.L., Tat, S.Y., and Mook, S.L. Analysis of metallic waveguides of a large class of cross sections using polynomial approximation and superquadric functions. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. Vol.49, No.6 (June 2001): 1136-1139.

Steele, C.W. Numerical Computation of Electric and Magnetic Fields. Chapman & Hall, 1997.

Swaminathan, M., Arvas, E. Sarkar, T.K., and Djordjevic, A.R. Computation of cutoff wavenumbers of TE and TM modes in waveguides of arbitrary cross sections using a surface integral formulation. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. Vol.38, No.2 (February 1990): 154-159.

Utsumi, Y. Variational analysis of ridged waveguide modes. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. Vol.33, No.2 (February 1985): 111-120.

Volakis, J.L., Chatterjee, A., and Kempel, L.C. Finite Element Method for Electromagnetics. IEEE PRESS, 1998.

# ภาคผนวก

# ภาคผนวก ก

## การพิสูจน์สมการไฟไนต์อีลีเมนต์แบบเวกเตอร์ในท่อนำคลื่น โดยใช้สนามแม่เหล็ก3 องค์ประกอบ

เริ่มต้นจากสมการแมกซ์เวลล์ (Maxwell's equation) ที่ไม่มีแหล่งกำเนิด( source free) ตัวกลางภายในแบบไอโซทรอปิก (isotropic media) และท่อนำคลื่นหน้าตัดคงที่

$$\nabla \times \overline{E} = -j\omega\mu_0\mu_r\overline{H} \tag{ก.1}$$

$$\nabla \times \overline{H} = -j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\overline{E} \tag{ก.2}$$

นำสมการ (ก.2)/ $\varepsilon_r$ แล้วนำมาเคิร์ลจะได้

$$\nabla \times \frac{1}{\varepsilon_r}\nabla \times \overline{H} = -j\omega\varepsilon_0\nabla \times \overline{E} \tag{ก.3}$$

นำสมการ (ก.1) แทนลงใน (ก.3) จะได้

$$\nabla \times \frac{1}{\varepsilon_r}\nabla \times \overline{H} = \omega^2\varepsilon_0\mu_0\mu_r\overline{H} = k_0^2\mu_r\overline{H} \tag{ก.4}$$

$$\nabla \times \frac{1}{\varepsilon_r}\nabla \times \overline{H} - k_0^2\mu_r\overline{H} = 0 \tag{ก.5}$$

โดยสนามแม่เหล็ก $\overline{H}$ ขึ้นกับ z ในรูป $e^{-\gamma z}$ และเมื่อแยกองค์ประกอบสนามแม่เหล็ก และตัวดำเนินการเดลออกเป็น 2 องค์ประกอบคือ องค์ประกอบของสนามแม่เหล็กตามขวาง และองค์ประกอบของสนามแม่เหล็กตามยาว สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\overline{H} = \overline{H_t} + H_z\overline{a}_z \tag{ก.6}$$

และตัวดำเนินการเดล (del operator) สามารถแสดงได้เป็นดังนี้

$$\nabla = \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z}\overline{a}_z \tag{ก.7}$$

นำ (ก.6) แทนลงใน (ก.5) จะได้

$$\nabla \times \varepsilon_r^{-1}\nabla \times \left(\overline{H}_t + H_z\overline{a}_z\right) - k_0^2\mu_r\left(\overline{H}_t + H_z\overline{a}_z\right) = 0 \tag{ก.8}$$

$$\nabla \times \varepsilon_r^{-1}\nabla \times \overline{H}_t + \nabla \times \varepsilon_r^{-1}\nabla \times H_z\overline{a}_z - k_0^2\mu_r\overline{H}_t - k_0^2\mu_r H_z\overline{a}_z = 0 \tag{ก.9}$$

นำ (ก.7) แทนลงใน (ก.9) จะได้

$$\nabla\times\varepsilon_r^{-1}\left(\nabla_t+\frac{\partial}{\partial z}\bar{a}_z\right)\times\overline{H}_t+\nabla\times\varepsilon_r^{-1}\left(\nabla_t+\frac{\partial}{\partial z}\bar{a}_z\right)\times H_z\bar{a}_z$$
$$-k_0^2\mu_r\overline{H}_t-k_0^2\mu_r H_z\bar{a}_z=0 \qquad (ก.10)$$

$$\nabla\times\varepsilon_r^{-1}\nabla_t\times\overline{H}_t+\nabla\times\varepsilon_r^{-1}\frac{\partial}{\partial z}\bar{a}_z\times\overline{H}_t+\nabla\times\varepsilon_r^{-1}\nabla_t\times H_z\bar{a}_z+\nabla\times\varepsilon_r^{-1}\frac{\partial}{\partial z}\bar{a}_z\times H_z\bar{a}_z$$
$$-k_0^2\mu_r\overline{H}_t-k_0^2\mu_r H_z\bar{a}_z=0 \qquad (ก.11)$$

$$\nabla\times\varepsilon_r^{-1}\nabla_t\times\overline{H}_t-\gamma\nabla\times\varepsilon_r^{-1}\left(\bar{a}_z\times\overline{H}_t\right)+\nabla\times\varepsilon_r^{-1}\nabla_t\times H_z\bar{a}_z$$
$$-k_0^2\mu_r\overline{H}_t-k_0^2\mu_r H_z\bar{a}_z=0 \qquad (ก.12)$$

$$\left(\nabla_t+\frac{\partial}{\partial z}\bar{a}_z\right)\times\varepsilon_r^{-1}\nabla_t\times\overline{H}_t-\gamma\left(\nabla_t+\frac{\partial}{\partial z}\bar{a}_z\right)\times\varepsilon_r^{-1}\left(\bar{a}_z\times\overline{H}_t\right)$$
$$+\left(\nabla_t+\frac{\partial}{\partial z}\bar{a}_z\right)\times\varepsilon_r^{-1}\nabla_t\times H_z\bar{a}_z-k_0^2\mu_r\overline{H}_t-k_0^2\mu_r H_z\bar{a}_z=0 \qquad (ก.13)$$

$$\nabla_t\times\varepsilon_r^{-1}\nabla_t\times\overline{H}_t+\frac{\partial}{\partial z}\bar{a}_z\times\varepsilon_r^{-1}\nabla_t\times\overline{H}_t-\gamma\nabla_t\times\varepsilon_r^{-1}\left(\bar{a}_z\times\overline{H}_t\right)-\gamma\frac{\partial}{\partial z}\bar{a}_z\times\varepsilon_r^{-1}\left(\bar{a}_z\times\overline{H}_t\right)$$
$$+\nabla_t\times\varepsilon_r^{-1}\nabla_t\times H_z\bar{a}_z+\frac{\partial}{\partial z}\bar{a}_z\times\varepsilon_r^{-1}\nabla_t\times H_z\bar{a}_z-k_0^2\mu_r\overline{H}_t-k_0^2\mu_r H_z\bar{a}_z=0 \qquad (ก.14)$$

จากเอกลักษณ์เวกเตอร์ (vector identity)

$$\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)=\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)\bar{b}-\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)\bar{c} \qquad (ก.15)$$

นำมาใช้ในสมการ (ก.14) โดยแยกพิจารณาทีละเทอม

- $\gamma\nabla_t\times\varepsilon_r^{-1}\bar{a}_z\times\overline{H}_t=\left(\gamma\nabla_t\cdot\overline{H}_t\varepsilon_r^{-1}\right)\bar{a}_z=\left(\gamma\nabla_t\cdot\varepsilon_r^{-1}\overline{H}_t\right)\bar{a}_z$ (ก.16)
- $\gamma\frac{\partial}{\partial z}\bar{a}_z\times\varepsilon_r^{-1}\bar{a}_z\times\overline{H}_t=\left(-\gamma\frac{\partial}{\partial z}\bar{a}_z\cdot\varepsilon_r^{-1}\bar{a}_z\right)\overline{H}_t=\gamma^2\varepsilon_r^{-1}\overline{H}_t$ (ก.17)
- $\nabla_t\times\varepsilon_r^{-1}\nabla_t\times H_z\bar{a}_z=-\nabla_t\cdot\varepsilon_r^{-1}\nabla_t H_z\ \bar{a}_z$ (ก.18)
- $\frac{\partial}{\partial z}\bar{a}_z\times\varepsilon_r^{-1}\nabla_t\times H_z\bar{a}_z=\varepsilon_r^{-1}\nabla_t\left(\frac{\partial}{\partial z}\bar{a}_z\cdot H_z\bar{a}_z\right)=-\gamma\varepsilon_r^{-1}\nabla_t H_z$ (ก.19)

นำสมการ (ก.16-19) แทนลงไปในสมการ (ก.14) จะได้

$$\nabla \times \varepsilon_r^{-1} \nabla_t \times \overline{H}_t - \gamma \nabla_t \cdot \varepsilon_r^{-1} \overline{H}_t a_z - \gamma^2 \varepsilon_r^{-1} \overline{H}_t - \nabla_t \cdot \varepsilon_r^{-1} \nabla_t H_z a_z - \gamma \varepsilon_r^{-1} \nabla_t H_z$$
$$- k_0^2 \mu_r \overline{H}_t - k_0^2 \mu_r H_z \overline{a}_z = 0 \qquad \text{(ก.20)}$$

ดังนั้นเมื่อแยกสนามแม่เหล็ก 2 องค์ประกอบจะได้สนามแม่เหล็กองค์ประกอบตามขวางและตามยาว จะได้ดังสมการ

$$\nabla_t \times \varepsilon_r^{-1} \nabla_t \times \overline{H}_t - \gamma \varepsilon_r^{-1} \nabla_t H_z - (k_0^2 \mu_r + \gamma \varepsilon_r^{-1}) \overline{H}_t = 0 \qquad \text{(ก.21)}$$

$$\nabla_t \cdot \varepsilon_r^{-1} \nabla_t H_z + \gamma \nabla_t \cdot \varepsilon_r^{-1} \overline{H}_t + k_0^2 \mu_r H_z = 0 \qquad \text{(ก.22)}$$

- พิจารณาใช้ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง อ้างอิงจากสมการ (2.15) และ (2.16)

$$\int_\Omega \left[ \overline{w}_t \cdot \nabla_t \times \varepsilon_r^{-1} \nabla_t \times \overline{H}_t - \overline{w}_t \cdot \gamma \varepsilon_r^{-1} \nabla_t H_z - \overline{w}_t \cdot \left( k_0^2 \mu_r + \gamma^2 \varepsilon_r^{-1} \right) \overline{H}_t \right] d\Omega = 0 \qquad \text{(ก.23)}$$

$$\int_\Omega \left[ w_z \nabla_t \cdot \varepsilon_r^{-1} \nabla_t H_z + w_z \gamma \nabla_t \cdot \varepsilon_r^{-1} \overline{H}_t + w_z k_0^2 \mu_r H_z \right] d\Omega = 0 \qquad \text{(ก.24)}$$

จากเอกลักษณ์เวกเตอร์ (vector identity)

$$\nabla \cdot \left( \overline{a} \times \overline{b} \right) = \overline{b} \cdot \left( \nabla \times \overline{a} \right) - \overline{a} \cdot \left( \nabla \times \overline{b} \right) \qquad \text{(ก.25)}$$

$$\nabla \cdot \left( c\overline{b} \right) = c \left( \nabla \cdot \overline{b} \right) + \overline{b} \cdot \nabla c \qquad \text{(ก.26)}$$

จากสมการ (ก.23) และ (ก.24) ใช้เอกลักษณ์เวกเตอร์กรีนอันดับหนึ่ง (vector first green identity) เพื่อลดปัญหาในการวิเคราะห์อนุพันธ์อันดับสองให้เหลืออันดับหนึ่ง พิจารณาทีละชุดคือ

$$\int_\Omega \left( \overline{w}_t \cdot \nabla_t \times \varepsilon_r^{-1} \nabla_t \times \overline{H}_t \right) d\Omega = \int_\Omega \Big[ \left( \nabla_t \times \overline{w}_t \right) \cdot \varepsilon_r^{-1} \left( \nabla_t \times \overline{H}_t \right)$$
$$- \nabla_t \cdot \left( \overline{w}_t \times \varepsilon_r^{-1} \nabla_t \times \overline{H}_t \right) \Big] d\Omega \qquad \text{(ก.27)}$$

$$\int_\Omega \left( w_z \nabla_t \cdot \varepsilon_r^{-1} \nabla_t H_z \right) d\Omega = \int_\Omega \left[ \nabla_t \cdot w_z \varepsilon_r^{-1} \nabla_t H_z - \varepsilon_r^{-1} \nabla_t H_z \cdot \nabla_t w_z \right] d\Omega \qquad \text{(ก.28)}$$

$$\int_\Omega \left( w_z \gamma \nabla_t \cdot \varepsilon_r^{-1} \overline{H}_t \right) d\Omega = \int_\Omega \left[ \nabla_t \cdot w_z \gamma \varepsilon_r^{-1} \overline{H}_t - \gamma \varepsilon_r^{-1} \overline{H}_t \cdot \nabla_t w_z \right] d\Omega \qquad \text{(ก.29)}$$

และจากทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์ จะได้

$$\int_\Omega \nabla_t \cdot \left( \overline{w}_t \times \varepsilon_r^{-1} \nabla_t \times \overline{H}_t \right) d\Omega = \int_C \left( \overline{w}_t \times \varepsilon_r^{-1} \nabla_t \times \overline{H}_t \right) \cdot \overline{n} \, dl$$
$$= \int_C \left( \overline{n} \times \overline{w}_t \right) \cdot \left( \varepsilon_r^{-1} \nabla_t \times \overline{H}_t \right) dl \qquad \text{(ก.30)}$$

$$\int_\Omega \left( \nabla_t \cdot w_z \varepsilon_r^{-1} \nabla_t H_z \right) d\Omega = \int_C \left( w_z \varepsilon_r^{-1} \nabla_t H_z \cdot \overline{n} \right) d\Omega \qquad \text{(ก.31)}$$

$$\int_{\Omega}\left(\nabla_t \cdot w_z \gamma \varepsilon_r^{-1} \overline{H}_t\right) d\Omega = \int_{C}\left(w_z \gamma \varepsilon_r^{-1} \overline{H}_t \cdot \overline{n}\right) d\Omega \quad (ก.32)$$

นำสมการ (ก.27)-(ก.32) แทนลงในสมการ (ก.23) และ (ก.24) จะได้

$$\int_{\Omega}\left[\left(\nabla \times \overline{w}_t\right) \cdot \varepsilon_r^{-1}\left(\nabla_t \times \overline{H}_t\right) - \left(k_0^2 \mu_r + \gamma^2 \varepsilon_r^{-1}\right)\overline{w}_t \cdot \overline{H}_t - \gamma \varepsilon_r^{-1} \overline{w}_t \cdot \nabla_t H_z\right] d\Omega$$
$$- \int_{C}\left(\overline{n} \times \overline{w}_t\right) \cdot \left(\varepsilon_r^{-1} \nabla_t \times \overline{H}_t\right) dl = 0 \quad (ก.33)$$

$$\int_{\Omega}\left[\nabla_t w_z \cdot \varepsilon_r^{-1} \nabla_t \overline{H}_z + \gamma \nabla_t w_z \cdot \varepsilon_r^{-1} \overline{H}_t - k_0^2 \mu_r w_z H_z\right] d\Omega$$
$$- \int_{C}\left(w_z \varepsilon_r^{-1} \nabla_t H_z \cdot \overline{n}\right) dl - \int_{c}\left(\gamma w_z \varepsilon_r^{-1} \overline{H}_t \cdot \overline{n}\right) dl = 0 \quad (ก.34)$$

พิจารณาเงื่อนไขขอบเขตใน 3 กรณี

- ผนังตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ (perfect electric conductor : PEC)
- ผนังตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์ (perfect magnetic conductor : PMC)
- ขอบเขตผิว (surface boundary)

พิจารณาสมการ (ก.30)

- ในกรณี PEC เนื่องจาก $E_z = 0$ ซึ่งแปรผันตามกับ $\varepsilon_r^{-1} \nabla_t \times \overline{H}_t$ เพราะฉะนั้นจึงสอดคล้องกับเงื่อนไข PEC
- ในกรณี PMC บังคับให้ $\overline{n} \times \overline{w}_t = 0$ บนผนังตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์
- ในกรณี ขอบเขตผิว $\overline{n} \times \overline{w}_{t1} = \overline{n} \times \overline{w}_{t2}$

พิจารณาสมการ (ก.31) และ (ก.32)

- ในกรณี PEC จัดรูปสมการจาก

$$\nabla \times \overline{H} = j\omega\varepsilon \overline{E} \quad (ก.35)$$

$$\left(\nabla_t + \frac{\partial}{\partial z}\overline{a}_z\right) \times \left(\overline{H}_t + H_z \overline{a}_z\right) = j\omega\varepsilon\left(\overline{E}_t + E_z \overline{a}_z\right) \quad (ก.36)$$

พิจารณาเฉพาะสนามตามขวาง

$$\nabla_t \times H_z \overline{a}_z + \frac{\partial}{\partial z}\overline{a}_z \times \overline{H}_t = j\omega\varepsilon \overline{E}_t \quad (ก.37)$$

นำ $\overline{a}_z$ ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (cross product) ตลอดสมการ

$$\bar{a}_z \times \left(\nabla_t \times H_z \bar{a}_z\right) + \bar{a}_z \times \left(\frac{\partial}{\partial z} \bar{a}_z \times \overline{H}_t\right) = \bar{a}_z \times j\omega\varepsilon \overline{E}_t \qquad \text{(ก.38)}$$

$$\nabla_t H_z + \gamma \overline{H}_t = j\omega\varepsilon \left(\bar{a}_z \times \overline{E}_t\right) \qquad \text{(ก.39)}$$

นำ $\bar{n}$ ผลคูณเชิงสเกลาร์ (dot product) ตลอดสมการ

$$\bar{n} \cdot \left(\nabla_t H_z + \gamma \overline{H}_t\right) = \bar{n} \cdot j\omega\varepsilon \left(\bar{a}_z \times \overline{E}_t\right) \qquad \text{(ก.40)}$$

$$\left(\nabla_t H_z + \gamma \overline{H}_t\right) \cdot \bar{n} = j\omega\varepsilon \left(\bar{n} \times \overline{E}_t\right) \cdot \bar{a}_z \qquad \text{(ก.41)}$$

เพราะฉะนั้นสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต $\bar{n} \times \overline{E} = 0$

- ในกรณี PMC บังคับให้ $w_z = 0$ บนผนังตัวนำแม่เหล็กสมบูรณ์

เมื่อพิจารณาเงื่อนไขขอบเขตดังกล่าว จะสามารถลดสมการได้ดังนี้

$$\int_\Omega \left[\left(\nabla \times \overline{w}_t\right) \cdot \varepsilon_r^{-1} \left(\nabla_t \times \overline{H}_t\right) - \left(k_0^2 \mu_r + \gamma^2 \varepsilon_r^{-1}\right) \overline{w}_t \cdot \overline{H}_t - \gamma \varepsilon_r^{-1} \overline{w}_t \cdot \nabla_t H_z\right] d\Omega = 0 \qquad \text{(ก.42)}$$

$$\int_\Omega \left[\nabla_t w_z \cdot \varepsilon_r^{-1} \nabla_t \overline{H}_z + \gamma \nabla_t w_z \cdot \varepsilon_r^{-1} \overline{H}_t - k_0^2 \mu_r w_z H_z\right] d\Omega = 0 \qquad \text{(ก.43)}$$

# ภาคผนวก ข

## การพิสูจน์สมการอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบปกติ

จากสมการเชิงเส้นของโนด สามารถหาฟังก์ชันรูปร่างของโนด โดยพิจารณาแต่ละอีลีเมนต์ ดังนี้

$$V^e(x,y) = a + bx + cy \qquad (ข.1)$$

$$\begin{bmatrix} V_1^e \\ V_2^e \\ V_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \qquad (ข.2)$$

หาพารามิเตอร์ $a$ $b$ และ $c$ จะได้

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1^e \\ V_2^e \\ V_3^e \end{bmatrix} \qquad (ข.3)$$

นำ $a$ $b$ และ $c$ ในสมการ (ข.3) แทนลงในสมการ (ข.1)

$$V^e = \sum_{i=1}^{3} L_i(x,y) V_i^e \qquad (ข.4)$$

โดยที่

$$L_i = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2A_e}(a_i + b_i x + c_i y) \qquad (ข.5)$$

$$i = 1,2,3$$

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j \qquad (ข.6)$$

$$b_i = y_j - y_k \qquad (ข.7)$$

$$c_i = x_k - x_j \qquad (ข.8)$$

$$A_e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \qquad (ข.9)$$

ซึ่งมีรหัสเวียน (cyclic code) เป็น $(i,j,k) = \{ (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) \}$

นำฟังก์ชันรูปร่างแบบโนดมาแปลงหาเป็นฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ โดยใช้รูปแบบวิทเนย์ (Whitney Form)

$$\overline{N}_i = l_i\left(L_i \nabla L_j - L_j \nabla L_i\right) \tag{ข.10}$$

นำสมการ (ข.5) แทนลงในสมการ (ข.12) จะได้

$$\begin{aligned}\overline{N}_i = l_i\Bigg[&\frac{1}{2A_e}\left(a_i + b_i x + c_i y\right)\frac{1}{2A_e}\left(b_j \overline{a}_x + c_j \overline{a}_y\right) \\ &- \frac{1}{2A_e}\left(a_j + b_j x + c_j y\right)\frac{1}{2A_e}\left(b_i \overline{a}_x + c_i \overline{a}_y\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{ข.11}$$

$$\overline{N}_i = \frac{l_i}{4A_e^2}\left[\left(a_i + b_i x + c_i y\right)\left(b_j \overline{a}_x + c_j \overline{a}_y\right) - \left(a_j + b_j x + c_j y\right)\left(b_i \overline{a}_x + c_i \overline{a}_y\right)\right] \tag{ข.12}$$

$$\begin{aligned}\overline{N}_i = \frac{l_i}{4A_e^2}\Big\{&\left[\left(a_i b_j - a_j b_i\right) + \left(b_j c_i - b_i c_j\right) y\right]\overline{a}_x \\ &+ \left[\left(a_i c_j - a_j c_i\right) + \left(b_i c_j - b_j c_i\right) x\right]\overline{a}_y\Big\}\end{aligned} \tag{ข.13}$$

จากสมการ (ข.6) และ (ข.7) จะได้

$$a_i b_j - a_j b_i = 2A_e y_k \tag{ข.14}$$

ดังนั้นแทนลงในสมการ (ข.15) จะได้ฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์

$$\overline{N}_i = \frac{l_i}{2A_e}\left[\left(y_k - y\right)\overline{a}_x + \left(x - x_k\right)\overline{a}_y\right] \tag{ข.15}$$

โดยที่ความยาวของขอบจำเป็นจะต้องสอดคล้องกันไปในทิศทางเดียว มิฉะนั้นจะทำให้สนามที่คำนวณได้นั้นจะหักล้างกัน ดังสมการ และรูปที่ ข.1

$$l_i = \begin{cases} \sqrt{b_k^2 + c_k^2}, & b_k < 0 \; or \; b_k = 0, c_m > 0 \\ -\sqrt{b_k^2 + c_k^2}, & b_k > 0 \; or \; b_k = 0, c_m < 0 \end{cases} \tag{ข.16}$$




รูปที่ ข.1 การกำหนดทิศของความยาวของขอบ

กำหนดให้

$$\overline{N}_i = u\overline{a}_x + v\overline{a}_y \tag{ข.17}$$

จะได้

$$\{u\} = \frac{l_i}{2A_e}(y_k - y) \tag{ข.18}$$

$$\{v\} = \frac{l_i}{2A_e}(x - x_k) \tag{ข.19}$$

สูตรพื้นฐานในการอินทิเกรตฟังก์ชันรูปร่างแบบโนด ดังสมการ

$$\int_\Omega L_1^a L_2^b L_3^c \; dxdy = \frac{a!\,b!\,c!}{(a+b+c+2)!}\,2A_e \tag{ข.20}$$

**การอินทิเกรตฟังก์ชันรูปร่าง**

- $$\begin{aligned}\int_\Omega \left(\nabla_t \times \overline{N}_m\right)\cdot\left(\nabla_t \times \overline{N}_n\right) d\Omega &= \int_\Omega \left(v_{mx} - u_{my}\right)\left(v_{nx} - u_{ny}\right) d\Omega \\ &= \int_\Omega \left[v_{mx}v_{nx} + u_{my}u_{ny} - u_{my}v_{nx} - v_{mx}u_{ny}\right] d\Omega \\ &= \frac{l_m l_n}{A_e}\end{aligned} \tag{ข.21}$$

- $$\begin{aligned}\int_\Omega \left(\overline{N}_m \cdot \nabla_t L_n\right) d\Omega &= \int_\Omega \left(u_m L_{nx} + v_m L_{ny}\right) d\Omega \\ &= \frac{1}{4A_e}\left[l_m b_n \left(y_{m+2} - \overline{y}\right) + l_m c_n \left(\overline{x} - x_{m+2}\right)\right]\end{aligned} \tag{ข.22}$$

- $$\begin{aligned}\int_\Omega \left(\overline{N}_m \cdot \overline{N}_n\right) d\Omega &= \int_\Omega \left(u_m u_n + v_m v_n\right) d\Omega \\ &= \frac{1}{4A_e} l_m l_n \left\{ \left[ y_{m+2}y_{n+2} - \overline{y}\left(y_{m+2} + y_{n+2}\right) + \frac{1}{12}\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 9\overline{y}^2\right)\right] \right. \\ &\quad \left. + \left[ x_{m+2}x_{n+2} - \overline{x}\left(x_{m+2} + x_{n+2}\right) + \frac{1}{12}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 9\overline{x}^2\right)\right] \right\}\end{aligned} \tag{ข.23}$$

- $$\begin{aligned}\int_\Omega \left(\nabla_t L_m \cdot \nabla_t L_n\right) d\Omega &= \int_\Omega \left(L_{mx}L_{nx} + L_{my}L_{ny}\right) d\Omega \\ &= \frac{1}{4A_e}\left(b_m b_n + c_m c_n\right)\end{aligned} \tag{ข.24}$$

- $$\begin{aligned}\int_\Omega \left(\nabla_t L_m \cdot \overline{N}_n\right) d\Omega &= \int_\Omega \left(L_{mx}u_n + L_{my}v_n\right) d\Omega \\ &= \frac{1}{4A_e}\left[l_n b_m \left(y_{n+2} - \overline{y}\right) + l_n c_m \left(\overline{x} - x_{n+2}\right)\right]\end{aligned} \tag{ข.25}$$

- $$\int_{\Omega} \left(L_m L_n\right) d\Omega = \begin{cases} \dfrac{A_e}{6}, & m = n \\ \dfrac{A_e}{12}, & m \neq n \end{cases} = \frac{A_e}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (ข.26)$$

โดยที่

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \qquad (ข.27)$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \qquad (ข.28)$$

# ภาคผนวก ค

## การพิสูจน์สมการอีลีเมนต์ขอบคงที่แบบเอกฐาน

ฟังก์ชันรูปร่างโนดแบบเอกฐานดังสมการ (Akin, J.E., 1976)

$$S_1 = 1-(1-L_1)^{1-\rho} \qquad (ค.1)$$

$$S_2 = \frac{L_2}{(1-L_1)^{\rho}} \qquad (ค.2)$$

$$S_3 = \frac{L_3}{(1-L_1)^{\rho}} \qquad (ค.3)$$

นำฟังก์ชันรูปร่างแบบโนดมาแปลงหาเป็นฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ โดยใช้รูปแบบวิทเนย์ (Whitney Form)

$$\overline{S}_i = l_i\left(S_i \nabla S_j - S_j \nabla S_i\right) \qquad (ค.4)$$

พิจารณาทีละด้านดังนี้

$$\overline{S}_1 = l_1\left(S_1 \nabla S_2 - S_2 \nabla S_1\right) \qquad (ค.5)$$

$$\overline{S}_{x1} = \frac{l_1}{2A_e(1-L_1)^{2\rho}}\left\{ b_1\left[\rho L_2(1-L_1)^{\rho-1} - L_2\right] + b_2\left[(1-L_1)^{\rho} - (1-L_1)\right]\right\}\overline{a}_x \qquad (ค.6)$$

$$\overline{S}_{y1} = \frac{l_1}{2A_e(1-L_1)^{2\rho}}\left\{ c_1\left[\rho L_2(1-L_1)^{\rho-1} - L_2\right] + c_2\left[(1-L_1)^{\rho} - (1-L_1)\right]\right\}\overline{a}_y \qquad (ค.7)$$

$$\overline{S}_2 = l_2\left(S_2 \nabla S_3 - S_3 \nabla S_2\right) \qquad (ค.8)$$

$$\overline{S}_{x2} = \frac{l_2}{2A_e(1-L_1)^{2\rho}}\left(b_3 L_2 - b_2 L_3\right)\overline{a}_x \qquad (ค.9)$$

$$\overline{S}_{y2} = \frac{l_2}{2A_e(1-L_1)^{2\rho}}\left(c_3 L_2 - c_2 L_3\right)\overline{a}_y \qquad (ค.10)$$

$$\overline{S}_3 = l_3\left(S_3 \nabla S_1 - S_1 \nabla S_3\right) \qquad (ค.11)$$

$$\overline{S}_{x3} = \frac{l_3}{2A_e(1-L_1)^{2\rho}}\left\{ b_1\left[L_3 - \rho L_3(1-L_1)^{\rho-1}\right] + b_3\left[(1-L_1) - (1-L_1)^{\rho}\right]\right\}\overline{a}_x \qquad (ค.12)$$

$$\overline{S}_{x3} = \frac{l_3}{2A_e(1-L_1)^{2\rho}}\left\{ c_1\left[L_3 - \rho L_3(1-L_1)^{\rho-1}\right] + c_3\left[(1-L_1) - (1-L_1)^{\rho}\right]\right\}\overline{a}_y \qquad (ค.13)$$

โดยที่ $$L_i = \frac{1}{2A_e}\left(a_i + b_i x + c_i y\right) \quad \text{(ค.14)}$$

$$i = 1,2,3$$

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j \quad \text{(ค.15)}$$

$$b_i = y_j - y_k \quad \text{(ค.16)}$$

$$c_i = x_k - x_j \quad \text{(ค.17)}$$

$$A_e = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad \text{(ค.18)}$$

ซึ่งมีรหัสเวียน (cyclic code) เป็น $(i, j, k) = \{ (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) \}$
และความยาวของขอบจำเป็นจะต้องสอดคล้องกันไปในทิศทางเดียว มิฉะนั้นจะทำให้สนามที่คำนวณได้นั้นจะหักล้างกันแสดงไว้ในภาคผนวก ข ดังสมการ (ข.16) และรูปที่ ข.1

เนื่องจากการอินทิเกรตฟังก์ชันรูปร่างแบบเอกฐานนั้นสามารถทำได้ยาก เพื่อให้ง่ายในการอินทิเกรต จึงนำวิธีอินทิเกรตเชิงตัวเลข (numerical integration) มาใช้ในการประมาณการอินทิเกรตฟังก์ชันรูปร่างนั้น และจำเป็นต้องแปลงพิกัดเรขาคณิต (geometrical transformation) จาก อีลีเมนต์จริง (real element) ไปยัง อีลีเมนต์อ้างอิง (reference element) (รายละเอียดดังในภาคผนวก จ) จะได้สมการฟังก์ชันรูปร่างโนดแบบเอกฐานใหม่ดังนี้

$$S_1 = 1 - (\xi + \eta)^{1-\rho} \quad \text{(ค.20)}$$

$$S_2 = \frac{\xi}{(\xi + \eta)^{\rho}} \quad \text{(ค.21)}$$

$$S_3 = \frac{\eta}{(\xi + \eta)^{\rho}} \quad \text{(ค.22)}$$

จากนั้นนำฟังก์ชันรูปร่างแบบโนดมาแปลงหาเป็นฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ โดยใช้รูปแบบวิทเนย์ (Whitney Form) ตามสมการ (ค.4) แต่เนื่องจากเป็นการอนุพันธ์แบบกฎลูกโซ่ (chain rule) จึงจำเป็นต้องทราบเมตริกซ์จาคอเบียนเพื่อให้ง่ายต่อการอนุพันธ์แบบกฎลูกโซ่ ดังสมการ

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\bar{a}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\bar{a}_y \quad \text{(ค.23)}$$

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\bar{a}_x + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\bar{a}_y \quad \text{(ค.24)}$$

จากภาคผนวก จ สมการ (จ.18) จะได้

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{2A_e} b_2 \tag{ค.25}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2A_e} b_3 \tag{ค.26}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{2A_e} c_2 \tag{ค.27}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{2A_e} c_3 \tag{ค.28}$$

เริ่มจากการหาฟังก์ชันอนุพันธ์แบบกฎลูกโซ่ของฟังก์ชันรูปร่างโนดแบบเอกฐาน

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} = \frac{\partial S_1}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{ค.29}$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial x} = \frac{\partial S_2}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{ค.30}$$

$$\frac{\partial S_3}{\partial x} = \frac{\partial S_3}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial S_3}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{ค.31}$$

เมื่อหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างเทียบกับพิกัดอ้างอิงจะได้

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} = \frac{(\rho-1)(b_2+b_3)}{2A_e(\xi+\eta)^{\rho}} \tag{ค.32}$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial y} = \frac{(\rho-1)(c_2+c_3)}{2A_e(\xi+\eta)^{\rho}} \tag{ค.33}$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial x} = \frac{b_2(\xi-\rho\xi-\eta)-b_3\rho\xi}{2A_e(\xi+\eta)^{1+\rho}} \tag{ค.34}$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial y} = \frac{c_2(\xi-\rho\xi-\eta)-c_3\rho\xi}{2A_e(\xi+\eta)^{1+\rho}} \tag{ค.35}$$

$$\frac{\partial S_3}{\partial x} = \frac{-b_2\rho\xi+b_3(\xi+\eta-\eta\rho)}{2A_e(\xi+\eta)^{1+\rho}} \tag{ค.36}$$

$$\frac{\partial S_3}{\partial y} = \frac{-c_2\rho\xi+c_3(\xi+\eta-\eta\rho)}{2A_e(\xi+\eta)^{1+\rho}} \tag{ค.37}$$

หาฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์โดยพิจารณาทีละด้าน จากสมการ (ค.5) (ค.8) และ (ค.11) จะได้

$$\overline{S}_{x1} = \frac{l_1}{2A_e}\left\{\frac{\left[b_2(\xi-\rho\xi+\eta)-b_3\rho\xi\right]\left(1-(\xi+\eta)^{1-\rho}\right)}{(\xi+\eta)^{\rho+1}} - \frac{(\rho-1)\xi(b_2+b_3)}{(\xi+\eta)^{2\rho}}\right\}\overline{a}_x \tag{ค.38}$$

$$\overline{S}_{y1} = \frac{l_1}{2A_e}\left\{\frac{\left[c_2(\xi-\rho\xi+\eta)-c_3\rho\xi\right]\left(1-(\xi+\eta)^{1-\rho}\right)}{(\xi+\eta)^{\rho+1}} - \frac{(\rho-1)\xi(c_2+c_3)}{(\xi+\eta)^{2\rho}}\right\}\overline{a}_y \tag{ค.39}$$

$$\overline{S}_{x2}=\frac{l_2}{2A_e}\left\{\frac{\xi\left[-b_2\rho\eta+b_3\left(\xi+\eta-\rho\eta\right)\right]}{\left(\xi+\eta\right)^{2\rho+1}}-\frac{\eta\left[b_2\left(\xi-\rho\xi+\eta\right)-b_3\rho\xi\right]}{\left(\xi+\eta\right)^{2\rho+1}}\right\}\overline{a}_x \quad (ค.40)$$

$$\overline{S}_{y2}=\frac{l_2}{2A_e}\left\{\frac{\xi\left[-c_2\rho\eta+c_3\left(\xi+\eta-\rho\eta\right)\right]}{\left(\xi+\eta\right)^{2\rho+1}}-\frac{\eta\left[c_2\left(\xi-\rho\xi+\eta\right)-c_3\rho\xi\right]}{\left(\xi+\eta\right)^{2\rho+1}}\right\}\overline{a}_y \quad (ค.41)$$

$$\overline{S}_{x3}=\frac{l_3}{2A_e}\left\{-\frac{\left[-b_2\rho\eta+b_3\left(\xi+\eta-\rho\eta\right)\right]\left(1-\left(\xi+\eta\right)^{1-\rho}\right)}{\left(\xi+\eta\right)^{\rho+1}}+\frac{\left(\rho-1\right)\eta\left(b_2+b_3\right)}{\left(\xi+\eta\right)^{2\rho}}\right\}\overline{a}_x \quad (ค.42)$$

$$\overline{S}_{y3}=\frac{l_3}{2A_e}\left\{-\frac{\left[-c_2\rho\eta+c_3\left(\xi+\eta-\rho\eta\right)\right]\left(1-\left(\xi+\eta\right)^{1-\rho}\right)}{\left(\xi+\eta\right)^{\rho+1}}+\frac{\left(\rho-1\right)\eta\left(c_2+c_3\right)}{\left(\xi+\eta\right)^{2\rho}}\right\}\overline{a}_y \quad (ค.43)$$

**การอินทิเกรตฟังก์ชันรูปร่าง**

เนื่องจากแปลงพิกัดจากอีลีเมนต์จริงไปยังอีลีเมนต์อ้างอิง การอินทิเกรตฟังก์ชันรูปร่างนั้น จึงสามารถใช้การประมาณการอินทิเกรตแบบเกาส์ (รายละเอียดดังในภาคผนวก ง) โดยการแทนจุดในแต่ละตำแหน่งของการประมาณ ดังสมการ (จ.31) และ (ง.1)

$$\iint_{\Omega}\phi(x,y)\,dxdy=\int_0^1\int_0^{1-\xi}\phi(\xi,\eta)\cdot|J|\,d\eta\xi \quad (ค.44)$$

$$\int_0^1\int_0^{1-\xi}f(\xi,\eta)\,d\eta d\xi=\sum_{i=1}^{n}w_i\cdot f(\eta_i,\xi_i) \quad (ค.45)$$

ดังนั้นสามารถอินทิเกรตโดเมนจริงได้ดังสมการ

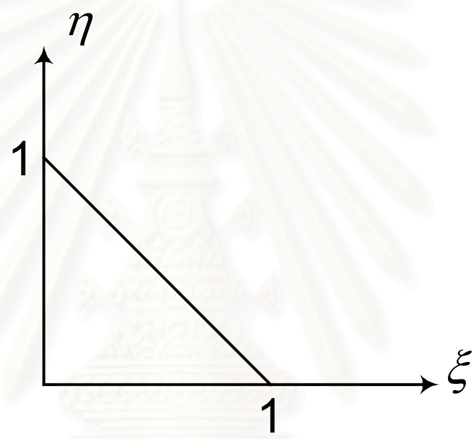
$$\iint_{\Omega}\phi(x,y)\,dxdy=|J|\cdot\sum_{i=1}^{n}w_i\cdot f(\eta_i,\xi_i) \quad (ค.46)$$

# ภาคผนวก ง

## การประมาณการอินทิเกรตแบบเกาส์

การประมาณการอินทิเกรตแบบเกาส์ใน 2 มิติ ในส่วนนี้จะนำเสนอการประมาณการอินทิเกรตบนอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยม ซึ่งจะอยู่ในรูปของอีลีเมนต์อ้างอิง (reference element) รูปสามเหลี่ยมดังรูปที่ ง.1 ที่ประกอบด้วยพิกัด $\xi$ และ $\eta$ ซึ่งการประมาณการอินทิเกรตแบบเกาส์สามารถแสดงได้ดังสมการ

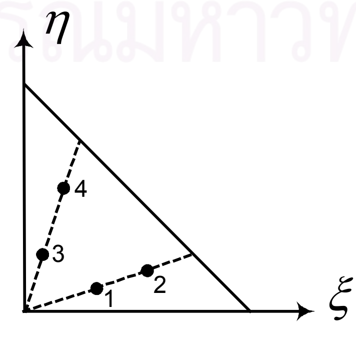
$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} f(\xi,\eta)\, d\eta d\xi = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot f(\eta_i, \xi_i) \qquad (ง.1)$$




รูปที่ ง.1 อีลีเมนต์อ้างอิงรูปสามเหลี่ยม

ในการประมาณนี้เน้นการประมาณให้มีผลเฉลยที่ถูกต้องบริเวณมุม ดังนั้นรูปของการประมาณจุดจะเป็นดังรูปที่ ง.2 และ รูปที่ ง.3

- การประมาณ 4 จุด

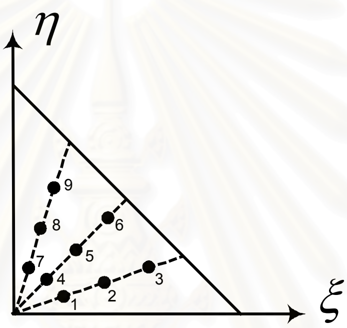



รูปที่ ง.2 การประมาณการอินทิเกรต 4 จุด

ตารางที่ ง.1 พิกัดของจุดอินทิเกรตและตัวถ่วงน้ำหนักในการประมาณการอินทิเกรต 4 จุด

| $i$ | $\xi_i$ | $\eta_i$ | $w_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.2800199155 | 0.0750311102 | 0.0909793091 |
| 2 | 0.6663902460 | 0.1785587283 | 0.1590206909 |
| 3 | 0.0750311102 | 0.2800199155 | 0.0909793091 |
| 4 | 0.1785587283 | 0.6663902460 | 0.1590206909 |

- การประมาณ 9 จุด




รูปที่ ง.3 การประมาณการอินทิเกรต 9 จุด

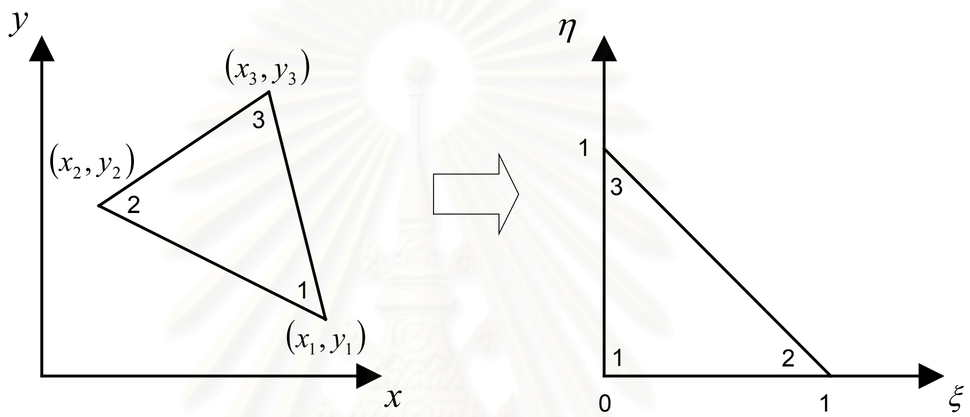
ตารางที่ ง.2 พิกัดของจุดอินทิเกรตและตัวถ่วงน้ำหนักในการประมาณการอินทิเกรต 9 จุด

| $i$ | $\xi_i$ | $\eta_i$ | $w_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.18840940591 | 0.02393113229 | 0.019396383304 |
| 2 | 0.52397906774 | 0.06655406786 | 0.063678085097 |
| 3 | 0.80869438567 | 0.10271765483 | 0.055814420490 |
| 4 | 0.10617026910 | 0.10617026910 | 0.031034213285 |
| 5 | 0.29526656780 | 0.29526656780 | 0.101884936154 |
| 6 | 0.45570602025 | 0.45570602025 | 0.089303072783 |
| 7 | 0.02393113229 | 0.18840940591 | 0.019396383304 |
| 8 | 0.06655406786 | 0.52397906774 | 0.063678085097 |
| 9 | 0.10271765483 | 0.80869438567 | 0.055814420490 |

# ภาคผนวก จ

## การแปลงพิกัดเรขาคณิต

ภาคผนวกนี้จะกล่าวถึงรูปแบบของอีลีเมนต์รูปสามเหลี่ยมใน 2 มิติ ที่ใช้ในการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ โดยในแต่ละอีลีเมนต์จะใช้การประมาณการอินทิเกรตเชิงตัวเลข (numerical integration) ในพิกัด $(\xi,\eta)$ ซึ่งจะสามารถทำได้ง่ายกว่าการอินทิเกรตในพิกัด $(x,y)$ โดยตรง




รูปที่ จ.1 การแปลงพิกัดเรขาคณิต

กำหนดให้พิกัดที่ตำแหน่ง $(x,y)$ ใดๆ ดังรูปที่ จ.1 เป็นดังนี้

$$x(\xi,\eta)=\sum_{n=1}^{3} N_n x_n = N_1(\xi,\eta)\cdot x_1 + N_2(\xi,\eta)\cdot x_2 + N_3(\xi,\eta)\cdot x_3 \qquad (\text{จ}.1)$$

$$y(\xi,\eta)=\sum_{n=1}^{3} N_n y_n = N_1(\xi,\eta)\cdot y_1 + N_2(\xi,\eta)\cdot y_2 + N_3(\xi,\eta)\cdot y_3 \qquad (\text{จ}.2)$$

โดยที่ $N_n(\xi,\eta)$ เป็นฟังก์ชันรูปร่างที่มีคุณสมบัติตามเงื่อนไขที่ว่า $N_n(\xi,\eta)=1$ ที่โนด $n$ และ $N_n(\xi,\eta)=0$ ที่โนดอื่น

และใช้การแปลงจาคอเบียน (Jacobian transformation) ในการแปลงอนุพันธ์ของฟังก์ชันใดๆในระบบพิกัดฉาก ไปยังระบบพิกัด $(\xi,\eta)$ เพื่อให้ง่ายในการอ้างอิงถึงพจน์ที่อยู่ในเครื่องหมายอินทิกรัล และเพื่อใช้การแปลงตัวแปรจากการอินทิเกรตระบบจริงไปยังระบบอ้างอิงสำหรับฟังก์ชัน $\phi$ ใดๆ จะได้ดังสมการ

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial\xi} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\xi} & \dfrac{\partial y}{\partial\xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial\eta} & \dfrac{\partial y}{\partial\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{จ.3}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\xi} & \dfrac{\partial y}{\partial\xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial\eta} & \dfrac{\partial y}{\partial\eta} \end{bmatrix} \tag{จ.4}$$

โดยที่ $[J]$ คือ เมตริกซ์จาคอเบียนของการแปลงพิกัดเรขาคณิต
และสามารถเปลี่ยนความสัมพันธ์ในเชิงอนุพันธ์ของอีลีเมนต์จริง ไปยังอีลีเมนต์อ้างอิงได้ดังสมการ

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial y} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial\xi} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\eta} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial\xi} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\eta} \end{Bmatrix} \tag{จ.5}$$

เนื่องจากในวิทยานิพนธ์นี้นำเสนอฟังก์ชันรูปร่าง 2 รูปแบบ ดังนั้นพิจารณาฟังก์ชันรูปร่าง 2 แบบคือ ฟังก์ชันโนดเชิงเส้น (linear nodal function) และฟังก์ชันโนดกำลังสอง (quadratic nodal function) เป็นดังนี้

- ฟังก์ชันรูปร่างโนดเชิงเส้น

$$N_1(\xi,\eta) = 1-\xi-\eta \tag{จ.6}$$
$$N_2(\xi,\eta) = \xi \tag{จ.7}$$
$$N_3(\xi,\eta) = \eta \tag{จ.8}$$

โดยฟังก์ชันการแปลงพิกัดจากอีลีเมนต์จริงไปยังอีลีเมนต์อ้างอิง

$$x(\xi,\eta) = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 \tag{จ.9}$$
$$y(\xi,\eta) = N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 \tag{จ.10}$$

นำค่าในสมการ (จ.6) ถึง (จ.8) แทนลงใน (จ.9) และ (จ.10) จะได้

$$x(\xi,\eta) = x_1(1-\xi-\eta) + x_2\xi + x_3\eta \tag{จ.11}$$
$$y(\xi,\eta) = y_1(1-\xi-\eta) + y_2\xi + y_3\eta \tag{จ.12}$$

อนุพันธ์พิกัด $(x, y)$ เทียบกับพิกัด $(\xi,\eta)$ จะได้

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = -x_1 + x_2 \qquad (จ.13)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = -x_1 + x_3 \qquad (จ.14)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = -y_1 + y_2 \qquad (จ.15)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = -y_1 + y_3 \qquad (จ.16)$$

ดังนั้นจะได้จาคอเบียนของการแปลงพิกัดเรขาคณิต ดังสมการ (จ.4) โดยแทน (จ.13) ถึง (จ.16) ลงไปในสมการ (จ.4)

$$[J] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \qquad (จ.17)$$

$$|J| = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 2A_e \qquad (จ.18)$$

ดังนั้นจะได้ฟังก์ชันการแปลงพิกัดดังนี้

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial y} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A_e}\begin{bmatrix} y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A_e}\begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} \qquad (จ.19)$$

- ฟังก์ชันรูปร่างโนดกำลังสอง

$$N_1(\xi,\eta) = (1-\xi-\eta)[2(1-\xi-\eta)-1] \qquad (จ.20)$$

$$N_2(\xi,\eta) = \xi(2\xi-1) \qquad (จ.21)$$

$$N_3(\xi,\eta) = \eta(2\eta-1) \qquad (จ.22)$$

$$N_4(\xi,\eta) = 4\xi(1-\xi-\eta) \qquad (จ.23)$$

$$N_5(\xi,\eta) = 4\xi\eta \qquad (จ.24)$$

$$N_6(\xi,\eta) = 4\eta(1-\xi-\eta) \qquad (จ.25)$$

โดยฟังก์ชันการแปลงพิกัดจากอีลีเมนต์จริงไปยังอีลีเมนต์อ้างอิง

$$x(\xi,\eta) = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + N_4x_4 + N_5x_5 + N_6x_6 \qquad (จ.26)$$

$$y(\xi,\eta) = N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4 + N_5y_5 + N_6y_6 \qquad (จ.27)$$

นำค่าในสมการ (จ.20) – (จ.25) แทนลงใน (จ.26) – (จ.27) จะได้

$$x(\xi,\eta) = x_1(1-\xi-\eta)[2(1-\xi-\eta)-1] + x_2\xi(2\xi-1) + x_3\eta(2\eta-1) + x_4 4\xi(1-\xi-\eta) + x_5 4\xi\eta + x_6 4\eta(1-\xi-\eta) \quad \text{(จ.28)}$$

$$y(\xi,\eta) = y_1(1-\xi-\eta)[2(1-\xi-\eta)-1] + y_2\xi(2\xi-1) + y_3\eta(2\eta-1) + y_4 4\xi(1-\xi-\eta) + y_5 4\xi\eta + y_6 4\eta(1-\xi-\eta) \quad \text{(จ.29)}$$

เมื่อหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์จาคอเบียน จะได้เท่ากับ 2 เท่าของพื้นที่สามเหลี่ยม

$$|J| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = 2A_e \quad \text{(จ.30)}$$

การแปลงพิกัดเรขาคณิตในการอินทิเกรต สามารถใช้สมการดังนี้

$$\iint_{\Omega} \phi(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \phi(\xi,\eta)\cdot|J|\,d\eta\xi \quad \text{(จ.31)}$$

## ภาคผนวก ฉ

## การพิสูจน์สมการอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบปกติ

ฟังก์ชันรูปร่างโนดกำลังสอง สร้างจากการนำฟังก์ชันรูปร่างโนดเชิงเส้นแบบปกติในภาคผนวก ข โดยใช้รูปแบบวิทเนย์ จะได้

$$N_1 = L_1(2L_1 - 1) \quad (ฉ.1)$$

$$N_2 = L_2(2L_2 - 1) \quad (ฉ.2)$$

$$N_3 = L_3(2L_3 - 1) \quad (ฉ.3)$$

$$N_4 = 4L_1L_2 \quad (ฉ.4)$$

$$N_5 = 4L_2L_3 \quad (ฉ.5)$$

$$N_6 = 4L_3L_1 \quad (ฉ.6)$$

และนำฟังก์ชันรูปร่างโนดเชิงเส้นแบบปกติแปลงเป็นฟังก์ชันรูปร่างเวกเตอร์อีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบปกติ โดยใช้รูปแบบวิทเนย์

$$\overline{N}_1 = l_1(L_1\nabla L_2) \quad (ฉ.7)$$

$$\overline{N}_2 = -l_1(L_2\nabla L_1) \quad (ฉ.8)$$

$$\overline{N}_3 = l_2(L_2\nabla L_3) \quad (ฉ.9)$$

$$\overline{N}_4 = -l_2(L_3\nabla L_2) \quad (ฉ.10)$$

$$\overline{N}_5 = l_3(L_3\nabla L_1) \quad (ฉ.11)$$

$$\overline{N}_6 = -l_3(L_1\nabla L_3) \quad (ฉ.12)$$

นำสมการ (ข.5) ถึง (ข.9) แทนลงในชุดสมการอีลีเมนต์แบบโนด (ฉ.7) ถึง (ฉ.12) จะได้

$$\overline{N}_1 = \frac{l_1}{2A_e}\left(b_2\,\overline{a}_x + c_2\,\overline{a}_y\right)L_1 \quad (ฉ.13)$$

$$\overline{N}_2 = -\frac{l_1}{2A_e}\left(b_1\,\overline{a}_x + c_1\,\overline{a}_y\right)L_2 \quad (ฉ.14)$$

$$\overline{N}_3 = \frac{l_2}{2A_e}\left(b_3\,\overline{a}_x + c_3\,\overline{a}_y\right)L_2 \quad (ฉ.15)$$

$$\overline{N}_4 = -\frac{l_2}{2A_e}\left(b_2\,\overline{a}_x + c_2\,\overline{a}_y\right)L_3 \quad (ฉ.16)$$

$$\overline{N}_5 = \frac{l_3}{2A_e}\left(b_1\,\overline{a}_x + c_1\,\overline{a}_y\right)L_3 \quad (ฉ.17)$$

$$\overline{N}_6 = -\frac{l_3}{2A_e}\left(b_3\ \overline{a}_x + c_3\ \overline{a}_y\right)L_1 \qquad \text{(ฉ.18)}$$

โดยที่ความยาวของขอบจำเป็นจะต้องสอดคล้องกันไปในทิศทางเดียว มิฉะนั้นจะทำให้สนามที่คำนวณได้นั้นจะหักล้างกัน ดังสมการที่ (ข.16) และรูปที่ ข.1

พิจารณาแยกองค์ประกอบตามขวางเป็น 2 พจน์คือ $\{U\}$ องค์ประกอบแนวแกน $x$ และ $\{V\}$ องค์ประกอบแนวแกน $y$ ดังนี้

$$U_1 = \frac{l_1}{2A_e}b_2L_1 \qquad \text{(ฉ.19)}$$

$$U_2 = -\frac{l_1}{2A_e}b_1L_2 \qquad \text{(ฉ.20)}$$

$$U_3 = \frac{l_2}{2A_e}b_3L_2 \qquad \text{(ฉ.21)}$$

$$U_4 = -\frac{l_2}{2A_e}b_2L_3 \qquad \text{(ฉ.22)}$$

$$U_5 = \frac{l_3}{2A_e}b_1L_3 \qquad \text{(ฉ.23)}$$

$$U_6 = -\frac{l_3}{2A_e}b_3L_1 \qquad \text{(ฉ.24)}$$

$$V_1 = \frac{l_1}{2A_e}c_2L_1 \qquad \text{(ฉ.25)}$$

$$V_2 = -\frac{l_1}{2A_e}c_1L_2 \qquad \text{(ฉ.26)}$$

$$V_3 = \frac{l_2}{2A_e}c_3L_2 \qquad \text{(ฉ.27)}$$

$$V_4 = -\frac{l_2}{2A_e}c_2L_3 \qquad \text{(ฉ.28)}$$

$$V_5 = \frac{l_3}{2A_e}c_1L_3 \qquad \text{(ฉ.29)}$$

$$V_6 = -\frac{l_3}{2A_e}c_3L_1 \qquad \text{(ฉ.30)}$$

**การอินทิเกรตฟังก์ชันรูปร่าง**

$$\left[\int_\Omega \{U\}\{U\}^T \, d\Omega\right]_{mn} = \begin{cases} \dfrac{A_e}{6} u_m u_n & for\ mn = 11,22,33,44,55,66, \\ & \quad 16,61,23,32,45,54 \\ \dfrac{A_e}{12} u_m u_n & ,\ for\ \ others \end{cases} \tag{ฉ.31}$$

$$\left[\int_\Omega \{V\}\{V\}^T \, d\Omega\right]_{mn} = \begin{cases} \dfrac{A_e}{6} v_m v_n & for\ mn = 11,22,33,44,55,66, \\ & \quad 16,61,23,32,45,54 \\ \dfrac{A_e}{12} v_m v_n & ,\ for\ \ others \end{cases} \tag{ฉ.32}$$

$$\left[\int_\Omega \{U_y\}\{U_y\}^T \, d\Omega\right]_{mn} = A_e u_{ym} u_{yn} \tag{ฉ.33}$$

$$\left[\int_\Omega \{V_x\}\{V_x\}^T \, d\Omega\right]_{mn} = A_e v_{xm} v_{xn} \tag{ฉ.34}$$

$$\left[\int_\Omega \{U_y\}\{V_x\}^T \, d\Omega\right]_{mn} = A_e u_{ym} v_{xn} \tag{ฉ.35}$$

$$\left[\int_\Omega \{V_x\}\{U_y\}^T \, d\Omega\right]_{mn} = A_e v_{xm} u_{yn} \tag{ฉ.36}$$

$$\left[\int_\Omega \{U\}\{N_x\}^T \, d\Omega\right]_{1n} = \frac{A_e}{12} u_1 \left(2C_{xn}^{(1)} + C_{xn}^{(2)} + C_{xn}^{(3)} + 4C_{xn}^{(4)}\right) \tag{ฉ.37}$$

$$\left[\int_\Omega \{U\}\{N_x\}^T \, d\Omega\right]_{2n} = \frac{A_e}{12} u_2 \left(C_{xn}^{(1)} + 2C_{xn}^{(2)} + C_{xn}^{(3)} + 4C_{xn}^{(4)}\right) \tag{ฉ.38}$$

$$\left[\int_\Omega \{U\}\{N_x\}^T \, d\Omega\right]_{3n} = \frac{A_e}{12} u_3 \left(C_{xn}^{(1)} + 2C_{xn}^{(2)} + C_{xn}^{(3)} + 4C_{xn}^{(4)}\right) \tag{ฉ.39}$$

$$\left[\int_\Omega \{U\}\{N_x\}^T \, d\Omega\right]_{4n} = \frac{A_e}{12} u_4 \left(C_{xn}^{(1)} + C_{xn}^{(2)} + 2C_{xn}^{(3)} + 4C_{xn}^{(4)}\right) \tag{ฉ.40}$$

$$\left[\int_\Omega \{U\}\{N_x\}^T \, d\Omega\right]_{5n} = \frac{A_e}{12} u_5 \left(C_{xn}^{(1)} + C_{xn}^{(2)} + 2C_{xn}^{(3)} + 4C_{xn}^{(4)}\right) \tag{ฉ.41}$$

$$\left[\int_\Omega \{U\}\{N_x\}^T \, d\Omega\right]_{6n} = \frac{A_e}{12} u_6 \left(2C_{xn}^{(1)} + C_{xn}^{(2)} + C_{xn}^{(3)} + 4C_{xn}^{(4)}\right) \tag{ฉ.42}$$

$$\left[\int_\Omega \{V\}\{N_y\}^T \, d\Omega\right]_{1n} = \frac{A_e}{12} v_1 \left(2C_{yn}^{(1)} + C_{yn}^{(2)} + C_{yn}^{(3)} + 4C_{yn}^{(4)}\right) \tag{ฉ.43}$$

$$\left[\int_\Omega \{V\}\{N_y\}^T \, d\Omega\right]_{2n} = \frac{A_e}{12} v_2 \left(C_{yn}^{(1)} + 2C_{yn}^{(2)} + C_{yn}^{(3)} + 4C_{yn}^{(4)}\right) \tag{ฉ.44}$$

$$\left[\int_{\Omega}\{V\}\{N_y\}^T\, d\Omega\right]_{3n} = \frac{A_e}{12}v_3\left(C_{yn}^{(1)} + 2C_{yn}^{(2)} + C_{yn}^{(3)} + 4C_{yn}^{(4)}\right) \quad (\text{ฉ}.45)$$

$$\left[\int_{\Omega}\{V\}\{N_y\}^T\, d\Omega\right]_{4n} = \frac{A_e}{12}v_4\left(C_{yn}^{(1)} + C_{yn}^{(2)} + 2C_{yn}^{(3)} + 4C_{yn}^{(4)}\right) \quad (\text{ฉ}.46)$$

$$\left[\int_{\Omega}\{V\}\{N_y\}^T\, d\Omega\right]_{5n} = \frac{A_e}{12}v_5\left(C_{yn}^{(1)} + C_{yn}^{(2)} + 2C_{yn}^{(3)} + 4C_{yn}^{(4)}\right) \quad (\text{ฉ}.47)$$

$$\left[\int_{\Omega}\{V\}\{N_y\}^T\, d\Omega\right]_{6n} = \frac{A_e}{12}v_6\left(2C_{yn}^{(1)} + C_{yn}^{(2)} + C_{yn}^{(3)} + 4C_{yn}^{(4)}\right) \quad (\text{ฉ}.48)$$

$$\left[\int_{\Omega}\{N\}\{N\}^T\, d\Omega\right]_{mn} = \frac{A_e}{180}\begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 6 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 6 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 32 & 16 & 16 \\ -4 & 0 & 0 & 16 & 32 & 16 \\ 0 & -4 & 0 & 16 & 16 & 32 \end{bmatrix} \quad (\text{ฉ}.49)$$

$$\begin{aligned} \left[\int_{\Omega}\{N_x\}\{N_x\}^T\, d\Omega\right]_{mn} &= \frac{A_e}{6}\left(C_{xm}^{(1)}C_{xn}^{(1)} + C_{xm}^{(2)}C_{xn}^{(2)} + C_{xm}^{(3)}C_{xn}^{(3)}\right) \\ &+ \frac{A_e}{12}\left(C_{xm}^{(1)}C_{xn}^{(2)} + C_{xm}^{(1)}C_{xn}^{(3)} + C_{xm}^{(2)}C_{xn}^{(1)}\right. \\ &\left.+ C_{xm}^{(2)}C_{xn}^{(3)} + C_{xm}^{(3)}C_{xn}^{(1)} + C_{xm}^{(3)}C_{xn}^{(2)}\right) \\ &+ \frac{A_e}{3}\left(C_{xm}^{(1)}C_{xn}^{(4)} + C_{xm}^{(2)}C_{xn}^{(4)} + C_{xm}^{(3)}C_{xn}^{(4)}\right. \\ &\left.+ C_{xm}^{(4)}C_{xn}^{(1)} + C_{xm}^{(4)}C_{xn}^{(2)} + C_{xm}^{(4)}C_{xn}^{(3)}\right) \\ &+ A_e C_{xm}^{(4)}C_{xn}^{(4)} \end{aligned} \quad (\text{ฉ}.50)$$

$$\begin{aligned} \left[\int_{\Omega}\{N_y\}\{N_y\}^T\, d\Omega\right]_{mn} &= \frac{A_e}{6}\left(C_{ym}^{(1)}C_{yn}^{(1)} + C_{ym}^{(2)}C_{yn}^{(2)} + C_{ym}^{(3)}C_{yn}^{(3)}\right) \\ &+ \frac{A_e}{12}\left(C_{ym}^{(1)}C_{yn}^{(2)} + C_{ym}^{(1)}C_{yn}^{(3)} + C_{ym}^{(2)}C_{yn}^{(1)}\right. \\ &\left.+ C_{ym}^{(2)}C_{yn}^{(3)} + C_{ym}^{(3)}C_{yn}^{(1)} + C_{ym}^{(3)}C_{yn}^{(2)}\right) \\ &+ \frac{A_e}{3}\left(C_{ym}^{(1)}C_{yn}^{(4)} + C_{ym}^{(2)}C_{yn}^{(4)} + C_{ym}^{(3)}C_{yn}^{(4)}\right. \\ &\left.+ C_{ym}^{(4)}C_{yn}^{(1)} + C_{ym}^{(4)}C_{yn}^{(2)} + C_{ym}^{(4)}C_{yn}^{(3)}\right) \\ &+ A_e C_{ym}^{(4)}C_{yn}^{(4)} \end{aligned} \quad (\text{ฉ}.51)$$

ตารางที่ ฉ.1 ค่าของพารามิเตอร์ที่นำไปใช้ในการอินทิเกรตฟังก์ชันรูปร่าง ($\times \frac{1}{2A_e}$)

| $i$ | $u_i$ | $v_i$ | $u_{yi}$ | $v_{xi}$ | $C_{xi}^{(1)}$ | $C_{xi}^{(2)}$ | $C_{xi}^{(3)}$ | $C_{xi}^{(4)}$ | $C_{yi}^{(1)}$ | $C_{yi}^{(2)}$ | $C_{yi}^{(3)}$ | $C_{yi}^{(4)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $l_1b_2$ | $l_1c_2$ | $u_1c_1$ | $v_1b_1$ | $4b_1$ | $0$ | $0$ | $-b_1$ | $4c_1$ | $0$ | $0$ | $-c_1$ |
| 2 | $l_1b_1$ | $l_1c_1$ | $u_2c_2$ | $v_2b_2$ | $4b_2$ | $4b_1$ | $0$ | $0$ | $4c_2$ | $4c_1$ | $0$ | $0$ |
| 3 | $l_2b_3$ | $l_2c_3$ | $u_3c_2$ | $v_3b_2$ | $0$ | $4b_2$ | $0$ | $-b_2$ | $0$ | $4c_2$ | $0$ | $-c_2$ |
| 4 | $l_2b_2$ | $l_2c_2$ | $u_4c_3$ | $v_4b_3$ | $0$ | $4b_3$ | $4b_2$ | $0$ | $0$ | $4c_3$ | $4c_2$ | $0$ |
| 5 | $l_3b_1$ | $l_3c_1$ | $u_5c_3$ | $v_5b_3$ | $0$ | $0$ | $4b_3$ | $-b_3$ | $0$ | $0$ | $4c_3$ | $-c_3$ |
| 6 | $l_3b_3$ | $l_3c_3$ | $u_6c_1$ | $v_6b_1$ | $4b_3$ | $0$ | $4b_1$ | $0$ | $4c_3$ | $0$ | $4c_1$ | $0$ |

## ภาคผนวก ซ

### การพิสูจน์สมการอีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน

ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์โนดกำลังสองแบบเอกฐาน สร้างจากการนำฟังก์ชันรูปร่างโนดเชิงเส้นแบบเอกฐาน จากสมการ (ค.1) ถึง (ค.3) จะได้

$$S_{n1} = S_1(2S_1 - 1) \tag{ซ.1}$$

$$S_{n2} = S_2(2S_2 - 1) \tag{ซ.2}$$

$$S_{n3} = S_3(2S_3 - 1) \tag{ซ.3}$$

$$S_{n4} = 4S_1S_2 \tag{ซ.4}$$

$$S_{n5} = 4S_2S_3 \tag{ซ.5}$$

$$S_{n6} = 4S_3S_1 \tag{ซ.6}$$

และเช่นเดียวกัน นำฟังก์ชันรูปร่างโนดเชิงเส้นแบบเอกฐานแปลงเป็นฟังก์ชันรูป-ร่างเวกเตอร์อีลีเมนต์ขอบเชิงเส้นแบบเอกฐาน โดยใช้รูปแบบวิทเนย์

$$\overline{S}_1 = \quad l_1(S_1\nabla S_2) \tag{ซ.7}$$

$$\overline{S}_2 = -l_1(S_2\nabla S_1) \tag{ซ.8}$$

$$\overline{S}_3 = \quad l_2(S_2\nabla S_3) \tag{ซ.9}$$

$$\overline{S}_4 = -l_2(S_3\nabla S_2) \tag{ซ.10}$$

$$\overline{S}_5 = \quad l_3(S_3\nabla S_1) \tag{ซ.11}$$

$$\overline{S}_6 = -l_3(S_1\nabla S_3) \tag{ซ.12}$$

นำสมการ (ข.5) ถึง (ข.9) และ (ค.1) ถึง (ค.3) แทนลงในชุดสมการ (ซ.7) ถึง (ซ.12) จะได้

$$\begin{aligned}\overline{S}_1 = \quad & \frac{l_1}{2A_e(1-L_1)^{\rho+1}}\left(1-(1-L_1)^{1-\rho}\right)\Big[\left(b_1\rho L_2 + b_2(1-L_1)\right)\overline{a}_x \\ & + \left(c_1\rho L_2 + c_2(1-L_1)\right)\overline{a}_y\Big]\end{aligned} \tag{ซ.13}$$

$$\overline{S}_2 = -\frac{l_1}{2A_e(1-L_1)^{2\rho}}L_2\left[b_1(1-\rho)\overline{a}_x + c_1(1-\rho)\overline{a}_y\right] \tag{ซ.14}$$

$$\begin{aligned}\overline{S}_3 = \quad & \frac{l_2}{2A_e(1-L_1)^{2\rho+1}}L_2\Big[\left(b_1\rho L_3 + b_3(1-L_1)\right)\overline{a}_x \\ & + \left(c_1\rho L_3 + c_3(1-L_1)\right)\overline{a}_y\Big]\end{aligned} \tag{ซ.15}$$

$$\overline{S}_4 = -\frac{l_2}{2A_e(1-L_1)^{2\rho+1}} L_3 \left[(b_1\rho L_2 + b_2(1-L_1))\overline{a}_x \right.$$
$$\left. + (c_1\rho L_2 + c_2(1-L_1))\overline{a}_y \right] \quad (ซ.16)$$

$$\overline{S}_5 = \frac{l_3}{2A_e(1-L_1)^{2\rho}} L_3 \left[b_1(1-\rho)\overline{a}_x + c_1(1-\rho)\overline{a}_y\right] \quad (ซ.17)$$

$$\overline{S}_6 = -\frac{l_3}{2A_e(1-L_1)^{\rho+1}} \left(1-(1-L_1)^{1-\rho}\right)\left[(b_1\rho L_3 + b_3(1-L_1))\overline{a}_x \right.$$
$$\left. + (c_1\rho L_3 + c_3(1-L_1))\overline{a}_y \right] \quad (ซ.18)$$

โดยที่ความยาวของขอบจำเป็นจะต้องสอดคล้องกันไปในทิศทางเดียว มิฉะนั้นจะทำให้สนามที่คำนวณได้นั้นจะหักล้างกัน ดังสมการที่ (ข.16) และรูปที่ ข.1

เนื่องจากการอินทิเกรตฟังก์ชันรูปร่างแบบเอกฐานนั้นสามารถทำได้ยาก เพื่อให้ง่ายในการอินทิเกรต จึงนำวิธีอินทิเกรตเชิงตัวเลข (numerical integration) มาใช้ในการประมาณการอินทิเกรตฟังก์ชันรูปร่างนั้น และจำเป็นต้องแปลงพิกัดเรขาคณิต (geometrical transformation) จาก อีลีเมนต์จริง (real element) ไปยัง อีลีเมนต์อ้างอิง (reference element) (รายละเอียดดังในภาคผนวก จ) จะได้สมการฟังก์ชันรูปร่างโนดแบบเอกฐานใหม่ดังนี้

$$S_1 = \left[1-(\xi+\eta)^{1-\rho}\right]\left[2\left(1-(\xi+\eta)^{1-\rho}\right)-1\right] \quad (ซ.19)$$

$$S_2 = \frac{\xi}{(\xi+\eta)^{\rho}}\left[2\frac{\xi}{(\xi+\eta)^{\rho}}-1\right] \quad (ซ.20)$$

$$S_3 = \frac{\eta}{(\xi+\eta)^{\rho}}\left[2\frac{\eta}{(\xi+\eta)^{\rho}}-1\right] \quad (ซ.21)$$

$$S_4 = 4\left[1-(\xi+\eta)^{1-\rho}\right]\left[\frac{\xi}{(\xi+\eta)^{\rho}}\right] \quad (ซ.22)$$

$$S_5 = 4\left[\frac{\xi}{(\xi+\eta)^{\rho}}\right]\left[\frac{\eta}{(\xi+\eta)^{\rho}}\right] \quad (ซ.23)$$

$$S_6 = 4\left[\frac{\eta}{(\xi+\eta)^{\rho}}\right]\left[1-(\xi+\eta)^{1-\rho}\right] \quad (ซ.24)$$

จากนั้นนำฟังก์ชันรูปร่างแบบโนดมาแปลงเป็นฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์ โดยใช้รูปแบบวิทเนย์ (Whitney Form) ตามสมการ (ซ.7) ถึง (ซ.12) แต่เนื่องจากเป็นการอนุพันธ์แบบกฎลูกโซ่ (chain rule) จึงจำเป็นต้องทราบเมตริกซ์จาคอเบียนเพื่อให้ง่ายต่อการอนุพันธ์แบบกฎลูกโซ่ดังสมการ

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\bar{a}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\bar{a}_y \tag{ข.25}$$

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\bar{a}_x + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\bar{a}_y \tag{ข.26}$$

จากภาคผนวก จ สมการ (จ.18) จะได้

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{1}{2A_e}b_2 \tag{ข.27}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{1}{2A_e}b_3 \tag{ข.28}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{1}{2A_e}c_2 \tag{ข.29}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{1}{2A_e}c_3 \tag{ข.30}$$

เริ่มจากการหาฟังก์ชันอนุพันธ์แบบกฎลูกโซ่ของฟังก์ชันรูปร่างโนดแบบเอกฐาน

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} = \frac{\partial S_1}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} \tag{ข.31}$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial x} = \frac{\partial S_2}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} \tag{ข.32}$$

$$\frac{\partial S_3}{\partial x} = \frac{\partial S_3}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial S_3}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} \tag{ข.33}$$

$$\frac{\partial S_4}{\partial x} = \frac{\partial S_4}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial S_4}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} \tag{ข.34}$$

$$\frac{\partial S_5}{\partial x} = \frac{\partial S_5}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial S_5}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} \tag{ข.35}$$

$$\frac{\partial S_6}{\partial x} = \frac{\partial S_6}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial S_6}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} \tag{ข.36}$$

เมื่อหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างเทียบกับพิกัดอ้างอิงจะได้

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} = \frac{1-\rho}{2A_e(\xi+\eta)^{\rho}}\left[4\left((\xi+\eta)^{1-\rho}\right)-3\right](b_2+b_3) \tag{ข.37}$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial x} = \frac{-4\xi+(\xi+\eta)^{\rho}}{2A_e(\xi+\eta)^{1+2\rho}}\left[(-\xi+\rho\xi-\eta)b_2-\rho\xi b_3\right] \tag{ข.38}$$

$$\frac{\partial S_3}{\partial x} = \frac{-4\eta+(\xi+\eta)^{\rho}}{2A_e(\xi+\eta)^{1+2\rho}}\left[\rho\eta b_2+(-\xi-\eta+\rho\eta)b_3\right] \tag{ข.39}$$

$$\frac{\partial S_4}{\partial x}=\frac{-4\xi}{2A_e(\xi+\eta)^{1+2\rho}}\left[(1-2\rho)(\xi+\eta)+\rho(\xi+\eta)^{\rho}\right]$$

$$\left[4b_2\frac{1-(\xi+\eta)^{1-\rho}}{(\xi+\eta)^{\rho}}+b_3\right] \qquad (ช.40)$$

$$\frac{\partial S_5}{\partial x}=\frac{4\xi\eta(1-2\rho)}{2A_e(\xi+\eta)^{1+2\rho}}\left[4\eta^2 b_2+4\xi^2 b_3\right] \qquad (ช.41)$$

$$\frac{\partial S_6}{\partial x}=\frac{-4\eta}{2A_e(\xi+\eta)^{1+2\rho}}\left[(1-2\rho)(\xi+\eta)+\rho(\xi+\eta)^{\rho}\right]$$

$$\left[4b_2\frac{1-(\xi+\eta)^{1-\rho}}{(\xi+\eta)^{\rho}}+b_3\right] \qquad (ช.42)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial y}=\frac{1-\rho}{2A_e(\xi+\eta)^{\rho}}\left[4\left((\xi+\eta)^{1-\rho}\right)-3\right](c_2+c_3) \qquad (ช.43)$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial y}=\frac{-4\xi+(\xi+\eta)^{\rho}}{2A_e(\xi+\eta)^{1+2\rho}}\left[(-\xi+\rho\xi-\eta)\,c_2-\rho\xi c_3\right] \qquad (ช.44)$$

$$\frac{\partial S_3}{\partial y}=\frac{-4\eta+(\xi+\eta)^{\rho}}{2A_e(\xi+\eta)^{1+2\rho}}\left[\rho\eta c_2+(-\xi-\eta+\rho\eta)\,c_3\right] \qquad (ช.45)$$

$$\frac{\partial S_4}{\partial y}=\frac{-4\xi}{2A_e(\xi+\eta)^{1+2\rho}}\left[(1-2\rho)(\xi+\eta)+\rho(\xi+\eta)^{\rho}\right]$$

$$\left[4c_2\frac{1-(\xi+\eta)^{1-\rho}}{(\xi+\eta)^{\rho}}+c_3\right] \qquad (ช.46)$$

$$\frac{\partial S_5}{\partial y}=\frac{4\xi\eta(1-2\rho)}{2A_e(\xi+\eta)^{1+2\rho}}\left[4\eta^2 c_2+4\xi^2 c_3\right] \qquad (ช.47)$$

$$\frac{\partial S_6}{\partial y}=\frac{-4\eta}{2A_e(\xi+\eta)^{1+2\rho}}\left[(1-2\rho)(\xi+\eta)+\rho(\xi+\eta)^{\rho}\right]$$

$$\left[4c_2\frac{1-(\xi+\eta)^{1-\rho}}{(\xi+\eta)^{\rho}}+c_3\right] \qquad (ช.48)$$

หาฟังก์ชันรูปร่างแบบเวกเตอร์โดยพิจารณาทีละด้าน จากสมการ (ช.7) ถึง (ช.12) จะได้

$$\overline{S}_{x1}=\frac{l_1}{2A_e}\left[1-(\xi+\eta)^{1-\rho}\right]\left[\frac{b_2(\xi-\rho\xi-\eta)-b_3\rho\xi}{(\xi+\eta)^{1+\rho}}\right] \qquad (ช.49)$$

$$\overline{S}_{y1}=\frac{l_1}{2A_e}\left[1-(\xi+\eta)^{1-\rho}\right]\left[\frac{c_2(\xi-\rho\xi-\eta)-c_3\rho\xi}{(\xi+\eta)^{1+\rho}}\right] \qquad (ช.50)$$

$$\overline{S}_{x2}=-\frac{l_1}{2A_e}\left[\frac{\xi(\rho-1)(b_2+b_3)}{(\xi+\eta)^{2\rho}}\right] \qquad (ช.51)$$

$$\overline{S}_{y2}=-\frac{l_1}{2A_e}\left[\frac{\xi(\rho-1)(c_2+c_3)}{(\xi+\eta)^{2\rho}}\right] \qquad (ช.52)$$

$$\overline{S}_{x3}=\frac{l_2}{2A_e}\left[\frac{\xi\left(-b_2\rho\xi+b_3\left(\xi+\eta-\eta\rho\right)\right)}{\left(\xi+\eta\right)^{1+2\rho}}\right] \tag{ช.53}$$

$$\overline{S}_{x3}=\frac{l_2}{2A_e}\left[\frac{\xi\left(-c_2\rho\xi+c_3\left(\xi+\eta-\eta\rho\right)\right)}{\left(\xi+\eta\right)^{1+2\rho}}\right] \tag{ช.54}$$

$$\overline{S}_{x4}=-\frac{l_2}{2A_e}\left[\frac{\eta\left(b_2\left(\xi-\rho\xi-\eta\right)-b_3\rho\xi\right)}{\left(\xi+\eta\right)^{1+2\rho}}\right] \tag{ช.55}$$

$$\overline{S}_{y4}=-\frac{l_2}{2A_e}\left[\frac{\eta\left(c_2\left(\xi-\rho\xi-\eta\right)-c_3\rho\xi\right)}{\left(\xi+\eta\right)^{1+2\rho}}\right] \tag{ช.56}$$

$$\overline{S}_{x5}=\frac{l_3}{2A_e}\left[\frac{\eta\left(\rho-1\right)\left(b_2+b_3\right)}{\left(\xi+\eta\right)^{2\rho}}\right] \tag{ช.57}$$

$$\overline{S}_{y5}=\frac{l_3}{2A_e}\left[\frac{\eta\left(\rho-1\right)\left(c_2+c_3\right)}{\left(\xi+\eta\right)^{2\rho}}\right] \tag{ช.58}$$

$$\overline{S}_{x6}=-\frac{l_3}{2A_e}\left[1-\left(\xi+\eta\right)^{1-\rho}\right]\left[\frac{-b_2\rho\xi+b_3\left(\xi+\eta-\eta\rho\right)}{\left(\xi+\eta\right)^{1+\rho}}\right] \tag{ช.59}$$

$$\overline{S}_{y6}=-\frac{l_3}{2A_e}\left[1-\left(\xi+\eta\right)^{1-\rho}\right]\left[\frac{-c_2\rho\xi+c_3\left(\xi+\eta-\eta\rho\right)}{\left(\xi+\eta\right)^{1+\rho}}\right] \tag{ช.60}$$

**การอินทิเกรตฟังก์ชันรูปร่าง**

เนื่องจากแปลงพิกัดจากอีลีเมนต์จริงไปยังอีลีเมนต์อ้างอิง การอินทิเกรตฟังก์ชันรูปร่างนั้น จึงสามารถใช้การประมาณการอินทิเกรตแบบเกาส์ (รายละเอียดดังในภาคผนวก ง) โดยการแทนจุดในแต่ละตำแหน่งของการประมาณ ดังสมการ (จ.31) และ (ง.1)

$$\iint_{\Omega}\phi\left(x,y\right)dxdy=\int_0^1\int_0^{1-\xi}\phi\left(\xi,\eta\right)\cdot\left|J\right|d\eta\xi \tag{ช.61}$$

$$\int_0^1\int_0^{1-\xi}f\left(\xi,\eta\right)d\eta d\xi=\sum_{i=1}^{n}w_i\cdot f\left(\eta_i,\xi_i\right) \tag{ช.62}$$

ดังนั้นสามารถอินทิเกรตโดเมนจริงได้ดังสมการ

$$\iint_{\Omega}\phi\left(x,y\right)dxdy=\left|J\right|\cdot\sum_{i=1}^{n}w_i\cdot f\left(\eta_i,\xi_i\right) \tag{ช.63}$$

# ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายสุวิชาญ กาวาฮารา เกิดเมื่อวันที่ 5 กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2520 ที่อำเภอเมือง จังหวัดตรัง เข้ารับการศึกษาระดับมัธยมต้นที่โรงเรียนบูรณะรำลึก และระดับมัธยมปลายที่โรงเรียนวิเชียรมาตุ จังหวัดตรัง สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย ในปีการศึกษา 2541 ระหว่างการศึกษาเข้ารับฝึกงานภาคฤดูร้อนที่การท่าอากาศยานกรุงเทพฯ และเข้าศึกษาต่อในระดับปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2542