บทที่ 4

การวิเคราะห์คิเนแมติก (Kinematic Analysis)

คิเนแมติก (Kinematic) เป็นการศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุ โดยไม่คำนึงถึงแรงที่มากระทำเพื่อให้วัตถุนั้นเคลื่อนที่ เนื่องจากชิ้นส่วนต่าง ๆ ของเครื่องจักรโดยทั่วไปจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูง ดังนั้นปริมาณทางคิเนแมติก เช่นความเร็ว และความเร่ง จึงเป็นส่วนประกอบที่สำคัญในการวิเคราะห์และออกแบบชิ้นส่วนต่าง ๆ ของเครื่องจักร ตามกฎของนิวตัน (Newton's Laws) ถ้าวัตถุมีความเร่งเกิดขึ้นก็จะต้องมีแรงมากระทำกับวัตถุนั้น ($F = ma$) และแรงที่กระทำนี้จะทำให้เกิดความเค้น (Stress) ขึ้นภายในวัตถุ ดังนั้นเราจะเห็นได้ว่า การที่จะหาแรงและความเค้นที่เกิดขึ้นภายในวัตถุที่เคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูงนั้นเราจำเป็นต้องหาความเร็วและความเร่งที่เกิดขึ้นก่อน ซึ่งในงานวิจัยนี้จะศึกษาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุ ที่กำลังเคลื่อนที่อยู่ในระนาบ (Plane) เดียวกัน หรือในระนาบที่ขนานกันเท่านั้น (Parallel Plane)

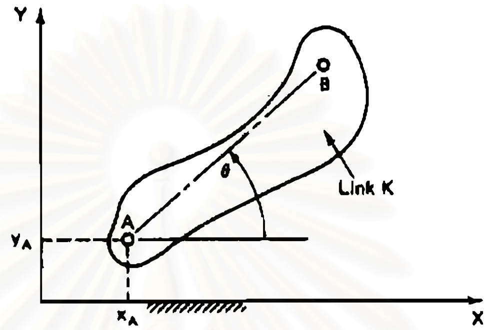
การเคลื่อนที่ในระนาบ (Plane Motion) คือการเคลื่อนที่ของวัตถุในลักษณะที่จุดทุกจุดบนวัตถุนั้น เคลื่อนที่ไปบนระนาบต่าง ๆ ที่ขนานกันและอยู่ห่างจากกันเป็นระยะคงที่เสมอ การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุที่เคลื่อนที่แบบการเคลื่อนที่ในระนาบนี้ ทำได้โดยการฉาย (Project) จุดต่าง ๆ บนวัตถุนั้นไปบนระนาบอ้างอิง (Reference Plane) อันหนึ่งซึ่งจะถูกเรียกเป็นระนาบของการเคลื่อนที่ (Plane of Motion) การเคลื่อนที่ในระนาบแบ่งออกเป็น

1. การหมุน (Rotation) คือการเคลื่อนที่ที่ทุก ๆ จุดบนวัตถุนั้นมีระยะห่างจากแกนหมุนซึ่งตั้งฉากกับระนาบของการเคลื่อนที่เป็นระยะคงที่เสมอ และทางเดินของจุดทุกจุดบนวัตถุนั้นยกเว้นจุดของแกนหมุน บนระนาบของการเคลื่อนที่จะเป็นวงกลม

2. การเลื่อนขนาน (Translation) คือการเคลื่อนที่ที่เส้นตรงใด ๆ บนวัตถุนั้น เคลื่อนไปในตำแหน่งที่ขนานกับตำแหน่งเดิมเสมอ การเลื่อนขนานแบ่งออกเป็น การเคลื่อนที่เชิงเส้นตรง (Rectilinear Translation) ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่แบบการเลื่อนขนาน ในลักษณะที่จุดทุกจุดบนวัตถุนั้นเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง เช่นการเคลื่อนที่ของลูกสูบ และการเคลื่อนที่เชิงเส้นโค้ง (Curvilinear Translation) จุดทุกจุดจะเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้ง เช่นการเคลื่อนที่ของกระเช้าในชิงช้าสวรรค์เป็นต้น

ในการวิเคราะห์คิเนแมติกในงานวิจัยนี้จะหาค่าของการกระจัด ความเร็ว และความเร่งของกลไก ซึ่งจะใช้วิธีการพิจารณาสมการเงื่อนไขบังคับ (Constraint Equations) เช่นเงื่อนไขบังคับของข้อต่อแบบคู่สัมผัสหมุน เงื่อนไขบังคับของข้อต่อแบบคู่สัมผัสเลื่อนไถล และเงื่อนไขบังคับของก้านต่อที่ถูกยึดอยู่กับที่เป็นต้น ซึ่งสมการเงื่อนไขบังคับเหล่านี้จะทำให้ลดจำนวน

ระดับขั้นเสรีของก้านต่อทั้งหมด เพื่อให้เหลือจำนวนระดับขั้นเสรีที่ต้องการสำหรับกลไกที่จะออกแบบนั้น ซึ่งสมการเงื่อนไขบังคับทั้งหมดนี้เมื่อเอามาหาอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ก็จะเป็นสมการหาความเร็วของกลไกได้และเมื่อนำมาหาอนุพันธ์อันดับสองก็จะเป็นสมการหาความเร่งของกลไก ซึ่งก่อนที่ก้านต่อของกลไกนี้จะมีข้อต่อต่างๆ มาต่อกับก้านต่อ 2 ก้านต่อนั้น โดยที่ก้านต่อหนึ่งที่ยังไม่มีการต่อกับข้อต่อใดๆ จะเป็นดังรูปที่ 4.1



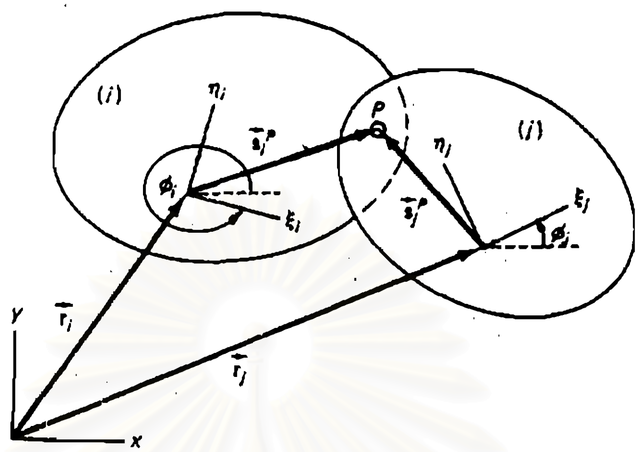
รูปที่ 4.1 ก้านต่อที่มีการเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระในระนาบ

ตำแหน่งของก้านต่อ AB ที่ขณะใดๆ เทียบกับระนาบจะถูกกำหนดด้วยตัวแปรสามตัว คือ X_A, Y_A, θ ของเส้น AB ตัวแปรทั้งสามตัวนี้ คือระดับขั้นเสรี ของก้านต่อ AB ที่กำลังเคลื่อนที่อยู่ในระนาบนั่นเอง นั่นคือก้านต่อใดๆ ที่มีการเคลื่อนที่อย่างอิสระในระนาบใดระนาบหนึ่งจะมีระดับขั้นเสรีเท่ากับ 3 เสมอ ถ้า X_A, Y_A ถูกทำให้มีค่าคงที่โดยทำให้เป็นข้อต่อหมุนที่จุด A แล้วการเคลื่อนที่ของก้านต่อ AB จะเคลื่อนที่ได้โดยหมุนรอบจุด A เท่านั้น นั่นคือก้านต่อ AB จะถูกจำกัดการเคลื่อนที่ไปสองข้อ เหลือระดับขั้นเสรีเพียงเท่ากับ 1 ดังนั้นตำแหน่งของก้านต่อ AB ที่ขณะใดๆ จึงสามารถกำหนดโดยใช้ตัวแปร θ เพียงตัวเดียว ด้วยเหตุนี้การต่อด้วยข้อต่อแบบคู่สัมผัสหมุน จะลดจำนวนระดับขั้นเสรีของก้านต่อไป 2 เหลือระดับขั้นเสรีเพียง 1 ในทำนองเดียวกัน ข้อต่อที่เป็นคู่สัมผัสเลื่อนไถล คู่สัมผัสเกลียว คู่สัมผัสกลิ้งโดยไม่ไถลจะถูกจำกัดการเคลื่อนที่ไป 2 ข้อ เหลือระดับขั้นเสรีเท่ากับ 1

4.1 ข้อต่อคู่สัมผัสหมุน (Revolute Joint)

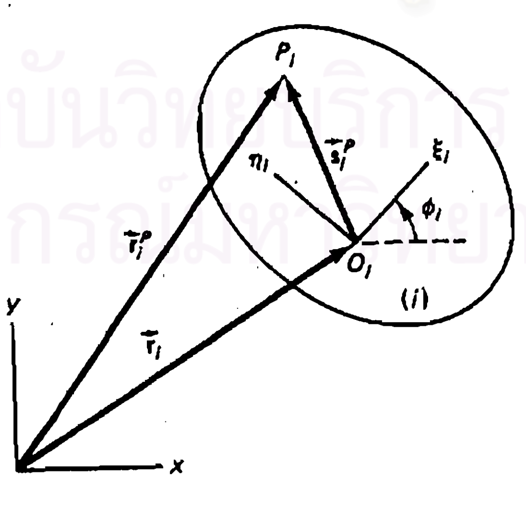
ข้อต่อคู่สัมผัสหมุนเป็นสมการเงื่อนไขบังคับเพื่อลดจำนวนระดับขั้นเสรีของก้านต่อที่มีอยู่ในกลไก เพื่อให้เหลือจำนวนระดับขั้นเสรีที่ต้องการสำหรับทำนายการเคลื่อนที่ของระบบ จากรูปที่ 4.2 นั้นจะพิจารณาก้านต่อ 2 ก้านต่อ คือก้านต่อ i กับก้านต่อ j มาต่อกันด้วยข้อต่อคู่

สัมผัสหมุนที่จุด P เมื่อก้านต่อทั้ง 2 ถูกยึดที่จุด P ก็ทำให้ก้านต่อทั้งสองที่จุด P นั้นไม่สามารถเคลื่อนที่เลื่อนขนานได้ และจะเคลื่อนที่ได้เฉพาะการหมุนเท่านั้น



รูปที่ 4.2 ก้านต่อ i และ j ต่อด้วยข้อต่อคู่สัมผัสหมุนที่จุด P

จากรูปที่ 4.2 แกน x, y เป็นระบบพิกัดฉาก ซึ่งเป็นพิกัดวงกว้าง (Global Coordinates) ของกลไก มีความหมายว่าเป็นพิกัดที่ใช้สำหรับเป็นแกนอ้างอิงรวมของกลไก ซึ่งในกลไกอาจจะมีแกนย่อยๆ เฉพาะที่ของชิ้นส่วนต่างๆ เพื่อสะดวกในการหาพิกัดที่จุด P โดยแกนย่อยนี้เรียกว่า พิกัดเฉพาะที่ (Local Coordinates) และเพื่อต้องการให้จุด P นั้นหรือจุดต่างๆ สามารถอ้างอิงได้ที่แกน x, y ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน ดังนั้นจึงต้องหาความสัมพันธ์ของพิกัดวงกว้างกับพิกัดเฉพาะที่ ดังรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 ความสัมพันธ์กันระหว่างพิกัดเฉพาะที่ (Local Coordinates) กับพิกัดวงกว้าง (Global Coordinates) ที่ตำแหน่ง P_i

จากรูปที่ 4.3 ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเฉพาะที่ (Local Coordinates) และพิกัดวงกว้าง (Global Coordinates) จะได้สมการดังนี้

$$\mathbf{s}_i^P = \mathbf{A}_i \mathbf{s}'^P_i \tag{4.1}$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}_i$$

$$\mathbf{r}_i^P = \mathbf{r}_i + \mathbf{A}_i \mathbf{s}'^P_i \tag{4.2}$$

$$\begin{bmatrix} x^P \\ y^P \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \xi^P \\ \eta^P \end{bmatrix}_i$$

จากรูปที่ 4.2 จะได้สมการเงื่อนไขบังคับสำหรับข้อต่อคู่สัมผัสหมุนจากสมการวงวนเวคเตอร์ (Vector Loop Equation) ดังนี้

$$\mathbf{r}_i + \mathbf{s}_i^P - \mathbf{r}_j - \mathbf{s}_j^P = \mathbf{0}$$

จากสมการ (4.1) จะได้

$$\Phi^{(r,2)} = \mathbf{r}_i + \mathbf{A}_i \mathbf{s}'^P_i - \mathbf{r}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{s}'^P_j = \mathbf{0} \tag{4.3}$$

จากสมการ (4.2) จะได้

$$\Phi^{(r,2)} = \begin{bmatrix} x_i^P - x_j^P \\ y_i^P - y_j^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

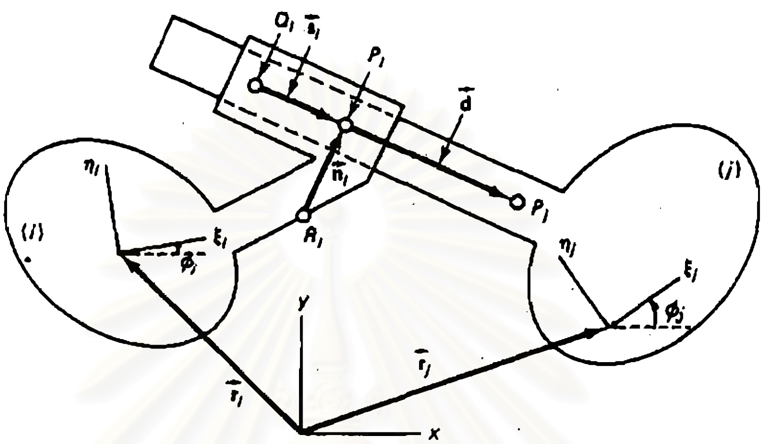
$$\Phi^{(r,2)} = \begin{bmatrix} x_i + \xi_i^p \cos\phi - \eta_i^p \sin\phi - x_j - \xi_j^p \cos\phi + \eta_j^p \sin\phi \\ y_i + \xi_i^p \sin\phi - \eta_i^p \cos\phi - y_j - \xi_j^p \sin\phi - \eta_j^p \cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

การต่อด้วยข้อต่อคู่สัมผัสหมุน จะลดจำนวนระดับขั้นเสรีของก้านต่อไป 2

4.2 ข้อต่อคู่สัมผัสเลื่อนไถล (Translation Joint)

จากรูปที่ 4.2 นั้นจะพิจารณาก้านต่อ 2 ก้านต่อ คือก้านต่อ i กับก้านต่อ j มาต่อกันด้วยข้อต่อคู่สัมผัสเลื่อนไถล ซึ่งจะใช้ 3 จุดในการพิจารณาในการต่อด้วยข้อต่อเลื่อนไถล คือ Q_i, P_i อยู่บนก้านต่อ i มีเวคเตอร์ $\bar{s}_i$ แทนการกระจัดจาก Q_i ไปที่ P_i และจุด P_j อยู่บนก้าน

ต่อ j โดยมีเวคเตอร์ $\vec{d}$ เป็นการกระจัดจากจุด P_i ไปที่จุด P_j ดังนั้นจะเห็นว่าก้านต่อ i จะเคลื่อนที่ในแนวเลื่อนขนาน Q_i, P_i, P_j ส่วนเวคเตอร์ $\vec{n}_i$ ที่เป็นการกระจัดจากจุด R_i ไปที่ P_i เพื่อจะกำหนดว่าเวคเตอร์ $\vec{d}$ นั้นจะเคลื่อนที่ตั้งฉากกับเวคเตอร์ n_i เสมอ ดังนั้นข้อต่อคู่สัมผัสเลื่อนไถลจะบังคับให้เคลื่อนที่ในแนวเลื่อนขนานได้เท่านั้น



รูปที่ 4.4 ก้านต่อ i และ j ต่อด้วยข้อต่อคู่สัมผัสเลื่อนไถล

จากรูปที่ 4.4 สมการสำหรับจำกัดความสัมพันธ์ของการหมุนระหว่าง 2 ก้านต่อ คือก้านต่อที่ i และก้านต่อที่ j

$$\phi_i - \phi_j - (\phi_i^0 - \phi_j^0) = 0 \tag{4.6}$$

โดยที่ ϕ_i^0, ϕ_j^0 คือมุมเริ่มต้นของการหมุน และเพื่อที่จำกัดการเคลื่อนที่สัมพันธ์กันระหว่าง 2 ก้านต่อ ในทิศทางตั้งฉาก กับแนวทางการเคลื่อนที่ของการเลื่อนไถล 2 เวคเตอร์ $\mathbf{s}_i$ และ $\mathbf{d}$ แสดงในรูปที่ 4.4 ซึ่ง 2 เวคเตอร์นี้ต้องขนานกัน เวคเตอร์เหล่านี้จะถูกกำหนดโดย 3 ตำแหน่ง บนแนวทางเลื่อนไถล 2 จุด ซึ่งอยู่บนก้านต่อ i และ 1 จุดอยู่บนก้านต่อ j ดังนั้นเราจะบังคับได้โดยการใช้ผลคูณจุด (Dot Product) ของ 2 เวคเตอร์เท่ากับศูนย์ โดยกำหนดเวคเตอร์ $\mathbf{n}_i$ ตั้งฉากกับแนวทางของการเลื่อนไถล และก็ตั้งฉากกับเวคเตอร์ $\mathbf{d}$ ดังนั้น

$$\mathbf{n}_i^T \mathbf{d} = 0$$

$$(x_i^P - x_i^R)(x_j^P - x_i^P) - (y_i^P - y_i^R)(y_j^P - y_i^P) = 0 \tag{4.7}$$

$$\mathbf{n}_i = \begin{bmatrix} x_i^P - x_i^R \\ y_i^P - y_i^R \end{bmatrix} \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} x_j^P - x_i^P \\ y_j^P - y_i^P \end{bmatrix}$$

ถ้า $n_i = s_i$

$$\mathbf{n}_i = \begin{bmatrix} x_i^P - x_i^R \\ y_i^P - y_i^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(y_i^P - y_i^Q) \\ x_i^P - x_i^Q \end{bmatrix}$$

สมการ (4.6) และสมการ (4.7) เป็น 2 สมการของข้อต่อคู่สัมผัสเลื่อนไถลจะได้

$$\Phi^{(t,2)} = \begin{bmatrix} (x_i^P - x_i^Q)(y_j^P - y_i^P) - (y_i^P - y_i^Q)(x_j^P - x_i^P) \\ \phi_i - \phi_j - (\phi_i^0 - \phi_j^0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

การต่อด้วยข้อต่อคู่สัมผัสเลื่อนไถล จะลดจำนวนระดับขั้นเสรีของก้านต่อไป 2

4.3 ก้านต่อส่งกำลังขับเคลื่อน (Driving Link)

ส่งกำลังขับเคลื่อนแบบหมุน คือกำหนดเงื่อนไขบังคับให้ก้านต่อให้เคลื่อนที่ในลักษณะหมุนไปตามเวลาโดยเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุมตามที่กำหนด เช่นก้านต่ออาจจะติดมอเตอร์เพื่อขับเคลื่อนกลไก ดังนั้นระยะทางที่เคลื่อนที่เชิงมุมของก้านต่อเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น คือ

$$\phi_i = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \dot{\phi}^0 t + \phi^0 = d_1(t)$$

ดังนั้นสมการเงื่อนไขบังคับของก้านต่อที่มีมอเตอร์ติดอยู่ หรือเป็นก้านต่อส่งเข้าที่ใช้ขับเคลื่อนกลไกคือ

$$\Phi^{(d)} = \phi_i - d_1(t) = 0 \tag{4.9}$$

$$d_1(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \dot{\phi}^0 t + \phi^0 \tag{4.10}$$

ϕ_i คือมุมของก้านต่อที่เวลา $t \succ 0$

$\dot{\phi}^0$ คือความเร็วเชิงมุม (Angular Velocity) ที่เวลา $t = 0$

α คือความเร่งเชิงมุม (Angular Acceleration)

ϕ^0 คือมุมของก้านต่อที่เวลา $t = 0$

ส่งกำลังขับเคลื่อนแบบเลื่อนไถล คือกำหนดเงื่อนไขบังคับให้ก้านต่อให้เคลื่อนที่ในลักษณะเลื่อนขนานเป็นเชิงเส้นไปตามเวลาโดยเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเชิงเส้นและความเร่งเชิงเส้นตามที่กำหนด ดังนั้นระยะทางที่เคลื่อนที่เชิงเส้นของก้านต่อเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น คือ

$$x_i = \frac{1}{2}at^2 + \dot{x}^0 t + x^0 = d_1(t)$$

ดังนั้นสมการเงื่อนไขบังคับของก้านต่อที่ใช้ส่งกำลังขับเคลื่อนกลไกคือ

$$\Phi^{(d)} = x_i - d_2(t) = 0 \tag{4.11}$$

$$d_2(t) = \frac{1}{2}at^2 + \dot{x}^0 t + x^0 \tag{4.12}$$

$$\Phi^{(d)} = y_i - d_3(t) = 0 \tag{4.13}$$

$$d_3(t) = \frac{1}{2}gt^2 + \dot{y}^0 t + y^0 \tag{4.14}$$

$\dot{x}^0$ คือความเร็วเชิงเส้นตามแนวแกน x ที่เวลา $t = 0$

$\dot{y}^0$ คือความเร็วเชิงเส้นตามแนวแกน y ที่เวลา $t = 0$

a คือความเร่งเชิงเส้นตามแนวแกน x

g คือความเร่งเชิงเส้นตามแนวแกน y

x^0 คือระยะทางเริ่มต้นของก้านต่อตามแนวแกน x ที่เวลา $t = 0$

y^0 คือระยะทางเริ่มต้นของก้านต่อตามแนวแกน y ที่เวลา $t = 0$

การกำหนดก้านต่อใดส่งกำลังขับเคลื่อน (Driving Constraints) จะลดจำนวนระดับขั้นเสรีของก้านต่อไป 1

4.4 ก้านต่อยึดอยู่กับที่ (Ground Link)

เป็นการกำหนดเงื่อนไขบังคับของก้านต่อที่ยึดอยู่กับที่ ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่จะกำหนดว่าไม่มีการเคลื่อนที่ในแนวทางใดๆ เลย ทั้งในการเคลื่อนที่เลื่อนขนานเชิงเส้น และในการเคลื่อนที่เชิงมุมดังนี้

$$\Phi = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ \phi_i \end{bmatrix} = 0 \qquad (4.15)$$

การกำหนดก้านต่อใดยึดอยู่กับที่ (Ground Constraints) จะลดจำนวนระดับขั้นเสรีของก้านต่อไป 3

4.5 วิธีการคำนวณการวิเคราะห์คิเนแมติก (Kinematics Analysis)

ในการแสดงตำแหน่งต่างๆ ของก้านต่อต่างๆ ของกลไกนั้นจะใช้เซ็ตของพิกัด (Set of Coordinates) และเมื่อกลไกเคลื่อนที่ ตัวแปรเหล่านี้ก็จะเปลี่ยนแปลงตามเวลา เพื่อให้สามารถเก็บจำนวนเซ็ตของพิกัดที่เป็นตำแหน่งของก้านต่อๆ มากๆ ได้ จะใช้พิกัดของเวคเตอร์ (Vector Of Coordinate) เป็นสดมภ์เวคเตอร์ (Column Vector)

ดังนั้นสำหรับเซ็ตของพิกัดของก้านต่อ i จะใช้แทนด้วยเวคเตอร์

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i &= \left[\mathbf{r}^T, \phi\right]_i^T \\ &= [x, y, \phi]_i^T \end{aligned}$$

สำหรับกลไกที่มีจำนวน n ก้านต่อ จะมีพิกัดเวคเตอร์ (Coordinate Vector) เป็น $3\times n$ เวคเตอร์

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \left[\mathbf{q}_1^T, \mathbf{q}_2^T, \ldots, \mathbf{q}_n^T\right]^T \\ &= \left[x_1, y_1, \phi_1, x_2, y_2, \phi_2, \ldots, x_n, y_n, \phi_n\right]^T \end{aligned} \qquad (4.16)$$

โดยที่ $\mathbf{q}$ ไม่มีตัวห้อย (Subscript) จะมีความหมายว่าเป็นพิกัดของเวคเตอร์สำหรับทั้งระบบกลไก

สมการการหาการกระจัด (Displacement Equation)

จากสมการ (4.5), (4.8), (4.9), (4.11), (4.13) และ (4.15) คือสมการที่จะลดจำนวนระดับขั้นเสรีของก้านต่อทั้งหมดของกลไก ซึ่งจะเรียกสมการพวกนี้ว่า เงื่อนไขบังคับคิเนแมติก (Kinematic Constraints) จะมีจำนวนของสมการเท่ากับ

$$m = n - k$$

m =จำนวนสมการเงื่อนไขบังคับคิเนแมติกทั้งหมด

n =จำนวนพิกัดทั้งหมดของกลไก

k =จำนวนระดับขั้นเสรีของกลไก หรือจำนวนสมการเงื่อนไขบังคับคิเนแมติกของก้านต่อส่งกำลังขับเคลื่อน

$$\Phi(\mathbf{q}) = 0 \tag{4.17}$$

$$\Phi^{(d)} = \Phi(\mathbf{q},t) = 0 \tag{4.18}$$

ตัวยก (Superscript) (d) คือเงื่อนไขบังคับส่งกำลังขับเคลื่อน (Driving Constraints)

$\Phi(\mathbf{q}) = [\Phi_1(\mathbf{q}), \Phi_2(\mathbf{q}), ..., \Phi_m(\mathbf{q})]^T$ คือ m-เวคเตอร์ ของดิฟเฟอเรียลเชี่ยลฟังก์ชัน (Differential Function) ของ $\mathbf{q}$ ซึ่งใช้ตัวชี้ i เป็นแถว (Row) และ j เป็นสดมภ์ (Column)

สมการ (4.17) และสมการ (4.18) ใช้แทนสมการพีชคณิตแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Algebraic Equations) n สมการ ซึ่งสามารถแก้สมการ n ตัวแปร กล่าวคือ $\mathbf{q}$ ที่กำหนดเวลา $t = t^i$ และการแก้สมการ (4.17) และสมการ (4.18) เป็นวิธีที่เพิ่มเงื่อนไขบังคับส่งกำลังขับเคลื่อนเข้าไปที่ท้ายของสมการเงื่อนไขบังคับคิเนแมติก (Appended Driving Constraints)

ดังนั้นมีสมการเงื่อนไขบังคับคิเนแมติก (Kinematic Constraints) ทั้งหมด $n = m + k$ สมการ

สมการการหาความเร็ว (Velocity Equation)

จะนำเอาสมการ (4.17) มาหาอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (Second Derivatives) จะได้สมการหาความเร็วดังนี้

$$\Phi_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = 0$$
$$\Phi_{\mathbf{q}}^{(d)}\dot{\mathbf{q}} + \Phi_{t}^{(d)} = 0$$

โดยที่ $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n]^T$ คือเวคเตอร์ของความเร็ว (Vector Of Velocities)

$\Phi_{\mathbf{q}} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}}\right] = \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_j}\right]_{(m \times n)}$ ซึ่งจะบรรจุอนุพันธ์ย่อยของสมการเงื่อนไขบังคับเทียบกับพิกัด นี้เรียกว่า เมทริกซ์เงื่อนไขบังคับจาโคเบียน (Constraint Jacobian Matrix)

$$\begin{bmatrix} \Phi_{\mathbf{q}} \\ \Phi_{\mathbf{q}}^{(d)} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\Phi_{t}^{(d)} \end{bmatrix} \qquad (4.19)$$

สมการ (4.19) ใช้แทนสมการพีชคณิต (Algebraic Equations) n สมการและเป็นสมการเชิงเส้น (Linear) ในเทอม $\dot{\mathbf{q}}$

สมการการหาความเร่ง (Acceleration Equation)

จะนำเอาสมการ (4.17) มาหาอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives) จะได้สมการหาความเร่งดังนี้

$$\begin{aligned} &\Phi_{\mathbf{q}}\ddot{\mathbf{q}} + \left(\Phi_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}\right)_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = 0 \\ &\Phi_{\mathbf{q}}^{(d)}\ddot{\mathbf{q}} + \left(\Phi_{\mathbf{q}}^{(d)}\dot{\mathbf{q}}\right)_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + 2\Phi_{\mathbf{q}t}^{(d)}\dot{\mathbf{q}} + \Phi_{tt}^{(d)} = 0 \end{aligned} \qquad (4.20)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_{\mathbf{q}} \\ \Phi_{\mathbf{q}}^{(d)} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -\left(\Phi_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}\right)_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} \\ -\left(\Phi_{\mathbf{q}}^{(d)}\dot{\mathbf{q}}\right)_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} - 2\Phi_{\mathbf{q}t}^{(d)}\dot{\mathbf{q}} - \Phi_{tt}^{(d)} \end{bmatrix} \qquad (4.21)$$

สมการ (4.21) ใช้แทนสมการพีชคณิต n สมการและเป็นสมการเชิงเส้นในเทอม $\ddot{\mathbf{q}}$