บทที่ 3

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

สมการเชิงอนุพันธ์ในบทที่ 2 จะถูกนำมาประดิษฐ์เป็นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์อย่างเป็นขั้นเป็นตอน เริ่มตั้งแต่การเลือกชนิดของรูปแบบเอลิเมนต์ ฟังก์ชันการประมาณบนเอลิเมนต์ การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ที่มาของเมตริกซ์ต่างๆที่ใช้ การประมาณค่าคุณสมบัติบนด้านของเอลิเมนต์ โดยรายละเอียดต่างๆ ได้แสดงในหัวข้อต่อไปนี้

3.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของการไหล

สมการเชิงอนุพันธ์ของการไหลในรูปแบบอนุรักษ์ ที่กล่าวไว้ในบทที่ 2 คือ สมการ (2.33), (2.34) ถูกนำมาแสดงอีกครั้ง

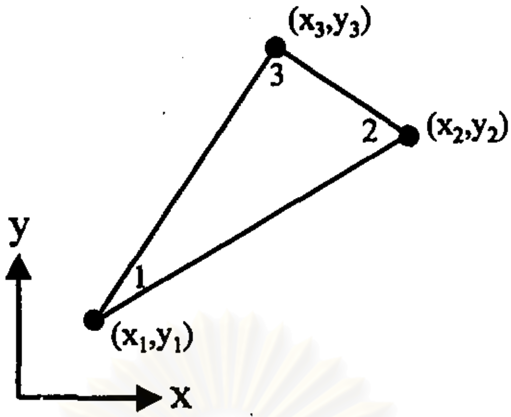
$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}=0 \tag{3.1}$$

เมื่อ

$$U=\begin{Bmatrix}\rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho\varepsilon\end{Bmatrix} \tag{3.2a}$$

$$F=\begin{Bmatrix}\rho u \\ \rho u^2+P \\ \rho uv \\ \rho u\varepsilon+Pu\end{Bmatrix} \tag{3.2b}$$

$$G=\begin{Bmatrix}\rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2+P \\ \rho v\varepsilon+Pv\end{Bmatrix} \tag{3.2c}$$



รูป 3.1 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมสำหรับการไหลแบบไม่มีความหนืดแต่อัดตัวได้

ในการจำลองรูปแบบของปัญหาการไหลในวิทยานิพนธ์นี้ ใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยม (ปราโมทย์, 2537) ดังแสดงในรูป 3.1 ทั้งนี้เนื่องจากเอลิเมนต์สามเหลี่ยมสามารถจำลองรูปแบบของปัญหาการไหลได้ง่าย สะดวกในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์และสามารถประยุกต์ใช้กับระเบียบวิธีการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติได้ โดยพิจารณาให้ค่าฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์มีค่าคงที่ และสามารถคำนวณหาได้จากค่าเฉลี่ยของค่าคุณสมบัติบนจุดต่อทุกจุดของเอลิเมนต์นั้นๆ แสดงได้ดังนี้

$$U_{ele} = \frac{(U_1 + U_2 + U_3)}{3} \tag{3.3}$$

เมื่อ U_{ele} แทนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

U_i ; i = 1, 2, 3 แทนค่าคุณสมบัติของการไหลบนจุดต่อของเอลิเมนต์

โดยพื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม (Ω) คำนวณได้จาก

$$\Omega = \frac{1}{2}\left[x_2(y_3 + y_1) + x_1(y_2 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)\right] \tag{3.4}$$

3.2 การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ เริ่มจากการนำสมการเชิงอนุพันธ์ของการไหลในรูปแบบอนุรักษ์ตามสมการ (3.1) จัดให้อยู่ในรูปอินทิกรัลบนเอลิเมนต์ (Gnoffo, 1986) ได้ดังนี้

$$\int_\Omega \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \int_\Omega \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\right) d\Omega = 0 \tag{3.5}$$

เพื่อความสะดวกในการทำความเข้าใจ จะเปลี่ยนตัวแปร F เป็น F_x และเปลี่ยนตัวแปร G เป็น F_y ดังนั้นสมการ (3.5) จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\int_\Omega \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \int_\Omega \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right) d\Omega = 0 \tag{3.6}$$

เมื่อ F_i ; $i = 1, 2$ แทนปริมาณฟลักซ์ในแนวแกน x และ y ตามลำดับ

x_i ; $i = 1, 2$ แทนพิกัดในแนวแกน x และ y ตามลำดับ

ทำการประยุกต์ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss theorem) กับสมการ (3.6) จะได้

$$\int_\Omega \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + \int_\Gamma n_i F_i \, d\Gamma = 0 \tag{3.7}$$

เมื่อ n_i แทนทิศทางโคไซน์ (Direction cosines) บนด้านของเอลิเมนต์

จากสมการ (3.7) เทอมแรกในสมการแทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าคุณสมบัติของการไหลเชิงอนุรักษ์ของเอลิเมนต์เทียบกับเวลาภายในเอลิเมนต์ และเทอมที่สองในสมการแทนปริมาณ ฟลักซ์ที่ผ่านด้านต่างๆของเอลิเมนต์ ดังนั้นอาจกล่าวได้ว่าการเปลี่ยนแปลงของค่าคุณสมบัติของการไหลเชิงอนุรักษ์ภายในเอลิเมนต์ ขึ้นอยู่กับปริมาณฟลักซ์ที่มีการแลกเปลี่ยนบนด้านต่างๆของเอลิเมนต์เท่านั้น

เทอมแรกในสมการ (3.7) สามารถจัดให้อยู่ในรูปผลต่างด้านหน้า (Forward difference) เทียบกับเวลาและแสดงอยู่ในรูปของผลเฉลยที่เวลา m+1 และ m

$$\int_\Omega \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega = \frac{\Delta U}{\Delta t}\Omega = \frac{U^{m+1} - U^{m}}{\Delta t}\Omega \tag{3.8}$$

และเทอมที่สองในสมการ (3.7) สามารถแสดงให้อยู่ในรูปดังนี้

$$\int_\Gamma n_i F_i \, d\Gamma = \int_\Gamma F_n \, d\Gamma \tag{3.9}$$

เมื่อ F_n แทนปริมาณฟลักซ์ที่ผ่านด้านของเอลิเมนต์ในทิศทางตั้งฉากกับด้านของเอลิเมนต์ แสดงได้ดังสมการ

$$F_n = F_x \cdot n_x + F_y \cdot n_y$$

$$= \begin{bmatrix} \rho u \ n_x + \rho v \ n_y \\ (\rho u^2 + P) \ n_x + \rho uv \ n_y \\ \rho uv \ n_x + (\rho v^2 + P) \ n_y \\ u(\rho\varepsilon + P) \ n_x + v(\rho\varepsilon + P) \ n_y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \rho \ U_n \\ \rho u \ U_n + P \, n_x \\ \rho v \ U_n + P \, n_y \\ \rho\varepsilon \ U_n + P \, U_n \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

$$U_n = u \cdot n_x + v \cdot n_y \tag{3.11a}$$

$$V_t = -u \cdot n_y + v \cdot n_x \tag{3.11b}$$

ดังนั้นเมื่อนำสมการ (3.8) และสมการ (3.9) แทนลงในสมการ (3.7) จะได้สมการดังนี้

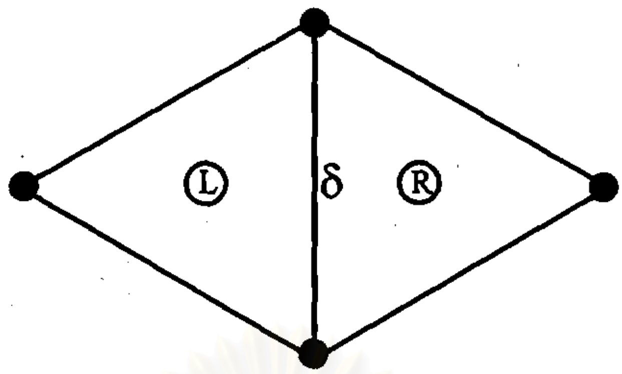
$$U^{m+1} - U^m = -\frac{\Delta t}{\Omega} \oint F_n \ d\Gamma \tag{3.12}$$

สมการ (3.12) แสดงการหาผลต่างของค่าคุณสมบัติของตัวแปรเชิงอนุรักษ์บนเอลิเมนต์ โดยคำนวณจากผลรวมของปริมาณฟลักซ์แบบไม่มีความหนืดที่ผ่านในแต่ละด้านของเอลิเมนต์ เมื่อแทนที่ปริมาณฟลักซ์แบบไม่มีความหนืด F_n ด้วยปริมาณฟลักซ์เชิงตัวเลข $\widetilde{F}_n$ ที่ผ่านในแต่ละด้านของเอลิเมนต์ สมการ (3.14) จะเปลี่ยนรูปเป็น

$$U^{m+1} - U^m = -\frac{\Delta t}{\Omega} \left[\sum_{n=1}^{3} \int \widetilde{F}_n \ d\Gamma \right] \tag{3.13}$$

ปริมาณฟลักซ์เชิงตัวเลข $\widetilde{F}_n$ ที่ผ่านด้านร่วมของเอลิเมนต์ คำนวณได้จากปริมาณฟลักซ์บนเอลิเมนต์ที่มีด้านของเอลิเมนต์ร่วมกัน (Roe, 1981) ดังแสดงในรูป 3.2 ได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\widetilde{F}_n = \frac{1}{2}(F_{nR} + F_{nL}) - \frac{1}{2}|A|(U_R - U_L) \tag{3.14}$$



รูป 3.2 การจัดเรียงของเอลิเมนต์ Lและเอลิเมนต์ R ที่มีด้าน δ ของเอลิเมนต์ร่วมกัน

เมื่อ F_{nL}, F_{nR} แทนปริมาณฟลักซ์ตามสมการ (3.10) ของเอลิเมนต์ทางด้านซ้ายและด้านขวา

U_L, U_R แทนค่าคุณสมบัติเชิงอนุรักษ์ตามสมการ (3.2a) ของเอลิเมนต์ทางด้านซ้ายและด้านขวา ตามลำดับ

A แทนเมตริกซ์แบบยาโคบี (Jacobian matrix) ของเวกเตอร์ฟลักซ์แบบไม่มีความหนืดเทียบกับตัวแปรเชิงอนุรักษ์บนด้านร่วมของเอลิเมนต์ (Gnoffo, 1986) ดังนี้

$$A = \frac{\partial F}{\partial u} = R \ \Lambda \ R^{-1} \tag{3.15}$$

จากสมการ (3.14) เทอมแรกทางด้านขวามือของสมการเป็นปริมาณฟลักซ์ที่มีการแลกเปลี่ยนบนด้านร่วมของเอลิเมนต์ทั้งสอง โดยใช้ค่าเฉลี่ยของปริมาณฟลักซ์บนเอลิเมนต์ทางด้านซ้ายและด้านขวา ส่วนเทอมที่สองทางด้านขวามือของสมการเป็นเทอมของการกระจายเทียม (Artificial dissipation term) อยู่ในรูปอนุพันธ์อันดับหนึ่งดังสมการ (3.15) ซึ่งจะทำให้โปรแกรมคอมพิวเตอร์มีเสถียรภาพ (Stability) ในการประมวลผลมากขึ้น โดยการหาเมตริกซ์ยาโคบีจะถูกอธิบายในหัวข้อถัดไป

พิจารณาปริมาณฟลักซ์ที่มีการแลกเปลี่ยนบนด้านหนึ่งของเอลิเมนต์ที่เวลา m+1 และมีความยาวด้านเท่ากับ δ จัดรูปตามสมการ (3.14) ได้ดังนี้

$$\int \widetilde{F}_n \ d\Gamma = -\frac{\delta}{2}\left[F_{nR}^{m+1} + F_{nL}^{m+1} - |A|^{m+1}(U_R^{m+1} - U_L^{m+1})\right] \tag{3.16}$$

นำสมการ (3.16) แทนในสมการ (3.13) จะได้

$$\Delta U = \frac{-\Delta t}{2\Omega}\sum_{n=1}^{3}\delta_n\left[F_{nR}^{m+1} + F_{nL}^{m+1} - |A|^{m+1}(U_R^{m+1} - U_L^{m+1})\right] \tag{3.17}$$

จากสมการ (3.17) มีตัวแปรไม่รู้ค่า 2 ตัวคือ U_L^{m+1} และ F_{nL}^{m+1} ซึ่งตัวแปรไม่รู้ค่าทั้งสอง ถูกประมาณโดย

$$U_L^{m+1} \approx U_L^m \tag{3.18a}$$

$$F_{nL}^{m+1} \approx F_{nL}^m + |A|^{m+1} \Delta U \tag{3.18b}$$

แทนสมการ (3.18) ลงในสมการ (3.17) และย้ายเทอมที่เกี่ยวข้องกับ ΔU ให้อยู่ทางด้านซ้ายมือของสมการดังนี้

$$\left[I + \frac{\Delta t}{2\Omega} \sum_{n=1}^{3} \delta_n |A|^{m+1} \right] \Delta U = \frac{-\Delta t}{2\Omega} \sum_{n=1}^{3} \delta_n \left[F_{nR}^{m+1} + F_{nL}^m - |A|^{m+1} (U_R^{m+1} - U_L^m) \right] \tag{3.19}$$

ประยุกต์วิธีทำซ้ำ (Iteration method) และแทนค่าคุณสมบัติต่างๆที่ช่วงเวลา m+1 ด้วยค่าคุณสมบัติที่ได้จากวิธีทำซ้ำครั้งหลังสุด แทนด้วยเครื่องหมาย * ดังนี้

$$\left[I + \frac{\Delta t}{2\Omega} \sum_{n=1}^{3} \delta_n |A|^* \right] \Delta U = \frac{-\Delta t}{2\Omega} \sum_{n=1}^{3} \delta_n \left[F_{nR}^* + F_{nL}^m - |A|^* (U_R^* - U_L^m) \right] \tag{3.20}$$

ทำการแก้สมการหาค่า ΔU เพื่อหาค่า U^{m+1} ต่อไป โดยในการตรวจสอบค่าความผิดพลาดในแต่ละรอบของวิธีทำซ้ำ คำนวณได้จากผลรวมของผลต่างของค่าคุณสมบัติเชิงอนุรักษ์ยกกำลังสองของทุกเอลิเมนต์ตลอดขอบเขตของปัญหาการไหล แสดงได้ดังนี้

$$\text{ค่าความผิดพลาด} = \sqrt{\sum_{n=1}^{nele} \left(U^{m+1} - U^m \right)^2} \tag{3.21}$$

จากนั้นทำการกระจายค่าคุณสมบัติของการไหลบนเอลิเมนต์ไปยังจุดต่อของเอลิเมนต์ โดยคำนวณได้จาก

$$U_i = \frac{U_{e1} + U_{e2} + \ldots + U_{en}}{n} \tag{3.22}$$

เมื่อจุดต่อ i มีเอลิเมนต์ล้อมรอบอยู่ทั้งหมด n เอลิเมนต์

3.3 การหาเมตริกซ์แบบยาโคบี (Jacobian matrix)

เมตริกซ์แบบยาโคบีสามารถเขียนอยู่ในรูปความสัมพันธ์ตามสมการ (3.15) ดังนั้นสมการ (3.1) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์แบบยาโคบี ได้เป็น

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F_x}{\partial U}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial U}+\frac{\partial U}{\partial y}=0 \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\left(\tilde{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\ U=0 \tag{3.24}$$

โดยปรกติการหารูปแบบของเมตริกซ์แบบยาโคบีนั้น จะอ้างอิงกับตัวแปรปฐมภูมิ (Primitive variables) และเมื่อพิจารณาสมการ (3.1) ในรูปตัวแปรปฐมภูมิ แสดงได้ดังนี้

$$\frac{\partial W}{\partial t}+(\bar{\tilde{A}}\cdot\vec{\nabla})\ \ W=0 \tag{3.25}$$

โดย W แทนเมตริกซ์ของตัวแปรปฐมภูมิและ $\bar{\tilde{A}}$ แทนเมตริกซ์แบบยาโคบีของปริมาณฟลักซ์ปฐมภูมิซึ่งอยู่ในรูป

$$W=\begin{Bmatrix}\rho\\ u\\ v\\ P\end{Bmatrix} \tag{3.26}$$

$$\bar{\tilde{A}}=\tilde{A}_x\cdot n_x+\tilde{A}_y\cdot n_y$$

$$=\begin{bmatrix} u\ n_x+v\ n_y & \rho\ n_x & \rho\ n_y & 0\\ 0 & u\ n_x+v\ n_y & 0 & \dfrac{n_x}{\rho}\\ 0 & 0 & u\ n_x+v\ n_y & \dfrac{n_y}{\rho}\\ 0 & \rho c^2\ n_x & \rho c^2\ n_y & u\ n_x+v\ n_y\end{bmatrix} \tag{3.27}$$

กำหนดให้ M เป็นเมตริกซ์สำหรับการแปลงค่า (Transformation matrix) ระหว่างตัวแปรเชิงอนุรักษ์กับตัวแปรปฐมภูมิ ซึ่งคำนวณได้จาก

$$M=\frac{\partial U}{\partial W}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 & 0 \\ v & 0 & \rho & 0 \\ \alpha & \rho u & \rho v & \dfrac{1}{\beta} \end{bmatrix} \tag{3.28a}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{-u}{\rho} & \dfrac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ \dfrac{-v}{\rho} & 0 & \dfrac{1}{\rho} & 0 \\ \beta\alpha & -\beta u & -\beta v & \beta \end{bmatrix} \tag{3.28b}$$

เมื่อ

$$\alpha = \frac{u^2 + v^2}{2} \tag{3.29a}$$

$$\beta = \gamma - 1 \tag{3.29b}$$

จากสมการ (3.24) ใช้ความสัมพันธ์ของเมตริกซ์สำหรับการแปลงค่าและจัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$M \frac{\partial W}{\partial t} + (\bar{A} \cdot \bar{\nabla})\ M\ W = 0 \tag{3.30}$$

นำเมตริกซ์ M^{-1} คูณทั้งสองข้างของสมการ (3.30) จะได้สมการที่อยู่ในรูปตัวแปรปฐมภูมิอีกหนึ่งสมการ คือ

$$\frac{\partial W}{\partial t} + M^{-1}(\bar{A} \cdot \bar{\nabla})\ M\ W = 0 \tag{3.31}$$

เปรียบเทียบสมการ (3.25) กับสมการ (3.31) พบว่า

$$\bar{\bar{A}} = M^{-1}\ \bar{A}\ M \tag{3.32}$$

เมตริกซ์แบบยาโคบี $\bar{\bar{A}}$ สามารถจัดให้อยู่ในรูปเมตริกซ์แบบเจาะจง (Eigenvector matrix) และเมตริกซ์ของค่าเจาะจง (Eigenvalue matrix) ได้ดังนี้

$$\bar{\bar{A}} = L\ \Lambda\ L^{-1} \tag{3.33}$$

เมื่อ L แทนเมตริกซ์แบบเจาะจง

L^{-1} แทนเมตริกซ์ผกผันแบบเจาะจง

Λ แทนเมตริกซ์ของค่าเจาะจงซึ่งเป็นเมตริกซ์เฉียง (Diagonal matrix) ประกอบด้วยค่าเจาะจง λ (Eigenvalue)ในแนวทแยงของเมตริกซ์

โดยเมตริกซ์ของค่าเจาะจง คำนวณได้จากความสัมพันธ์ดังนี้

$$\det \left|\lambda\ I - \bar{\bar{A}}\right| = 0 \tag{3.34}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda - u\ n_x + v\ n_y & \rho\ n_x & \rho\ n_y & 0 \\ 0 & \lambda - u\ n_x + v\ n_y & 0 & \dfrac{n_x}{\rho} \\ 0 & 0 & \lambda - u\ n_x + v\ n_y & \dfrac{n_y}{\rho} \\ 0 & \rho c^2\ n_x & \rho c^2\ n_y & \lambda - u\ n_x + v\ n_y \end{bmatrix} = 0 \tag{3.35}$$

จากสมการ (3.34) และสมการ (3.35) จะได้

$$(\lambda - U)^2[(\lambda - U)^2 - c^2] = 0 \tag{3.36}$$

เมื่อ $U = U_n = u\ n_x + v\ n_y$

สมการ (3.36) จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ λ มีค่าดังแสดงด้วยเมตริกซ์ Λ

$$\Lambda = \begin{bmatrix} U & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U+c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U-c \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

ส่วนเมตริกซ์ L^{-1} ซึ่งเป็นเมตริกซ์ผกผันแบบเจาะจง สามารถคำนวณได้จากการนำค่าบนแถวของเมตริกซ์คูณกับเมตริกซ์แบบยาโคบีในแต่ละค่าเจาะจง ดังนี้

พิจารณาแถวที่ 1 ของเมตริกซ์ผกผันแบบเจาะจงกับค่าเจาะจงที่ 1 ซึ่งก็คือ U

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\bar{A}} \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

ได้สมการทั้งหมด 4 สมการดังนี้

$$l_{11}U = l_{11}U \tag{3.39a}$$

$$l_{11}\rho\ n_x + l_{12}U + l_{14}\rho c^2\ n_x = l_{12}U \tag{3.39b}$$

$$l_{11}\rho\ n_y + l_{13}U + l_{14}\rho c^2\ n_y = l_{13}U \tag{3.39c}$$

$$\frac{l_{12}\ n_x}{\rho} + \frac{l_{13}\ n_y}{\rho} + l_{14}U = l_{14}U \tag{3.39d}$$

จากสมการ (3.39b)-(3.39c) จะได้ว่า $l_{11} = -c^2 l_{14}$ และสมการ (3.39a) แสดงว่า l_{11} เป็นค่าใดๆก็ได้ในที่นี้กำหนดให้เท่ากับ $l_{11} = 1$ และสมการ (3.39d) ได้ว่า $l_{12} = -\dfrac{n_y}{n_x} l_{13}$ ซึ่งในที่นี้กำหนดให้ $l_{12} = 0$ จะได้เมตริกซ์ในแถวที่ 1 ดังนี้

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

พิจารณาแถวที่ 2 ของเมตริกซ์ผกผันแบบเจาะจงกับค่าเจาะจงที่ 2 ซึ่งก็คือ U เหมือนกับแถวที่ 1 แต่กำหนดให้ $l_{21} = 0$ และ $l_{22} = \rho$ จะได้เมตริกซ์ในแถวที่ 2 ดังนี้

$$\begin{bmatrix} l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\rho\, n_x & \rho\, n_y & 0 \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

พิจารณาแถวที่ 3 ของเมตริกซ์ผกผันแบบเจาะจงกับค่าเจาะจงที่ 3 ซึ่งก็คือ $U+c$ ได้สมการ 4 สมการ ดังนี้

$$l_{31}U = l_{31}(U+c) \tag{3.42a}$$

$$l_{31}\rho\, n_x + l_{32}U + l_{34}\rho c^2\, n_x = l_{32}(U+c) \tag{3.42b}$$

$$l_{31}\rho\, n_y + l_{33}U + l_{34}\rho c^2\, n_y = l_{33}(U+c) \tag{3.42c}$$

$$\frac{l_{32}\, n_x}{\rho} + \frac{l_{33}\, n_y}{\rho} + l_{34}U = l_{34}(U+c) \tag{3.42d}$$

จากสมการ (3.42a) จะได้ว่า $l_{31} = 0$ สมการ (3.42b) จะได้ $l_{32} = l_{34}\rho c\, n_x$ และสมการ (3.42c) จะได้ $l_{33} = l_{34}\rho c\, n_y$ ในที่นี้กำหนดให้ $l_{34} = 1$ จะได้เมตริกซ์ในแถวที่ 3 ดังนี้

$$\begin{bmatrix} l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \rho c\, n_x & \rho c\, n_y & 1 \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

พิจารณาแถวที่ 4 ของเมตริกซ์ผกผันแบบเจาะจงกับค่าเจาะจงที่ 4 ซึ่งก็คือ $U-c$ ได้สมการ 4 สมการดังนี้

$$l_{41}U = l_{41}(U-c) \tag{3.44a}$$

$$l_{41}\rho\, n_x + l_{42}U + l_{44}\rho c^2\, n_x = l_{42}(U-c) \tag{3.44b}$$

$$l_{41}\rho\, n_y + l_{43}U + l_{44}\rho c^2\, n_y = l_{43}(U-c) \tag{3.44c}$$

$$\frac{l_{42}\, n_x}{\rho} + \frac{l_{43}\, n_y}{\rho} + l_{44}U = l_{44}(U-c) \tag{3.44d}$$

จากสมการ (3.44a) จะได้ว่า $l_{41} = 0$ สมการ (3.44b) จะได้ $l_{42} = l_{44}\rho c\, n_x$ และสมการ (3.44c) จะได้ $l_{43} = l_{44}\rho c\, n_y$ ในที่นี้กำหนดให้ $l_{44} = 1$ จะได้เมตริกซ์ในแถวที่ 4 ดังนี้

เมื่อนำสมการ (3.40), (3.41), (3.43) และ (3.45) มารวมกัน จะได้เมตริกซ์ L^{-1} และเมตริกซ์ L แสดงได้ดังนี้

$$L^{-1}=\begin{bmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\rho\ n_y & \rho\ n_x & 0 \\ 0 & \rho c\ n_x & \rho c\ n_y & 1 \\ 0 & -\rho c\ n_x & -\rho c\ n_y & 1 \end{bmatrix} \tag{3.46a}$$

$$L=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{c^2} & 0 & \dfrac{1}{2c^2} & \dfrac{1}{2c^2} \\ 0 & -\dfrac{n_y}{\rho} & \dfrac{n_x}{2\rho c} & -\dfrac{n_x}{2\rho c} \\ 0 & \dfrac{n_x}{\rho} & \dfrac{n_y}{2\rho c} & -\dfrac{n_y}{2\rho c} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{3.46b}$$

นำสมการ (3.33) แทนลงในสมการ (3.32) และได้เมตริกซ์แบบยาโคบีดังนี้

$$\begin{aligned}\tilde{A}&=M\ L\ \Lambda\ L^{-1}M^{-1}\\ &=R\ \Lambda\ R^{-1}\end{aligned} \tag{3.47}$$

เมื่อ $R=M\ L$ และ $R^{-1}=L^{-1}M^{-1}$ แสดงได้ดังนี้

$$R=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{c^2} & 0 & \dfrac{1}{2c^2} & \dfrac{1}{2c^2} \\ -\dfrac{u}{c^2} & -n_y & \dfrac{u+cn_x}{2c^2} & \dfrac{u-cn_x}{2c^2} \\ -\dfrac{v}{c^2} & n_x & \dfrac{v+cn_y}{2c^2} & \dfrac{v-cn_y}{2c^2} \\ -\dfrac{\alpha}{c^2} & V & \dfrac{\alpha+Uc}{2c^2}+\dfrac{1}{2\beta} & \dfrac{\alpha-Uc}{2c^2}+\dfrac{1}{2\beta} \end{bmatrix} \tag{3.48a}$$

$$R^{-1}=\begin{bmatrix} \beta\alpha-c^2 & -\beta u & -\beta v & \beta \\ V & -n_y & n_x & 0 \\ \beta\alpha-Uc & cn_x-\beta u & cn_y-\beta v & \beta \\ \beta\alpha+Uc & -cn_x-\beta u & -cn_y-\beta v & \beta \end{bmatrix} \tag{3.48b}$$

เมื่อ

$$U = U_n = u\ n_x + v\ n_y \tag{3.49a}$$

$$V = V_t = -u\ n_y + v\ n_x \tag{3.49b}$$

$$\alpha = \frac{u^2 + v^2}{2} \tag{3.49c}$$

$$\beta = \gamma - 1 \tag{3.49d}$$

$$c^2 = \frac{\gamma P}{\rho} \tag{3.49e}$$

$$P = \frac{\rho(\gamma - 1)}{\gamma}[H - \alpha] \tag{3.49f}$$

และค่าเอนทาลปีรวม (H) คำนวณได้จาก

$$H = \gamma\varepsilon - \frac{(\gamma - 1)}{2}(u^2 + v^2) \tag{3.49g}$$

สำหรับค่าคุณสมบัติของการไหลบนด้านร่วมของเอลิเมนต์ที่พิจารณา ซึ่งนำไปแทนลงในเมตริกซ์ของสมการ (3.48) นั้น ถูกประมาณค่าด้วยวิธีการหาค่าเฉลี่ยของโรย์ (Roe, 1981) คำนวณได้โดย

$$\hat{\rho} = \sqrt{\rho_L\ \rho_R} \tag{3.50a}$$

$$\hat{u} = \frac{\sqrt{\rho_L}\ u_L + \sqrt{\rho_R}\ u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \tag{3.50b}$$

$$\hat{v} = \frac{\sqrt{\rho_L}\ v_L + \sqrt{\rho_R}\ v_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \tag{3.50c}$$

$$\hat{H} = \frac{\sqrt{\rho_L}\ H_L + \sqrt{\rho_R}\ H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \tag{3.50d}$$

โดยที่ค่า $\hat{U}, \hat{V}$ และ $\hat{c}$ ถูกคำนวณโดยใช้ค่าคุณสมบัติตามสมการ (3.50) ได้ดังนี้

$$\hat{U} = \hat{u}\ n_x + \hat{v}\ n_y \tag{3.51a}$$

$$\hat{V} = -\hat{u}\ n_y + \hat{v}\ n_x \tag{3.51b}$$

$$\hat{P} = \frac{\hat{\rho}(\gamma - 1)}{\gamma}[\hat{H} - \frac{1}{2}(\hat{u}^2 + \hat{v}^2)] \tag{3.51c}$$

$$c^2 = \frac{\gamma\hat{P}}{\hat{\rho}} \tag{3.51d}$$