บทที่ 2

ทฤษฎีพื้นฐานของการไหล

ก่อนที่จะศึกษารายละเอียดการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการแก้ปัญหาการไหลนั้น จำเป็นที่จะต้องทำความเข้าใจและศึกษาสมการพื้นฐานเกี่ยวกับการไหล (Anderson, 1995; Hirsch, 1988) อันประกอบไปด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับ

1 . การอนุรักษ์มวล (Conservation of mass) 1 สมการ

2 . การอนุรักษ์โมเมนตัม (Conservation of momentum) 3 สมการ

3 . การอนุรักษ์พลังงาน (Conservation of energy) 1 สมการ

รวมสมการทั้งหมด 5 สมการสำหรับปัญหาโดยทั่วไปใน 3 มิติ โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล

พิจารณาการไหลของมวลบนผิวหน้าต่างๆของปริมาตรอันหนึ่งในระบบแกนพิกัดฉาก (Cartesian coordinate system) ดังแสดงในรูป 2.1 เมื่อความเร็วและความหนาแน่นเป็นฟังก์ชันของพิกัดในแนวแกน x, y, z และเวลา t โดยมีความยาวของด้านในแนวแกน x, y และ z เท่ากับ dx, dy และ dz ตามลำดับ ผลรวมของการไหลออกของมวลในแต่ละแนวแกนมีค่าดังนี้

ผลรวมของการไหลออกของมวลในแนวแกน x

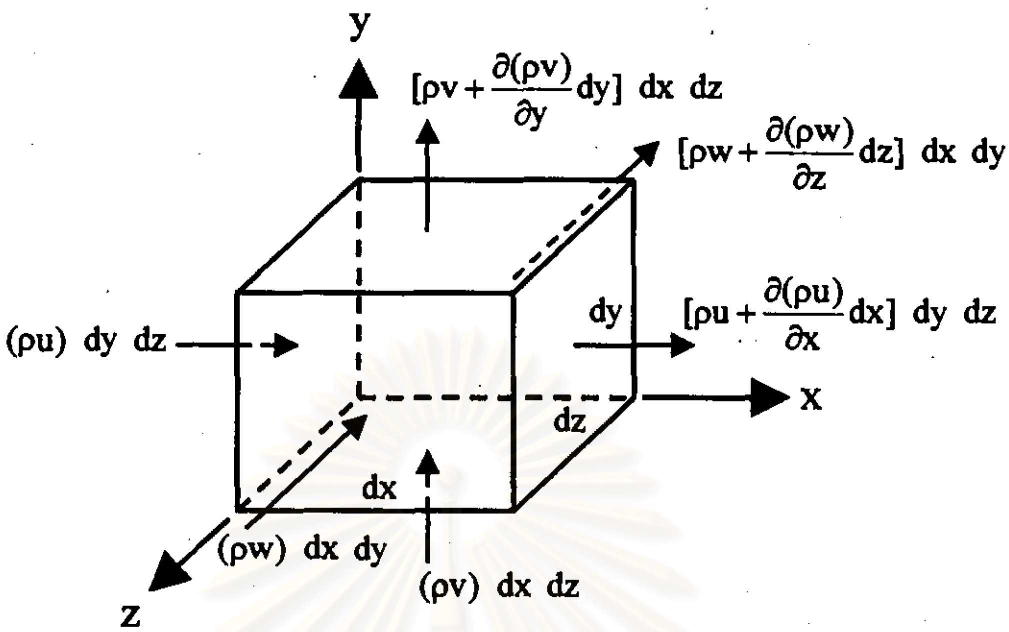
$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx\right] dy\ dz - (\rho u)\ dy\ dz = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx\ dy\ dz \qquad (2.1a)$$

ผลรวมของการไหลออกของมวลในแนวแกน y

$$\left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy\right] dx\ dz - (\rho v)\ dx\ dz = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx\ dy\ dz \qquad (2.1b)$$

ผลรวมของการไหลออกของมวลในแนวแกน z

$$\left[\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz\right] dx\ dy - (\rho w)\ dx\ dy = \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx\ dy\ dz \qquad (2.1c)$$



รูป 2.1 ความสมดุลของมวลบนเอลิเมนต์การไหลในสามมิติ

ดังนั้นผลรวมของการไหลออกของมวลผ่านปริมาตรนี้ทั้งหมดมีค่าเท่ากับ

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right](dx\ dy\ dz) \tag{2.2}$$

เมื่อมวลของไหลทั้งหมดภายในปริมาตรนี้เท่ากับ $\rho(dx\ dy\ dz)$ ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงของมวลภายในปริมาตรเทียบกับเวลามีค่าเท่ากับ $\frac{\partial\rho}{\partial t}(dx\ dy\ dz)$

จากหลักของการอนุรักษ์มวล จะได้ว่าผลรวมของการไหลออกของมวลผ่านปริมาตรทั้งหมดมีค่าเท่ากับอัตราการลดลงของมวลภายในปริมาตรเทียบกับเวลา โดยการลดลงของมวลแสดงด้วยเครื่องหมายลบ จะได้

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right](dx\ dy\ dz)=-\frac{\partial\rho}{\partial t}(dx\ dy\ dz) \tag{2.3}$$

นำ (dx dy dz) หารทั้งสองข้างของสมการและจัดรูปของสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]=0 \tag{2.4}$$

ในสมการ (2.4) เทอมในวงเล็บมีค่าเท่ากับ $\vec{\nabla}\cdot\rho\vec{V}$ ทำให้สมการ (2.4) เปลี่ยนรูปเป็น

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V})=0 \tag{2.5}$$

สมการ (2.5) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล (Continuity equation) โดยมี

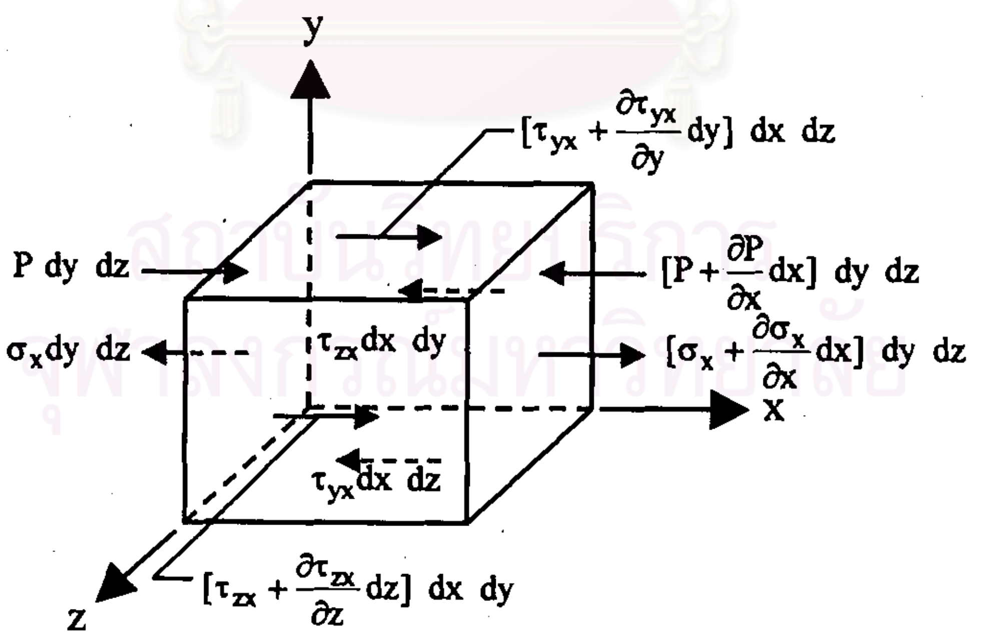
$$\vec{V}=u\ \hat{i}+v\ \hat{j}+w\ \hat{k} \tag{2.6}$$

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \tag{2.7}$$

2.2 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม

พิจารณาปริมาตรเล็กๆอันหนึ่งซึ่งเคลื่อนตัวไปตามการไหลและมีแรงกระทำบนผิวหน้าต่างๆของปริมาตร จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน $\vec{F}=m\ \vec{a}$ จะได้ว่าผลรวมของแรงที่กระทำบนผิวหน้าต่างๆของปริมาตรมีค่าเท่ากับผลคูณของมวลกับความเร่งของปริมาตรนั้น ซึ่งเป็นความสัมพันธ์แบบเวกเตอร์ สามารถแบ่งได้เป็นความสัมพันธ์แบบสเกลาร์ตามแนวแกน x, y และ z โดยตอนแรกจะพิจารณาเพียงส่วนประกอบในแนวแกน x เพียงแกนเดียวก่อน ดังแสดงในรูป 2.2 ได้ความสัมพันธ์ของแรงตามกฎข้อที่ 2 ของนิวตันเป็น

$$F_x=m\ a_x \tag{2.8}$$



รูป 2.2 ความสมดุลของแรงบนเอลิเมนต์การไหลในแนวแกน x

แรงที่กระทำบนปริมาตรสามารถแบ่งออกเป็นประเภทใหญ่ๆได้ 2 ประเภทคือ

2.2.1 แรงเนื่องจากน้ำหนัก ได้แก่ แรงโน้มถ่วง

2.2.2 แรงกระทำที่ผิว ได้แก่ แรงเนื่องจากการกระจายของความดันและแรงเนื่องจากการกระจายของความเค้น

เมื่อกำหนดให้ $\bar{f}$ เป็นแรงเนื่องจากน้ำหนักต่อหนึ่งหน่วยมวล โดย f_x เป็นส่วนประกอบแบบสเกลาร์ในแนวแกน x ดังนั้นแรงเนื่องจากน้ำหนักที่กระทำบนปริมาตรในแนวแกน x มีค่าเท่ากับ $\rho f_x(dx\ dy\ dz)$

จากรูป 2.2 ผลรวมของแรงกระทำที่ผิวบนปริมาตรในแนวแกน x มีค่าเท่ากับ

$$\left[P-(P+\frac{\partial P}{\partial x}dx)\right] dy\ dz+\left[(\sigma_x+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx)-\sigma_x\right] dy\ dz$$
$$+\left[(\tau_{yx}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy)-\tau_{yx}\right] dx\ dz+\left[(\tau_{zx}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz)-\tau_{zx}\right] dx\ dy \qquad (2.9)$$

ผลรวมของแรงกระทำทั้งหมดบนปริมาตรในแนวแกน x มีค่าเท่ากับ

$$F_x=\left[-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right](dx\ dy\ dz)+\rho f_x(dx\ dy\ dz) \qquad (2.10)$$

เมื่อมวลของไหลทั้งหมดภายในปริมาตรนี้เท่ากับ $\rho(dx\ dy\ dz)$ ความเร่งในแนวแกน x มีค่าเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วในแนวแกน x เทียบกับเวลา

$$a=\frac{Du}{Dt} \qquad (2.11)$$

แทนค่าสมการ (2.9) และ (2.10) ลงในสมการ (2.8) และนำ $(dx\ dy\ dz)$ หารทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\rho\frac{Du}{Dt}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+\rho f_x \qquad (2.12)$$

จากความสัมพันธ์

$$\rho\frac{Du}{Dt}=\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho\bar{V}\cdot\bar{\nabla}u \qquad (2.13)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}=\rho\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{2.14}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\rho u\vec{V})=u\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V})+(\rho\vec{V})\cdot\vec{\nabla}u \tag{2.15}$$

แทนสมการ (2.13) และ สมการ (2.14) ลงในสมการ (2.12)

$$\begin{aligned}\rho\frac{Du}{Dt}&=\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}-u\frac{\partial \rho}{\partial t}-u\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V})+\vec{\nabla}\cdot(\rho u\vec{V})\\ &=\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}-u\left[\frac{\partial \rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V})\right]+\vec{\nabla}\cdot(\rho u\vec{V})\end{aligned} \tag{2.16}$$

เทอมในวงเล็บเท่ากับสมการ (2.5) ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0 ดังนั้นสมการ (2.16) จะลดรูปเป็น

$$\rho\frac{Du}{Dt}=\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho u\vec{V}) \tag{2.17}$$

แทนสมการ (2.17) ลงในสมการ (2.12) จะได้สมการในรูปแบบอนุรักษ์ดังนี้

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho u\vec{V})=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+\rho f_x \tag{2.18a}$$

สำหรับส่วนประกอบในแนวแกน y และ z กระทำคล้ายๆกัน จะได้

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho v\vec{V})=-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+\rho f_y \tag{2.18b}$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho w\vec{V})=-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\rho f_z \tag{2.18c}$$

สมการ (2.18) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม (Navier-Stokes equations) ในรูปแบบอนุรักษ์ (Conservation form) โดยถือว่าของไหลมีคุณสมบัติเป็นของไหลแบบนิวโทเนียน (Newtonian fluid) กล่าวคือสามารถนำกฎเกณฑ์การเสียดทานของสโตกส์ (Stokes's law) ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเครียดภายในของไหลนั้นมาประยุกต์ใช้ได้ ดังนี้

$$\sigma_x=-\frac{2}{3}\mu\vec{\nabla}\cdot\vec{V}+2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.19a}$$

$$\sigma_y=-\frac{2}{3}\mu\vec{\nabla}\cdot\vec{V}+2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.19b}$$

$$\sigma_z=-\frac{2}{3}\mu\vec{\nabla}\cdot\vec{V}+2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \tag{2.19c}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right] \tag{2.19d}$$

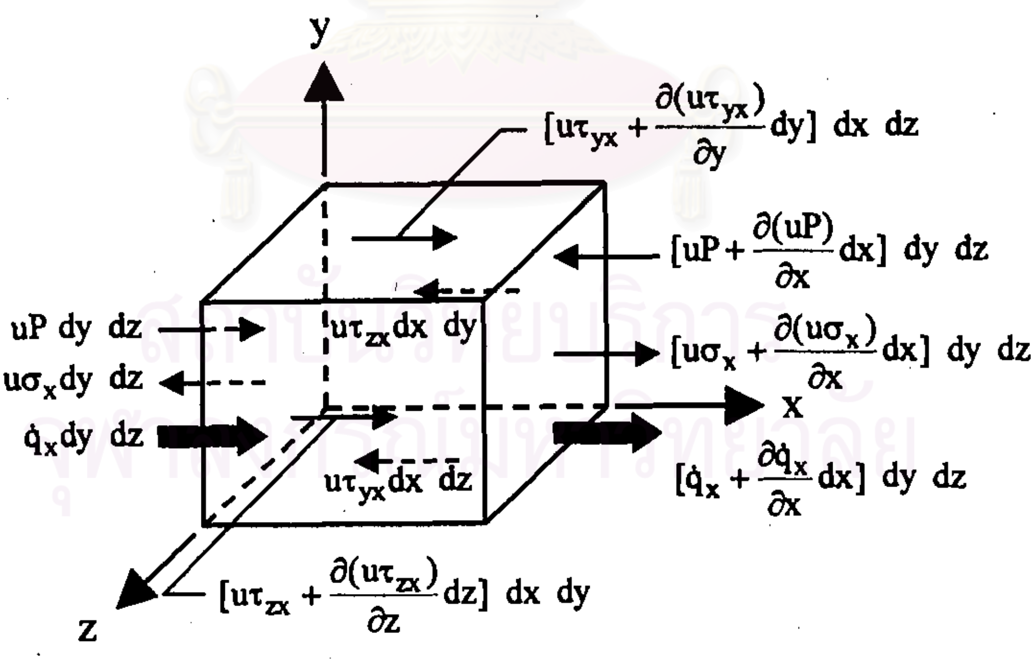
$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right] \tag{2.19e}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right] \tag{2.19f}$$

2.3 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงาน

พิจารณาปริมาตรเล็กๆอันหนึ่งซึ่งเคลื่อนตัวไปตามการไหล จากกฎข้อที่ 1 ของเทอร์โมไดนามิกส์ กล่าวไว้ว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานภายในของไหลมีค่าเท่ากับผลรวมของปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่เข้าสู่ของไหลบวกกับอัตราของงานที่กระทำบนของไหลโดยแรงเนื่องจากน้ำหนักและแรงกระทำที่ผิว

สำหรับแรงกระทำที่ผิวอันประกอบไปด้วย แรงเนื่องจากการกระจายของความดันและแรงเนื่องจากการกระจายของความเค้น ในตอนแรกจะพิจารณาเพียงส่วนประกอบของแรงในแนวแกน x ดังแสดงในรูป 2.3



รูป 2.3 ความสมดุลของพลังงานบนเอลิเมนต์การไหลในแนวแกน x

อัตราของงานที่กระทำบนของไหลมีค่าเท่ากับผลคูณเชิงสเกลาร์ระหว่างแรงที่กระทำบนของไหลและส่วนประกอบของความเร็วในทิศทางตามแนวแรง ดังนั้นอัตราของงานที่กระทำโดยแรงเนื่องจากน้ำหนักบนปริมาตรของไหลมีค่าเท่ากับ $\rho\vec{f}\cdot\vec{V}(dx\ dy\ dz)$

ผลรวมอัตราของงานที่กระทำโดยแรงเนื่องจากการกระจายของความดันในแนวแกน x เท่ากับ

$$\left[uP-(uP+\frac{\partial(uP)}{\partial x}dx)\right]\ dy\ dz=-\frac{\partial(uP)}{\partial x}(dx\ dy\ dz) \qquad (2.20)$$

ผลรวมอัตราของงานที่กระทำโดยความเค้นเฉือนบนผิวด้านบนและผิวด้านล่างในแนวแกน x มีค่าเท่ากับ

$$\left[(u\tau_{yx}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}dy)-u\tau_{yx}\right]\ dx\ dz=\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}(dx\ dy\ dz) \qquad (2.21)$$

เมื่อพิจารณาแรงกระทำที่ผิวทุกแรงในรูป 2.3 จะได้ผลรวมอัตราของงานที่กระทำโดยแรงเหล่านี้บนปริมาตรของไหล เท่ากับ

$$\left[-\frac{\partial(uP)}{\partial x}+\frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z}\right](dx\ dy\ dz) \qquad (2.22)$$

สมการ (2.22) พิจารณาเพียงแรงกระทำที่ผิวในแนวแกน x เพียงแกนเดียว เมื่อนำแรงกระทำที่ผิวในแนวแกน y และ z มาพิจารณารวมเข้าไปด้วย รวมไปถึงแรงเนื่องจากน้ำหนัก จะทำให้อัตราของงานที่กระทำบนปริมาตรของไหลเคลื่อนที่มีค่าเท่ากับ

$$\left[-\frac{\partial(uP)}{\partial x}-\frac{\partial(vP)}{\partial y}-\frac{\partial(wP)}{\partial z}+\frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z}+\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial y}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z}+\frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x}+\frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y}+\frac{\partial(w\sigma_z)}{\partial z}\right](dx\ dy\ dz)+\rho\vec{f}\cdot\vec{V}\ (dx\ dy\ dz) \qquad (2.23)$$

ผลรวมปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่เข้าสู่ปริมาตรของไหลเกิดจากปริมาณความร้อนเนื่องจากการสะสมความร้อนภายในปริมาตรของไหล เช่น การดูดซึม การเปล่งรังสีของการแผ่รังสีความร้อน และ การถ่ายเทความร้อนผ่านผิวของปริมาตรของไหลเนื่องจากความแตกต่างของอุณหภมิ เช่น การนำความร้อน เมื่อ $\dot{q}$ เป็นอัตราการสะสมความร้อนในปริมาตรของไหลต่อหนึ่งหน่วยมวล จะได้ปริมาณสะสมความร้อนภายในปริมาตรของไหล เท่ากับ $\rho\dot{q}(dx\ dy\ dz)$

เมื่อกำหนดให้ $\dot{q}_x$ เป็นปริมาณความร้อนในแนวแกน x ต่อหนึ่งหน่วยเวลาต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ตั้งฉากกับทิศทางของความร้อน การถ่ายเทความร้อนเนื่องจากการนำความร้อนในแนวแกน x ผ่านปริมาตรของไหลเท่ากับ

$$\left[\dot{q}_x-\left(\dot{q}_x+\frac{\partial\dot{q}_x}{\partial x}dx\right)\right]\ dy\ dz=-\frac{\partial\dot{q}_x}{\partial x}(dx\ dy\ dz) \tag{2.24}$$

พิจารณาปริมาณความร้อนในแนวแกน y และ z ในทำนองเดียวกัน จากนั้นนำปริมาณความร้อนต่างๆมารวมกัน จะได้ผลรวมปริมาณฟลักซ์ความร้อนเข้าสู่ปริมาตรของไหลเท่ากับ

$$\left[\rho\dot{q}-\left(\frac{\partial\dot{q}_x}{\partial x}+\frac{\partial\dot{q}_y}{\partial y}+\frac{\partial\dot{q}_z}{\partial z}\right)\right](dx\ dy\ dz) \tag{2.25}$$

โดยปริมาณฟลักซ์ความร้อนเนื่องจากการนำความร้อนเป็นไปตามกฎของฟูริเยร์ (Fourier's law) กล่าวคือ

$$\dot{q}_x=-k\frac{\partial T}{\partial x} \tag{2.26a}$$

$$\dot{q}_y=-k\frac{\partial T}{\partial y} \tag{2.26b}$$

$$\dot{q}_z=-k\frac{\partial T}{\partial z} \tag{2.26c}$$

สมการ (2.25) เปลี่ยนรูปเป็น

$$\left[\rho\dot{q}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right](dx\ dy\ dz) \tag{2.27}$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานภายในปริมาตรของไหล ประกอบด้วยการเปลี่ยนแปลงของพลังงานภายใน (Internal energy) และการเปลี่ยนแปลงพลังงานจลย์ (Kinetic energy) ซึ่งผลรวมของพลังงานทั้งสองเรียกว่า พลังงานรวม (Total energy) อัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานรวมต่อหนึ่งหน่วยมวล เท่ากับ

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{V^2}{2}\right)(dx\ dy\ dz) \tag{2.28}$$

เมื่อ $V^2=u^2+v^2+w^2$

ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงานจะได้จากความสัมพันธ์ในสมการ (2.22), (2.27) และ (2.28) และนำ (dx dy dz) หารทั้งสองข้างของสมการจะได้

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{V^2}{2}\right)=\rho\dot{q}+\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial T}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial T}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(k\frac{\partial T}{\partial z})-\frac{\partial(uP)}{\partial x}-\frac{\partial(vP)}{\partial y}-\frac{\partial(wP)}{\partial z}$$
$$+\frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z}+\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial y}+\frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z}$$
$$+\frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x}+\frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y}+\frac{\partial(w\sigma_z)}{\partial z}+\rho\vec{f}\cdot\vec{V} \tag{2.29}$$

สมการ (2.29) อยู่ในรูปแบบไม่อนุรักษ์ (Nonconservation form) ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบอนุรักษ์ ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(e+\frac{V^2}{2})\right]+\vec{\nabla}\left[\rho(e+\frac{V^2}{2})\vec{V}\right]=$$
$$\rho\dot{q}+\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial T}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial T}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(k\frac{\partial T}{\partial z})-\frac{\partial(uP)}{\partial x}-\frac{\partial(vP)}{\partial y}-\frac{\partial(wP)}{\partial z}$$
$$+\frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z}+\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial y}+\frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z}$$
$$+\frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x}+\frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y}+\frac{\partial(w\sigma_z)}{\partial z}+\rho\vec{f}\cdot\vec{V} \tag{2.30}$$

สมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับการอนุรักษ์มวล (2.5) การอนุรักษ์โมเมนตัม (2.18) และการอนุรักษ์พลังงาน (2.30) ทั้ง 5 สมการสามารถจัดให้อยู่ในรูปอย่างง่าย ได้ดังนี้

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}=J \tag{2.31}$$

เมื่อ

$$U=\begin{Bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\\ \rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\end{Bmatrix} \tag{2.32a}$$

$$F=\begin{Bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+P-\sigma_x\\ \rho uv-\tau_{xy}\\ \rho uw-\tau_{xz}\\ \rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)u+Pu-k\frac{\partial T}{\partial x}-u\sigma_x-v\tau_{xy}-w\tau_{xz}\end{Bmatrix} \tag{2.32b}$$

$$G=\begin{Bmatrix}\rho v\\ \rho uv+\tau_{yx}\\ \rho v^2+P-\sigma_{xy}\\ \rho vw-\tau_{yz}\\ \rho\left(e+\dfrac{V^2}{2}\right)v+Pv-k\dfrac{\partial T}{\partial y}-u\tau_{yx}-v\sigma_y-w\tau_{yz}\end{Bmatrix} \tag{2.32c}$$

$$H=\begin{Bmatrix}\rho w\\ \rho uw-\tau_{yx}\\ \rho vw-\tau_{zy}\\ \rho w^2+P-\sigma_z\\ \rho\left(e+\dfrac{V^2}{2}\right)w+Pw-k\dfrac{\partial T}{\partial z}-u\tau_{zx}-v\tau_{zy}-w\sigma_z\end{Bmatrix} \tag{2.32d}$$

$$J=\begin{Bmatrix}0\\ \rho f_x\\ \rho f_y\\ \rho f_z\\ \rho(uf_x+vf_y+wf_z)+p\dot{q}\end{Bmatrix} \tag{2.32e}$$

ในวิทยานิพนธ์นี้ พิจารณาการไหลแบบไม่มีความหนืดแต่อัดตัวได้ใน 2 มิติ และไม่นำแรงเนื่องจากน้ำหนักและอัตราการสะสมความร้อนภายในปริมาตรของไหลมาเกี่ยวข้อง ดังนั้น สมการ (2.31) จะถูกลดรูป เป็นดังนี้

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}=0 \tag{2.33}$$

เมื่อ

$$U=\begin{Bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho\varepsilon\end{Bmatrix} \tag{2.34a}$$

$$F = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ \rho u\varepsilon + Pu \end{Bmatrix} \tag{2.34b}$$

$$G = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ \rho v\varepsilon + Pv \end{Bmatrix} \tag{2.34c}$$

โดย ε แทนพลังงานรวม (Total energy) ซึ่งเท่ากับ

$$\varepsilon = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \tag{2.35}$$

สำหรับการไหลแบบไม่มีความหนืดแต่อัดตัวได้ใน 2 มิติ มีสมการเชิงอนุพันธ์ทั้งหมด 4 สมการ แต่มีตัวแปรไม่รู้ค่า 6 ตัว คือ ρ , u, v, e, P และ T จึงต้องการสมการช่วย 2 สมการคือ

1. สมการของสถานะ โดยพิจารณาให้ของไหลเป็นแก๊สสมบูรณ์แบบ (Perfect gas) ได้ความสัมพันธ์ระหว่างความดันกับความหนาแน่นและอุณหภูมิคือ

$$P = \rho RT \tag{2.36}$$

เมื่อ R เป็นค่าคงตัวจำเพาะของแก๊ส (specific gas constant)

2. สมการของพลังงานภายใน โดยใช้ความสัมพันธ์ทางเทอร์โมไดนามิก คือ

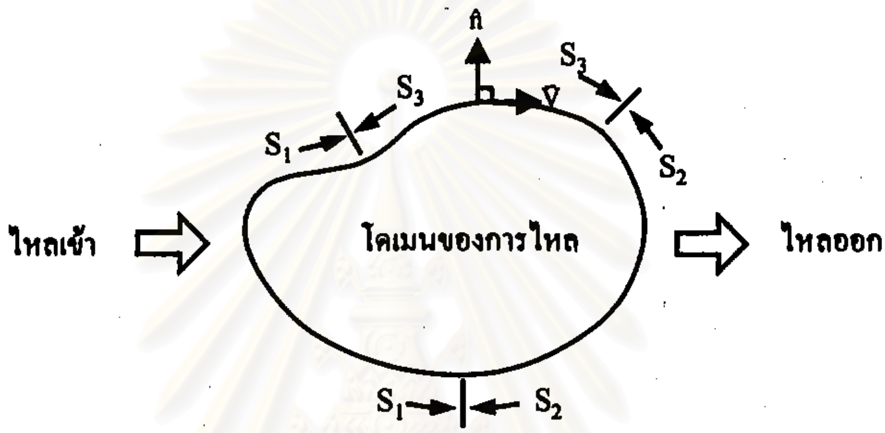
$$e = c_v T \tag{2.37}$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \tag{2.38}$$

เมื่อ γ เป็นอัตราส่วนระหว่างค่าความร้อนจำเพาะในขณะที่ความดันคงตัวและที่ปริมาตรคงตัว

นอกจากความสัมพันธ์ต่างๆเหล่านี้แล้ว การแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ (2.33) จำเป็นต้องประกอบด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) และเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) ที่เหมาะสมสำหรับปัญหาการไหลด้วย ลักษณะของเงื่อนไขขอบเขตจะเปลี่ยนแปลงไปขึ้นอยู่กับค่ามัค (Mach number) ซึ่งเปลี่ยนแปลงไปตามลักษณะและปรากฏการณ์ของการไหล ในทาง

ปฏิบัติโดยปรกติแล้วจะไม่ทราบลักษณะการไหลล่วงหน้าว่าจะเป็นเช่นใดก่อนทำการคำนวณ ดังนั้นจึงเป็นการยากในการที่จะระบุเงื่อนไขขอบเขตที่แน่ชัดลงไปสำหรับปัญหานั้นๆ ดังนั้นการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตสำหรับการคำนวณในทางปฏิบัติจะขึ้นอยู่กับวิจารณญาณของผู้ทำการคำนวณประกอบกับประสบการณ์จากการแก้ปัญหาที่คล้ายๆกันที่เคยทำมาก่อน อย่างไรก็ตามยังมีปัญหาการไหลอีกส่วนหนึ่งที่ใช้ทางด้านการศึกษาซึ่งสามารถทราบเงื่อนไขขอบเขตที่เป็นจริงได้ก่อนทำการคำนวณ เงื่อนไขขอบเขตโดยทั่วไปสำหรับปัญหาการไหลแบบไม่มีความหนืดแต่อัดตัวได้ ประกอบด้วยรูปแบบที่ต่างๆกัน ดังแสดงในรูป 2.4 ดังต่อไปนี้



รูป 2.4 โดเมนและเงื่อนไขขอบเขตของการไหลแบบไม่มีความหนืดแต่อัดตัวได้

1. การกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นตลอดขอบ S_1 สำหรับการไหลเข้าด้วยความเร็วสูง

$$\rho = \rho_0$$
$$u = u_0$$
$$v = v_0$$
$$\varepsilon = \varepsilon_0$$

2. การไม่กำหนดเงื่อนไขใดๆ ตลอดขอบ S_3 สำหรับการไหลออก

3. การบังคับให้ทิศความเร็ว $\bar{V}$ ของการไหลนั้นขนานไปกับขอบ S_2 ซึ่งเป็นผนัง โดยกำหนดให้ $\bar{V} \cdot \hat{n} = 0$ เมื่อ $\hat{n}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับขอบนั้น